CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

“CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO Y DE ESTUDIANTES QUE POSEE EL PROFESOR DE BACHILLERATO EN EL CONTEXTO DEL CONCEPTO SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES”

Tesis que presenta

Claudia Soto López

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

en la especialidad de Matemática Educativa

Directora de tesis

Dra. Asuman Oktaç

México, Distrito Federal Diciembre 2012

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de maestría.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco especialmente a mi querido esposo Edgar por su apoyo, amor y comprensión, amor mio, te dedico este trabajo.

A mis padres Dolores y Armando por el profundo amor que siempre me han brindado, así como el apoyo en cada proyecto de mi vida. A mi hermana Alicia, porque en todas las etapas de mi vida ha estado a mi lado brindándome un apoyo incondicional.

De manera muy especial a mi asesora la Dra. Asuman Oktaç por su dedicación, su gran profesionalidad, por su calidad humana y por su sabia dirección para el desarrollo del presente trabajo.

A la Dra. Claudia Acuña, Dra. Rosa María Farfán, Dr. Ricardo Cantoral y al Dr. Francisco Cordero por compartir sus conocimientos con cada generación.

Con mucho aprecio a todos mis compañeros de generación, por todos aquellos momentos inolvidables que compartimos, en especial a Rosario y Mario que logramos un equipo de trabajo inigualable, aprendí mucho con ustedes.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el nivel medio superior del sistema educativo mexicano, tradicionalmente el tema de sistemas de ecuaciones lineales es abordado en el curso de álgebra, así como en un curso optativo llamado temas selectos de matemáticas. En este último, entre otros temas, se ven soluciones por varios métodos de sistemas de ecuaciones, así como la solución de un sistema empleando notación matricial, es decir, encontrando la inversa de la matriz de coeficientes.

Las dificultades que los estudiantes presentan al estudiar el tema de sistemas de ecuaciones lineales han sido objeto de estudio para varios investigadores en matemática educativa; estos trabajos de investigación analizan en diferentes niveles educativos y desde diferentes puntos de vista las dificultades de los estudiantes en el estudio de este tópico matemático. En este trabajo se reportan a Marines y Monroy (1998), Eslava y Villegas (1998), Barrera et al. (1998), Panizza et al. (1998), Mora (2001), Cutz (2005), Ramírez (2008 y 2005), Manzanero (2007), Barrera (2008), Monroy (2008), Ochoviet (2009); estos trabajos dan cuenta de la problemática, aportan conclusiones y sugerencias didácticas en las cuales profundizaremos en el capítulo I de este trabajo. Cabe mencionar en este momento para continuar con la idea, que algunos resultados muestran que incluso algunos estudiantes de nivel licenciatura con un curso de álgebra lineal no han logrado comprender el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Algo común encontrado en estas investigaciones es que algunos estudiantes asocian –la solución de un sistema de ecuaciones a la intersección de dos rectas que se cortan, provocando así que en un sistema 3x2 donde las rectas se cortan dos a dos (ver figura 1), ellos manifiesten que el sistema asociado a esta figura tiene tres soluciones, es decir, en ocasiones los estudiantes construyen como concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales la intersección de dos rectas, sin importar el número de rectas en total.

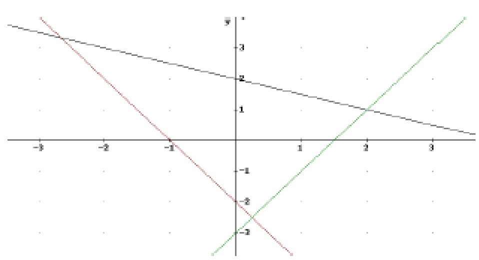


Figura 1. Rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (Ochoviet, 2009, p.14)

Ochoviet (2009) considera que

"El concepto de sistema y solución de un sistema que los estudiantes construyen está fuertemente influenciado por el significado que tienen estos conceptos en el ámbito de los sistemas lineales 2x2. En muchos casos, estos significados obstaculizan visiones más generales de estos conceptos, aun cuando los alumnos han avanzado en sus estudios y han estudiado matrices, determinantes y sistemas con cualquier número de ecuaciones e incógnitas. Las creencias que más persisten son las de interpretar punto de corte como solución del sistema y concebir un conjunto de rectas paralelas como única configuración de una gráfica de un sistema sin solución" (Ochoviet, 2009, p.211).

Dadas las problemáticas detectadas Ochoviet (2009) recomienda no comenzar la enseñanza de los sistemas por el caso 2x2 exclusivamente, sino presentar a estos sistemas entre tantos otros con dos incógnitas.

Otra de las dificultades documentadas es que los estudiantes en general no logran distinguir entre los diferentes casos de solución para un sistema. Por ejemplo en caso de un sistema sin solución, dan uno con solución, para el caso de uno con infinitas soluciones, dan uno sin solución (Alcocer 2007). Esta misma dificultad es reportada en Mora (2001), donde se considera que el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales visto sólo desde el punto de vista algebraico, no permite dotar de significado a dicho concepto ni a resultados tales como 0=0 y 0=r, dónde r representa un número real distinto de cero. Por tanto él recomienda brindar al estudiante la representación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales, sobre lo cual profundizaremos en el capítulo 1.

Dado que el tema de sistemas de ecuaciones lineales en el sistema educativo mexicano, se estudia en el nivel medio básico (secundaria), luego en nivel medio superior (bachillerato) y en el nivel superior (licenciatura), resulta hasta cierto punto sorprendente que se conserven hasta este último nivel ciertas concepciones alternas por parte de los estudiantes de este concepto, y es precisamente esta problemática la que nos lleva a interesarnos en si el profesor del nivel medio superior es consciente de las concepciones que pueden desarrollar algunos estudiantes acerca de este tema. Consideramos que el conocimiento por parte del profesor de las concepciones y concepciones erróneas acerca de un contenido matemático particular, en este caso los sistemas de ecuaciones lineales, le permite realizar una serie de tareas fundamentales en la enseñanza, tales como precisamente anticipar dónde el estudiante puede encontrar confusión, modificar la presentación del tema y hacer hincapié en ciertos detalles que pueden llevar a concepciones alternas como las expuestas en los párrafos anteriores. Así mismo cuando el profesor elige un ejemplo o una tarea necesita predecir si el estudiante la encontrará difícil o fácil, por lo que el profesor irá graduando la dificultad de los ejemplos y tareas. El profesor debe ser hábil a la hora de escuchar e interpretar las ideas de los estudiantes quizá incompletas y además expresadas con su propio lenguaje. Llevar a cabo estas tareas requiere una interacción entre el entendimiento matemático específico y la familiaridad con los estudiantes y su pensamiento matemático a lo que Ball, Thames y Phelps (2008) llaman *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (CC-Es)[1]. En cada caso, el conocimiento de los estudiantes y del contenido es una amalgama, que involucra una idea matemática particular o un procedimiento y la familiaridad con lo que frecuentemente piensa o hace el estudiante (Ball et al. 2008).

Con lo anterior se pone de relieve que hay cierto conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática que no es exclusivamente matemático. Sabemos que la gran mayoría de los profesores de matemáticas de nivel medio superior cuentan con la licenciatura en matemáticas, también sabemos que difícilmente han tomado cursos de didáctica de la matemática, lo que nos hace pensar en las fuentes de donde el profesor puede sacar información didáctica específica sobre el tema. Consideramos que la experiencia, observación e interacción con los estudiantes pueden dar indicios de las dificultades que éstos tienen al estudiar cualquier tópico matemático y por supuesto esperamos que el profesor tenga ideas importantes a este respecto, sin embargo creemos que también el diseño de los instrumentos de evaluación son importantes; si no se sabe de antemano errores frecuentes o concepciones alternas, tal vez estos instrumentos no permitan apreciar al docente que el estudiante no construyó adecuadamente el concepto, ya que esta concepción quizá es limitada y puede funcionar para ciertas preguntas, pero en lo general ya no.

Consideramos que se puede dar el caso que aunque el estudiante no haya construido adecuadamente el concepto sistema de ecuaciones lineales (pensando en solución como punto de corte de dos rectas por ejemplo), si sólo se hacen preguntas en el ámbito de sistemas 2x2, esta concepción puede funcionar, dejando ciego al profesor sobre la concepción alterna de este concepto, lo anterior es plausible dado que en niveles superiores, se han encontrado estudiantes que no han logrado construir el concepto.

[1] Ball y su grupo de investigación (2008) presentan el conocimiento del contenido y de los estudiantes (CC-Es) como parte de un dominio de conocimiento llamado conocimiento didáctico del contenido (CDC) refiriéndonos a su propuesta centrada en el conocimiento matemático para la enseñanza, en lo que profundizaremos en el capítulo 2 del marco teórico.

1.2 PREGUNTA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.

Siendo el tema de sistemas de ecuaciones lineales fundamental en el estudio del álgebra lineal y siendo un tema donde los estudiantes encuentran dificultad, parece ser un área crítica para investigar sobre el conocimiento didáctico del contenido del profesor de nivel medio superior, lo que nos lleva a realizar nuestra pregunta de investigación:

¿Qué conocimiento del contenido y de los estudiantes (CC-Es) posee el profesor del nivel medio superior en el contexto del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales?

Nos interesa saber en particular del conocimiento por parte del profesor de las dificultades o concepciones alternas de los estudiantes al abordar este tema.

Los objetivos que nos hemos fijado para contestar esta pregunta son los siguientes:

1.2.1 Objetivo general:

Indagar sobre el estatus del conocimiento didáctico del contenido del profesor de nivel medio superior, en particular del conocimiento del contenido y de los estudiantes (CC-Es) en el contexto del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales.

1.2.2 Objetivos particulares:

- Indagar sobre el conocimiento por parte del profesor de las concepciones erróneas o alternas de los estudiantes al estudiar el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

- Indagar sobre cómo el conocimiento de las dificultades de los estudiantes al estudiar el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales, es utilizado en la secuencia de enseñanza del mismo.

En los últimos años el CDC ha experimentado un crecimiento vertiginoso como corriente de investigación didáctica. A pesar de ello, hasta el momento en México ha sido una cuestión ignorada (Pinto y González, 2008). Consideramos importante y novedoso realizar el estudio del CDC del profesor del nivel medio superior ya que compartimos con Shulman (1999) la idea que el desarrollo e interés en el mundo de la educación de tal conocimiento, puede contribuir al reconocimiento gradual de que la visión de la calidad de la enseñanza va más allá del dominio del contenido en un área específica.

2. ANTECEDENTES

En este capítulo nos proponemos revisar algunas investigaciones que analizan en diferentes niveles educativos y desde diferentes puntos de vista, las dificultades que presentan los estudiantes y en su caso los profesores cuando se proponen estudiar los sistemas de ecuaciones lineales; estos trabajos también logran establecer cuáles son las concepciones alternas que se pueden construir para este tópico matemático. Así mismo reportaremos la investigación de Panizza et al. (1999) que guarda cierta relación con el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales y que resulta de interés para nuestro trabajo.

Consideramos que la información puntual sobre dichos trabajos en su conjunto, dan cuenta de la problemática, aportan conclusiones y sugerencias didácticas. Realizaremos la revisión de manera cronológica y al final integraremos ciertas categorías que nos permiten sintetizar la información, lo que nos será muy útil para poder integrar nuestro instrumento para la toma de datos.

Empecemos con el trabajo de Marines y Monroy (1998) que se proponen estudiar las dificultades que se presentan al intentar relacionar una representación gráfica de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, con su correspondiente representación analítica. En el estudio participó un grupo de maestros que habían recibido cursos de álgebra lineal y que habían impartido esta asignatura en el nivel superior. Los investigadores primeramente piden a los participantes que realicen una descripción verbal de un sistema de ecuaciones lineales, para después pasar a una representación gráfica y finalizar con una representación analítica, todo referente a los sistemas 3x3 y por medio de una entrevista. Observaron que en general existen dificultades en el tránsito del pensamiento sintético-geométrico al pensamiento analítico; se les dificulta aún más al trabajar en tres dimensiones. Consideran que esto se debe tal vez al hecho que los profesores no tratan en sus cursos normales los sistemas 3x3 de modo gráfico, lo cual coincide con los programas de estudio y los libros de texto.

Marines y Monroy (1998) advierten que faltan estrategias de graficación y visualización que permitan pasar de la forma analítica a la forma geométrica y mucho más de la forma geométrica a la analítica. Consideran que para que un sistema 3x3 se pueda relacionar con más facilidad con su representación geométrica, es posible aplicar algunos de los siguientes conceptos: vector perpendicular, producto punto entre vectores, dependencia e independencia lineal entre vectores y la función determinante. Sugieren que además lo anterior facilitaría el modo de pensamiento analítico-estructural.

A los participantes también se les dificulta visualizar o pensar en ciertas casos como tres planos concurrentes, planos intersecándose dos a dos, dos planos coincidentes y uno secante a ellos, dos planos paralelos y uno secante a ambos y dos planos coincidentes y uno paralelo ellos (Marines y Monroy, 1998).

Eslava y Villegas (1998) se proponen analizar los diferentes modos de pensamiento de los estudiantes al interpretar las posiciones relativas de tres rectas en el plano. Para ello realizan una entrevista a un grupo de ocho estudiantes de nivel medio superior. Reportan que los estudiantes entrevistados presentaron dificultad en Identificar las posibles posiciones de tres rectas en el plano y relacionarlas con los casos de solución única o infinitas soluciones o no solución del sistema. Mencionan que los estudiantes encuentran dificultad en poder corresponder las ecuaciones dadas con sus respectivas gráficas, lo que denota dificultad en el transito entre el modo de pensamiento analítico y el geométrico. Reportan también que los estudiantes evidencian concepciones alternas en torno al concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo considerar solución del sistema la intersección de las rectas con los ejes coordenados. Al plantearles el caso de tres rectas en el plano que se intersecan dos a dos, de tal modo que los puntos de intersección son vértices de un triángulo en el plano, más de la mitad de los estudiantes entrevistados afirmaron que el sistema representado tiene tres soluciones, es decir, los estudiantes piensan en la solución del sistema como el corte de dos rectas, incluso si se trata de los ejes coordenados.

Por su parte Panizza et al. (1999) se interesan en el tema de ecuación lineal con dos variables. Trabajan con seis estudiantes que previamente habían desarrollado la concepción de ecuaciones como igualdades numéricas en las que las letras designan incógnitas, es decir, números a ser encontrados y también habían estudiado los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Las autoras estaban interesadas en saber si los estudiantes lograrían otorgar entidad al objeto ecuación de dos variables y al mismo tiempo reconocerlo como parte de un sistema de ecuaciones lineales. También se preguntaron si dado que los estudiantes cuentan con la concepción de las letras como incógnitas, cómo es que ellos enfrentarían el hecho de que una ecuación de este tipo tiene infinitas soluciones. En su estudio reportan que hay dificultad en los estudiantes para identificar la ecuación lineal con dos variables como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números; advierten que la concepción de letra como incógnita se adapta bien cuando la ecuación aparece en un sistema con única solución, pero no así en el caso de infinitas soluciones. Mencionan también que hay dificultad en establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

La concepción de infinitas soluciones de una ecuación lineal con dos variables apareció bajo dos concepciones diferentes y centradas en objetos distintos. Por un lado, un estudiante interpretó la ecuación lineal como una función lineal, a partir de la cual pudo construir pares ordenados otorgándole valores a una de las variables. Los otros estudiantes concibieron las infinitas soluciones a partir de las distintas soluciones que fueron encontrando a sistemas de ecuaciones donde una misma ecuación permanecía fija. Estos estudiantes parecen estar más lejos de hacer converger en el objeto ecuación lineal las nociones de variable y de dependencia para obtener soluciones. Advierten entonces que si se centra la atención en la concepción de letras como incógnitas, se estaría más lejos de construir un sentido para el nuevo objeto. Las investigadoras que llevaron a cabo esta investigación dejan asentada finalmente la importancia de indagar en el conocimiento sobre la relación que existe entre el aprendizaje de las nociones de incógnita y variable con la idea de entender la relación entre la aritmética y el álgebra (Panizza et al., 1999).

En el trabajo de Mora (2001) se estudian las dificultades de los estudiantes al interpretar el concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales. Hay especial interés en estudiar qué afirman los estudiantes cuando al resolver un sistema de ecuaciones lineales llegan a las expresiones de tipo $0 = 0$ y $0 = r$ donde r es un número real distinto de cero.

Mora (2001), haciendo alusión a Duval, parte de la hipótesis que cuando un sujeto es capaz de identificar un objeto matemático en al menos dos modos de razonamiento (analítico y geométrico) y además es capaz de transitar conscientemente entre ellos, se puede considerar entonces que se ha alcanzado una mayor comprensión de ese objeto matemático. Con esta idea en mente, se da a la tarea de diseñar una secuencia que buscó establecer una relación entre los modos de pensamiento analítico y sintético, con la intención de sesgar más el uso del pensamiento sintético-geométrico para así observar cómo este último interacciona con el modo analítico. En este trabajo, se pone especial atención en sistemas sin solución o con infinitas soluciones. Mora (2001) reporta que hay dificultad en la interpretación de expresiones tales como $0 = 0$ y $0 = r$ en el contexto de sistemas de ecuaciones lineales. Advierte que los estudiantes que participaron ofrecen algunas respuestas basadas únicamente en la memoria, recordando lo que sus maestros de matemáticas alguna vez les dijeron y los resultados que pudieron haber leído en los textos. Considera que el hecho de que expresiones de tipo 0 = 0 sean siempre verdaderas o que las de tipo 0 = 1 sean siempre falsas desde un punto de vista aritmético, podrían constituir un tipo de obstáculo para permitir profundizar en su significado geométrico dentro de los sistemas de ecuaciones. Considera que la falta de una interpretación geométrica directa de estas ecuaciones causa mayor dificultad.

Mora (2001) pudo comprobar que el modo de pensamiento geométrico funciona como una herramienta de apoyo para dar significado a los resultados analíticos y además motiva a la reflexión matemática de los participantes. Además mediante el análisis de las entrevistas, logra identificar que el pensamiento sintético-geométrico les proporciona información más natural para responder correctamente ciertas cuestiones matemáticas. Por otro lado, algo que mostraron tener claro los estudiantes al resolver la secuencia planteada es que al buscar la solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas gráficamente es encontrar las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.

Cutz (2005) se interesa en observar las estrategias y dificultades de los estudiantes referentes al tránsito entre diferentes representaciones de los sistemas de ecuaciones lineales: la geométrica y la analítica para el caso de dos y tres incógnitas, así como observar su avance o persistencia en las concepciones al concluir un curso de álgebra lineal. Utiliza como marco teórico el presentado en Sierpinska (2000) relativo a los diferentes modos de pensamiento en álgebra lineal; primeramente diseña un cuestionario diagnóstico que consta de ocho actividades y es aplicado a un grupo de 27 estudiantes de nivel superior que en ese momento cursaban el cuarto año de la carrera de ingeniería, antes de iniciar su curso de álgebra lineal. De acuerdo con los resultados del cuestionario, se seleccionó un grupo de cinco estudiantes para ser entrevistados después de concluir su curso de álgebra lineal.

Específicamente Cutz (2005) observa que los estudiantes tienden a relacionar a la solución de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, con el punto de intersección de al menos dos de las rectas que representan gráficamente al sistema. Observa también que para el caso en que los sistemas de ecuaciones quedan representados gráficamente con rectas o planos que se encuentran sobrepuestos, los estudiantes afirman que tales sistemas no tienen solución puesto que esperan ver algún punto de intersección o “cruce” de los elementos (rectas o planos). Reporta que la mayoría de los estudiantes demanda la necesidad de conocer alguna referencia del objeto recta o plano que le ayude a determinar su ecuación, como podría ser la pendiente o las coordenadas de algún punto que pertenezca a tal objeto, esto cuando se les pide que de una representación gráfica pasen a una expresión algebraica. Menciona que para el caso en el que se tienen tres planos intersecándose en una línea, algunos estudiantes afirman que el sistema tiene una solución, que es precisamente la recta de intersección, ya que la ven como un solo objeto. También menciona que hay fuerte tendencia a trabajar con sistemas cuadrados ya que cuando a los estudiantes se les presenta un sistema 3x2 tienen la necesidad de separar el sistema en sistemas 2x2, lo que indica que no tienen claro el significado del concepto sistema.

Cutz (2005) menciona que estas concepciones erróneas permanecieron aun después de un curso de álgebra lineal que dio énfasis en corregir los errores del cuestionario diagnóstico. Sugiere que es necesario hacer hincapié en los significados de los conceptos y procedimientos, y da algunas sugerencias didácticas, tales como relacionar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con su representación gráfica (en dos y tres dimensiones). Considera necesario hacer ver al estudiante la existencia de otros casos de sistemas de ecuaciones lineales que no tienen solución y no limitarse al ejemplo de rectas o planos paralelos. Recomienda poner especial atención en las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales, es decir, estudiar de manera estructural las propiedades que condicionan si un sistema tiene una, infinitas o ninguna solución.

Alcocer (2007) se interesa en su investigación por profundizar en el entendimiento de las dificultades que presentan los estudiantes en el concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales en los contextos analítico y geométrico, considerando los casos de solución única, un número infinito de soluciones y no solución. Su investigación es realizada bajo el marco los modos de pensamiento propuestos en Sierpinska (2000). Primeramente, aplica una prueba diagnostica a 24 estudiantes de ingeniería que inician el curso de álgebra lineal, con la idea de detectar las dificultades comunes en los estudiantes. Con los datos obtenidos en la prueba, diseña una entrevista que consta de cuatro actividades que aplica a cinco estudiantes al finalizar su curso de álgebra lineal. Con lo anterior además de observar las concepciones de los participantes acerca de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución, puede observar cuáles de ellas permanecen al finalizar el curso de álgebra lineal.

Alcocer (2007) observó que en los estudiantes con los que trabajó, permanecen ciertas concepciones alternas como considerar como solución del sistema la intersección ya sea con otras rectas o con los ejes coordenados. También los entrevistados llegaron a pensar que para cada incógnita se tendrá una solución del sistema, es decir, al resolver el sistema se tendría un valor para *x,* uno para *y,* de ahí que el sistema tendría dos soluciones siempre, o tres, dependiendo del número de incógnitas que se tuvieran. Menciona que los estudiantes en general no logran distinguir entre los diferentes casos de solución para un sistema.

Estas concepciones erróneas permanecieron aun después de un curso de álgebra lineal que dio énfasis en corregir los errores del cuestionario. Dotar de significado a los conceptos y procedimientos que se desea enseñar y relacionar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con su representación gráfica sería importante para lograrlo (Alcocer, 2007).

Por su parte Manzanero (2007) realiza su trabajo bajo la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y se propone responder cuáles son las dificultades de los estudiantes en relación al concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales, así como dar cuenta si la descomposición genética inicial que ella propone es viable para explicar la construcción de este concepto. Entrevistó a seis estudiantes del nivel superior y observó que ningún estudiante mostró tener una concepción objeto para el concepto de conjunto solución y que pocos de ellos mostraron haber construido un proceso de solución. En particular en el caso de los sistemas con tres variables observa que hay dificultad en identificar los posibles casos de solución de un sistema de ecuaciones, así como con la parametrización. Observa que también se les dificulta coordinar las acciones que realizan sobre la representación de un sistema en forma de matriz aumentada y lo que le ocurre al sistema en sí cuando se realiza cada una de estas acciones.

Manzanero (2007) recomienda que con la idea de lograr la encapsulación de este concepto, que es necesario presentar a los estudiantes soluciones de sistemas de ecuaciones en forma algebraica, trabajando en forma coordinada con la construcción y solución del sistema en forma geométrica. Considera que la coordinación de estas dos representaciones permitirá lograr una mejor comprensión de la solución de sistemas de ecuaciones. También sugiere presentar a los estudiantes todos los posibles casos de solución de un sistema de ecuaciones, utilizando diferentes representaciones y no limitarlos a la solución de ejemplos prototípicos. Sugiere también dar a los estudiantes problemas no triviales para la resolución de sistemas de ecuaciones, con el fin de favorecer su esquema del concepto solución.

Ramírez (2008) retoma los resultados obtenidos en su trabajo de licenciatura (Ramírez, 2005) acerca de los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y se propone profundizar acerca de las concepciones de los estudiantes de nivel superior acerca de los sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres ecuaciones con dos incógnitas. Su trabajo lo realiza bajo el marco teórico de los modos de pensamiento en álgebra lineal desarrollado por Sierpinska (2000). Se da a la tarea de diseñar una secuencia de actividades la cual es aplicada a cinco estudiantes de licenciatura del Centro de Investigación y Docencia Económicas (CIDE) en México D.F. Los estudiantes habían terminado su primer curso de Matemáticas I en donde abordaron los contenidos de Algebra matricial, Sistemas de ecuaciones lineales y Cálculo en una variable.

Ramírez (2008) en una de las actividades de la secuencia, trata de indagar sobre las concepciones de los estudiantes acerca de las soluciones de una ecuación lineal (cuestión que resulta importante ya que se trata de los conocimientos previos). En sus resultados da cuenta de las dificultades o concepciones que evidencian algunos de los estudiantes entrevistados acerca de las soluciones de la ecuación lineal en la representación gráfica. Menciona que algunos estudiantes relacionan la solución de una ecuación lineal con el punto de intersección de la recta con los ejes, indicando que tiene dos soluciones y para encontrar dichas soluciones proporcionan a cada incógnita el valor de cero para obtener el valor de la otra, obteniendo dos valores diferentes para x y y. Observa que algunos estudiantes consideran solución de la ecuación lineal el punto de intersección de la recta con el eje x, determinando que tiene una solución. Reporta por último en cuanto a ecuación lineal, que algunos estudiantes indican que la ecuación lineal no tiene solución ya que no existe otra recta con la cual pueda representar dos rectas intersecándose en un solo punto, es decir, que sólo un sistema de ecuaciones lineales puede tener soluciones. Curiosamente a pesar de estas concepciones todos los estudiantes logran plantear una posible ecuación lineal que podría corresponder a la gráfica dada durante la entrevista que les fue aplicada y también logran graficar una ecuación lineal proporcionada.

En cuanto a las dificultades y concepciones de los estudiantes referentes a los sistemas de ecuaciones lineales observa que los estudiantes no conciben el caso de infinitas soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, que corresponde analíticamente a tres ecuaciones equivalentes y gráficamente tres rectas coincidentes. Así mismo evidencian dificultades al considerar las propiedades que determinan si un sistema tiene única, infinitas o ninguna solución, es decir muestran debilidad en el modo de pensamiento analítico-estructural (Ramírez, 2008).

Por último, en el trabajo doctoral de Ochoviet (2009) primeramente se estudia qué concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales construyen los estudiantes uruguayos si la enseñanza del tema se inicia a través de los sistemas 2x2. Los estudiantes con los que trabaja se encuentran entre los catorce y quince años de edad y también otros entre los diecisiete y dieciocho años de edad. Después de identificar las dificultades se propone diseñar una secuencia de enseñanza sobre el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas tomando en cuenta los datos obtenidos en la primera parte de su investigación; cabe aclarar que esta secuencia de enseñanza la pone en práctica sólo con los estudiantes que se encuentran entre los catorce y quince años de edad.

Ochoviet (2009) señala en sus conclusiones que el concepto de sistema y de solución de un sistema que los estudiantes construyen están fuertemente influenciados por el significado que tienen estos conceptos en el ámbito de los sistemas lineales 2x2. Considera que en muchos casos, estos significados obstaculizan visiones más generales de estos conceptos, incluso en estudiantes que han avanzado en sus estudios y han estudiado matrices, determinantes y sistemas con cualquier número de ecuaciones e incógnitas. Las concepciones y dificultades que más persisten en los estudiantes son considerar punto de corte como solución del sistema y concebir un conjunto de rectas paralelas como única configuración gráfica de un sistema sin solución. También observa que algunos estudiantes no logran interpretar en cada punto un par ordenado de números reales y en cada recta una ecuación. Menciona en cuanto a la concepción de sistema, que algunos estudiantes consideran que es un conjunto de dos ecuaciones y que esta noción aparece asociada a algo que se resuelve.

Ochoviet (2009) realiza un conjunto de recomendaciones generales a la luz de los resultados obtenidos en la primera parte de su investigación en cuanto a la enseñanza del tema solución de un sistema de ecuaciones lineales. Entre dichas recomendaciones podemos mencionar la de no comenzar la enseñanza de este tema exclusivamente con los sistemas 2x2, considera conveniente presentar a estos sistemas entre tantos otros con dos incógnitas al menos en las fases de presentación del concepto de sistema, de solución de un sistema y de la discusión del número de soluciones de un sistema con dos incógnitas. Sugiere proponer a los estudiantes actividades que los conduzcan a analizar el número de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones lineales y a rechazar los que no puede tener: un número entero mayor que uno, entre otras.

Con este conjunto de recomendaciones Ochoviet (2009) diseña una serie de actividades y una secuencia de enseñanza que pone en práctica con los estudiantes de entre catorce y diecisiete años de edad y nuevamente indaga sobre las concepciones de los estudiantes. Concluye que estudiar específicamente que un sistema puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna, ayudó a varios estudiantes a un cambio de opinión en el sentido deseado. Para la mayoría de los estudiantes, a través de la forma de enseñanza propuesta, fue posible alcanzar un modo de pensamiento estructural en ese nivel de escolarización (14-15 años); señala que el estudio del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales requiere de avances en este modo de pensamiento. Considera que las tareas diseñadas para ser usadas durante la enseñanza del concepto, fueron altamente provechosas para poner en juego el concepto solución de un sistema en diferentes modos de pensamiento y con ello contribuir a una visión del concepto que abarque su complejidad.

Después de la revisión de estos trabajos, podemos decir que compartimos la idea con Shulman (1986) que investigaciones en este rubro, son un componente importante en el entendimiento didáctico de la materia, de hecho, el CDC también incluye un entendimiento de lo que hace el aprendizaje de un tópico específico fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y formación intelectual y humana llevan con ellos para el aprendizaje de los tópicos y lecciones más frecuentemente enseñadas. Dado nuestro interés en Indagar sobre el estatus del CDC del profesor de nivel medio superior, en particular del conocimiento del contenido y de los estudiantes (CC-Es) en el contexto del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales, consideramos que estas investigaciones nos proporcionan información muy valiosa para conformar nuestro instrumento para la entrevista que planeamos realizar.

Observando detenidamente los resultados de estas investigaciones, no podemos dejar de ver las coincidencias entre ellas en cuanto a las dificultades que se presentan y las concepciones que se construyen alrededor del estudio del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Tales coincidencias nos permiten conformar ciertas categorías que incluyan si no en su totalidad, sí las dificultades o en su caso las concepciones más comunes reportadas en estos trabajos.

2.1 CATEGORÍAS DE DIFICULTADES Y/O CONCEPCIONES SOBRE LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Interpretar punto de corte como solución de un sistema de ecuaciones lineales. El hecho de que algunos estudiantes puedan interpretar punto de corte como solución de un sistema de ecuaciones lineales, es reportado por Eslava y Villegas (1998), Cutz (2005), Alcocer (2007), Ochoviet (2009). Este punto de corte puede referirse al corte de las rectas con los ejes coordenados o bien entre ellas. Tal concepción puede llevar a los estudiantes a decir que hay tres soluciones en un sistema formado por tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, donde las rectas se cortan dos a dos. Así mismo para el caso en el que los sistemas de ecuaciones quedan representados gráficamente con rectas o planos que se encuentran sobrepuestos, los estudiantes afirman que tales sistemas no tienen solución puesto que esperan ver algún punto de intersección o "cruce" de los elementos (rectas o planos).

- Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución. El hecho que los estudiantes en general no logran distinguir entre los diferentes casos de solución para un sistema es reportado en Eslava y Villegas (1998), Mora (2001), Alcocer (2007), Manzanero (2007) y Ochoviet (2009); esto se da tanto en el ámbito analítico como en el geométrico.

- Dificultad en transitar entre la representación gráfica y analítica de los sistemas. Marines y Monroy (1998), Eslava y Villegas (1998) y Cutz (2005) coinciden y/o aportan en esta categoría. Esta dificultad se evidencia cuando por ejemplo demandan conocer alguna referencia del objeto (recta o plano) que les permita determinar su ecuación cuando parten de los datos de una representación gráfica o viceversa o simplemente cuando no pueden relacionar una representación gráfica con su respectiva representación analítica.

- Interpretación alterna del concepto sistema. El que algunos estudiantes consideren a un sistema como un conjunto de dos ecuaciones es reportado en Cutz (2005) y Ochoviet (2009). Esta concepción les lleva a los estudiantes a que dado un sistema por ejemplo 3x2, ellos lo separan en sistemas 2x2.

- Dificultad en considerar las configuraciones geométricas posibles para un sistema de dos o tres incógnitas sin solución. En esta categoría coinciden y/o aportan Marines y Monroy (1998) y Ochoviet (2009) ya que reportan dificultades en torno a que algunos estudiantes conciben un conjunto de rectas paralelas o un conjunto de planos paralelos como única configuración gráfica de un sistema sin solución.

- Dificultades referentes a conocimientos previos. Esta categoría está integrada por las dificultades para identificar la ecuación lineal con dos variables como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números y que éstos representan infinitos puntos en el plano que conforman una recta (Panizza et al., 1999, Ramírez, 2008 y Ochoviet, 2009). Reportan que algunos estudiantes consideran solución de la ecuación lineal el punto de intersección de la recta con el eje x, determinando que tiene una solución, también mencionan que algunos estudiantes indican que la ecuación lineal no tiene solución ya que no existe otra recta con la cual pueda representar dos rectas intersecándose en un solo punto, es decir, que sólo un sistema de ecuaciones lineales puede tener soluciones.

A continuación presentamos una tabla donde se resume la información presentada en las categorías.

DIFICULTAD O CONCEPCIÓN	TRABAJO EN EL CUAL SE REPORTA
Interpretar punto de corte de dos rectas como solución del sistema.	Eslava y Villegas (1998), Cutz (2005), Alcocer (2007), Ramírez (2008), Ochoviet (2009)
Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución.	Eslava y Villegas (1998), Mora (2001), Alcocer (2007), Manzanero (2007), Ochoviet (2009)
Dificultad en transitar entre la representación gráfica y analítica de los sistemas.	Marines y Monroy (1998), Eslava y Villegas (1998), Cutz (2005)
Interpretación alterna del concepto sistema	Cutz (2005), Ochoviet (2009)
Dificultad en considerar las configuraciones geométricas posibles para para un sistema de dos o tres incógnitas sin solución.	Marines y Monroy (1998) y Ochoviet (2009)
Dificultades referentes a conocimientos previos.	Panizza et al. (1999), Ramírez (2008) y Ochoviet (2009)

Tabla 1. Categorías de Dificultades y/o Concepciones sobre la solución de ecuaciones lineales.

3. MARCO TEÓRICO

El conocimiento del profesor en general y el conocimiento del profesor de matemáticas en particular ha sido objeto de estudio por varias décadas. La contribución de Shulman (1986) al introducir las nociones de *conocimiento didáctico del contenido* (CDC) y *conocimiento base para la enseñanza* se pueden considerar de las más importantes referentes al estudio del conocimiento profesional del profesor, de hecho, se le reconoce como pionero en llamar la atención sobre el carácter específico del conocimiento del contenido para la enseñanza.

En este sentido, en este capítulo nos proponemos profundizar en los trabajos en los cuales se enmarca el nuestro, Shulman (1986), Ball, Thames y Phelps (2008) y Sosa (2010). Comenzaremos por las tres categorías o dominios del conocimiento del profesor que Shulman (1986) distingue, poniendo especial interés en el CDC, siendo precisamente sobre esta noción que se construye la teoría propuesta por Ball et al. (2008) la cual se centra en el conocimiento matemático para la enseñanza (CME) en el nivel primaria, estudiando tal conocimiento a partir de la práctica del profesor. Ball et al. (2008) proponen un modelo en el que hacen un refinamiento a las dimensiones del *conocimiento del contenido* y *didáctico del contenido* propuestas por Shulman (1986). Tal refinamiento, como se verá, permite tener más especificidad en cuanto a lo que se quiere estudiar referente al conocimiento del profesor. Ya por último, revisaremos el trabajo doctoral de Sosa (2010), en el cual se desarrollan descriptores que permiten detallar o matizar los dominios propuestos en Ball et al. (2008) para el nivel medio superior, y es en este nivel en que se realiza nuestra investigación.

Si bien en los trabajos de Shulman y sus colaboradores (Shulman, 1986, 1987; Wilson, Shulman y Richert, 1987) se considera que el conocimiento profesional del profesor se divide en siete componentes: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los alumnos y sus características, conocimiento de los contextos educativos, conocimiento curricular y conocimiento didáctico general, Shulman (1986) advierte que entre estas siete hay tres componentes fundamentales que sostienen la especificidad de cada materia a enseñar, por tanto nos enfocaremos en ellas. Las tres componentes o categorías son: conocimiento del contenido de la materia específica, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento curricular.

Empecemos con el conocimiento del contenido, definido como la cantidad y organización de conocimiento per se en la mente del profesor. En las diferentes áreas, las formas de examinar la estructura del contenido del conocimiento difieren y para pensar correctamente acerca del conocimiento del contenido se requiere ir más allá del conocimiento de los hechos o conceptos de un dominio; se requiere un entendimiento de la estructura de la materia en la manera definida por Schwab (1978, citado en Shulman, 1986), que menciona que la estructura de una materia incluye tanto la estructura substantiva como la sintáctica. La variedad de formas en las cuales los conceptos básicos y principios de una disciplina son organizados para incorporar estos hechos, es la estructura substantiva de una disciplina. La estructura sintáctica es el conjunto de las formas en las cuales la verdad o falsedad, la validez y la invalidez son establecidas. Una sintaxis es como una gramática, es el conjunto de reglas para determinar qué es legítimo decir en una disciplina y qué rompe las reglas. El profesor no sólo debe ser capaz de definir para los estudiantes las verdades aceptadas en un dominio, también debe ser capaz de explicar por qué una proposición se considera justificada, por qué vale la pena saber y cómo se relaciona con otras proposiciones tanto en la disciplina como en la teoría y la práctica (Shulman, 1986).

La segunda categoría, es el conocimiento didáctico del contenido (CDC) el cual para Shulman (1986) es un conocimiento didáctico que va más allá del conocimiento de la materia per se y va hacia la dimensión de conocimiento de la materia para la enseñanza. Menciona que dentro de esta categoría se incluye, de los temas regularmente enseñados en una materia, las más útiles formas de representación de esas ideas, las más poderosas analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones; en pocas palabras, las formas de representar y formular los contenidos para que éstos sean más comprensibles a otros. Menciona que el profesor debe tener un autentico arsenal de formas alternativas de representación, algunas de las cuales pueden derivar de la investigación, mientras que otras se originan en la sabiduría de la práctica.

Considera a esta categoría de especial interés debido a que en ella se identifican:

> *"diferentes cuerpos de conocimiento para la enseñanza. Representa la mezcla de contenido y didáctica en la comprensión de cómo se organizan, representan y adaptan temas, problemas o cuestiones particulares a los diversos intereses y capacidades de los estudiantes y cómo se presentan para la instrucción"* (Shulman, 1987, p. 8)

Con lo anterior se pone de relieve que no es sólo conocimiento del contenido por un lado y el didáctico por otro, sino un tipo de amalgama entre conocimiento del contenido y conocimiento didáctico que es central en el conocimiento necesario para la enseñanza.

Para Shulman (1986) el CDC también incluye un entendimiento de lo que hace el aprendizaje de un tópico específico fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y formación intelectual y humana llevan con ellos para el aprendizaje de los tópicos y lecciones más frecuentemente enseñadas. Menciona también que de esas preconcepciones o concepciones erróneas más frecuentes, los profesores necesitan conocimiento de las estrategias que probablemente sean más fructíferas en reorganizar el entendimiento del estudiante. Considera que en esta categoría la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje coinciden más cercanamente.

Shulman (1986) piensa que el estudio de las concepciones erróneas y de su influencia sobre subsecuentes aprendizajes ha sido de los más fértiles tópicos de investigación cognitiva y que tales investigaciones son un componente importante en el entendimiento didáctico de la materia y que debe ser incluido en el corazón de su definición.

La última categoría es el Conocimiento Curricular, expresado como:

> *"aquello representado por el conocimiento de programas diseñados para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado, también contempla la variedad de materiales educativos disponibles en relación con los programas y el conjunto de características que sirven tanto como las indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios particulares o los materiales del programa en determinadas circunstancias."* (Shulman, 1986, p.10)

Shulman (1986) distingue dos dimensiones del conocimiento curricular: el conocimiento curricular lateral y el conocimiento curricular vertical. El conocimiento curricular lateral relaciona el conocimiento del currículo que está siendo enseñado, con el conocimiento del currículo que los estudiantes están aprendiendo a la par en otras clases. El conocimiento curricular vertical incluye *"la familiaridad con los temas y cuestiones que han sido y serán impartidas en la misma materia durante los años anteriores y posteriores en la escuela y los materiales que los componen"* (Shulman, 1986, p. 10)

De acuerdo a Ball et al. (2008) las tres categorías del conocimiento identificadas por Shulman (1986) se han ido modificando, sin embargo, siguen vigentes. Los trabajos de Shulman (1986 y 1987) han sido citados más de 1200 veces en artículos de revistas arbitradas. Este interés ha sido sostenido con no menos de 50 citas de esos dos artículos en todos los años desde 1990. Estas citas aparecen en 125 revistas diferentes en un rango de profesiones desde leyes, enfermería, negocios y respecto al conocimiento para la enseñanza a través de estudios doctorales. Cabe mencionar que mucho del interés se ha enfocado directamente sobre el CDC; cientos de artículos, capítulos de libros y reportes usan o estudian la noción de CDC en una gran variedad de áreas: ciencia, matemáticas, estudios sociales, inglés entre otros (Ball et al., 2008)

En la actualidad cuestiones tales como el papel de las creencias, afectos y valores en el desarrollo del CDC del profesor, determinar si los componentes del CDC son dependientes de los paradigmas de enseñanza-aprendizaje asumidos, mejora de los métodos para evaluar el CDC y nociones relacionadas, elaboración de nociones más globales que incluyan conocimientos, creencias y afectos tales como orientación, perspectiva e identidad del profesor (Philipp, 2007, citado en Sosa, 2010) se trabajan respecto al CDC.

En cuanto a estas categorías propuestas por Shulman (1986), Ball et al. (2008) consideran que no se buscó construir una lista o catálogo de lo que necesitan los profesores saber en un área particular, en lugar de eso, se buscó proveer una orientación conceptual y un conjunto de distinciones analíticas con la idea de llamar la atención de la investigación y la comunidad política sobre la naturaleza y tipos de conocimientos necesarios para enseñar una materia. Con ello definen una perspectiva que destaca la naturaleza del contenido-profundo para la enseñanza. Más aún, buscan especificar las formas en las cuales el conocimiento del contenido para la enseñanza es distinto del conocimiento del contenido disciplinar.

