CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Acercamientos a la propiedad de densidad de los números decimales: Un estudio con profesores en formación

Tesis que presenta

Mayra Zulay Suárez Rodríguez

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa

Dirigida por:

Dra. Olimpia Figueras Mourut de Montppellier

Ciudad de México Agosto, 2017

Agradecida con todos los trabajadores mexicanos, mujeres y hombres, quienes hicieron posible que el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, me otorgara una beca para cumplir uno de mis sueños en este hermoso país: estudiar una maestría.

Becario Nº 592057

Agradezco al Departamento de Matemática Educativa, del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Cinvestav, especialmente, al área de Tecnologías Digitales en Educación Matemática, por darme la oportunidad de continuar con mis estudios profesionales.

A mi familia, sin ella, esto es imposible

Mis padres, la luz de mis pensamientos de cada día… gracias por darme ese empujón para no desfallecer

Mamá, tus oraciones, cada noche, son mi aliento, mi vivir. Mamita, te pienso cada instante de mi vida, perdóname por mis errores, yo estoy feliz de tenerte, te llevo en mi corazón siempre, gracias por darme alas para volar, porque tú quieres que yo no piense en ti, que vuele, pero yo pienso en ti, no puedo volar sin ti.

Papá, tus lágrimas aquel día nunca se me borrarán, tu llanto, nunca lo había escuchado, gracias papá, gracias porque nunca me negaste nada, tu esfuerzo tiene frutos, te quiero mucho papá, perdóname por mis errores, siempre quisiste lo mejor para mi hermana, para mi hermano y para mí, gracias papito lindo.

Carlos, un favor nunca me lo negaste, tu sarcasmo para alegrar la vida me llena de risas, gracias por estar ahí, porque si necesitaba una traducción me la hacías inmediatamente, gracias hermanito.

Zaydi, tu estilo, tus ganas, tus alegrías, tu lucha constante, tu forma de ver la vida, son mi admiración, gracias por todo, te quiero mucho hermanita.

Ian, el brillo de mis ojos, tu voz, tu dulzura, tu encanto, tu sonrisa, tu inocencia, tu ternura, hacen que haga esto por ti, anhelo de todo corazón que llegue nuevamente el momento para tomar tu mano y salir corriendo, poder jugar y reír, hacer travesuras, el pequeñito de la casa, mi vida entera, mis pensamientos, mi todo, deseo que tu vida esté llena de bendiciones y júbilos. Gracias por ese toque precioso.

Dra. Olimpia, muchas gracias por todo, como siempre, por sus enseñanzas, por ser ese gran ser humano que es, por ser una persona ejemplar, por darme la oportunidad de realizar esta investigación a su lado, por guiarme en cada paso en la construcción de esta tesis. Por ser una gran maestra.

Dr. Hugo y Dr. Riestra, muchas gracias por sus comentarios valiosos que aportaron a esta tesis.

Solange y Tulia, gracias por su inmensa preocupación para que yo siguiera estudiando. Profesora Solange, gracias por toda la información, por querer prestarme tu cuenta para comprar un boleto de avión, profesora Tulia, gracias por querer ayudarme a contactar a alguien de este maravilloso país.

Adriana, muchas gracias por todo!

Este espacio es reservado para ti… tu encantadora compañía hace que mis días sean cada vez más especiales, felices y traviesos, las carcajadas, las pláticas, hacen que mi vida respire un tono espléndido, un aire a tulipanes, un mar azul, una noche llena de estrellas… por esas palabras, mexicanas y colombianas… tus chistes, tu mundo, mi mundo, tu amor, mi amor… gracias Mario…

México lindo y querido, gracias!!!

Y por último, a ti… a usted… las flores, la vida es hermosa, por tenerme en cuenta… gracias…

Dedicado a mi abuelita,

nonita de mi corazón, no queda más que decirte que tú más que nadie hubieses disfrutado tanto de este trabajo, pero sé que lo estás disfrutando, por donde quiera que vaya allí estás tú… Gracias nonita porque siempre estuviste pendiente de que nunca nos faltase nada, no hay amor más grande que el que da la vida por sus nietos, y nosotros te llevamos siempre en nuestros corazones… Nonita, aquí estoy, tus sueños son mis sueños, aquí estoy… el sueño se hizo realidad… Gracias por el panecito de todos los días, tus risas, por haber sido parte de nosotros… gracias nonita de mi corazón, por todo.

Índice

Resumen

El niño aprende a contar, aprende lo relacionado con el conjunto de los números naturales, de ahí su comprensión de la discreción. El usa un sistema de conocimientos de dominio número natural. Más tarde el niño empezará a estudiar fracciones y números decimales, y es aquí donde debe haber una resignificación de los conceptos construidos hasta ese momento. El empieza a cambiar su sistema de conocimientos de dominio número natural a uno de dominio número racional. Una de las resignificaciones de los conceptos construidos hasta ese momento es el que conduce de la discreción a la densidad: es decir, a comprender que existen conjuntos de números en los se cumple que "entre dos números de esos conjuntos hay una infinidad de números de esos conjuntos", naturalmente dichos conjuntos numéricos son diferentes de los naturales y los enteros en los cuales esa propiedad no se cumple. Por ello, es importante hacer un cambio conceptual, un cambio que implique reestructurar las concepciones existentes que tiene el alumno.

El proceso por medio del cual un estudiante lleva a cabo un cambio conceptual es gradual, por ello la necesidad de crear escenarios, contextos y situaciones escolares en los que se genere un aprendizaje significativo y profundo. Como consecuencia, el papel de un futuro maestro es crucial para motivar y hacer del aprendiz una persona autónoma, consciente de sus concepciones erróneas. Esta es una de las razones por las que se eligió que la población para la investigación descrita en esta tesis fueran futuros profesores. Con el estudio realizado se pretendió caracterizar los marcos explicativos de los participantes, es decir, sus maneras de expresarse acerca de lo que piensan, de lo que creen, de lo que consideran que es adecuado; esto en el contexto de una experimentación educativa.

La experimentación educativa, estructurada por medio de una secuencia didáctica que fue puesta en marcha en un taller sobre la densidad de los números decimales, tiene dos etapas, en la primera 10 estudiantes para profesor que participaron en la experimentación respondieron preguntas de un cuestionario de papel y lápiz que fungió como una observación diagnóstica, cuyas interrogantes están relacionadas con la finitud e infinitud de números en un intervalo. La segunda etapa, consta de una serie de sesiones del taller en las que se hicieron actividades diversas, tanto colectivas, como individuales. Con el taller se pretendía favorecer una conciencia metaconceptual de los participantes para que superaran las dificultades que enfrentaban en relación con sus concepciones acerca de la propiedad de densidad de los números decimales.

Del análisis y los resultados se observó que varios profesores en formación lograron iniciar un proceso de cambio conceptual: de lo discreto a lo denso. Aquellos estudiantes para profesor quienes tenían la concepción alternativa sobre la finitud de números decimales en un intervalo concibieron, durante el desarrollo de las actividades, la existencia de una infinidad de números decimales en un intervalo. De igual manera, algunos de ellos lograron comprender que un número decimal no tiene sucesor. Finalmente, se concluye que la secuencia didáctica propuesta como modelo de enseñanza puede servir en un futuro con profesores en servicio y alumnos de secundaria y medio superior, ya que se puso de manifiesto que quienes participaron en su puesta en marcha, lograron una mejor comprensión del tema a través de actividades dinámicas antes de estudiar la teoría o la definición formal de la propiedad de densidad de los números decimales.

Abstract

The child learns to count, learns about the set of natural numbers, hence his understanding of discretion. He uses a knowledge system of natural number domain. Later the child will study fractions and decimal numbers, and it is then that a re-signification process of the concepts constructed up to that moment must carry out. The child begins to change his knowledge system from natural number domain to a rational number domain. One of the changes related to the concepts constructed up to that moment is the one that leads from discretion to density: that is, to understand that there are sets of numbers in which the following property is fulfilled: "between two numbers of these sets there are an infinity of numbers of these sets ", naturally those said numerical sets are different from the sets of natural naumbers and integers, in which that property is not satisfied. Therefore, it is important to make a conceptual change, a change that involves restructuring the existing conceptions that the student has.

Processes by which students makes a conceptual change are gradual, hence the need to create scenarios, contexts, and school situations in which meaningful and deep learning is generated. As a consequence, the role of a future teacher is crucial to motivate and to make the apprentice an autonomous person, aware of his/her misconceptions. This is one of the reasons why future teachers were chosen as the population of the research described in this thesis. The aim of the study was to characterize the explanatory frameworks of participants in an educational experiment, that is, their ways of expressing themselves about what they think, what they believe, what they consider appropriate when carrying out several tasks.

The educational experiment, structured through a didactical sequence that was put into action in a workshop on the density of decimal numbers, has two stages. In the first stage, 10 future teachers who participated in the study answered questions from a paper and pencil test that served as a diagnostic observation, questions included in the test are related to the finitude and infinity of numbers in an interval. The second stage consists of a series of workshop sessions in which various activities, both collective and individual, took place. The workshop was intended to favor a metaconceptual awareness of the participants to overcome the difficulties they faced in relation to their conceptions about the density property of decimal numbers.

From the analysis and the results it was observed that several future teachers managed to initiate a process of conceptual change: from the discrete to the dense. Those future teachers who had the alternative conception about the finitude of decimal numbers in an interval conceived, during the development of activities, the existence of an infinity of decimal numbers in an interval. Similarly, some of them understood that a decimal number does not have a successor. Finally, it is concluded that the didactical sequence proposed as a teaching model may serve in the future with in-service teachers and students of secondary and higher education, since evidence was collected regarding that those who participated in try out of the didactical sequence mentioned above, obtained a better understanding of the topic through dynamic activities before studying the theory or definition of the density property of decimal numbers.

Introducción

La comprensión de la propiedad de densidad de los números racionales no ha sido una tarea fácil para los estudiantes, como lo han evidenciado investigadores. Se ha mostrado que interpretaciones inadecuadas por estudiantes acerca de esta propiedad permanecen hasta la última etapa escolar, inclusive la universitaria, como la formación en profesor. Es imprescindible entonces, realizar un cambio, un cambio en los conceptos, un *Cambio Conceptual*.

Investigadores también han evidenciado que estudiantes tienen concepciones erróneas de lo que concierne al número racional y sus propiedades, por ejemplo, a los alumnos se les dificulta entender el orden de los números racionales, por lo tanto, impide la comprensión de la propiedad de densidad de los racionales. Se quiere entonces ver las concepciones que construyen los profesores en formación –población del estudio descrito en este documento– sobre la propiedad de densidad de un subconjunto de los números racionales: los decimales positivos, e iniciar una secuencia didáctica en la que se espera promover un Cambio Conceptual. Y así, en una investigación futura se pueda extender la propiedad de densidad a los números racionales para quienes estén interesados en este campo.

El Cambio Conceptual surge a partir de las *Revoluciones Científicas* propuestas por Thomas Kuhn hacia finales de la década de los años 60 y principios de los 70. En un principio se relacionaban las Revoluciones Científicas con las ciencias: la biología, la física, la astronomía, entre otras. Fue hasta finales de los años 90 y principios de la década de 2000-2010 que investigadores como Vamvakoussi, Vosniadou, Stafylidou, Verschaffel, Christou, Van Dooren, entre otros, han hecho un intento por extender el enfoque del Cambio Conceptual hacia el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, de manera implícita, han hecho este intento, investigadores como Carey, Spelke, incluso Piaget a través de sus ideas sobre la asimilación y acomodación, en el campo del aprendizaje de las matemáticas años atrás.

En el Capítulo 1 se discute el planteamiento de la problemática que gira alrededor de las concepciones que tienen los estudiantes de educación básica y profesores en formación acerca de la propiedad de densidad de los números racionales, y por supuesto, de los números decimales. Investigadores como Stafylidou, Verschaffel y Vosniadou llaman *marcos explicativos* a estas concepciones que tienen los estudiantes, a sus interpretaciones, a sus maneras de expresar sus ideas**.** En consecuencia, se elaboran objetivos y preguntas de investigación. De igual manera, se expone también cómo está estructurado el estudio, cuyo informe es esta tesis, a través de los Marcos Teóricos Locales, propuestos por Filloy (1999).

En el componente formal de los Modelos Teóricos Locales, que se describe en el Capítulo 2, se encuentran las bases conceptuales para comprender las interpretaciones hechas por los estudiantes para profesor. El concepto de número decimal propuesto por Brousseau (1981) se expone en esta parte del documento, así como también se describe un acercamiento a ideas y representaciones sobre el concepto de la propiedad de densidad de los números decimales, algunas formuladas por Centeno (1997).

Algunos sucesos históricos, desde los inicios de la estructuración de teoría del Cambio Conceptual hasta la introducción y puesta en marcha de ese marco teórico en el ámbito educativo de las matemáticas, serán presentados en el Capítulo 3 Esta temática corresponde al componente de los modelos de procesos de cognición y de comunicación del Marco Teórico Local. En la investigación descrita en este documento se toma como base de referencia el enfoque del marco teórico del Cambio Conceptual propuesto por Vosniadou (1994), las categorías de discreción y densidad propuestas por Vamvakoussi y Vosniadou (2004), y lo relativo a marcos explicativos (Stafylidou y Vosniadou, 2004; Vosniadou y Verschaffel, 2004; Vamvakoussi, Vosniadou y Van Dooren, 2013). Se expone una revisión de la literatura acerca de los conocimientos y creencias que tiene el estudiante, en general, sobre ideas relacionadas con la discreción y la densidad, y de cómo investigadores plantean la necesidad de un cambio conceptual.

En el Capítulo 4 –correspondiente a los modelos de enseñanza–, se describe una propuesta de secuencia didáctica referente a la propiedad de densidad de los números decimales. La secuencia didáctica ha sido diseñada y elaborada para hacer una experimentación educativa con profesores en formación, estudiantes de la Escuela Normal Superior de México, lugar en el que se realizó una convocatoria abierta para quienes querían participar en un taller.

El desarrollo de la experimentación educativa a través de la secuencia didáctica consta de dos fases. La primera, la aplicación de un cuestionario considerado como diagnóstico, y la segunda –la principal– la interacción con los profesores en formación durante el taller. La primera fase se describe y se analiza en el Capítulo 5, y la segunda en el Capítulo 6. Estos dos capítulos también corresponden a los modelos de procesos cognitivos y de comunicación de los marcos teóricos locales. Posteriormente, se discuten conclusiones y se realizan reflexiones sobre el diagnóstico y la secuencia didáctica en el Capítulo 7.

Capítulo 1

Planteamiento del problema de investigación

En esta tesis se propone promover una reconceptualización sobre la propiedad de densidad durante un taller diseñado especialmente para ello. El estudio de la propiedad de densidad de los números decimales conlleva una complejidad de conceptos como el del número natural, el concepto de número decimal y el concepto de número racional. De igual manera es fundamental que el estudiante distinga entre una representación simbólica y otra cuando se trata de un mismo valor numérico. Otro aspecto relevante para el aprendizaje de la temática es el del sucesor, puesto que muchos estudiantes creen que se puede hablar de sucesor en el conjunto de los números decimales con su orden habitual.

1.1 Modelos Teóricos Locales

La investigación descrita en este documento está estructurada bajo los Modelos Teóricos Locales que permite visualizar cómo está organizada la misma, y llevar a cabo el cumplimiento de los objetivos que se describirán en los siguientes apartados. Además, de acuerdo con Filloy (1999), los Modelos Teóricos Locales son un marco teórico y metodológico para la observación experimental de un fenómeno específico con un cierto grupo de individuos y que solo se pretende que sean adecuados para dicho fenómeno observado[1]. Razón por la cual se tomó en cuenta esta estructura para un "claro entendimiento del fenómeno específico que se está tratando de observar" (Filloy, 1999, p. 7). Es decir, solo se quiere ver y analizar qué sucede con los conocimientos que tienen los profesores en formación asociados con la propiedad de densidad de los números decimales a través de un taller diseñado para tal fin.

Como lo señala Filloy (1999), los Modelos Teóricos Locales son apropiados para fenómenos específicos en los cuales se toman en cuenta cuatro componentes a saber: *Modelos de Enseñanza* junto con los *Modelos para Procesos Cognitivos y de Comunicación*, y ambos relacionados con los *Modelos de Competencia Formal*.

[1] Un ejemplo de un Modelo Teórico Local: el estudio acerca de las concepciones sobre el concepto de número decimal que tienen los estudiantes del último grado de la educación primaria. Otro ejemplo de un Modelo Teórico Local con la temática anterior, pero con otro grupo de estudiantes: el estudio acerca de las concepciones sobre el concepto de número decimal que tienen los estudiantes de primer grado de la educación secundaria.

Sáiz (2003) en su tesis de doctorado, explica que el Componente Formal reúne todos los conocimientos correspondientes al tema que un estudiante debe tener, en este caso, los relacionados con la propiedad de densidad, por ejemplo, que no hay números consecutivos en los números decimales con su orden usual. Para los modelos de enseñanza se propone una secuencia didáctica en la que los profesores en formación son los protagonistas. Sin embargo, más allá del cumplimiento de los objetivos del estudio cuyo informe es esta tesis, se quiere que estos profesores puedan aplicar las actividades en un futuro con sus estudiantes ya que el tema de densidad ha sido poco estudiado en un aula, como se verá en el Capítulo 4. Finalmente, los procesos de Cognición y de Comunicación incluye el conocimiento sobre las posibles dificultades concernientes a la propiedad de densidad de los números decimales.

1.2 Planteamiento del problema de investigación

De manera implícita, la propiedad de densidad aparece en clases cuando se enseña, por ejemplo, la propiedad de comparación de los números decimales (Castillo, 2015). Si las partes enteras son iguales al comparar dos números, se debe observar la parte decimal, empezando por las décimas, luego las centésimas y así sucesivamente. Es aquí cuando la cantidad de cifras decimales de un número puede ayudar al estudiante a comprender la propiedad de densidad a medida que se va añadiendo un dígito y va encontrando un número más y distinto a los números originales. No obstante, Ávila (1998) indica que los profesores refieren que es un proceso difícil que un alumno pueda entender la propiedad de densidad cuando se trabajan comparaciones de números decimales, precisamente por las dificultades que enfrenta el estudiante para ordenarlos, y más, cuando se usa la recta numérica para ello.

Uno de los mayores problemas en el entendimiento de la propiedad de densidad es que el alumno solo puede referir cierta cantidad de cifras decimales y decir que no hay más porque creen que un número decimal es un número de una sola cifra decimal, o a lo mucho, consideran las centésimas (Ávila y García, 2008). Por ello, algunos estudiantes, que tienen esta concepción de número decimal, piensan que los extremos de un intervalo son consecutivos, los llamados *consecutivos falsos*[2] (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004). Adicional a esto, Brousseau (1981) destaca que el conocimiento de los números naturales constituye un obstáculo para la comprensión de los números decimales. Se podría decir, por ejemplo, que entre 1.2 y 1.3 no hay otro número por el hecho de que el estudiante considera estos números como consecutivos. Por ello, la importancia del sucesor en el conjunto de los números naturales y la inexistencia de éste en los números decimales con su orden habitual.

Siguiendo las ideas de Merenluoto y Lehtinen (2004) la investigación en el área de la educación matemática ha proporcionado evidencia de que la idea de la discreción de números es una barrera para que los estudiantes de la educación básica secundaria o últimos años de

[2] Números que parecen sucesivos, pero en realidad no lo son, por ejemplo 0.05 y 0.06 o $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

bachillerato entiendan la estructura densa de los números racionales y reales. Sucede lo mismo con futuros maestros, como lo refieren Tirosh, Fischbein, Graeber, y Wilson (1999). En este último estudio, los autores analizaron las maneras de pensar de los futuros maestros en temas específicos como la densidad de los números racionales, proceso en el cual algunos tuvieron dificultad porque creen que hay una finitud de números intermedios entre dos racionales.

Broitman, Itzcovich y Quaranta (2003), en su estudio, señalan que los estudiantes de quinto de primaria (alrededor de 10 años) creen que entre 4.2 y 4.3 no es posible hallar otros números entre ellos. Los autores observaron que los estudiantes interpretan estos extremos como consecutivos debido a que se basan en los conocimientos construidos sobre los números naturales. Los investigadores resaltan la importancia de un trabajo didáctico adecuado y constante para cambiar las ideas válidas solamente en el conjunto de los naturales, que tienen los alumnos, pero que han sido generalizadas para los números racionales. Precisamente, en el Capítulo 4 se muestra el diseño y elaboración de dos actividades que surgen de aquellas planteadas por esos investigadores que están relacionadas con la propiedad de densidad y las operaciones de adición y sustracción de números decimales.

La naturaleza discreta de los números naturales se ha identificado como la principal fuente de dificultad para comprender las propiedades de los números decimales, como es la propiedad de densidad (Widjaja, Stacey, y Steinle, 2008). Estos investigadores realizaron un estudio con maestros en formación en Yogyakarta, Indonesia. Los resultados arrojaron que los maestros en formación utilizan una determinada cantidad de cifras decimales para evitar complicaciones debido a que los textos matemáticos escolares solo incluyen números con la misma cantidad de cifras decimales. En su estudio, los autores consideraron números decimales ya que refieren que investigadores han mostrado que la densidad de los números racionales les resulta un proceso extenso y de difícil comprensión para el estudiante.

Investigadores como Stafylidou, Vamvakoussi, Verschaffel y Vosniadou han usado el enfoque de desarrollo-cognitivo del Cambio Conceptual propuesto por Carey (1987) y lo han extendido hacia el aprendizaje de las matemáticas que será expuesto en el Capítulo 3. Estos investigadores señalan que los marcos explicativos juegan un papel importante para los estudiantes, son sus maneras de comunicar sus ideas, de reflexionar frente a situaciones problema, preguntas y cuestionamientos en el área de las matemáticas.

La perspectiva del Cambio Conceptual que se emplea ha sido defendida por muchos autores, quienes ponen en relieve la necesidad de una reorganización fundamental del conocimiento previo del estudiante. Por lo tanto, por medio del estudio de investigación descrito en este documento se propone generar una reconceptualización o una resignificación de la propiedad de densidad a través de una secuencia didáctica diseñada para tal fin.

Vosniadou (1994) plantea un enfoque teórico del Cambio Conceptual como una modelización. Modelos mentales iniciales, modelos sintéticos y modelos científicos son los tres pilares de esta teoría. El estudiante primero tiene modelos mentales iniciales, un niño tiene un modelo mental de un concepto en específico antes de iniciar su etapa escolar, por ejemplo, el modelo mental inicial de la "planitud de la Tierra"[3]. Los modelos sintéticos ocurren cuando el estudiante recibe información nueva y trata de ajustarla con los conceptos preexistentes, lo que hace que se generen concepciones erróneas. Una situación particular es la creencia de que los números decimales, con el orden usual, tienen sucesor por la razón de que los naturales lo poseen. Finalmente, los modelos científicos ocurren cuando el estudiante asimila información científica como tal; el estudiante justifica con la propiedad de densidad la existencia de una infinidad de números intermedios en un intervalo.

En el ámbito educativo de las matemáticas, Stafylidou y Vosniadou (2004) y Vosniadou y Verschaffel (2004) suelen usar marcos explicativos en lugar de modelos mentales o modelos sintéticos. Los autores indican que un marco explicativo del estudiante sobre el concepto número natural o el conteo de los números permanece antes, durante, y después de la etapa escolar. Mientras que, un modelo mental no permanece en la red existente de conceptos por el estudiante –como es el caso de que la Tierra es plana– ya que al comenzar su ciclo escolar esta creencia es erradicada. Sin embargo, los autores refieren modelos sintéticos en investigaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Uno de estos modelos sintéticos es la conceptualización de que el conjunto de los números racionales tiene tres conjuntos "diferentes" que no están relacionados entre sí: enteros, decimales y fracciones (Vosniadou, 2013). Como consecuencia, los estudiantes piensan de forma diferente para enteros, decimales y fracciones en términos de su estructura (discreto versus denso). Lo anterior se ha evidenciado en los resultados de estudios realizados por Vamvakoussi y Vosniadou (2007, 2010), quienes señalan que la representación simbólica en los extremos de un intervalo afecta el juicio de los estudiantes para determinar qué tipo de representación son los números intermedios que hay en dicho intervalo. Es decir, el estudiante manifiesta que hay números decimales entre decimales y fracciones entre fracciones, pero que no puede haber decimales entre fracciones y/o fracciones entre decimales. Así mismo, las autoras indican que muchos alumnos refieren que hay una cantidad finita de números en un intervalo.

---

[3] Según Vosniadou (1994), el niño tiene la creencia de que "la Tierra es plana" porque se encuentra en un contexto donde siente que vive, o que camina, en un plano.

1.3 Preguntas y objetivos de investigación

Con base en la problemática planteada referente al estudio de la propiedad de densidad de los números decimales, con profesores en formación, para el estudio descrito en este documento se elaboraron las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cuáles son las concepciones, *o marcos explicativos iniciales*, que apropia un profesor en formación en matemáticas con respecto a la propiedad de densidad de los números decimales?

2. ¿El modelo de enseñanza propuesto, a través de una secuencia didáctica, promueve un cambio conceptual de las concepciones o marcos explicativos relacionados con la propiedad de densidad de los estudiantes para profesor en matemáticas?, ¿por qué?

A partir de estas preguntas y con el propósito de responderlas se diseñaron los siguientes objetivos de la investigación:

1. Indagar las concepciones que tienen los profesores en formación con relación a la propiedad de densidad de los números decimales.

2. Caracterizar los marcos explicativos de los profesores en formación afines a la discreción y densidad de los números decimales.

3. Evidenciar las actuaciones de los profesores en formación durante las actividades propuestas en una secuencia didáctica en el caso de que se promueva un cambio conceptual.

Para lograr los objetivos se elaboró un cuestionario y se diseñó una propuesta didáctica, como se ha mencionado anteriormente. En la puesta en marcha de esta secuencia didáctica participaron profesores en formación de manera voluntaria asistiendo a cada una de las sesiones que constituyeron un taller sobre la densidad de los números decimales. Finalmente, se espera promover un Cambio Conceptual con respecto a las concepciones relacionadas con la densidad de los números decimales, especialmente de aquellos profesores en formación que tuvieron dificultades. En el siguiente capítulo se detallan los conceptos asociados con la propiedad de densidad, empezando por la definición de número decimal.

Capítulo 2

Los números decimales y la propiedad de la densidad

El componente formal de los Modelos Teóricos Locales que se describe en los siguientes apartados está formado por la construcción de los números decimales a partir de los números naturales y de los enteros –tomando en cuenta la perspectiva expuesta por Brousseau (1981)–, varios acercamientos a la propiedad de densidad de los números decimales –desde el punto de vista de Centeno (1997) –, la relación de orden, y la propiedad de densidad del sistema de los números decimales.

2.1 Construcción de los números decimales a partir del producto cartesiano de los naturales y los enteros

Brousseau (1981) menciona dos formas de construir los números decimales finitos: a partir del producto cartesiano de los números naturales y los números enteros, y como un subconjunto de los números racionales. En este documento solo se describirá la primera construcción descrita por el investigador, la otra se encuentra tanto en el documento de Brousseau (1981, p. 151), como en el de Centeno (1997, p. 66).

La construcción de los números decimales de acuerdo con Brousseau (1981) consiste en tomar una estructura conocida, la de los enteros, y hacer una extensión de ella. Brousseau menciona que una forma de construir los números decimales consiste en encontrar las soluciones de la ecuación $10^n \,.\, x = z$, con $z \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Según el investigador para lograrlo se define en $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ la relación siguiente, que es una relación de equivalencia:

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1 . 10^{n_2} = z_2 . 10^{n_1}, \text{ con } z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \text{ y } n_1, n_2 \in \mathbb{N}$$

Brousseau (1981) explica que la clase del par (z, n) se escribe $[z/10^n]$ y es el conjunto de fracciones equivalentes a la fracción $z/10^n$, el cual se llama *número decimal*, de ahí también la expresión *fracción decimal*. Por ejemplo: el conjunto de soluciones de la ecuación $10^2 x = 23$ es la clase de equivalencia $[23/10^2]$; esta clase contiene una infinidad de fracciones, es decir todas las fracciones equivalentes a $23/10^2$. El número $23/10^2$ es un representante de la clase $[23/10^2]$, de hecho $23/100$ es el representante irreducible de esa clase, es decir aquel representante cuyo numerador y denominador son primos relativos. Otros miembros de esta clase son: 230/1000, 2300/10000, o 23000/100000, entre una infinidad de la forma (z.23)/(z.10^2) para $z \in \mathbb{Z}$.

El número $23/10^2$ denota el par (23, 2) que es equivalente a (230, 3), en efecto:

$$23.10^3 = 23.(10.10^2) = (23.10).10^2 = 230.10^2$$

por ello

$$(23, 10^3) \sim (230, 10^2) \Leftrightarrow [23/10^2] = [230/10^3]$$

El conjunto *D* de los números decimales es el conjunto de las clases que la relación de equivalencia ~ determina en el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

A continuación, se demuestra que la relación ~ definida anteriormente es de equivalencia. Recordemos la definición:

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1.10^{n_2} = z_2.10^{n_1}, \text{ con } z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \text{ y } n_1, n_2 \in \mathbb{N}$$

a. Propiedad reflexiva: Por demostrar $(z, n) \sim (z, n)$. Sabemos que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Z}$, $z.10^n = z.10^n$, y que *la igualdad* entre números enteros es reflexiva, luego por definición de la relación ~, la igualdad anterior se traduce en que $(z, n) \sim (z, n)$ para todo $(z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

   Ejemplo: el par (23, 2) está relacionado consigo mismo, en efecto:

   $$(23, 10^2) = (23, 10^2) \Leftrightarrow 23.10^2 = 23.10^2 \Leftrightarrow [23/10^2] = [23/10^2]$$

   estas igualdades son ciertas por la definición de la relación y por la propiedad reflexiva de la igualdad entre números enteros.

b. Propiedad simétrica: Si $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, entonces por definición $z_1.10^{n_2} = z_2.10^{n_1}$. Por ser la igualdad simétrica en $\mathbb{Z}$ se tiene que $z_2.10^{n_1} = z_1.10^{n_2}$, por lo tanto $(z_2, n_2) \sim (z_1, n_1)$, por definición de ~.

   Ejemplo: Sea (4,1), este par está relacionado con el par (40,2), debido a que:

   $$4.10^2 = 4.(10.10) = (4.10).10 = 40.10^1 \Leftrightarrow [4/10^1] = [40/10^2].$$

   La cadena de igualdades son válidas por la propiedad asociativa de la multiplicación de enteros, de donde se obtiene por la propiedad simétrica de la igualdad de los números enteros que:

   $$40.10^1 = 4.10^2 \Leftrightarrow (40, 2) \sim (4,1)$$

   es decir, que el par (40, 2) está relacionado con el par (4, 1), de donde se ve que esta pareja de pares cumple con la propiedad simétrica.

c. Propiedad transitiva: Supongamos que $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ y que $(z_2, n_2) \sim (z_3, n_3)$ con $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$ y $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. Por la definición de ~ se tiene que:

$$z_1.10^{n_2} = z_2.10^{n_1} \text{ y } z_2.10^{n_3} = z_3.10^{n_2},$$

luego $(z_1.10^{n_2}).(z_2.10^{n_3}) = (z_2.10^{n_1}).(z_3.10^{n_2})$.

Ahora se toma el primer miembro de la igualdad:
$(z_1.10^{n_2}).(z_2.10^{n_3}) =$

$= (z_1.10^{n_2}).(10^{n_3}.z_2)$	por conmutativad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$
$= [(z_1.10^{n_2}).10^{n_3}].z_2)$	por asociativad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$
$= [(10^{n_2}.z_1).10^{n_3}].z_2)$	por conmutativad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$
$= [(10^{n_2}.(z_1.10^{n_3})].z_2)$	por asociativad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$
$= [(z_1.10^{n_3}).10^{n_2}].z_2)$	por conmutativad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$
$= (z_1.10^{n_3}).(10^{n_2}.z_2)$	por asociativad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$
$= (z_1.10^{n_3}).(z_2.10^{n_2})$	por conmutativad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

Análogamente para el segundo miembro

$$(z_2.10^{n_1}).(z_3.10^{n_2}) = (z_3.10^{n_1}).(z_2.10^{n_2}).$$

Por transitividad de la igualdad en $\mathbb{Z}$ se tiene que:

$$(z_1.10^{n_3}).(z_2.10^{n_2}) = (z_3.10^{n_1}).(z_2.10^{n_2}).$$

Por la propiedad de la cancelación derecha de la multiplicación en $\mathbb{Z}$ se tiene que

$$z_1.10^{n_3} = z_3.10^{n_1}$$

por definición de ~ se tiene que:

$$(z_1, n_1) \sim (z_3, n_3).$$

Un ejemplo:
Sea (5,1), este par está relacionado con el par (50,2), y, (50,2) está relacionado con el par (500,3). Luego (5,1)~ (500,3), debido a que:

$$5.10^3 = 5.(10.10.10) = (5.10.10).10 = 500.10^1 \Leftrightarrow [5/10^1] = [500/10^3].$$

Por tanto,

$$5.10^3 = 500.10^1 \Leftrightarrow (5,1) \sim (500,3)$$

Entonces, por a, b y c, la relación ~ es una relación de equivalencia. De lo anterior se puede decir que

$$D = \mathbb{Z}\times\mathbb{N}/\sim = \{[(z,n)] | z \in \mathbb{Z} \; y \; n \in \mathbb{N}\}.$$

donde D denota al conjunto de los números decimales y $[(z,n)]$ las clases de equivalencia de las soluciones de la ecuación: $10^n . x = z$.

2.1.1 Definición de adición y de multiplicación de números decimales

En D se puede definir una adición, $+: D \times D \longrightarrow D$, para toda pareja de números decimales (z_1, n_1) y (z_2, n_2) de la siguiente manera:

$$(z_1, n_1) + (z_2, n_2) = (z_1.10^{n_2} + z_2.10^{n_1}, n_1 + n_2)$$

Usando las propiedades de la adición y la multiplicación en $\mathbb{Z}$ se puede probar que (D, +) es un grupo abeliano. El elemento neutro respecto de la adición definida es la clase [(0, n)] y el inverso aditivo de la clase [(z, n)] es la clase [(-z, n)].

Así mismo, en D se puede definir una multiplicación $x: D \times D \longrightarrow D$, para toda pareja de números decimales (z_1, n_1) y (z_2, n_2) de la siguiente manera:

$$(z_1, n_1)x(z_2, n_2) = (z_1 x z_2, n_1 + n_2)$$

Haciendo uso de las propiedades de la adición y la multiplicación en $\mathbb{Z}$ se puede probar que (D, x) es un semigrupo abeliano. El elemento idéntico respecto a la multiplicación definida es la clase [(1, 0)].

Por ello, el conjunto de los números decimales con la adición y la multiplicación así definidas, (D, +, $.$) forma un dominio entero.

2.2 Orden en los números decimales

Antes de que un estudiante aprenda la propiedad de densidad de los números decimales, es importante que estudie las propiedades del orden que se define en el conjunto de los números decimales.

Considerando el dominio entero D definido en el apartado anterior, se procederá a demostrar que $(D, \leq)$ es totalmente ordenado, donde la relación $\leq$ se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ de la manera siguiente:

$$[(z_1, n_1)] \leq [(z_2, n_2)] \Leftrightarrow z_1.10^{n_2} \leq z_2.10^{n_1},$$

donde $[(z_1, n_1)] y\, [(z_2, n_2)] \in D$, y $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

A continuación se incluye un ejemplo para mostrar la idea de la definición dada entre los elementos del conjunto D:

Se quiere mostrar que $(23{,}3) \leq (41{,}2)$ es decir, en realidad se quiere probar que la siguiente desigualdad es cierta: $23/10^3 \leq 41/10^2$. Por ello, a partir de la comparación entre los dos números enteros $23 \leq 410$ y multiplicando por el número positivo $1/10^3$ se obtiene:

$$23/10^3 \leq 410/10^3 = (41.10)/10^3 = 41/10^2$$

es decir, $23/10^3 \leq 41/10^2 \Leftrightarrow (23{,}3) \leq (41{,}2)$ que nos muestra que se cumple la definición de la relación de orden entre los pares ordenados considerados.

A continuación se demuestran las propiedades que satisface la relación de orden definida:

a. Propiedad reflexiva: Por demostrar $(z,n) \leq (z,n)$. Sabemos que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Z}$, $z.10^n \leq z.10^n$, y que *el orden* de los números enteros cumple la propiedad reflexiva, luego por definición de $\leq$, la desigualdad anterior se traduce en que $(z,n) \leq (z,n)$ para todo $(z,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$.

   Un ejemplo: (23,2) ≤ (23,2), en efecto: $23.10^2 \leq 23.10^2$

b. Propiedad antisimétrica: Supongamos que $(z_1,n_1) \leq (z_2,n_2)$ y que $(z_2,n_2) \leq (z_1,n_1)$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Se debe demostrar que $(z_1,n_1) = (z_2,n_2)$.
   Por definición de $(z_1,n_1) \leq (z_2,n_2)$ se tiene que $z_1.10^{n_2} \leq z_2.10^{n_1}$ y por la definición de $(z_2,n_2) \leq (z_1,n_1)$ se tiene que $z_2.10^{n_1} \leq z_1.10^{n_2}$.
   El orden de los números enteros cumple con la propiedad antisimétrica, por ello se tiene que $z_2.10^{n_1} = z_1.10^{n_2}$, que conduce a la igualdad $(z_1,n_1) = (z_2,n_2)$.

   Ejemplo: Supongamos que (3,1) ≤ (30,2) y (30,2) ≤ (3,1). Se quiere ver que (3,1) = (30,2). Por definición de ≤ se tiene que $3.10^2 \leq 30.10^1$ y $30.10^1 \leq 3.10^2$, luego $3.(10.10) \leq 30.10$ y $30.10 \leq 3.(10.10)$. Por tanto $3.(10.10) = 30.(10)$, es decir, $3.10^2 = 30.10^1$, luego (3,1) = (30,2).

c. Propiedad transitiva: Se supone que $(z_1,n_1) \leq (z_2,n_2)$ y que $(z_2,n_2) \leq (z_3,n_3)$ con $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$ y $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$.

   Por la definición de ≤ se tiene que:
   $$z_1.10^{n_2} \leq z_2.10^{n_1} \text{ y } z_2.10^{n_3} \leq z_3.10^{n_2} \qquad (*)$$

   Se considera la primera desigualdad, $z_1.10^{n_2} \leq z_2.10^{n_1}$, y se multiplica por $z_2.10^{n_3}$ a ambos lados de la desigualdad. La desigualdad en los enteros se conserva debido a que $z_2.10^{n_3} > 0$, por ello se obtiene:
   $$(z_2.10^{n_3})z_1.10^{n_2} \leq (z_2.10^{n_3})z_2.10^{n_1} \qquad (**)$$

   Ahora considérese la segunda desigualdad de (*): $z_2.10^{n_3} \leq z_3.10^{n_2}$, y se multiplica por $z_2.10^{n_1}, > 0$ a ambos lados de la desigualdad:
   $$(z_2.10^{n_1})z_2.10^{n_3} \leq (z_2.10^{n_1})z_3.10^{n_2}$$

   Por conmutativad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$ (primer miembro de la desigualdad), se obtiene:

$$z_2.10^{n_3}(z_2.10^{n_1}) \leq (z_2.10^{n_1})z_3.10^{n_2} \qquad (***)$$

De (**) y (***) y por transitividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$ se tiene:

$$(z_2.10^{n_3})z_1.10^{n_2} \leq (z_2.10^{n_1})z_3.10^{n_2}$$

Usando las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación en $\mathbb{Z}$ se tiene que:

$$(z_2.10^{n_2})(z_1.10^{n_3}) \leq (z_2.10^{n_2})(z_3.10^{n_1})$$

Por la ley de cancelación izquierda de la multiplicación en los números naturales:

$$(z_1.10^{n_3}) \leq (z_3.10^{n_1})$$

Y finalmente por definición de $\leq$ se tiene: $(z_1, n_1) \leq (z_3, n_3)$.

Considérese el siguiente ejemplo de esta propiedad: (4,1) ≤ (5,1) y (5,1) ≤ (6,1), luego (4,1) ≤ (6,1). En efecto: $4.10^1 \leq 5.10^1$ y $5.10^1 \leq 6.10^1$, es decir, $4.10^1 \leq 6.10^1$, por tanto, (4,1) ≤ $(6,1)$.

Cómo la relación ≤ cumple con a, b y c entonces $(D, \leq)$ es un conjunto ordenado.

Ahora se debe probar que $(D, \leq)$ es un conjunto *totalmente* ordenado, para ello se debe cumplir que dados $a, b \in D$ entonces $a \leq b$ ó bien $b \leq a$.

Sean (z_1, n_1), $(z_2, n_2) \in D$, luego $z_1.10^{n_2}$ y $z_2.10^{n_1}$ son enteros, y respecto del orden existente en el conjunto $\mathbb{Z}$ se obtiene:

$$z_1.10^{n_2} \leq z_2.10^{n_1} \text{ ó bien } z_2.10^{n_1} \leq z_1.10^{n_2}$$

Entonces $(z_1, n_1) \leq (z_2, n_2)$ ó bien $(z_2, n_2) \leq (z_1, n_1)$. Por tanto, $(D, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

2.3 Acercamientos a la propiedad de densidad de los números decimales

Siguiendo las ideas de Centeno (1997), al pensar en la recta numérica como una representación gráfica de los números racionales, estos números se distribuyen de manera densa sobre la recta; entre dos números racionales siempre se puede encontrar un racional, y por tanto una infinidad, basta con hacer $(a + b)/2$, con a, b números racionales. Centeno agrega que aunque se sabe que todavía no hay un número para cada punto de la recta, porque hay más puntos en la recta que números racionales, se puede decir que la recta está cubierta de números racionales de manera densa.

Según Centeno (1997), el conjunto de los racionales no es el único conjunto denso en la recta. La autora argumenta que no es necesario considerar todos los números racionales, ya que hay subconjuntos de los racionales que cumplen con la propiedad de densidad. Por ejemplo, los números obtenidos por subdivisiones en 2, 4, 8, 16, 32, etcétera, partes iguales, forman el conjunto de fracciones binarias –que también es un conjunto denso y en consecuencia se distribuye de manera densa en la recta–. Así mismo sucede con los números decimales, añade Centeno.

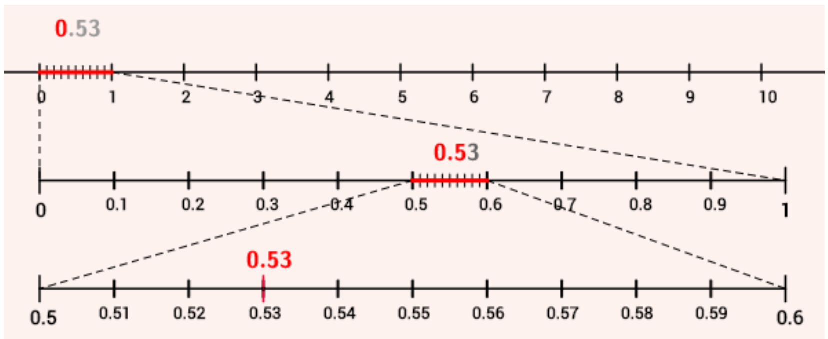


Figura 2.1 Representación gráfica del punto 0.53 en la recta numérica

Centeno (1997) considera el segmento de 0 a 1 de la recta numérica, los números obtenidos por subdivisiones de cada intervalo en 10, 100, 1000, etcétera partes iguales, corresponden a fracciones decimales. Por ejemplo, el número 0.53 = 5/10 + 3/100 (ver Figura 2.1) corresponde al punto situado en el intervalo entre 0 y 1, en el quinto subintervalo de longitud 1/10, y en el tercer subintervalo de longitud 1/100.

En términos de Centeno (1997), si una fracción decimal tiene *n* cifras después del punto decimal, se puede escribir $g = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \ldots + a_n 10^{-n}$ donde z es un entero y las cifras $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pertenecen al conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e indican los valores posicionales de los números decimales (décimas, centésimas, etcétera). Se puede decir que este proceso que describe Centeno es una manera de concebir la propiedad de densidad de los números decimales, cada vez se agregan más dígitos en la parte decimal de un número, formando las décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, y así sucesivamente. Luego, entre dos números decimales podemos encontrar otros más. Por ejemplo, en el intervalo comprendido entre 2.2 y 2.3 se encuentran 2.21, 2.211, 2.2111, …, y procediendo en consecuencia, una infinidad.

El número *g* se representa en el sistema decimal en la forma abreviada $z.\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ y se escribe en forma de fracción p/q, siendo q una potencia de 10, como se vio anteriormente. Por ejemplo, el número 3.264 = 3 + 2/10 + 6/100 + 4/1000 = 3264/1000. Centeno (1997) indica que ninguna fracción irreducible cuyo denominador tenga factores distintos de 2 y 5 puede ser representada por una fracción decimal. Por ejemplo, 1/9 no puede escribirse como número decimal con un número finito de cifras, porque no existe en la familia de fracciones equivalentes a 1/9 ninguna fracción decimal. Si $1/9 = b/10^n$ se tendría: $10^n = 9b$, lo que es absurdo porque 9 no es divisor de ninguna potencia de 10.

Al considerar la sucesión de números decimales 0.1, 0.11, 0.111, …, se puede observar que esta sucesión está relacionada con 1/9 porque cada término de la sucesión es un cociente aproximado de la división $1 \div 9$. Ahora, 0.11 está más próximo a 1/9 que 0.1; 0.111 está más próximo a 1/9 que 0.11; 0.1111 está más próximo a 1/9 que 0.111; y así sucesivamente. Se dice que la sucesión 0.1, 0.11, 0.111, …, tiene "como límite a 1/9". Este contexto es otra forma que puede ayudar al estudiante a comprender la propiedad de densidad de los números decimales. En el caso descrito, 0.1, 0.11, 0.111, … se encuentran en el intervalo entre 0 y 1/9.

Relación entre la construcción de número decimal, propuesta por Brousseau (1981), y la descripción de número decimal que hace Centeno (1997)

Recordemos la definición de número decimal que hace Brousseau:

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1 . 10^{n_2} = z_2 . 10^{n_1}, \text{ con } z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \text{ y } n_1, n_2 \in \mathbb{N}$$

A través del siguiente ejemplo se quiere ver cómo esta definición que propone Brousseau está relacionada con la descripción de número decimal que hace Centeno.

El número 0.123 representa un décimo, dos centésimos y tres milésimos, es decir:

$$0.123 = 1/10 + 2/100 + 3/1000 = 1/10^1 + 2/10^2 + 3/10^3 = 123/10^3 \text{ (*)}$$

Al agregar un 0 en la posición de las diezmilésimas del número 0.123 se obtiene 0.1230, luego estas expresiones son equivalentes ya que ambas representan la "ausencia" de diezmilésimos.

Veamos cómo está representado el número 0.1230.
El número 0.1230 representa un décimo, dos centésimos, tres milésimos y cero diezmilésimos, es decir: $0.1230 = 1/10 + 2/100 + 3/1000 + 0/10000 = 1/10^1 + 2/10^2 + 3/10^3 + 0/10^4 = 1230/10^4$ (**)

Las expresiones 0.123 y 0.1230 son equivalentes, es decir, 0.123 = 0.1230, entonces por (*) y (**) se tiene que $123/10^3 = 1230/10^4$, por tanto, $123.10^4 = 1230.10^3$, luego $(123{,}3) \sim (1230{,}4)$.

2.3.1 Propiedad de densidad de los números decimales

Para probar la propiedad de densidad de los números decimales caracterizados en el apartado 2.1 como:

$$D = \mathbb{Z}\times\mathbb{N}/\sim = \{[(z,n)] | z \in \mathbb{Z}\ y\ n \in \mathbb{N}\}$$

donde la relación ~ se definió como:

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1.10^{n_2} = z_2.10^{n_1},\ \text{con } z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \text{ y } n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

se define un orden estricto en el conjunto ordenado $(D, \leq)$ a partir de la relación de orden definida en el apartado 2.2:

Sean (z_1, n_1) y $(z_2, n_2) \in$ D con $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$., entonces:

$$(z_1, n_1) < (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1.10^{n_2} < z_2.10^{n_1}.$$

Por definición: El conjunto D es denso si dados $a, b \in D$, con $a < b$, existe $c \in D$ tal que $a < c < b$.