Por su parte Ball et al. (2008) desarrollan una teoría sobre el conocimiento del contenido para la enseñanza basada en la práctica, que como ya mencionamos está construida sobre la noción de Shulman (1986) del CDC. Consideran que la noción del CDC se quedó atrapada[2], por lo que fue necesario desarrollo teórico, clarificación analítica y examinación empírica para el desarrollo de la teoría. Ball et al. (2008) centran su propuesta en el conocimiento matemático para la enseñanza (CME), y a diferencia de lo planteado por Shulman (1986) deciden incluir el conocimiento curricular en el CDC, de tal forma que sólo hay dos grandes dominios que se encuentran a su vez subdivididos en tres subdominios.

Como se puede apreciar en la Figura 2 el conocimiento del contenido queda subdividido en tres subdominios: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y horizonte matemático. El CDC queda subdividido en:

[2] De la traducción de la palabra inglesa caught on.

conocimiento del contenido y estudiantes, conocimiento del contenido y enseñanza y conocimiento curricular.

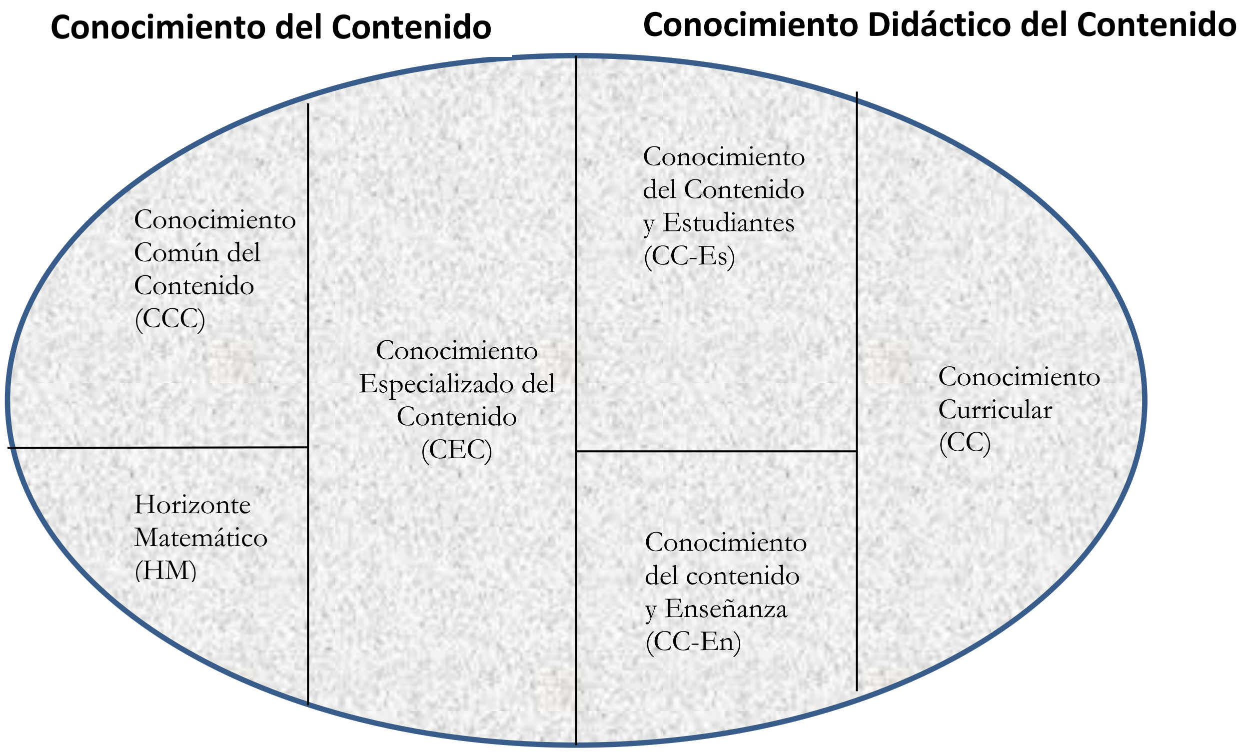


Figura 2. Dominios del CME (MKT[3]). (Ball et al., 2008, p.403)

Iniciemos con el Conocimiento común del contenido (CCC) que es definido como el conocimiento matemático y habilidades usadas en otros contextos, no sólo en la enseñanza. La denominación de conocimiento común no significa que todos tengan este conocimiento, sino que este tipo de conocimiento es usado en una variedad de ámbitos, es decir, que no es único en la enseñanza. Este conocimiento común, le permite al profesor realizar las tareas que él propone a sus estudiantes, así como reconocer cuando sus estudiantes dan respuestas erróneas o cuando los libros de texto dan una definición inadecuada (Ball et al., 2008).

[3] Siglas correspondientes a la expresión en inglés "Mathematical Knowledge for Teaching"

El Conocimiento Especializado del contenido (CEC), es el conocimiento matemático y habilidades únicos para la enseñanza. Es el conocimiento que le permite al profesor mirar los patrones en los errores de los estudiantes y ver la naturaleza matemática de los mismos o en dimensionar si un procedimiento no estándar puede trabajar en general; así como distinguir, averiguar, valorar e interpretar la validez de diversas e inesperadas respuestas que pueden dar los estudiantes al enfrentarse a una tarea. Este trabajo involucra un desempaquetamiento[4] de las matemáticas que no son necesarias o incluso deseables en ámbitos ajenos a la enseñanza. En este conocimiento se pone de relieve el hecho de que para la enseñanza de la matemática los profesores tienen que desarrollar una clase de conocimiento matemático especial, y que es precisamente la labor docente la que crea la necesidad de este cuerpo de conocimiento matemático especializado que le permite al profesor hacer frente a las tareas propias de su labor (Ball et al., 2008).

El Horizonte Matemático (HM) es considerado como el conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de los diferentes niveles educativos, así como las conexiones dentro y fuera de las matemáticas. Incluye también las habilidades que tiene el profesor para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular. De este subdominio se continúa estudiando cómo afecta los otros subdominios y si es un subdominio del conocimiento del contenido (Ball et al., 2008).

El Conocimiento del contenido y estudiantes (CC-Es) es visto como el conocimiento que combina conocimiento acerca de los estudiantes y conocimiento acerca de las matemáticas. El profesor puede anticipar lo que probablemente está pensando el estudiante y en lo que puede encontrar confusión. Cuando se elije un ejemplo, el profesor necesita predecir lo que el estudiante puede encontrar interesante o motivante. Cuando se asigna una tarea, el profesor necesita anticipar qué es probable que el estudiante hará con ésta y si la encontrará fácil o difícil. El profesor también debe ser capaz de escuchar e interpretar las ideas emergentes e incompletas expresadas en las formas y el uso del lenguaje de los estudiantes. Cada una de esas tareas requiere una interacción entre el entendimiento matemático específico y la familiaridad con los estudiantes y su pensamiento matemático. **Lo**

[4] El profesor debe ser capaz de hablar explícitamente acerca de cómo el lenguaje matemático es usado; cómo elige, hace y usa las representaciones matemáticas efectivamente, es decir, reconocer las ventajas y desventajas de usar una u otra representación, todo ello son ejemplos de formas de descompresión o desempaquetamiento en el trabajo del profesor con las matemáticas.

central de esas tareas es el conocimiento de las concepciones y concepciones erróneas acerca de un contenido matemático particular. En cada caso el conocimiento de los estudiantes y el contenido es una amalgama, involucrando una idea matemática particular o procedimiento y familiaridad con lo que frecuentemente piensa o hace el estudiante (Ball, 2008).

El Conocimiento del contenido y la enseñanza (CC-En) combina conocimiento acerca de la enseñanza y conocimiento acerca de las matemáticas. Muchas de las tareas de la enseñanza matemática requieren un conocimiento matemático para el diseño de instrucción, tales como elegir con cuáles ejemplos se va a empezar y cuáles se usarán para profundizar en el contenido, evaluar las ventajas y desventajas de la representación usada para enseñar una idea específica e identificar qué métodos diferentes y procedimientos se permitirá en la instrucción. También incluye la capacidad que tiene el profesor para "*decidir qué aportaciones de los estudiantes tomar en cuenta, cuáles ignorar y cuáles destacar para usarlas posteriormente. […] cuándo aclarar más una idea, cuándo hacer una nueva pregunta o encomendar una nueva tarea para fomentar más el pensamiento matemático de los alumnos"* (Ball et al., 2008, p.401).

Cada una de esas tareas requiere una interacción entre entendimiento específico matemático y un entendimiento de las cuestiones pedagógicas que afectan el aprendizaje del estudiante. Se considera que CC-En es una amalgama entre el conocimiento del contenido y las habilidades más potentes para enseñar ese contenido (Ball et al., 2008).

Ahora bien, pensando en los escenarios que surgen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; en el caso por ejemplo de analizar un error de un estudiante, un profesor puede averiguar qué salió mal analizando el error matemático, qué medidas tomó, y qué suposiciones hizo. Otro profesor puede entender el error porque quizá lo ha visto en otros estudiantes que han tenido el mismo problema, se puede considerar entonces que el primer maestro está utilizando el CEC mientras que el segundo está usando el CC-Es. Ball et al. (2008) consideran que el hecho de encontrar situaciones que se pueden gestionar utilizando diferentes tipos de conocimiento surge de la fortaleza de su trabajo; dado que su teoría está enmarcada en la práctica, permite aumentar la probabilidad de que los conocimientos identificados sean relevantes en la misma, sin embargo como en el ejemplo, se debe

poder distinguir el uso de uno y otro.

En este sentido, investigadores como Silverman y Thompson (2008, citado en Sosa, 2010) mencionan que hace falta un mayor esclarecimiento de los distintos subdominios del CME presentados por Ball et al. (2008). Nosotros nos proponemos ahora revisar el trabajo doctoral de Sosa (2010) en el cual se presenta una matización de cada uno de los subdominios, formulando para cada uno ciertos descriptores que se evidencian desde la práctica de dos profesoras que forman parte de su estudio. Cabe aclarar que nos centraremos en el CDC y específicamente el Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (CC-Es) dado el interés de nuestro trabajo.

La investigación se desarrolla con dos profesoras del último año de bachillerato de distintos Institutos de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la ciudad de Huelva, España. Una de ellas cuenta con una experiencia de 21 años e impartía el curso de matemáticas a estudiantes de la especialidad de Ciencias Sociales. La otra, acumula 13 años de experiencia e impartía el curso de matemáticas, a un grupo de la especialidad de Científico Tecnológico. Ambas cuentan con una licenciatura en Matemáticas. Ellas son elegidas por ser reconocidas como excelentes profesionales por sus pares, por sus estudiantes y por autoridades de su institución. Las edades de los estudiantes que ambas atienden están entre 17 y 18 años. El método utilizado en esta investigación es el estudio de dos casos (Sosa, 2010).

Sosa (2010) en su estudio hizo uso de varias fuentes de evidencia, que van desde la observación en el aula, notas de campo, cuestionarios, hasta entrevistas.

Con la información que recaba, Sosa (2010) matiza el CC-Es con 20 descriptores los cuales presentamos a continuación:

CC-Es1	Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático).
CC-Es2	Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.
CC-Es3	Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase.
CC-Es4	Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática.
CC-Es5	Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido.
CC-Es6	Saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico.
CC-Es7	Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocando por un despiste al hacer una(s) operación (es) o transformación (es), o por no dominar el contenido que se les está presentando.

CC-Es8	Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas para evitar confusiones y errores.
CC-Es9	Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.
CC-Es10	Saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema.
CC-Es11	Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro.
CC-Es12	Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse en si pueden usar una propiedad.
CC-Es13	Saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto (que puede aparecer en el libro de texto).
CC-Es14	Saber que los estudiantes entenderán “mejor” el ejemplo si antes de empezar a hacerlo se les remarcan las principales características del concepto que se usará en el ejemplo.
CC-Es15	Saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema.
CC-Es16	Saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar por primera vez un método o regla que estaba diseñado para otro caso o situación del contenido.
CC-Es17	Saber que los estudiantes, al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema.
CC-Es18	Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema.
CC-Es19	Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento.
CC-Es20	Saber lo que a los estudiantes les parecerá interesante, motivador o desafiante en el ejemplo que el profesor elija para enseñar el contenido.

Sosa (2010) considera que en estos descriptores del CC-Es hay distintas naturalezas, por lo que formula ciertas categorías y los descriptores que quedan incluidos en cada una de ellas: Escuchar e interpretar (CC-Es1); necesidades y dificultades (CC-Es2); confusiones y/o equivocaciones (CC-Es3, CC-Es7, CC-Es8, CC-Es9); no saben/no recuerdan/no ven/o no se fijan (CC-Es4, CC-Es11, CC-Es12); quedarse con una imagen inadecuada (CC-Es5); cansado y aburrido (CC-Es6); interesante, motivador o desafiante (CC-Es20); respuesta intuitiva (CC-Es10); lo que les será más comprensible o resolver fácilmente (CC-Es13, CC-Es14, CC-Es19); obstáculos comunes para llegar a la solución (CC-Es15, CC-Es16, CC-Es17, CC-Es18).

Quisiéramos puntualizar sobre la importancia que tiene el estudio de dificultades y concepciones erróneas para los autores que hemos revisado, para la conformación de nuestro marco teórico. Para Shulman (1986) dicho estudio es una componente importante en el entendimiento didáctico de la materia, y lo ubica en el corazón de la definición del CDC. Así mismo, para Ball et al. (2008), lo central para poder llevar a cabo las tareas propuestas en el subdominio del CC-Es del CDC es el conocimiento de las concepciones y concepciones erróneas acerca de un contenido matemático particular y por su parte Sosa (2010) considera que se puede debatir si varios de los restantes 19 descriptores están incluidos en el descriptor CC-Es2 que consiste en saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre un contenido matemático; así pues, se deja ver la importancia que tiene indagar sobre el conocimiento del profesor de las dificultades o concepciones erróneas de los estudiantes sobre un tópico particular, para dar cuenta de su conocimiento didáctico general sobre éste y particularmente sobre el CC-Es.

Dado que en este trabajo tenemos la intención de responder a la pregunta ¿Qué conocimiento del contenido y de los estudiantes (CC-Es) posee el profesor del nivel medio superior en el contexto del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales? y considerando la especificidad de cada una de las categorías propuestas por Sosa (2010), consideramos más cercanas las siguientes:

- Necesidades y dificultades (CC-Es2)
- Confusiones y/o equivocaciones (CC-Es3, CC-Es7, CC-Es8, CC-Es9)
- Quedarse con una imagen inadecuada (CCEs5)

No obstante lo anterior, estaremos atentos a identificar cualquiera de los descriptores que se puedan presentar.

Para finalizar este capítulo comentaremos que el conocimiento profesional del profesor, la forma en que se estructura, así como sus características están siendo ampliamente estudiadas en Matemática Educativa; los trabajos presentados en párrafos anteriores, nos permitirán observar y analizar nuestros datos, para así poder dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

4. METODOLOGÍA

Coincidimos con Bisquerra (2004) que el investigador debe acercarse a la realidad sabiendo qué debe observar, cómo y cuándo actuar, además de saber cómo obtener información relevante (informantes claves), y saber o en su caso dilucidar sobre las técnicas de recogida de información y cómo analizar dicha información. Es precisamente en esta parte del trabajo donde hablaremos sobre estos aspectos tan fundamentales en toda investigación.

Dicho lo anterior, nos parece conveniente partir desde nuestra pregunta de investigación la cual es:

¿Qué conocimiento del contenido, y de los estudiantes (CC-Es) posee el profesor del nivel medio superior en el contexto del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales?

Nos interesa saber en particular del conocimiento por parte del profesor de las dificultades o concepciones alternas de los estudiantes al abordar este tema.

Como ya hemos mencionado, los objetivos que nos hemos fijado para contestar esta pregunta son los siguientes:

Objetivo general:

Indagar sobre el estatus del conocimiento didáctico del contenido del profesor de nivel medio superior, en particular del conocimiento del contenido y de los estudiantes (CC-Es) en el contexto del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Objetivos particulares:

- Indagar sobre el conocimiento por parte del profesor de las concepciones erróneas o alternas de los estudiantes al estudiar el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

- Indagar sobre cómo el conocimiento de las dificultades de los estudiantes al estudiar el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales, es utilizado en secuencia de enseñanza del mismo.

Con estos objetivos en mente y tomando en cuenta que éstos nos permitirán dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, creemos conveniente hablar sobre nuestro instrumento para la toma de datos que consiste en la elaboración de una entrevista semi-estructurada.

Antes de hablar de manera general sobre la estructura de la entrevista, es necesario que dilucidemos sobre el porqué hemos considerado realizar una entrevista semi-estructurada para la toma de datos.

Consideramos a la entrevista una conversación formal con una intencionalidad, la cual lleva implícitos unos objetivos englobados en una investigación, ésta permite profundizar nuestro conocimiento sobre un determinado proceso o situación. En nuestra investigación deseamos información específica sobre el conocimiento por parte del profesor de las concepciones erróneas o alternas de los estudiantes al estudiar el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales y coincidimos con Bisquerra (2004), en que

> *"las entrevistas semi-estructuradas parten de un guion que determina de antemano cuál es la información relevante que se necesita obtener, por lo tanto existe una acotación en la información. Las preguntas en este formato, se elaboran de forma abierta, lo que permite obtener una información más rica en matices" (p.337).*

Considerando que contamos de antemano con información relevante emanada de la revisión realizada en nuestro capítulo de antecedentes, tenemos la oportunidad de crear un esquema flexible de interrogación. Consideramos por lo anterior, que una entrevista semi-estructurada es adecuada para la recogida de la información que nos permitirá alcanzar los objetivos de nuestro trabajo.

Hablaremos entonces sobre los elementos que tomamos en cuenta para el diseño de nuestra entrevista y realizaremos un análisis a priori de la misma.

Nuestra entrevista semi-estructurada esta dividida en dos secciones. La primera parte tiene el propósito de obtener información sobre la formación profesional del docente, su experiencia laboral etc., así como saber sobre los elementos que utiliza para preparar sus clases; para irnos adentrando, pedimos información general sobre la forma en la que aborda el tema de sistemas de ecuaciones lineales. En la segunda parte de la entrevista se elaboran una serie de preguntas que cuentan con varios incisos que en su conjunto tienen la intención de indagar sobre el CC-Es del profesor en los rubros: "Necesidades y dificultades" (CC-Es2), "Confusiones y/o equivocaciones" (CC-Es3, CC-Es7, CC-Es8, CC-Es9), así como "Quedarse con una imagen inadecuada" (CCEs5).

La segunda parte de la entrevista se conforma con la información de las categorías elaboradas en el capítulo de antecedentes de este trabajo; la Tabla 1 resume la información.

DIFICULTAD O CONCEPCIÓN	TRABAJO EN EL CUAL SE REPORTA
Interpretar punto de corte de dos rectas como solución del sistema.	Eslava y Villegas (1998), Cutz (2005), Alcocer (2007), Ramírez (2008), Ochoviet (2009)
Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución.	Eslava y Villegas (1998), Mora (2001), Alcocer (2007), Manzanero (2007), Ochoviet (2009)
Dificultad en transitar entre la representación gráfica y analítica de los sistemas.	Marines y Monroy (1998), Eslava y Villegas (1998), Cutz (2005)
Interpretación alterna del concepto sistema	Cutz (2005), Ochoviet (2009)
Dificultad en considerar las configuraciones geométricas posibles para un sistema de dos o tres incógnitas sin solución.	Marines y Monroy (1998), Ochoviet (2009)
Dificultades referentes a conocimientos previos.	Panizza et al. (1999), Ramírez (2008), Ochoviet (2009)

Tabla 1. Categorías de Dificultades y/o Concepciones sobre la solución de ecuaciones lineales.

4.1 ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA A PRIORI

4.1.1 PRIMERA PARTE DE LA ENTREVISTA

1. ¿Qué estudios realizaste? Incluye estudios universitarios, posgrados y cursos de actualización o capacitación docente.

2. ¿Actualmente en qué institución laboras?

3. ¿Durante cuántos años has laborado como docente y en qué nivel educativo?

4. ¿Qué cursos has dado?

Las preguntas 1-4 nos permitirán saber acerca de la formación del docente entrevistado y su experiencia laboral, es decir, los años que tiene de experiencia como profesor de matemáticas, así como saber si cuenta con algunos cursos de pedagogía. Es importante mencionar que esperamos que la mayoría de ellos cuente con formación de matemáticas o carreras afines debido a que ese es el requisito que se pide para poder ser profesor de matemáticas en el nivel medio superior.

5. Cuando preparas clases, actividades, tareas y exámenes, ¿cuáles son los materiales en los que te apoyas?

Esperamos que el profesor revise textos clásicos de matemáticas para este nivel; nos interesa saber si el profesor revisa artículos de investigación educativa, consideramos importante esta pregunta por que nos da información de las fuentes en las cuales basa sus elecciones didácticas en general, aunque creemos que la mayoría de ellas se obtienen de la práctica docente.

6. ¿Podrías decir de manera general la forma en que inicias el tema de solución de un sistema de ecuaciones lineales, y cuál es la secuencia de enseñanza que sigues, así como la razón por la que lo haces de esta manera?

Consideramos que esta pregunta nos puede dar información en cuanto a lo que el profesor considera la enseñanza del tema solución de un sistema de ecuaciones lineales, es decir, en qué hace hincapié en la enseñanza de este tema, en qué profundiza etc., así mismo nos interesa verificar si toma en cuenta en su secuencia didáctica, las dificultades que presentan los estudiantes al estudiar este tópico matemático.

7. ¿Cómo explicas a los estudiantes el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales?

Esta pregunta se encuentra implícita en la anterior, sin embargo nos interesa hacerla de manera explícita porque esperamos que el profesor hable de los casos distintos de solución, es decir, solución única, infinitas y no solución y quizá la interpretación geométrica de las mismas. Las investigaciones revisadas[5] *en sus sugerencias didácticas, mencionan que es importante que en la enseñanza de este tópico matemático se den a conocer los distintos tipos de solución de un sistema de ecuaciones lineales para lograr un entendimiento profundo.*

8. Cuando enseñas el tema de sistema de ecuaciones lineales, ¿cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes?

Esta pregunta la hacemos en este momento, para ver si de acuerdo a lo dicho en esta pregunta, se ve una relación en cuanto la secuencia didáctica que sigue el profesor, dadas las dificultades que ha observado. Por otro lado y muy importante, nos interesa saber si de manera explicita menciona algunas de las dificultades reportadas en las investigaciones revisadas.

4.1.2 SEGUNDA PARTE DE LA ENTREVISTA

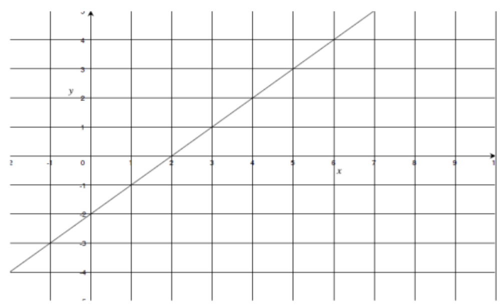
En esta segunda parte se realizarán una serie de preguntas que se formulan usando ideas de entrevistas realizadas en los trabajos que conforman nuestros antecedentes. Cada una de las preguntas se seleccionó en relación a las categorías que formamos en ese mismo capítulo. En el caso de la categoría "Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución", decidimos elaborar tres preguntas porque consideramos en cada una de ellas se pueden observar distintos aspectos del CC-Es e incluso del CEC.

Como observaremos, las preguntas tienen una estructura similar. Una constante en cada una, es pedir al profesor que hable sobre las dificultades que en su

[5] En el capitulo II referente los antecedentes de este trabajo, los investigadores realizan sugerencias didácticas en torno al concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

experiencia pueden presentar los estudiantes para responder a la pregunta en cuestión. También se le pide hacer un análisis del error del estudiante. Estos incisos tienen la misma intención en cada pregunta; lo que cambia es la categoría en la cual se enmarca la pregunta. Hacemos esta aclaración porque sólo en la pregunta 9 explicitaremos nuestra intención de realizar estas preguntas y en las subsecuentes sólo si es necesario puntualizaremos sobre aspectos particulares.

9. En el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿consideras que la siguiente gráfica podría representar un sistema de ecuaciones lineales 2x2?



a) ¿Qué respuesta aceptarías como correcta por parte de tus estudiantes?

La categoría en la cual se enmarca esta pregunta es: Dificultad en transitar entre la representación gráfica y analítica de los sistemas. Porque si bien, analíticamente se puede representar por dos ecuaciones donde una es múltiplo de la otra, este mismo sistema gráficamente es una sola recta en el plano y esta información deja claro en el plano analítico que multiplicar una ecuación por un número distinto de cero, resulta en una ecuación equivalente a la primera. Cabe mencionar que esta pregunta la elegimos de entre varias por que consideramos que muestra la dificultad y la importancia de transitar entre las diferentes representaciones de un sistema de ecuaciones lineales.

b) Un estudiante responde a la pregunta 9 diciendo que NO. ¿Por qué piensas que el estudiante respondió de esta manera?

Al pedirle al profesor que analice el error del estudiante creemos que puede hacerlo desde sus ideas matemáticas, con lo cual según nuestro marco teórico (Ball et al., 2008) estaría usando el CEC, o en su caso podría hacerlo desde lo que ha visto en casos similares con los estudiantes, y en este caso estaría usando el CC-Es. En cualquiera de los dos casos, nos interesa observar cómo reflexiona el profesor acerca de estas dificultades y más aun ver, si le son familiares o no.

10. Proporciona un sistema de ecuaciones lineales 2x2 que tenga como solución única el punto (2, 1).

a) Si le hicieras esta pregunta a un estudiante, como respuesta correcta ¿qué aceptarías?

La categoría en la cual se enmarca esta pregunta es: Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución. En este caso, esperamos que el profesor pueda generar fácilmente un sistema de ecuaciones 2x2 que tenga dicha solución.

b) ¿Qué tipo de respuestas esperarías que dieran los estudiantes?

c) ¿Qué tipo de dificultades consideras que podrían presentar?

Consideramos que en esta parte el profesor podría no sólo decir cuáles son las dificultades que se pueden presentar, sino que también nos diga el porqué de estas dificultades.

Un estudiante responde a la pregunta diciendo "necesito otro punto para poder hacerlo".

d) ¿Por qué supones que el estudiante responde de esta manera?

Con los anteriores incisos, esperamos tener respuesta a si el profesor conoce esta dificultad y además sobre su conocimiento matemático al respecto, sin embargo, también se podría hacer la siguiente pregunta para complementar.

e) Dada la respuesta del estudiante y las consideraciones que realizaste en el inciso anterior ¿qué explicación le darías al estudiante sobre el hecho que no necesita dos puntos?

Estamos interesados en observar los elementos que incorpora para elaborar una explicación, es decir, conociendo la dificultad específica del estudiante y una vez analizada la respuesta.

11. En el siguiente sistema a, b, c indican números reales:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ ax + by = c \end{cases}$$

¿Cuántas soluciones puede tener este sistema? Proporciona un ejemplo para cada caso.

La categoría en la cual se enmarca esta pregunta es: Dificultad en considerar las *propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución. Nos queda claro que para que el profesor reflexione sobre esta pregunta tendrá que dar las condiciones para las cuales el sistema tiene una, ninguna o infinitas soluciones, lo que nos lleva a analizar el conocimiento del contenido del profesor; además como ya mencionamos nos interesa también saber sobre la familiaridad de este tipo de preguntas y dificultades.*

a) Si le hicieras esta pregunta a tus estudiantes ¿qué respuestas esperarías?
b) ¿Qué tipo de dificultades piensas que pudieran tener en responder?
c) ¿Qué respuestas considerarías correctas?
d) Un estudiante respondió a la pregunta con el siguiente sistema para el caso de un sistema sin solución.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = 10 \end{cases}$$

e) ¿Qué piensas que lleve al estudiante a responder de esta manera?

El inciso e) se planteará sólo en el caso que el profesor en el inciso b) no considerara esta dificultad.

12. Si le preguntaras a un estudiante ¿Cuáles son las configuraciones geométricas posibles de un sistema de ecuaciones 3x2, para que el sistema no tenga solución?

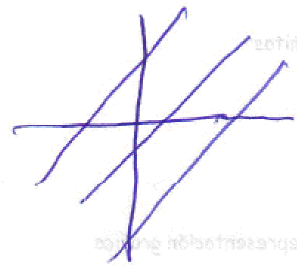
a) ¿Qué aceptarías como respuesta correcta?

Esta pregunta se enmarca en la categoría: Dificultad en considerar las configuraciones geométricas posibles para un sistema de dos o tres incógnitas sin solución. Dado los casos reportados en los que algunos estudiantes afirman que hay tres soluciones en el caso geométrico de tres rectas que se intersecan dos a dos, siendo éste un caso sin solución. Consideramos importante esta pregunta en el sentido de si el profesor está familiarizado con las configuraciones para el caso sin solución. Esta información nos da cuenta del conocimiento de tales dificultades de los estudiantes.

b) ¿Cuál crees que sería la respuesta más común?

Espero que el profesor diga que rectas paralelas, si no es así, le daría el siguiente inciso.

Se le hizo la pregunta a un estudiante y realizó la siguiente gráfica como



respuesta.

c) ¿Por qué crees que sólo da esta configuración y qué explicación le darías para que reflexionara sobre las otras configuraciones?

Esta pregunta se realiza si el profesor en el inciso a) dio otras representaciones del caso de no solución.

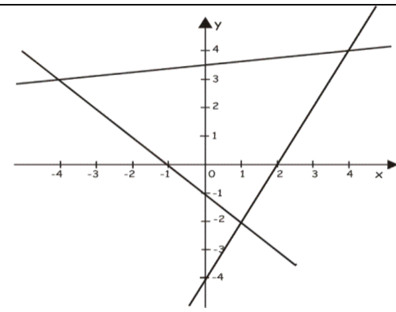
13. ¿Cuáles son las condiciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para que tenga solución única?

A lo que un estudiante respondió "para que tenga solución única tendría que ser el mismo número de variables para el mismo número de ecuaciones"

Esta pregunta se enmarca en la categoría: Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución, pero enfocada al caso de solución única, es decir, poder hacer explicitas las condiciones sobre los coeficientes de las ecuaciones que conforman el sistema para que éste tenga una única solución.

a) ¿Consideras que el estudiante respondió correcta o incorrectamente? ¿Por qué?

14. A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?



Si hicieras esta pregunta a tus estudiantes

a) ¿Qué respuestas esperarías?
b) ¿Qué respuestas aceptarías como correctas?

Esta pregunta se enmarca en dos categorías: Interpretar punto de corte de dos rectas, como solución del sistema e Interpretación alterna del concepto sistema. Decidimos formular una pregunta para ambas categorías por la relación que hay entre ellas. Nos interesa observar si para el profesor es familiar esta concepción alterna.

c) Se le hizo la pregunta a un estudiante y respondió “en mi opinión tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos diferentes.
d) Dada la respuesta del estudiante, ¿podrías decir cuál es la concepción que tiene del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales?

15. ¿Qué es lo que podría estar conduciendo a los estudiantes a dar respuestas como las expuestas a lo largo de la entrevista?

Esta pregunta es para finalizar la entrevista, y es a modo de reflexión para profesor.

Cabe aclarar que la categoría de *Dificultades referentes a conocimientos previos* no fue incluida en la segunda parte de la entrevista, ya que consideramos que en la parte en la que el profesor habla sobre la manera que aborda el tema, es muy probable que hable sobre los conocimientos previos necesarios para abordar el tema, y de no ser así, tenemos la libertad de preguntar a ese respecto.

Esta entrevista se aplicó inicialmente a un profesor con la idea de hacer un refinamiento de la misma; después de aplicarla se hicieron cambios referentes a la redacción de algunas preguntas porque consideramos que expresan mejor la intención que tenemos. El diseño final de la entrevista se encuentra en el anexo I de nuestro trabajo y es el que se aplicó a los otros profesores.

4.2 LOS PARTICIPANTES

En el nivel medio superior del sistema educativo mexicano, el requisito indispensable para poder dar clases de matemáticas es contar con una licenciatura en matemáticas o carreras afines, así como contar con ciertos años de experiencia en la enseñanza de la matemática. Si bien los profesores en este nivel tienen este perfil dado que es precisamente el que institucionalmente se pide, sabemos que también hay profesores con estudios de maestría o doctorado en matemáticas o áreas afines.

Reflexionando para determinar las características que deben poseer los participantes de este estudio, llegamos a las consideraciones siguientes: dado que la población de profesores en la cual se desarrolla nuestro estudio regularmente no cuenta con formación didáctica, consideramos que su CC-Es se ha construido en la sabiduría de la práctica, por lo que consideramos muy importante que los participantes hayan dado varias veces el curso en el cual se estudia el tema de sistemas de ecuaciones lineales y para garantizarlo, pediremos que cuenten con un mínimo de 5 años de experiencia en este nivel, además de contar específicamente con licenciatura en matemáticas, ya que consideramos que la mayoría de los profesores de este nivel cuentan con ella.

Con estas consideraciones elegimos a tres profesores que forman parte de nuestra investigación. La descripción específica de cada uno de ellos se realiza al inicio del análisis de su respectiva entrevista.

4.3 EL ESPACIO FÍSICO

Las entrevistas tuvieron lugar en los respectivos cubículos de los profesores entrevistados. En el lugar se contaba con un escritorio, sillas y se contó con una grabadora de audio digital.

4.4 APLICACIÓN DE LA ENTREVISTA

Las entrevistas fueron realizadas en forma individual y en distintas fechas, se les pidió a los profesores que pudieran contar con un espacio de dos horas en el que se pudiera generar un espacio sin interrupciones de ningún tipo. Las preguntas de la entrevista se leyeron, y al término de una se proporcionaba la siguiente. También fueron suministradas de manera escrita; en todo momento se podía retomar lo dicho en alguna pregunta/respuesta previa, si así se consideraba conveniente.

Se les proporcionó a los participantes hojas de papel y lápices para escribir lo necesario. La duración de cada una de las entrevistas fue en el rango de 1:30 a 2 horas aproximadamente.

4.5 CONVERSIÓN DE LA INFORMACIÓN RECOGIDA EN DATOS

Una vez efectuada la entrevista semi-estructurada a cada uno de los profesores en estudio, realizamos las transcripciones de éstas. Dichas transcripciones aparecen en el ANEXO II; una vez realizada la transcripción se dio inicio al análisis de la información.

5. ANÁLISIS DE LOS DATOS

5.1 ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA A D1

5.1.1 DESCRIPCIÓN DEL DOCENTE 1 (D1)

La información que presentaremos a continuación es tomada de la entrevista semi-estructurada realizada.

D1 realizó estudios de licenciatura en matemáticas, cuenta con 14 años de experiencia como docente de matemáticas, de los cuales 12 han sido en el nivel medio superior y dos en secundaria. No ha tomado cursos de pedagogía; no ha tomado cursos de capacitación o actualización impartidos o promovidos por las instituciones en las cuales ha laborado, tampoco por iniciativa propia. Ha impartido cursos del nivel bachillerato tales como álgebra, geometría, cálculo diferencial e integral y temas selectos de matemáticas, es decir, ha impartido todos los cursos concernientes al nivel medio superior de su institución.

ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA

Iniciaremos con el análisis de cada una de las preguntas que forman parte de la entrevista. También incluiremos una tabla que nos permite resumir en términos generales la información que obtuvimos.

Análisis de la pregunta 3

Cuando preparas clases, actividades, tareas y exámenes, ¿cuáles son los materiales en que te apoyas? En esta pregunta D1 comenta que sólo utiliza libros de matemáticas, considera que éstos son apropiados. **D1:** "…*Muchos de los ejercicios que están ahí pues son apropiados, en realidad el trabajo de un docente para ese menester, es escoger bien los ejercicios de diferentes textos…ahora el problema más bien dicho es la selección y la profundidad con la que quiere uno poner."* Elegir con cuáles ejemplos se va empezar y cuáles se usarán para profundizar en el tema es parte del CC-En y observamos lo claro que es para D1 la importancia de esta tarea. Nos menciona que sólo utiliza libros de matemáticas, no utiliza artículos de investigación educativa, ni libros de didáctica de la matemática.

Análisis de la pregunta 4

¿Podrías decir de manera general la forma en que inicias el tema de solución de un sistema de ecuaciones lineales, y cuál es la secuencia de enseñanza que sigues?

En términos generales, la secuencia de enseñanza que se menciona es iniciar recordando o enseñando en esencia lo que es una ecuación, luego presenta los sistemas de ecuaciones lineales haciendo hincapié en solución simultánea, después métodos de solución y al final ve método gráfico.
Podemos analizar la secuencia de enseñanza en tres momentos, lo referente a conocimientos previos, que es aquello que el profesor considera crucial para entender el tema que se pretende enseñar, después analizaremos lo que considera enseñar sistemas de ecuaciones lineales y finalizaremos puntualizando los descriptores del CME que identifiquemos en su secuencia de enseñanza.

Conocimientos previos
D1 considera que se debe empezar por explicar la terminología que se emplea en las ecuaciones, la ecuación como una igualdad y el método de cómo resolver una ecuación. Lo considera importante porque en su experiencia los estudiantes no distinguen de una ecuación y una expresión algebraica.

D1:*"…Les cuesta mucho trabajo entender qué es una ecuación, no la relacionan con una igualdad, piensan por ejemplo 3x + 3y, es una ecuación."*

Enseñar sistemas de ecuaciones lineales
Notamos que cuando D1 se refiere a los sistemas de ecuaciones lineales, habla en términos de *ecuaciones simultáneas*, y a nuestra forma de ver su enfoque es diferente de enseñar sistemas de ecuaciones lineales en su generalidad. Para D1 lo importante es ver los sistemas en los cuales hay solución única y en este caso ver los métodos para encontrar la solución así como ver cómo ésta satisface las ecuaciones del sistema. Los casos de infinitas soluciones y no solución los ve como casos excepcionales y considera que no se deben ver en el principio por que pueden causar mucha confusión.

D1: *"…Cuando hay solución única y ese es el caso digamos más común, y ya los otros casos son excepcionales y no se deben ver al principio… esos casos particulares podrían crear mucha confusión y mucha duda a los estudiantes."*

En la revisión que hicimos de los trabajos de investigación, se constata que la representación gráfica es fundamental para lograr un conocimiento profundo de los sistemas; de hecho se busca desde el inicio que los estudiantes logren transitar entre una representación analítica y una representación gráfica. Para

D1 la representación gráfica es vista como 'el método gráfico' y no profundiza mucho en ello.

D1: "*…Una vez visto cómo se pueden resolver los sistemas pues ver también el método gráfico, y ahí se verá que la solución de un sistema 2x2, pues es la intersección de dos rectas, hay que hacer ver que una ecuación lineal está representada por una recta ¿no?, ya hablar de coordenadas un tanto, pero no meterse muy profundamente.*"

D1 menciona que hace mucho hincapié en la simultaneidad, es decir, que el punto encontrado con los métodos vistos es una solución de todas las ecuaciones del sistema. Se centra en sistemas 2x2 y cuando se habla de sistemas mucho más grandes utiliza el método de Gauss para encontrar la solución, piensa que trabajar sólo con los coeficientes es más operativo.

Consideramos que para D1 enseñar el tema de sistemas de ecuaciones lineales es enseñar los métodos de solución, ya que cuando se le pregunta ¿cuál es la razón por la que sigue esta secuencia de enseñanza? Responde en términos de los métodos.

D1:"*…Justamente ahí es donde la experiencia me ha dicho, que se facilita mucho más la solución así, usando ese método (reducción) por ejemplo para sistemas de dos ecuaciones ¿no?, es mucho más efectivo y más comprensible.*"

E: ¿Todo el tema?, porque al final lo que yo estoy preguntando es ¿cuál es la razón por la que lo haces de esta manera? Me refiero a la secuencia para la enseñanza del tema, entonces ¿consideras que así es más comprensible el tema?

D1: *"Sí, porque la experiencia me ha dicho, porque los otros métodos, si ciertamente son efectivos pero paradójicamente, sólo para ecuaciones relativamente sencillas, por ejemplo el método de igualación…"*

La secuencia de enseñanza es guiada principalmente por su postura sobre la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales, que como ya discutimos es centrarse en el caso de solución única para sistemas cuadrados. Principalmente se enfoca en sistemas 2x2 y en torno a este caso ve los métodos de solución, particularmente el que D1 considera más efectivo (reducción); después sin profundizar mucho, ve los casos de no solución e infinitas soluciones y tampoco profundiza mucho en la representación gráfica de los sistemas.

Como dijimos, ya para finalizar el análisis de esta pregunta, presentaremos los descriptores del CME que identificamos en la secuencia de enseñanza.

Descriptor	En dónde se identifica
CC-Es4 Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática	En el inicio de la secuencia D1 anticipa que los estudiantes no saben o no recuerdan el concepto de ecuación, y dedica parte de la exposición a este respecto.
CC-En Elegir con cuáles ejemplos se va a empezar y cuáles se usarán para profundizar en el contenido.	D1 indica la importancia de la elección de los ejemplos y ejercicios según la profundidad con la que se abordará un tema.
CC-Es9 Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.	Cuando D1 enseña los métodos para encontrar la solución de un sistema; sabe que muchas veces los estudiantes encuentran la solución sin saber en esencia qué están encontrando, por lo que hace hincapié en el significado de solución en ese contexto.
CC-Es2 Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.	D1 decide enseñar principalmente un método de solución (reducción), ya que considera que si enseña todos los métodos en un principio tendrán dificultades en la comprensión de cómo encontrar la solución única del sistema.

Tabla 2.1 Descriptores del CME identificados en la secuencia de enseñanza que emplea D1, de acuerdo a sus comentarios durante la entrevista

Análisis de la pregunta 7

E: ¿Cómo explicas a los estudiantes el concepto solución de un sistema?

D1: *"Les digo justamente que los valores de la solución satisfacen a ese sistema de ecuaciones y ¿qué quiere decir satisfacer? Pues que la igualdad se hace verdadera, es la verificación entonces, con eso se llega a la conclusión de que verdaderamente se resolvió bien la ecuación."*

Esta respuesta tiene coherencia con la postura de D1 identificada en párrafos anteriores; el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales para D1 está totalmente relacionado a encontrar la única solución usando los métodos de solución. Verificar si la solución encontrada satisface las ecuaciones se relaciona con haber resuelto bien el sistema. El concepto solución no es visto de una manera más amplia en el sentido de incluir, a parte del caso de solución única, los casos de infinitas y ninguna solución.

Análisis de la pregunta 8

E: Cuando enseñas el tema de sistema de ecuaciones lineales, ¿cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes?