Demostración:

Sean $\frac{z_1}{10^{n_1}}, \frac{z_2}{10^{n_2}} \in D$ tales que $\frac{z_1}{10^{n_1}} < \frac{z_2}{10^{n_2}}$, luego $z_1.10^{n_2} < z_2.10^{n_1}$ (*)

a. Sumando $z_1.10^{n_2}$ a ambos lados de la desigualdad se tiene que

$$2(z_1.10^{n_2}) < z_2.10^{n_1} + z_1.10^{n_2}.$$

Multiplicamos por 10^{n_1} (10^{n_1} es positivo) a ambos lados de la desigualdad, luego

$$2(z_1.10^{n_2})10^{n_1} < (z_2.10^{n_1} + z_1.10^{n_2})10^{n_1},$$

entonces:

$$\frac{z_1}{10^{n_1}} < \frac{z_2.10^{n_1} + z_1.10^{n_2}}{2(10^{n_1}10^{n_2})} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{10^{n_2}} + \frac{z_1}{10^{n_1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{10^{n_1}} + \frac{z_2}{10^{n_2}}\right).$$

Luego

$$\frac{z_1}{10^{n_1}} < \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{10^{n_1}} + \frac{z_2}{10^{n_2}}\right) \quad (**)$$

b. Sumando $z_2.10^{n_1}$ a ambos lados de la desigualdad (*) se obtiene

$$z_1.10^{n_2} + z_2.10^{n_1} \leq 2(z_2.10^{n_1}).$$

Multiplicamos por 10^{n_2} a ambos lados de la desigualdad:

$$(z_1.10^{n_2} + z_2.10^{n_1})10^{n_2} \leq 2(z_2.10^{n_1})10^{n_2},$$

entonces:

$$\frac{z_1.10^{n_2} + z_2.10^{n_1}}{2(10^{n_1}10^{n_2})} < \frac{z_2}{10^{n_2}} \text{ y } \frac{z_1.10^{n_2} + z_2.10^{n_1}}{2(10^{n_1}10^{n_2})} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{10^{n_1}} + \frac{z_2}{10^{n_2}}\right)$$

Quiere decir que $\frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{10^{n_1}} + \frac{z_2}{10^{n_2}}\right) < \frac{z_2}{10^{n_2}}$ (***)

Por tanto, por (**) y (***) se tiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{z_1}{10^{n_1}} < \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{10^{n_1}} + \frac{z_2}{10^{n_2}}\right) < \frac{z_2}{10^{n_2}}$$

Por tanto, en el conjunto D de los números decimales la relación de orden definida cumple con la propiedad de densidad.

2.3.2 Infinidad de números decimales entre números decimales diferentes

La propiedad de densidad es equivalente a la siguiente afirmación: Sean $a, b \in D$, tales que a < b, entonces entre estos dos números decimales hay una infinidad de elementos de *D*. Demostración: Procediendo por reducción al absurdo, suponemos que entre a y b, con $a, b \in D$, existe un número, n, finito de decimales, sea éstos $c_1, \dots, c_n \in D$, tales que $a < c_1 < \cdots < c_n < b$. Como $c_n < b$ y ambos son números decimales, se tiene por la propiedad de densidad que entre c_n y b existe c_{n+1} tal que $c_n < c_{n+1} < b$, por lo que habrían $n + 1$ decimales entre a y b, lo que contradice la hipótesis inicial.

Se ha demostrado que si D es denso y a y b son dos números decimales tales que a < b, entonces existe una infinidad de elementos de D que se encuentran entre a y b. Faltaría mostrar que si a y b son elementos de D, tales que a < b, entonces existe c $\in D$, tal que a < c < b, pero eso es consecuencia de que existe una infinidad de elementos de D entre esos dos números decimales.

Por ello que se satisfaga la propiedad de densidad en un conjunto respecto a una relación de orden es equivalente a la existencia de una infinidad de elementos entre dos elementos diferentes del conjunto.

2.4 Escritura decimal de un número racional

Centeno (1997) señala que se puede convertir una fracción decimal en escritura decimal haciendo la división del numerador entre el denominador y se obtiene una escritura que resulta muy cómoda. Por ejemplo, 2/5 = 2:5 = 0.4, o también 2/5 = 4/10 = 0.4. Centeno dice que si se aplica el mismo procedimiento al número racional 1/3 no se obtiene una escritura decimal finita. La autora señala que 0.3333…, que se obtiene al hacer el cociente entre 1 y 3, es una aproximación al número 1/3 (en el último párrafo de la sección 2.3, de este capítulo, se menciona otro ejemplo). Se concluye que aunque todos los números racionales no son fracciones decimales, éstas permiten dar aproximaciones tan finas como se quiera de los racionales, luego todo número racional se puede representar por una escritura decimal limitada, finita, o ilimitada, infinita (periódica o no periódica).

Finalmente, lo expuesto en este capítulo correspondiente al modelo de la componente formal del Marco Teórico Local de la densidad de los números decimales, sirve por un lado para tener en cuenta los conocimientos matemáticos para el diseño y elaboración de la experimentación educativa, y por otro para comprender los textos matemáticos (manifestaciones escritas) que producen los estudiantes de profesor en formación sobre lo que piensan acerca de la propiedad de densidad de los números decimales y como usan esos conocimientos para responder a preguntas formuladas o resolver problemas que involucren esa propiedad.

Capítulo 3

Aspectos relevantes del Cambio Conceptual

Los seres humanos vivimos actualmente en presencia de cambios constantes, observamos con naturalidad cómo nuestras experiencias están sujetas al cambio, ya sea de tipo tecnológico, social, académico, entre otros. Así mismo sucede con el aprendizaje de un concepto, proceso en el cual el estudiante requiere "cambiar" o "reorganizar" las ideas que tiene sobre este concepto por nuevas concepciones para comprenderlo y usarlo con mayor profundidad.

3.1 Raíces del Cambio Conceptual

Las raíces del enfoque del Cambio Conceptual se encuentran en el trabajo de Thomas Kuhn (1970) sobre el cambio teórico en la filosofía y la historia de la ciencia. Kuhn propuso que la *ciencia normal* –donde la historia de la ciencia se encuentra marcada por largos periodos que se ven interrumpidos por cambios bruscos de una teoría a otra sin ninguna posibilidad de interconexión entre ellas–, opera dentro de conjuntos de creencias, suposiciones y prácticas que constituyen *paradigmas* (formas nuevas y aceptadas de resolver un problema en la ciencia, que más tarde son utilizadas como modelos para la investigación y la formación de una teoría). Cuando las nuevas concepciones científicas no pueden ser acomodadas dentro de estos paradigmas, la ciencia entra en un período de crisis que es finalmente resuelto mediante un cambio revolucionario que es lo que se conoce como *Revolución Científica*. Un ejemplo de Revolución Científica es la transición de la mecánica newtoniana a la mecánica cuántica que evocó muchos debates sobre la naturaleza y los estándares de la física.

A partir de los trabajos de investigación hechos por Viennot, Novak y el dúo Driver y Easley en la década de los años 70 (citados por Vosniadou, 2002), el Cambio Conceptual tomó fuerza. En ese momento surgió una necesidad prominente de cambiar conceptos básicos por conceptos científicos en el aprendizaje de la ciencia al observar que durante y después de la enseñanza los estudiantes seguían teniendo conceptos erróneos, como lo afirma Vosniadou (2002).

Ioannides y Vosniadou (1998) mencionan que Posner, Strike, Hewson y Gertzog, en el año 1982, realizaron una analogía entre las ideas de Kuhn sobre la ciencia normal y la revolución científica, y las ideas piagetianas de asimilación y acomodación. Esta analogía se convirtió en el principal fundamento que orientó la educación científica durante muchos años, pero, posteriormente fue sujeta a críticas.

3.2 Enfoque clásico del Cambio Conceptual

En el ámbito educativo-científico, Posner Strike, Hewson y Gertzog (1982) presentaron un trabajo sobre el Cambio Conceptual al que, más tarde Vosniadou (2013) denominó *el enfoque clásico del Cambio Conceptual***.** Estos investigadores indican que hay dos fases sobre el Cambio Conceptual en la ciencia. En una primera fase, el estudiante utiliza las concepciones existentes[4] para enfrentar un nuevo fenómeno o concepto; esta fase es llamada asimilación. En la segunda fase, acomodación, el estudiante debe reemplazar sus concepciones para permitir el aprendizaje de los nuevos fenómenos o conceptos. Posner y sus colegas (1982) propusieron cuatro condiciones antes de que un cambio conceptual pueda ocurrir:

1. Debe haber insatisfacción con las concepciones existentes. Antes de que ocurra la acomodación, el estudiante, o el científico, se siente incapaz de resolver los problemas que giran alrededor de los nuevos fenómenos con sus concepciones existentes, por tanto, se siente insatisfecho con estas concepciones. Un aspecto importante de la insatisfacción es la anomalía. Cada vez que un individuo intenta sin éxito asimilar una experiencia o una nueva concepción en su red existente de concepciones, el individuo experimenta una anomalía (Ibid, p. 214).

2. Una nueva concepción debe ser inteligible. El individuo debe ser capaz de comprender cómo sus experiencias pueden ser estructuradas por un nuevo concepto. Se sugiere la importancia de las analogías y las metáforas para otorgar un significado inicial e inteligibilidad a nuevos conceptos (Ortony, 1975; Belth, 1977; Black, 1962; citados por Posner et al., 1982). Sin embargo, la inteligibilidad es necesaria pero no suficiente para un acomodamiento. La inteligibilidad requiere una comprensión de las palabras y símbolos, así como de una representación significativa del nuevo concepto para que el estudiante pueda tener alguna idea de qué se trata lo que va a aprender.

[4] Según Strike y Posner (1985, citado por Flores, 2007), las *concepciones existentes* son precondiciones que tiene el estudiante para la interpretación de la experiencia. O bien, se podría decir que son las ideas construidas hasta ese momento.

3. Una nueva concepción debe parecer inicialmente plausible. Con un nuevo concepto el individuo debe, al menos, tener la capacidad de resolver los problemas generados por sus conceptos existentes.

4. Con un nuevo concepto el individuo debe advertir la posibilidad de un programa de investigación fructífero. Cuando el estudiante ha asimilado un concepto, inteligible y plausible, que ha superado las anomalías, ha aprendido un nuevo concepto que le servirá para relacionarlo con otros conceptos. El estudiante podrá extender estos nuevos conceptos hacia otras áreas de indagación.

Finalmente, Posner y sus colaboradores concluyen que dos elementos importantes para guiar el proceso del cambio conceptual son las anomalías y las suposiciones fundamentales sobre el conocimiento de un concepto. Las anomalías son para el estudiante fuentes de conflictos cognitivos, los cuales pueden conducir un acomodamiento del nuevo concepto, entonces, cada vez que el estudiante acepta una anomalía, la insatisfacción con los conceptos existentes permitirá el aprendizaje del nuevo concepto.

3.3 Enfoque de desarrollo-cognitivo del Cambio Conceptual

El enfoque del Cambio Conceptual propuesto por Posner y sus colegas recibió varias críticas. Smith, diSessa y Roschelle (1993) indicaron que este enfoque se centraba en los conceptos erróneos de los estudiantes e ignoraba lo que ellos sabían hasta el momento, así mismo, cuando los estudiantes se enfrentaban a los conceptos erróneos mediante una instrucción por conceptos nuevos únicamente, es poco probable que tuvieran éxito. Caravita y Hallden (1994) mencionaron que el conflicto cognitivo no es una estrategia de instrucción eficaz y que se debe tener en cuenta el contexto sociocultural y las afectaciones motivacionales para que pueda ocurrir un cambio conceptual.

Carey (1987) habla sobre la naturaleza del cambio conceptual. Ella sostiene que los cambios que se producen entre la infancia y la edad adulta son “fuertes” reestructuraciones de los conceptos, en las cuales se representa un verdadero cambio conceptual. Carey realiza numerosos experimentos, uno de ellos, en biología, con niños de diferentes edades sobre algunos órganos de animales. Ella señala que el niño reconoce la función de cada órgano, y también las relaciones entre los órganos a medida que conoce más sobre el tema, lo que evidencia que la base de conocimientos de los niños se sistematiza cada vez más; va formando un conjunto de conocimientos que están relacionados entre sí. A esto, Carey le llama *sistema de conocimientos*, es decir, el niño aprende un concepto y lo asocia con otros ya aprendidos. De acuerdo con Vosniadou y Verschaffel (2004), no se trata de conocimientos “unitarios” o “aislados”, sino de un sistema de conocimientos que consiste de varios elementos como presuposiciones, creencias y modelos mentales que proporcionan una explicación y una predicción.

Carey y Spelke (1994) argumentan que los seres humanos están dotados de sistemas de conocimientos de *dominios-específicos*, como el conocimiento del lenguaje, el conocimiento de los objetos físicos y el conocimiento del número natural; y cada sistema de conocimiento se aplica a un conjunto de entidades y fenómenos. Por ejemplo, el conocimiento del lenguaje se aplica a la oración y sus componentes; el conocimiento de los objetos físicos se aplica a cuerpos materiales macroscópicos y su comportamiento, y el conocimiento del número natural a conjuntos y a operaciones matemáticas. Los anteriores ejemplos son sistemas de conocimiento de dominios-específicos, que en términos de Carey y Spelke, cada uno de ellos se organiza alrededor de un conjunto de principios básicos; para el lenguaje prevalecen los principios básicos de la gramática universal; para los objetos físicos en la Tierra, los principios básicos de Newton, y para el número natural –según investigadores en psicología que apoyan la existencia del conocimiento innato del número natural–, son la sucesión y la correspondencia uno-uno.

Una característica básica de esta comprensión inicial de los números naturales es que son discretos, es decir, cada número natural tiene un sucesor único –natural–, de hecho, parece haber alguna evidencia de que la propiedad de la discreción de los números naturales puede estar basada en la neurobiología, en el sentido de que los seres humanos están predispuestos a aprender y razonar con esos números (Dehaene, 1998; Gelman, 2000; citados por Vosniadou, Vamvakoussi, y Skopeliti, 2008). Más tarde, Blair, Tsang y Schwartz mencionan que "[los bebés] pueden distinguir pequeñas cantidades discretas sin enumerar" (2013, p. 323) poniendo énfasis en que los individuos tienen funciones perceptivo-motoras que existen antes de una comprensión inicial del número.

Según Carey y Spelke (1996), los investigadores sobre el desarrollo cognitivo ponen de manifiesto que la cognición se basa en la especificidad del dominio. Por ejemplo, las mayores hazañas cognitivas de los animales: la elaboración de la tela de la araña o el canto de los pájaros no son producto de una inteligencia general, sino de sistemas cognitivos específicos de tareas específicas de cada dominio. De la misma manera, las capacidades perceptivas y de acción de los seres humanos no provienen de un sistema de percepción o de acción de uso general, sino de una organización de sistemas especializados distintos para percibir diferentes tipos de propiedades y la realización de patrones de actividad. Tipos de propiedades como color, profundidad, melodías, etc., y patrones de actividad como alcanzar, agarrar, masticar, etc.

El proceso de desarrollo cognitivo descrito por Piaget se caracteriza como una "reestructuración global", de dominio general, se centra en etapas que tienen por objeto caracterizar todos los aspectos del desarrollo y el aprendizaje. Por el contrario, los enfoques de dominios-específicos se centran en la descripción y explicación de los cambios que tienen lugar en el contenido y en la estructura de un conocimiento particular durante el aprendizaje (Carey, 1987).

Carey (1987) interpreta que los conceptos aprendidos son el producto de un razonamiento limitado en el sistema de conocimientos en un punto dado del desarrollo cognitivo, ya que los niños se manifiestan sobre la base de lo que ya saben. De lo anterior, Carey concluye que los niños y los adultos comparten básicamente el mismo tipo de lógica o modo de razonar, con la diferencia[5] en que tanto niños, como adultos razonan con los conceptos construidos hasta el momento. Por ejemplo, el niño razona con conceptos hasta ahora construidos de número natural y adición de números naturales, y los adultos de conceptos de número racional y adición de números racionales.

Por esta razón, Carey (1987) rechaza el enfoque general de Piaget sobre la idea de que los niños construyen formas de razonar durante cada una de las etapas dependiendo de la naturaleza lógica de las estructuras conceptuales subyacentes, y que solo los conceptos científicos se pueden adquirir en la última etapa, la de las operaciones formales. La investigadora considera que solo hay una forma de razonar tanto los niños, como los adultos, además, ella proporciona evidencias por medio de sus estudios de experimentación que los niños pequeños muestran competencia en ciertos dominios mucho antes de lo que la teoría piagetiana pronostica. Por lo tanto, Carey describió el desarrollo cognitivo en términos de una reorganización radical de los conocimientos previos, y el cambio conceptual es el resultado de un cambio de conocimiento de un concepto por otro. Para Carey y Spelke (1994), el cambio conceptual implica cambiar los principios básicos en cada sistema de conocimientos, por ende, crear nuevos principios y la creación de nuevas ontologías[6].

3.3.1 Teoría ingenua

Carey (1987) propuso esta teoría de dominio-específico para cambiar algunos aspectos relevantes de la teoría de desarrollo cognitivo de Piaget. El niño comienza con estructuras teóricas escasas sobre algunas concepciones antes de su etapa escolar. Vosniadou (1994) explica detalladamente un ejemplo sobre este tipo de teoría de dominio-específico relacionado con la creencia que tiene el niño acerca de que la Tierra es plana. El niño tiene una "geología ingenua", es decir, las concepciones son innatas, luego, a través de una reestructuración de conceptos, en sus primeras experiencias escolares, el niño crea "nuevas teorías"[7], por ejemplo: "el cielo está arriba y la Tierra está debajo del cielo". Siguiendo la idea de Carey, el niño cambiará de una teoría a otra con un dominio-específico diferente en términos de su estructura, fenómenos y conceptos individuales. Por ejemplo, en la situación descrita, el niño se encuentra en el *dominio de la planitud*, pero más tarde, el niño manifiesta

[5] Lo que hace la diferencia es el tiempo que le ha llevado a un adulto construir un conocimiento sobre un concepto comparado con el tiempo que el niño lleva a cabo ese proceso.
[6] El término "ontología" para Carey y Spelke significa el estudio de cómo se relacionan los conceptos.
[7] De acuerdo con Vosniadou, el término "teoría" se usa para designar una estructura relacional, explicativa, y no una teoría científica explícita.

que la Tierra es esférica, es decir, en ese momento el niño ya se encuentra en otro dominio, cambia del dominio de la planitud al *dominio de la gravedad*.

Carey (1987) afirma que en esta teoría de dominio-específico se va conceptualizando un conocimiento cada vez más a medida que el niño va cambiando de una teoría a otra; este proceso puede ser provocado por sus experiencias y/o por alguna instrucción, y no como resultado de las capacidades lógicas como lo propone Piaget. La autora señala que las "teorías ingenuas" consisten de ciertas explicaciones de concepciones innatas relacionadas con una ciencia, por ejemplo, una "física ingenua", una "biología ingenua", entre otras.

A diferencia de lo que propone Carey (1987), quien piensa que el cambio conceptual es radical, Vosniadou (1994) menciona que el cambio conceptual es un proceso continuo que ocurre gradualmente a medida que el estudiante reinterpreta las diferentes restricciones. Por ejemplo, en matemáticas, como se ha evidenciado en diversas investigaciones, la dificultad que enfrenta el niño para comprender el concepto de fracción se debe a que sus conocimientos se encuentran restringidos por el hecho de que él razona basándose en sus conocimientos de número natural (Stafylidou y Vosniadou, 2004).

3.4 El enfoque del marco teórico del Cambio Conceptual

El principio básico del marco teórico del Cambio Conceptual es que el individuo comienza su proceso de adquisición de conocimientos mediante el desarrollo de una teoría ingenua (Vosniadou, 2013). El estudiante tiene una teoría ingenua cuando se basa en la experiencia cotidiana y en la información procedente de la cultura, de las situaciones que lo rodean sobre algún hecho o algún concepto en particular (Vosniadou, 2002). Se podría decir que esta definición de teoría ingenua propuesta por Vosniadou no difiere mucho de la teoría ingenua propuesta por Carey, ambas teorías tratan de los conocimientos previos que tiene el estudiante, bien sean innatos, o a través de la experiencia cotidiana. Aprender ciencia requiere la restructuración fundamental de la teoría ingenua, como lo expone Vosniadou (2013), una reestructuración que se puede designar como "cambio teórico", más concretamente, se define el cambio conceptual como el resultado de un complejo proceso cognitivo y social de la teoría ingenua. "Después de todo, la ciencia actualmente aceptada es el producto de un largo proceso histórico caracterizado por cambios teóricos radicales que han reestructurado nuestras representaciones del mundo físico" (Vosniadou, 2013, p. 13).

3.4.1 Marcos explicativos iniciales - Modelos mentales

Inicialmente el conocimiento de un concepto de un estudiante está ligado a una teoría ingenua de *marcos explicativos iniciales*, según Vosniadou y Verschaffel (2004). Estos autores llaman *marcos explicativos iniciales* a los conocimientos que posee el estudiante antes y durante el aprendizaje de un concepto matemático sin que haya un cambio conceptual.

Un ejemplo de esto son los marcos explicativos iniciales de los estudiantes sobre el número natural y sus propiedades que no se modifican con la enseñanza durante los primeros años escolares hasta que se construya, por ejemplo, el significado del número fraccionario (Vamvakoussi y Vosniadou, 2007). Cabe resaltar que para Vosniadou (1994) el cambio conceptual implica reconceptualizaciones en un concepto, por ejemplo, el estudiante cuando aprende lo correspondiente al número fraccionario no dejará de lado lo que aprendió sobre los números naturales, es decir, el alumno cambia su sistema de conocimientos de acuerdo con el dominio en el que se encuentre para resolver alguna situación problema.

Los marcos explicativos iniciales no son las primeras observaciones que realiza el individuo, sino las primeras reflexiones que forman una estructura coherente y sólida sobre la naturaleza que él hace, junto con sus presuposiciones y creencias que lo rodean durante su proceso de aprendizaje (Vosniadou y Verschaffel, 2004). Siguiendo la idea a los investigadores, se puede decir que los marcos explicativos iniciales son las reflexiones que hace un individuo acerca de lo que percibe, de lo que ve, de lo que interpreta, y lo explica a su manera, con sus propias palabras.

En las ciencias, Vosniadou (1994) usa la expresión modelos mentales para referirse a un tipo especial de representación. La construcción de la expresión modelo mental ha sido utilizada por diferentes investigadores de diferentes maneras. Para Vosniadou un modelo mental es una representación que forma el alumno sobre ideas que adquiere, bien sea por experiencia o por instrucciones, pero esta representación va acompañada de presuposiciones que tiene el estudiante. La autora agrega que los modelos mentales ayudan al estudiante a proporcionar explicaciones y predicciones sobre lo que está aprendiendo.

3.4.1.1 Desarrollo de una conciencia metaconceptual

Vosniadou (1994) menciona que una *conciencia metaconceptual* es la conciencia que tiene el estudiante de que las presuposiciones y creencias que posee son hipotéticas y que limitan la forma para interpretar nueva información, es decir, el estudiante es consciente de que sus presuposiciones y creencias admiten refutación. Vosniadou pone énfasis en la importancia de enseñar ciencia de tal manera que los estudiantes se conviertan en seres capaces de ser conscientes de que sus presuposiciones no son hechos verdaderos sino hipótesis e interpretaciones teóricas que deben ser sujetos a experimentación. La autora señala que hay que estimular al estudiante para que exprese verbalmente sus explicaciones de conceptos y fenómenos que va aprendiendo, y compartir dichas explicaciones con otros estudiantes y compararlas con las opiniones de los expertos. De ahí la importancia de generar conciencia de los errores que tienen los estudiantes. La falta de conciencia metaconceptual impide que los niños cuestionen sus conocimientos previos y fomenta la asimilación de nueva información a las estructuras conceptuales existentes generando conceptos erróneos (Ioannides y Vosniadou, 1998).

3.4.3 Marcos explicativos - Modelos sintéticos: Concepciones Alternativas

A partir de las teorías ingenuas, con las presuposiciones, como indica Vosniadou (2008), el estudiante forma un sistema de conocimientos explicativo, relativamente coherente que se basa y se confirma continuamente con la experiencia cotidiana. Según Vosniadou (1994), cuando el estudiante empieza a probar sus presuposiciones y creencias, es decir, cuando va generando conciencia metaconceptual, va entendiendo nuevos fenómenos; proceso en el cual el estudiante entra en conflicto con los conceptos existentes, en consecuencia, se producen los *modelos sintéticos*.

Los modelos sintéticos son los intentos que hacen los estudiantes para mediar las presuposiciones o creencias con las opiniones científicas culturalmente aceptadas (Vosniadou, 1994). Más tarde, Vosniadou, en el año 2008, propone que los modelos sintéticos expresados por los alumnos sean conocidos a través de sus *concepciones alternativas*. Las concepciones alternativas son las concepciones que forma un estudiante cuando interpreta información científica, pero que lo lleva a crear informaciones contradictorias. Es decir, cuando la nueva información a ser aprendida es inconsistente o incompatible con los conceptos existentes, el estudiante intenta aceptar algunas afirmaciones, otras no. La autora refiere que en estas situaciones el estudiante usa sus *marcos explicativos* para describir con sus propias palabras dichas concepciones alternativas (Vosniadou, 1994, 2008).

Vosniadou y Verschaffel (2004) señalan que estos marcos explicativos ayudan a entender al educador o al experto las diferentes maneras de pensar de los estudiantes, sus conceptos individuales de acuerdo con los fenómenos que ellos mismos van adquiriendo desde instrucciones hasta teorías científicas a las que están expuestos. Los investigadores añaden que el proceso de aprendizaje de la ciencia es lento y gradual durante el cual los niños suelen agregar la nueva información científica a sus marcos explicativos iniciales, destruyendo su coherencia y creando modelos sintéticos, concepciones alternativas.

3.4.4 Modelos científicos

Finalmente, el cambio conceptual requiere cambios en las presuposiciones y creencias que el estudiante debe realizar en sus representaciones para que pueda acceder a los *modelos científicos,* como sostiene Vosniadou (2013). Por ejemplo, para que el niño asimile el concepto científico de la Tierra se requiere que realice cambios en las presuposiciones ontológicas, es decir, pasar de la categoría ontológica de “objeto físico” del concepto de la Tierra a la categoría ontológica “objeto astronómico-físico” (Vosniadou, Vamvakoussi y Skopeliti, 2008).

La reasignación de un concepto a una categoría ontológica diferente o la creación de nuevas ontologías que realiza un individuo, refiere Carey (1991), es crucial para que pueda ocurrir un cambio conceptual. Vosniadou (2013) afirma que estos cambios no ocurren de la noche a la mañana, el estudiante debe ir generando conciencia metaconceptual hasta que logre una comprensión científica de los conceptos aprendidos (ver Figura 3.1). De hecho, la autora sostiene que la fortaleza particular del enfoque del marco teórico del Cambio Conceptual es que el estudiante puede explicar la formación de concepciones alternativas a través de marcos explicativos como resultado de una instrucción y de las experiencias cotidianas.

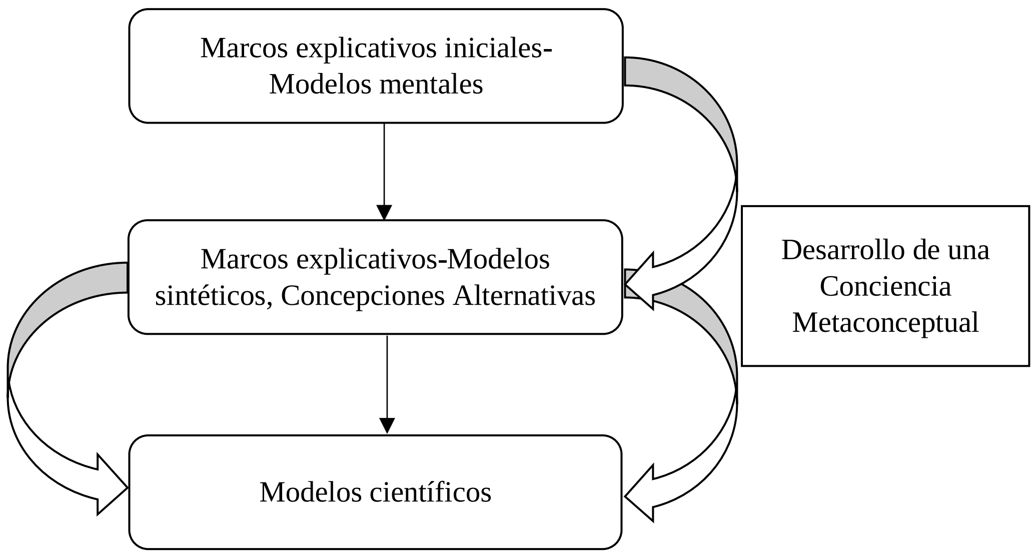


Figura 3.1 Modelización de fenómenos y conceptos
que el estudiante adquiere durante su proceso de aprendizaje

3.5 Extendiendo el enfoque del Cambio Conceptual hacia el aprendizaje de las matemáticas

Haciendo hincapié en las investigaciones en educación científica, los patrones de cambio en la historia de la ciencia estaban relacionados con los patrones de cambio en el aprendizaje de las ciencias, como la física, la biología, la mecánica, entre otras. Sin embargo, en el caso de las matemáticas se podría argumentar que la naturaleza del conocimiento matemático y su desarrollo es tal que el aprendizaje de las matemáticas no requiere un cambio radical de conceptos, sino más bien una cuestión de enriquecer el conocimiento previo (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004).

En sus primeras contribuciones sobre el Cambio Conceptual en matemáticas, Vamvakoussi y Vosniadou (2004) indican que “tradicionalmente, la matemática ha sido considerada como un dominio excepcional del conocimiento humano, con características particulares que la diferencian de cualquier otra disciplina, incluso de sus vecinas más cercanas, las ciencias naturales" (p. 454). Las autoras quisieron manifestar que una teoría en matemáticas una vez refutada no es cambiada por otra, como sí ocurre con otras ciencias. Vosniadou y Vamvakoussi señalan que esta es una de las razones por las cuales, posiblemente, los investigadores del Cambio Conceptual no relacionaban la matemática con sus estudios.

Vamvakoussi y Vosniadou (2004) citan a varios investigadores como Crowe (1975, 1992) y Kitcher (1992), quienes creen que una teoría o una declaración matemática una vez demostrada y establecida no es depuesta por otra, y permanece en el cuerpo de conocimientos de matemáticas, es decir, que las matemáticas son "acumulativas". Una situación particular es cuando el niño aprende, primero, sobre la comparación de números naturales y más adelante aprende comparación de números decimales, pero ni la comparación de números naturales, ni la de decimales sustituirá una a la otra. Según las autoras, el hecho de que las matemáticas fueran "acumulativas" para la época (década de los 70, 80), al parecer, se consideró como el principal argumento de que las matemáticas no tuviese posibilidad alguna dentro de las revoluciones científicas de la ciencia.

Kuhn (1970) eximió a las matemáticas de su análisis, estaba convencido de que no había revoluciones en ellas, no en el mismo sentido que las ciencias naturales. Por ejemplo, la física de Aristóteles no es válida en ningún contexto, mientras que la geometría euclidiana sigue siendo válida en ciertos contextos. Vamvakoussi y Vosniadou (2004) manifiestan que nuevas perspectivas de la historia de las matemáticas han revelado que los estudiantes experimentan cambios de conceptos en matemáticas que no pueden describirse en términos de "acumulación". Las autoras muestran el siguiente caso acerca del concepto de número: "el cambio del concepto pitagórico de número, a través de la teoría de las proporciones de Eudoxo, al concepto de número real propuesto por Dedekind, implica más que simplemente expandir el concepto inicial" (p. 455). Implica cambios en el significado del término "número", por ejemplo, el significado del concepto de número natural y el significado del concepto de número decimal son diferentes.

Vamvakoussi y Vosniadou (2004) argumentan que el enfoque del Cambio Conceptual puede aplicarse al aprendizaje de las matemáticas, refieren que no es necesario hablar de cambios de teorías, en lugar de ello se discute el desarrollo de los conceptos matemáticos del estudiante.

3.5.1 Del concepto de número natural al concepto de número racional

En términos de Vamvakoussi y Vosniadou (2004), investigadores en educación matemática han evidenciado que el conocimiento previo del estudiante sobre los números naturales afecta el conocimiento de los números racionales. Los estudiantes usan el conocimiento de número natural o el conocimiento de número entero para interpretar nueva información sobre los números racionales (Moskal y Magone, 2000; Resnick et al., 1989; citados por Vamvakoussi y Vosniadou, 2004). Esta perspectiva da lugar a conceptos erróneos relacionados tanto con aspectos conceptuales, como operacionales, por ejemplo, los conceptos erróneos que tienen los estudiantes relacionados con la multiplicación de fracciones (Stafylidou y Vosniadou, 2004). Fischbein (1987) expone que la principal dificultad que tienen los estudiantes sobre la propiedad de multiplicación de fracciones es la concepción errónea de que "el producto siempre se hace más grande que los factores", debido a los conocimientos que han construido sobre la multiplicación de números naturales. Vosniadou (1994) indica que estas dificultades en el aprendizaje suceden cuando el nuevo conocimiento que se adquiere entra en conflicto con lo que ya se conoce.

Reforzando lo anterior, investigadores de la psicología del desarrollo cognitivo y de la educación matemática han observado que al menos algunas de las dificultades que los niños tienen con la comprensión de las fracciones en general, podrían explicarse como resultado de un conflicto entre la nueva información y sus conocimientos previos que están relacionados con el conteo de números naturales (Stafylidou y Vosniadou, 2004).

3.5.2 Una matemática ingenua

Vosniadou y Verschaffel (2004) mencionan que no son los primeros en argumentar que puede haber discordancias y conflictos entre conceptos matemáticos avanzados y la *matemática ingenua*[8]. Vosniadou y Verschaffel relacionan la matemática ingenua con las intuiciones propuestas por Fischbein como la causa de los errores que cometen los estudiantes en su proceso de aprender matemáticas. Para Fischbein (1987), las intuiciones son creencias cognitivas caracterizadas por evidencia propia, certidumbre intrínseca y coerción, en el sentido de que son tomadas como necesariamente verdaderas, más allá de la justificación adicional. Fischbein (1987) menciona que las intuiciones no son percepciones aisladas sino extrapolables, y se caracterizan por la perseverancia y la globalidad, es decir, el ser humano permite una comprensión inmediata e integrada de una situación a través de la selección de características que se consideran relevantes. Fischbein distingue dos tipos de intuiciones en términos de su origen: las intuiciones primarias, que se desarrollan sobre la base de la experiencia cotidiana, y las intuiciones secundarias que son las intuiciones refinadas que, por ejemplo, un matemático profesional desarrolla después de una amplia formación.

"El camino más corto entre dos puntos es la línea recta", "cada número tiene un sucesor", "el todo es mayor que la parte"; son afirmaciones intuitivas que considera Fischbein (1987) como aceptadas sin necesidad de una prueba formal o empírica. Es así como los estudiantes desarrollan una matemática ingenua, una matemática que consiste de ciertos

[8] Vosniadou y Verschaffel relacionan la expresión *matemática ingenua* con las "teorías ingenuas" de Carey, es decir, la matemática ingenua trata de los conceptos de matemáticas hasta ahora construidos por el estudiante.

principios o presuposiciones fundamentales (Vosniadou, Vamvakoussi, y Christou, 2005), por ejemplo, la presuposición de la discreción del número, como se había mencionado en los inicios de este capítulo.

Los estudiantes forman un marco explicativo inicial acerca del número natural, y este marco se interpone en el camino de entender el concepto de número racional presentado a través de la enseñanza (Vamvakoussi et al., 2013). Para la comprensión del concepto del número racional, el estudiante requiere cambios en las presuposiciones sobre el concepto inicial del número natural. Investigadores señalan que los estudiantes necesitan darse cuenta de que ciertos presupuestos, como la discreción de los números, son válidos en contextos específicos (Vosniadou, 2013). Aprender acerca de los números racionales requiere que los estudiantes construyan significados para las nuevas anotaciones simbólicas, según Stafylidou y Vosniadou (2004), como las fracciones y los números decimales. Pero esta situación no es sencilla de asimilar, como lo demostraron Vamvakoussi y Vosniadou en el 2010 en su estudio, el estudiante tiene dificultades para interpretar que la notación decimal y la fraccionaria representan el mismo valor numérico en el conjunto de los números racionales. Ante esto, Vamvakoussi y Vosniadou (2010) recalcaron la importancia que diferentes notaciones simbólicas se refieren al mismo número, es decir, los números con escritura decimal y las fracciones son representaciones "intercambiables" de números racionales y no diferentes objetos matemáticos.

3.6 De la discreción a la propiedad de la densidad

Neumann (1998) realizó un estudio de investigación en 1996 acerca de las ideas de los estudiantes sobre la densidad de las fracciones en varias escuelas en Alemania. Los estudiantes eran de séptimo grado de la educación elemental que asistían a cursos de matemáticas avanzadas. Neumann elaboró una "escalera" de jerarquías de acuerdo con los resultados obtenidos en su estudio (ver Figura 3.2). En el primer nivel (de abajo hacia arriba), el estudiante no tiene conocimientos sobre las fracciones en general. En el segundo nivel, el estudiante cree que no hay números entre dos fracciones diferentes ya que piensa que estos números son naturales, y, por ende, piensa que son números consecutivos. En el tercero, el estudiante dice que hay una finitud de números en un intervalo. En el cuarto, el estudiante considera la existencia de muchas fracciones en el intervalo, pero aún no considera la infinitud. Y en el último nivel, el estudiante considera la existencia de una infinidad de números entre dos fracciones diferentes.

Una de las causas por la que el estudiante tiene dificultades respecto a la propiedad de densidad es la creencia de que las fracciones decimales y las fracciones comunes son dos tipos diferentes de números que no están relacionados. Por ejemplo, muchos estudiantes creyeron que no podía haber una fracción decimal entre $1/2 = 0.5$ y $2/3$ porque "el número 2 sigue directamente al número 1" (Neumann, 1998). El autor concluye su trabajo invitando a reflexionar a los profesores sobre la importancia de la discusión de estos errores en el aula, proporcionando ilustraciones para facilitar el aprendizaje del tema al estudiante.

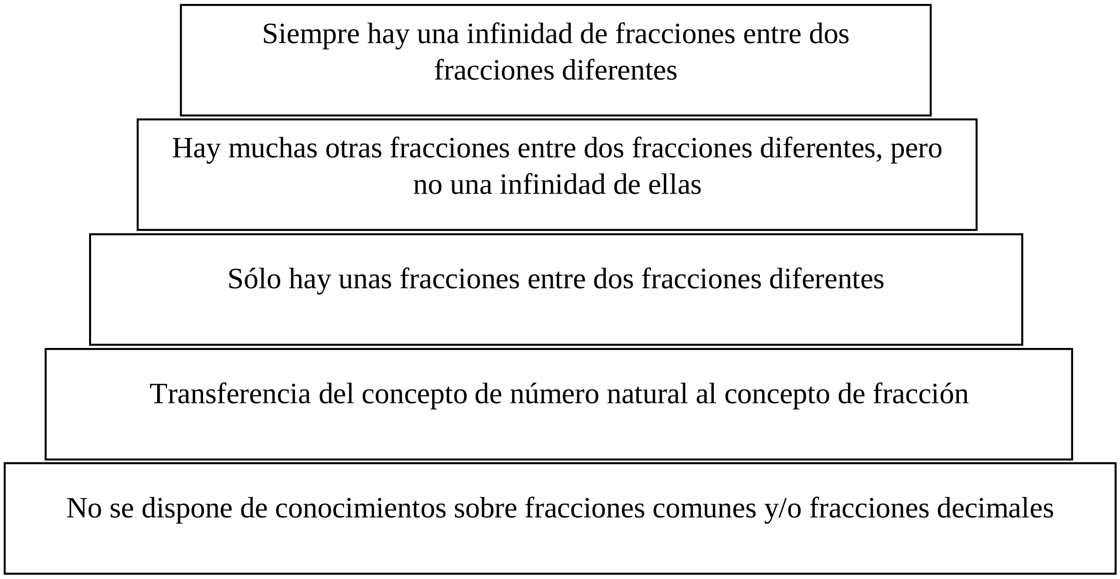


Figura 3.2 Modelización de jerarquías sobre las ideas de los estudiantes acerca de la densidad de fracciones

En el 2004, Stafylidou y Vosniadou realizaron un experimento con 200 estudiantes (entre 10 y 16 años) sobre el concepto del valor numérico de las fracciones a través de un cuestionario. Los estudiantes respondieron a preguntas relacionadas con la existencia de la fracción más pequeña y/o más grande, el ordenamiento de fracciones y las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones. De esta investigación se definieron tres marcos explicativos.

En el primer marco explicativo el estudiante tiene un sistema de conocimientos de dominio-específico número natural, debido a que trata a la fracción como número natural, además interpreta al numerador y al denominador como números independientes y asume la existencia de la fracción más pequeña como 1/1 = 1. En el segundo marco explicativo el estudiante define a las fracciones solamente como parte de un todo. Y en el último marco explicativo los estudiantes entienden la relación entre numerador y denominador, además consideran que las fracciones pueden ser pequeñas, iguales o mayores que la unidad.

Vosniadou y Vamvakoussi realizaron un experimento con 16 estudiantes de noveno grado (aproximadamente 15 años de edad) de la educación elemental en una escuela de Atenas en el 2004. El propósito principal de este estudio fue indagar los conocimientos previos de los estudiantes sobre la propiedad de densidad del conjunto de los números racionales. Las autoras asumen que la discreción de los números naturales es una presuposición fundamental que restringe la comprensión que tienen los estudiantes sobre la propiedad de densidad del conjunto de números racionales, por tanto, los estudiantes pueden cometer errores que reflejen esta presuposición.

Vamvakoussi y Vosniadou (2004), en su estudio, realizaron una entrevista con cada uno de los participantes quienes iban respondiendo un cuestionario. El cuestionario constaba de preguntas relacionadas con la densidad. Preguntas como *¿cuántos números hay entre 0.005 y 0.006?*; *¿cuántos números hay entre 5/8 y 8.5?*; *¿cuántos números hay entre 2/5 y 4/7?* Otras preguntas: *Entre el número 0.001 y el número 0.01 ¿sólo hay un número? ¿cuál?, ¿no hay otro número?, ¿cuántos números hay?* Las respuestas de los estudiantes se agruparon en cinco categorías diferentes (ver Tabla 3.1), que varían desde teorías ingenuas sobre la propiedad de densidad hasta teorías sofisticadas lo que Vosniadou (2013) llama como modelos científicos.

Tabla 3.1 Caracterizaciones del pensamiento del estudiante
con respecto a la finitud e infinitud de números en un intervalo

Discreción ingenua	Estudiantes que piensan que no hay otro número entre dos números racionales consecutivos falsos, es decir, se considera la existencia de un sucesor para un número racional.
Discreción avanzada	Estudiantes que piensan que hay un número finito de números entre dos números racionales consecutivos falsos.
Discreción-densidad	Estudiantes que interpretan que entre dos números racionales hay una cantidad infinita de números en algunos intervalos, y en otros, que hay un número finito de números intermedios.
Densidad ingenua	Estudiantes que comprenden que hay una infinidad de números en un intervalo, pero no justifican con la propiedad de densidad. Además, en esta categoría se encuentran los estudiantes que se ven afectados por la representación simbólica de los extremos del intervalo, es decir, creen que solo puede haber una infinidad de números decimales entre decimales y una infinidad de fracciones entre fracciones, pero no fracciones entre decimales o, al contrario.
Densidad avanzada	Esta categoría corresponde a una comprensión bastante sofisticada de la propiedad de densidad por el estudiante. Para ser colocado en esta categoría, el estudiante comprende que entre dos números racionales hay una infinidad de números racionales, independientemente de su representación simbólica, además, de justificar con la propiedad de la densidad.

La presuposición de la discreción se encuentra con mayor presencia en las respuestas de los estudiantes en las dos primeras categorías (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004), por lo que se evidencia un pensamiento discreto. Las autoras indican que estos estudiantes producen respuestas que se limitan a subconjuntos de números racionales que preservan la propiedad de la discreción. Por ejemplo, el conjunto de los números con una cifra decimal, es decir, el conjunto de las décimas: 0.1, 0.2, 0.3, …, 0.9, en el intervalo entre 0 y 1. En consecuencia, para los estudiantes existe una cantidad finita de números intermedios debido a que lo relacionan con el conteo de los números naturales, según manifestaciones de los estudiantes durante la entrevista realizada por las investigadoras.

Los estudiantes que se encuentran en la segunda y tercera categoría forman concepciones alternativas que pueden explicarse como modelos sintéticos, ya que reflejan la asimilación de la nueva información en estructuras de conocimientos previos, pero generando conceptos erróneos (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004). Por ejemplo, un estudiante respondió consistentemente que hay una infinidad de números entre decimales, pero dio una respuesta completamente diferente en el caso de las fracciones. Las autoras observaron que la justificación que estructuraron algunos estudiantes acerca de la infinitud de números intermedios se basó en el proceso de "agregar cifras decimales", por lo que consideraron que estos alumnos tienen un pensamiento denso avanzado.

Los resultados de la investigación hecha por Vamvakoussi y Vosniadou en el año 2004, respaldan la hipótesis de que la comprensión de la densidad es un proceso lento y gradual que está limitado por la presuposición de la discreción. Las investigadoras sugieren que la comprensión de la propiedad de densidad requiere una reorganización del conocimiento previo sobre los números naturales. Por lo tanto, es un caso de cambio conceptual en el aprendizaje de las matemáticas.

En una serie de estudios, Vamvakoussi y Vosniadou (2007, 2010) y Vamvakoussi, Christou, Mertens y Van Dooren (2011) se centraron en una diferencia importante entre los números naturales y racionales: entre dos números naturales cualesquiera existe un número finito de números (ningún número si se trata de números consecutivos). Por el contrario, los números racionales están densamente ordenados, entre dos números racionales se puede encontrar un número intermedio, lo que implica que se puede encontrar una infinidad de números intermedios. Vamvakoussi y Vosniadou plantearon la hipótesis de que la comprensión de la propiedad de densidad de los números racionales sería un proceso paulatino y que los estudiantes formarían concepciones alternativas a través de sus marcos explicativos. Las autoras utilizaron preguntas como ¿cuántos números hay entre dos números a y b?, manipulando la representación simbólica de los extremos del intervalo (números naturales, decimales, fracciones), en cuestionarios abiertos y de opción múltiple con estudiantes de secundaria.

En repetidas ocasiones, en sus estudios, Vamvakoussi y Vosniadou (2007, 2010) encontraron que la presuposición de la discreción es una limitación importante en la comprensión de los estudiantes de la densidad. De igual manera, la representación simbólica de los extremos de un intervalo afecta el juicio de los estudiantes, es decir, los estudiantes respondían que solo había decimales entre decimales y fracciones entre fracciones, pero no combinaciones, como se ha mencionado en el Capítulo 1.

Vamvakoussi et al. (2011) aplicaron la metodología propuesta por Vamvakoussi y Vosniadou a estudiantes griegos y flamencos (de Bélgica) de grado noveno de la educación secundaria (aproximadamente, 14 años de edad). Durante el proceso, los investigadores observaron que los estudiantes flamencos respondían satisfactoriamente a preguntas relacionadas con la infinidad de números intermedios en un intervalo, mientras que los estudiantes griegos presentaban dificultad para responder estas cuestiones. Según ellos, los estudiantes flamencos socializan estos temas con sus profesores a temprana edad, lo que posiblemente ayudó a responder estas preguntas.

Siguiendo las ideas de Vamvakoussi y Vosniadou (2010), los números naturales están asociados a preguntas como "cuántos", puesto que son discretos, en el sentido de que cada número natural tiene un sucesor único, mientras que los números racionales son densos y están asociados a preguntas como "cuánto". Ávila menciona que "en los decimales, al igual que en el conjunto de los racionales, no hay ni antecesor ni sucesor" (2008, p. 7), poniendo énfasis en la ubicación de números decimales en la recta para romper la idea de que los números decimales tienen antecesor y sucesor e introducir la noción de densidad al estudiante. Ávila señala que solo el 10 % de los estudiantes que presentan el examen para el ingreso a la educación secundaria, en México, responde a tareas vinculadas a la densidad y el orden entre los números decimales.

Teniendo en cuenta como base los anteriores argumentos y antecedentes, en el siguiente capítulo se plantea y se expone una propuesta didáctica en cuya puesta en marcha se espera que profesores en formación participen activamente y que en un futuro puedan llevar, modificar y aplicar las actividades diseñadas en un salón de clases con sus estudiantes.

Capítulo 4

Diseño y elaboración de una secuencia didáctica

En los siguientes apartados se describe brevemente el programa de estudios que debe llevar un estudiante para profesor de secundaria en la especialidad de matemáticas, correspondiente al plan de estudios 1999[9] de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas, de las Escuelas Normales de México. También se hace una breve descripción de la forma cómo se encuentra estructurada la temática de la densidad de los números decimales dentro del programa de estudios 2011, Guía para el Maestro de Primaria de 6to grado. Haciendo una revisión general de las guías para el maestro de primaria, así como de secundaria, la temática de la densidad de los números decimales solamente es estudiada por los alumnos en el último año de la educación básica primaria. Tomando en cuenta los resultados de esa revisión y los antecedentes mencionados en los Capítulos 1 y 3 se diseña y elabora una secuencia didáctica acerca de la densidad de los números decimales con actividades que se espera sean de interés y provean experiencias significativas para los participantes.