En esta parte D1 habla de dos dificultades muy específicas.

D1: *"…Les cuesta mucho trabajo entender qué es una ecuación, no la relacionan con una igualdad […] Lo mismo la cuestión de la simultaneidad que tiene que ser al mismo tiempo, eso es lo que más les cuesta trabajo."*

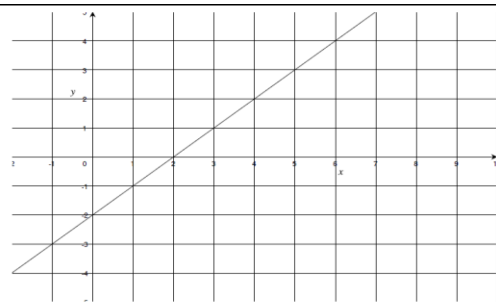
Ambas dificultades forman parte de las categorías que integramos en el capítulo de antecedentes de nuestro trabajo.
La primera de ellas se enmarca en: Dificultades referentes a conocimientos previos.
La segunda se enmarca en: Interpretar punto de corte de dos rectas como solución del sistema.

Desde nuestro punto de vista, tales dificultades son tomadas en cuenta en la secuencia de enseñanza que D1 nos menciona. Lo consideramos así ya que decide empezar con los conocimientos previos que en este caso se relacionan con el concepto de una ecuación de primer grado con dos incógnitas y sus soluciones, y la cuestión de la simultaneidad es abordada cada que se encuentra la solución de un sistema.

Podemos añadir a este análisis que si bien D1 toma en cuenta las dificultades de los estudiantes en su secuencia de enseñanza, lo que guía la misma, es lo que considera se debe enseñar en este tema. Como ya mencionamos es el caso de solución única a través de los métodos de solución y cómo esta solución satisface a todas las ecuaciones.

Análisis de la pregunta 9

E: En el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿consideras que la siguiente gráfica podría representar un sistema de ecuaciones lineales 2x2?



a) ¿Qué respuesta aceptarías como correcta?

D1:*"Tendría que responder que efectivamente representa un sistema de ecuaciones lineales, pero…obviamente si tiene chanfle esto, para el estudiante jaja si una ecuación lineal es una recta, él me dice que debe haber por lo menos dos, que es lo que estamos viendo, entonces ahí lo pones a …. No lo sé…"*

Observamos que D1 reconoce nuevamente que usualmente en su clase ve el caso 2x2 con solución única; pero consideramos que sabe bien qué tipo de dificultad causaría en los estudiantes, sin embargo para D1 esta pregunta tiene un truco y parece que no lo considera como una situación a para aplicar en su clase.

¿Qué respuestas esperarías?

D1:*"Como tiene un chanfle muy curvado, yo esperaría que me dijera que no, creo que es una respuesta espontánea ya que en clase no se vieron este tipo de sutilezas […] Cuando tengo dos rectas paralelas o cuando tengo una sola recta que está representada por dos ecuaciones, estos son casos que digamos salen de lo común y de lo general de la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales".*

E: Un estudiante responde a la pregunta 9 diciendo que NO. ¿Por qué piensas que el estudiante respondió de esta manera?

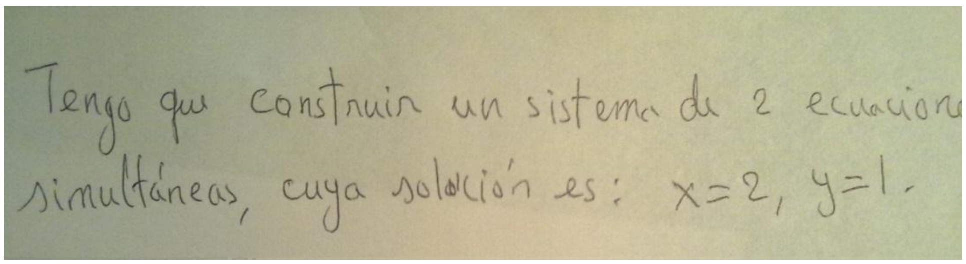
Consideramos que para analizar la respuesta del estudiante, D1 no utiliza el CEC y tampoco el CC-Es, observamos que acepta que no ve el caso de infinitas soluciones, lo que determina que el estudiante no pueda responder a esta pregunta por la forma que se aborda el tema.

Análisis de la pregunta 10

E: Proporciona un sistema de ecuaciones lineales 2x2 que tenga como solución única el punto (2, 1).

f) Si le hicieras esta pregunta a un estudiante, como respuesta correcta ¿qué aceptarías?

Esperábamos que D1 respondiera rápidamente a esta pregunta, no necesariamente porque considerara que sus estudiantes pudieran hacerlo fácilmente, sino porque se le pregunta qué aceptaría como respuesta correcta. Además pensamos que en la práctica los profesores deben poder crear al momento ejemplos donde de antemano sepan qué solución tendrán y pensamos que eso es muy común en clases, sin embargo no fue así. D1respondió lo siguiente:



D1:* *"Eso yo aceptaría como respuesta, incluso así sin construirlo es la idea, para mí sería correcta esa respuesta".

Al insistir sobre que se debe proporcionar un sistema, intenta crear un sistema que no tenga esa solución.

D1*: *"O sea, yo respondo negativamente… para no estar pensando exacatamente en un sistema así construirlo… que sí se puede pero va a tardar…"

En esta respuesta, para nosotros es contundente que D1 habitualmente no construye sistemas de ecuaciones que tengan una solución específica, porque aunque después logra construirlo podemos observar que esta tarea es totalmente nueva para D1.

Nos queda claro entonces que aunque D1 pudo construir el sistema, no está familiarizado con esta tarea, lo que implica que tampoco ha propuesto este tipo de tareas a sus estudiantes. Por lo anterior no es consciente de las dificultades relacionadas a este tipo de situaciones, más aún, consideramos que no se ha cuestionado cuáles son los conocimientos que permiten crear un sistema que tenga una solución específica, lo cual sería parte del CEC. Luego se le pregunta lo siguiente sobre esta situación:

E: ¿Conceptualmente qué no les permitiría a los estudiantes dar el sistema?

Esta pregunta se le plantea de maneras distintas durante la entrevista con la intención de profundizar a este respecto. D1 responde de manera general a esta pregunta, diciendo que normalmente cuesta más o menos trabajo en matemáticas, pero no logra concretar una respuesta sobre los conocimientos que permiten crear un sistema de ecuaciones lineales con una solución específica.

***D1:* “*El partir de un sistema y encontrar la solución digamos es lo directo y esto (señalando la solución (2,1)) es lo inverso, los caminos inversos en matemáticas ofrecen más dificultad, tienes que deshacer…”*

E: ¿Tú qué consideras que tendría que saber un estudiante para poder plantearlo?

D1: *“Pues justamente eso, que una forma es la directa y que la otra es la indirecta o inversa.”*

E: ¿Cómo hacemos nosotros para dar el sistema? ¿Sabemos que los coeficientes son arbitrarios? ¿Qué condiciones deben cumplir? ¿Qué debemos saber sobre eso?

D1: *“Pues precisamente en la sustitución o la verificación se ve que hay que multiplicar el valor de la x por un número y luego hay que sumarle o restarle otro número multiplicado por la y.”*

Observamos en las respuestas del profesor que según nuestro marco teórico, hay falta de CEC[6] que es el que le permitiría hacer específicos y explícitos los conocimientos que hay detrás para poder dar un sistema que tenga una solución específica.

E: Un estudiante responde a la pregunta diciendo “necesito otro punto para poder hacerlo”.
¿Por qué supones que el estudiante responde de esta manera?

***D1:* “*Pues ahí hay varias posibilidades, que probablemente esté confundiendo un sistema con una sola ecuación y él esté pensando que dos puntos le determinan una ecuación. Pero ahí hay una confusión, porque no se está tratando de una ecuación sino de dos y la generalidad de la solución de un sistema, pues es el corte de dos rectas que se representan por dos ecuaciones,*

[6] El conocimiento especializado del contenido CEC es el conocimiento matemático y habilidades únicos para la enseñanza (Ball et al., 2008). En este caso, desde nuestro punto de vista, dicho conocimiento permitiría al profesor saber cuáles son los conocimientos que entran en juego para poder responder a ciertas preguntas, y con ese saber, realizar el diseño de instrucción adecuado para desarrollar dichos conocimientos en los estudiantes.

salvo que sea excepcional el estudiante y esté pensando en un sistema que tenga un número infinito de soluciones lo cual dudo.”

Identificamos en la respuesta de D1 que para analizar la respuesta del estudiante, recurre al CC-Es, dado que hace referencia acerca de cómo piensan los estudiantes sobre los elementos que determinan la ecuación de una recta en este caso, la necesidad de dos puntos.

Podemos decir también que dado su conocimiento de matemáticas, D1 puede reflexionar sobre la respuesta del estudiante y efectivamente llega a la raíz del error, lo que en la práctica le permitiría al profesor elaborar una explicación específica en cada caso.

Análisis de la pregunta 11

E: En el siguiente sistema a, b y c indican números reales:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ ax + by = c \end{cases}$$

¿Cuántas soluciones puede tener este sistema? Proporciona un ejemplo para cada caso.

f) Si les hicieras esta pregunta a tus estudiantes ¿qué respuestas esperarías?

D1: *“…Cuando a, b y c no son proporcionales a los valores 2, 3 y 5, entonces habrá una y sólo una solución, pero cuando los valores a y b son proporcionales al 2 y al 5 y la c es distinta del 5, entonces ahí son paralelas las dos rectas que representan esas ecuaciones y por lo tanto no habrá solución. Ahora, cuando la a, b y la c son proporcionales al 2 al 3 y al 5, pues entonces será una sola recta”.*

Curiosamente en esta pregunta D1 responde de manera fluida dejando ver que posee el CCC y proporciona un ejemplo para cada caso. Nos parece muy interesante que cuando hace explícitas las condiciones para que un sistema tenga una, ninguna o infinitas soluciones, siempre lo hace transitando entre el contexto algebraico y el geométrico, sin embargo en su clase no aborda la representación geométrica de estos sistemas.

Por otro lado, desde nuestro punto de vista en este momento D1 observa la diferencia de hablar de sistemas de ecuaciones lineales en general y no sólo el caso con solución única a la que del se refiere como ecuaciones simultáneas.

D1:*“…Si uno sólo dice un sistema de ecuaciones lineales obliga a dar* *condiciones para ver cuando es única la solución, cuando no tiene solución y cuando tiene un número infinito de soluciones, en tanto que cuando utilizas simultáneas, se da por sentado que tanto en una como en otra, deben ser los mismos valores, eso es lo que agrega el término simultáneo".*

En cuanto a las dificultades que esperaría menciona lo siguiente.

D1: *"Se les podría dificultar por ejemplo entender la proporcionalidad, que no se entiende qué es proporcional. La proporcionalidad se refiere a que los coeficientes de una son los mismos múltiplos de la otra y ahí es la misma recta".*

Observamos que D1 menciona algunas dificultades que pueden presentar los estudiantes a este respecto y para explicarlas nuevamente habla y relaciona la parte geométrica con la analítica, lo curioso es que en su clase prescinde de este tránsito entre ambas representaciones para explicar el tema.

D1*: "Otra dificultad en cuanto a las rectas paralelas, es que ahí todavía no se ve el concepto de pendiente y entonces se trata de ver que el coeficiente de la x y el de la y están en proporción y el independiente no."*

E: Mencionas que cuando ves este tema no se ha visto el concepto de pendiente; éste se ve en matemáticas II y sistemas de ecuaciones lineales en matemáticas III.

D1: *"Ah entonces se puede hablar que tienen la misma pendiente."*

En esta parte consideramos que hay dos cuestiones fundamentales en las cuales nos gustaría profundizar.
Primero, consideramos que se evidencia la importancia del conocimiento curricular vertical, ya que D1 debería tener claro después de 9 años trabajando en la institución, cuáles son los temas previos a este curso que se han revisado respecto a este concepto y así tomarlos en cuenta en el diseño de instrucción.
Segundo, interpretamos que habla de dificultad en cuanto a rectas paralelas, pero la dificultad que menciona, radica en que no se ha visto el tema de pendiente y así poder explicar por qué cuando todos los coeficientes de dos ecuaciones son proporcionales el sistema tiene infinitas soluciones y cuando sólo los coeficientes de la x y la y son proporcionales y los del término independiente no, entonces se trata de un sistema sin solución. Interpretamos en su respuesta que reconoce que hablar de estos casos sin la interpretación geométrica es un problema que quizá no había considerado por no abordarlos en clase.

Continuamos con la entrevista.

E: Un estudiante respondió a la pregunta con el siguiente sistema para el caso de un sistema sin solución.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = 10 \end{cases}$$

E: ¿Qué pienses que lleve al estudiante a responder de esta manera?

D1: *"…Probablemente se quedó con la idea de que deben ser proporcionales, pero no todos, ¿no? Hay una diferencia en los términos independientes…simplemente aquí aplicamos el concepto de ecuación, ¿qué quiere decir una ecuación? Quiere decir una igualdad de manera que todo lo que haga del lado izquierdo, yo lo tengo que hacer del lado derecho para que se mantenga, esta sigue siendo la misma ecuación…"*

D1 analiza matemáticamente la respuesta del estudiante utilizando CEC. Aunque no aborda esta situación en clase, observamos en su respuesta que sabe que puede haber confusión en cuanto a la proporcionalidad de los coeficientes, pero al mismo tiempo consideramos que su apreciación no hace referencia al porqué de la confusión. En la revisión realizada en el capítulo de antecedentes, se menciona que los estudiantes tratan de recordar (usan la memoria) para responder a este tipo de preguntas, y se recomienda que se dote de significado vía la representación geométrica (Mora, 2001). Concluimos entonces que D1 está consciente de esta confusión, pero no de la posible causa y esta distinción es importante ya que la causa del error o confusión es la que lleva a los profesores a formular explicaciones poderosas específicas para el estudiante.

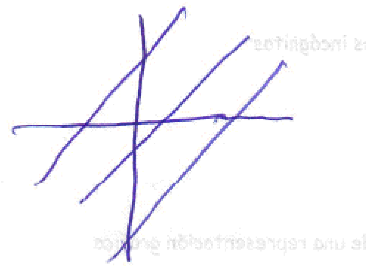
Análisis de la pregunta 12

E: Si le preguntaras a un estudiante ¿cuáles son las configuraciones geométricas posibles de un sistema de ecuaciones 3x2, para que el sistema no tenga solución?

a) ¿Qué aceptarías como respuesta correcta?

El profesor realiza todas las configuraciones posibles del sistema 3x2 para el caso sin solución. Observamos mientras lo hacía, que fue un caso de reflexión, no algo que previamente hubiera tenido en mente.

E: Se le hizo la pregunta a un estudiante y realizó la siguiente gráfica como



respuesta.

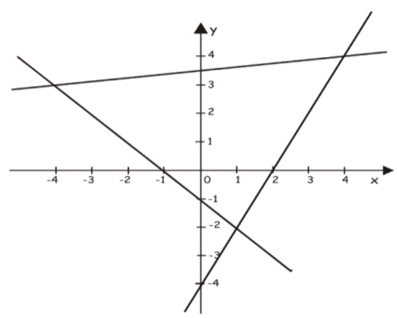
¿Por qué crees que sólo da esta configuración y qué explicación le darías para que reflexionara sobre las otras configuraciones?

D1: *"…Trasladó el caso de dos ecuaciones, en donde se ve sólo dos rectas para el caso sin solución, y automáticamente generalizó el caso de dos rectas a tres y no imaginó otros casos, me parece que ése es un ejercicio de imaginación. Le explicaría los otros casos y por qué…"*

Identificamos que en este caso utiliza el CC-Es ya que hace referencia acerca de cómo piensan los estudiantes.

Análisis de la pregunta 13

E: *A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?*



Si hicieras esta pregunta a tus estudiantes

e) ¿Qué respuestas esperarías?

D1: "*En mi experiencia, ellos dirían que sí hay solución y es muy posible que* *digan que hay tres soluciones, porque se cortan en tres puntos.”*

Además de que D1 tiene claro que el sistema en cuestión no tiene solución, observamos en su respuesta que efectivamente recurre al CC-Es, es decir, consideramos que hace referencia a cómo pueden pensar los estudiantes acerca del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

E: ¿Cuál consideras que es su concepción?

D1: *“Pues esa, justamente esa, que la solución de un sistema de ecuaciones es cuando se corta, no importa cómo se corta, para ellos si se corta ya tiene solución, pero justamente ahí está faltando esa palabra de simultánea… Considero que una posible causa, es que no se hace hincapié en que* ***cuando hay solución*** *es simultánea.”*

Desde nuestro punto de vista, cuando D1 dice *“cuando hay solución es simultánea”*, implícitamente está diciendo que no siempre la hay y consideramos entonces que comparar sistemas con solución única, con otros sistemas donde no hay solución ayudan a construir este concepto. D1 deja claro que es consciente de que los estudiantes pueden llegar a construir el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales como punto de corte, y en consecuencia, considerar que el sistema en cuestión tiene tres soluciones.

Análisis de la pregunta 14

E: ¿Qué es lo que podría estar conduciendo a los estudiantes a dar respuestas como las expuestas a lo largo de la entrevista?

D1: *Pues justamente que hay que hacer mucho énfasis en el significado exacto de ese vocabulario, hay que recrear las clases, no sólo decir lo que está en los textos, sino, tratar de usar un lenguaje cotidiano, hacer hincapié en lo que es una ecuación y los conceptos. Y lo de simultaneidad…*

Observamos en esta reflexión, que para D1 no está presente la idea de ver todos los casos de solución de un sistema, ni tampoco ver la representación geométrica como una estrategia para mejorar la enseñanza del tema. Sólo se refiere a un uso adecuado de terminología.

Análisis de la pregunta 15

E: ¿Cuáles son las condiciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para que tenga solución única?
A lo que un estudiante respondió “para que tenga solución única tendría que ser el mismo número de variables para el mismo número de ecuaciones”

a) ¿Consideras que el estudiante respondió correcta o incorrectamente? ¿Por qué?

D1: “*Pues… se ve que el estudiante sí reflexionó, y es una de las condiciones para que tenga una solución única, pero tiene que agregarle mucho más y para ello hay que agregarle lo de los coeficientes*.”

E*:* Ah, ¿te refieres a que el que sea cuadrado es una condición necesaria para que haya solución?

D1: “*Sí, es una condición pero no es la única, y las condiciones van a recaer sobre los coeficientes y ya vimos por ejemplo en el caso de dos ecuaciones, que en primera no tienen que ser proporcionales los coeficientes, sencillamente ahí se podría responder que no deben ser proporcionales los coeficientes.”*

Observamos en esta respuesta que el profesor no había reflexionado en las condiciones para que un sistema tenga única solución y lo está construyendo durante la entrevista.

E: Entonces tú dirías que la respuesta es parcialmente correcta, o sea es correcta, pero le faltó añadir cosas.
D1: “*Sí así es*.”

Esta pregunta se relaciona mucho con la pregunta 11, de hecho ambas se encuentran en la categoría: Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución. Observamos que D1 al no haber reflexionado previamente sobre las condiciones para que un sistema tenga solución única, da esta respuesta, sabemos que un sistema no necesariamente tiene que ser cuadrado para tener solución única[7]. La relación que se presenta entre la pregunta 11 y esta pregunta nos da un claro ejemplo de la profundidad del CCC que se puede llegar a tener; el caso de la pregunta 11 pide que D1 elabore un ejemplo 2x2 (un sistema cuadrado) que tenga única solución y D1 elabora dicho ejemplo, es decir, cuenta con el conocimiento para elaborarlo. Consideramos que esta pregunta requiere un conocimiento más profundo ya que habla de las

[7] Podemos pensar en el caso de un sistema 3x2, donde los coeficientes de las variables no son proporcionales y que gráficamente son tres rectas en el plano las cuales se cortan en un solo punto; este sistema no es cuadrado y tiene solución única.

condiciones para que un sistema nxm tenga solución única y además adiciona una de las dificultades que se han reportado; dicha combinación propicia confusión, que es lo que consideramos pasó con D1.

Ahora presentamos una tabla que permite resumir el análisis realizado hasta ahora; como se pudo apreciar, cada pregunta cuenta con cierta estructura, cada una se enmarca dentro de una categoría y dentro de cada pregunta se encuentran otras que nos permiten observar el CCC, análisis del error y conocimiento de las dificultades, y con dicha información es que conformamos la siguiente tabla.

<table>
<tr><th rowspan="2">Categoría</th><th rowspan="2">Conocimiento del contenido</th><th colspan="2">Conocimiento utilizado para el Análisis del error</th><th rowspan="2">Conocimiento o familiaridad con la dificultad.</th></tr>
<tr><th>CC-Es</th><th>CEC</th></tr>
<tr><td>Interpretar punto de corte de dos rectas como solución del sistema.</td><td>Sí</td><td colspan="2">CC-Es</td><td>SÍ</td></tr>
<tr><td>Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución.
<table><tr><td>Única sol.</td><td>Infinitas sol.</td><td>No solución</td></tr><tr><td>Pregunta 10, 11, 13</td><td>Pregunta 11</td><td>Pregunta 11</td></tr></table></td><td>Pregunta 10: Sí
Pregunta 11: Sí
Pregunta 13: No</td><td colspan="2">Pregunta 10: CC-Es
Pregunta 11:
Pregunta 13: Ninguno</td><td>Pregunta 10: Sí
Pregunta 11: Sí
Pregunta 13: No</td></tr>
<tr><td>Dificultad en transitar entre la representación gráfica y analítica de los sistemas.</td><td>Sí</td><td colspan="2">Ninguno</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Interpretación alterna del concepto sistema</td><td>Sí</td><td colspan="2">CC-Es</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Dificultad en considerar las configuraciones geométricas posibles para un sistema de dos o tres incógnitas sin solución.</td><td>Sí</td><td colspan="2">CC-Es</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Dificultades referentes a conocimientos previos.</td><td colspan="4">Consideramos que el profesor aborda algunos de los conocimientos previos para este tema: concepto ecuación, solución de una ecuación, método para encontrar soluciones. Consideramos que concuerda con la forma en que aborda el tema.</td></tr>
</table>

Tabla 2.1.1 de Resumen de la Entrevista a D1

5.2 ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA A D2

5.2.1 DESCRIPCIÓN DEL DOCENTE 2 (D2)

La información que presentaremos a continuación es tomada de la entrevista semi-estructurada realizada.

D2 realizó estudios de licenciatura obteniendo el título de Físico Matemático, con especialidad en matemáticas puras, y una maestría en matemáticas con especialidad en topología algebraica, de ésta tiene el 100% de los créditos, no ha obtenido el grado. Tomó un curso sobre constructivismo impartido en una institución en la cual trabajó; el curso duró tres días y fue impartido por un investigador español.

En cuanto a su experiencia profesional, imparte clases desde hace 10 años a nivel superior en la carrera de Actuaría, y lleva 9 años impartiendo clases en nivel medio superior. Ha impartido en la universidad los cursos de álgebra superior I, II; álgebra lineal I, II; geometría analítica I, II; cálculo diferencial e integral I, II, III y IV; análisis matemático y los cursos de probabilidad y estadística; en la preparatoria ha dado Matemáticas I, II, III, IV, V y temas selectos de matemáticas; no ha dado probabilidad y estadística que también forma parte del currículo de la institución en la cual labora.

Análisis de la entrevista

Iniciaremos con el análisis de cada una de las preguntas que forman parte de la entrevista. También incluiremos una tabla que nos permite resumir en términos generales la información que obtuvimos.

Análisis de la pregunta 3

E: Cuando preparas clases, actividades, tareas y exámenes, ¿cuáles son los materiales en que te apoyas?

En esta pregunta D2 comenta que utiliza libros de matemáticas, historia de las matemáticas, enseñanza de las matemáticas o de problemas; sin embargo D2 considera que es la experiencia la que le ha permitido elaborar los materiales que ahora aplica en sus cursos.

***D2**: "… Con la experiencia vas viendo que hay algunos ejercicios que funcionan más que otros, gran parte del material que ahora aplico es el que de alguna manera he ido transformando a lo largo de los años…"*

Advertimos que el profesor busca ejercicios en los libros con la idea de encontrar los que en su experiencia funcionan mejor, nos parece importante que externe que además los tiene que adaptar o transformar para sus estudiantes; esta tarea requiere conocimiento específico de lo que los estudiantes pueden encontrar fácil o difícil y desde nuestro marco es parte del CC-Es.

Menciona que lo anterior es en cuanto a la práctica, pero hay ciertos aspectos teóricos que no ha encontrado en los libros y dado que considera importante explicar esto a sus estudiantes, lo hace desde su reflexión.

D2: "*La parte conceptual por ejemplo ¿por qué menos por menos es mas? yo no he encontrado a un nivel básico que lo expliquen, ya en libros de álgebra superior sí…[] ¿por qué la multiplicación de fracciones es como es?; ¿por qué es numerado por numerador y denominador por denominador?, yo no lo he encontrado en libros y como es parte de lo que me gusta dar, entonces más bien es una reflexión que yo he hecho y lo explico…[] el conocimiento global que puedo tener, saber por qué es así, trato de bajarlo, entonces es una parte de textos de actividades y últimamente una parte de reflexión".*

Notamos que el profesor ha ido construyendo su CEC, es decir, el saber por qué un procedimiento funciona, saber por qué un procedimiento es de determinada forma, es parte del CEC y este conocimiento matemático y habilidades son únicos para la enseñanza. Distinguimos en la respuesta de D2 que considera importante incorporar esto a su clase y lo supone parte de su labor.

Análisis de la pregunta 4

¿Podrías decir de manera general la forma en que inicias el tema de solución de un sistema de ecuaciones lineales, y cuál es la secuencia de enseñanza que sigues?

En términos generales, la secuencia de enseñanza que se menciona es iniciar con la parte histórica, después explicar cada uno de los términos, ecuación, solución etc., y método de solución, esto para una ecuación; después se pasa a hablar de sistemas de ecuaciones lineales desde el punto de vista geométrico, se habla sobre los casos de solución de un sistema (una, infinitas,

ninguna), después métodos algebraicos y se finaliza con planteamiento y solución de problemas.
Analizaremos la secuencia de enseñanza en tres momentos, lo referente a conocimientos previos, que es aquello que el profesor considera crucial para entender el tema que se pretende enseñar, después analizaremos lo que considera enseñar sistemas de ecuaciones lineales y finalizaremos puntualizando los subdominios o descriptores del CME que identifiquemos en su secuencia de enseñanza.

Conocimientos previos
D2 considera que se debe empezar por la parte histórica, explicar la terminología que se emplea en las ecuaciones, la ecuación como una balanza y el método de cómo resolver una ecuación. Lo considera importante para poder empezar a hablar de sistemas de ecuaciones.

D2: *"… Empiezo incluso con la parte histórica, les digo que el problema fundamental de álgebra es precisamente resolver ecuaciones, y ya me voy con la cuestión de explicar cada uno de los términos incluso etimológicamente y les digo que inicialmente álgebra era un método para resolver las ecuaciones, es el método de eliminación y restitución, les digo que estudiar álgebra, el corazón del álgebra, pues es resolver ecuaciones o en este caso resolver un sistema pues ya es el siguiente paso; entonces la idea de despeje viene de esa idea de eliminar y restituir como en una balanza, y entonces cuando ya se tiene en mente qué es una ecuación, de dónde viene el nombre, el método, vamos al paso de entender qué es un sistema…"*

Enseñar sistemas de ecuaciones lineales
Notamos que en la secuencia de enseñanza que D2 nos menciona, el hilo conductor es la representación de éstos en el ámbito geométrico, es decir, enseñar sistemas de ecuaciones lineales para D2 es abordar éstos tanto geométricamente como analíticamente.

D2: "*...Debemos verlo geométricamente primero, se observa que una ecuación representa una recta y la intersección de esas rectas es el punto que satisface o que es solución de ambas ecuaciones y vemos geométricamente que puede ser que sea un punto de intersección, o sean paralelas pero iguales y que sean infinitas soluciones o paralelas y distintas, entonces ellos ya saben que tienen tres opciones: una solución, infinitas soluciones o ninguna…"*

Advertimos también que el ámbito geométrico es considerado para el profesor más que el método gráfico, lo utiliza como un medio para que los estudiantes encuentren significado en lo que están haciendo, además como una estructura de control que les permite a los estudiantes verificar si sus resultados son correctos.

D2: *"… Ya tienen las bases de la geometría, ya no les cuesta trabajo graficar una recta, entonces cuando las soluciones son enteras, pues funciona muy bien como método, pero cuando la solución es un número fraccionario enseguida se dan cuenta que es insuficiente, entonces, sí lo doy como un método y después cuando no son soluciones enteras pues como un esbozo, entonces les pido que hagan la gráfica y que vean si su solución se aproxima a lo que ven gráficamente, es decir, si es congruente el dibujo y el análisis, si no lo es, pues quiere decir que la gráfica por ahí falló un elemento o el análisis también un signo o algo falló… […] Si tu les das a los estudiantes solamente una cuestión metodológica como que es muy árido, si empiezan a ver varios elementos, pues empieza a haber un atractivo de que se va a hacer una gráfica, entienden lo que están haciendo, entienden la interpretación y no solamente el decir resuelvo o aplico un método para resolver una ecuación y quien sabe qué signifique, entonces por lo menos tienen un ancla que saben qué están haciendo, lo que significa..."*

En la revisión que hicimos de los trabajos de investigación, se constata que la representación gráfica es fundamental para lograr un conocimiento profundo de los sistemas; de hecho se busca desde el inicio que los estudiantes logren transitar entre una representación analítica y una representación gráfica, desde nuestro punto de vista D2 está consciente de estos beneficios.

En un segundo momento, enseña los métodos algebraicos de solución; menciona que dependiendo del grupo, aborda uno o varios, señala que esto lo decide dependiendo del grupo; también en esta parte aborda si lo considera conveniente, la regla de Cramer.

D2: *"Luego vemos la necesidad de usar otros métodos ya que cuando las soluciones no son enteras ya no es tan preciso, uno da una aproximación y cuando uno hace la sustitución pues se ve que no… entonces hacemos el método gráfico y entonces hacemos el método analítico y entonces ya vemos algunos métodos dependiendo de cómo este, el grupo, de las insuficiencias o dudas del grupo, les doy varios métodos de solución y si esta fallando les doy un método, o sea el geométrico y un analítico; y si van muy bien hasta la regla de Cramer con la idea de motivar qué significa el determinante, si el determinante es cero qué pasa, es decir, cómo traducirlo a la cuestión geométrica, si el determinante es diferente de cero qué pasa…"*

En esta parte de la entrevista corroboramos que la parte geométrica para D2 dota de significado a los procedimientos que está enseñando y vemos que es el hilo conductor de su secuencia de enseñanza.

En un tercer momento D2 aborda la solución de problemas usando sistemas de ecuaciones lineales, lo que D2 llama 'problemas de aplicación'.

Ahora ya para finalizar el análisis de esta pregunta, presentaremos los descriptores o en su caso los subdominios del CME que identificamos en la secuencia de enseñanza.

Descriptor	Momento de la entrevista donde se identifica
CC-Es4 Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática.	En el inicio de la secuencia D2 anticipa que los estudiantes no saben o no recuerdan el concepto de ecuación, solución y método para encontrar las soluciones; D2 inicia su secuencia con la explicación a este respecto.
CC-En Elegir con cuáles ejemplos se va a empezar y cuáles se usarán para profundizar en el contenido.	D2 indica la importancia de la elección de los ejemplos y ejercicios, en el sentido que algunos funcionan más que otros.
CC-Es Anticipar lo que el estudiante encontrará fácil o difícil.	D2 hace referencia a que regularmente a algunos estudiantes no les cuesta trabajo graficar una recta, dados los antecedentes en este tema. D2 considera desde su práctica que regularmente esta tarea es fácil para los estudiantes.
CC-Es9 Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.	Cuando D2 enseña los métodos para encontrar la solución de un sistema, sabe que muchas veces los estudiantes encuentran la solución sin saber en esencia qué están encontrando, por lo que brinda la representación geométrica de los sistemas para que los estudiantes encuentren significado en los procedimientos.
CC-Es2 Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.	D2 considera las insuficiencias del grupo para decidir si enseña dos o más métodos de solución de los sistemas, con la idea de facilitar la comprensión de cómo encontrar la solución del sistema.
CC-Es7 Saber que los estudiantes	Consideramos que D2 está

pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocando por un despiste al hacer una(s) operación (es) o transformación (es), o por no dominar el contenido que se les está presentando.	anticipando el hecho de que los estudiantes pueden equivocarse en algún signo, algún cálculo, etc., y brinda la representación geométrica como una estructura de control, con la idea de que el estudiante tenga un referente que le permita verificar sus resultados.
Conocimiento Curricular.	Identificamos que el profesor sabe cuáles son los temas que se han revisado previos a este curso, tal es el caso de la ecuación de la recta que se estudia un semestre antes.

Tabla 2.2 Descriptores del CME identificados en la secuencia de enseñanza que emplea D2, de acuerdo a sus comentarios durante la entrevista

Análisis de la pregunta 7

E: ¿Cómo explicas a los estudiantes el concepto solución de un sistema?

D2: *"… Me voy hasta en el lenguaje, ya que les digo que para entender el concepto solución, nos vamos primero a una ecuación de primer grado con coeficientes enteros que es más sencillo y les digo qué es una ecuación y les digo qué es una igualdad y luego les explico qué es una solución y les digo que es él o los valores que satisfacen una ecuación, es decir, que cuando evalúas este valor en la ecuación, se cumple la identidad numérica…[] y les pongo ejemplos de cuando hay más soluciones, cuando hay infinitas soluciones o cuando no hay solución."*

Hallamos coherencia en la secuencia de enseñanza de D2 y la respuesta a esta pregunta, ya que para D2 el concepto solución de los sistemas de ecuaciones lineales incluye los casos de solución única, infinitas soluciones y no solución y así mismo lo presenta a sus estudiantes.

Análisis de la pregunta 8

E: Cuando enseñas el tema de sistema de ecuaciones lineales, ¿cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes?

En esta parte D2 habla de cuatro dificultades muy específicas. A continuación extraemos de la entrevista, la parte en la cual menciona tres de ellas.

D2: *"…Si les enseñas algún método, de reducción y saben que tienen que eliminar una variable e incluso saben por cuál número deben multiplicar la ecuación para que puedan eliminar una variable, y a la hora de multiplicar lo hacen inadecuadamente y peor aún a la hora de sumar las ecuaciones en lugar de restar suman y no se elimina ninguna de las variables…[…] Otra dificultad va justamente sobre el concepto, es decir, como que es difícil que le den un fondo a las cosas, ellos trivializan lo que es una ecuación, una solución, lo hacen a destajo, hacen y hacen pero finalmente no saben qué están haciendo…[…] Otro punto, es que yo veo que hay cierta preferencia, entonces los que son geométricos les encanta la geometría de las rectas y eso, y la parte algebraica se les complica, o presentan problemitas así de que se confunden, porque creo que saben que lo pueden hacer del otro lado (refiriéndose a la parte geométrica) y algunos es el otro caso, lo hacen muy bien en la parte algebraica y la parte geométrica se les complica…"*

Notamos que identifica dificultad sobre conocimientos tales como simplificación de términos semejantes o multiplicación de signos y que esto les condiciona el hecho de no poder resolver un sistema por alguno de los métodos vistos.
Menciona una segunda dificultad referente a entender qué es una ecuación y qué es la solución de una ecuación.
Menciona una tercera dificultad que tiene que ver con el tránsito entre una representación geométrica y una analítica.
Estas dificultades mencionadas por D2 forman parte de las categorías que integramos en el capítulo de antecedentes de nuestro trabajo.
La primera y segunda se enmarcan en: Dificultades referentes a conocimientos previos.
La tercera se enmarca en: Dificultad en transitar entre la representación gráfica y analítica de los sistemas.

La cuarta dificultad que menciona es referente al planteamiento y solución de problemas que se resuelven mediante un sistema de ecuaciones lineales como muestra el siguiente extracto.

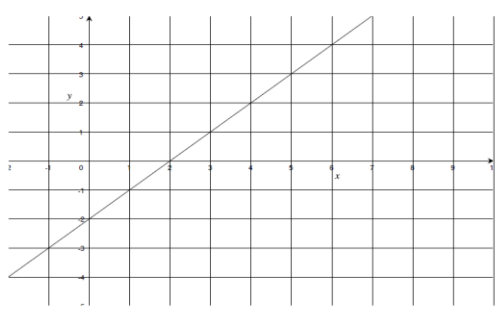
D2: *"Cuando planteamos problemas, es la ruptura de la parte práctica y la parte teórica conceptual y no logran unir esto… […] Es decir, la parte de ver y relacionar lo que se ha estado haciendo en otros contextos… ese poder conectar lo aprendido con algo real, se les complica, les es totalmente ajeno*…[…] *A nivel conceptual veo que no son capaces de reconocer resultados* *ilógicos."*

Notamos que dado que D2 acostumbra en su secuencia de enseñanza abordar el planteamiento y solución de problemas, menciona cuáles son las dificultades de los estudiantes respecto a este punto y describe cuáles pueden ser las causas que detonan esta dificultad.

Desde nuestro punto de vista, tales dificultades son tomadas en cuenta en la secuencia de enseñanza que D2 nos menciona. Lo consideramos así ya que decide empezar con los conocimientos previos y dado que sabe que los estudiantes pueden hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo, brinda la representación geométrica de los sistemas para que los estudiantes encuentren significado en los procedimientos; consideramos que D2 inicia el estudio de los sistemas desde un punto de vista geométrico con la idea de que haya más comprensión y de brindar a los estudiantes una visión más completa de los sistemas de ecuaciones lineales.

Análisis de la pregunta 9

E: En el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿consideras que la siguiente gráfica podría representar un sistema de ecuaciones lineales 2x2?



¿Qué respuesta aceptarías como correcta?

D2: *"Pues las dos, si me dicen sí o no, podría aceptarla como correcta…[…] Si alguien sólo ve la recta y piensa que ese es la única ecuación que hay, podría decir, yo nada más veo una recta, es un sistema de 1x2. Si bien podría pensar que es incompleta la respuesta, sí está haciendo un análisis, tiene en la mente una concepción geométrica de ver rectas y si me contesta así, pues parcialmente yo diría que esta bien."*

Identificamos que D2 usualmente en su clase ve el caso 2x2 con infinitas soluciones; consideramos que sabe qué tipo de dificultad causaría en los estudiantes esta pregunta, de hecho nos menciona cómo aborda este tema en clase:

D2: *"Gráficamente lo que hago es, la primera gráfica la grafico en un color y la otra la pongo un milímetro arriba y la pongo con otro color, digo es la misma…*[…] *si la encimo no se aprecia pero es la misma, pero sí, geométricamente es eso, una recta."*

E: Un estudiante responde a la pregunta 9 diciendo que NO. ¿Por qué piensas que el estudiante respondió de esta manera?

D2: "*Sí bueno, él asume que un sistema 2x2 hay dos rectas, ¿no? pero como ve una recta, pues… pero incluso olvida los ejes que también son rectas, y olvida esta posición de que puede ser la misma, una recta paralela igual. Pero tiene una lógica en él, incompleta sí pero hay una lógica."*

Consideramos que para analizar la respuesta del estudiante, D2 utiliza el CEC dado que hace referencia a las ideas matemáticas que posiblemente tuvo el estudiante para responder a esta pregunta.

Análisis de la pregunta 10

E: Proporciona un sistema de ecuaciones lineales 2x2 que tenga como solución única el punto (2, 1).
Si le hicieras esta pregunta a un estudiante, como respuesta correcta ¿qué aceptarías?
D2 responde a esta pregunta de manera fluida y sin ninguna vacilación, por lo que consideramos que para D2 esta tarea es conocida.

D2: "*Pues primero graficaría mi punto (2,1) y a partir de este punto puedo construir cualquier recta porque… pongo mi ecuación en la forma punto pendiente y precisamente este punto es el que tengo y entonces lo único que hago es, para dar dos rectas doy dos pendientes, por ejemplo si doy $m = 1$, tendría la siguiente ecuación, y si doy $m = -1$ una pendiente a -45 grados y ya están mi par de rectas.*"

Observamos que D2 grafica primeramente el punto (2,1) y de ahí empieza a trabajar analíticamente, y va construyendo a la par el sistema, es decir, traza una recta en su dibujo con $m = 1$ y la sustituye en la ecuación de la recta y así para $m = -1$; nos parece interesante, porque pudo haber dado el sistema sólo de manera analítica o en su caso de manera geométrica, sin embargo proporciona ambas representaciones del sistema.

E: ¿El estudiante tendría que darte ambas representaciones para que tú consideraras que está bien?

D2: *"No, puede darme sólo la parte analítica, yo la escribí para visualizar, ya que yo conecto mucho las dos partes y siempre trato de hacerlo así, ya que muchos no hacen esto solos, entonces ven el dibujo y por ejemplo puse pendientes muy sencillas y gráficamente sé cómo se ven; en realidad un estudiante podría decirme simplemente pongo dos pendientes y en general eso me representa un sistema de ecuaciones… […] Tendría que especificar que* $m_1 \neq m_2$ *entonces ya ni siquiera dan esta en particular, dan una familia de sistemas que tienen como única solución (2,1), pero es ahí donde va el concepto, quien hace esto (*señalando el caso particular*), lo hace y lo hace bien, tiene el concepto básico, pero quien sea capaz de decir que puede dar cualquier pendiente ya tiene en mente que hay muchos sistemas de ecuaciones que tienen esa solución."*

E: ¿Qué tipo de respuestas esperarías que dieran los estudiantes?

D2: "*Bueno, el problema no es de rutina, no es de estarlos poniendo, incluso el nombre 2x2, yo no lo uso…*[…] *es que por ejemplo en matemáticas III, no llegamos a ver sistemas 3x3 sólo vemos 2x2, entonces como sólo vemos 2x2, como que es innecesario decir 2x2, en temas selectos pues sí nos metemos con sistemas mayores y matrices y determinantes y ahí es otra cosa, pero donde está el grueso de alumnos es en matemáticas III y es ahí donde todos lo tienen que ver."*

En esta respuesta observamos dos aspectos importantes; el primero es que el profesor admite que sólo ve sistemas cuadrados incluso en R^3 o en más variables observamos una tendencia a expresar sistemas cuadrados. El segundo aspecto es que este tipo de preguntas no es común que las haga a sus estudiantes, sin embargo reconoce que sí las ha llegado a realizar.

D2: *"Este tipo de preguntas las he llegado hacer justamente como a nivel conceptual a ver qué contestan o a lo mejor no tratando de darle mucho peso…"*

E: ¿Qué tipo de dificultades consideras que podrían presentar?