4.1 Características generales del Plan de Estudios 1999

Las asignaturas y actividades que conforman el mapa curricular han sido definidas a partir del perfil de un profesional de nivel superior dedicado a la docencia en la escuela secundaria (SEP, 2010). El mapa curricular abarca 8 semestres y considera tres áreas de actividades de formación: formación general, formación común y formación específica (SEP, 2010). La formación general corresponde a todo profesional de la enseñanza que realiza su labor en la educación básica, sea de primaria o de secundaria. La formación común es para todas las especialidades de secundaria. La formación específica está referida a los contenidos y competencias didácticas requeridas por cada especialidad.

La educación básica en México, de acuerdo con lo que establecen el Artículo Tercero Constitucional y la Ley General de Educación, es nacional porque contribuye a la formación de la identidad de los alumnos, además, es un medio para promover la igualdad de oportunidades a través del acceso de todos los niños y adolescentes del país a la diversidad

[9] El programa de estudios 1999 se encuentra vigente.

cultural y las competencias que les permitan una participación en la vida social (SEP, 2010). Es así como la formación de los profesores, en virtud del papel fundamental que éstos desempeñan en la educación de niños y adolescentes, debe corresponder a las finalidades y los contenidos que la legislación educativa le asigna a la educación básica (SEP, 2010). De igual manera, el ejercicio de la profesión de educador requiere de un conocimiento firme de los contenidos del campo disciplinario de la asignatura que impartirá en la educación secundaria, así como el dominio de las habilidades, los métodos y los recursos adecuados para favorecer el aprendizaje de los alumnos (SEP, 2010). Por ello, es fundamental que un profesor en formación con especialidad en matemáticas adquiera una clara comprensión de contenidos para una enseñanza sólida, a través de actividades y talleres lúdicos que promuevan un enriquecimiento de sus conocimientos.

Tabla 4.1 Programa de estudios 1999 (tomado de SEP, 2010, pág. 40)

<table>
<tr><th>Primer Semestre</th><th>Segundo Semestre</th><th>Tercer Semestre</th><th>Cuarto Semestre</th><th>Quinto Semestre</th><th>Sexto Semestre</th><th>Séptimo Semestre</th><th>Octavo Semestre</th></tr>
<tr><td>Bases filosóficas, legales y organizativas del sistema educativo mexicano</td><td>La educación en el desarrollo histórico de México I</td><td>La educación en el desarrollo histórico de México II</td><td>Seminario de temas selectos de historia de la pedagogía y la educación I</td><td>Seminario de temas selectos de historia de la pedagogía y la educación II</td><td>Seminario de temas selectos de historia de las matemáticas</td><td rowspan="5">Trabajo Docente I</td><td rowspan="5">Trabajo Docente II</td></tr>
<tr><td>Estrategias para el estudio y la comunicación I</td><td>Estrategias para el estudio y la comunicación II</td><td>La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones básicas II</td><td>Figuras y cuerpos geométricos</td><td>Medición y cálculo geométrico</td><td>Seminario de temas investigación en educación matemática</td></tr>
<tr><td>Problemas y políticas de la educación básica</td><td>La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones básicas I</td><td>Pensamiento algebraico</td><td>Plano cartesiano y funciones</td><td>Procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencia</td><td>Tecnología y didáctica de las matemáticas</td></tr>
<tr><td>Propósitos y contenidos de la educación básica I (Primaria)</td><td>Introducción a la enseñanza de las matemáticas</td><td>Los números y sus relaciones</td><td>Procesos de cambio o variación</td><td>Escalas y semejanza</td><td>La predicción y el azar</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Desarrollo de los adolescentes I. Aspectos generales</td><td>Propósitos y contenidos de la educación básica II (Secundaria)</td><td>La expresión oral y escrita en el proceso de enseñanza y de aprendizaje</td><td>Planeación de la enseñanza y evaluación del aprendizaje</td><td>Opcional I</td><td>Presentación y tratamiento de la información</td></tr>
<tr><td>Desarrollo de los adolescentes II. Crecimiento y sexualidad</td><td>Desarrollo de los adolescentes III. Identidad y relaciones sociales</td><td>Desarrollo de los adolescentes IV. Procesos cognitivos</td><td>Atención educativa a los adolescentes en situaciones de riesgo</td><td>Opcional II</td><td rowspan="2">Taller de diseño de propuestas didácticas y análisis del trabajo I</td><td rowspan="2">Taller de diseño de propuestas didácticas y análisis del trabajo II</td></tr>
<tr><td>Escuela y contexto social</td><td>Observación del proceso escolar</td><td>Observación y práctica docente I</td><td>Observación y práctica docente II</td><td>Observación y práctica docente III</td><td>Gestión escolar
Observación y práctica docente IV</td></tr>
</table>

4.1.1 Programa de estudios

En esta sección se describe a grandes rasgos el mapa curricular del programa de estudios 1999 que deben llevar a cabo los profesores en formación con especialidad en matemáticas (ver Tabla 4.1). La parte sombreada de esa tabla corresponde a las asignaturas de la formación específica, en este caso, matemáticas. La sección de la tabla en la que hay letra cursiva es lo concerniente a la formación común para todas las especialidades de secundaria. Por último, las demás asignaturas del plan de estudios corresponden a las materias de formación general que deben llevar tanto futuros maestros de primaria, como de secundaria.

Respecto al proyecto de investigación descrito en esta tesis, el estudio de la propiedad de densidad de los números decimales requiere que los profesores en formación reflexionen sobre variados temas. Temas como el significado de los números, las diferentes formas de representarlos y las relaciones entre ellos (como han evidenciado investigadores, ver sección 3.5.2 del Capítulo 3). Estos requerimientos, los cuales un profesor en formación debe tener en cuenta para una comprensión de la propiedad de densidad, se reflexiona hasta el tercer semestre con la asignatura *Los números y sus relaciones* (ver cuadro resaltado de la Tabla 4.1).

Bloque III. Números racionales

Temas

1. Lectura y escritura de números decimales y su representación en la recta numérica.
2. Operaciones con decimales (cálculo mental, algoritmos y aproximaciones).
3. Decimales periódicos.
4. Diferentes representaciones de los números racionales: decimales, cociente de enteros y por ciento.
5. Propiedades de las operaciones en los números racionales.
6. Orden en los números racionales.
7. Uso de números racionales para representar cantidades en la recta numérica.
8. Uso de las propiedades asociativa y distributiva de las operaciones para simplificar cálculos.

Figura 4.1 Bloque 3 del programa de estudios del 3er semestre: Los números y sus relaciones (tomado de SEP, Matemáticas, 2002, pág. 15)

Según el bloque III del programa de estudios de tercer semestre, *Los números y sus relaciones* (SEP, 2002), los profesores en formación en secundaria con especialidad en matemáticas estudian tópicos relacionados con los números decimales, así como representaciones, propiedades y orden de los números racionales, y representaciones en la recta numérica (ver Figura 4.1). Se observa que en este bloque no aparece de forma explícita la propiedad de densidad de los números decimales, o al menos la propiedad de densidad de los números racionales. No obstante, puede que los profesores en formación estudien en el aula esta propiedad cuando se socializan temas como representaciones en la recta numérica y/o el orden de los números racionales.

4.2 Ubicación del tema de densidad dentro del programa de estudios 2011

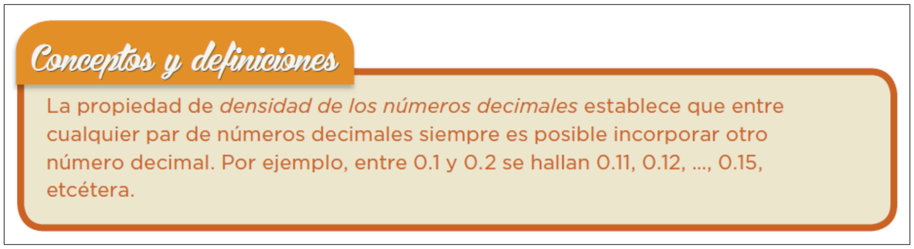
El tema de densidad de números decimales no está dentro del programa de estudios para estudiantes de secundaria, solo se encuentra en el programa de estudios para alumnos de primaria. Sin embargo, como en el caso anterior, con los estudiantes para profesor en la Normal, se cree que la temática es vista cuando el alumno de secundaria estudie el orden de los números decimales y/o fracciones. Aunque la población de la investigación cuyo informe es esta tesis son profesores en formación de secundaria, se considera relevante mostrar cómo se encuentra estructurado el tema dentro del plan de estudios para primaria, como un posible acercamiento de lo que se pudiera hacer en la enseñanza con estudiantes de secundaria en el país, al menos con los alumnos de primer año.

La propiedad de densidad se encuentra localizada en el eje *Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico* del bloque III del plan de estudios de matemáticas de la SEP del año 2011, Guía para el Maestro de Primaria (ver Figura 4.2). En este eje, precisamente uno de sus propósitos es la exploración de las propiedades de los números, por tanto, la exploración de la propiedad de densidad.

Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Utiliza el sistema de coordenadas cartesianas para ubicar puntos o trazar figuras en el primer cuadrante. • Resuelve problemas que implican conversiones del Sistema Internacional (SI) y el Sistema Inglés de Medidas. • Resuelve problemas que involucran el uso de medidas de tendencia central (media, mediana y moda).	Números y sistemas de numeración • Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales. • Determinación de múltiplos y divisores de números naturales. Análisis de regularidades al obtener los múltiplos de dos, tres y cinco.	Ubicación espacial • Representación gráfica de pares ordenados en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas cartesianas. Medida • Relación entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y las unidades más comunes del Sistema Inglés. • Comparación del volumen de dos o más cuerpos, ya sea directamente o mediante una unidad intermediaria.	Proporcionalidad y funciones • Comparación de razones en casos simples. Análisis y representación de datos • Uso de la media (promedio), la mediana y la moda en la resolución de problemas.

Figura 4.2 Bloque 3 del programa de estudios 2011
(tomado de SEP, Matemáticas, 2011, pág. 77)

Esta temática corresponde solamente a una unidad del texto Desafíos Matemáticos, libro para el maestro de 6to de primaria (ciclo escolar 2016-2017). La unidad se titula como *¿Cuál es el sucesor?*, y contiene tres actividades relacionadas con la ubicación de naturales y decimales en un intervalo, representado en una recta numérica; también incluye cuestionamientos para los alumnos sobre la existencia de un sucesor y antecesor de los números decimales. Finalmente, los estudiantes socializan la propiedad de densidad de los números decimales que aparece escrita en el texto (ver Figura 4.3).



Conceptos y definiciones

La propiedad de *densidad de los números decimales* establece que entre cualquier par de números decimales siempre es posible incorporar otro número decimal. Por ejemplo, entre 0.1 y 0.2 se hallan 0.11, 0.12, ..., 0.15, etcétera.

Figura 4.3 Propiedad de densidad de los decimales, Desafíos Matemáticos (tomado de SEP, Matemáticas, ciclo escolar 2016-2017, pág. 117)

4.3 Diseño y elaboración de una secuencia de actividades

Tomando como referencia el problema de investigación (Capítulo 1), el componente formal, los antecedentes planteados en los Capítulos 1 y 3, y la revisión general de los programas de estudios mostrados en este capítulo, se dio paso al diseño y elaboración de una propuesta didáctica. Las situaciones que en ella se proponen pretenden ubicar al profesor en formación en contextos y ejemplos en los que se espera que pueda apreciar el significado de la propiedad de densidad de los números decimales, actividades en las que se ponga de manifiesto que siempre se puede hallar un número decimal en un intervalo dado.

El desarrollo de la experimentación educativa a través de la propuesta didáctica consta de dos etapas. La primera, la aplicación de un cuestionario como diagnóstico, y la segunda, la interacción con los profesores en formación durante la puesta en marcha de la secuencia didáctica. El diseño y elaboración del cuestionario como diagnóstico se describe en el Capítulo 5 junto con los marcos explicativos iniciales de los profesores en formación. Cabe mencionar que el cuestionario se aplicó en la primera sesión del taller, antes de iniciar la segunda etapa.

A través del estudio de la secuencia didáctica se quiere que los profesores en formación –especialmente aquellos que tienen dificultades– se apropien de una conciencia metaconceptual sobre sus concepciones relacionadas con la discreción y la densidad de los números decimales, y así promover un cambio conceptual. Vamvakoussi et al. (2013) refieren que el cambio conceptual a través de una instrucción o de una enseñanza es un proceso largo y difícil, porque no solo involucra la reorganización de una concepción sino de todo un sistema de conocimientos. No obstante, los autores indican que se puede lograr un cambio conceptual paulatinamente con los siguientes criterios a través de una instrucción: (a) una exploración profunda de los conceptos a aprender, (b) tener en cuenta el conocimiento previo del estudiante, (c) facilitar una conciencia metaconceptual, (d) proporcionar experiencias significativas, y (e) fomentar el uso de diversas representaciones ya sean gráficas, escritas, o hechas con recursos digitales.

Para poder conocer el pensamiento de un estudiante no basta con cuestionarios de papel y lápiz, como lo afirma Clement (2000), ya que solo se pueden conocer aspectos académicos, pero no se puede alcanzar a visualizar elementos claves y profundos del pensamiento del estudiante; por ello, la importancia de que el profesor en formación "piense en voz alta" en el taller. Para Clement, este tipo de actividades, las de pensar en voz alta, hace que el investigador pueda recopilar explicaciones orales para analizar con mayor profundidad esta información. Igualmente, Pozo et al. (2006) señalan la importancia de combinar varias metodologías como el cuestionario, la observación y actividades relacionadas con el pensamiento en voz alta para poder acceder a las distintas concepciones del estudiante. Pozo y sus colegas indican que de esta manera se consigue una mejor comprensión de las manifestaciones del alumno.

La convocatoria para participar en el taller se hizo en la Escuela Normal Superior de México, en Ciudad de México, en la jornada matutina para profesores en formación de matemáticas de la educación básica secundaria. Se repartieron 50 volantes (ver la convocatoria en el Anexo) invitando a los profesores en formación a hacer partícipes del taller. La secuencia didáctica está estructurada en cuatro sesiones, cada sesión tiene una duración de dos horas, las cuales se llevaron a cabo en una de las aulas de cómputo del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Se utiliza un video proyector para que los profesores puedan leer las instrucciones de las actividades, así mismo, cada uno tendrá acceso a una computadora y hojas de trabajo; también se cuenta con una cámara de video y un celular para capturar sus manifestaciones, opiniones e inquietudes.

4.3.1 Primera sesión: Actividades iniciales

La primera sesión consiste en brindar al profesor en formación un primer acercamiento a la propiedad de densidad de los números decimales de una manera sencilla que tenemos los seres humanos que es a través de los sentidos. Este acercamiento se realiza por medio de dos actividades: actividad con ligas y con globos. También se hará una actividad con GeoGebra.

La actividad con ligas surge de la actividad propuesta por Vamvakoussi y Vosniadou (2012) en la cual se intenta construir la noción de densidad en un contexto geométrico (una infinidad de puntos en un segmento de línea recta) utilizando la correspondencia punto-número, a través de una liga. Así mismo se intenta transmitir la idea del "no sucesor". Vamvakoussi y Vosniadou se basan en uno de los aportes de matemáticos como Cantor y Dedekind, precisamente, el de la correspondencia uno a uno entre números reales y puntos en una línea. Es así como se elabora también, la actividad con globos y la actividad hecha usando GeoGebra.

4.3.1.1 Actividad con ligas y globos

Se dibujarán dos puntos negros en una liga, no muy separados (ver Figura 4.4). Luego, se observará que los puntos negros se alejan cada vez más a medida que se va estirando la liga. Esta actividad muestra cómo en un contexto geométrico el profesor en formación puede visualizar que habrá cada vez más espacio entre los dos puntos negros, que lo puede conducir a pensar que encontrará cada vez más puntos entre ellos. El profesor en formación puede dibujar puntos negros dentro de los dos extremos y apreciar mejor cómo cada punto se va alejando uno del otro.

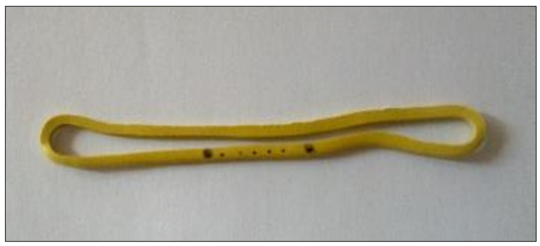


Figura 4.2 Liga con puntos dibujados

La actividad con globos es similar a la de las ligas. Se dibujarán dos puntos negros en un globo, no muy separados, seguidamente, se inflará y se observará cómo los puntos negros se alejan uno del otro. El profesor en formación puede llegar a pensar, en un contexto geométrico, que habrá más y más puntos entre los dos puntos negros.

4.3.1.2 Actividad usando GeoGebra: Puntos en un segmento

Los profesores en formación harán uso de un programa elaborado en GeoGebra en el que observarán y manipularán un segmento de puntos (ver Figura 4.5). El propósito de esta actividad es que el profesor en formación visualice que cada vez hay más puntos en el segmento a medida que va aumentando la cantidad de estos con ayuda del deslizador. Cabe aclarar que los puntos se reparten equitativamente sobre el segmento. Otra finalidad es que el profesor en formación observe que cuando hay muchos puntos, tantos que se parecen al "mismo segmento" (ver recuadro de la derecha de la Figura 4.5), pueda notar que no hay un espacio vacío entre los puntos, así mismo, puede conducir al hecho de que un punto no tiene un "único punto siguiente".

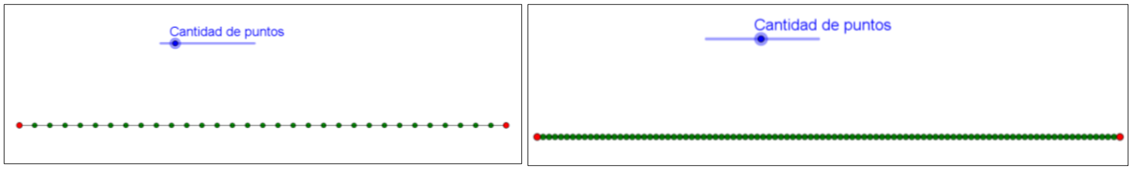


Figura 4.5 Actividad en GeoGebra: Puntos en un segmento

Se harán cuestionamientos como los siguientes:

- Si dividimos el segmento en dos partes, ¿cuántos puntos hay en el intervalo?
- Si dividimos el segmento en tres partes, ¿cuántos puntos hay en el intervalo?
- Si dividimos el segmento en cuatro partes, ¿cuántos puntos hay en el intervalo?

Hasta que finalmente se socializará sobre la posibilidad de una división del segmento de recta en infinidad de partes y se preguntará por la cantidad de puntos que habrá en el medio, en este caso, una infinidad.

4.3.2 Segunda sesión: Actividades relacionadas con sumas y restas

En esta segunda sesión se diseñan y se elaboran dos actividades que surgen de las actividades planteadas por Broitman y sus colegas (2003). Los investigadores sugieren que la enseñanza del concepto de número decimal requiere también de situaciones que van más allá de ella, es decir, situaciones que permitan no solo ver operaciones, valor posicional, comparación, representaciones en la recta numérica, sino también un acercamiento al concepto de densidad. Los autores refieren que la densidad de los números decimales (y en general la de los números racionales) no es vista en las escuelas por lo que recalcan la consolidación de ejercicios adecuados para que un estudiante pueda estudiar el tema.

4.3.2.1 Actividad 1: Jugando a la mayor cantidad de sumandos

Instrucciones: La docente anotará un número entre 0 y 10 en el pizarrón e indicará a los profesores en formación que deben sumar –partiendo del número escrito en el pizarrón– durante un minuto la mayor cantidad de números posibles, diferentes, hasta obtener una suma menor o igual a 10. Se les entregará a los profesores en formación antes de iniciar el juego una hoja de trabajo para que puedan escribir los sumandos y realizar la respectiva suma.

Con esta actividad se quiere ver la destreza que tiene el profesor en formación para realizar subdivisiones entre 0 y 10, o realizar descomposiciones, que le permita cumplir con lo propuesto. El estudiante para profesor puede iniciar con números naturales, pero llegará un momento en que deberá usar décimos, centésimos, milésimos, etc. para aumentar el número de sumandos. De esta forma, se espera que el profesor en formación amplíe su sistema de conocimientos en el dominio de número decimal a través de los valores posicionales de los números decimales, en consecuencia, un acercamiento a la propiedad de densidad.

4.3.2.2 Actividad 2: Juego de sumas y restas

En un principio la actividad se llevará a cabo en parejas, después en grupo con todos los profesores en formación.

Instrucciones:

1. Un profesor (profesor 1) debe decir un número entre 0 y 5 y lo anota en la tabla que aparece a continuación. Mientras el otro profesor (profesor 2) debe decir un número entre 5 y 10 y también lo anota en la tabla en la columna correspondiente. Si el profesor 1 elige el número 5 el otro profesor no lo puede elegir.

2. El profesor 1 debe sumar un número positivo al número que eligió de tal manera que su suma sea estrictamente menor que el número escrito por el profesor 2, y anota la suma en la siguiente fila de la columna correspondiente de la tabla. Seguidamente, el profesor 2 debe restar un número positivo al número que eligió de tal manera que la resta sea estrictamente mayor que la suma escrita por el profesor 1, y también escribe la resta en la fila y columna correspondientes de la tabla.

3. El juego continúa de la misma forma, es decir, el profesor 1 suma un número positivo al resultado de la suma anterior de tal manera que la nueva suma sea estrictamente menor que la última resta escrita por el profesor 2, y, el profesor 2 resta un número positivo al resultado de la resta anterior de tal manera que la nueva resta sea estrictamente mayor que la última suma escrita por el profesor 1.

4. Los sumandos y los sustraendos deben ser números diferentes (no se pueden repetir).

   Se muestra un ejemplo en la Tabla 4.2 de lo que se espera que hagan los profesores en formación. Se observa cómo se van acercando los resultados de las operaciones (en negrita) a un "mismo número", pero nunca llegarán a ser iguales porque las reglas no lo permiten. De esta manera se evidencia un acercamiento a la propiedad de densidad de los números decimales en el sentido en que se está encontrando cada vez más números distintos –en los resultados de las operaciones– a medida que va ampliando la cantidad de cifras decimales.

   Inmediatamente se hará la actividad grupal donde cada uno de los participantes pasará, por turnos, al pizarrón (en el cual estará la tabla anterior) a escribir la suma o resta correspondiente.

Tabla 4.2 Un ejemplo de la Actividad 2: Juego de sumas y restas

Profesor 1 (0 y 5)	Profesor 2 (5 y 10)
2	***5***
2 + 1 = ***3***	*5 – 0.5 =* ***4.5***
3 + 0.6 = ***3.6***	*4.5 – 0.1 =* ***4.4***
3.6 + 0.2 = ***3.8***	*4.4 – 0.01 =* ***4.39***
3.8 + 0.02 = ***3.82***	*4.39 – 0.03 =* ***4.36***
3.82 + 0.04 = ***3.86***	*4.36 – 0.05 =* ***4.31***
3.86 + 0.06 = ***3.92***	*4.31 – 0.07 =* ***4.24***
3.92 + 0.08 = ***4.00***	*4.24 – 0.09 =* ***4.15***
4.00 + 0.001 = ***4.001***	*4.15 – 0.002 =* ***4.148***
4.001 + 0.003 = ***4.004***	*4.148 – 0.004 =* ***4.144***

4.3.3 Tercera sesión: Actividades relacionadas con intervalos

Para el tercer día del taller se realizan actividades relacionadas con la ubicación de un número en un intervalo. Las actividades surgen de una planteada por Centeno (1997). Ella diseña una actividad en la que el alumno debe buscar un número que es “pensado” o “escondido” por su compañero y para ello va elaborando preguntas con la intención de encontrar dicho número pensado o escondido.

4.3.3.1 Actividad 3: Encuadrar un número decimal entre dos números cuyas cifras decimales sean consecutivas

Inicialmente la actividad se hará en parejas. Un profesor (profesor 1) anota un número decimal en una hoja sin mostrarlo a su compañero (profesor 2), y éste debe encontrar el “intervalo cerrado” entre dos números cuyas cifras decimales sean consecutivas para “encuadrar” el número escondido por su compañero.