D2: *"… Nadie la ha respondido y mucho menos dar una familia de sistemas con tal solución, más bien lo que han hecho es poner dos puntos y calculan las rectas… […] No ligan esta idea de la ecuación de la recta con el único cambio* *de la pendiente, entonces si les pongo esto, más bien hacen la gráfica y a partir de la gráfica como que intentan…”*

Observamos que D2 al haber puesto este tipo de preguntas a sus estudiantes, tiene ideas acerca de cuáles pueden ser las dificultades que éstos pueden tener para responder y también lo que ellos pueden intentar hacer para responder correctamente a la pregunta. D2 nos menciona que siempre dice a sus estudiantes que para determinar la ecuación de una recta se necesitan dos puntos, y por ello considera que es posible que ellos necesiten otro punto para crear la ecuación de cada recta, es decir, necesitan dos puntos más. D2 no necesitó 2 puntos más para responder a la pregunta, en realidad eligió arbitrariamente valores distintos para las pendientes de las rectas y proporcionó el sistema, por lo que decidimos preguntarle lo siguiente:

E: ¿Conceptualmente qué no les permitiría a los estudiantes dar el sistema?

D2: “*… Creo que es difícil el cuestionamiento, porque incluso si haces esto en toda la academia, yo creo que habrá quien lo haga de una forma o de otra…”*

E: Sí, pero la pregunta va en el sentido de hacer explícitos los conocimientos que a cualquier persona le permiten proporcionar el sistema.

D2: *“No sé, … no sé qué sea, siento muy complejo tratar de explicarlo…[…] Creo que tiene que ver la madurez porque yo veo esto y me representa muchas cosas, geométricas, analíticas, algebraicas; como tengo una gama de opciones, esto lo puedo ver desde muchos puntos de vista, incluso hasta como un producto punto, todo esto me permite visualizarlo y decidir qué hacer.”*

Observamos en las respuestas de D2 que según nuestro marco teórico, hay falta de CEC[8] que es el que le permitiría hacer específicos y explícitos los conocimientos que hay detrás para poder dar un sistema que tenga una solución específica. En este caso, desde nuestro punto de vista, dicho conocimiento permitiría al profesor saber cuáles son los conocimientos que entran en juego para poder responder a ciertas preguntas, y con ese saber, realizar el diseño de instrucción adecuado para desarrollar dichos conocimientos en los estudiantes.

E: Un estudiante responde a la pregunta diciendo “necesito otro punto para poder hacerlo”.
¿Por qué supones que el estudiante responde de esta manera?

[8] El conocimiento especializado del contenido CEC es el conocimiento matemático y habilidades únicos para la enseñanza (Ball et al., 2008).

***D2:* "Considero que si está pidiendo otro punto sabe que tiene una recta, y quizá no esté contemplando que se pidió que el sistema tenga única solución, y entonces estaría pensando en un sistema con infinitas soluciones. Yo creo que necesita dos puntos para romper el paralelismo de las rectas y que la solución sea única… […] puede ser que esté pensando en pedir otro punto para dar una recta y no un sistema, eso es lo que puedo ver."*

Consideramos que para analizar la respuesta del estudiante recurre tanto al CEC como al CC-Es, dado que analiza matemáticamente la respuesta, pero también usa su conocimiento de cómo los estudiantes se enfrentan a este tipo de tareas, y notamos que sabe de antemano que generalmente los estudiantes requieren dos puntos específicos para poder proporcionar una recta. Consideramos también que esta dificultad le es familiar.

E: Dada la respuesta del estudiante y las consideraciones que realizaste en el inciso anterior ¿qué explicación le darías al estudiante sobre el hecho que no necesita dos puntos?
D2: *"Justamente tiene que ver con el concepto de pendiente y de esa ecuación en particular, la de punto pendiente; una forma es la recta que pasa por dos puntos, pero la otra que es esa (señala la ecuación de punto pendiente), sirve cuando uno conoce un punto y la pendiente, ya se conoce un punto entonces faltarían dos pendientes si quieren dos rectas o una si quieres una, yo le diría al estudiante que propusiera dos pendientes, y ya sabemos que la pendiente oscila en todos los reales, yo le diría eso."*

Desde nuestro punto de vista, la explicación que D2 nos ofrece, va en un sentido metodológico, no tanto conceptual, si bien menciona el concepto de pendiente, no profundiza mucho en ello

Análisis pregunta de la 11

E: En el siguiente sistema a, b y c indican números reales:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ ax + by = c \end{cases}$$

¿Cuántas soluciones puede tener este sistema? Proporciona un ejemplo para cada caso.
Si les hicieras esta pregunta a tus estudiantes ¿qué respuestas esperarías?

D2 responde a la pregunta fácilmente y cuando se insiste sobre las respuestas

que esperaría por parte de sus estudiantes, menciona que no ha hecho esta pregunta a sus estudiantes, sin embargo considera que podrían responder al caso de infinitas soluciones y al caso de no solución.
D2: *"Yo diría que la más fácil es que a, b y c valgan lo mismo que en la primera ecuación, tendríamos dos ecuaciones iguales y por tanto una infinidad de soluciones. La otra es el mismo múltiplo de los números, no estoy tan seguro que esa la pudieran dar pero la primera sí...[…] mínimo espero de ellos que por lo menos comprendan que si estos son iguales* (señalando los coeficientes de *"x" y "y") pero los términos independientes ya no, entonces son paralelas para no iguales…[…] En el último caso, la verdad es que reconozco que así la pregunta nunca la he hecho, no sé si podrían ser capaces de decir que a y b son cualquier cosa diferente de 2 y 5; la idea es que puedes poner cualquier cosa y tendrá solución única si no tienen esta forma* (señalando los casos anteriores)".

Notamos que D2 presenta ideas acerca de cómo piensan sus estudiantes, considera que sí pueden responder, además de lo que podría causarles dificultad; menciona que para el caso de solución única pueden tener dificultad para responder dado que en su clase no estudia las condiciones sobre los coeficientes a y b para que un sistema tenga solución única, lo da por sentado. En cambio en los casos de soluciones infinitas y sistemas sin solución, sí estudia la estructura de las ecuaciones.

D2: *"En el último caso* (única solución)*, como que no les he dado muchas herramientas para poder responder, nunca les doy esas herramientas para que ellos sepan cómo debe ser a y b para que haya solución única, es decir, como que saben cómo es a y b para que haya infinitas soluciones o que no haya solución; cuando hay solución es obvio pues ahí están los ejemplos, pero aquí (*refiriéndose al ejercicio*) cuando ya no es obvio que a y b..."*

E: ¿Y qué elementos les tendríamos que dar?

D2: "*Hacer la conexión del modelo algebraico, porque yo creo que aquello de la parte geométrica sí le entienden aunque no lo puedan hacer, pero sí lo pueden esbozar y uno ya refina la idea y ya. Y esto sería como ya inducirlos para que ellos reconozcan la relación entre esa gráfica y esta ecuación así abstracta. Es que a nivel algebraico ¿cómo debe ser a y b? no es tan sencillo, más bien es ligarlo con lo geométrico, simplemente da una pendiente diferente a la que tengo acá arriba y da tu ecuación. Esta pregunta si esta… una pregunta como esta nunca la había hecho eh, lo voy a tomar en cuenta."*

Notamos que para D2 la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales siempre está asociada a la parte geométrica y consideramos que en esta parte de la entrevista, puede esbozar desde su perspectiva, una explicación para los estudiantes para que pudieran dar un sistema con única solución, sin embargo en la pregunta anterior no logra hacer explícitos los conocimientos que son necesarios para proporcionar un sistema con solución única y era un caso particular, consideramos que esto evidencia la naturaleza tácita[9] del conocimiento didáctico del profesor.

En cuanto a las dificultades que esperaría menciona lo siguiente.

D2: "…*Dado que la pregunta está dada en forma algebraica, difícilmente ellos plantearán esto en forma geométrica para que se ayudaran, y en el último caso, como que no les he dado muchas herramientas para poder responder."*

Notamos que D2 considera que la dificultad que podrían presentar es justamente no poder hacer autónomamente el tránsito entre la parte analítica de los sistemas y la parte geométrica, y en el caso de solución única, simplemente menciona que no sabrían cómo hacerlo los estudiantes, porque no aborda esta parte en su curso.

E: Me parece muy bien, y continuando, ¿qué respuestas considerarías correctas?

D2: "*Si me dieran la misma ecuación para el caso de infinitas soluciones, si me dieran la misma ecuación y sólo cambiaran el término independiente para el caso sin solución y en el caso de solución única, dudo que lo llegaran a realizar".*

Aunque se insistió sobre qué tendrían que responder los estudiantes para el caso de un sistema con única solución para que considerara la respuesta correcta, sólo respondió para el caso de infinitas soluciones y no solución. Pensamos que en esta parte tiende a pensar en términos de cómo pueden contestar los estudiantes, y no en términos de qué respuestas consideraría correctas.

E: Un estudiante respondió a la pregunta con el siguiente sistema para el caso de un sistema sin solución.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = 10 \end{cases}$$

¿Qué piensas que lleve al estudiante a responder de esta manera?

[9] Entendemos el conocimiento tácito como aquel que consta en las acciones, en este caso, D2 puede elaborar una explicación para un estudiante para que entienda cómo proporcionar un sistema de ecuaciones lineales con única solución, pero no puede explicar, reconocer o transmitir cuáles son los conocimientos que se movilizan o necesitan para hacerlo, es decir, puede explicar a alguien cómo hacerlo (CDC), pero no puede explicar qué conocimientos lo llevaron a armar la explicación.

D2: *"Pues se equivocó ¿no?, porque estas son las mismas rectas, justamente es la idea del múltiplo. Para empezar, para poner la parte de múltiplo para "x" y "y" creo que entiende que si son los mismos números o los mismos múltiplos pues la ecuación no cambia entonces es paralela, y a lo mejor lo que no tuvo en cuenta fue la constante, el término independiente, ahí pudo ser por omisión o dudo mucho que si es capaz de entender que si es un múltiplo te genera una paralela, no sepa que la constante te la mueve, yo pensaría más bien que él omitió…o sea multiplicó todo por dos y se le olvidó cambiarle el 10 por otra cosa, yo lo vería así ¿no?".*

Consideramos que D2 analiza matemáticamente la respuesta del estudiante utilizando CEC. Observamos en su respuesta que sabe que puede haber confusión en cuanto a la proporcionalidad de los coeficientes, y consideramos que su apreciación es completa, ya que hace referencia al porqué de la confusión. En la revisión realizada en el capítulo de antecedentes, se menciona que los estudiantes tratan de recordar (usan la memoria) para responder a este tipo de preguntas, y se recomienda que se dote de significado vía la representación geométrica (Mora, 2001). Concluimos entonces que D2 está consciente de esta confusión, y de la posible causa y esta distinción es importante ya que la causa del error o confusión es la que lleva a los profesores a formular explicaciones poderosas específicas para el estudiante.

Análisis de la pregunta 12

E: Si le preguntaras a un estudiante ¿cuáles son las configuraciones geométricas posibles de un sistema de ecuaciones 3x2, para que el sistema no tenga solución?
¿Qué aceptarías como respuesta correcta?

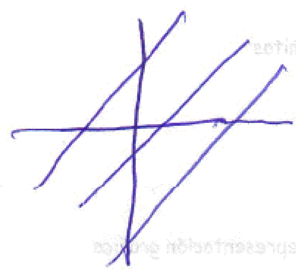
D2 realiza todas las configuraciones posibles del sistema 3x2 para el caso sin solución. Observamos que fue una tarea sencilla, sin embargo mientras lo hacía fue un caso de reflexión, no algo que previamente hubiera tenido en mente. Nos mencionó que en su clase nunca ha mencionado un 'sistema de ecuaciones 3x2', es decir, plantea ecuaciones que los llevan a sistemas con tres o cuatro ecuaciones en dos variables, sin embargo no cuentan las ecuaciones.

D2: *"Pues un par podrían ser coincidentes y otra paralela a ellas pero no igual, aquí vienen las variedades, puede darse el caso que dos a dos tengan solución pero no las tres (*pinta un triángulo formado por tres rectas en el plano) *o inclusive una de tres paralelas, yo diría que eso me debería responder para que yo lo aceptara como correcto".*

E: ¿Cuál crees que sería la respuesta más común?

D2: "P*ues la que requiere menos análisis al menos a cuestión conceptual yo creo que es esta (señalando la de tres paralelas) y entiende que si da tres paralelas no iguales pues no habrá solución…"*

E: Se le hizo la pregunta a un estudiante y realizó la siguiente gráfica como respuesta.



¿Por qué crees que sólo da esta configuración y qué explicación le darías para que reflexionara sobre las otras configuraciones?

D2: *"Yo creo que hay veces que va sobre entender la pregunta, que yo creo que una posible explicación es que no haya tomado en cuenta que no entendió que se le estaba preguntando en plural, sobre "las posibles", no lo hizo. Me ha pasado que les pones un ejercicio y en ocasiones no leen bien; en este caso dijo una configuración posible y dijo 'pues ya está' y a lo mejor no quiere decir que no supiera las otras…"*

Consideramos que en este caso D2 examina la respuesta del estudiante utilizando el CC-Es ya que habla de su experiencia con los estudiantes sobre el hecho que no leen bien, y se entiende que conozca esta dificultad de la lectura ya que al abordar el planteamiento y solución de problemas tal dificultad se evidencia.

E: Y en el caso que sí hubiera entendido bien la pregunta, ¿por qué crees que sólo da esta configuración?
D2: "*Si entiende que tiene que dar varias, pues que no haya sido capaz de reflexionar sobre las otras, o sea, doy esta y se haya quedado sin ideas y la dificultad es en el tamaño del sistema, ya pensar en tres rectas como que si no es tan común trabajar con sistemas de más de dos, pues puede suceder esto, decir dónde pongo la tercera recta. Yo diría que con conocimientos básicos puedes dar la segunda opción, es decir, misma recta y una paralela, podrías acceder a esta. Considero que esa es la razón, no haber tenido la habilidad*

suficiente para poder reconocer las configuraciones, pero por el tamaño, no porque no tuviera el conocimiento, al ver tres rectas."

Desde nuestro punto de vista, D2 considera que poder responder a esta pregunta es un trabajo de reflexión y es tarea del estudiante, es decir, no menciona como en el caso anterior[10] que hace falta brindar los elementos en clase para poder realizarlo. Por otro lado identificamos en su respuesta que recurre a saber cómo piensan los estudiantes, es decir, al CC-Es, ya que considera que encontrarán dificultad si hay una tercera recta. Por otro lado, no reflexiona sobre posibles razones que subyacen a esa respuesta.

Análisis de la pregunta 13

E: ¿Cuáles son las condiciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para que tenga solución única?
A lo que un estudiante respondió "para que tenga solución única tendría que ser el mismo número de variables para el mismo número de ecuaciones"
¿Consideras que el estudiante respondió correcta o incorrectamente? ¿Por qué?

D2 menciona que si no hay referentes, en este caso la representación geométrica de los sistemas, es difícil mantener significados en sistemas más grandes, considera que la dificultad radica en eso, en que si no hay significados desde el inicio, cuando se está en dimensiones mayores, se tendrá dificultad en entender las condiciones en este caso, para que el sistema tenga única solución.

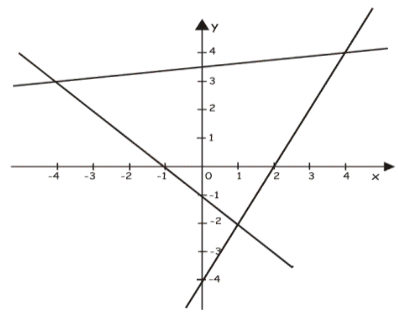
D2: *"…No es correcto… […] Pues quizá tenga que ver que pues que ya se le haya perdido la parte geométrica, porque si tú ya te metes en un 3x3 pues ya la geometría pues sí la puedes hacer, pero imagínate ahí graficar rectas planos e intersectarlos pues es… casi imposible ya en dimensiones muy grandes y hablo de 3x3, al menos esta idea se pierde la de la parte geométrica y quizá se le hizo fácil pues decir eso."*

Notamos también que el profesor no aborda en temas selectos de matemáticas, la parte geométrica de los sistemas en tres variables, además corroboramos que regularmente aborda sistemas cuadrados.

[10] En el caso anterior D2 decía que un estudiante quizá no podría responder sobre las condiciones de a y b (coeficientes de "*x*" y "*y*" en una ecuación lineal de dos variables) porque en su clase no ha brindado los elementos para que dicha tarea se realice.

Análisis de la pregunta 14

E: A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?



Si hicieras esta pregunta a tus estudiantes
¿Qué respuestas esperarías?

D2: *"...Pues no tiene ninguna…aunque no esperaría que respondieran así, porque como aquí en matemáticas III, ellos entienden que la intersección de rectas es la solución, entonces dirían uno, dos, tres pensando… bueno si tienen en mente que es la intersección, y quizá los que lograran ir más allá y decir 'no, es una solución para las tres' y esa es una solución para dos… pero yo creo que la respuesta más generalizada sería decir que hay tres soluciones".*

D2 tiene claro que el sistema en cuestión no tiene solución. Dado que en el contexto de su clase sólo se ve el caso 2x2 donde la intersección de rectas es la solución, y tomando en cuenta el conocimiento acerca de cómo piensan los estudiantes, concluye lo que pueden responder. En nuestro marco esto es parte del CC-Es, por lo que podemos decir que utilizó éste para analizar la respuesta.

E: ¿Cuál consideras que es su concepción?

D2: *"Sí, que donde se cortan las rectas es la solución… […] por ejemplo si hablamos de un 2x2 y explicamos y trabajas y te la pasas dos tres semanas y les queda clarísimo que donde se cortan las rectas es la solución, cuando pasas a otro nivel, por ejemplo cuando metes tres, ellos siguen con la idea de que la intersección es la solución y entonces aquí ven tres intersecciones, entonces ven tres soluciones en automático…"*

D2 deja claro que es consciente de que los estudiantes pueden llegar a construir el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales como punto de corte, y en consecuencia, considerar que el sistema en cuestión tiene tres soluciones.

Análisis de la pregunta 15

E: ¿Qué es lo que podría estar conduciendo a los estudiantes a dar respuestas como las expuestas a lo largo de la entrevista?

D2:* "Pues ya viendo, creo que parte del problema, es la forma en la que se explica y muchas veces obedece las necesidades del curso. Si los alumnos tienen dificultades en sumar, se complica dedicarse a otras cosas, pero por ejemplo ahora reflexionando en esto, sí sería mejor empezar con conceptos, sólo conceptos, puros dibujos…[…] Si bien lo he hecho, pero no tan global, me quedaba a nivel básico, es decir, se intersectan, no se intersectan o hay una infinidad de soluciones y uno puede avanzar como con esta idea, por lo menos meter tres y ya meter tres ya como que rompe el esquema y ven que hay más opciones, y ya con el método algebraico puedes analizar cualquier cosa y dar respuesta a cualquiera de éstas* (señalando las preguntas realizadas durante la entrevista). *Se podría dar el curso a través de todas esas negaciones, no quiero un ejemplo de algo que cumpla sino de algo que no cumpla. Podría ser en este nivel que en lugar de meterle mucha mano a la parte algebraica, puede ser más el concepto ¿no? Fíjate que incluso al principio cuando me preguntabas sobre las dificultades conceptuales como que en principio decía 'no, pues no hay mucho'."*

Identificamos en la reflexión de D2, que una vez que de manera concreta se le presentan las dificultades o concepciones alternas que los estudiantes pueden presentar cuando estudian el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales, encuentra elementos para decidir modificar su secuencia de enseñanza y si bien no sabemos si lo hará en su práctica, podemos apreciar con esta respuesta la relación tan cercana entre saber de antemano las dificultades de los estudiantes al estudiar cierto tópico matemático (CC-Es) y el diseño de instrucción (CC-En), es decir, nos permite ver cómo un subdominio del conocimiento del profesor determina o en su caso influencia otro.

Ahora presentamos una tabla que permite resumir el análisis realizado hasta ahora. Como se pudo apreciar, cada pregunta cuenta con cierta estructura, cada una se enmarca dentro de una categoría y dentro de cada pregunta se encuentran otras que nos permiten observar el CCC, análisis del error y conocimiento de las dificultades, y con dicha información es que conformamos la siguiente tabla.

<table>
<tr><th rowspan="2">Categoría</th><th rowspan="2">Conocimiento del contenido</th><th colspan="2">Conocimiento utilizado para el Análisis del error</th><th rowspan="2">Conocimiento o familiaridad con la dificultad.</th></tr>
<tr><th>CC-Es</th><th>CEC</th></tr>
<tr><td>Interpretar punto de corte de dos rectas como solución del sistema.</td><td>Sí</td><td colspan="2">CC-Es</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución.
<table><tr><td>Única sol.</td><td>Infinitas sol.</td><td>No solución</td></tr><tr><td>Pregunta 10, 11, 13</td><td>Pregunta 11</td><td>Pregunta 11</td></tr></table></td><td>Pregunta 10: Sí
Pregunta 11: Sí
Pregunta 13: Sí</td><td colspan="2">Pregunta 10: CEC y CC-Es
Pregunta 11: CEC
Pregunta 13: CC-Es</td><td>Pregunta 10: Sí
Pregunta 11: Sí
Pregunta 13: Sí</td></tr>
<tr><td>Dificultad en transitar entre la representación gráfica y analítica de los sistemas.</td><td>Sí</td><td colspan="2">CEC</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Interpretación alterna del concepto sistema</td><td>Sí</td><td colspan="2">CC-Es</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Dificultad en considerar las configuraciones geométricas posibles para un sistema de dos o tres incógnitas sin solución.</td><td>Sí</td><td colspan="2">CC-Es</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Dificultades referentes a conocimientos previos.</td><td colspan="4">Consideramos que el profesor aborda algunos de los conocimientos previos para este tema: concepto ecuación, solución de una ecuación, método para encontrar soluciones. Consideramos que concuerda con la forma en que aborda el tema.</td></tr>
</table>

Tabla 2.2.1 de Resumen de la Entrevista a D2

5.3 ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA A D3

5.3.1 DESCRIPCIÓN DEL DOCENTE 3 (D3)

La información que presentaremos a continuación es tomada de la entrevista semi-estructurada realizada.

D3 realizó estudios de licenciatura y maestría en matemáticas en la UNAM, inició estudios de doctorado en España en Barcelona los cuales no concluyó. No ha tomado ningún curso referente a didáctica de la matemática. Está interesado en un futuro en realizar estudios en matemática educativa.

Ha practicado la docencia desde la preparatoria, apoyando a sus compañeros e incluso en la universidad, de hecho eligió la carrera de matemáticas con la idea de desarrollarse profesionalmente en la docencia. Los últimos siete años ha dado clases en el nivel medio superior y en el nivel superior desde 1992, es decir, desde hace 20 años.

En la universidad, ha impartido todos los cursos de cálculo, todos de análisis, álgebra superior, álgebra lineal, álgebra moderna, algebra moderna II y ecuaciones diferenciales; a nivel medio superior ha impartido matemáticas I, II, III, IV y V, es decir, del currículo escolar todas las matemáticas, y de las optativas, temas selectos de matemáticas y probabilidad y estadística, en algún momento también participó preparando a los estudiantes en unos cursos que brindaba CCH, en el marco de un programa para abatir el rezago en materias con alto índice de reprobación.

Análisis de la entrevista

Iniciaremos con el análisis de cada una de las preguntas que forman parte de la entrevista. También como en las entrevistas anteriores, incluiremos una tabla que nos permite resumir en términos generales la información que obtuvimos.

Análisis de la pregunta 3

E: Cuando preparas clases, actividades, tareas y exámenes, ¿cuáles son los materiales en que te apoyas?

En esta pregunta D3 comenta que utiliza libros específicos de matemáticas, de historia de las matemáticas los cuales usa para introducir a los estudiantes en el estudio de algún tema, sin embargo a lo que D3 le dedica más tiempo es a estructurar la clase.

***D3**: "…Los utilizo* (los libros de historia) *como para contarles cuentos y engancharlos en el tema, introducirlos en ese sentido, es algo que agradezco de haber trabajado en el nivel medio superior, ya que mi formación es totalmente matemática pura, pero desconocía muchas cuestiones de historia; eso por un lado, por otro, estos los libros específicos geometría analítica, cálculo, que si los de álgebra. Honestamente me llevo un buen rato preparando una hora de clase, más allá de que el tema puede ser sencillo, la estructura es lo que lleva tiempo preparar… […]Considero que los cursos no son los mismos, aunque sean los mismos contenidos, pues la estructura general sí, pero ya la dinámica de clase, incluso hasta la misma estructura, el orden de los temas, eso es lo que se llega a cambiar, nunca lo he dado igual…"*

Advertimos que D3 hace hincapié en la estructura de la clase y nos interesamos en indagar a este respecto.

E: ¿Qué te lleva a modificar la clase o tu secuencia?

D3: *"…No pienso que los cursos estén separados, siempre trato de comentarles que si estamos viendo un tema por ejemplo en mate I, que más adelante se volverá a usar en tal curso…"*

Notamos que para D3 preparar clase está en función de cómo los tópicos matemáticos que se estén estudiando, se desarrollarán en los cursos posteriores; consideramos de acuerdo a nuestro marco teórico, que D3 utiliza su conocimiento matemático y su conocimiento curricular vertical para estructurar su clase.

D3: *"…Justo de eso depende cómo yo modifico la estructuración de la secuencia que empleo, es decir, me gusta preparar el camino para que logren conectar los temas que se relacionan con éste. Yo me imagino como una matriz, nosotros damos cursos de aritmética, álgebra, geometría, geometría analítica, análisis cálculo etc., pero hay temas que son transversales…"*

Análisis de la pregunta 4

¿Podrías decir de manera general la forma en que inicias el tema de solución de un sistema de ecuaciones lineales, y cuál es la secuencia de enseñanza que sigues?

En términos generales, la secuencia de enseñanza que se menciona es iniciar ya sea con la solución de problemas ajenos a matemáticas que se resuelven con el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables y a partir de ahí ver, que si se quiere resolver el problema en cuestión, se tiene que estudiar ese objeto matemático, es decir, el sistema de ecuaciones, y eso los lleva a estudiar una ecuación por separado y las soluciones de la misma. Otra forma es empezar desde el punto de vista de las cualidades de la ecuación, es decir, estudiando el número de incógnitas, el número de soluciones, cómo encontrar las soluciones, incluyendo el caso de una ecuación. Independiente de cómo inicie, lo que sigue es estudiar los métodos de solución para sistemas 2x2, dejando al final el método gráfico donde retoma la idea de rectas para profundizar en los diferentes casos de solución de un sistema (única, infinitas o no solución).

Analizaremos la secuencia de enseñanza de la misma forma en que lo hemos hecho con las otras entrevistas, en tres momentos, lo referente a conocimientos previos, que es aquello que el profesor considera crucial para entender el tema que se pretende enseñar, después analizaremos lo que considera enseñar sistemas de ecuaciones lineales y finalizaremos puntualizando los subdominios o descriptores del CME que identifiquemos en su secuencia de enseñanza.

Conocimientos previos

D3 considera como conocimientos previos las cualidades de una ecuación de primer grado con dos variables. Estudia al inicio con sus estudiantes la diferencia entre éstas y una ecuación de primer grado con una incógnita y de ahí parte para ver el número de soluciones y el método para encontrarlas.

D3: *"…Ellos descubren que la solución no es única; tú vas perfilando la discusión y se llega a que para darle solución no basta con una. Observamos las características de las ecuaciones (primer grado con una incógnita) que previamente habían estado resolviendo y ven que en éstas hay dos variables, cualitativamente ya es diferente…"*

Enseñar sistemas de ecuaciones lineales

Notamos que en la secuencia de enseñanza que D3 nos menciona, es que inicialmente no ve los casos de infinitas soluciones y de no solución; tampoco en este momento aborda la parte geométrica de los sistemas, más bien se centra en el caso de única solución y para estos sistemas aborda los métodos de solución, empezando por el de reducción, luego, de sustitución e igualación y finalmente el método gráfico.

D3: "*…Al inicio sí mencionamos que una ecuación por separado tiene infinitas soluciones, después vamos a los sistemas, donde* ***siempre*** *hay única solución. Supongo que cuando nos adentramos en el estudio de los métodos se pierde la idea de infinitas soluciones para una sola ecuación, ya que siempre que se resuelve el sistema* ***siempre hay una****, creen que siempre hay una ¿no? y les digo que no es cierto, que al final vemos que dado un sistema no siempre hay solución y retomamos los casos de no solución".*

Observamos que para D3 resolver sistemas de ecuaciones lineales es una parte fundamental en la enseñanza de este tópico matemático. Sin embargo desde nuestro punto de vista resolver un sistema también incluye los casos de no solución y de infinitas soluciones, es decir, que el estudiante tenga elementos en el ámbito algebraico para enfrentarse a igualdades del tipo $0 = 5$ o $0 = 0$ que se puede obtener como resultado de resolución de sistemas de ecuaciones. Dada la revisión de las investigaciones realizada en nuestro capítulo de antecedentes, se puede constatar a este respecto, que no es inmediato que los estudiantes puedan brindar significado a estos resultados

en el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales y notamos que D3 no estudia en el ámbito algebraico estos casos.
Identificamos también que la parte geométrica se brinda al estudiante una vez que éste es capaz de resolver un sistema de ecuaciones con solución única por varios métodos, y es hasta ese momento que se habla de los casos de no solución y de soluciones infinitas y estos casos sólo se ven geométricamente.

D3: *"… Vemos métodos aritméticos, algebraicos y dejamos al final el método gráfico, donde retomo la idea de rectas que se menciona al inicio, para en esa parte profundizar sobre los diferentes casos de solución de un sistema, es decir, única solución, soluciones infinitas o no solución."*

Para finalizar el análisis de esta pregunta, presentaremos los descriptores o en su caso los subdominios del CME que identificamos en la secuencia de enseñanza.

Descriptor	Momento de la entrevista donde se identifica
CC-Es4 Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática.	En el inicio de la secuencia D3 anticipa que los estudiantes no saben o no recuerdan el concepto de ecuación, solución y método para encontrar las soluciones; D3 inicia su secuencia con la explicación a este respecto.
CC-Es9 Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.	Cuando D3 enseña los métodos de igualación y sustitución para encontrar la solución de un sistema, sabe que muchas veces los estudiantes encuentran la solución sin saber en esencia qué están encontrando o qué debe cumplir la solución que están encontrando, por lo que hace hincapié en por qué funciona el método, para que los estudiantes encuentren significado en los procedimientos.
Conocimiento Curricular.	Identificamos que D3 tiene presente cuáles son los temas que se han revisado previos a este curso, además tiene presente como se desarrollan los conceptos que está estudiando y en función de eso llega a modificar su secuencia de enseñanza. D3 utiliza su conocimiento matemático y curricular vertical para la planeación de sus

	clases.

Tabla 2.3 Descriptores del CME identificados en la secuencia de enseñanza que emplea D3, de acuerdo a sus comentarios durante la entrevista

Análisis de la pregunta 7

E: ¿Cómo explicas a los estudiantes el concepto solución de un sistema?

D3: *"Para una ecuación, les digo que es el valor o valores que satisfacen la ecuación, es decir, que al sustituir en la ecuación el valor de la o las incógnitas, la igualdad se cumple. Ahora como estamos en sistemas de ecuaciones lineales, ya no hablamos de sólo una ecuación, ahora son dos, les digo que buscamos el valor de "x" y "y" que satisfacen ambas ecuaciones y ahí ya vemos que esos valores no siempre existen, entonces hablamos de sistemas sin solución, o que hay infinitos valores que satisfacen ambas ecuaciones, entonces el sistema tiene infinitas soluciones."*

Si bien D3 trabaja con los métodos de solución en sistemas con única solución, cuando habla de solución de un sistema, tiene presente los tres casos de solución, y es así como lo presenta a sus estudiantes. Consideramos que hay coherencia en la secuencia de enseñanza de D3 y la respuesta a esta pregunta.

Análisis de la pregunta 8

E: Cuando enseñas el tema de sistema de ecuaciones lineales, ¿cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes?

En esta parte D3 habla de 2 dificultades que ha observado en el estudio de este tema y una de ellas forma parte de las categorías que integramos en el capítulo de antecedentes de nuestro trabajo.
La primera que menciona se enmarca en la categoría: Dificultades referentes a conocimientos previos.

D3: "*…Los estudiantes regularmente no tienen presente qué es una ecuación, entonces cuando estamos viendo métodos de solución pueden hacer ciertas operaciones que evidencian que no han entendido el concepto de ecuación y de solución de una ecuación, eso les cuesta mucho trabajo…"*

La segunda dificultad que menciona es referente a la falta de significados que los estudiantes encuentran en los procedimientos.

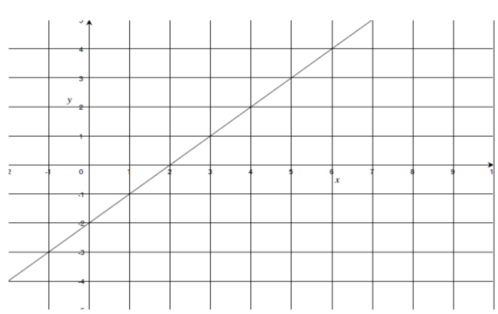
D3: *"Cuando les explico los métodos de igualación por ejemplo, sabemos que* *el método funciona, y funciona porque buscamos los mismos valores de "x" y "y" en las dos ecuaciones, y la verdad es que conceptualmente eso no logran asimilarlo fácilmente. Es decir, cuando vemos el método les explico esa parte y aunque sí hacen el método, lo aprenden pero si llego a preguntar por qué despejan e igualan, la verdad es que no lo tienen presente, entonces hacen el método pero no entienden por qué funciona, creo que eso es lo que yo he visto que les cuesta más trabajo*."

De esta respuesta identificamos un aspecto importante que se relaciona con el CEC. Para explicar los métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales, sabemos que el CEC le permite a los docentes saber por qué un método funciona. Observamos que D3 no sólo se interesa en enseñar los métodos como pasos a seguir, sino que está interesado en que entiendan el significado que estos guardan; por ejemplo en el método de igualación, se despeja en ambas ecuaciones la misma incógnita para después igualar las expresiones resultantes. Es decir, en el método está involucrada la simultaneidad, en el sentido de que en la solución son los mismos valores de "*x*" y "*y*" para ambas ecuaciones, si el sistema es 2x2. No intentaremos enmarcar la dificultad mencionada por D3 en alguna de las categorías que hemos elaborado en nuestro estudio, pero finalmente consideramos que si un estudiante lograra comprender el significado que guardan los métodos que constantemente está usando en sistemas que no sean cuadrados, creemos que eso ayudaría a disminuir entre los estudiantes la concepción de punto de corte de dos rectas como solución del sistema.

Desde nuestro punto de vista, tales dificultades son tomadas en cuenta en la secuencia de enseñanza que D3 nos menciona, ya que decide empezar con los conocimientos previos y dado que los estudiantes pueden hacer cálculos mecánicamente al encontrar la solución del sistema, se interesa por explicar por qué el método funciona.

Análisis de la pregunta 9

E: En el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿consideras que la siguiente gráfica podría representar un sistema de ecuaciones lineales 2x2?



b) ¿Qué respuesta aceptarías como correcta?

D3: "*Bueno, si yo ya les expliqué a los estudiantes esta parte, sí, tendrían que decirme que es un sistema 2x2. Cuando yo les explico el caso de sistemas con infinitas soluciones, les grafico una recta de un color y la otra prácticamente encima de otro color, y ellos ven que es la misma recta entonces el sistema tiene infinitas soluciones. Entonces si yo ya les expliqué esto, ellos deberían poder identificar que es un sistema de ecuaciones lineales 2x2, sólo que las rectas son paralelas iguales.*"

D3 usualmente ve en su clase el caso 2x2 con infinitas soluciones; notamos también que decide poner dos rectas en la gráfica aunque les dice que es la misma recta.

E: Un estudiante responde a la pregunta 9 diciendo que NO. ¿Por qué piensas que el estudiante respondió de esta manera?

D3: "*Bueno, regularmente cuando te hablan de sistema, el caso típico es que sean, bueno si estamos en el caso 2x2, que sean dos ecuaciones que te representan dos rectas en el plano. Entonces el estudiante quizá no tiene presente que en los sistemas de ecuaciones lineales existe el caso de infinitas soluciones y si bien algebraicamente son dos ecuaciones, gráficamente es una recta, sólo una y quizá eso es lo que no entendió el estudiante.*"

Consideramos que para analizar la respuesta del estudiante, D3 utiliza el CEC dado que hace referencia a las ideas matemáticas que posiblemente tuvo el estudiante para responder a esta pregunta. Pensamos que D3 es consciente de las dificultades que puede tener un estudiante si no le quedó claro el caso de infinitas soluciones para un sistema de ecuaciones lineales 2x2; para puntualizar compara la representación gráfica y la representación analítica del sistema. De acuerdo a la revisión realizada en el capítulo de antecedentes de nuestro trabajo, este tránsito contribuye a que los estudiantes logren construir una concepción más completa de los sistemas.

Análisis de la pregunta 10

E: Proporciona un sistema de ecuaciones lineales 2x2 que tenga como solución única el punto (2, 1).

a) Si le hicieras esta pregunta a un estudiante, como respuesta correcta ¿qué aceptarías?

D3 no proporciona el sistema, más bien responde que no ha puesto esta tarea a sus estudiantes.

D3: "*Bueno, debo reconocer que esta tarea no la he puesto a los estudiantes,* *entonces...”*

E: Ok, pero si la pusieras, ¿qué tendrían que responder para que lo consideraras correcto?

D3: *“Pues tendrían que darme el sistema, pero es que yo siempre trabajo con la ecuación $y = mx + b$… entonces, ellos pueden asignar dos valores distintos para la pendiente y después sustituir el punto dado y despejar b y darme dos ecuaciones.”*

Si bien D3 no proporciona el sistema, sabe perfectamente lo que se tendría que hacer para proporcionarlo; nos menciona que aunque estudia distintas formas de la ecuación de la recta, con la que más trabaja es con $y = mx + b$.

D3: “*… Con la que más trabajo es con la ecuación $y = mx + b$ y siempre les digo que una recta queda determinada por dos puntos, es decir, que necesitan dos puntos para poder dar la ecuación de una recta…”*

b) **E:** ¿Qué tipo de respuestas esperarías que dieran los estudiantes?

D3: “*La verdad no sé que podría esperar… bueno quizá ellos tracen dos puntos adicionales, es decir, tienen el punto (2, 1) y saben que para dar la ecuación de una recta necesitan dos puntos, entonces escogen otros dos puntos cualesquiera y para cada una eligen el punto dado y el otro adicional y encuentran la ecuación de las dos rectas y proporcionan el sistema, pero honestamente no sé si lo harían.”*

D3 no ha puesto esta pregunta a sus estudiantes, sin embargo tiene ideas sobre lo que los estudiantes intentarían hacer para responder dada la secuencia de enseñanza que sigue.

c) **E:** ¿Qué tipo de dificultades consideras que podrían presentar?

D3: “*En matemáticas II, cuando vemos ecuación de la recta, trabajamos mucho la pendiente, vemos cómo se define, pero aquí yo creo que se les podría dificultar generalizar, ya se pasó a otro nivel en la capacidad de análisis del problema. Esa parte creo yo que no está fácil, es decir, que ellos elijan la pendiente que quieran, se les podría dificultar.”*

Notamos que aunque D3 no ha puesto este tipo de preguntas a sus estudiantes, tiene ideas acerca de las dificultades que éstos pueden tener para responder.

E: Un estudiante responde a la pregunta diciendo "necesito otro punto para poder hacerlo".

d) ¿Por qué supones que el estudiante responde de esta manera?

D3: "*El estudiante está pensando en rectas, no está entendiendo la calidad de la pregunta, no creo que no esté entendiendo el tema… […] Tú tienes un punto, la otra es para ti libre, es decir, no está haciendo el paso de generalizar su razonamiento, desde mi punto de vista. Se quedó en el caso de la práctica, los casos particulares "concretos", no está pasando a generalizarlo…"*

Notamos que D3 analiza la respuesta del estudiante utilizando el CEC, considerando la dificultad que hay de pasar de ejercicios concretos donde la pendiente es dada, al caso de proporcionar un par de pendientes arbitrarias, lo que es un caso de generalización para D3. Para profundizar un poco sobre la cuestión de generalizar, le preguntamos lo siguiente:

E: ¿Conceptualmente qué no les permitiría a los estudiantes dar el sistema?

D3: "…*Para mí sería equiparable con el rollo de demostrar, tú le estás diciendo 'ahora tú aprende a crear', porque la demostración es como una creación ¿no? O sea tú estás creando una demostración, tú le estás diciendo al estudiante, 'crea un problema' a su nivel, pero ya está entrando a un proceso de… es esta parte de razonar y eso no es tan fácil de que lo actives, lleva un rato y en el tiempo que nosotros los tengamos aquí no… porque no están cotidianamente practicando, incluso hasta en la clase, hay momentos en que se vuelven muy estándares, no estamos siempre motivando eso."*

Notamos que D3 considera muy difíciles este tipo de preguntas en este nivel, y quizá por ello no acostumbre ponerlas a sus estudiantes. Como ya mencionamos esta pregunta se enmarca en: *Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución;* consideramos que saber las condiciones sobre los coeficientes de "*x*" y "*y*" para que en este caso el sistema tenga solución única es algo fundamental para la comprensión estructural del tema. Notamos en su respuesta que para D3 es una cuestión de creación y de razonamiento; no menciona que es parte de los conocimientos que pudieran desarrollarse en una clase de nivel bachillerato.

Se insistió nuevamente sobre la pregunta anterior.

E: Sí, pero ¿cuáles son los conocimientos que a cualquier persona le permiten proporcionar el sistema?

D3: "… Pues a *mí me parece equiparable esa situación de demostrar con el problema que se le plantea al estudiante, tiene que aprender a crear, y eso no esta fácil en este nivel a diferencia de la facultad que siempre nos están* *pidiendo demostrar, crear la demostración para cierto resultado. Yo te puedo decir, que cada quien arranca con cierta idea de la demostración e incluso la redacción, 'sea', 'supongamos' 'sabemos que'… ya desde ahí… es un proceso de creación."*

Identificamos en las respuestas de D3 que según nuestro marco teórico, hay falta de CEC[11] que es el que le permitiría hacer específicos y explícitos los conocimientos que hay detrás para poder dar un sistema que tenga una solución específica. En este caso, desde nuestro punto de vista, dicho conocimiento permite a los docentes saber cuáles son los conocimientos que entran en juego para poder responder a ciertas preguntas, y con ese saber, realizar el diseño de instrucción adecuado para desarrollar dichos conocimientos en los estudiantes. Para D3 es un proceso de creación y quizá por ello no responda a la pregunta.

e) **E:** Dada la respuesta del estudiante y las consideraciones que realizaste en el inciso anterior ¿qué explicación le darías al estudiante sobre el hecho que no necesita dos puntos?

D3: "*Lo que tiene que hacer, es crear las rectas, lo que sí le diría es que tiene esta restricción (señalando el punto (2,1)), lo que haría primero es que lo hiciera gráficamente, le daría un punto y le diría que pintara una recta, la que quisiera; le diría que lo que se quiere es encontrar la ecuación de esa recta, si me dice que necesita otro punto, le diría que ya sabe uno, le pediría que eligiera otro punto, el que quisiera."*

Notamos que D3 en su explicación le pediría al estudiante que elija otro punto, consideramos que es importante que el estudiante vea que no importa cual elija, podrá construir la ecuación de la recta. Pensamos que su idea es tomar lo que el estudiante ha aprendido sobre el hecho que se necesitan dos puntos para construir una recta y partiendo de ahí proporcionar nuevos elementos para abordar otro tipo de problemas. Consideramos que en esta parte de la entrevista, puede idear desde su punto de vista, una explicación para que los estudiantes puedan dar un sistema con única solución. Advertimos también, que en la pregunta anterior no logra hacer explícitos los conocimientos que son necesarios para proporcionar un sistema con solución única, en el caso particular, consideramos que en este caso se evidencia la naturaleza tácita[12] del conocimiento didáctico del profesor.

[11] El conocimiento especializado del contenido CEC es el conocimiento matemático y habilidades únicos para la enseñanza (Ball et al., 2008).

[12] Entendemos el conocimiento tácito como aquel que consta en las acciones, en este caso, D2 puede elaborar una explicación para un estudiante para que entienda cómo proporcionar un sistema de ecuaciones lineales con única solución, pero no puede explicar, reconocer o transmitir cuáles son los

Análisis de la pregunta 11

E: En el siguiente sistema a, b y c indican números reales:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ ax + by = c \end{cases}$$

¿Cuántas soluciones puede tener este sistema? Proporciona un ejemplo para cada caso.

a) Si les hicieras esta pregunta a tus estudiantes ¿qué respuestas esperarías?

D3 empieza a discurrir sobre lo que los estudiantes pueden hacer. Pero se insiste sobre este inciso más adelante.

D3: " *Yo creo que se van a ir… lo van a tener asociado más a la parte geométrica, no creo que me den específicamente valores, porque hay algo que en clase no termino de analizar y es cómo puedes comparar las pendientes, porque dada la ecuación en la forma $ax + by = c$ me dicen que no pueden encontrar la pendiente de la recta. Les digo que tienes dos formas, despejar o darse cuenta que la pendiente es el coeficiente de x entre el de y… […] Cuando hago el cierre, la parte geométrica la uso para la cuantificación de las soluciones, y entonces tiendo como a resumir el material, es decir, si las pendientes son iguales o distintas y con la ordenada al origen, si es la misma o no. Si las pendientes son distintas pues tú sabes que va a existir una solución, si las pendientes son iguales, eso todavía no marca nada, pueden ser paralelas, distintas o iguales. Entonces el que va a definir el asunto es que la ordenada al origen sea igual o distinta; si son pendientes iguales con ordenada al origen igual decimos que es la misma recta y por lo tanto tiene infinitas soluciones, pero si son pendientes iguales con ordenada al origen diferentes entonces son rectas paralelas distintas entonces no hay solución…[…] Yo esperaría que fueran capaces de dar la gráfica correspondiente al caso de solución única, no solución e infinitas soluciones, sólo de manera geométrica. Para mí está bien, porque si se fueron con la idea geométrica, ya la hicieron. Yo creo que un dibujo dice más que mil palabras*."

Notamos que D3 tiene ideas acerca de cómo sus estudiantes pueden responder, es decir, entendemos que habla sobre las condiciones para que el sistema, tenga una, infinitas o ninguna solución, pero sólo en el plano geométrico considerando las pendientes y la ordenada al origen de las rectas, y no de cómo ello modifica la estructura de las ecuaciones, y es por ello que

conocimientos que se movilizan o necesitan para hacerlo, es decir, puede explicar a alguien cómo hacerlo (CDC), pero no puede explicar qué conocimientos lo llevaron a armar la explicación.

piensa que si responden lo harán en plano geométrico.

E: Entonces ¿regularmente no te metes mucho con la estructura de las ecuaciones?

D3: "*Pues con la ecuación de la forma $ax + by = c$ no, lo hago con la ecuación $y = mx + b$ y creo que quizá no puedan conectar que es lo mismo y pueden despejar. De hecho creo que esa es la dificultad que pueden tener para responder a este ejercicio con un ejemplo específico.*"

En los sistemas de ecuaciones lineales, efectivamente la forma prototípica en que se presenta la ecuación lineal en dos variables, no corresponde ni a la forma general $ax + by + c = 0$, ni a la forma pendiente ordenada al origen $y = mx + b$, ni a la forma simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ de la recta, que son las formas que regularmente se abordan cuando se estudia este tópico matemático. D3 considera que la dificultad radica en que los estudiantes no logren identificar que se trata del mismo objeto y que se puede transitar entre cada una de ellas y obtener la misma información, en este caso la pendiente y la ordenada al origen que son los que determinarían si se trata de un caso con una, ninguna o una infinidad de soluciones.

E: ¿Qué respuestas considerarías correctas?

D3: "*Que pudieran decir los casos de las soluciones que puede haber en un sistema.*"

E: Ok, continuemos con la siguiente pregunta.

E: Un estudiante respondió a la pregunta con el siguiente sistema para el caso de un sistema sin solución.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = 10 \end{cases}$$

¿Qué piensas que lleve al estudiante a responder de esta manera?

D3: "*Él asocia que son paralelas ¿no? pero no se da cuenta que… otra vez, que hay de paralelas a paralelas… siempre piensan 'paralela', su ejemplo claro son dos rectas que no se cortan, además lo ven cotidiano, en el piso* (señalando las rectas que se forman con las lozas)*; es un problema de concepto, siempre piensan paralelas no se cortan y eso es lo que siempre asocian…*"

Consideramos que D3 analiza la respuesta utilizando su CC-Es, ya que hace referencia a cómo piensan los estudiantes al respecto de paralelas.

Análisis de la pregunta 12

E: Si le preguntaras a un estudiante ¿cuáles son las configuraciones geométricas posibles de un sistema de ecuaciones 3x2, para que el sistema no tenga solución?

a) ¿Qué aceptarías como respuesta correcta?

D3 no realiza las configuraciones posibles del sistema 3x2, quizá porque no lo había reflexionado previamente. D3 empieza hablar de lo que haría para que los estudiantes reflexionaran al respecto y observamos mientras lo hacía que era una tarea nueva para él. Nos mencionó que en su clase nunca ha mencionado un caso de sistema de ecuaciones 3x2, sólo trabaja en el caso 2x2.

D3: *"Pues la verdad es que esta pregunta no me la he hecho, como generalmente me quedo ahí…o sea es difícil que alguien me pregunte esto cuando termine de ver ese tema."*

E: ¿Nunca trabajas con tres rectas? ¿Sólo ves sistemas 2x2?

D3: *"Generalmente hasta ahí me quedo, honestamente, pero lo llevaría hacia que lo viera geométrico* (refiriéndose a que si lo hiciera lo haría de esta manera)*. O sea le dices, siempre has pensado en un sistema en el que se cortan dos rectas, pero si entra una tercera recta, es decir, en lugar de tener…[…] Es como si les pusieras a jugar otra, la otra recta, tiene muchas opciones, es más posible que no haya solución a que la haya ¿verdad? es como el rollo de lánzame una recta ahí* (en la gráfica de un sistema 2x2 *y a ver a dónde cae ¿no? puede caer acá , puede caer acá etc., entonces tiene que pegarle a este* (señalando un punto que es solución del sistema 2x2) *y sería poco probable que hubiera solución para un sistema 3x2 y yo esperaría que el estudiante me dijera eso, pero otra vez basándose en el rollo geométrico."*

D3 no menciona las configuraciones posibles de las rectas que se derivan de esta reflexión; lo aborda de manera general, por lo que se decidió preguntar lo siguiente:

E: ¿Y no esperarías que te dibujara algún sistema en el que no haya solución en el caso 3x2?

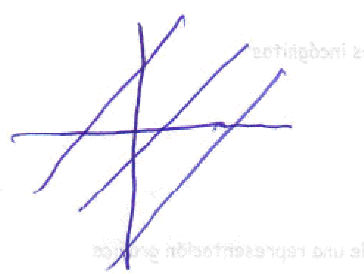
D3: *"Puede ser que lo que te compongan sean paralelas, o sea eso puede ser lo primero que me pinten."*

E: Y ¿algún otro caso?

D3: *"No, no creo. Yo creo que se irían más por el rollo de paralelas, creo que sería por ahí que podrían responder, pero siempre habría que incitarlos a la parte de que recuerden qué significa resolver un sistema de ecuaciones lineales. Estás buscando la intersección de dos rectas hablando de un 2x2, si te dan más ecuaciones, tendrás que buscar la intersección de… bueno ahora son rectas, pero puede ser en general una curva o dos curvas ¿no? Entonces estás buscando las intersecciones, de esas curvas, digo preparando el terreno para lo que viene, mira, no se me había ocurrido, me parece una buena pregunta pensando para lo que viene después de intersectar curvas con rectas, interesante, muy interesante."*

Identificamos en esta respuesta que D3 implícitamente hace referencia al concepto sistema y solución de un sistema, ya que para responder a esta pregunta es precisamente lo que se debe tener claro. Notamos que D3 sólo trabaja sistemas cuadrados y desde nuestro punto de vista reconoce que esta pregunta ayuda a profundizar en la comprensión del concepto solución de un sistema de ecuaciones. En esta pregunta también responde que la respuesta más común, serían rectas paralelas.

E: Se le hizo la pregunta a un estudiante y realizó la siguiente gráfica como respuesta.



¿Por qué crees que sólo da esta configuración y qué explicación le darías para que reflexionara sobre las otras configuraciones?

D3: *"…Lo que creo que sucede en su cabeza es que siempre piensa el caso difícil que apareció en toda la discusión, y para ellos el caso difícil es cuando primero le rompes la idea de que pareciera que siempre hay solución y les dices que no, que no siempre habrá solución, entonces, sienten que ese caso es muy fuerte ¿no? Son sistemas muy especiales y sí lo son, digo no hay solución, pero lo siente como… creo que va por ese lado, como el caso especial, y entonces ese caso especial, pues metes toda tu batería para la pregunta que te lancen, que eso sea natural de no hay solución, no necesariamente hay solución; ahí esta, son dos paralelas, si le pongo otra que no se corta, porque dicen 'tú me dijiste que cuando hay solución es cuando se corta' entonces ellos piensan 'te pongo* *cosas que no se corten y se acabó' ¿sí me expliqué? Por eso es la ideal de que no hay solución y es muy difícil que piensen como cuando empiezas a mover las rectas."*

En esta respuesta consideramos que D3 utiliza el CC-Es para analizar la respuesta, ya que hace referencia a cómo piensan los estudiantes acerca de un sistema 2x2 en el cual si se cortan las dos rectas hay solución y entonces la idea es que no se corten para que no haya solución, y cuando hay una tercera en juego, ajustan su conocimiento para responder, es decir, hace referencia a cómo piensan los estudiantes respecto a éste tópico matemático y a los conocimientos matemáticos que ponen en juego para responder. Interpretamos de su respuesta que para D3 no es que a los estudiantes no se les ocurran las otras configuraciones, sino que considera piensan que es la única, dado que en su contexto 2x2, si se cortan hay solución.

D3: *"Entonces la forma en que lo haría reflexionar sobre eso es empezar por un 2x2 y que trazara una tercera y jugar con la posición…[…] Por ejemplo lo que les puedes plantear, no hay solución pero suponte que ya tienes un sistema de ecuaciones de 2x2 que sí hay solución, ahí esta, se corta. ¿Podrías darme un sistema de ecuaciones de 3x2 donde ese sistema sí tuviera solución partiendo de que dos de esas ecuaciones son de este* (señalando un sistema 2x2 inicial)*? Tú ya le vas acotando, le vas poniendo condiciones al problema como para empujarlo ¿sí me expliqué? Va reflexionando, te puede decir, 'no porque pinto paralelas', va a seguir seguramente con eso, pero entonces ahí tendríamos que jugar con el rollo de 'mueve tu paralela'. Llegará un momento en el que esa paralela va a cortar o va a pasar por ese punto* (el punto solución para el sistema 2x2 inicial)*, hay una única paralela que va a pasar por ese punto, ¿entonces qué? Hay o no solución, 'sí' la probabilidad de que eso ocurra es menor con respecto a que no hay solución ¿verdad?..."*

D3 nos plantea una posible forma de explicarle a un estudiante sobre las otras configuraciones para un sistema 3x2 sin solución. Identificamos que la explicación parte de lo que el estudiante ya conoce, en este caso un sistema 2x2 con solución en el plano geométrico y en ese contexto se pone en juego la tercera recta y se propicia la reflexión, consideramos que lo que D3 propone es mostrarle al estudiante las posibilidades que hay de solución para un sistema 3x2, partiendo del caso conocido, un sistema 2x2.

Análisis de la pregunta 13

E: ¿Cuáles son las condiciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para que tenga solución única?
A lo que un estudiante respondió "para que tenga solución única tendría que

ser el mismo número de variables para el mismo número de ecuaciones".

a) ¿Consideras que el estudiante respondió correcta o incorrectamente? ¿Por qué?

D3: *"…Te puedo decir que la consideraría como posible respuesta correcta, es decir, está acotado su campo de acción , yo se lo acoté implícitamente, si no, es decir, si ya entré a discutir más en cuanto a la posición de las rectas entonces para mí la respuesta no sería correcta …"*

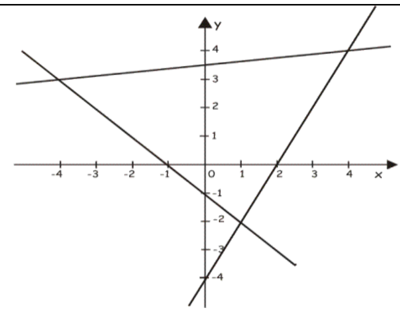
D3 sabe que la respuesta no es correcta, pero el que la considerara correcta dependerá si ya se estudió el concepto solución de sistemas de ecuaciones en su generalidad, es decir, parece que de acuerdo a su secuencia de enseñanza, en cierto momento puede darse la idea de que sólo los sistemas cuadrados tienen solución única, pero conforme se avanza en el estudio, se va entrando en la complejidad del tema.

D3: *"Lo que sí hay que romper creo, es que ellos piensan que matemáticas es estar haciendo ecuaciones, o sea que tienes que escribir cuentas, digo eso es matemática, pero no es toda…[…] Pierden de vista la visualización de estos conceptos…[…] Primero haz un dibujo del asunto, imagínatelo, incluso para mí es difícil, sobre todo en el sentido de que a mí el área que me gusta mucho es el análisis y el cálculo…[…] Tú revisas un libro de análisis y hasta cuentan cuántas figuras tiene, un libro de medida dice 'con tres figuras' no hay más; yo creo que es romper un poco una escuela, un libro de análisis es cero dibujos, es abstracción total ¿no?...[…] Eso ya es como la generalización de cuestiones que todo mundo vemos a lo mejor en el plano euclidiano en los R^3, R^n ¿no? y ya se extrae y se generaliza, pero no puedes perder de vista de dónde motivó…[…]Siento que ahí es no romperles su formalidad, pero tampoco despreciar su intuición…"*

Identificamos en su respuesta que considera que para que no se pierda los significados (de ecuación, solución de un sistema, sistema), es importante la parte geométrica, si se entienden bien estos significados en por ejemplo R^2 no se tendrá problemas cuando se generalice para dimensiones mayores.

Análisis de la pregunta 14

E: A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?



Si hicieras esta pregunta a tus estudiantes

a) ¿Qué respuestas esperarías?

D3: "*Primero que me dijeran que no hay solución, pero puede que me digan que hay solución, porque ven la intersección y me van a decir que hay tres soluciones. Me dirían ‘¿no me dijo que cuando se cortan hay solución?’ Les diría que ésta* (señalando la parte de la gráfica donde se cortan dos rectas) *es solución de dos rectas y tú quieres de las tres, entonces habría que discutir esa parte también con ellos.*"

D3 tiene claro que el sistema no tiene solución y dado que en el contexto de su clase sólo se ve el caso 2x2 donde la intersección de rectas es la solución, e integrando ideas acerca de cómo piensan los estudiantes concluye lo que pueden responder. En nuestro marco esto es parte del CC-Es, por lo que podemos decir que utilizó éste para analizar la respuesta. Podemos identificar también que D3 hace hincapié en lo que tendría que discutir con sus estudiantes a la luz de esta pregunta en el sentido de hablar del concepto sistema; para puntualizar sobre este aspecto, consideramos que D3 cae en cuenta que si sólo se presentan sistemas 2x2, no hay oportunidad de reflexionar sobre el concepto sistema que resulta tan importante para responder a esta pregunta y que va de la mano con el concepto solución.

E: Se le hizo la pregunta a un estudiante y respondió "en mi opinión tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos diferentes.

b) Dada la respuesta del estudiante, ¿podrías decir cuál es la concepción que tiene del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales?

D3: *"Intersección de rectas, pero lo que tiene que ver es que volvamos otra vez a lo mismo, es que las rectas se cortan en tres puntos, me dirían ‘tú me has dicho que hay solución cuando las rectas se cortan’ ahí habría que matizar que es cuando las dos rectas que te dan se cortan, entonces, a lo mejor lo que sí se tendría que trabajar antes de evitar estos detalles, como una especie de resumen cuando terminas, y eso no lo he hecho, cuando ya veo la clasificación de soluciones y decirles o hacer preguntas de reto y preguntarles qué pasa si se les dan tres rectas etc.; no lo vas a plantear o a evaluar, pero sí hacerles cierta* *referencia a que eso todavía sigue, hay toda una teoría para poder clasificar las soluciones, el número de soluciones de un sistema de ecuaciones."*

Consideramos que D3 utiliza su CC-Es para analizar el error del estudiante ya que usa su conocimiento de lo que podrían pensar los estudiantes en casos similares.
Identificamos que a la luz de estas preguntas D3 reflexiona sobre la forma en que podría modificar su secuencia de enseñanza. Consideramos importante señalar la relación que identificamos entre el CC-Es y el CC-En, es decir, el tener elementos sobre dificultades o concepciones alternas en los estudiantes (CC-Es), le permite tener ideas sobre las explicaciones específicas o en su caso la modificación de la secuencia de enseñanza con la idea de reorganizar el entendimiento del estudiante.
Consideramos que D3 es consciente de que los estudiantes pueden llegar a construir el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales como punto de corte, y en consecuencia, considerar que el sistema en cuestión tiene tres soluciones.

Análisis de la pregunta 15

E: ¿Qué es lo que podría estar conduciendo a los estudiantes a dar respuestas como las expuestas a lo largo de la entrevista?

D3: *"Considero que lo que está sucediendo es que la matemática se ha mecanizado, sigue estando esta… a nosotros también nos toco, esa enseñanza de la matemática a través de la mecanización, que la verdad no está mal, sí tienes que de alguna manera que aprender a hacerlo, pero repito, no se está dando el tiempo o espacio para entrar a esta… de reflexión con los estudiantes…[…] Pero estamos más preocupados por las cuestiones administrativas (reuniones de comité, informes), sé que se tienen que hacer, siempre y cuando hubiera todo un plan ideado con estas ideas de lo que estamos discutiendo, no sólo para matemáticas, es decir, que hubiera claridad quienes están a cargo de todo el proyecto, hacia dónde va. Necesitamos gente que si tenga claro hacia dónde va el asunto en cuestiones educativas, es decir, reactivar los espacios de discusión; un espacio donde podamos discutir por ejemplo estas cuestiones…[…] Se necesita abrir espacios de discusión, donde se puedan intercambiar puntos de vista, pero la institución no brinda los espacios, está más preocupada por informes y reuniones de comité etc., que no nos dejan tiempo de nuestra jornada para hablar sobre estos temas tan importantes en nuestra labor como docentes, creo que ese es el punto."*

Como dijimos en el análisis a priori de la entrevista, esta pregunta tiene la intención de que el profesor reflexionara sobre las preguntas presentadas y darnos la pauta para cerrar. Identificamos en la respuesta de D3 que no sólo reflexiona sobre este tópico matemático, sino que en general se da cuenta de la importancia de compartir con otros docentes acerca de estos temas. Si bien cada docente reflexiona sobre su enseñanza durante, antes y después de una clase, interpretamos que D3 ve la necesidad de que haya espacios para la reflexión dirigidos a discutir cuestiones de la enseñanza, con la idea de mejorar su práctica.

Ahora presentamos una tabla que permite resumir el análisis realizado hasta ahora; como se pudo apreciar, cada pregunta cuenta con cierta estructura, cada una se enmarca dentro de una categoría y dentro de cada pregunta se encuentran otras que nos permiten observar el CCC, análisis del error y conocimiento de las dificultades, y con dicha información es que conformamos la siguiente tabla.

<table>
<tr><th>Categoría</th><th>Conocimiento del contenido</th><th>Conocimiento utilizado para el Análisis del error
CC-Es | CEC</th><th>Conocimiento o familiaridad con la dificultad.</th></tr>
<tr><td>Interpretar punto de corte de dos rectas como solución del sistema.</td><td>Sí</td><td>CC-Es</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Dificultad en considerar las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución.<table><tr><td>Única sol.</td><td>Infinitas sol.</td><td>No solución</td></tr><tr><td>Pregunta 10, 11, 13</td><td>Pregunta 11</td><td>Pregunta 11</td></tr></table></td><td>Pregunta 10: Sí
Pregunta 11: Sí
Pregunta 13: Sí</td><td>Pregunta 10: CEC
Pregunta 11: CEC
Pregunta 13: CC-Es</td><td>Pregunta 10: Sí
Pregunta 11: Sí
Pregunta 13: Sí</td></tr>
<tr><td>Dificultad en transitar entre la representación gráfica y analítica de los sistemas.</td><td>Sí</td><td>CEC</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Interpretación alterna del concepto sistema</td><td>Sí</td><td>CC-Es</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Dificultad en considerar las configuraciones geométricas posibles para un sistema de dos o tres incógnitas sin solución.</td><td>No</td><td>CC-Es y CEC</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>Dificultades referentes a conocimientos previos.</td><td colspan="3">Consideramos que el profesor aborda algunos de los conocimientos previos para este tema: concepto ecuación, solución de una ecuación, método para encontrar soluciones. Consideramos que concuerda con la forma en que aborda el tema.</td></tr>
</table>

Tabla 2.3.1 de Resumen de la Entrevista a D3

5.4 ANÁLISIS GLOBAL DE LAS ENTREVISTAS.

En esta parte del trabajo nos proponemos hacer explícitas las consideraciones que realizamos para llevar a cabo el análisis global de las entrevistas; para ello, nos parece importante puntualizar sobre la naturaleza del conocimiento profesional del profesor.

Sabemos de la naturaleza *dinámica, integrada y compleja* del conocimiento profesional del profesor (Elbaz, 1983; Fennema y Franke, 1992, citado en Sosa, 2010), sin embargo el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (CME) propuesto por Ball et al. (2008), es un modelo donde a pesar de que supone que en la práctica los dominios y subdominios del CME se presentan de manera integrada, el propio modelo sugiere hacer un esfuerzo para descomprimir esos subdominios, con la finalidad de comprender y obtener mayor información relativa al CME de los profesores (Ball, 2000, 2002; Ball y Bass, 2003; Ball et al. 2008). En nuestro caso como ya hemos mencionado, nuestro interés en este estudio es dar cuenta del CC-Es que posee el profesor de nivel medio superior en el contexto del concepto solución de ecuaciones lineales, en particular del conocimiento por parte del profesor de las dificultades de los estudiantes cuando estudian este tópico matemático. Por la naturaleza integrada del conocimiento del profesor, si bien nos enfocamos en el Conocimiento del Contenido y Estudiantes (CC-Es) que posee, nos parece importante reportar algunos otros subdominios del CME que se evidencian a lo largo de la entrevista, tales como el Conocimiento Común del Contenido (CCC), el Conocimiento Especializado del Contenido (CEC), el conocimiento curricular y el conocimiento utilizado durante el análisis de las respuestas de los estudiantes.

El análisis global de cada entrevista empieza con un análisis general de la secuencia de enseñanza que nos presenta cada docente. Con respecto a las preguntas realizadas en cada una de las categorías, retomaremos el análisis previamente realizado de la entrevista y concentraremos la información en los rubros mencionados; a continuación hacemos explícito lo que consideraremos en cada uno de ellos.

Conocimiento Común del Contenido (CCC)

El CCC se evidencia en la entrevista, si el docente en cuestión logra reconocer una respuesta incorrecta, además si elabora una respuesta a cada una de las preguntas que se le proporcionan. El conocimiento matemático de los sistemas de ecuaciones lineales en el cual se indagó fue concentrado en los siguientes puntos:

- Las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución.
- Tránsito entre la representación gráfica y analítica de los sistemas.
- Conocimientos previos a los sistemas.
- Las configuraciones geométricas posibles para un sistema de dos o tres incógnitas sin solución.
- Concepto de sistema.
- Concepto de solución de sistema de ecuaciones lineales.

Se puede discutir sobre el hecho de que quizá alguno de los aspectos que se mencionan incluyen a otros, sin embargo decidimos hacerlo de manera separada, ya que nos permite tener más especificidad sobre cada uno de los aspectos del conocimiento sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

Análisis de las respuestas de los estudiantes

Una tarea que repetidamente se pidió a los docentes durante la entrevista, es que analizaran una respuesta incorrecta de un estudiante. Para Ball et al. (2008), el análisis del error es una tarea importante y específica del profesor; la importancia no radica en sólo saber si una respuesta es correcta o no (CCC), sino también en identificar cuál es la dificultad que no permitió al estudiante responder adecuadamente y elaborar una explicación específica. Para llevar a cabo dicho análisis, el profesor puede recurrir al CEC o al CC-Es y es en este rubro es donde nos proponemos sintetizar la información obtenida durante la entrevista a este respecto.

Conocimiento del Contenido y Estudiantes (CC-Es)

En este rubro reportaremos de manera general lo que nos brinda el análisis de la entrevista en cuanto al CC-Es. Informaremos si el docente en cuestión maneja en sus clases el tipo de preguntas o parecidas a las que se realizan en la entrevista. Informaremos si el profesor es consciente de las dificultades que los estudiantes pueden tener al tratar de responder a ciertas preguntas que quizá no maneja en su clase y por último sobre las dificultades que presentan sus estudiantes en el estudio de este tópico matemático en su práctica.

5.4.1 ANÁLISIS GLOBAL DE LA ENTREVISTA A D1

EN CUANTO A LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA DE D1

De la secuencia de enseñanza que D1 nos menciona, notamos que los conocimientos previos al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales que considera, son identificar la ecuación lineal con dos variables y ver de qué forma son las soluciones, es decir, pares ordenados (x, y); no lo estudia como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números que representan infinitos puntos en el plano que conforman una recta.

Notamos que D1 sólo trabaja con sistemas 2x2. Es el único profesor entrevistado que no profundiza en el estudio de los sistemas en el ámbito geométrico, tampoco profundiza en los casos de no solución y de infinitas soluciones.

Consideramos que el enfoque de D1 es estudiar sistemas de ecuaciones simultáneas, es decir, se centra en sistemas 2x2 con única solución. Consideramos desde nuestras categorías, que el tratamiento mencionado difícilmente permite conocer las propiedades que condicionan sin un sistema tiene infinitas, única y no solución. Consideramos que el ámbito geométrico visto como un método, no posibilita al estudiante para transitar de manera consciente entre la representación gráfica y analítica de los sistemas, ya que si bien se grafican las rectas del sistema, no se habla de los elementos geométricos como pendiente y ordenada al origen y de cómo éstos están presentes en la ecuación. Dado que D1 sólo ve sistemas 2x2 y sólo hace preguntas en este ámbito, pensamos que no hay la posibilidad de reflexionar sobre el concepto de sistema y por supuesto de cómo éste condiciona la concepción alterna de solución como punto de corte de dos rectas.

D1 menciona que generalmente trabaja los métodos de solución sólo para el caso de solución única, es decir, sus estudiantes no se encuentran, en el ámbito de los sistemas, con expresiones del tipo $0 = 0 \ \ o\ 0 = r$ donde r representa un número real.

Desde nuestras categorías, consideramos que D1 es el que está más lejos de un tratamiento estructural de los sistemas de ecuaciones lineales.

EN CUANTO A LOS DOMINIOS DEL CME QUE SE IDENTIFICAN EN LA ENTREVISTA

Durante la entrevista se evidenció que D1 carece del conocimiento curricular vertical para este tópico matemático, es decir, la familiaridad con los temas y cuestiones que han sido y serán impartidas en la misma materia durante los años anteriores y posteriores en la escuela; en este caso D1 no mostró tener presente que el tema de ecuación de la recta se estudia en matemáticas II y sistemas de ecuaciones lineales se ven en matemáticas III y en temas selectos de matemáticas, esto respecto a la institución en la cual D1 se desempeña como docente. Consideramos que quizá por no tener presente lo anterior, D1 decide no profundizar en el ámbito geométrico de los sistemas.

En cuanto a la tarea de analizar las respuestas de los estudiantes, notamos que D1 utiliza su conocimiento matemático acerca de los sistemas de ecuaciones lineales y familiaridad con lo que frecuentemente piensan o hacen los estudiantes, es por ello que consideramos que dicha tarea fue realizada con el CC-Es, salvo en dos ocasiones que simplemente no realizó el análisis. Consideramos que también logra identificar en la mayoría de los casos, la naturaleza matemática del mismo; además se evidencia durante la entrevista que esta tarea es desarrollada, sin tener antecedente experiencial.

En cuanto al CCC, cabe recordar que para el rubro sobre las propiedades que condicionan si un sistema de ecuaciones lineales tiene una, infinitas o ninguna solución se hicieron 3 preguntas y en este rubro D1 no logró identificar como incorrecta la condición de que un sistema debe ser cuadrado para tener solución única, aunque adicionó las propiedades de los coeficientes de “x” y “y” comentó que son ambas condiciones; es decir, identificó 5 de 6 respuestas incorrectas. Elaboró respuestas para 6 de los 6 rubros mencionados respecto al CCC. Podemos decir que varias de las preguntas no las había pensado previamente; consideramos que respondió desde la reflexión.

En cuanto al CC-Es, podemos decir que D1 no aborda preguntas iguales o parecidas a las de la entrevista en su clase. Notamos entonces que aunque la mayoría de las preguntas realizadas son novedosas para D1, muestra ideas acerca de las dificultades que pueden presentar los estudiantes para responder, consideramos que tales apreciaciones son altamente influenciadas por la forma en que aborda el tema en su clase.

D1 menciona de inicio dos dificultades que identifica desde su práctica:

- Dificultades referentes a conocimientos previos, relacionadas con el significado de ecuación y de solución.
- Dificultades referentes a entender la simultaneidad de la solución del sistema.

Estas dos dificultades identificadas por D1 son tomadas en cuenta en la secuencia de enseñanza que nos menciona.

5.4.2 ANÁLISIS GLOBAL DE LA ENTREVISTA A D2

EN CUANTO A LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA DE D2

Notamos de la secuencia que D2 nos menciona, que tiene presente los conocimientos previos al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, y consideramos que se enmarcan en la categoría que integramos a este respecto: identificar la ecuación lineal con dos variables como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números y que éstos representan infinitos puntos en el plano que conforman una recta.

Notamos que D2 sólo trabaja con sistemas 2x2. Es el único profesor entrevistado que inicia el estudio de los sistemas con la representación geométrica; también desde el inicio aborda los casos de solución, una, ninguna o infinitas. Desde nuestras categorías podemos decir que en la secuencia que D2 nos menciona, se percibe una intención en que los estudiantes logren un tránsito consciente entre la representación geométrica y analítica de los sistemas, ya que brinda la representación geométrica para cualquiera de los casos de solución junto con su respectiva representación analítica. Estudia qué características tiene la estructura de las ecuaciones para el caso de infinitas y no solución, no así para el caso de única solución.

El tratamiento mencionado permite conocer las propiedades que condicionan si un sistema tiene infinitas soluciones o no solución. Identificamos que el caso de única solución es tratado geométricamente como dos rectas que se intersectan en algún punto y ese punto satisface ambas ecuaciones; sin embargo no se habla para este caso de la estructura de las ecuaciones. Quizá se obvia el hecho de que para que haya solución las pendientes deben ser distintas y eso bastará; nos menciona D2 que no había analizado cuidadosamente las condiciones para este caso.

D2 generalmente trabaja los métodos de solución sólo para el caso de solución única, es decir, sus estudiantes no se encuentran en el ámbito de los sistemas con expresiones del tipo $0 = 0 \;\; o\; 0 = r$ donde r representa un número real.

Advertimos que dado que D2 sólo trabaja en sistemas 2x2, no hay oportunidad en su secuencia de reflexionar acerca del concepto de sistema que resulta tan importante y que va de la mano con el concepto solución. No obstante, consideramos que la secuencia que D2 nos menciona, tiene elementos que propician un manejo estructural de los sistemas 2x2.

EN CUANTO A LOS DOMINIOS DEL CME QUE SE IDENTIFICAN EN LA ENTREVISTA

En cuanto a la tarea de analizar las respuestas de los estudiantes, notamos que D2 utiliza su conocimiento matemático acerca de los sistemas de ecuaciones lineales y familiaridad con lo que frecuentemente piensan o hacen los estudiantes, es por ello que consideramos que dicha tarea es realizada con el CC-Es, salvo en dos ocasiones que sólo se remitió a ideas matemáticas propias, es decir, que uso su CEC para analizar las respuestas. Si bien pudimos identificar en la entrevista que D2 recurre más al CC-Es para realizar el estudio del error, consideramos que también logra identificar la naturaleza matemática del mismo. Se evidencia durante la entrevista que esta tarea es desarrollada, incluso sin tener antecedente experiencial.

En cuanto al CCC, D2 identificó las respuestas incorrectas que se le proporcionaron durante la entrevista. También elaboró respuestas para 6 de los 6 rubros mencionados respecto al CCC. Sobre la pregunta referente a las configuraciones geométricas posibles de un sistema 3x2 sin solución podemos decir que efectivamente brindó las representaciones posibles; consideramos que lo hizo desde la reflexión.

En cuanto al CC-Es, D2 menciona las preguntas que se hacen en la entrevista para sistemas 2x2. Si bien no las hace de manera recurrente, en alguna ocasión las ha presentado a sus estudiantes. A pesar de que la mayoría de las preguntas realizadas son novedosas para D2, consideramos que presenta ideas acerca de las dificultades que pueden presentar los estudiantes para responder, y que tales apreciaciones son altamente influenciadas por la manera en que aborda el tema en su clase. D2 menciona de inicio tres dificultades que identifica desde su práctica:

- Dificultad sobre conocimientos tales como simplificación de términos semejantes o multiplicación de signos
- Dificultad referente a entender qué es una ecuación y qué es la solución de una ecuación.
- Dificultad que tiene que ver con el tránsito entre una representación geométrica y una analítica.

Estas tres dificultades identificadas por D2 son tomadas en cuenta en la secuencia de enseñanza que menciona.

5.4.3 ANÁLISIS GLOBAL DE LA ENTREVISTA A D3

EN CUANTO A LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA DE D3

Antes de empezar con aspectos específicos sobre la entrevista realizada a D3, quisiéramos aclarar que algunos elementos se abordarán en el capítulo de conclusiones, ya que tales elementos también fueron identificados en las restantes entrevistas y consideramos que analizarlas en su conjunto, nos permiten una mayor contundencia en la información.

Iniciaremos este análisis desde la secuencia que D3 nos menciona. Identificamos que D3 tiene presente la importancia de los conocimientos previos para iniciar el estudio de los sistemas y tales conocimientos coinciden con la categoría que conformamos en el capítulo de antecedentes: identificar la ecuación lineal con dos variables como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números y que éstos representan infinitos puntos en el plano que conforman una recta.

Notamos en la secuencia de enseñanza de D3, que sólo se trabaja con sistemas 2x2. Consideramos que si sólo se presentan sistemas 2x2, no hay oportunidad de reflexionar sobre el concepto sistema que resulta tan importante y que va de la mano con el concepto solución. En el desarrollo de la entrevista D3 se da cuenta de esta situación.

Notamos también, que los métodos de solución se abordan en sistemas 2x2 y con única solución, no se interpretan en el ámbito algebraico los casos de infinitas soluciones y no solución., Esto nos lleva a explicar desde nuestras categorías que no se está propiciando el tránsito entre la representación gráfica y analítica de los sistemas, es decir, los estudiantes pueden llegar a identificar en el ámbito geométrico un sistema con única, ninguna o infinitas soluciones, pero no necesariamente pueden relacionarlos con su respectiva representación analítica.

Sí en la secuencia que D3 nos menciona, el ámbito geométrico se aborda para hablar acerca de los significados del concepto solución de un sistema y los casos de infinitas soluciones y no solución sólo se abordan de manera geométrica, consideramos que aunque se hable de pendientes y ordenada al origen de las rectas, si no hay tratamiento de cómo estos casos modifican la estructura de las ecuaciones, los estudiantes no necesariamente podrían tener presentes, cuáles son las propiedades del sistema que condicionan el tipo de solución.

EN CUANTO A LOS DOMINIOS DEL CME QUE SE IDENTIFICAN EN LA ENTREVISTA

D3 menciona la importancia y el significado que hay en los métodos para encontrar la solución del sistema y así lo presenta a sus estudiantes. El conocimiento de D3 acerca del porqué los métodos funcionan, desde nuestro marco es parte del CEC.

Algo distintivo en D3 es su conocimiento curricular vertical, que según nos menciona, lo utiliza para planear la estructura de su clase, con la idea que los estudiantes no vean aislados los conocimientos que se ven en un semestre, sino que tengan elementos que les permitan esquematizarlos y conocer las relaciones entre varios conceptos matemáticos de un mismo bloque o unidad. Desde nuestro marco se puede decir que el conocimiento curricular vertical es muy cercano al CEC.

En cuanto a la tarea de analizar las respuestas de los estudiantes, notamos que D3 utiliza su conocimiento matemático acerca de los sistemas de ecuaciones lineales y familiaridad con lo que frecuentemente piensan o hacen los estudiantes, es por ello que consideramos que dicha tarea es realizada con el CC-Es, salvo en dos ocasiones que sólo se remitió a ideas matemáticas propias, es decir, que uso su CEC para analizar las respuestas. Pudimos identificar en la entrevista, que D3 recurre más al CC-Es para realizar el estudio del error, notamos también que logra identificar la naturaleza matemática del mismo. Se evidencia durante la entrevista que esta tarea es desarrollada, incluso sin tener antecedente experiencial.

En cuanto al CCC, D3 identificó las respuestas incorrectas que se le proporcionaron durante la entrevista. También elaboró respuestas para 5 de los 6 rubros mencionados respecto al CCC. Sobre la pregunta referente a las configuraciones geométricas posibles de un sistema 3x2 sin solución, D3 mencionó que no se lo había cuestionado antes y elaboró algunas ideas al respecto, sin embargo no proporcionó las configuraciones que se le pidieron. Consideramos que la entrevista no nos brinda información sobre la razón por la que no contestó; no podemos afirmar que tiene o no tiene los conocimientos para responder a la pregunta.

En cuanto al CC-Es, de acuerdo a la entrevista, el profesor no maneja en su clase preguntas iguales o parecidas a las proporcionadas durante la entrevista. Aun así proporciona ideas acerca de las dificultades que podrían presentar los estudiantes; notamos que éstas están altamente influenciadas por la forma en que aborda el tema en su clase. D3 menciona de inicio dos dificultades que identifica desde su práctica:

- Referente a conocimientos previos
- Referente a falta de significado en los procedimientos que involucran los métodos de solución de los sistemas.

En el capítulo del marco teórico de este trabajo se explica en detalle en qué consiste CDC; ahora quisiéramos resaltar que tal conocimiento incluye que el profesor tenga el conocimiento para elaborar explicaciones, que permita hacer comprensibles a los estudiantes los tópicos matemáticos. Desde nuestro punto de vista D3 durante la entrevista da muestra del conocimiento que posee a este respecto y que se revela con las explicaciones que elabora, las cuales van más allá de explicar nuevamente sobre el tópico matemático. Notamos que dichas explicaciones tienen la intención de hacer reflexionar al estudiante sobre algún elemento particular, partiendo de la naturaleza matemática del error. Además logra articular dicho análisis con lo que es familiar para el estudiante. Consideramos que tal conocimiento se origina en la sabiduría de la práctica.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo y de acuerdo a nuestro marco teórico, el conocimiento por parte del profesor de las dificultades y concepciones erróneas de cierto tópico matemático, es una componente importante en el entendimiento didáctico de la materia. Tal conocimiento permite al profesor realizar variadas tareas en su día a día. Indagar sobre el conocimiento del profesor de las dificultades o concepciones erróneas de los estudiantes sobre un tópico particular, permite dar cuenta de su conocimiento didáctico general sobre éste y particularmente sobre el CC-Es.

6.1 RESPUESTA A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Consideramos el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales fundamental en el estudio del álgebra lineal y siendo un tema donde los estudiantes encuentran dificultad, consideramos en este trabajo que es un área crítica para investigar sobre el conocimiento didáctico del profesor de nivel medio superior de este tópico matemático, y dados los elementos que se desprenden del análisis de los datos obtenidos, nos gustaría retomar nuestra pregunta de investigación:

¿Qué conocimiento del contenido y de los estudiantes (CC-Es) posee el profesor del nivel medio superior en el contexto del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales?

Ahora bien, de acuerdo a nuestro análisis podemos decir respecto al CC-Es de los profesores entrevistados, que notamos que aunque los docentes no hayan abordado en su clase preguntas parecidas o iguales que las proporcionadas en la entrevista[13], presentaron ideas acerca de las dificultades que podrían tener los estudiantes en cada una de las categorías; esto nos permite advertir que las ideas por parte de los docentes sobre las dificultades que pueden presentar los estudiantes sobre un tópico matemático, no necesariamente son experienciales, en el sentido de que lo hayan sentido, conocido o presenciado, más bien es conocimiento del pensamiento matemático del estudiante construido de una práctica prolongada.

Lo anterior nos lleva a hablar sobre el conocimiento por parte del profesor, de las dificultades que presentan los estudiantes en dos dimensiones: una, la que sí proviene de lo que ha experimentado en sus clases y con sus alumnos y por tanto se norma con la práctica; la segunda se nutre de ésta y le permite ir sustentando su conocimiento acerca del pensamiento matemático de los estudiantes y por supuesto también es altamente influenciada por su práctica. La primera dimensión es revelada cuando los docentes nos hablan de su experiencia y nos proporcionan dificultades muy específicas; la segunda se revela cuando se les presentan preguntas novedosas y recurren precisamente a su conocimiento de cómo piensan sus estudiantes para

[13] Según lo mencionado en las entrevistas, regularmente los docentes no abordan este tipo de preguntas en su clase.

responder. En todo caso identificamos que el CC-Es es una amalgama entre conocimiento matemático y conocimiento acerca de cómo piensan los estudiantes.