Para lograr lo anterior, después de que el profesor 1 anote su número en la hoja, el profesor 2 puede iniciar con intervalos cualesquiera y el profesor 1 dirá: “el número está dentro de ese intervalo” o “el número no está dentro de ese intervalo”, y si su compañero menciona el intervalo donde está el número, el otro puede decir: “di un intervalo más pequeño”. Y así sucesivamente hasta encontrar el intervalo entre dos números decimales cuyas cifras decimales sean consecutivas.

Una situación hipotética: el profesor 1 pensó en el número “3.54”, el profesor 2 puede preguntar si el número se encuentra en el intervalo [3.3,3.7], a lo que el profesor 1 le responderá que sí pero que debe decir un intervalo más pequeño, ya que las cifras decimales *de los extremos del intervalo no son consecutivas, entonces su compañero puede preguntar si el número está en el intervalo [3.5,3.6]. Finalmente, el profesor 1 le dirá que sí. En este ejemplo se observa que las cifras decimales de los extremos del último intervalo son consecutivas por lo que se acaba el juego.*

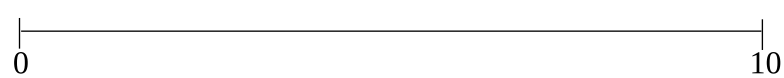
Terminada la sesión por parejas se llevará a cabo la actividad con todos los profesores en formación donde uno de ellos será quien anote el número sin mostrarlo a sus compañeros quienes tratarán de acertar el intervalo cerrado. Como guía, cada profesor anotará en una hoja de trabajo los intervalos que se vayan mencionando.

En la sesión de parejas se hará la recomendación a los participantes que inicien con un número escondido de una sola cifra decimal en el intervalo cuyos extremos sean números naturales consecutivos. Posteriormente, el número puede tener más valores posicionales, por ejemplo, un número escondido de tres cifras decimales cuyo intervalo, que lo encierra, tenga en sus extremos números con dos cifras decimales consecutivas.

Es así como se espera que el estudiante para profesor tenga un acercamiento a la propiedad de densidad por medio del proceso de aumentar la expansión decimal en los extremos del intervalo dependiendo de la cantidad de cifras que tiene el número escondido.

4.3.3.2 Actividad 4: Buscar el número pensado

La actividad se hará con todos los profesores en formación. Un profesor dice: "estoy pensando un número entre 0 y 10" y escribe el número decimal en una hoja sin mostrarlo. Cada profesor, en una hoja de trabajo, representará los números y los intervalos en el segmento de 0 a 10 que van diciendo sus compañeros y les podrá servir como guía para encontrar el número pensado.



Los profesores pueden usar expresiones como las siguientes para acertar el número pensado:

"*¿el número pensado está en el intervalo entre 0.5 y 3?*"
"*¿el número pensado es el 5.73?*"
"*¿el número pensado tiene tres cifras decimales?*", entre otras expresiones.

Las actividades 3 y 4 son acercamientos a la propiedad de densidad en el sentido análogo de que se puede encuadrar un número con un intervalo, dado que entre dos números se puede identificar un número decimal. Se espera que estas actividades sean productivas para los profesores en formación que les permita tener una mejor comprensión de la temática por medio del proceso de agregar dígitos en la parte decimal de los extremos del intervalo.

4.3.4 Cuarta sesión: Actividades relacionadas con la propiedad de comparación de números decimales

Las actividades de esta sesión se basaron en una de las actividades propuestas por una profesora en formación de la investigación hecha por Castillo (2015), en la que el objetivo es la comprensión de la propiedad de densidad de los números decimales a través de la propiedad de comparación. Previamente a la puesta en marcha de las dos actividades para este día, se presentan los applets elaborados por una profesora de primaria de Croacia.

4.3.4.1 Actividad con los applets de Antonija Horvatek

A los participantes del taller se les muestran los *Math Applets*[10] elaborados por una profesora croata de primaria, *Antonija Horvatek*, con el fin de que niños y jóvenes usen herramientas tecnológicas para un mejor entendimiento de variados temas de las matemáticas.

La interacción con los dos primeros applets del bloque *Decimal numbers* de la página web creada por Horvatek será la dinámica de la misma. El primer applet corresponde a particiones iguales en un segmento con sus correspondientes números decimales. Allí aparecen tres secciones, la primera se trata de la división del segmento entre números naturales consecutivos, la segunda sección, la división del segmento entre décimos consecutivos, y la última, la división del segmento entre centésimos consecutivos.

El segundo applet del bloque *Decimal numbers* contiene tres secciones correspondientes a localizaciones de decimales en la recta numérica. En la primera sección se ubican décimos, en la segunda, centésimos, y en la tercera, milésimos. En la Figura 4.6 se aprecia un ejemplo de la tercera sección de este applet.

El propósito del uso de los applets por los profesores en formación, además de la interacción y exploración de los mismos, es una mejor visualización –a través del proceso de desglosar intervalos– el hecho de que siempre se pueden encontrar números entre dos decimales (ver Figura 4.6). Cabe aclarar que el programa muestra aleatoriamente números hasta tres cifras decimales, por ello el usuario no puede digitar el número que desee.

[10] En este link se encuentra los applets elaborados por Antonija Horvatek: http://www.antonija-horvatek.from.hr/applets/math-applets.htm

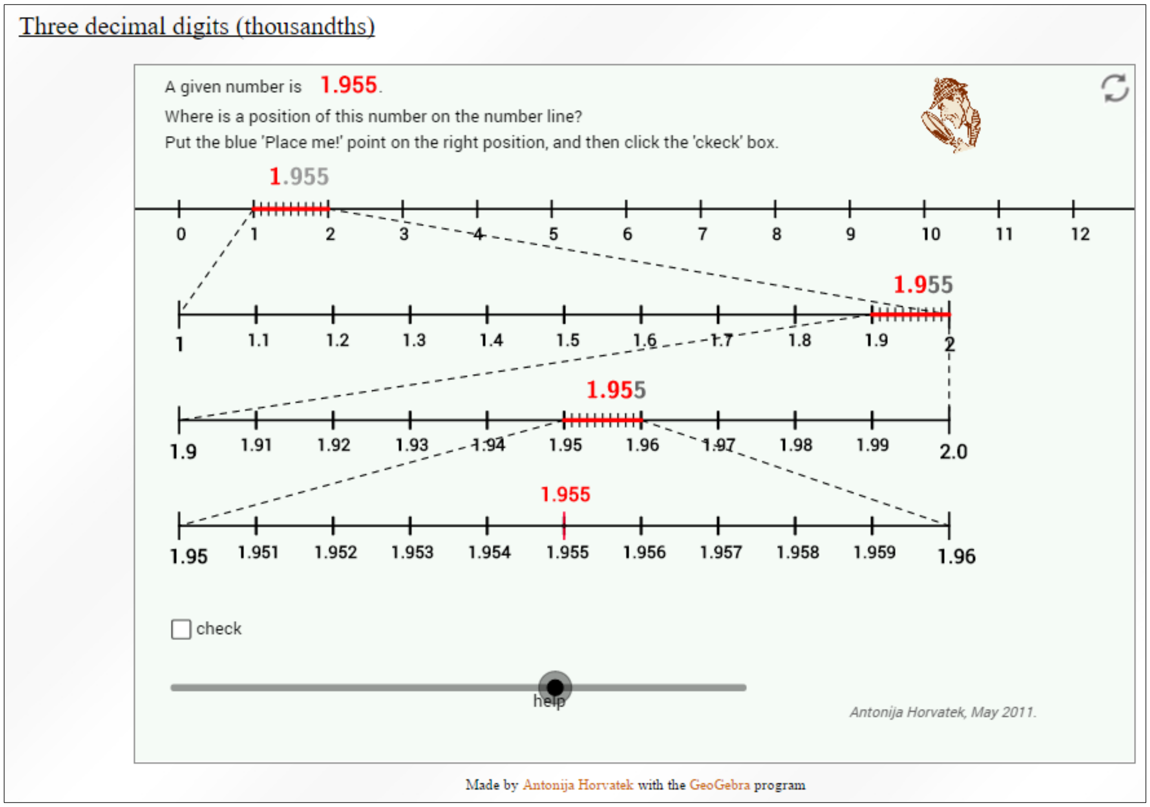


Figura 4.6 Tercera sección del 2º applet elaborado por Horvatek
del bloque *Decimal numbers*

4.3.4.2 Actividad 5: Jugando a la fila de números

La actividad se organiza en parejas de profesores en formación, cada una recibirá una hoja de papel en el que aparece escrito un "intervalo". Seguidamente, la docente va sacando, de un sobre, números (escritos en fragmentos de papel) que tienen de cero hasta seis cifras decimales para que cada pareja esté atenta en recibir los números comprendidos en el intervalo que poseen. En la Figura 4.7 se muestra los intervalos con sus respectivos números comprendidos en ellos.

[21, 21.000099] 21 21.000009 21.00003 21.000038 21.000039 21.00004 21.000098 21.000099	[21.0001, 21.00069] 21.0001 21.00011 21.000111 21.000112 21.0002 21.000215 21.000599 21.00069	[21.0007, 21.0021] 21.0007 21.001 21.0011 21.0017 21.00175 21.0018 21.002 21.0021
[21.00999, 21.09] 21.00999 21.0199 21.04 21.04111 21.049 21.05 21.089 21.09	[21.098, 21.95] 21.098 21.8 21.855 21.889 21.89 21.9 21.949 21.95	[21.98, 22] 21.98 21.984 21.99 21.99001 21.9901 21.991 21.9912 22

Figura 4.7 Intervalos con sus respectivos números comprendidos, *Actividad 5*

4.3.4.3 Actividad 6: Juego de menores y mayores

En una hoja de trabajo, cada profesor, de manera individual, anotará un número en cada cuadro en blanco de tal manera que se cumpla la ordenación que aparece en la Figura 4.8. Posteriormente, los profesores en formación pasarán al pizarrón a escribir sus correspondientes números formando una sola fila de números ordenados.

$$30.87 < \boxed{\qquad\qquad} < 30.871 < \boxed{\qquad\qquad} < 30.8711 < \boxed{\qquad\qquad} < 30.8712$$

$$< \boxed{\qquad\qquad} < 30.871201 < \boxed{\qquad\qquad} < 30.87125 < \boxed{\qquad\qquad} < 30.872$$

$$< \boxed{\qquad\qquad} < 30.8721 < \boxed{\qquad\qquad} < 30.87213 < \boxed{\qquad\qquad} < 30.88$$

Figura 4.8 *Actividad 6: Juego de menores y mayores*

Las actividades 5 y 6 son acercamientos a la propiedad de densidad a través de la comparación de números decimales, en la que dado cualquier par de números –uno menor que el otro– se puede hallar un número más grande que el menor, pero más pequeño que el mayor, y así sucesivamente. De igual manera, se muestra la idea de la no existencia de un sucesor de un número decimal.

En el siguiente capítulo se expondrán los marcos explicativos iniciales de los profesores en formación con respecto a la discreción y densidad de los números decimales.

Capítulo 5

Marcos explicativos iniciales acerca de la propiedad de densidad

Los investigadores interesados en los marcos explicativos en el aprendizaje de las matemáticas sugieren una instrucción o enseñanza en la que el estudiante pueda expresar críticamente sus concepciones alternativas o conocimientos previos (Vamvakoussi et al. 2013). En consecuencia, es importante desarrollar técnicas e instrumentos para identificar y analizar estas concepciones alternativas o conocimientos previos que tienen los profesores en formación. Algunas de las técnicas más empleadas en la investigación de los conocimientos previos son: entrevistas (grabaciones de audio) y cuestionarios de papel y lápiz. En el estudio descrito en este documento, además del cuestionario de papel y lápiz, se hace una entrevista con la finalidad de aclarar algunos puntos de vista escritos por los profesores en formación al responder las preguntas del cuestionario.

Los estudiantes para profesor respondieron el cuestionario previamente a la apertura de la secuencia didáctica. Asistieron 13 profesores en formación al inicio, no obstante, fueron 10 quienes permanecieron durante las cuatro sesiones del taller. Vamvakoussi y sus colegas (2013) señalan la importancia de un proceso constante por parte del estudiante en una instrucción para que logre reconceptualizar algunas concepciones alternativas. De aquí la importancia de solo tomar en cuenta en el análisis de los datos a los participantes que asistieron a las sesiones de la secuencia didáctica en su totalidad. Se quiere aclarar que durante el análisis de las respuestas de los profesores en formación al cuestionario se usó la expresión concepción alternativa (ver sección 3.4.3 del Capítulo 3) para referir aquella concepción que tiene un aspirante a profesor sobre un concepto específico, en la que ha influido su propio aprendizaje, así como la enseñanza de sus maestros durante los años de escolaridad anteriores.

5.1 Objetivo del cuestionario

Las preguntas del cuestionario que se aplicó a los profesores en formación antes de iniciar la secuencia didáctica fueron diseñadas con un objetivo:

- Caracterizar los marcos explicativos iniciales de los profesores en formación con el fin de identificar sus conocimientos previos o concepciones alternativas sobre el concepto de la propiedad de densidad de los números decimales.

5.2 Preguntas del cuestionario

El cuestionario tiene 11 situaciones referidas a nociones sobre la propiedad de densidad de los números racionales, en particular de los números decimales y de las fracciones, y sobre la discreción de los naturales. Uno de los aspectos claves a tener en cuenta en el aprendizaje de la propiedad de densidad es que el estudiante tenga una comprensión de que un número racional tiene representaciones en escritura decimal y fraccionaria (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Esto requiere entender las diferentes representaciones de los números racionales y la forma en que se relacionan entre sí, así como las interrelaciones entre los diversos subconjuntos de los números racionales. Por ejemplo, una relación que hay entre un número decimal finito y una fracción: un número decimal finito es una fracción, sin embargo, no toda fracción es un número decimal finito; pero Vamvakoussi y Vosniadou (2004) señalan que investigadores argumentan que este tipo de entendimiento, de las distintas representaciones de los números racionales es difícil de lograr. Además, como se mencionó en el Capítulo 3, investigadores han mostrado que el estudiante tiende a manifestar que hay decimales entre decimales más no decimales entre fracciones y viceversa. Por estas razones, en algunas preguntas incluidas en este cuestionario, los intervalos que se consideran contienen diferentes representaciones simbólicas en los extremos (ver Figura 5.1), aunque el foco de la investigación son los números decimales[11].

En los apartados siguientes se describen las preguntas de este cuestionario de papel y lápiz y se exponen los resultados de investigaciones anteriores, es decir, un análisis previo de las preguntas. Se detalla también, el análisis de las respuestas de los 10 profesores en formación.

5.2.1 Análisis previo de las preguntas del cuestionario

Antes de comenzar con el análisis previo para cada pregunta cabe resaltar que en las cinco primeras preguntas se espera que el profesor en formación justifique con la propiedad de densidad de los números decimales, o por lo menos, con la propiedad de densidad de los números racionales. Sin embargo, a continuación, se presentan las dificultades que podían llevar a los profesores en formación a la ausencia de la justificación usando la propiedad de densidad para explicar sus respuestas del cuestionario.

[11] En el modelo de enseñanza propuesto, a través de la secuencia didáctica, se usó solo números decimales (ver Capítulo 4).

1. ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta.
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3?
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta.
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta.
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y $\frac{1}{2}$? Justifica tu respuesta.
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo.
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{7}{3}$? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número.
8. ¿Entre $\frac{11}{5}$ y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta.
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6?
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta.
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número.

Figura 5.1 Preguntas del cuestionario sobre nociones acerca de la propiedad de densidad

Para la primera pregunta del grupo 1, *1. ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta*, se espera que el profesor responda afirmativamente si piensa en 2 y 3 como números decimales y/o fracciones (4/2 = 2 y 9/3 = 3). No obstante, también se podrían esperar respuestas acerca de la inexistencia de números en el intervalo entre 2 y 3 porque 2 y 3 son números naturales consecutivos pese a que en la pregunta no se especifique que esos números deban ser considerados como números naturales.

Una justificación, además de la propiedad de densidad, podría ser la siguiente: Sí hay fracciones entre 2 y 3, todas las fracciones de la forma 2 + (*n*/*m*) con $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 0,1$ y $n \neq 0$, de manera que 2 + (*n*/*m*) < 3, es decir, (*n*/*m*) < 1. Por ejemplo, fracciones que se pueden hallar en el intervalo: 2 + 1/2, 2 + 1/3, 2 + 1/4, 2 + 3/4, etc., por ende, hay una infinidad.

En la pregunta *2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3?*, la respuesta correcta es que hay una infinidad de números decimales. Por ejemplo: 1.21, 1.22, …, 1.211, 1.212, …, 1.221, 1.222, … etc. La respuesta que se esperaría por parte del profesor es la existencia de una cantidad finita de números decimales, o simplemente, no hay números intermedios.

Tirosh y sus colaboradores (1999) en su estudio observaron que el 60% de los profesores en formación que van a ser docentes en primaria respondió que hay una finitud de números entre 0.23 y 0.24, mientras que el 76% dio la misma respuesta en el caso del intervalo entre

1/5 y 1/4. Lo mismo sucedió con estudiantes universitarios de primer año de matemáticas, que erróneamente atribuyen la discreción a los números racionales, como se evidencia en el trabajo de investigación de Giannakoulias, Souyoul y Zachariades (2007), donde el 29% de los estudiantes manifestó que hay una finitud de números entre 0.1 y 0.11, y el 13% entre 1/3 y 2/3.

La respuesta que se considera adecuada para la pregunta *3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta* es que sí hay números decimales entre dos fracciones, siempre que estas dos fracciones sean diferentes, y también que hay una infinidad de decimales entre dos fracciones.

Después de un estudio con 124 profesores en formación de primer y segundo año que se especializan en ciencias matemáticas, Khoury y Zazkis (1994) consideran que los profesores en formación interpretan números diferentes para un mismo valor numérico, por ejemplo, 3/4 y 0.75 son diferentes números para los estudiantes por el hecho de que el primero está representado como una fracción y el segundo como un número decimal. Vamvakoussi y Vosniadou (2004) mencionan que ha habido evidencias sobre esta situación, por ejemplo, para muchos estudiantes de educación básica (primaria y secundaria), 1/2 y 2/4 representan números distintos por lo que responden que entre estos números hay una determinada cantidad finita o una infinidad de números.

Un ejemplo para la pregunta anterior: entre 1/3 y 1/2 hay números decimales. Se realizan las respectivas conversiones de fracción a escritura decimal: $0.\overline{3}$ y 0.5. Y entre estos números se encuentran los decimales 0.34, 0.35, 0.36, 0.37, 0.38, 0.39, 0.4, 0.41, 0.42, 0.43, 0.44, 0.45, 0.46, 0.47, 0.48, 0.49, 0.301, 0.302, …, etc., por tanto, hay una infinidad de números decimales.

Con respecto a la pregunta *4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta*, la respuesta adecuada es que sí hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción, y también que hay una infinidad de números intermedios en el intervalo dado. Esta situación es similar a la anterior pregunta.

Dörfler (1995, citado por Vamvakoussi & Vosniadou 2010) menciona que en el contexto de unas matemáticas avanzadas, los números racionales se conceptualizan como entidades individuales abstractas, que toman su significado dentro de un sistema formal. Ante esto, Vamvakoussi y Vosniadou (2010) argumentan que este tipo de abstracción permite la conceptualización de los números racionales como objetos únicos, invariantes bajo diferentes representaciones simbólicas permitiendo la unión de los números naturales y no naturales como miembros de una misma familia, pero esta perspectiva no suele estar disponible para los estudiantes que se encuentran con los números racionales en forma de fracciones y de números con escritura decimal.

El estudiante también podría usar el proceso de conversión entre fracciones y números decimales para facilitar el proceso y así poder identificar números decimales y/o fracciones en un intervalo. Por ejemplo: entre 0.5 y 3/4 hay decimales y fracciones, y los decimales son fracciones con denominador múltiplo de 10, en consecuencia, hay una infinidad (0.51 = 51/100, 0.52 = 52/100, 0.53 = 53/100, 0.54 = 54/100, …). Cabe mencionar, que el estudio realizado por O'Connor (2001) con estudiantes de quinto grado de la educación básica elemental, muestra que los estudiantes efectúan la división del numerador entre el denominador sin ningún inconveniente, por lo que se espera que los aspirantes a profesor no tengan dificultades en el proceso de dividir.

La respuesta es afirmativa para la pregunta *5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta*. Esta pregunta es un caso particular de la anterior, se espera que el profesor en formación, con base en las preguntas 3 y 4, pueda afirmar que sí hay, y por tanto una infinidad, y que el ejemplo más factible para encontrar un número en dicho intervalo es la media aritmética (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Aunque un estudiante universitario que apenas está cursando su primer año en matemáticas ha aprendido una manera general de convertir un numero racional en representación fraccionaria a escritura decimal finita o infinita, y viceversa, este conocimiento, si existe, permanece desconectado de la estructura de números reales (Giannakoulias et al., 2007). Es decir, el estudiante aún podría tener dificultades con la multiplicidad de representaciones para expresar un número racional. Por ello, la importancia de que un alumno reconozca que hay fracciones entre decimales o viceversa, o fracciones y decimales entre fracciones y decimales (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

No existe el número decimal más pequeño, es la respuesta para *6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo*. Esto podría considerarse como un resultado de la propiedad de densidad, aunque no necesariamente, ya que basta con que el conjunto de los números decimales es un subconjunto de los números racionales que no está bien ordenado, por lo que no tiene primer elemento. Sin embargo, nociones relacionadas con la densidad pueden ayudar al estudiante a entender que no existe el número decimal más pequeño. Stafylidou & Vosniadou (2004) expresan que por más pequeños que sean los números existirá un número a la izquierda de éstos.

Van Hoof, Verschaffel y Van Dooren (2015) indican que una buena comprensión del "tamaño del número" o la comparación de números racionales, y las operaciones, constituye un requisito previo para lograr la comprensión del estudiante sobre la densidad y en consecuencia la inexistencia del número más pequeño. Por ejemplo, una comparación de números decimales: se compara los números 0, 0.1 y -0.1, el más pequeño de este conjunto es -0.1, pero si se agrega más números menores que -0.1 en este conjunto, -0.1 ya no sería el más pequeño.

Los números naturales 1 y 2 son los que se encuentran en el intervalo entre 1/6 y 7/3. Esta es la respuesta a la pregunta *7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número*. La pregunta puede estar algo alejada del concepto de densidad, no obstante, se quiere ver si la representación fraccionaria en los extremos del intervalo afecta el hecho de encontrar un número natural entre ellos. De nuevo, se asume la importancia del papel de la multiplicidad de representaciones simbólicas de un número. El profesor en formación podría manifestar que no hay un número natural en el intervalo dado que sus extremos son fracciones. También se podría esperar que el estudiante para profesor haga la conversión de fracciones a números decimales y observar si hay números naturales ($1/6\ = 0.1\overline{6}$ y $7/3\ = 2.\overline{3}$).

En *8. ¿Entre* $\frac{11}{5}$ *y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta*, la respuesta adecuada es que no hay más de 3000 números ya que los extremos del intervalo tienen el mismo valor numérico (11/5 = 2.2). Vamvakoussi, Van Dooren y Verschaffel (2012) diseñaron esta pregunta para su investigación con 58 estudiantes universitarios de ciencias de la educación (entre 18 y 28 años). Los investigadores indicaron que algunos estudiantes traen a colación la expresión “hay infinitamente muchos números entre dos números dados” sin notar que las expresiones numéricas de los extremos de un intervalo son equivalentes.

Respecto a *9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6?* y a *10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta*, las respuestas adecuadas son 7 y no todos los números tienen sucesor, respectivamente. La finalidad es similar a la de la pregunta 6. Nociones relacionadas con la densidad pueden ayudar a entender al estudiante que en entre dos números decimales existe un número decimal, y se continua con el procedimiento, por lo se puede decir que no existe un siguiente para un número decimal con el orden usual de los números decimales. Mientras que para los números naturales sí existe el sucesor. Federman (1964) señala que solo los números naturales tiene sucesor.

La respuesta adecuada es 1.0 para la pregunta *11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número*. La finalidad de la pregunta es que el estudiante observe que se puede hablar del siguiente de un número cuando se refiere a un conjunto específico. Es decir, en este caso solo se refiere al conjunto de décimas. Brousseau (1981, p.126) es quien elabora esta pregunta. Según él, muchos estudiantes tienen dificultades para distinguir la parte entera de la parte decimal de un número. Esta pregunta es de control, ya que los estudiantes podrían decir que 0.9 es un número decimal y por tanto no tendría sucesor sin fijarse que en la pregunta se refiere a un conjunto específico.