Lo anterior nos sugiere que los profesores no necesariamente son conscientes de otras dificultades ajenas a su práctica. Por otro lado, consideramos que el conocimiento acerca del pensamiento matemático de los estudiantes que identificamos en la entrevista, permite al profesor anticipar lo que probablemente está pensando el estudiante y en lo que puede encontrar confusión. Identificamos también en la entrevista que los profesores anticipan qué es probable que el estudiante hará con cierta pregunta y anticipan en qué es probable que el estudiante encuentre dificultad para responder, todo ello altamente influenciado por su práctica.

De la secuencia de enseñanza que nos presentan, notamos que hay la intención de acuerdo al enfoque de los docentes, de hacer hincapié o en su caso modificar la secuencia con base en las dificultades que previamente han identificado que presentan los estudiantes al estudiar este tema.

Consideramos que las secuencias de enseñanza presentadas por los docentes entrevistados, si bien marcan diferencias entre ellas, también presentan similitudes. Consideramos que se privilegia sobre la parte conceptual, la parte operativa de los sistemas, lo referente a los métodos de solución. Notamos que trabajan sólo con sistemas 2x2 y sólo se hacen preguntas en ese ámbito; sabemos que la concepción alterna de 'solución como punto de corte' funciona muy bien para estos sistemas, y consideramos dada la forma en que se estudia el tema, que es muy posible que los docentes no se percaten de esta concepción alterna.

Cuando preguntamos a los docentes las razones por las cuales deciden presentar así su secuencia de enseñanza[14], no identificamos razones matemáticas explícitas en su respuesta que les llevaran a tomar decisiones a este respecto. Consideramos que lo anterior se relaciona con la naturaleza tácita del conocimiento del profesor; para explicar mejor este punto, retomemos lo que se evidencia en la entrevista. Primeramente se les pidió a los docentes que respondieran a cierta pregunta (CCC), después se les pidió que analizaran una respuesta errónea que un estudiante dio a la misma pregunta; se les pidió que con tal información, elaboraran una explicación para el estudiante que hiciera hincapié en las dificultades conceptuales que pudiera tener (CDC). Los docentes entrevistados llevaron a cabo lo que se les solicitó; finalmente se les pidió que hicieran explícitos los conocimientos matemáticos necesarios para responder a la pregunta inicial (desde nuestro punto de vista CEC) e interesantemente a los tres se les complicó hacerlo, en realidad, ninguno respondió en cuanto a conocimiento matemático específico. Entendemos el conocimiento tácito como aquel que consta en las acciones; en este caso, pueden

[14] Los detalles de esta pregunta están en el respectivo análisis de la entrevista realizada a cada uno de los docentes entrevistados.

elaborar una explicación para un estudiante para que entienda cómo proporcionar un sistema de ecuaciones lineales con única solución, pero no pueden explicar o reconocer cuáles son los conocimientos que se movilizan o necesitan para hacerlo, es decir, pueden explicar a alguien cómo hacerlo (CDC), pero hay dificultad para explicar qué conocimientos lo llevaron a armar la explicación.

Consideramos que la entrevista en su conjunto, permite al profesor reflexionar sobre la forma en que aborda el tema; los profesores se mostraron muy interesados y hasta cierto punto sorprendidos de las dificultades conceptuales que se pueden presentar, adicionales a las que ellos habían identificado en su práctica. En el discurso identificamos la intención de dos de ellos, de modificar su secuencia; incluso presentaron algunas ideas de cómo podría ser. Se mencionó darle más peso a la parte conceptual de los sistemas, así como empezar con sistemas no necesariamente cuadrados, y empezar con la parte geométrica de los sistemas. Lo anterior pone de relieve la importancia del conocimiento por parte del profesor, de las dificultades o concepciones alternas que pueden presentar los estudiantes al estudiar cualquier tópico matemático, para el diseño de instrucción; de acuerdo a nuestro marco esta relación nos permite ver un aspecto de la dependencia entre el CC-Es y el CC-En.

El tipo de preguntas que se realizan en la entrevista, son en cierta forma una recopilación que consideramos apuntan hacia un manejo estructural de los sistemas; tales preguntas se gestan desde la investigación y para la investigación e indagan sobre la parte conceptual de los sistemas. Si bien los profesores entrevistados dieron muestra de un CCC de los sistemas de ecuaciones lineales, para la mayoría de los docentes, las preguntas eran novedosas y en algunos casos, la realización de las mismas fue un trabajo de reflexión, no de algo que previamente se hubiera pensado.

Ahora bien, retomando nuestra problemática, sabemos que el tema de sistemas de ecuaciones lineales en el sistema educativo mexicano, se estudia en el nivel medio básico (secundaria), luego en nivel medio superior (bachillerato) y en el nivel superior (licenciatura). La revisión realizada en el capítulo de antecedentes de este trabajo, da cuenta sobre el hecho de que incluso en el nivel superior los estudiantes pueden conservar ciertas concepciones alternas de este concepto. Consideramos que nuestro trabajo nos permite dar una mirada a la compleja tarea que día a día llevan a cabo los profesores y consideramos que nos permite dar cuenta de la especificidad del conocimiento del profesor para llevarlas a cabo; pensamos que contribuye al reconocimiento gradual de que la visión de la calidad de la enseñanza va más allá del dominio del contenido en un área específica, en este caso de matemáticas.

Dada la relación que identificamos entre el conocimiento sobre las dificultades que presentan los estudiantes sobre un tópico matemático, y el rediseño de instrucción, consideramos fundamentales los espacios institucionales donde los profesores puedan compartir y reflexionar sobre estos temas con sus colegas de academia. Coincidimos con Shulman (1986) sobre la importancia de las investigaciones sobre las concepciones erróneas y de su influencia sobre subsecuentes aprendizajes, y consideramos que el presente trabajo permite ver la importancia de acercar tales investigaciones a los docentes, ya que son un componente importante en el entendimiento didáctico de la materia.

6.2 LIMITACIONES DEL ESTUDIO Y FUTURAS INVESTIGACIONES.

Consideramos que esta investigación constituye un primer acercamiento a la complejidad del CME de los profesores entrevistados y que nos arroja luz hacia el CME de esta población[15].Nos permitió dar cuenta del CC-Es que poseen en el contexto del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales. Para nosotros el diseño de nuestro instrumento para la toma de datos, fue parte fundamental; consideramos que en futuros trabajos se puede contribuir a este respecto, en el sentido de crear un marco metodológico que permita saber qué elementos específicos para cada subdominio del CME se deben considerar para la elaboración de los instrumentos para la toma de datos, que justifique si debe ser desde la práctica del profesor, o entrevista o ambos, etc., consideramos que este tipo de trabajos además de ser una herramienta de gran ayuda, permitiría esclarecer más cada uno de los subdominios del CME.

De la investigación se desprende una clara relación entre el CC-Es y el CC-En del profesor, es decir, identificamos que cuando los docentes conocen las dificultades y concepciones alternas que se pueden generar en torno a cierto tópico matemático, surgen ideas acerca de la forma en que se puede modificar la secuencia de enseñanza. Consideramos que en trabajos futuros se puede profundizar en la relación que hay entre los subdominios del CME, pensamos que conociendo cómo uno modifica a otro, nos permitiría saber más acerca del CME del profesor.

El Conocimiento Especializado del contenido (CEC), es el conocimiento matemático y habilidades únicos para la enseñanza. Poseer un CEC habla de un conocimiento matemático profundo, consideramos que en futuras investigaciones se puede estudiar ¿cómo se traduce este conocimiento profundo en la enseñanza de

[15] Los profesores entrevistados laboran en el IEMS del D.F., los tres cuentan con estudios de licenciatura en matemáticas que es la formación con la que cuentan la gran mayoría de los docentes de esta institución.

temas de nivel medio superior? Nos parece interesante saber cómo se relaciona contar con niveles avanzados en el estudio de matemáticas y el CEC. Los docentes entrevistados en este trabajo, de acuerdo a nuestras categorías, poseen un CCC estructural de los sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo este conocimiento que poseen, no se traduce en una secuencia de enseñanza que enfatice éste tipo de conocimiento. Consideramos fundamental realizar estudios como el que proponemos, para entender este tipo de relaciones.

Finalmente otro aspecto que nos parece importante a la luz de la presente investigación, es que si bien D1 y D2 son profesores que pertenecen a la misma institución, a la misma academia, y que laboran en el mismo plantel, nos parece muy interesante que puedan presentar secuencias de enseñanza para el mismo tópico matemático tan opuestas. Esto nos remite a hablar del subdominio CC-En y preguntarnos por las razones que los conducen a presentar el tema tan diferente. Consideramos que si bien el conocimiento matemático influye al igual que otros factores, pensamos que también se debe tomar en cuenta el papel de las creencias, afectos y valores en el desarrollo del CDC del profesor, y determinar si los componentes del CDC son dependientes de los paradigmas de enseñanza-aprendizaje asumidos. Habría que esclarecer cómo influyen estos elementos en la forma de presentar y representar el contenido a enseñar.

7. BIBLIOGRAFÍA

Alcocer, I. (2007). Dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en contextos algebraicos y geométrico. *Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.*

Ball D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching, What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59 (5)*, 389-407.

Bisquerra, M. (2004). *Metodología de la investigación educativa.* Madrid, España: La Muralla.

Cutz, B. (2005). Un estudio acerca de las concepciones de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución. *Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.*

Eslava, M. y Villegas, M. (1998). Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano. *Tesina de Diplomado. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.*

Manzanero, L. (2007). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE. *Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.*

Marines, J. y Monroy, J. (1998). Dificultades en la transición del pensamiento sintético y analítico en sistemas de tres lineales con tres variables. *Tesina de Especialidad. Universidad del Estado de Hidalgo.México.*

Mora, B. (2001). Modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. *Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.*

Ochoviet, C. (2009). SOBRE EL CONCEPTO DE SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS. *Tesis de doctorado. CICATA-IPN. México.*

Panizza, M., Sadowsky, P., Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. . *Enseñanza de las Ciencicas, 17 (3), 453-461*.

Pinto Sosa, J., & González Astudillo, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20,83-100*.

Ramírez, C. (2008). Concepciones de los estudiantes de nivel superior sobre sistemas de ecuaciones lineales. *Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.*

Shulman. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15(2)*, 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57 (1)*, 1-21.

Sosa, L. (2010). Conocimiento Matemático para la enseñanza en el Bachillerato. Un estudio de dos casos. *Tesis Doctoral, Universidad de Huelva. España*.

Wilson, S., Shulman, L. y Richert, A. (1897). 150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching. *In J. Calderhead (Ed.), Exploring. teachers thinking (pp. 104 - 124). Londres: Cassel.*

8. ANEXOS

I. ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

PRIMERA PARTE

1. ¿Qué estudios realizaste? Incluye estudios universitarios, posgrados y cursos de actualización o capacitación.

2. ¿Actualmente en qué institución laboras?

3. ¿Durante cuántos años has laborado como docente y en qué nivel educativo?

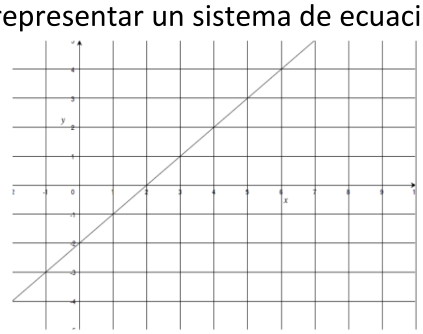
4. ¿Qué cursos has dado?

5. Cuando preparas clases, actividades, tareas y exámenes, ¿cuáles son tus materiales en que te apoyas?

6. ¿Podrías decir de manera general la forma en que inicias el tema de solución de un sistema de ecuaciones lineales, y cuál es la secuencia de enseñanza que sigues?¿Cuál es la razón por la que lo haces de esta manera?
7. ¿Cómo explicas a los estudiantes el concepto solución de un sistema?
8. Cuando enseñas el tema de sistema de ecuaciones lineales, ¿cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes?

SEGUNDA PARTE

9. En el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿consideras que la siguiente gráfica podría representar un sistema de ecuaciones lineales 2x2



a) ¿Qué respuesta aceptarías como correcta?

b) Un estudiante responde a la pregunta 9 diciendo que NO. ¿Por qué piensas que el estudiante respondió de esta manera?

10. Proporciona un sistema de ecuaciones lineales 2x2 que tenga como solución única el punto (2, 1).

a) Si le hicieras esta pregunta a un estudiante, como respuesta correcta ¿qué aceptarías?
b) ¿Qué tipo de respuestas esperarías que dieran los estudiantes?
c) ¿Qué tipo de dificultades consideras que podrían presentar?

Un estudiante responde a la pregunta diciendo "necesito otro punto para poder hacerlo".

d) ¿Por qué supones que el estudiante responde de esta manera?

e) Dada la respuesta del estudiante y las consideraciones que realizaste en el inciso anterior ¿qué explicación le darías al estudiante sobre el hecho que no necesita dos puntos?

11. En el siguiente sistema a, b c indican números reales

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ ax + by = c \end{cases}$$

¿Cuántas soluciones puede tener este sistema? Proporciona un ejemplo para cada caso.

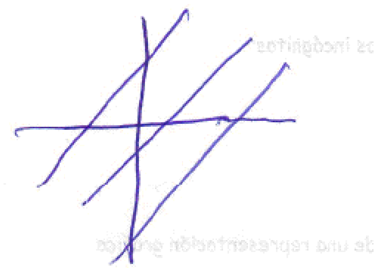
a) Si le hicieras esta pregunta a tus estudiantes ¿qué respuestas esperarías?
b) ¿Qué tipo de dificultades piensas que pudieran tener en responder?
c) ¿Qué respuestas considerarías correctas?
d) Un estudiante respondió a la pregunta con el siguiente sistema para el caso de un sistema sin solución.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = 10 \end{cases}$$

e) ¿Qué piensas que lleve al estudiante a responder de esta manera?

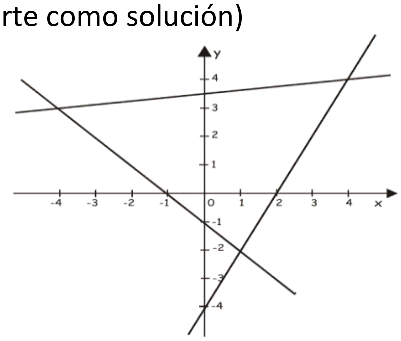
12. Si le preguntaras a un estudiante ¿Cuáles son las configuraciones geométricas posibles de un sistema de ecuaciones 3x2, para que el sistema no tenga solución?
a) ¿Qué aceptarías como respuesta correcta?
b) ¿Cuál crees que sería la respuesta más común?

Se le hizo la pregunta a un estudiante y realizó la siguiente gráfica como respuesta.



¿Por qué crees que sólo da esta configuración y qué explicación le darías para que reflexionara sobre las otras configuraciones.

13. A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? (punto de corte como solución)



Si hicieras esta pregunta a tus estudiantes

a) ¿Qué respuestas esperarías?
b) ¿Qué respuestas aceptarías como correctas?
c) Se le hizo la pregunta a un estudiante y respondió "en mi opinión tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos diferentes.
d) Dada la respuesta del estudiante, ¿podrías decir cuál es la concepción que tiene del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales?

14. ¿Cuáles son las condiciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para que tenga solución única?

A lo que un estudiante respondió "para que tenga solución única tendría que ser el mismo número de variables para el mismo número de ecuaciones"

¿Consideras que el estudiante respondió correcta o incorrectamente? ¿Por qué?

II. TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS

TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA A D1

PRIMERA PARTE

E:

1. ¿Qué estudios realizaste? Incluye estudios universitarios, posgrados y cursos de actualización o capacitación.

D1: Básicamente matemáticas, pero considero que el conocimiento todo está entreverado y que la humanidad ha separado el conocimiento en áreas, pero lo ha hecho con la idea de profundizar, pero la realidad es que no está clasificada de acuerdo a las materias que se imparten en los centros escolares, entonces la cultura es una sola y está entreverado y por esa razón yo he estudiado otras disciplinas, la literatura, la filosofía, política, sociología, algunas con mayor o en menor grado de intensidad pero a todas ellas me he acercado. La lengua, las lenguas, los idiomas, pero claro la sociedad para que tú puedas dar clase te exige que tengas una licenciatura en algo para que tú puedas dar clase.

E: ¿Has estudiado cuestiones didácticas, has tomado algún curso o te han mandado a un curso por parte de tu trabajo?

D1: No, pero puedo decir por qué no, no me han provocado ningún interés porque todos los cursos de pedagogía tienen algo en común, que parece que todos ellos tratan a los educandos como niños pequeños, y entonces esto no es nada atrayente, tal parece q todo lo que formulan ellos, es para tratar a personas, menores de edad, en particular nosotros que estamos en la educación media superior, ya no son niños y el conocimiento también es superior, entonces esos cursos no me han atraído pero para nada. Entonces por esa razón, no me han atraído pero para nada.

E: Incluso aquí, no es común que ofrezcan cursos de didáctica en matemáticas.

D1: Claro, no solamente de matemáticas, sino también para nivel medio superior auténtico, todo lo que hacen es un discurso y si acaso lo dan es con la idea de tratar con niños menores, o se asemejan sus reglas, sus normas, su manera de hacer estrategias, es como si se le fuera dar clases a kínder garden.

E: ¿Durante cuántos años has laborado como docente y en qué nivel educativo?

D1: Bueno yo di clases en secundaria, en la SEP, di ahí como dos años, luego pase a ser docente en el nivel medio superior, di clases en el UNITEC también durante dos años y después empecé a trabajar aquí (en el IEMS).

E: Y aquí ¿Cuántos años tienes? ¿Nueve años?

D1: No, ya diez años.

E: Entonces ya como 14 años de experiencia, y en todos esos años que cursos has dado, bueno obviamente matemáticas, ya ves que está dividido, ya sea geometría analítica, álgebra…

D1: Bueno, pues he dado álgebra básicamente, también he dado cursos de geometría y bueno todo el nivel bachillerato que es pues aritmética, álgebra un poco de geometría y cálculo diferencial e integral que se da en los programas.

E:

1. Cuando preparas clases, actividades, tareas y exámenes, ¿cuáles son tus materiales en que te apoyas?

D1: Bueno, con respecto a eso, ahí a veces saco ejercicios de los diferentes libros de textos de matemáticas, porque considero que los textos que existen de matemáticas, han sido elaborados por personas que han estado precisamente en la práctica docente, muchos de los ejercicios que están ahí pues son apropiados, en realidad el trabajo de un docente para ese menester, es escoger bien los ejercicios de diferentes textos, o en su caso si hay algún texto que se apegue al programa que va a dar, pues puede escoger ese texto, no se necesita indagar demasiado en eso, ya muchos de los ejercicios de las tareas están elaboradas, no hay porque estar inventando muchas cosas, ahora el problema más bien dicho es la selección y la profundidad con la que quiere uno poner.

E: Ok, esto es en general pero por ejemplo ya cuando… pensando en un tema en particular por ejemplo el tema de sistemas de ecuaciones lineales, te voy hacer una pregunta

2. ¿Podrías decir de manera general la forma en que inicias el tema de solución de un sistema de ecuaciones lineales, y cuál es la secuencia de enseñanza que sigues?

D1: Sí, para el tema de sistemas de ecuaciones lineales, primeramente los términos, porque muchas veces la matemática y en particular este tema, este…. Es de vital importancia que se entienda exactamente que se entienda que es una ecuación, porque muchas veces los estudiantes piensan que una ecuación es una expresión donde aparecen letras, números y algunos exponentes y no se fijan en la esencia de una ecuación que es una igualdad, ¿no? entonces empiezo por decirles que es una ecuación, y una ecuación se resuelve para encontrar el valor de la incógnita, que una vez encontrada esa solución que se llama raíz, al sustituir ese valor de la raíz en la ecuación se satisface. Bueno eso es con una ecuación, pero cuando ya hay un sistema, en particular el nivel inmediato superior al de una ecuación, pues sería este, la segunda ecuación o un sistema de ecuaciones simultaneas y ahí también esa palabrita, simultanea hay que explicarla bien, porque muchas veces no se entiende bien y la idea es explicar que las dos ecuaciones tienen para la “x” o para la “y” o para las dos incógnitas que se suelen designar por x e y, tienen en una y en otra ecuación cuando hay dos ecuaciones, tienen el mismo valor, eso quiere decir, aclarar el significado de simultaneas ¿no? Y al mismo tiempo tienen el mismo valor de la x y la y, cuando aparecen en ambas ecuaciones la x y la y, ¿no? Y bueno, pues hay diferentes métodos, creo que el más efectivo es el de eliminación o el que le dicen de suma y resta que ese de alguna manera al encontrar el valor de la primera incógnita, puedes aplicar para encontrar digamos el valor de la otra incógnita, puedes aplicar digamos la sustitución y entonces como que ahí al mismo tiempo aplicas la sustitución, ¿no?

Entonces el más importante y el más efectivo método es el de la suma y resta y bueno, también hay que ver, que es muy importante hacerles ver a los estudiantes que una vez encontradas las raíces, los valores de la x y la y, hay que cerciorarse de que efectivamente satisfacen a las dos ecuaciones esos valores de la x y la y, eso es digamos la operatividad algebraica y también en algunas ocasiones, también sirve para hacer el método gráfico, cómo se pueden resolver usado las gráficas y la solución de un sistema de ecuaciones de dos, se ve gráficamente que es la intersección de dos rectas, cuando hay solución única y ese es el caso digamos más común, y ya los otros casos son excepcionales o particulares, pues ya se verán pero como casos especiales, por ejemplo cuando no hay solución o cuando hay infinitas soluciones, a que corresponde en la gráfica, pero eso, yo creo que son digamos casos excepcionales y que no se deben ver en el principio, porque eso justamente por ser casos excepcionales, esos casos particulares podrían crear mucha confusión y mucha duda a los estudiantes, siempre creo que en matemáticas y creo que en todos los casos del conocimiento debe ser primero lo que es más general y ya los casos particulares ya se verán después, por eso precisamente porque son particulares no?

E: Ah ok, entonces, grosso modo sería, primero defines cada termino de lo referente a sistemas de ecuaciones lineales y luego, bueno mejor en resumen ¿cómo sería?

D1: Primero, entender la terminología que se emplea en las ecuaciones, en este caso la ecuación que es una igualdad e incluso de ahí podría salir un método de cómo resolver una ecuación, eso para una ecuación. Cuando hay dos, entonces se llama sistema de ecuaciones simultaneas, entonces se explica que es simultaneas ¿no? Lo que significa en este caso que en ambas ecuaciones tienen el mismo valor la x y la y una vez encontradas, después hay que comprobar o verificar que realmente esos resultados que tenemos satisfacen a ambas ecuaciones. Ahora ese es el asunto de la terminología, ahora, la metodología para encontrar las soluciones hay diferentes métodos, el más efectivo es el método de reducción, después ya como corolario o digamos casos extra, puedes tal vez hablar del método de igualación o sustitución y una vez visto cómo se pueden resolver los sistemas pues ver también el método gráfico, y ahí se verá que la solución de un sistema, pues es la intersección de dos rectas, hay que hacer ver que una ecuación lineal está representada por una recta no?, ya hablar de coordenadas un tanto, pero no meterse muy profundamente en ese momento, ver simplemente como se grafica y hacer ver incluso ya una vez teniendo la solución ver como se intersectan en un punto y ver que ese punto es la solución.

E: ¿Entonces tú ves sistemas 2x2?

D1: Bueno en un principio es el caso más particular

E: Y en los cursos que tú has dado ¿ya no te piden que tú veas sistemas mayores o algo así?

D1: Sí, sistemas 3x3 y ahí puedes aplicar el método de reducción, obviamente pues se va complicar más.

E: ¿Y de esa parte ya no ves algo geométrico?

D1: Pues si llego a mencionar algo, pero no así con…con… porque sí se llega a complicar un poco más, por lo menos pues ya hay que hablar de planos, pero el método este de reducción a lo mejor con de 3x3 todavía se puede aplicar ¿no?, pero ya más allá ya se va complicando y entonces ahí para este nivel, yo creo que lo más conveniente para un sistema de ecuaciones de tres o más, pues si hay que aplicar el método de determinantes, las matrices ¿no? y en particular los determinantes, para encontrar las diferentes, un poco más no sé cómo llamarle… un poco más operativo y obviamente si se habla de sistemas de ecuaciones mucho más grandes, con un número con más allá de cuatro, si ya el método de Gauss jaja, ahí trabajas sólo con los coeficientes, es más operativo.

E: ¿Cuál es la razón por la que lo haces de esta manera?

D1: Justamente ahí es donde la experiencia me ha dicho, que se facilita mucho más la solución así, usando ese método por ejemplo para sistemas de dos ecuaciones ¿no?, es mucho más efectivo y más comprensible.

E: ¿Todo el tema?, porque al final lo que yo estoy preguntando es ¿cuál es la razón por la que lo haces de esta manera? me refiero a la secuencia para la enseñanza del tema, entonces tu consideras que así es más comprensible el tema.

D1: Sí, porque la experiencia me ha dicho, porque los otros métodos, si ciertamente son efectivos pero paradójicamente, sólo para ecuaciones relativamente sencillas, por ejemplo el método de igualación. El método de igualación es aplicable cuando una incógnita tiene coeficiente 1, entonces ahí puedes despejar una y ya después sustituir en la otra y ya ¿no? pero muchas veces el sistema no viene con una incógnita de esa manera, generalmente vienen con coeficientes, entonces ahí despejar una incógnita ya ofrece más trabajo y las operaciones se hacen más complicadas, en cambio la otra, pues simplemente hay que igualar coeficientes y luego sumar o restar y es más rápido, por esa razón es mejor ese método.

E: Podemos decir en resumen que tu secuencia de enseñanza es empezar haciendo hincapié en lo que es la esencia de una ecuación, luego un sistema, luego aclarar lo de solución simultanea, después lo métodos y al final el método geométrico.

Podrías decirme,

3. ¿Cómo explicas a los estudiantes el concepto solución de un sistema?

D1: Les digo justamente que los valores de la solución satisfacen a ese sistema de ecuaciones y ¿qué quiere decir satisfacer? pues que la igualdad se hace verdadera, es la verificación entonces, con eso se llega a la conclusión de que verdaderamente se resolvió bien la ecuación.

E:

4. Cuando enseñas el tema de sistema de ecuaciones lineales, ¿cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes?, dime qué es lo que más se les dificulta cuando están estudiando este tema, qué es lo que no entienden fácilmente

D1: Les cuesta mucho trabajo entender que es una ecuación, no la relacionan con una igualdad, piensan por ejemplo 3x + 3y, se los pongo así y me dicen que esa expresión es una ecuación, les digo que no es una ecuación, ¿qué dónde esta el igual? Y eso que es aparentemente elemental, pues no lo es.

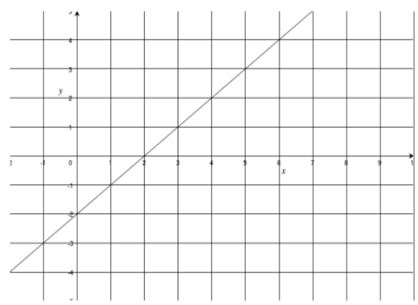
Lo mismo la cuestión de la simultaneidad que tiene que ser al mismo tiempo, eso es lo que más les cuesta trabajo.

SEGUNDA PARTE

E: En esta parte voy a dar algunos extractos de entrevistas realizadas en algunos trabajos de tesis, te daré una pregunta realizada en uno de estos trabajos a un estudiante ¿puedes leer la pregunta?

D1:

5. En el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿consideras que la siguiente gráfica podría representar un sistema de ecuaciones lineales 2x2?



a) ¿Qué respuesta aceptarías como correcta?

D1: Tendría que responder que efectivamente representa un sistema de ecuaciones lineales, pero…obviamente si tiene chanfle esto, para el estudiante, si una ecuación lineal es una recta, él me dice que debe haber por lo menos dos, que es lo que estamos viendo, entonces ahí lo pones a … No lo sé…

b) **E:** ¿Qué respuestas esperarías?

D1: Como tiene un chanfle muy curvado, yo esperaría que me dijera que no, creo que es una respuesta espontánea ya que en clase no se vieron este tipo de sutilezas, porque esta es una sutileza, entonces diría que esto representa una ecuación, representa una sola línea y entonces esta es una sola ecuación, honestamente, esto es lo que yo esperaría.

c) **E:** Un estudiante responde a la pregunta 9 diciendo que NO. ¿Por qué piensas que el estudiante respondió de esta manera?

D1: Ah pues precisamente, respondió de esta manera, porque es un caso particular, que digamos no entra en… la generalidad del tema de sistemas de ecuaciones lineales. Lo que se espera en digámoslo entre comillas en la enseñanza de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, lo que se espera es que siempre se corten dos rectas ¿no?, ahora digamos ¿cuáles son los casos sutiles o particulares? Pues cuando tengo dos rectas paralelas o cuando tengo una sola recta que está representada por dos ecuaciones y entonces esto son casos que digamos salen de lo común y de lo general… de la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

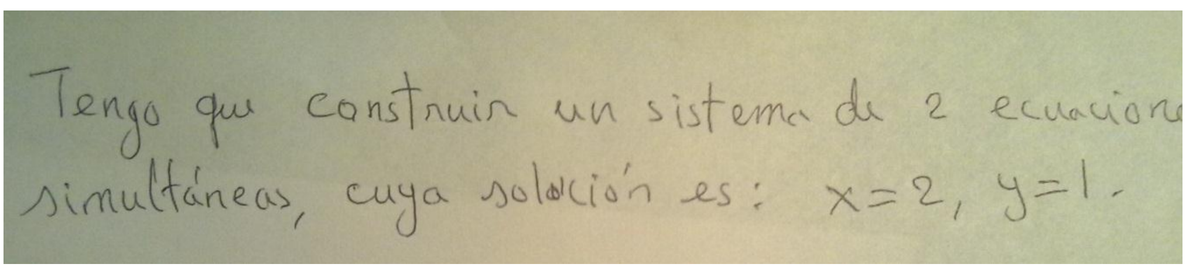
E: Ah, por eso crees que responde así, es decir, la forma en que abordamos el tema…

D1: Bueno hay muchos factores, también debido al tiempo quizá no veas muchos casos particulares de los sistemas de ecuaciones lineales, entonces lo que se hace es ver sistemas de ecuaciones lineales cuando hay única solución, cuando se cortan gráficamente, y esos casos, de paralelismo o de infinidad de soluciones, si hay que mencionarlos quizá pero si lleva tiempo, lleva más reflexión y lleva más dificultad para el estudiante, por lo que pienso que sí el estudiante diría no.

6. **E:** Proporciona un sistema de ecuaciones lineales 2x2 que tenga como solución única el punto (2, 1).

a) Si le hicieras esta pregunta a un estudiante, como respuesta correcta ¿qué aceptarías?

El profesor escribe lo que él consideraría como respuesta correcta por parte del estudiante.



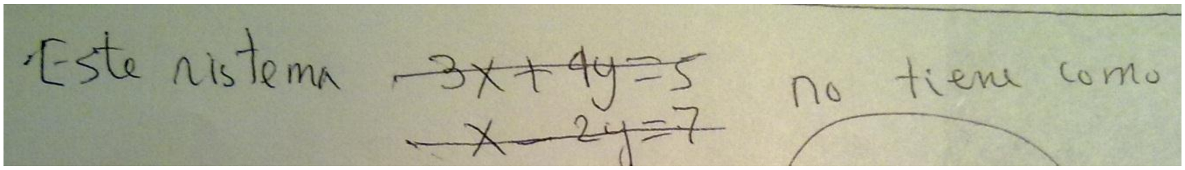
D1: eso yo aceptaría como respuesta, incluso así sin construirlo es la idea, para mi sería correcta esa respuesta

E: Si revisamos la pregunta dice que proporciones un sistema

D1: Ah dice proporciona

La entrevistadora, vuelve a leer la pregunta hasta que queda claro lo que se esta pidiendo.

D1: Ah bueno, me voy a poner en el papel del estudiante y pondría



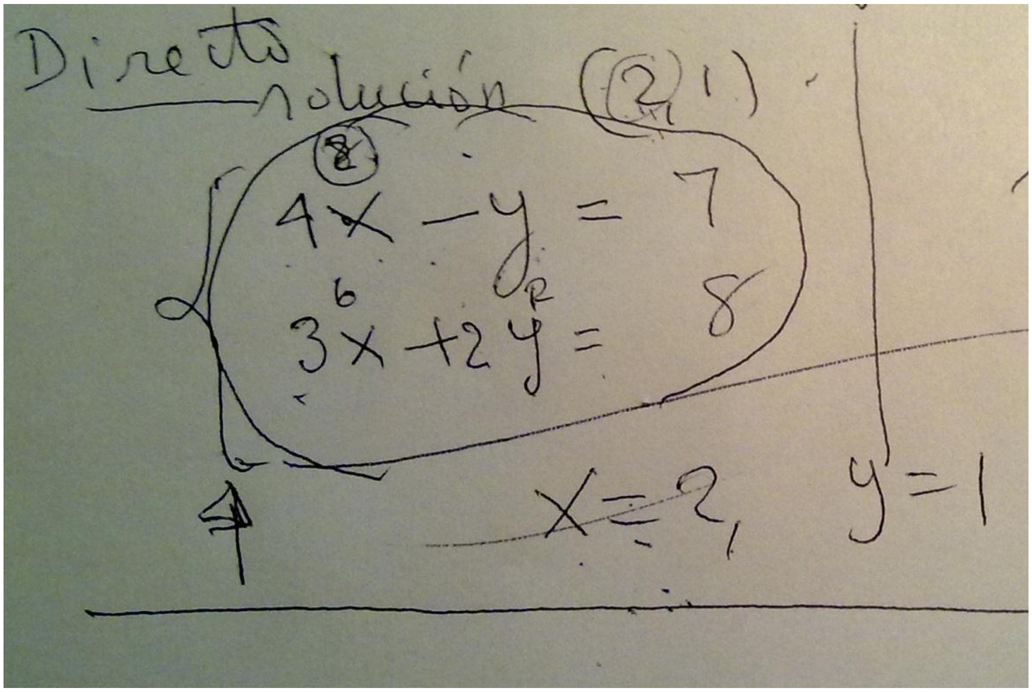
El profesor escribe el sistema anterior y da uno que no tiene como solución al punto dado.

D1: Osea, yo respondo negativamente, ya que yo como alumno diría contruyo cualquier sistema de ecuaciones que sería muy dificil que tuviera la solución pedida y es correcto, bueno claro, para no estar pensano exacatamente en un sistema así construirlo… que si se puede pero va tardar, pero bueno de momento un alumno podría contestar eso que construyendo cualquier sistema que no tiene la solución dada y con eso. Efectivamente, sería muy dificil que ese sistema tuviera esa solución… pero ahí habría un problema por que ese no sería un sistema de ecuaciones simultaneas porque muy seguramente la x y la y no tienen los mismos valores en las dos ecuaciones, entonces ahí habría un problema… ya no se apegaría a lo de simultanea, sería un sistema de ecuaciones lineales pero no simultaneo. Para construir un sistema que sea simultaneo tendríamos que hacer un sistema que tenga una solución que no sea (2,1)

E: Pero mejor da uno que sí tenga como solución (2,1)

D1: Lo más normal es que se contruya con eso

El profesor escribe lo siguiente:



E: entonces eso ya sería correcto ¿no?

D1: Sí, yo creo que en un curso estándar si ha entendido bien, tendría que poder construir esto

E:

b) ¿Qué tipo de respuestas esperarías que dieran los estudiantes?, ya diste algunas que podrían dar, pero ¿piensas en otras?

D1: Ya serían casos muy particulares, no creo que dieran otro tipo de respuestas distintas a las que ya se dieron.

E:

c) ¿Qué tipo de dificultades consideras que podrían presentar?

D1: Pues justamente esto, la construcción de este sistema, el paso, digamos, la dificultad es la siguiente, que yo veo, tu pones un sistema como este, y eso ya por la práctica le dan solución, llegan a que x = 2, y = 1. Ahora lo inverso es construir un sistema que tenga esta solución, eso es un grado de dificultad mayor y eso requiere hasta cierto punto, audacia y creatividad incluso, ese paso es más complicado, porque tienen que construir el sistema.

E: ¿Conceptualmente que no les permitiría dar el sistema?

D1: El partir de un sistema y encontrar la solución digamos es lo directo y esto (señalado la solución (2,1)) es lo inverso, los caminos inversos en matemáticas ofrecen más dificultad, tienes que deshacer. En el camino directo (el profesor se refiere a partir de un sistema y llegar a la solución) encuentras la solución e incluso, sustituyes los valores para comprobar, pero el proceso invertido de encontrar un sistema que tenga tal solución…

E: ¿Tú qué consideras que tendría que saber un estudiante para poder plantearlo?

D1: Pues justamente eso que una forma es la directa y que la otra es la indirecta o inversa.

E: Cómo hacemos nosotros para dar el sistema, sabemos que los coeficientes son arbitrarios ¿Qué condiciones deben cumplir? ¿Qué debemos saber sobre eso?

E: Un estudiante responde a la pregunta diciendo "necesito otro punto para poder hacerlo".

¿Por qué supones que el estudiante responde de esta manera?

D1: Pues ahí hay varias posibilidades, que probablemente esté confundiendo un sistema con una sola ecuación y él esté pensando que dos puntos le determinan una ecuación, pero ahí hay una confusión, porque no se está tratando de una ecuación sino de dos, y la generalidad de la solución de un sistema, pues es el corte de dos rectas que se representan por dos ecuaciones, salvo que sea excepcional el estudiante y esté pensando en un sistema que tenga un número infinito de soluciones lo cual dudo.

E: No, tampoco importaría porque si fuera así lo podría dar ¿no?

D1: Bueno pero si estuviera pensando en infinitas soluciones le das otra y podría construirlo.

E: Ok

d) **E:** Dada la respuesta del estudiante y las consideraciones que realizaste en el inciso anterior ¿qué explicación le darías al estudiante sobre el hecho que no necesita dos puntos?

D1: muy sencillo, en virtud de que una ecuación lineal representa una recta entonces dos ecuaciones representarán dos rectas, y generalmente dos rectas se cortan en uno y sólo un punto y esa sería la explicación, a menos, verdad, de que tengamos dos rectas paralelas y en ese caso no hay solución.

Se toma nota y se da paso a la siguiente pregunta.

7. **E:** En el siguiente sistema a, b y c indican números reales:

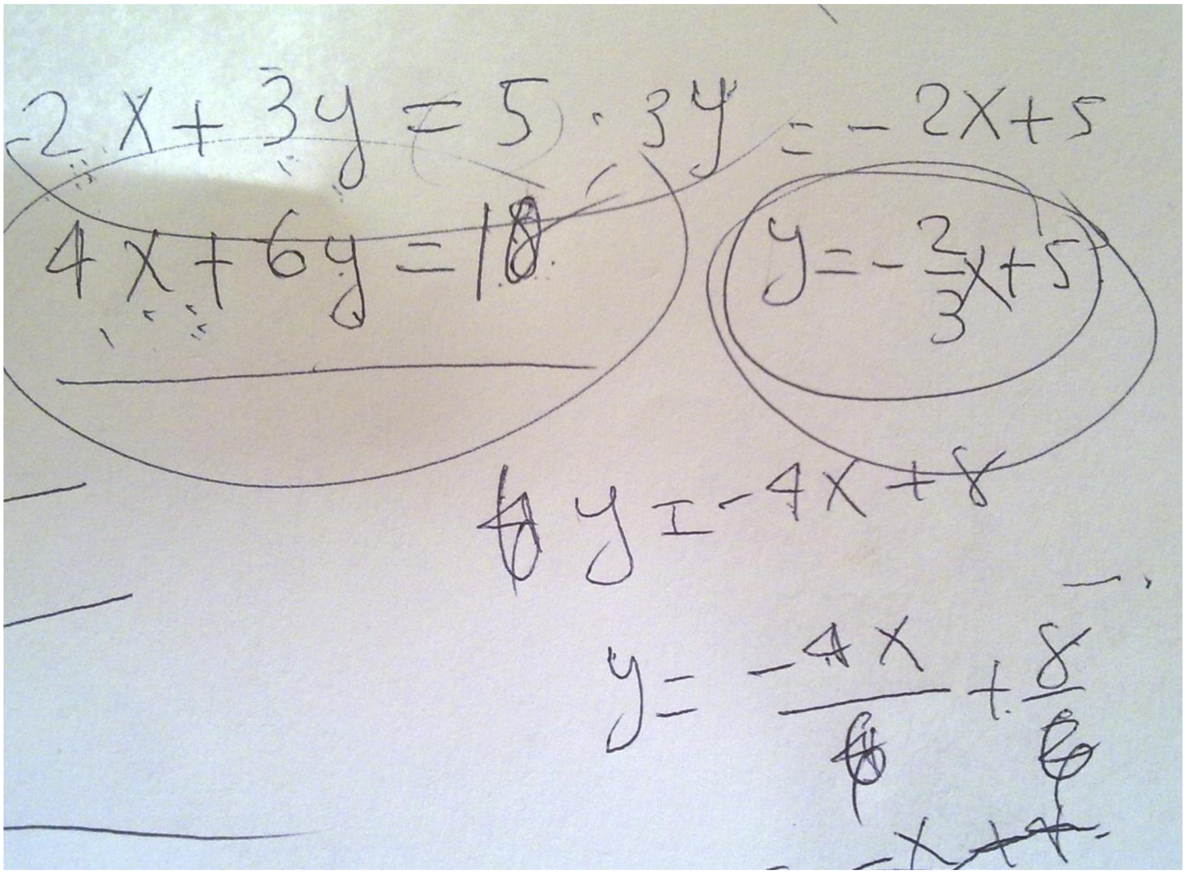
$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ ax + by = c \end{cases}$$

¿Cuántas soluciones puede tener este sistema? Proporciona un ejemplo para cada caso.

a) Si le hicieras esta pregunta a tus estudiantes ¿qué respuestas esperarías?

D1: Pues, esta pregunta ya está más complicada, si es un sistema de ecuaciones simultaneas y depende de los valores a, b y c, bueno, ahí si hay que clasificar las diferentes soluciones a ese sistema y justamente tendríamos que ver que, cuando a, b y c, cuando no son proporcionales a los valores 2, 3 y 5, entonces habrá una y sólo una solución, pero cuando los valores a y b son proporcionales al 2 y al 5 y la c es distinta del 5, entonces ahí son paralelas las dos rectas que representan esas ecuaciones y por lo tanto no habrá solución. Ahora cuando la a, b y la c, son proporcionales al 2 al 3 y al 5, pues entonces será una sola recta.