5.3 Marcos explicativos iniciales de los profesores en formación

El proceso de codificación de las expresiones relacionadas con estudiantes no siempre es fácil, por ello, en sus informes de investigación, Vamvakoussi y Vosniadou (2004, 2007, 2010) dan prioridad a las categorizaciones según las manifestaciones de los estudiantes en los cuestionarios y entrevistas a través de sus marcos explicativos iniciales.

En este apartado se describen los marcos explicativos iniciales de los profesores en formación sobre conocimientos previos y creencias relacionadas con la discreción y la densidad de los números decimales. De igual manera se caracterizan concepciones alternativas sobre el concepto de número decimal, los números naturales y las fracciones, concepciones que no se esperaban, en esta investigación, por parte de los estudiantes para profesor.

5.3.1. Marco explicativo inicial de Karen

En las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3 se encuentran tanto, las respuestas de Karen al cuestionario, como las interpretaciones que se hacen para encontrar elementos que permitan caracterizar su marco explicativo inicial.

Tabla 5.1 Respuestas de Karen (Estudiante de 2° semestre, 18 años)-Primera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
1. ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta. Su respuesta es afirmativa, y menciona que 2 y 3 son números enteros. Karen manifiesta que haciendo particiones se llega a 3. Ella dice: “el 2 con 1/8, el 2 con 2/8, y así sucesivamente hasta llegar a 3”; quiso manifestar sumas: 2 + 1/8, 2 + 2/8, … hasta llegar a 3.	▪ (PF)(FD)(EP) Su pensamiento está relacionado con una partición equitativa de un segmento “unitario”. El ejemplo que menciona describe un número finito de partes iguales –quizá rememora procedimiento para localizar fracciones en la recta–. ▪ (FD)(SSN) Al parecer piensa que hay un número finito (en 8 partes) de fracciones entre 2 y 3; aquellas que están asociadas con la partición que se imagina, sin considerar los extremos.
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3? Karen solo considera una determinada cantidad de cifras decimales de un número para responder la pregunta. Ella responde que hay 9 números decimales que son 1.21, 1.22, 1.23, …, 1.29. Pero, ella también manifiesta que no habría otro número si se cuentan los números con una sola cifra decimal en dicho intervalo. Karen refiere la parte decimal de un número como una parte entera, ella cree que 21 (21, parte decimal de 1.21) corresponde a decenas. 9 - posible respuesta o ninguna ya que si se cuenta como 1.21 serían decenas.	▪ (FD)(SSN) Piensa en un número finito de números; aquellos entre 1.2 y 1.3 que tienen dos cifras decimales –subyace en este razonamiento la idea de consecutivos falsos–. ▪ (PF)(FD)(EP) Podría suponerse que está pensando en una partición del segmento unitario en 10 partes iguales, una cantidad finita, y la localización de los números decimales: 1.21, 1.22, …, 1.29. ▪ (EOM) La parte decimal de la expansión decimal de un número tiene orden de magnitud igual al de la parte entera, es decir en 1.21, la parte decimal, 21, corresponde a decenas.
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Karen asegura la existencia de números decimales y justifica con la conversión de fracciones a números decimales; escribe el siguiente ejemplo: 1/2 = 0.5 y 1/4 = 0.24 (un error en el cuestionario que después ella misma aclaró en la entrevista), y menciona en la entrevista que 1/3 = 0.33… Ella manifiesta que se pueden encontrar fracciones entre “1/6 y 1/2” por medio de fracciones equivalentes y al encontrar dichas fracciones en el intervalo las convierte a decimales (expresiones en la entrevista).	▪ (EP) Se puede suponer que piensa en una partición y la forma de localizar fracciones intermedias en un intervalo por medio de fracciones equivalentes. ▪ (CFD) Justifica su afirmación por medio de la conversión de una representación como fracción a una expansión decimal del número.

Tabla 5.2 Respuestas de Karen (Estudiante de 2° semestre, 18 años)-Segunda parte

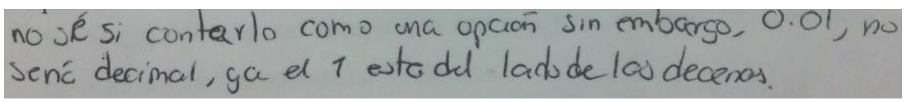
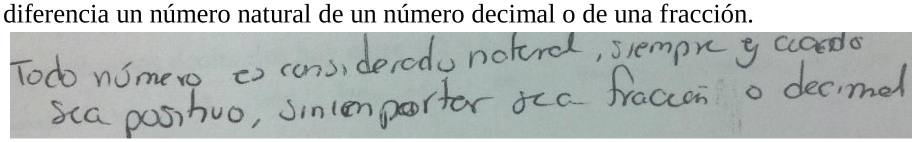
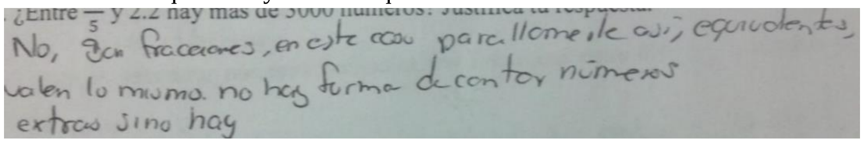
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta. Karen tiene la misma idea que en la anterior pregunta, ella justifica con la conversión de fracciones a números con escritura decimal la existencia de estas expresiones numéricas en el intervalo. Ella refiere que hay una numeración como la que escribió en su cuestionario:1/5, 0.40, 0.60, 4/5.	▪ (PF)(FD)(CFD)(SSN) Subyace en su respuesta la idea de una partición finita en un segmento, aludiendo a una "numeración" –(1/5, 0.40=2/5, 0.60=3/5, 4/5 Nótese que no incluye a los extremos, 0 y 1) –. ▪ (CFD) Se podría pensar en una flexibilidad de pensamiento, ya que usa dos representaciones simbólicas de un número: de una representación como fracción a una expansión decimal de ese número.
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta. Al parecer, Karen realizó la diferencia entre 0.49 y 1/2, sin embargo, cree que 0.01 no es un número decimal porque el "1" está en la posición de las centésimas, que para ella significa "decenas".  no sé si contarlo como una opción sin embargo, 0.01, no seré decimal, ya el 1 esta del lado de las decenas.	▪ (CD) Al parecer piensa que un número decimal es un número con una sola cifra decimal. ▪ (EOM)(CD) Subyace en su respuesta la extensión del orden de magnitud de la parte entera a la parte decimal. Posiblemente, la parte decimal de 0.01 se compone de "0 unidades" y "1 decena" para ella. Además, tiene la concepción alternativa de que los decimales tienen una sola cifra decimal, por lo que manifiesta que 0.01 no es un decimal porque el 1 está en el lado de las "decenas". ▪ Pese a que en la anterior pregunta responde que sí hay números decimales y/o fracciones entre un decimal y una fracción, en un ejemplo particular como en este caso, no usa el mismo argumento, la conversión de una representación simbólica a otra.
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo. Karen escribe que no existe el número decimal más pequeño.	▪ La respuesta de Karen no aporta información sobre su forma de pensar.
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Karen menciona que todos los números positivos son números naturales. Ella no diferencia un número natural de un número decimal o de una fracción.  Todo número es considerado natural, siempre y cuando sea positivo, sin importar sea fracción o decimal	▪ (CN) Considera que todos los números positivos son naturales, por ello las fracciones y los decimales son naturales. Siguiendo de forma consistente con su línea de pensamiento puesta de manifiesto en las respuestas anteriores habrá números naturales entre las dos fracciones dadas –no proporciona ejemplos.

Tabla 5.3 Respuestas de Karen (Estudiante de 2° semestre, 18 años)-Tercera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
8. ¿Entre 11/5 y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta. Karen manifiesta que 11/5 y 2.2 son equivalentes.  No, son fracciones, en este caso para llamarle así; equivalentes, valen lo mismo. no hay forma de contar números extras sino hay	▪ (CFD) Reconoce que 11/5 y 2.2 representan la misma cantidad, al parecer se apoya en la conversión de una representación simbólica del número como fracción a una expansión decimal (11/5 = 2.2 haciendo la división, o bien 11/5 = 2 1/5 = 2 + 0.20 = 2.2; pareciera más seguro pensar en que hace la división para llegar a la conclusión de que 11/5 y 2.2 son equivalentes.
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? Su respuesta es 7.	▪ (SSN) Podría estar apoyándose en la idea de la numeración y su asociación con la de sucesión que la conduce a pensar en "organización de números adecuados", por la respuesta siguiente.
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta. Karen responde: "Sí, para llevar, como su nombre lo dice, una sucesión, y organización de números adecuados".	▪ (SSN) La mención de la palabra sucesión conduce a pensar en la noción del "siguiente", por ello se ha referido a la numeración en otras respuestas a preguntas del cuestionario.
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Karen responde que 1.0.	▪ (SSN) Responde a la pregunta como se esperaba, se puede pensar que en su respuesta subyace la idea del "siguiente en una numeración".

Códigos usados en la clasificación de las actuaciones de Karen: (PF) Partición Finita de un segmento-al parecer unitario. (FD) Numero finito de números-Discreción. (CD) Concepción de número Decimal. (CFD) Conversión de Fracción a expansión Decimal. (EP) Evoca Procedimientos. (EOM) Extiende Orden de Magnitud a parte decimal. (SSN) Siguiente, Sucesión, Numeración. (CN) Concepción número Natural.

Características del marco explicativo inicial de Karen

Como puede verse en la columna del lado derecho de las Tablas 5.1, 5.2, 5.3 las respuestas se han clasificado usando los códigos que se encuentran al final de la última tabla. Esas clasificaciones responden a ideas de Karen sobre la densidad, la discreción, los números decimales, las fracciones, y los números naturales. En base a esta clasificación se caracteriza el marco explicativo inicial de esta estudiante para profesor.

Sobre densidad y discreción:

Las actuaciones de Karen, ver las respuestas clasificadas como (PF), (FD) y (SSN) en las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3, ponen de manifiesto un pensamiento discreto avanzado al referir la existencia de un conjunto finito de números entre enteros, fracciones, decimales y combinaciones, y al mostrar la idea de “consecutivos falsos”. Karen considera a los números en una sucesión, en una estructura en la cual “el siguiente” juega un papel relevante, como en la numeración que subyace en sus ejemplos. Por esta razón la caracterización de sucesor de Karen es la de “el siguiente”.

Sobre números decimales:

1. Las respuestas clasificadas como (CD) y (EOM) en las Tablas 5.1 y 5.2 permiten caracterizar la idea de número decimal de Karen como aquella expansión decimal que tiene sólo una cifra en la parte decimal. Esta concepción de número decimal no la limita, puede referirse a representaciones decimales con más de una cifra decimal.
2. Las respuestas clasificadas como (EOM) permiten afirmar que Karen extiende el orden de magnitud de la parte entera a la parte decimal de la expansión decimal de un número, por ello habla de “decenas” en lugar de centésimas.

Sobre fracciones:

1. Karen usa la conversión de una representación de un número como fracción a una expansión decimal, ver las respuestas clasificadas como (CFD) junto con su manera de considerar a los decimales (que tienen una sola cifra decimal), da la impresión de que emplea el procedimiento sin cuestionarse qué significa el resultado (ver pregunta 3),
2. La respuesta clasificada como (EP) permite apreciar el uso de la relación de equivalencia entre fracciones y procedimientos para localizar fracciones y decimales en la recta.

Sobre números naturales: Para Karen los números naturales son todos los que son positivos –fracciones o decimales–, ver respuesta clasificada como (CN) en la Tabla 5.2. Se podría decir que se encuentra en un sistema de conocimientos de dominio número natural.

5.3.2 Marco explicativo inicial de Karina

Las respuestas de Karina al cuestionario se encuentran en las Tablas 5.4, 5.5 y 5.6, así mismo aparecen en la columna de la derecha interpretaciones hechas para encontrar elementos que permitan conocer su marco explicativo inicial.

Tabla 5.4 Respuestas de Karina (Estudiante de 2° semestre, 19 años)-Primera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
1 ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta. Karina asegura la existencia de números intermedios entre 2 y 3, pero escribe números decimales en vez de fracciones. Ella escribe que existe una “numeración” y que se puede expresar como 2.2, 2.5, 2.7, 2.9, etc. En la entrevista nuevamente habla de la numeración, pero esta vez añade más números: 2.2, **2.3**, **2.334**, 2.5, 2.7, 2.9 aludiendo que se pueden encontrar más números. Sí, aunque se vea que son dos números enteros, entre estos existe una serie de numeración y se pueden expresar como 2.2, 2.5, 2.7, 2.9, etc.	▪ (FD) En una primera instancia pareciera afirmar que hay un número finito de números entre 2 y 3 (2.2, 2.5, 2.7 y 2.9 que los asocia con el vocablo “numeración”). ▪ (FD) En segunda instancia con la idea de numeración añade más números -número con tres cifras decimales –pero no alude a un proceso infinito–.
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3? Respecto a lo que escribió “decimal tal cual solo hay uno” Karina expresa que “de 1.2 a 1.3 nada más se está aumentando **un** decimal, **una** cifra decimal” durante la entrevista. Ella también dice que hay más números cuando anotó que existen las centésimas, las milésimas, etc. en su cuestionario para referir una infinidad de números. Decimal tal cual solo hay uno pero existen centecimas, milesimas, etc.	▪ (DD)(CD) Habla de un “aumento decimal”, lo que podría explicarse, al parecer, como la diferencia entre 1.3 y 1.2. Además, posiblemente, cree que un número decimal es el que tiene una sola cifra decimal, por ello expresa “Decimal tal cual solo hay uno” haciendo mención a la diferencia descrita anteriormente: 1.3 – 1.2 = 0.1 y este resultado es un decimal de una sola cifra. ▪ (ID)(VP) Distingue valores posicionales de los números decimales como centésimos, milésimos, posiblemente entre otros, para relacionarlos con la infinidad de números intermedios.
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Su respuesta es afirmativa, Karina manifiesta que hay una “aglomeración de números” durante la entrevista. Se le cuestiona a ella por el significado de “aglomeración” a lo que especifica esta expresión como una infinidad de números. Ella indica que se buscan fracciones equivalentes en el intervalo, menciona un ejemplo: 1/8 = 2/16 = 4/32, y que antes de llegar a 4/32 está el 3/32, posiblemente Karina quería buscar un número entre 0 y 1/8 con este método.	▪ (ID) Justifica su afirmación usando “aglomeración de números”, subyace la idea de una infinidad de números entre dos fracciones. No es claro que se refiera a decimales. ▪ (EP)(FE) Al parecer evoca un procedimiento para buscar una fracción entre dos a través del uso de fracciones equivalentes.
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta. Karina de manera implícita señala la existencia de números decimales y/o fracciones en el intervalo dado. En la entrevista ella señala que la expresión “la forma gráfica es la que cambia” hacía mención a la representación simbólica –fraccionaria y decimal–.	▪ Afirma la existencia de decimales y fracciones en el intervalo por el hecho de que son representaciones simbólicas que tienen dichos números (fraccionaria y escritura decimal).

Tabla 5.5 Repuestas de Karina (Estudiante de 2° semestre, 19 años)-Segunda parte

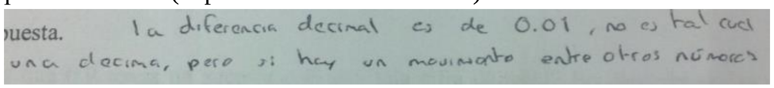
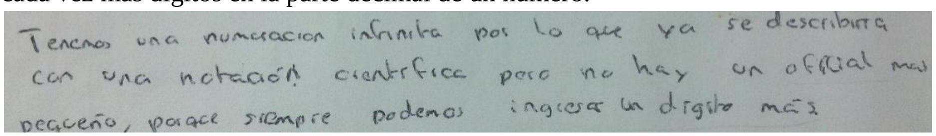
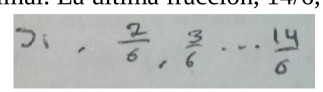
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta. Karina menciona que la diferencia entre los extremos del intervalo es 0.01, pero 0.01 para ella no es un decimal porque tiene dos cifras decimales, luego, afirma que hay cada vez más números en el intervalo. Karina dice que hay otros números agregando cada vez más ceros en la parte decimal y dice hay una infinidad de dichos números. Ella menciona un ejemplo: “0.49002” (expresiones en la entrevista).  ›uesta. la diferencia decimal es de 0.01, no es tal cual una decima, pero si hay un movimiento entre otros números	▪ (CFD)(DD) Al parecer convierte 1/2 en 0.50, porque menciona la diferencia entre esos dos números, 0.01. ▪ (CD) De nuevo, al parecer, piensa que un número decimal es un número con una sola cifra decimal. ▪ (ID) Posiblemente, relaciona un proceso infinito: agregando ceros en medio de la parte decimal habrá otros números, por lo que hay una infinidad en el intervalo –por ejemplo, empezando con su prototipo 0.49002, 0.490002, …, se obtienen números cada vez pequeños, menores que 1/2=0.50, pero mayores que 0.49–.
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo. Karina escribe que no hay un número decimal pequeño por su razonamiento de agregar cada vez más dígitos en la parte decimal de un número.  Tenemos una numeracion infinita por lo que ya se describiria con una notación cientifica pero no hay un oficial mas pequeño, porque siempre podemos ingresar un digito más	▪ (ID) Por medio de la expresión “numeración infinita” se manifiesta la idea de una cantidad infinita de números. ▪ (ID) Subyace la idea de un proceso infinito o numerable por medio del proceso de agregar dígitos. Pareciera que está pensando en intercalar ceros en el medio, como en la respuesta a la pregunta anterior, no obstante, su respuesta se asocia a un proceso de producción de números mayores en cada paso. ▪ (NC) Alude a la notación científica como una representación de “números decimales pequeños”.
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Karina piensa que las fracciones son números naturales, ella escribe 2/6, 3/6, …, 14/6. Pese a que las dos primeras fracciones que escribió se encuentran en el intervalo dado, no son números naturales; la primera es una fracción que no es un número decimal y la segunda es una fracción decimal. La última fracción, 14/6, es equivalente a 7/3.  Si, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ ... $\frac{14}{6}$	▪ (CN)(FD) Considera que las fracciones son números naturales, por ello proporciona una secuencia de fracciones entre 1/6 y 7/3 con el mismo denominador y numeradores crecientes (1, 2, 3, …, 14)., hasta llegar al extremo del intervalo dado (podría pensarse en una partición con un número finito de partes iguales). ▪ (FE) Se aprecia el uso de fracciones equivalentes.
8. ¿Entre 11/5 y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta. Karina no reconoce que 11/5 y 2.2 representa la misma cantidad, y agrega que “hay más de 3000 *ceros*”, aludiendo que hay muchos números en el intervalo que cree que existe.	▪ No identifica las representaciones simbólicas 11/5 y 2.2 como representantes del mismo número. ▪ (ID) Usa su argumentación de agregar ceros para justificar que hay más de 3000 números en un intervalo.

Tabla 5.6 Respuestas de Karina (Estudiante de 2° semestre, 19 años)-Tercera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? Karina anota que el sucesor de 6 es 7 si se habla de números enteros, pero si es de un conjunto distinto al de los enteros indica que “entre 6 y 7 hay una variedad de números”. Con esta expresión (en la entrevista) ella quiso decir que hay números entre 6 y 7 por lo que no se podía hablar del sucesor de 6. En números enteros sería el 7 pero entre 6 y 7 se encuentra una gran variedad de numerales.	▪ (S) En el conjunto de los números enteros hay un sucesor de un entero dado. ▪ (S) En el conjunto de números distinto a los enteros no se puede hablar del sucesor.
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta. Cuando Karina refiere que hay una “gran gama de números” hace mención a los naturales, enteros, números decimales y fracciones y que cada uno tiene un sucesor. También menciona que es necesario recurrir a la notación científica para expresar una cantidad de numerales. Todos los números tienen un sucesor? Si, como dije con anterioridad existe una gran gama de números y todos tienen un sucesor, pero va para expresar tantos numerales, se necesitaría recurrir a la notación científica	▪ (S) Asegura que cada número tienen un sucesor (naturales, enteros, números decimales y fracciones). Parece contradecir su respuesta a la pregunta anterior, en la cual asevera que sólo en los naturales se puede hablar de sucesor. ▪ (NC) Alude a la notación científica como una representación de una cantidad de números (“números grandes”).
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Karina responde que es 1 si hace referencia a los números con una cifra decimal. 1, en caso de que el aumento sea decimal.	▪ (S)(DD)(CD) Responde a la pregunta como se esperaba. Por su concepción alternativa de que un número decimal es el que tiene una sola cifra decimal, por ello, posiblemente, habla nuevamente de un “aumento decimal”, lo que podría explicarse como la diferencia entre 1 = 1.0 y 0.9, es decir 1.0 – 0.9 = **0.1** (*una sola cifra decimal, el aumento decimal al que se refiere*). En conclusión, 0.9 + **0.1** = 1.0 = 1 (el sucesor de 0.9 con una *sola cifra decimal*.

Códigos usados en la clasificación de las actuaciones de Karina: (FD) Numero finito de números-Discreción. (ID) Infinidad de números-Densidad. (CD) Concepción de número Decimal. (DD) Diferencia entre Decimales. (CFD) Conversión de Fracción a expansión Decimal. (EP) Evoca Procedimientos. (CN) Concepción número Natural. (NC) Notación Científica. (S) Sucesor. (FE) uso de Fracciones Equivalentes. (VP) Valores Posicionales de los números decimales.

Características del marco explicativo inicial de Karina

Las respuestas de Karina al cuestionario, que se muestran en la columna de la izquierda de las Tablas 5.4, 5.5 y 5.6, se interpretaron y se clasificaron usando los códigos que se encuentran al final de la última tabla. Esas clasificaciones, como en el caso de Karen, responden a concepciones alternativas de Karina respecto a la densidad, la discreción, los números decimales, las fracciones, y los números naturales; y se obtienen las características de su marco explicativo inicial.

Sobre densidad y discreción: Las actuaciones de Karina, ver las interpretaciones de las respuestas clasificadas como (ID) en las Tablas 5.4 y 5.5, ponen de manifiesto un pensamiento denso avanzado (infinidad de números intermedios entre decimales y/o fracciones a través del proceso de añadir dígitos en medio de la parte decimal de un número, especialmente ceros); pero en las preguntas 1 y 7 se pone en evidencia una noción de finitud/discreción, ver interpretación clasificada como (FD); pareciera que estas ideas se refieren a las expansiones decimales, en este caso finitas, además en la pregunta 7 habla de una numeración de fracciones "consecutivas falsas". Se concluye entonces que Karina tiende a pensar de manera discreta-densa. En las respuestas clasificadas como (S) ella considera por un lado que solamente los números enteros tienen sucesor y por otro, se contradice, que cada número tiene un sucesor (ver Tabla 5.6).

Sobre números decimales: 1. Las interpretaciones de las respuestas clasificadas como (CD) en las Tablas 5.4, 5.5 y 5.6 permiten caracterizar la concepción alternativa de número decimal de Karina como aquella expansión decimal que tiene sólo una cifra en la parte decimal. Esta concepción de número decimal convive con la generación de expresiones decimales en las cuales agrega ceros en la parte decimal, en el "medio". 2. Evoca la notación científica –expansión decimal– como un medio para representar números pequeños, así como números grandes, ver interpretaciones clasificadas como (NC). 3. Parece que hace uso de una diferencia de decimales cuando refiere "aumento decimal" y lo asocia con la concepción alternativa que tiene sobre el número decimal, ver interpretaciones clasificadas como (DD). 4. En la respuesta clasificada como (VP) Karina reconoce valores posicionales de los números decimales, al menos, los que más se usan, como se evidencia en los textos escolares como los de la SEP (mencionados en el Capítulo 4).

Sobre fracciones: 1. Karina usa la conversión de una representación de un número como fracción a una expansión decimal en alguna ocasión (ver respuesta clasificada como (CFD), pregunta 5), pero no lo hace con soltura, ya que no identifica que 11/5 y 2.2 son representaciones del mismo número (ver pregunta 8). 2. Las interpretaciones de las respuestas clasificadas como (EP) y (FE) permite apreciar el uso de la relación de equivalencia entre fracciones.

<u>Sobre números naturales</u>: Para Karina las fracciones son números naturales, ver la respuesta clasificada como (CN) en la Tabla 5.5. Se podría decir que se encuentra en un sistema de conocimientos de dominio número natural.