El profesor escribe lo siguiente para un sistema sin solución que da cuenta que tienen la misma pendiente pero distinta ordenada al origen:



D1: El término simultanea ayuda a entender que hay un par ordenado que satisface ambas ecuaciones, en cambio si uno sólo dice un sistema de ecuaciones lineales obliga a dar condiciones para ver cuando es única la solución, cuando no tiene solución y cuando tiene un número infinito de soluciones, en tanto que cuando utilizas simultaneas, se da por sentado que tanto en una como en otra, deben ser los mismos valores, eso es lo que agrega el termino simultaneo.

b) **E:** ¿Qué tipo de dificultades piensas que pudieran tener en responder?

D1: Se les podría dificultar por ejemplo entender la proporcionalidad, que no se entiende que es proporcional. La proporcionalidad se refiere a que los coeficientes de una son los mismos múltiplos de la otra. Mucha de la matemática, la dificultad está en descifrar y en explicar esos términos y justamente eso es lo que debe hacer un maestro que realmente pretende enseñar, que realmente explique esos términos y ahí radica la dificultad. La matemática es un doble tinglado, por un lado tienes que aprenderte una serie de términos de vocablos, por ejemplo proporcional y por otro tienes que realizar las operaciones, que bien a bien no se entienden y muchas veces las matemáticas se aprenden a base de hacer muchos ejercicios, pero el verdadero sentir, significado como que se pierde. Muchas veces no hay conexión entre la nomenclatura con lo que se esta haciendo y entonces eso lleva a que no hay significado, muchas veces las matemáticas se aprenden muy mecánicamente y por eso hay dificultad cuando en matemáticas superiores llega uno a estudiar y no se cuentan con los elementos.

Otra dificultad en cuanto a las rectas paralelas, es que ahí todavía no se ve el concepto de pendiente y entonces se trata de ver que el coeficiente de la x y el de la y están en proporción y el independiente no.

Dado que el entrevistador tiene conocimiento del currículum de la institución, hace el siguiente comentario.

E: Mencionas que cuando ves este tema no se ha visto el concepto de pendiente, éste se ve en matemáticas II y sistemas de ecuaciones lineales en matemáticas III

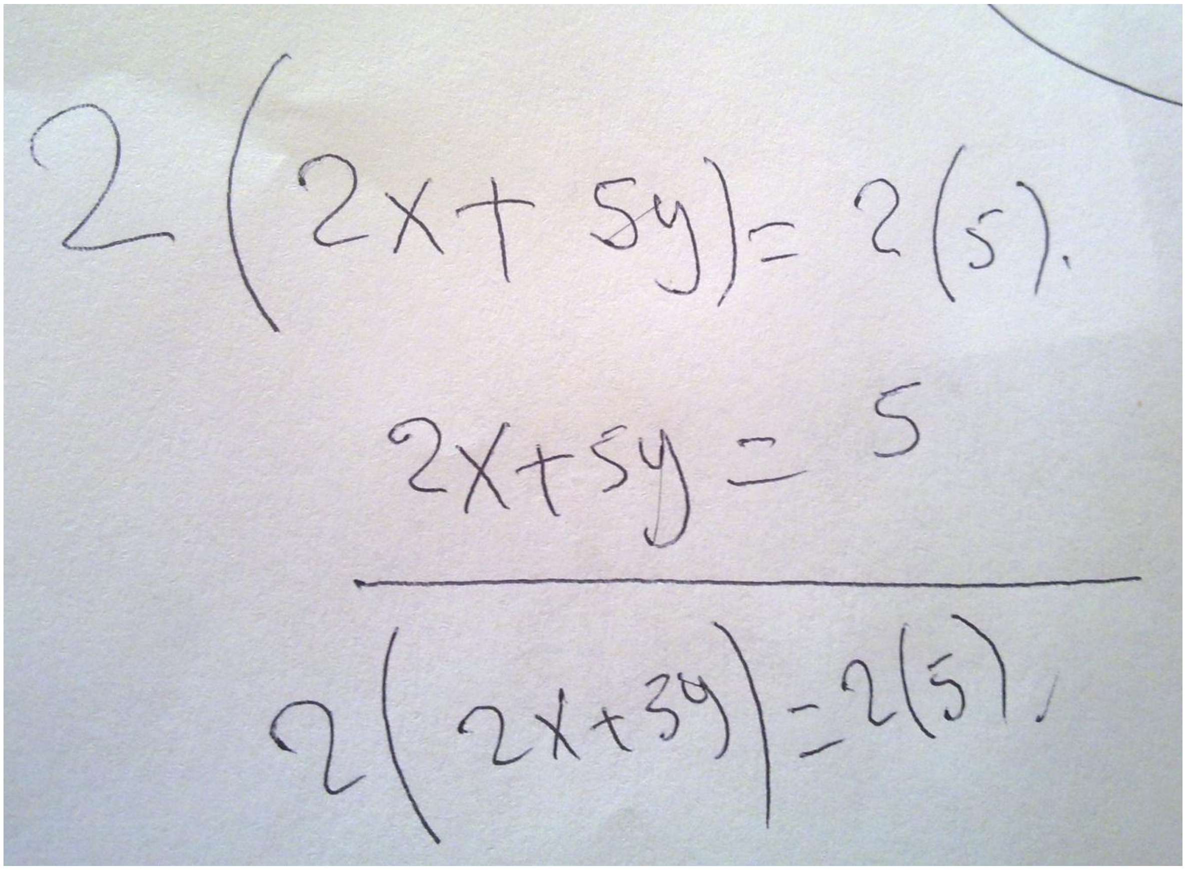
D1: Ah entonces se puede hablar que tienen la misma pendiente.

c) **E:** ¿Qué respuestas considerarías correctas?
D1: Las que yo di.

E: Un estudiante respondió a la pregunta con el siguiente sistema para el caso de un sistema sin solución.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10 = 10 \end{cases}$$

d) **E:** ¿Qué pienses que lleve al estudiante a responder de esta manera?
D1: Esto es la misma ecuación, si lo respondió así el estudiante, probablemente se quedó con la idea de que deben se proporcionales, pero no todos, ¿no? hay una diferencia en los términos independientes, porque estos si tú te fijas la primera ecuación se puede escribir así,



D1: Es en esencia lo mismo, simplemente aquí aplicamos el concepto de ecuación, ¿qué quiere decir una ecuación? Quiere decir una igualdad de manera que todo lo que haga del lado izquierdo, yo lo tengo que hacer del lado derecho para que se mantenga. Ahora si yo multiplico por dos el lado izquierdo, para que siga siendo una igualdad tengo que multiplicar por dos el otro lado, y así la igualdad se mantiene y sigue siendo la misma ecuación.

8. **E:** Si le preguntaras a un estudiante ¿Cuáles son las configuraciones geométricas posibles de un sistema de ecuaciones 3x2, para que el sistema no tenga solución?

c) ¿Qué aceptarías como respuesta correcta?

d) ¿Cuál crees que sería la respuesta más común?

D1: Se le hizo la pregunta a un estudiante y realizó la siguiente gráfica como

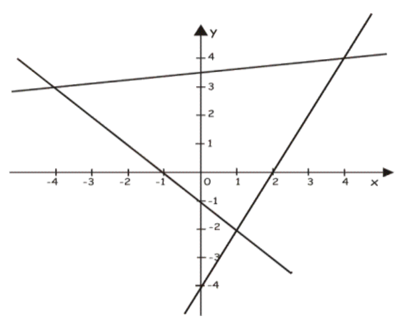
respuesta.

¿Por qué crees que sólo da esta configuración y qué explicación le darías para que reflexionara sobre las otras configuraciones?

D1: Creo que él estaba pensando, traslado el caso de dos ecuaciones, en donde se ve sólo dos rectas para el caso sin solución, y automáticamente generalizó el caso de dos rectas a tres y no imagino otros casos, me parece que ese es un ejercicio de imaginación. Le explicaría los otros casos y el por qué, creo que lo importante en los otros casos donde no hay solución es que hay soluciones parciales por decirlo de algún modo por pares, no hay solución simultanea. Justamente ahí se justificaría la palabra simultanea, ecuaciones simultaneas o sea que las tres deben tener la misma solución al mismo tiempo.

E:

9. A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?



Si hicieras esta pregunta a tus estudiantes

a) ¿Qué respuestas esperarías?

D1: En mi experiencia, ellos dirían que sí hay solución, y es muy posible que digan que hay tres soluciones, por que se cortan en tres puntos.

b) ¿Qué respuestas aceptarías como correctas?

D1: Dado que estamos hablando de un sistema de ecuaciones, pensaría que esto esta mal, porque no hay solución.

E: Ok, pero recuerda que no le preguntan si esta bien o mal el sistema, le preguntan cuántas soluciones tiene el sistema.

D1: Pues no tiene ninguna solución

c) **E:** Se le hizo la pregunta a un estudiante y respondió "en mi opinión tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos diferentes.
d) Dada la respuesta del estudiante, ¿podrías decir cuál es la concepción que tiene del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales?

D1: Pues justamente que la palabra que falta ahí es esa palabra de simultánea.

E: Sí, pero ¿cuál consideras que es su concepción?

D1: Pues esa justamente esa, que la solución de un sistema de ecuaciones es cuando se corta, no importa como se corta, para ellos si se corta ya tiene solución, pero justamente ahí esta faltando esa palabra de simultánea, entonces ahí no estaría de más decir que el lenguaje matemático debe ser muy exacto. Claro que se sobre entiende ahí eso, que el lenguaje tiene que ser muy exacto. Esa palabra de simultánea se sobre entiende y se ha olvidado y ya no la ponen.

Considero que una posible causa, es que no se hace hincapié que cuando hay solución es simultánea.

E: ¿Qué es lo que podría estar conduciendo a los estudiantes a dar respuestas como las expuestas a lo largo de la entrevista?

D1: Pues justamente que hay que hacer mucho énfasis en el significado exacto de ese vocabulario, hay que recrear las clases, no sólo decir lo que está en los textos, sino, tratar de usar un lenguaje cotidiano, hacer hincapié en lo que es una ecuación y los conceptos. Y lo de simultaneidad.

E: ¿Cuáles son las condiciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para que tenga solución única?

A lo que un estudiante respondió "para que tenga solución única tendría que ser el mismo número de variables para el mismo número de ecuaciones"

¿Consideras que el estudiante respondió correcta o incorrectamente? ¿Por qué?

D1: Pues… se ve que el estudiante si reflexionó, y es una de las condiciones para que tenga una solución única, pero tiene que agregarle mucho más y para ello hay que agregarle lo de los coeficientes.

E: Ah, ¿te refieres a que el que sea cuadrado es una condición necesaria para que haya solución?

D1: Sí, es una condición pero no es la única, y las condiciones van a recaer sobre los coeficientes y ya vimos por ejemplo en el caso de dos ecuaciones, que en primera no tienen que ser proporcionales los coeficientes, sencillamente ahí se podría responder que no deben ser proporcionales los coeficientes.

E: Entonces tú dirías que la respuesta es parcialmente correcta, o sea es correcta, pero le falto añadir cosas.

D1: Sí así es.

Bueno mil gracias por la entrevista, hemos finalizado.

TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA A D2

PRIMERA PARTE

1. **E:** ¿Qué estudios realizaste? Incluye estudios universitarios, posgrados y cursos de actualización o capacitación.

D2: Estudié licenciatura en Físico Matemático con especialidad en matemáticas puras, después maestría en matemáticas con especialidad en topología algebraica y bueno, ahí no tengo el título pero tengo los créditos, y ya.

E: ¿No has tomado nada relacionado con didáctica?

D2: Pues tomé un cursillo de tres días sobre constructivismo en educación, me lo dieron en una escuela privada donde trabajaba y vino un investigador español y nos dio ese curso, me pareció interesante, la idea es que en lugar que uno les de los temas, es propiciar que ellos vayan generando el conocimiento, a veces trato de hacerlo con los estudiantes…fuera de ese curso, nada más.

2. **E:** ¿Durante cuántos años has laborado como docente y en qué nivel educativo?

D2: Doy clases a nivel medio superior y a nivel superior en la carrera de actuaría y ahí doy diversas materias, tengo 10 años dando clases en la universidad, y 9 años en el nivel medio superior.

3. **E:** ¿Qué cursos has dado?

D2: Álgebra superior I, II; álgebra lineal I, II; geometría analítica I, II; Cálculo diferencial e integral I, II, III y IV; análisis matemático y los cursos de probabilidad y estadística, eso en la universidad, en la preparatoria he dado Matemáticas I, II, III, IV,V y temas selectos de matemáticas, pero no he dado probabilidad y estadística.

4. **E:** Cuando preparas clases, actividades, tareas y exámenes, ¿cuáles son tus materiales en que te apoyas?

D2: Bueno, gran parte es la experiencia, es decir, cuando inicié iba a la biblioteca y sacaba libros de enseñanza de las matemáticas o de problemas para motivar la creatividad, pero con la experiencia vas viendo que hay algunos que funcionan más que otros, gran parte del material que ahora aplico es el que de alguna manera he ido transformando a lo largo de los años, por supuesto hay libros clásicos para ejercicios; tomas el Baldor y les pones los ejercicios de ahí; eso en cuanto a la práctica. La parte conceptual por ejemplo ¿por qué menos por menos mas? yo no he encontrado a un nivel básico que lo expliquen, ya en libros de álgebra superior sí, pero de manera básica no he visto o inclusive por qué la multiplicación de fracciones es como es; por qué es numerador por numerador y denominador con denominador, yo no he encontrado en libros y como es parte de lo que me gusta dar, entonces más bien es una reflexión que yo he hecho y le explico, es decir, el conocimiento global que puedo tener, saber por qué es así, trato de bajarlo, entonces es una parte de textos de actividades y últimamente una parte de reflexión. Incluso con otros profesores compartimos libros de historia de las matemáticas, otros acerca de qué son las matemáticas, dan una visión histórica y tratas de incorporarlo a la clase.

5. **E:** ¿Podrías decir de manera general la forma en que inicias el tema de solución de un sistema de ecuaciones lineales, y cuál es la secuencia de enseñanza que sigues? ¿Cuál es la razón por la que lo haces de esta manera?

D2: Bueno, contestaré simultáneamente ambas preguntas, empiezo incluso con la parte histórica, les digo que el problema fundamental de álgebra es precisamente resolver ecuaciones, y ya me voy con la cuestión de explicar cada uno de los términos incluso etimológicamente y les digo que inicialmente álgebra era un método para resolver las ecuaciones, es el método de eliminación y restitución. Les digo que estudiar álgebra el corazón del álgebra, pues es resolver ecuaciones o en este caso resolver un sistema pues ya es el siguiente paso, y entonces la idea de despeje viene de esa idea de eliminar y restituir como en una balanza, y entonces cuando ya se tiene en mente que es una ecuación de dónde viene el nombre, el método, vamos al paso de entender qué es un sistema, entonces les digo que debemos verlo geométricamente primero, se observa que una ecuación representa una recta y la intersección de esas rectas es el punto que satisface o que es solución de ambas ecuaciones, y vemos geométricamente que puede ser que sea un punto de intersección, o sean paralelas pero iguales y que sean infinitas soluciones o paralelas y distintas, entonces ellos ya saben que tienen tres opciones: una solución, infinitas soluciones o ninguna. Luego vemos la necesidad de usar otros métodos ya que cuando las soluciones no son enteras ya no es tan preciso, uno da una aproximación y cuando uno hace la sustitución pues se ve que no… entonces hacemos el método gráfico y entonces hacemos el método analítico y entonces ya vemos algunos métodos dependiendo de cómo este el grupo, de las necesidades o dificultades del grupo, les doy varios métodos de solución, y si esta fallando les doy un método, o sea el geométrico y un analítico, y si van muy bien hasta la regla de Cramer con la idea de motivar qué significa el determinante, si el determinante es cero qué pasa, es decir, como traducirlo a la cuestión geométrica, si el determinante es diferente de cero qué pasa… en fin, diría que ese es el recorrido que hago para hablarles de sistemas de ecuaciones lineales; empiezo con un nivel histórico, luego un nivel geométrico, me voy al nivel algebraico y después problemas de aplicación.

E: ¿El ámbito geométrico lo ves como un método para encontrar una solución gráficamente?
D2: Ambos, previamente ya tienen las bases de la geometría, ya no les cuesta trabajo graficar una recta, entonces cuando las soluciones son enteras, pues funciona muy bien como método, pero cuando la solución es un número fraccionario enseguida se dan cuenta que es insuficiente, entonces, sí lo doy como un método y después cuando no son soluciones enteras pues como un esbozo, entonces les pido que hagan la gráfica y que vean si su solución se aproxima a lo que ven gráficamente, es decir, si es congruente el dibujo y el análisis, si no lo es, pues quiere decir que la gráfica por ahí falló un elemento o el análisis también un signo o algo falló. Sí, para mi la parte geométrica es un apoyo.

E: ¿Por qué lo haces de esta manera?
D2: Bueno, pues va cambiando, hay veces que no me da tiempo de ver todos los métodos, pero lo que siento es que si tu les das a los estudiantes solamente una cuestión metodológica como que es muy árido, entonces salvo los que son muy… siempre hay problemas y dicen "*y eso de qué me va servir*" si empiezan a ver varios elementos, pues empieza haber un atractivo de que se va hacer una gráfica, entienden lo que están haciendo, entienden la interpretación y no solamente el decir resuelvo o aplico un método para resolver una ecuación y quien sabe qué signifique, entonces por lo menos tienen un ancla que saben qué están haciendo, lo que significa, después se ven problemas de aplicación, todo se va ligando sobre esa idea se va ligando con lo algebraico y lo geométrico, que tenga un sentido en el fondo.

6. **E:** ¿Cómo explicas a los estudiantes el concepto solución de un sistema?

D2: Ahí me voy hasta en el lenguaje, ya que les digo que para entender el concepto solución, nos vamos primero a una ecuación de primer grado con coeficientes enteros que es más sencillo y les digo qué es una ecuación y les digo que es una igualdad, y luego les explico qué es una solución y les digo que es él o los valores que satisfacen una ecuación, es decir, que cuando evalúas este valor en la ecuación, se cumple la identidad numérica y les pongo ejemplos: si $x = 1$, si x vale 2, no se satisface, porque la identidad no es cierta dos no es igual a 1, entonces ahí es muy claro cuanto debe de valer x, pues es 1 y $1 = 1$ vemos que satisface, y les pongo ejemplos de cuando hay más soluciones cuando hay infinitas soluciones o cuando no hay solución

E: ¿En un sistema?

D2: Sí, todo referente a los sistemas, entonces lo vemos, por ejemplo si dices que tiene una infinidad de soluciones, les pregunto qué característica tienen, me dicen, *"debe tener esta relación"*; por ejemplo en sistemas de ecuaciones, una variable depende de la otra, si por ejemplo $y = 5$ equis debe valer $y + 1$ dependiendo de la relación, entonces ya comprobamos con cinco o seis números y entonces ya vemos que sí, que esta tiene infinitas soluciones y la otra, ya vemos la cuestión geométrica y analítica pero más bien del concepto, entonces… incluso esto genera la idea de comprobación, les digo que lo que estamos haciendo aquí, es lo que se entiende como comprobación pero no con el nombre de comprobación, sino la idea si satisface la ecuación o no y les resulta a los estudiantes natural ver, sustituyen y corroborar que si se cumple, eso es la comprobación.

7. **E:** Cuando enseñas el tema de sistema de ecuaciones lineales, ¿cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes?

D2: Pues… aquí el principal problema es que en ocasiones los estudiantes no saben ni sumar, entonces si les enseñas algún método, de reducción y saben que tienen que eliminar una variable e incluso saben por cual número deben multiplicar la ecuación para que puedan eliminar una variable, y a la hora de multiplicar lo hacen inadecuadamente y peor aún a la hora de sumar las ecuaciones en lugar de restar suman y no se elimina ninguna de las variables, entonces digo que el mayor problema de los que no logran desarrollar estas habilidades, tienen muchas deficiencias, o nos vamos a nivel geométrico y luego tienen los puntos y no los grafican bien, es que en ocasiones tienen una revoltura en la mente…

E: Entonces me parece que para poder hacer la distinción, podemos decir que hay alumnos que tienen dificultades de raíz y que llegan a este curso sin los elementos necesarios para estar ahí, entonces entendemos cuales pueden ser las dificultades lógicas que se presenten. Pero también hay los casos de estudiantes que no tienen este problema, pero conceptualmente para este grupo de estudiantes ¿qué has visto en tu práctica que se les dificulte?

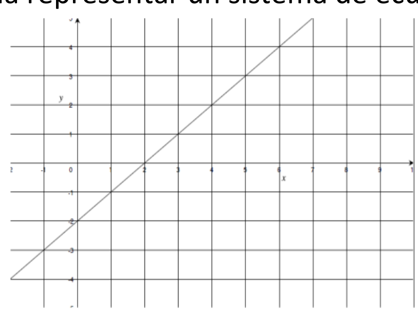
D2: Creo que en ese caso el método no es un problema, ya que es una serie de reglitas, es recordarlas y tenerlas presentes y lo hacen bien…otra dificultad va justamente sobre el concepto, es decir, como que es difícil que le den un fondo a las cosas, ellos trivializan lo que es una ecuación, una solución, lo hacen a destajo, hacen y hacen pero finalmente no saben que están haciendo y justamente se ve reflejado cuando planteamos problemas, porque ahí es la ruptura de la parte práctica y la parte teórica conceptual, y no logran unir esto; considero que eso es lo que se les dificulta a este grupo de alumnos que hacen bien las cosas, es decir, la parte de ver y relacionar lo que se ha estado haciendo en otros contextos… ese poder conectar lo aprendido con algo real, se les complica les es totalmente ajeno. Y yo vería un tercer punto es… yo veo que hay cierta preferencia, entonces los que son geométricos les encanta la geometría de las rectas y eso, y la parte algebraica se les complica, o presentan problemitas así de que se confunden, porque creo que saben que lo pueden hacer del otro lado (refiriéndose a la parte geométrica) y algunos es el otro caso, lo hacen muy bien en la parte algebraica y la parte geométrica se les complica, incluso cuando los dejo hacer en equipo pues ya saben que lo hacen en equipo, que uno hace la parte algebraica y el otro la parte geométrica, tareas… yo lo vería en esos tres puntos.

E: Ok, y ¿algo que tu hayas observado conceptualmente que cuando ya hayas evaluado veas que hay ciertas dificultades en cuanto al tema? Que digas que has notado algo así como regular.

D2: Conceptualmente yo digo que se ve muy claro en los problemas, plantean un problema y les dices un problema típico del libro, aunque no pongo siempre de esos, pero de alguna manera tienes que dar los clásicos, por ejemplo en el caso de determinar la edad del padre y el hijo con ciertos datos que se proporcionan, llegan a resultados como el padre tiene 100 años y el hijo -5, entonces a nivel conceptual no pasan de la cuestión práctica y reconocer que eso es absurdo, si a nivel conceptual veo que no son capaces de reconocer resultados ilógicos, y cuando revisas pues hay un error y ellos ya ven en dónde.

SEGUNDA PARTE

8. **E:** En el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿consideras que la siguiente gráfica podría representar un sistema de ecuaciones lineales 2x2?



a) ¿Qué respuesta aceptarías como correcta?

D2: Pues las dos, si me dicen sí o no, podría aceptarla como correcta porque si me dice un sistema 2x2, es un sistema de dos ecuaciones con dos variables, entonces debería de haber dos ecuaciones con dos variables, si nos vamos a la idea geométrica, pues son dos rectas; bueno esta es la misma recta, o incluso puede ser ésta recta, y uno de los ejes, $y = 0$, entonces ahí tengo un ejemplo, pero si alguien sólo ve la recta y piensa que ese es la única ecuación que hay, podría decir, yo nada más veo una recta, es un sistema de 1x2. Si bien podría pensar que es incompleta la respuesta, si esta haciendo un análisis, tiene en la mente una concepción geométrica de ver rectas y si me contesta así, pues parcialmente yo diría que esta bien.

E: Bueno, y tú en tu clase ¿cómo le representas gráficamente un sistema 2x2 con infinitas soluciones?

D2: Ah bueno, gráficamente lo que hago es, la primera gráfica la grafico en un color y la otra la pongo un milímetro arriba y la pongo con otro color, digo es la misma, sólo que la pongo en dos colores incluso la ecuación la pongo del color de la gráfica, si la encimo no se aprecia pero es la misma, pero sí, geométricamente es eso, una recta.

b) **E:** Un estudiante responde a la pregunta 9 diciendo que NO. ¿Por qué piensas que el estudiante respondió de esta manera?

Ya nos comentaste algo, pero si gustas enfatizar

D2: Si bueno el asume que un sistema 2x2 hay dos rectas, ¿no? pero como ve una recta, pues… pero incluso olvida los ejes que también son rectas, y olvida esta posición de que puede ser la misma, una recta paralela igual. Pero tiene una lógica en él, incompleta sí, pero hay una lógica.

9. **E:** Proporciona un sistema de ecuaciones lineales 2x2 que tenga como solución única el punto (2, 1).

D2: Pues primero graficaría mi punto (2,1) y a partir de este punto puedo construir cualquier recta porque… pongo mi ecuación en la forma punto pendiente y precisamente este punto es el que tengo, y entonces lo único que hago es, para dar dos rectas doy dos pendientes, por ejemplo si doy $m = 1$, tendría la siguiente ecuación, y si doy $m = -1$ una pendiente a -45 grados y ya están mi par de rectas.

a) **E:** Si le hicieras esta pregunta a un estudiante, como respuesta correcta ¿qué aceptarías?

Dado que tu representaste el sistema tanto gráficamente como analíticamente ¿el estudiante tendría que darte ambas representaciones para que tu consideraras que esta bien?

D2: No, puede darme sólo la parte analítica, yo la escribí para visualizar, ya que yo conecto mucho las dos partes y siempre trato de hacerlo así, ya que muchos no hacen esto solos, entonces ven el dibujo y por ejemplo puse pendientes muy sencillas y gráficamente sé cómo se ven; en realidad un estudiante podría decirme simplemente pongo dos pendientes y en general eso me representa un sistema de ecuaciones, aunque son iguales o sean diferentes pues tienen esa solución pero como pide que la solución sea única, pues si tendría que especificar que $m_1 \neq m_2$ entonces ya ni siquiera dan esta en particular, dan una familia de sistemas que tienen como única solución (2,1), pero es ahí donde va el concepto, quien hace esto (señalando el caso particular), lo hace y lo hace bien, tiene el concepto básico, pero quien sea capaz de decir que puede dar cualquier pendiente ya tiene en mente que hay muchos sistemas de ecuaciones que tienen esa solución.

b) **E:** ¿Qué tipo de respuestas esperarías que dieran los estudiantes?

D2: Bueno, el problema no es de rutina, no es de estarlos poniendo, incluso el nombre 2x2, yo no lo uso…
E: ¿Qué nombre usas?
D2: Es que por ejemplo en matemáticas III, no llegamos a ver sistemas 3x3 sólo vemos 2x2, entonces como sólo vemos 2x2, como que es innecesario decir 2x2, en temas selectos pues si nos metemos con sistemas mayores y matrices y determinantes y ahí es otra cosa, pero donde esta el grueso de alumnos es en matemáticas III y es ahí donde todos lo tienen que ver. Entonces este tipo de preguntas las he llegado hacer justamente como a nivel conceptual a ver que contestan o a lo mejor no tratando de darle mucho peso, y sí ver sus perfiles y motivar justamente a los que pueden hacer algo más. Aquí yo me encuentro con la idea que te decía desde un principio, ¿qué es una solución? Entonces no ligan esta idea de la ecuación de la recta con el único cambio de la pendiente, entonces si les pongo esto, más bien hacen la gráfica y a partir de la gráfica como que intentan, es decir, ellos ponen dos puntos en el plano y ya que tienen los dos puntos encuentran la ecuación, pero es mucho trabajo.

c) **E:** ¿Qué tipo de dificultades consideras que podrían presentar?
D2: Esta pregunta la he hecho y nadie la ha respondido y mucho menos dar una familia de sistemas con tal solución, más bien lo que han hecho es poner dos puntos y calculan las rectas.

E: ¿Cuáles son los conocimientos que te permiten poder dar una respuesta a esta pregunta?
D2: … Creo que es difícil el cuestionamiento, porque incluso si haces esto en toda la academia, yo creo que habrá quien lo haga de una forma o de otra, el problema es básico y probablemente todos lo contesten y todos nos acerquemos a la forma más eficiente, pero va sobre problemas de nivel medio y quizá si le preguntas a 9 hay 9 diferentes formas de hacerlo, que hace que alguien lo haga en una línea…
E: Sí, pero la pregunta va en el sentido de hacer explícitos los conocimientos que a cualquier persona le permiten proporcionar el sistema.
D2: No se, … no sé que sea, siento muy complejo tratar de explicarlo, parcialmente podría servir la forma en la que abordas las cosas, por ejemplo para mi la cuestión de talacha no me gusta, nunca me ha gustado y siempre he sido más abstracto en el sentido de ahorrarme tiempo, y siempre he tratado de ahorrarme tiempo y aunque siempre he presentado unas soluciones muy estéticas, he visto unas todavía mejores y en qué esta que uno pueda ser como en esa variedad, pues no lo sé. Sí entiendo lo que me dices, creo que tiene que ver la madurez porque yo veo esto y me representa muchas cosas, geométricas analíticas, algebraicas; como tengo una gama de opciones, esto lo puedo ver desde muchos puntos de vista, incluso hasta como un producto punto, todo esto me permite visualizarlo y decidir que hacer.

E: Los estudiantes para responder a esto, ¿qué tipo de dificultades podrían presentar?

D2: Bueno, en matemáticas II yo les remarco mucho esto de las rectas, que para poder construir una ecuación, necesitan dos puntos, por eso yo en mi dibujo marqué dos, por eso yo supongo que eso pueden hacer para dar respuesta al ejercicio y quizá aquí podría surgir la duda de dónde ponen el punto, y eso algo que se les dificulta saber que el punto es arbitrario. Según yo, a ellos les queda claro que para trazar una recta, necesitan dos puntos, que para un sistema necesitan dos rectas, los elementos están, entonces la cuestión es dónde poner los puntos, que sepan que es donde ellos quieran, eso se les podría dificultar.

E: Un estudiante responde a la pregunta diciendo "necesito otro punto para poder hacerlo"

d) ¿Por qué supones que el estudiante responde de esta manera?
D2: Considero que si esta pidiendo otro punto sabe que tiene una recta, y quizá no este contemplando que se pidió que el sistema tenga única solución, y entonces estaría pensando en un sistema con infinitas soluciones. Yo creo que necesita dos puntos para romper el paralelismo de las rectas y que la solución sea única.
E: Estas considerando que una posibilidad es que el estudiante no esté tomando en cuenta que se le esta pidiendo solución única y pida un punto adicional para formar una recta y dar un sistema con infinitas soluciones, pero suponiendo que el estudiante si esta tomando en cuenta que le están pidiendo solución única, ¿por qué responde así?
D2: Pues si no la esta omitiendo y consciente este pensando en otro punto… no le veo otra opción… puede ser que esté pensando en pedir otro punto para dar una recta y no en un sistema, eso es lo que puedo ver.

e) **E:** Dada la respuesta del estudiante y las consideraciones que realizaste en el inciso anterior ¿qué explicación le darías al estudiante sobre el hecho que no necesita dos puntos?
D2: Justamente tiene que ver con el concepto de pendiente y de esa ecuación en particular la de punto pendiente, una forma es la recta que pasa por dos puntos, pero la otra que es esa (señala la ecuación de punto pendiente), sirve cuando uno conoce un punto y la pendiente, ya se conoce un punto, entonces faltarían dos pendientes si quieren dos rectas o una si quieres una, yo de diría que le propusiera al estudiante que propusiera dos pendientes, y ya sabemos que la pendiente oscila en todos los reales, yo le diría eso.

10. **E:** En el siguiente sistema a, b, c indican números reales:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ ax + by = c \end{cases}$$

¿Cuántas soluciones puede tener este sistema? Proporciona un ejemplo para cada caso.

a) Si le hicieras esta pregunta a tus estudiantes ¿qué respuestas esperarías?

D2: Yo diría que la más fácil es que a, b y c valgan lo mismo que en la primera ecuación, tendríamos dos ecuaciones iguales y por tanto una infinidad de soluciones. La otra es el mismo múltiplo de los números, no estoy tan seguro que esa la pudieran dar pero la primera sí, incluso aquí podría ponerlo en general así.
En el otro caso esperaría lo mismo, que a y b los tomaran como 2 y 5 respectivamente pero que le cambiaran el termino independiente y es aquí donde se ve que entendieron los elementos de la ecuación, que vean que la estructura de la ecuación esta basada sólo en estos dos números (señalando los coeficientes de *"x"* y *"y"*) yo puedo saber la pendiente sólo con estos dos números, lo que no se es por dónde pasa, ¿quién me dice por dónde pasa? Pues el término independiente, si yo cambio el término independiente si son paralelas pero ya no son iguales, entonces aquí ya no hay solución.
Mínimo espero de ellos que por lo menos comprendan que si estos son iguales (señalando los coeficientes de *"x"* y *"y"*) pero los términos independientes ya no, entonces son paralelas pero no iguales.
En el último caso, la verdad es que reconozco que así la pregunta nunca la he hecho, no se si podrían ser capaces de decir que a y b son cualquier cosa diferente de 2 y 5; la idea es que puedes poner cualquier cosa y tendrá solución única si no tienen esta forma (señalando los casos anteriores, rectas paralelas no iguales e iguales).

b) **E:** ¿Qué tipo de dificultades piensas que pudieran tener en responder?
D2: Considero que se les puede dificultar que dado que la pregunta esta dada en forma algebraica, difícilmente ellos plantearán esto en forma geométrica para que se ayudaran, y en el último caso, como que no les he dado muchas herramientas para poder responder, nunca les doy esas herramientas para que ellos sepan como debe ser a y b para que haya solución única, es decir, como que saben cómo es a y b para que haya infinitas soluciones o que no haya solución; cuando hay solución es obvio pues ahí están los ejemplos, pero aquí cuando ya no es obvio que a y b….

E: ¿y qué elementos les tendríamos que dar?

D2: Hacer la conexión del modelo algebraico, porque yo creo que aquello de la parte geométrica si le entienden aunque no lo puedan hacer, pero si lo pueden esbozar y uno ya refina la idea y ya. Y esto sería como ya inducirlos para que ellos reconozcan la relación entre esa gráfica y esta ecuación así abstracta. Es que a nivel algebraico ¿cómo debe ser a y b? no es tan sencillo, más bien es ligarlo con lo geométrico, simplemente da una pendiente diferente a la que tengo acá arriba y da tu ecuación. Esta pregunta si esta… una pregunta como esta nunca la había hecho eh, lo voy a tomar en cuenta.

c) **E:** Me parece muy bien, y continuando, ¿Qué respuestas considerarías correctas?
D2: Si me dieran la misma ecuación para el caso de infinitas soluciones, si me dieran la misma ecuación y sólo cambiaran el término independiente para el caso sin solución y en el caso de solución única, dudo que lo llegaran a realizar.

d) **E:** Un estudiante respondió a la pregunta con el siguiente sistema para el caso de un sistema sin solución.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = 10 \end{cases}$$

e) ¿Qué piensas que lleve al estudiante a responder de esta manera?
D2: Pues se equivocó ¿no?, porque estas son las mismas rectas, justamente es la idea del múltiplo. Para empezar, para poner la parte de múltiplo para “*x*” y ”*y*” creo que entiende que si son los mismos números o los mismos múltiplos pues la ecuación no cambia entonces es paralela, y a lo mejor lo que no tuvo en cuenta fue la constante, el término independiente, ahí pudo ser por omisión o dudo mucho que si es capaz de entender que si es un múltiplo te genera una paralela, no sepa que la constante te la mueve, yo pensaría más bien que él omitió…o sea multiplicó todo por dos y se le olvido cambiarle el 10 por otra cosa, yo lo vería así ¿no?

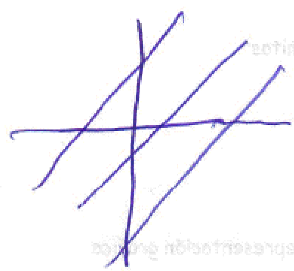
11. **E:** Si le preguntaras a un estudiante ¿Cuáles son las configuraciones geométricas posibles de un sistema de ecuaciones 3x2, para que el sistema no tenga solución?

a) ¿Qué aceptarías como respuesta correcta?

E: ¿Tú ves sistemas cuadrados regularmente?
D2: Sí he hablado 3x2, aunque no les digo que es un 3x2, es decir, en ocasiones tienes, sobre todo en problemas prácticos, que aparecen muchas relaciones, pues sustituimos una en esta y esta otra en la otra, y hacemos como…nunca decimos que es un 3x2 porque ni siquiera contamos las ecuaciones pero si saben y claro siempre es en dos variables, pero en ocasiones si llegan a salir tres o cuatro ecuaciones y si tienen que relacionarlas y resolverlas, así tal cual nunca he mencionado un 3x2, en matemáticas III.
E: Bueno regresando a la pregunta 11, ¿qué me dices?
D2: Ah pero sólo es a nivel geométrico ¿no?

E: Sí, así es.
D2: Pues un par podrían se coincidentes y otra paralela a ellas pero no igual, aquí vienen las variedades, puede darse el caso que dos a dos tengan solución pero no las tres (pinta un triángulo formado por tres rectas en el plano) o inclusive una de tres paralelas, yo diría que eso me debería responder para que yo lo aceptara como correcto.
b)   **E:** ¿Cuál crees que sería la respuesta más común?
D2: Pues la que requiere menos análisis al menos a cuestión conceptual yo creo que es esta (señalando la de tres paralelas), y entiende que si da tres paralelas no iguales pues no habrá solución, inclusive yo diría que la de dos coincidentes y una paralela a ellas, puede ser en segundo lugar de dificultad y la más difícil sería esta (señalando la del triángulo formado por rectas).

E: Se le hizo la pregunta a un estudiante y realizó la siguiente gráfica como respuesta.



¿Por qué crees que sólo da esta configuración y qué explicación le darías para que reflexionara sobre las otras configuraciones.

D2: Yo creo que hay veces que va sobre entender la pregunta, que yo creo que una posible explicación es que no haya tomado en cuenta… que no entendió que se le estaba preguntando en plural, sobre "las posibles" no lo hizo. Me ha pasado que les pones un ejercicio y en ocasiones no leen bien; en este caso dijo una configuración posible y dijo "pues ya esta" y a lo mejor no quiere decir que no supiera las otras, si no que sólo contesto una porque eso entendió que se le preguntó, yo digo que esa es una primera opción, la otra tiene que ver… si entiende que tiene que dar varias pues que no haya sido capaz de reflexionar sobre las otras, o sea, doy esta y se haya quedado sin ideas y la dificultad es en el tamaño del sistema, ya pensar en tres rectas como que si no es tan común trabajar con sistemas de más de dos, pues puede suceder esto, decir dónde pongo la tercera recta. Yo diría que con conocimientos básicos puedes dar la segunda opción, es decir, misma recta y una paralela, podrías acceder a esta. Considero que esa es la razón, no haber tenido la habilidad suficiente para poder reconocer las configuraciones, pero por el tamaño, no porque no tuviera el conocimiento, al ver tres rectas.

12. **E:** ¿Cuáles son las condiciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para que tenga solución única?

A esta pregunta un estudiante respondió "para que tenga solución única tendría que ser el mismo número de variables para el mismo número de ecuaciones"

a) ¿Consideras que el estudiante respondió correcta o incorrectamente? ¿Por qué?

D2: No es correcto, bueno primero, la pregunta es muy abierta porque dice un sistema de ecuaciones ahí no hace… incluso la misma respuesta "*para que tenga solución única tendría que ser el mismo número de variables para el mismo número de ecuaciones*" esta pensando me imagino como a lo grande o… si no tiene en mente… bueno, podría él estar pensando en un sistema 2x2 y decirlo de esa manera ¿no? que sería más fácil decir algo así que "*el mismo número de variables que de ecuaciones*" pero el lenguaje, parece dar a entender que él tiene una idea general de mxn, no sé; el lenguaje me diría eso, bueno la respuesta no es correcta porque podemos dar sistemas de ecuaciones 2x2 que no tienen única solución, ya hemos visto muchos casos, durante la charla, entonces, la respuesta es no respondió correctamente; ahora ¿por qué? Pues como la misma pregunta es muy abierta de sistemas en general, pues quizá tenga que ver que pues… que ya se le haya perdido la parte geométrica, porque si tú ya te metes en un 3x3 pues ya la geometría pues si la puedes hacer, pero imagínate ahí graficar rectas planos e intersectarlos pues es… casi imposible ya en dimensiones muy grandes y hablo de 3x3 al menos esta idea se pierde, la de la parte geométrica, y quizá se le hizo fácil pues decir eso.

E: Sí, porque al final lo que él esta diciendo es que sólo los sistemas cuadrados tiene solución única ¿no?

D2: Sí, y no es así, puede ser no cuadrado y solución única y puede ser cuadrado y tener soluciones infinitas.

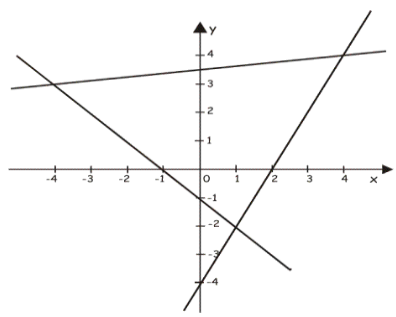
E: ¿Qué crees que lo haya llevado a pensar así?

D2: Pues como te decía, una sería perder de vista el enfoque geométrico, el hablar de mxn ya no tienes nada en la mente, por ejemplo hablas de un sistema 3x3 y en la mente no te viene nada, osea…. Porque en el otro caso sí, le preguntan sobre un sistema 3x2 y pues claro que puede responder, siendo dos variables pues pone tres rectas, hace un dibujo y puede con el dibujo dar una respuesta correcta, pero si él piensa así en general pues en la mente no hay nada y esa generalización yo veo que si es… ya estar en tres dimensiones, bueno aquí (refiriéndose a la institución) salvo en temas selectos no te metes en tres dimensiones, yo podría pensar que es eso, como ya la pregunta es en general pues ya se perdió y lo que se le hizo sencillo fue contestar eso, no se… ahí hace falta saber en que curso estaba, porque si él esta hablando de un 2x2 y contesta esto, es que estaba más perdido que nada.

E: Y ahora que ya estamos hablando sobre dificultades ya muy específicas del tema, ¿te vienen a la mente algunas dificultades que surgen en tu práctica?

D2: Yo lo que veo es eso, la ruptura de lo abstracto y lo concreto, cuando tu puedes dibujarlo y tocarlo lo puedes hacer, pero cuando ya se te sale de las manos, la mayoría no pued,e y si no tienes una referencia, y eso es lo que te digo aquí, si los estudiantes no pueden tener una visión geométrica, de donde puedan anclarse yo veo que se pierden. Cuando doy esta materia en la universidad, si les doy un sistema de ecuaciones de cuatro variables y cinco ecuaciones que opciones tenemos y ahí sí detallamos, puede haber solución no solución, infinitas soluciones y nos metemos con la naturaleza de las ecuaciones, pero sí, cuando ya nos metemos en un sistema abstracto que yo les digo mxn, ya cuesta trabajo dar ese paso, yo lo que veo es eso, la dificultad de… incluso de cuando hablas de una ecuación y luego pasas a un sistema de ecuaciones, incluso ese cambio cuesta trabajo, aunque ahí todavía hay de donde tomar elementos.

13. **E:** A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?



Si hicieras esta pregunta a tus estudiantes

a) ¿Qué respuestas esperarías?

D2: Este… bueno pues no tiene ninguna…aunque no esperaría que respondieran así, porque como aquí en matemáticas III, ellos entienden que la intersección de rectas es la solución, entonces dirían uno, dos, tres jajaj pensando… bueno si tienen en mente que es la intersección, y quizá los que lograran ir más allá y decir "*no, es una solución para las tres*" y esa es una solución para dos… pero yo creo que la respuesta más generalizada sería decir que hay tres soluciones.

b) **E:** ¿Qué respuestas aceptarías como correctas?

D2: Pues que no hay solución.

c) **E:** Se le hizo la pregunta a un estudiante y respondió "en mi opinión tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos diferentes.

d) Dada la respuesta del estudiante, ¿podrías decir cuál es la concepción que tiene del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales?

D2: Sí, bueno es que yo creo que se casan con ideas que digamos están bien… incluso creo que ese sería el problema ¿no? sí esta bien el concepto pero restringirlo, por ejemplo si hablamos de un 2x2 y explicamos y trabajas y te la pasas dos tres semanas y les queda clarísimo que donde se cortan las rectas es la solución, cuando pasas a otro nivel, por ejemplo cuando mentes tres, ellos siguen con la idea de que la intersección es la solución y entonces aquí ven tres intersecciones, entonces ven tres soluciones en automático, es decir, si alguien reflexiona, diría no, esta es una solución para dos y eso lo sabe cualquiera y entenderían con esa idea de qué es una solución de sistema, entenderían que es un par de número que satisfacen a las tres, pero como ya esta el conocimiento, de facto dicen pues son tres soluciones, porque yo veo tres intersecciones, yo creo que va más bien por ahí, ya no hace la reflexión porque ya saben que así es, lo que no saben es que siempre se debe de aplicar, yo creo, porque si suena bastante natural que se dejen ir, incluso en la universidad, les digo, si les sale una fila cero, cuando hacemos el proceso de reducción de la matriz y del otro lado les queda un 5, quiere decir que el sistema no tiene solución y entonces se casan con la idea de que siempre que haya un cero y algo adelante diferente de cero ya no hay solución, y les digo no, es que hay veces queremos representar la matriz para un sistema, la matriz para una base, o la matriz para una transformación lineal, es decir, ese mismo concepto se puede usar en muchas cosas y no siempre que haya una fila cero quiere decir que no haya solución o quiere decir que no es invertible o… es decir, se casan con la primera idea y quieren hacerla universal y ya ni lo piensan, porque dicen que como el maestro dijo cuando se intersectan es la solución, pues aquí ven una intersección.
E: Ok, decías entonces que la concepción que ellos tienen es…
D2: Sí, que donde se cortan las rectas es la solución, ¿Sabes? Incluso ahorita en esta reflexión, siempre se aprende algo nuevo, yo creo que primero antes que métodos sería dar como dibujos y que digan dónde hay solución, más allá de la idea clásica de que se cortan que vean que hay muchas opciones, pero primero a nivel geométrico, yo creo que estaría bastante bien.

14. **E:** ¿Qué es lo que podría estar conduciendo a los estudiantes a dar respuestas como las expuestas a lo largo de la entrevista?

D2: Pues ya viendo, creo que parte del problema, es la forma en la que se explica y muchas veces obedece las necesidades del curso, si los alumnos tienen dificultades en sumar, se complica dedicarse a otras cosas, pero por ejemplo ahora reflexionando en esto, sí sería mejor empezar con conceptos, sólo conceptos, puros dibujos, por ejemplo yo cuando hablo de límites, me meto mucho con límites visuales, es decir, hago la gráfica y les digo que de la gráfica den el límite, existe, no existe y existe cuanto vale, límite por la izquierda, límite por la derecha y ya sabes, y después que ya me meto en toda esa parte geométrica ya estudio la parte analítica, podría ser más o menos similar aquí, si bien lo he hecho pero no tan global me quedaba a nivel básico, es decir, se intersectan, no se intersectan o hay una infinidad de soluciones y uno puede avanzar como con esta idea, por lo menos meter tres y ya meter tres ya como que rompe el esquema y ven que hay más opciones, y ya con el método algebraico puedes analizar cualquier cosa y dar respuesta a cualquiera de éstas (señalando las preguntas realizadas durante la entrevista). Se podría dar el curso a través de todas esas negaciones, no quiero un ejemplo de algo que cumpla sino de algo que no cumpla. Podría ser en este nivel que en lugar de meterle mucha mano a la parte algebraica, puede ser más el concepto ¿no? fíjate que incluso al principio cuando me preguntaba sobre las dificultades conceptuales como que en principio decía “no, pues no hay mucho” que entiendan que si sustituyen el valor, pero a través de la entrevista te das cuenta que el concepto es muy profundo y la gama de las posibilidades de interactuar entre las ecuaciones es muy amplia y si uno sólo ve tres opciones, cuando metes una cuarta, pues ellos tratan de meter esa cuarta en una de las tres, naturalmente.

E: Hemos terminado, muchas gracias por la entrevista.

TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA A D3

PRIMERA PARTE

1. **E:** ¿Qué estudios realizaste? Incluye estudios universitarios, posgrados y cursos de actualización o capacitación.

D3: Tengo estudios en matemáticas, licenciatura y maestría en matemáticas en la UNAM, inicié estudios de doctorado en España en Barcelona, los cuales no concluí, en cuanto a cursos en la docencia o de didáctica, honestamente no he tomado cursos, dar clases, es algo que me gustó desde pequeño, el próximo año pienso realizar estudios en matemática educativa.

2. **E:** ¿Durante cuántos años has laborado como docente y en qué nivel educativo?

D3: He practicado la docencia desde la preparatoria, apoyando a mis compañeros e incluso en la universidad, de hecho elijo la carrera de matemáticas con la idea de desarrollarme profesionalmente en la docencia. Oficialmente, llevo 7 años dando clases en nivel medio superior, y en la universidad empecé como ayudante, oficialmente en la facultad de ciencias desde 1995, pero se puede decir que empecé desde antes a dar clases en 1992 es decir, como 20 años.

3. **E:** ¿Qué cursos has dado?

D3: En la universidad, he dado los cálculos, todos los análisis, he dado álgebra superior, lineal, moderna, moderna II, ecuaciones diferenciales; a nivel medio superior, he dado matemáticas I, II, III, IV, V, es decir, del currículo escolar todas las matemáticas, y de las optativas, temas selectos de matemáticas y probabilidad y estadística, en algún momento también participe preparando a los estudiantes en unos cursos que brindaba CCH en un programa para abatir el rezago en materias con alto índice de reprobación, no recuerdo el nombre del curso, pero participe en 1996. Puedo decir que el cálculo y el análisis es lo que más me apasiona.

4. **E:** Cuando preparas clases, actividades, tareas y exámenes, ¿cuáles son tus materiales en que te apoyas?

D3: Generalmente son libros de matemáticas, en el nivel medio superior, aprendí a usar libros sobre historia de las matemáticas, a diferencia de la facultad, donde ya son más específicos, los utilizo como para contarles cuentos y engancharlos en el tema, introducirlos en ese sentido, es algo que agradezco de haber trabajado en el nivel medio superior, ya que mi formación es totalmente matemática pura, pero desconocía muchas cuestiones de historia; eso por un lado, por otro, estos… los libros específicos, geometría analítica, cálculo, que si los de álgebra. Honestamente me llevo un buen rato preparando una hora de clase, más allá de que el tema puede ser sencillo, la estructura es lo que lleva tiempo preparar; considero que los cursos no son los mismos, aunque sean los mismos contenidos, pues la estructura general sí, pero ya la dinámica de clase, incluso hasta la misma estructura, el orden de los temas eso es lo que se llega a cambiar, nunca lo he dado igual, siempre ha sido diferente; la dinámica es otra, el objetivo es otro.

E: Y ahora que mencionas que "*el objetivo es otro*" ¿Qué te lleva a modificar la clase o tu secuencia?

D3: Un poco hay veces es la secuencia de los temas, yo por ejemplo no pienso que los cursos estén separados, siempre trato de comentarles que si estamos viendo un tema por ejemplo en mate I, que más adelante se volverá a usar en tal curso. Por ejemplo la descomposición de factores primos, que pareciera que sólo se centra… en decir, cuales son primos y cuales son los criterios de divisibilidad y la aplicación inmediata es mínimo común múltiplo y máximo común divisor, parece que ahí se acabó el asunto, pero en matemáticas II lo usan por ejemplo para calcular el común denominador para las sumas de fracciones por ejemplo; en matemáticas III, cuando ves esta parte de simplificar radicales, que les pones raíz de un numero grande y te dicen que ya no recuerdan el algoritmo de la raíz cuadrada por ejemplo, les digo que no hace falta por que justo ahí pueden usarlo, también para introducir el tema de factorizar, descomponer; podemos decir que este tema es muy importante en matemáticas III, justo de eso depende cómo yo modifico la estructuración de la secuencia que empleo, es decir, me gusta preparar el camino para que logren conectar los temas que se relacionan con éste. Yo me imagino como una matriz, nosotros damos cursos de aritmética, álgebra, geometría, geometría analítica, análisis cálculo etc, pero hay temas que son transversales, ¿no?, por ejemplo esta parte de la descomposición de los números, por ejemplo el concepto de racional, este cociente que pega en muchos temas y que honestamente esa idea también la he llevado a los cursos de la universidad; en los cursos de análisis, es decir, el tema ahora es números reales, todo lo que trae pegado número reales ¿qué se puede ver en análisis real, en análisis funcional, en teoría de la medida, en análisis armónico, todo lo que pega, por ejemplo el concepto de supremo e ínfimo y es una experiencia muy interesante. Otro tema que considero también es transversal es el de las ecuaciones, cómo gradualmente se van agregando poco a poco su complejidad, empiezan con ecuaciones muy sencillas con coeficientes enteros y una incógnita que les pones con expresiones con signos de agrupación o multiplicar binomios muy sencillos y esta parte de comprobación, que siempre se las pido, para que lo vean ligado a la aritmética básica de enteros y luego la aritmética básica en racionales; se va complicando al agregarles raíces, luego si son dos variables, que ellos vean cómo y cuáles son las soluciones, sistemas de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones no lineales, entrarías a cónicas, intersección de cónicas con rectas, entonces ya tienes un sistema de ecuaciones no lineal muy sencillo y ellos empiezan solos a preguntarse más, etc y les dejas abierto, es decir, les dices que ahí sigue aunque en ese curso propiamente no se verá, me interesa dejar abierto el camino para que ellos logren conectar los temas vistos con los que se verán en sus cursos posteriores, y profundizar en los que más útiles les serán en sus cursos posteriores.

5. ¿Podrías decir de manera general la forma en que inicias el tema de solución de un sistema de ecuaciones lineales, y cuál es la secuencia de enseñanza que sigues? ¿Cuál es la razón por la que lo haces de esta manera?

D3: Generalmente lo empiezo diferente, pero tengo dos formas de iniciar, puede ser con el planteamiento de problemas que pareciera que no tiene que ver nada con matemáticas, quizá algún problema de economía, o de cuestiones de finanzas, de física, balanceo de ecuaciones en química; cosas así que pareciera que no tiene nada que ver, y ver que éstos problemas en realidad generalmente sólo veo dos, su solución te llevan a un mismo planteamiento de un objeto matemático que tienes que estudiar, ellos ven la necesidad de resolver el problema matemático que los llevará en paralelo a resolver los dos problemas propuestos, hay veces que así empiezo el tema. Otra manera de iniciar el estudio de los sistemas, es trayendo la secuencia de lo que te comentaba hace rato de las ecuaciones, estaba viendo ecuaciones de primer grado con una incógnita (con radicales y signos de agrupación) y les lanzo una pregunta de reto, ¿cómo resolver una ecuación con dos variables? Empezamos la discusión, y ellos descubren que la solución no es única, tú vas perfilando la discusión y se llega a que para darle solución no basta con una, observamos las características de las ecuaciones (primer grado con una incógnita) que previamente habían estado resolviendo y ven que en éstas hay dos variables, cualitativamente ya es diferente; de esas dos maneras puedo introducir el tema, empiezo con una sola ecuación, y dado que en el curso anterior ya vieron el tema de ecuación de la recta, no les es completamente ajeno.

Entonces con una ecuación empezamos la discusión, y luego ya un sistema 2x2. Generalmente empiezan a verse desde mi punto de vista como tres ideas grandes, pareciera que para resolver el sistema, los estudiantes plantean una metodología desde el punto de vista aritmético, como desde el punto de vista algebraico y otra desde el punto de vista geométrico; empezamos a ver que hay varios métodos de solución, empiezo yo con los que llamo aritméticos, método de reducción, una vez que lo entienden, pasamos a un sistema general y vemos la regla de cramer y que vean que la esencia de la información no esta en las variables, si no en los coeficientes. Les digo que la esencia de un sistema esta ahí y lo llamamos un determinante 2x2. Les llamo métodos aritméticos, ya que sólo si saben sumar, restar

y multiplicar ya pueden hacerlos. Después vemos los métodos de sustitución e igualación donde el hilo conductor para ellos es ¿cómo de dos ecuaciones con dos variables puedo construir una con una sola variable? Y empezamos con el rollo de los despejes. Y la tercera con la que me gusta cerrar ya preparando el terreno como a las cónicas, es el método gráfico. Les recuerdo que en la discusión se mencionó que cada una de éstas ecuaciones es una recta, entonces vamos a ver que estamos haciendo cuando resolvemos un sistema de ecuaciones y que de ahí me permite hablar dependiendo del tiempo y del grupo como extenderlo a sistemas más grandes, de 3x3 y cosas por el estilo, sobre todo en interpretar las soluciones, en cuantificar el número de soluciones, vemos que encontrar una sola solución equivale a encontrar la solución de dos rectas, van con la idea que todos los sistemas de ecuaciones tienen solución entonces les digo ¿cualquier sistema de ecuaciones tiene solución? Me dicen que sí, y es que son en realidad los que siempre les he puesto, les pregunto ¿qué pasa desde el punto de vista geométrico? Me dicen resolver el sistema significa encontrar la intersección de estas dos rectas entonces, ¿cualesquiera dos rectas siempre se intersectan? Empieza la discusión y se dan cuenta que no, cuando son paralelas o hay una infinidad cuando es la misma recta, entonces ahí viene la discusión; más que el geométrico, lo que les permite deducir si tiene sentido buscar la solución ya que se vio que no todos los sistemas tienen solución. Entonces el método gráfico hay veces que es infalible, pero cuando el método da una solución en la que las coordenadas no son enteras por ejemplo, la verdad conviene usar un método distinto donde no hay que estar aproximando, ellos tienen que elegir su estrategia.
E: Entonces en resumen, ¿podrías decir tu secuencia?
D3: Decido iniciar el tema ya sea desde el punto de vista de las cualidades de la ecuación, o con problemas que se resuelvan usando una ecuación. Después vemos métodos aritméticos, algebraicos y dejamos al final el método gráfico, dónde retomo la idea de rectas que se menciona al inicio, para en esa parte profundizar sobre los diferentes casos de solución de un sistema, es decir, única solución, soluciones infinitas o no solución. Al inicio si mencionamos que una ecuación por separado tiene infinitas soluciones, después vamos a los sistemas, dónde siempre hay única solución. Supongo que cuando nos adentramos en el estudio de los métodos se pierde la idea de infinitas soluciones para una sola ecuación, ya que siempre que se resuelve el sistema siempre hay una, creen que siempre hay una ¿no? y les digo que no es cierto que al final vemos que dado un sistema no siempre hay solución, y retomamos los casos de no solución.

6. **E:** ¿Cómo explicas a los estudiantes el concepto solución de un sistema?
D3: Para una ecuación, les digo que es el valor o valores que satisfacen la ecuación, es decir, que al sustituir en la ecuación el valor de la o las incógnitas, la igualdad se cumple; ahora como estamos en sistemas de ecuaciones lineales, ya no hablamos de sólo una ecuación, ahora son dos, les digo que buscamos el valor de "*x*" y "*y*" que satisfacen ambas ecuaciones y ahí ya vemos que esos valores no siempre existen, entonces hablamos de sistemas sin solución, o que hay infinitos valores que satisfacen ambas ecuaciones, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

7. **E:** Cuando enseñas el tema de sistema de ecuaciones lineales, ¿cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes?

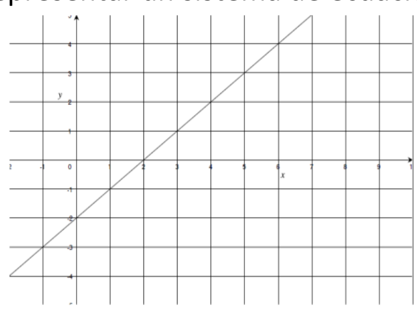
D3: Los estudiantes regularmente no tienen presente qué es una ecuación, entonces cuando estamos viendo métodos de solución pueden hacer ciertas operaciones que evidencian que no han entendido el concepto de ecuación y de solución de una ecuación, eso les cuesta mucho trabajo.

E: Y en cuanto a los sistemas, dificultades conceptuales ¿cuáles has notado?

D3: Cuando les explico los métodos de igualación por ejemplo, sabemos que el método funciona, y funciona porque buscamos los mismos valores que de "*x*" y "*y*" en las dos ecuaciones, y la verdad es que conceptualmente eso no logran asimilarlo fácilmente, es decir, cuando vemos el método les explico esa parte y aunque sí hacen el método, lo aprenden, pero si llego a preguntar por qué despejan e igualan la verdad es que no lo tienen presente, entonces hacen el método pero no entienden por qué funciona, creo que eso es lo que yo he visto que les cuesta más trabajo.

SEGUNDA PARTE

8. En el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿consideras que la siguiente gráfica podría representar un sistema de ecuaciones lineales 2x2?



a) ¿Qué respuesta aceptarías como correcta?

D3: Bueno, si yo ya les expliqué a los estudiantes ésta parte, sí, tendrían que decirme que es un sistema 2x2. Lo que pasa es que cuando yo les explico el caso de sistemas con infinitas soluciones, les grafico una recta de un color y la otra prácticamente encima de otro color, y ellos ven que es la misma recta entonces el sistema tiene infinitas soluciones, entonces si yo ya les expliqué esto, ellos deberían poder identificar que es un sistema de ecuaciones lineales 2x2, sólo que las rectas son paralelas iguales.

b) Un estudiante responde a la pregunta 9 diciendo que NO. ¿Por qué piensas que el estudiante respondió de esta manera?

D3: Bueno, regularmente cuando te hablan de sistema, el caso típico es que sean, bueno si estamos en el caso 2x2, que sean dos ecuaciones que te representan dos rectas en el plano. Entonces el estudiante quizá no tiene presente que en los sistemas de ecuaciones lineales existe el caso de infinitas soluciones y si bien algebraicamente son dos ecuaciones, gráficamente es una recta, sólo una y quizá eso es lo que no entendió el estudiante.

9. **E:** Proporciona un sistema de ecuaciones lineales 2x2 que tenga como solución única el punto (2, 1).

a) Si le hicieras esta pregunta a un estudiante, como respuesta correcta ¿qué aceptarías?

D3: Bueno, debo reconocer que esta tarea no la he puesto a los estudiantes, entonces...

E: Ok, pero si la pusieras, ¿qué tendrían que responder para que lo consideraras correcto?

D3: Pues tendrían que darme el sistema, pero es que yo siempre trabajo con la ecuación $y = mx + b$ entonces, ellos pueden asignar dos valores distintos para la pendiente y después sustituir el punto dado y despejar b y darme dos ecuaciones.

E: ¿No les mencionas las otras ecuaciones?

D3: Bueno sí, pero con la que más trabajo es con la ecuación $y = mx + b$ y siempre les digo que una recta queda determinada por dos puntos, es decir, que necesitan dos puntos para poder dar la ecuación de una recta.

b) **E:** ¿Qué tipo de respuestas esperarías que dieran los estudiantes?

D3: La verdad no sé que podría esperar… bueno quizá ellos tracen dos puntos adicionales, es decir, tienen el punto (2, 1) y saben que para dar la ecuación de una recta necesitan dos puntos, entonces escogen otros dos puntos cualquiera y para cada una eligen el punto dado y el otro adicional y encuentran la ecuación de las dos rectas y proporcionan el sistema, pero honestamente no se si lo harían.

c) ¿Qué tipo de dificultades consideras que podrían presentar?

D3: En matemáticas II, cuando vemos ecuación de la recta, trabajamos mucho la pendiente, vemos cómo se define, pero aquí yo creo que se les podría dificultar generalizar ya se pasó a otro nivel en la capacidad de análisis del problema, esa parte creo yo que no esta fácil, es decir, que ellos elijan la pendiente que quieran se les podría dificultar”

E: Un estudiante responde a la pregunta diciendo "necesito otro punto para poder hacerlo".

d) ¿Por qué supones que el estudiante responde de esta manera?

D3: El estudiante esta pensando en rectas, no esta entendiendo la calidad de la pregunta, no creo que no esté entendiendo el tema. La idea es que no se le esta pidiendo al estudiante que de el sistema de ecuaciones, estoy de acuerdo que son rectas, y tú tienes un punto la otra es para ti libre, es decir, no esta haciendo el paso de generalizar su razonamiento, desde mi punto de vista. Se quedó en el caso de la práctica, los casos particulares "concretos" no esta pasando a generalizarlo, a que ya se pasó a otro nivel en la capacidad de análisis del problema.

E: ¿Conceptualmente qué no les permitiría a los estudiantes dar el sistema?

D3: Esa parte creo yo que no esta fácil, para mi sería equiparable con el rollo de demostrar, tú le estas diciendo 'ahora tú aprende a crear', porque la demostración es como una creación ¿no? o sea tú estas creando una demostración, tú le estas diciendo al estudiante, 'crea un problema' a su nivel, pero ya esta entrando a un proceso de… es esta parte de razonar y eso no es tan fácil de que lo actives, lleva un rato y en el tiempo que nosotros los tengamos aquí no… porque no están cotidianamente practicando, incluso hasta en la clase, hay momentos en que se vuelven muy estándares, no estamos siempre motivando eso.

E: Sí, pero ¿Cuáles son los conocimientos que a cualquier persona le permiten proporcionar el sistema?

D3: Pues a mi me parece equiparable esa situación de demostrar con el problema que se le plantea al estudiante, tiene que aprender a crear, y eso no esta fácil en este nivel a diferencia de la facultad que siempre nos están pidiendo demostrar, crear la demostración para cierto resultado. Yo te puedo decir, que cada quien arranca con cierta idea de la demostración e incluso la redacción, 'sea', 'supongamos' 'sabemos que'… ya desde ahí… es un proceso de creación.

e) **E:** Dada la respuesta del estudiante y las consideraciones que realizaste en el inciso anterior ¿qué explicación le darías al estudiante sobre el hecho que no necesita dos puntos?

D3: Lo que tiene que hacer, es crear las rectas, lo que si le diría es que tiene ésta restricción (señalando el punto (2,1)), lo que haría primero es que lo hiciera gráficamente, le daría un punto y le diría que pintara una recta, la que quisiera; le diría que lo que se quiere es encontrar la ecuación de esa recta, si me dice que necesita otro punto, le diría que ya sabe uno, le pediría que eligiera otro punto el que quisiera.

E: Cuando tú proporcionaste el sistema, no necesitaste otro punto.

D3: Bueno, para pintar una recta, necesita dos informaciones, que es diferente a dos puntos, pero de la infinidad que pueden pasar por ese punto, la pregunta es ¿cómo la quieres de inclinada? Por ejemplo eso es algo que les marco mucho la clasificación de las ecuaciones (señalando las ecuaciones de la recta en la forma, punto pendiente, pendiente ordenada al origen, simétrica) porque aquí esencialmente es que sí te dan dos puntos, en esta otra es un punto y un escalar y aquí son dos escalares.

E: Ok, entonces al final en esta ecuación, se ve que no necesita dos puntos, ¿cómo le explicas esta parte?

D3: Es hacerle notar esta cualidad, el rollo cualitativo, es decir, observa aquí…generalmente va pensar que necesita dos puntos, porque yo insisto mucho en esto, que esencialmente necesita dos valores, un valor es un punto y el otro valor lo que te dice es la inclinación y no necesitas más que sólo ‘dos números’ o un solo punto, que implícitamente sí esta ¿no? la pendiente ya esta amarrada a que… cómo se tiene que mover, si lo hay, implícitamente sí lo hay pero, no lo ves de manera explícita ¿no? porque si tú me dices que la pendiente es 2, ellos ya saben que es la variación de la horizontal con la variación de la vertical, ahí esta tu otro punto, esencialmente tienes dos, pero lo estas leyendo de otra manera; sí hay dos, pero no están explícitos de alguna manera. Creo que tendría que explicarle esto. Generalmente cuando veo la ecuación de la recta, en matemáticas II, me detengo mucho en el significado de la pendiente, me interesa romperle mucho la cuestión estática, pensando en la derivada.

10. **E:** En el siguiente sistema a, b, c indican números reales:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ ax + by = c \end{cases}$$

¿Cuántas soluciones puede tener este sistema? Proporciona un ejemplo para cada caso.

a) Si le hicieras esta pregunta a tus estudiantes ¿qué respuestas esperarías?

D3: Yo creo que se van a ir… lo van a tener asociado más a la parte geométrica, no creo que me den específicamente valores, porque hay algo que en clase no termino de analizar y es cómo puedes comparar las pendientes, porque dada la ecuación en la forma $ax+by=c$ me dicen que no pueden encontrar la pendiente de la recta, les digo que tienes dos formas, despejar o darse cuenta que la pendiente es el coeficiente de x entre el de y, pero no me gusta hacer esto porque tiende a ser una receta, lo memorizan, quisiera que siempre despejaran, y que sepan que el coeficiente de la x es la pendiente, si les digo a partir de la ecuación general, lo memorizan y se les olvida y prefiero que despejen y ahí no hay pierde. Cuando hago el cierre, la parte geométrica la uso para la cuantificación de las soluciones, y entonces tiendo como a resumir el material, es decir, si las pendientes son iguales o distintas y con la ordenada al origen, si es la misma o no. si las pendientes son distintas pues tu sabes que va existir una solución, si las pendientes son iguales, eso todavía no marca nada, pueden ser paralelas distintas o iguales, entonces el que va definir el asunto es que la ordenada al origen sea igual o distinta; si son pendientes iguales con ordenada al origen igual decimos que es la misma recta y por lo tanto tiene infinitas soluciones, pero si son pendientes iguales con ordenada al origen diferentes entonces son rectas paralelas distintas entonces no hay solución. Entonces eso es lo que puede salir, que lo ubiquen así en ese sentido.

Para responder a la pregunta, te van a decir que hay una, ninguna o una infinidad, ahora que den un ejemplo en cada uno, eso si se les podría complicar, por la parte de que la ecuación no esta dada de la forma que ellos normalmente grafican, claro uno esperaría que lo primero que hicieran fuera despejar, que clasifiquen identifiquen pendientes y ordenada al origen, es decir, sólo leer la información.

Yo esperaría que fueran capaces de dar la gráfica correspondiente al caso de solución única, no solución e infinitas soluciones, sólo de manera geométrica. Para mi esta bien, porque si se fueron con la idea geométrica, ya la hicieron. Yo creo que un dibujo dice más que mil palabras.

Resumiendo, no creo que puedan dar un ejemplo para cada sistema, pero sí podrían decir los casos de las soluciones que puede haber en un sistema.

E: Entonces ¿regularmente no te metes mucho con la estructura de las ecuaciones?

D3: Pues con la ecuación de la forma $ax+by=c$ no, lo hago con la ecuación $y=mx+b$ y creo que quizá no puedan conectar que es lo mismo y pueden despejar. De hecho creo que esa es la dificultad que pueden tener para responder a este ejercicio con un ejemplo específico.

E: Justamente te iba a preguntar sobre las dificultades que pudieran tener para responder.

b) **E:** ¿Qué respuestas considerarías correctas?
D3: Que pudieran decir los casos de las soluciones que puede haber en un sistema.

E: Ok, Un estudiante respondió a la pregunta con el siguiente sistema para el caso de un sistema sin solución.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = 10 \end{cases}$$

c) ¿Qué piensas que lleve al estudiante a responder de esta manera?
D3: El asocia que son paralelas ¿no? pero no se da cuenta que… otra vez, que hay de paralelas a paralelas… siempre piensan 'paralela', su ejemplo claro son dos rectas que no se cortan, además lo ven cotidiano, en el piso (señalando las rectas que se forman con las lozas); es un problema de concepto, siempre piensan paralelas no se cortan y eso es lo que siempre asocian, hay que quitar esa idea, puede suceder que paralelas puede ser que si se corten pero es la misma, eso es lo que ahí esta… es un problema de que no le hicimos énfasis al tema, no le quedó claro ese caso que yo le llamo patológico de paralelas ¿no? porque además hasta la forma en que lo dices ¿no? paralelas, habla de plural, pues estas hablando de dos cosas; puede ser que desde ahí, uno dice dos rectas paralelas, entonces tienen que ser dos ¿no? ¿si me explico? Me parece que es un abuso del lenguaje, y por ello al estudiante le falla la estructura de lo que se debe modificar para un caso sin solución, ver el número que se tiene que modificar para que sean dos rectas.

E: Ok, continuemos…

11. Si le preguntaras a un estudiante ¿Cuáles son las configuraciones geométricas posibles de un sistema de ecuaciones 3x2, para que el sistema no tenga solución?

a) ¿Qué aceptarías como respuesta correcta?

D3: Pues la verdad es que esta pregunta no me la he hecho, como generalmente me quedo ahí…o sea es difícil que alguien me pregunte esto cuando termine de ver ese tema, o sea es muy difícil.

E: ¿Nunca trabajas con tres rectas? ¿Sólo ves sistemas 2x2?

D3: Generalmente hasta ahí me quedo, honestamente, pero lo llevaría hacia que lo viera geométrico (refiriéndose a que si lo hiciera lo haría de esta manera). O sea le dices, siempre has pensado en un sistema en el que se cortan dos rectas, pero si entra una tercera recta, es decir, en lugar de tener…

D3 empieza a escribir un sistema de manera analítica y cuando termina dice

Es como si les pusieras a jugar otra, la otra recta, tiene muchas opciones es más posible que no haya solución a que la haya ¿verdad? es como el rollo de lánzame una recta ahí (en la gráfica de un sistema 2x2) y a ver a dónde cae ¿no? puede caer acá , puede caer acá etc, entonces tiene que pegarle a este (señalando un punto que es solución del sistema 2x2) y sería poco probable que hubiera solución para un sistema 3x2 y yo esperaría que el estudiante me dijera eso, pero otra vez basándose en el rollo geométrico.

E: ¿Y no esperarías que te dibujara algún sistema en el que no haya solución en el caso 3x2?

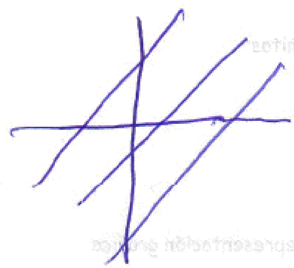
D3: Puede ser que lo que te compongan sean paralelas, o sea eso puede ser lo primero que me pinten.

E: Y ¿algún otro caso?

D3: No, no creo. Yo creo que se irían más por el rollo de paralelas, creo que sería por ahí que podrían responder, pero siempre habría que incitarlos a la parte de que recuerden que significa resolver un sistema de ecuaciones lineales, estas buscando la intersección de dos rectas hablando de un 2x2, si te dan más ecuaciones, tendrás que buscar la intersección de… bueno ahora son rectas, pero puede ser en general una curva o dos curvas ¿no? entonces estas buscando las intersecciones, de esas curvas, digo preparando el terreno para lo que viene, mira, no se me había ocurrido, me parece una buena pregunta pensando para lo que viene después de intersectar curvas con rectas, interesante, muy interesante.

b) **E:** ¿Cuál crees que sería la respuesta más común?
D3: Bueno yo creo que serían rectas paralelas.

E: Se le hizo la pregunta a un estudiante y realizó la siguiente gráfica como respuesta.



¿Por qué crees que sólo da esta configuración y qué explicación le darías para que reflexionara sobre las otras configuraciones.

D3: Me parece que es la más común, porque generalmente piensan que cuando tu… lo que creo que sucede en su cabeza es que siempre piensa el caso difícil que apareció en toda la discusión, y para ellos el caso difícil es cuando primero le rompes la idea de que pareciera que siempre hay solución y les dices que no, que no siempre habrá solución, entonces, sienten que ese caso es muy fuerte ¿no? son sistemas muy especiales y sí lo son, digo no hay solución, pero lo siente como… creo que va por ese lado, como el caso especial, y entonces ese caso especial, pues metes toda tu batería para la pregunta que te lancen, que eso sea natural de no hay solución, no necesariamente hay solución; ahí esta, son dos paralelas, si le pongo otra que no se corta, porque dicen 'tú me dijiste que cuando hay solución es cuando se corta' entonces ellos piensan, te pongo cosas que no se corten y se acabó ¿sí me expliqué?, por eso es la ideal de que no hay solución y es muy difícil que piensen como cuando empiezas a mover las rectas.

E: En el dibujo que tú realizaste podemos pensar en un sistema donde si se cortan y no hay solución.

D3: Por ejemplo lo que les puedes plantear es, no hay solución pero suponte que ya tienes un sistema de ecuaciones de 2x2 que si hay solución, ahí esta, se corta; ¿Podrías darme un sistema de ecuaciones de 3x2 donde ese sistema si tuviera solución partiendo de que dos de esas ecuaciones son de este (señalando un sistema 2x2 inicial) tú ya le vas acotando, le vas poniendo condiciones al problema como para empujarlo ¿sí me expliqué? Va reflexionando, te puede decir, 'no porque pinto paralelas' va seguir seguramente con eso, pero entonces ahí tendríamos que jugar con el rollo de “mueve tu paralela” llegará un momento en el que esa paralela va cortar o va pasar por ese punto (el punto solución para el sistema 2x2 inicial), hay una única paralela que va pasar por ese punto, ¿entonces qué? Hay o no solución, ‘sí’ la probabilidad de que eso ocurra es menor con respecto a que no hay solución ¿verdad? y a lo mejor por ahí también es el hecho de que no se le ocurra, pero lo más seguro desde mi punto de vista es que no se corten entonces no hay solución entonces ya te respondí que no hay solución.

Entonces la forma en que lo haría reflexionar sobre eso es empezar por un 2x2 y que trazara una tercera y jugar con la posición.

12. **E:** ¿Cuáles son las condiciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para que tenga solución única?

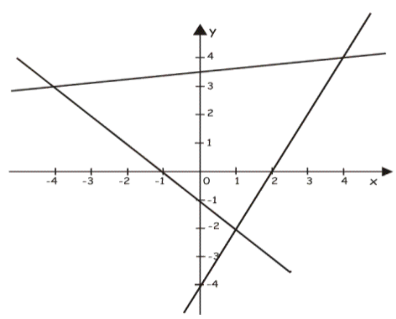
A esta pregunta un estudiante respondió “para que tenga solución única tendría que ser el mismo número de variables para el mismo número de ecuaciones”

a) ¿Consideras que el estudiante respondió correcta o incorrectamente? ¿Por qué?

D3: Si no ha entrado en estos casos patológicos, te puedo decir que la consideraría como posible respuesta correcta, es decir, esta acotado su campo de acción , yo se lo acoté implícitamente, si no, es decir, si ya entré a discutir más en cuanto a la posición de las rectas entonces para mi la respuesta no sería correcta, o sea… primero tendría que romper… lo que si hay que romper creo, es que ellos piensan que matemáticas es estar haciendo ecuaciones, o sea que tienes que escribir cuentas, digo eso es matemática, pero no es toda, es decir, que exploten su capacidad, que es lo primero que se les va ocurrir, creo que esa es una dificultad en matemáticas, que se imaginan matemáticas como ecuaciones y pierden de vista la visualización de estos conceptos ¿no? de la ecuación, o sea, empujarlos por ahí, déjate de ponerte hacer operaciones matemáticas, primero haz un dibujo del asunto, imagínatelo incluso para mi es difícil, sobre todo en el sentido de que a mi el área que me gusta mucho es el análisis y el cálculo, incluso ahí hay un…como negar la cruz de mi parroquia, tu revisas un libro de análisis y hasta cuentan cuantas figuras tiene, un libro de medida dice “con tres figuras” no hay más; yo creo que es romper un poco una escuela, un libro de análisis es cero dibujos, es abstracción total ¿no? y podríamos decir “a ver, hazle dibujo a todas las teorías de análisis” esta difícil, pero no quiere decir que no se pueda, no romper la intuición, eso ya es como la generalización de cuestiones que todo mundo vemos a lo mejor en el plano euclidiano en los R^3 R^n ¿no? y ya se extrae y se generaliza, pero no puedes perder de vista de dónde motivó, o sea, no se le ocurrió a alguien de la noche a la mañana, seguramente fue algo muy básico y de ahí se extendió, es algo parecido con esto, desde que estamos en algo muy sencillo y ya lo estamos empujando o tratando de llevar a, inventar un problema, al caso de muchas ecuaciones y ver si tiene solución; yo siento que es ese paso. Te decía hace rato es nada mas equiparando tiempos, siento que ahí es no romperles su formalidad, pero tampoco despreciar su intuición, que hay veces…

Considero que no se les esta explotando esta idea, como su iniciativa, o sea que el chico ya no le preguntes, sino se pregunte, que el no siempre esté esperando a que tú eres el que le va a poner los retos, creo que hasta a uno le pasa ¿no? tú estas estudiando la carrera y dices a mi se me ocurre hacer esta prueba, se me ocurre que esto puede generar esto… o puede llevarme a aquella, pero eso es cuando ya explotaste tu capacidad de iniciativa, siento que eso es lo que sucede, que el chico siempre esta esperando que tú le preguntes no que él se pregunte, creo que eso nos falla, y tampoco es fácil porque para llevar a esa posición primero tuviste que entrenarlo a que fuera entrando en una capacidad de análisis y de razonamiento, no va llegar él tan fácil a preguntarse, porque hasta luego no se preguntan cosas sencillas de su propia vida jaja. El que ellos se cuestionen sí lleva más tiempo, volvemos a lo mismo, es cuestión de poder trabajar más con los estudiantes, es cuestión de tiempo para que ello solitos se puedan empezar a preguntar.

13. **E:** A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?



Si hicieras esta pregunta a tus estudiantes

a) ¿Qué respuestas esperarías?

D3: Primero que me dijeran que no hay solución, pero puede que me digan que hay solución, porque ven la intersección y me van a decir que hay tres soluciones. Me dirían “¿no me dijo que cuando se cortan hay solución?” les diría que ésta (señalando la parte de la gráfica donde se cortan dos rectas) es solución de dos rectas, y tú quieres de las tres, entonces habría que discutir esa parte también con ellos.

b) **E:** Se le hizo la pregunta a un estudiante y respondió "en mi opinión tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos diferentes.
c) Dada la respuesta del estudiante, ¿podrías decir cuál es la concepción que tiene del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales?

D3: Intersección de rectas, pero lo que tiene que ver es que volvamos otra vez a lo mismo, es que las rectas se cortan en tres puntos, me dirían "tú me has dicho que hay solución cuando las rectas se cortan" ahí habría que matizar que es cuando las dos rectas que te dan se cortan, entonces, a lo mejor lo que sí se tendría que trabajar antes de evitar estos detalles, como una especie de resumen cuando terminas, y eso no lo he hecho, cuando ya veo la clasificación de soluciones y decirles o hacer preguntas de reto y preguntarles qué pasa si se les dan tres rectas etc., no lo vas a plantear o a evaluar, pero sí hacerles cierta referencia a que eso todavía sigue, hay toda una teoría para poder clasificar las soluciones, el número de soluciones de un sistema de ecuaciones.

E: Sí, de hecho la última pregunta que me gustaría hacerte es

14. ¿Qué es lo que podría estar conduciendo a los estudiantes a dar respuestas como las expuestas a lo largo de la entrevista?

D3: Considero que lo que esta sucediendo es que la matemática se ha mecanizando, sigue estando esta… a nosotros también nos toco, esa enseñanza de la matemática a través de la mecanización, que la verdad no esta mal, si tienes que de alguna manera que aprender a hacerlo, pero repito, no se esta dando el tiempo o espacio para entrar a esta de reflexión con los estudiantes. Va un poco con la concepción que se tiene de la educación, ¿qué quisiéramos hacer nosotros como profesores, tener esa libertad de poder moldear tus cursos de acuerdo a la población a la que te vas a dirigir, pero estamos más preocupados por las cuestiones administrativas (reuniones de comité, informes), sé que se tienen que hacer, siempre y cuando hubiera todo un plan ideado con estas ideas de lo que estamos discutiendo, no sólo para matemáticas, es decir, que hubiera claridad quienes están a cargo de todo el proyecto, hacia dónde va. Necesitamos gente que si tenga claro hacia dónde va el asunto en cuestiones educativas, es decir, reactivar los espacios de discusión; un espacio donde podamos discutir por ejemplo éstas cuestiones. Insisto, que estas cuestiones resulten (refiriéndose a las concepciones presentadas durante la entrevista) estamos inmersos en una política educativa que va más allá… creo que no nos hacemos idea de lo que realmente es todo el plan, no esta claro, tenemos ciertas intuiciones ciertas visiones, así ya todo el plan yo creo que no hemos vislumbrado, y quizá cuando no demos cuenta quizá nos demos de topes. Implícitamente fuimos o somos usados y se necesita abrir espacios de discusión, donde se puedan intercambiar puntos de vista, pero la institución no brinda los espacios, esta más preocupada por informes y reuniones de comité etc., que no nos dejan tiempo de nuestra jornada para hablar sobre estos temas tan importantes en nuestra labor como docentes, creo que ese es el punto.