5.3.3 Marco explicativo inicial de Isabella

En la columna de la derecha en las Tablas 5.7, 5.8 y 5.9 se encuentran las interpretaciones de las respuestas de Isabella al cuestionario que permiten caracterizar su marco explicativo inicial.

Tabla 5.7 Respuestas de Isabella (Estudiante de 4° semestre, 19 años)-Primera parte

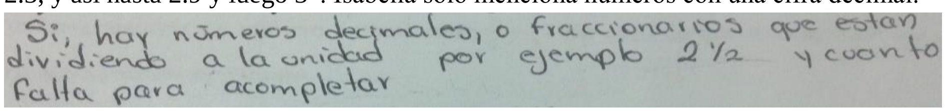
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
1 ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta. Isabella asegura que hay números entre 2 y 3. Ella menciona que "dividiendo la unidad se llega a un extremo del intervalo", en este caso, el 3. En el cuestionario escribe un ejemplo: 2 ½, para indicar que divide el segmento entre 2 y 3 por la mitad. En la entrevista ella manifiesta que no solo se divide el segmento por la mitad, sino que se divide en partes pequeñas "para llegar a 3", ella menciona el siguiente ejemplo: "2.1, 2.2, 2.3, y así hasta 2.9 y luego 3". Isabella solo menciona números con una cifra decimal.  Si, hay números decimales, o fraccionarios que estan dividiendo a la unidad por ejemplo 2 ½ y cuanto Falta para acompletar	▪ (PF)(FD)(SSN)(EP) Su pensamiento es una partición equitativa de un segmento unitario. Por ejemplo: 2 ½ y después 2.1, 2.2, 2.3, … 2,9. Estos ejemplos describen un número finito de partes iguales –quizás recuerda procedimiento para localizar fracciones en la recta–. ▪ (FD)(SSN) Al parecer supone que hay un número finito de decimales entre 2 y 3; aquellas que están asociadas con la partición que se imagina, sin considerar los extremos –subyace en este razonamiento la idea de consecutivos falsos–.
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3? Isabella escribe que hay más de un número decimal, y justifica su respuesta haciendo mención a la división del segmento de 1.2 a 1.3 en partes correspondientes a números decimales. Ella explica que a medida que se va subdividiendo el segmento dichas subdivisiones corresponden a números que tienen "muchos ceros" en la parte decimal. Ella menciona los siguientes ejemplos: "1.21, 1.201, 1.2001".	▪ (SS)(SD) En una primera instancia señala que dividiendo el segmento unitario se hallan números decimales. ▪ (SS)(SD)(FD)(EP) En segunda instancia refiere que hay "muchos ceros" en los números correspondientes a las subdivisiones, y posiblemente piensa en la localización de números decimales: 1.21, 1.201, 1.2001 –pero al parecer no alude a un proceso infinito–.
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Su respuesta es afirmativa. La explicación que hace Isabella es la división del segmento de recta en partes que corresponden fracciones, y estas fracciones "convertirlas a números decimales".	▪ (SS) Sigue con la idea anterior: subdivisiones en un segmento, no sugiere cómo debe ser la partición (finita o infinita). ▪ (SS)(CFD) Manifiesta que las subdivisiones corresponden a fracciones que luego las escribe en expansión decimal.

Tabla 5.8 Respuestas de Isabella (Estudiante de 4° semestre, 19 años)-Segunda parte

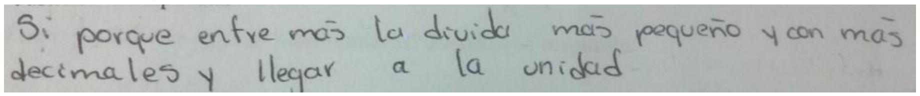
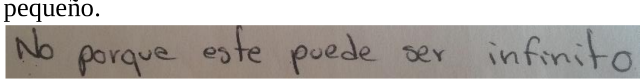
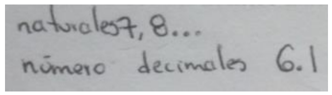
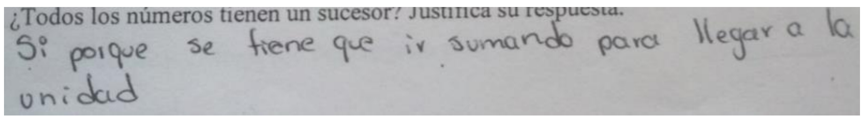
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta. Isabella tiene la misma idea que en las preguntas anteriores, la de las particiones, al parecer, del segmento.  Si porque entre más la divida más pequeño y con más decimales y llegar a la unidad	▪ (SS) Continúa con su argumento de las subdivisiones, al parecer, de un segmento, por respuestas anteriores. ▪ (SS)(SD)(SP) Piensa que estas subdivisiones son cada vez más pequeñas que corresponden a números decimales, aun cuando no especifica si divide entre diez de manera reiterada para obtener números decimales. ▪ No indica cómo debe ser la partición (finita o infinita).
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta. Isabella argumenta que se puede encontrar números en el intervalo de 0.49 a 1/2 al realizar subdivisiones pequeñas. En la entrevista ella explica que con esta expresión quiso manifestar que las subdivisiones corresponden a números como “0.491, 0.492, 0.493, … 0.499”.	▪ (SS)(SP) Refiere subdivisiones pequeñas en el segmento unitario. ▪ (SD)(PF)(FD)(EP)(SSN) Las subdivisiones corresponden a números decimales que sugieren una partición finita por la secuencia de números: 0.491, 0.492, 0.493, …, 0.499, números consecutivos falsos, podría estar pensando en la ubicación de éstos en la recta numérica –nótese que no incluye a los extremos–
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo. Isabella anota que no existe el número decimal más pequeño porque “este puede ser infinito”. Al parecer, con esta expresión, ella quiso decir que hay un número infinitamente pequeño.  No porque este puede ser infinito	▪ Piensa que no existe el número decimal más pequeño, aunque cree que existe un número infinitamente pequeño. Parece contradecir sus respuestas a las preguntas anteriores, en las cuales muestra ejemplos de finitud-discreción.
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Isabella escribió el número 1.	▪ Responde a la pregunta como se esperaba, aunque solo escribió el número natural 1. Al parecer, la representación fraccionaria en los extremos del intervalo no le afecta para encontrar un número natural en dicho intervalo. ▪ No aporta información acerca de procedimientos para responder la pregunta.
8. ¿Entre 11/5 y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta. Isabella no respondió en esta pregunta, en la entrevista manifestó no haber entendido la pregunta.	▪ Si bien la idea era que observara equivalencia entre decimales y fracciones, se cree que no entendió la pregunta debido a su línea de pensamiento puesta de manifiesto en algunas respuestas anteriores en las que evidencia una tendencia a pensar de manera discreta (partición finita, decimales consecutivos falsos).

Tabla 5.9 Respuestas de Isabella (Estudiante de 4° semestre, 19 años)-Tercera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? Isabella responde que en el caso de los números naturales sería 7, 8, …, y que en el caso de los números decimales sería 6.1.  naturales7, 8... número decimales 6.1	▪ (SSN)(SM) Posiblemente, piensa que el sucesor de cualquier número es un número mayor o los mayores que él –como su ejemplo: naturales 7, 8, ... –. Afirma tanto en naturales como en decimales la existencia de un sucesor, de nuevo podría estar pensando en consecutivos falsos 6 = 6.0 y 6.1.
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta. Isabella justifica su afirmación con la idea de que "tiene que ir sumando para llegar a la unidad". En la entrevista, ella dice que el término "unidad" se refiere al entero que se encuentra en el extremo derecho de un intervalo, y con la expresión "tiene que ir sumando" se refiere a una "secuencia de números" que hay en dicho intervalo y así llegar a ese extremo derecho.  ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica su respuesta. Si porque se tiene que ir sumando para llegar a la unidad	▪ (SSN) Parece que al responder "si" afirma que todos los números tienen sucesor. No está claro su argumento. Pareciera que tiene la idea de una secuencia de números, de consecutivos falsos, como se ha mostrado en respuestas anteriores. ▪ Quizás, quiso hablar de intervalos, por preguntas anteriores, cuando en esta ocasión no se especifica ningún intervalo. No obstante, se quiere mostrar un ejemplo de cómo pudo haber sido su forma de pensar con respecto al término "secuencia". Por ejemplo, el intervalo entre 1 y 2, una secuencia a la que ella alude sería: 1 + 1/10, 1 + 2/10, … hasta llegar a 1 + 10/10 = 2.
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Isabella responde que 0.9 no tiene un sucesor con una cifra decimal.	▪ Al responder que no, contradice sus respuestas anteriores, en las que pone en evidencia que todos los números tienen sucesor –quizás tuvo dificultad para comprender la pregunta–.

Códigos usados en la clasificación de las actuaciones de Isabella: (PF) Partición Finita de un segmento-al parecer unitario. (FD) Numero finito de números-Discreción. (EP) Evoca Procedimientos. (CFD) Conversión de Fracción a expansión Decimal. (SSN) Siguiente, Secuencia, Numeración. (SS) Subdivisiones en un Segmento. (SD) Subdivisiones que corresponden a números Decimales. (SP) Subdivisiones Pequeñas, o cada vez más pequeñas, en un segmento. (SM) Sucesor como un número Mayor.

Características del marco explicativo inicial de Isabella

Se aprecia en la columna del lado derecho de las Tablas 5.7, 5.8, 5.9 las interpretaciones de las respuestas que se han clasificado usando los códigos que se encuentran al final de la última tabla. Esas clasificaciones responden a ideas de Isabella sobre la densidad, la discreción, y subdivisiones en un segmento y números decimales. En base a esta clasificación se caracteriza el marco explicativo inicial de esta profesora en formación.

Sobre densidad y discreción: Las respuestas clasificadas como (PF) y (FD) en las Tablas 5.7 y 5.8, ponen de manifiesto un pensamiento discreto avanzado cuando Isabella supone la existencia de un conjunto finito de números entre enteros, fracciones, decimales y combinaciones junto con la concepción alternativa de “consecutivos falsos”. Se puede ver en las respuestas de Isabella que se han clasificado como (SSN) que considera a los números en una secuencia y como (SM) en la cual “el siguiente” es un número mayor.

Sobre subdivisiones en un segmento y números decimales: 1. Isabella refiere que al realizar subdivisiones, éstas corresponden a números decimales, son las respuestas clasificadas como (SS), (SD). En algunos casos considera estas subdivisiones cada vez más pequeñas (ver interpretaciones clasificadas como (SP) en la Tabla 5.8). Solo en algunas situaciones, Isabella asimila una subdivisión o partición finita (el caso de la discreción), en otras, no indica qué tipo de subdivisión hace, finita o infinita. En la respuesta clasificada como (CFD) considera las subdivisiones correspondientes a fracciones para luego hacer la respectiva conversión a escritura decimal (ver Tabla 5.7). 2. Las respuestas clasificadas como (EP) permite apreciar que quizás recapitule procedimientos para localizar decimales en la recta.

5.3.4 Marco explicativo inicial de Melisa

A continuación, en las Tablas 5.10, 5.11 y 5.12 se encuentran tanto, las respuestas de Melisa al cuestionario, como las interpretaciones que se hacen para encontrar elementos que definan su marco explicativo inicial.

Tabla 5.10 Respuestas de Melisa (Estudiante de 4° semestre, 19 años)-Primera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
1 ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta. Según Melisa, se encuentran números decimales o fracciones si 2 y 3 son números enteros. Si, el número 2 y 3 se manejan como números enteros entre ellos se encuentran números decimales o Fraccionarios	▪ (EDF)(EP) Considera la existencia de números decimales o fracciones sin justificación alguna. No obstante, se puede suponer que al referir a 2 y 3 como números enteros está pensando en la localización de números decimales y fracciones en el segmento entre 2 y 3.
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3? Para Melisa existe una infinidad de números decimales. Existe una infinidad de números decimales	▪ (ID) Sin justificación alguna afirma que hay una infinidad de números decimales.

Tabla 5.11 Respuestas de Melisa (Estudiante de 4° semestre, 19 años)-Segunda parte

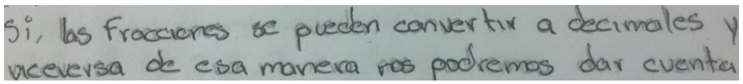
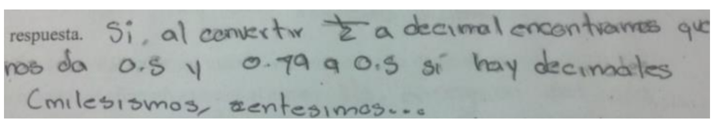
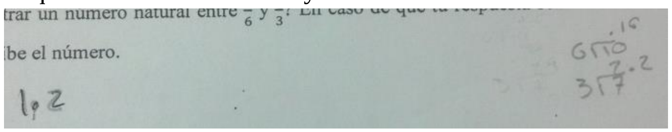
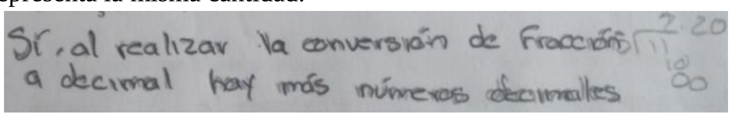
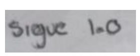
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Melisa argumenta con la conversión entre decimales y fracciones. En la entrevista se le pregunta si hay una finitud o una infinidad de números decimales entre fracciones a lo que responde que hay una infinidad.  Si, las fracciones se pueden convertir a decimales y viceversa de esa manera nos podremos dar cuenta	▪ (CEFD)(EDF) Asegura la existencia de fracciones y decimales a través del proceso de conversión entre éstos –no insinúa que esa conversión no siempre ocasiona un número decimal, es decir una expansión decimal finita–. En el proceso de conversión, se supone que hace referencia a números racionales, y no a los números irracionales ya que éstos no tienen representación fraccionaria. ▪ (ID) Expresa que hay una infinidad de números decimales en el intervalo.
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta. Melisa asevera que sí hay números decimales y/o fracciones en el intervalo dado, pero no justifica su afirmación.	▪ (EDF) Permanece con la idea de la existencia de números intermedios en un intervalo sin justificación alguna. Sin embargo, se podría decir que piensa en la conversión, como en la pregunta anterior.
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta. Melisa justifica la presencia de números decimales en el intervalo con la conversión de fracción a decimal: 1/2 = 0.5, y menciona que entre 0.49 y 0.5 hay decimales como las centésimas, las milésimas, posiblemente, quería describir otros valores posicionales. En la entrevista solo refiere que hay un “número infinito de números” en el intervalo.  respuesta. Si, al convertir ½ a decimal encontramos que nos da 0.5 y 0.49 a 0.5 sí hay decimales (milesismos, centesimos...	▪ (CFD) Realiza la conversión de fracción a número decimal, 1/2 = 0.5 para aseverar que entre 0.5 = 0.50 y 0.49 hay decimales. Se podría pensar en una flexibilidad de pensamiento, ya que usa dos representaciones simbólicas de un número: de una representación como fracción a una expansión decimal de ese número. ▪ (ID)(VP) Indica la existencia de una infinidad de números en el intervalo al referir “número infinito”. Además, pone de manifiesto el uso de valores posicionales como las centésimas y las milésimas, quizás, otros, para señalar que cada vez hay decimales, al parecer como un proceso infinito.
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo. Melisa menciona que no existe el número decimal más pequeño.	▪ La respuesta de Melisa no aporta información sobre su forma de pensar.

Tabla 5.12 Respuestas de Melisa (Estudiante de 4° semestre, 19 años)-Tercera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Melisa escribió los números 1 y 2. Ella realiza las correspondientes conversiones de fracción a decimal de los extremos del intervalo (ver derecha de la imagen), y así observar qué números naturales hay. 	▪ (CFD) Realiza las divisiones correspondientes de las fracciones de los extremos del intervalo en las que evidencia conversiones de fracción a un número con expansión decimal.
8. ¿Entre 11/5 y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta. Su respuesta es afirmativa, Melisa dice que sí hay decimales en el intervalo y lo explica con la conversión de fracción a decimal. Al parecer, no reconoce que 11/5 y 2.2 representa la misma cantidad. 	▪ (CFD) Al parecer, realiza la división 11 entre 5 y su resultado es correcto, sin embargo, tiene dificultades para interpretar la equivalencia entre 2.2 y 2.20. Esto podría significar que ocurre solamente en el caso de números decimales, ya que no tiene inconvenientes cuando se trata de la equivalencia entre fracciones y decimales –especialmente cuando se trata de fracción a decimal– por respuestas anteriores.
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? Melisa responde que 6.1.	▪ (S) Al parecer, su pensamiento se encuentra en un sistema de conocimientos de dominio número decimal para responder a esta pregunta.
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta. Su respuesta es afirmativa. Melisa no justifica el porqué de su afirmación.	▪ (S) Supone que todos los números tienen un sucesor, quizás piense que el sucesor es un número mayor –no proporciona ejemplos–.
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Melisa anotó que “sigue 1.0”. 	▪ Responde a la pregunta de manera adecuada, se puede pensar que en su respuesta subyace la idea del “siguiente”.

Códigos usados en la clasificación de las actuaciones de Melisa: (EDF) Existencia de números Decimales y Fracciones. (ID) Infinidad de números-Densidad (CFD) Conversión de Fracción a expansión Decimal. (CEFD) Conversión Entre Fracciones y números con escritura Decimal –finitos, periódicos y mixtos. (EP) Evoca Procedimientos. (S) Sucesor. (SM) Sucesor es un número Mayor. (VP) Valores Posicionales de los números decimales.

Características del marco explicativo inicial de Melisa

Las respuestas de Melisa al cuestionario, que se muestran en la columna de la izquierda de la Tablas 5.10. 5.11 y 5.12, se interpretaron y se clasificaron usando los códigos que se encuentran al final de la última tabla. Esas clasificaciones responden a concepciones alternativas de Melisa correspondientes a la densidad, la discreción y los números decimales y fracciones; y se conoce su marco explicativo inicial.

Sobre densidad y discreción: Las actuaciones de Melisa, ver las interpretaciones de las respuestas clasificadas como (ID) en las Tablas 5.10 y 5.11, ponen de manifiesto un pensamiento denso ingenuo al asegurar la existencia de una infinidad de números intermedios entre decimales y/o fracciones, pero sin argumentaciones que conlleven a su afirmación. En las respuestas clasificadas como (S) en la Tabla 5.12 se pone en evidencia la existencia de un sucesor para todos los números, lo que significa que Melisa tiende a pensar de manera discreta en este contexto. Se concluye que Melisa puede tener un pensamiento discreto-denso.

Sobre decimales y fracciones: 1. Las interpretaciones de las respuestas de Melisa clasificadas como (EDF) en las Tablas 5.10 y 5.11, permiten aseverar la existencia de decimales y/o fracciones en un intervalo sin aludir finitud o infinitud de números. 2. Las respuestas clasificadas como (CFD) y (CEDF) pone de manifiesto el empleo de la conversión, en el primer caso, de fracción a escritura decimal, en el segundo caso, entre ambas representaciones numéricas (se cree que ella solo refiere números racionales puesto que se pueden representar en fracción). Cabe mencionar que Melisa, al parecer, enfrenta dificultades para interpretar la equivalencia entre 2.2 = 2.20 (ver pregunta 8). 3. Melisa quizás rememore procedimientos para localizar decimales y fracciones en la recta, ver respuesta clasificada como (EP) en la primera pregunta. 4. En la respuesta clasificada como (VP), en la Tabla 5.11, Melisa reconoce valores posicionales de los números decimales como los centésimos, los milésimos, posiblemente, otros.

5.3.5 Marco explicativo inicial de Amanda

Las respuestas, así como las interpretaciones de las respuestas de Amanda, se muestran en los siguientes apartados, en las Tablas 5.13, 5.14 y 5.15, que permitirán conocer las características de su marco explicativo inicial.

Tabla 5.13 Respuestas de Amanda (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Primera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
1 ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta. Amanda en su cuestionario escribe que hay partes más pequeñas que enteros. En la entrevista menciona que hacía énfasis en los números decimales. Si, porque siempre hay partes más pequeñas que enteros.	▪ (SS)(SP) Al parecer tiene en cuenta la partición, divide el segmento unitario en partes más pequeñas.
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3? Amanda dice que hay 9 números decimales. En la entrevista ella expresa que solo tuvo en cuenta los números con dos cifras decimales: 1.21, 1.22, … ,1.29. 9	▪ (PF)(FD)(EP) Subyace una finitud de números intermedios. Toma en cuenta una determinada cantidad de cifras decimales para afirmar que hay 9 números decimales en el intervalo, las centésimas. Evoca la idea de números consecutivos falsos –quizás rememore procedimientos para ubicar números decimales en la recta–.
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Amanda afirma la existencia de números decimales entre fracciones argumentando que una fracción también es decimal. Si porque una fracción tambien es un decimal.	▪ (CFD) Asegura la existencia de decimales a través del proceso de una representación como fracción a una escritura decimal de ese número.
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta. Amanda describe en su cuestionario: "Depende si el número es antecesor y el fraccionario sucesor o al contrario". Para entender lo anterior, en la entrevista, Amanda señala un ejemplo: en el intervalo entre 3/4 y 8/8=1 refiere que 1 es el sucesor de 3/4, de igual manera sucede cuando se le pregunta por el intervalo entre 0.5 y 7/3. Ella manifiesta que 7/3 es el sucesor de 0.5; Amanda explica que uno de los extremos del intervalo está escrito en fracción y el otro en número decimal por lo que concluye que no hay otro número entre una fracción y un decimal, o viceversa. Justifica tu respuesta. Depende si el número decimal es antecesor y el fraccionario sucesor o al contrario.	▪ (CF)(S)(FD) Supone que los extremos de un intervalo son consecutivos falsos si son representaciones distintas (decimal y fracción), luego se puede suponer que está pensando que no hay otro número en ellos. De manera implícita señala la existencia de un sucesor para un número decimal y/o una fracción.

Tabla 5.14 Respuestas de Amanda (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Segunda parte

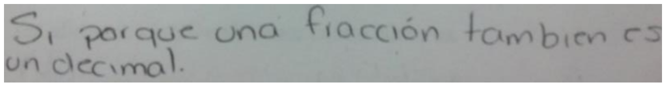
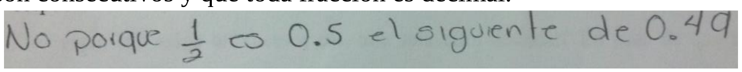
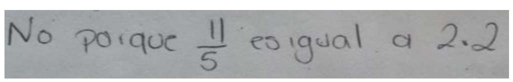
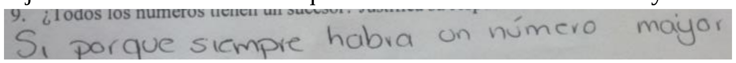
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Amanda habla de la existencia de números decimales entre fracciones justificando que una fracción también es decimal. 	▪ (CFD) Argumenta la existencia de decimales a través del proceso de conversión de una fracción a una expansión decimal de ese número.
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta. Amanda indica que 1/2 = 0.5 = 0.50 es el sucesor de 0.49. Ella menciona en la entrevista que son los mismos argumentos de anteriores preguntas, piensa que 0.49 y 1/2 son consecutivos y que toda fracción es decimal. 	▪ (CFD)(CF)(S)(FD) Realiza el proceso de una representación fraccionaria a escritura decimal finita. Usa el mismo argumento: un decimal y una fracción son consecutivos falsos –por lo que no hay números intermedios–. ▪ (S) Cree que 0.5 = 0.50 es el sucesor de 0.49.
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo. Amanda menciona que no existe el número decimal más pequeño.	▪ La respuesta de Amanda pareciera contradecir respuestas anteriores por su forma de razonar, ya que se esperaba que registrara algún número decimal "pequeño" como 0.1, 0.01, 0.001 o 0.0001…
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Amanda no respondió en esta pregunta, en la entrevista manifestó no haber entendido la pregunta.	▪ No se puede decir nada al respecto.
8. ¿Entre 11/5 y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta. Amanda reconoce que 11/5 y 2.2 representan el mismo valor numérico. 	▪ (CFD) Reconoce que 11/5 y 2.2 son expresiones equivalentes, al parecer se apoya en la conversión de una representación simbólica del número como fracción a una escritura decimal (11/5 = 2.2 haciendo la división, o bien 11/5 = 2 1/5 = 2 + 0.20 = 2.2).

Tabla 5.15 Respuestas de Amanda (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Tercera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? Amanda escribe que el sucesor de 6 es 7.	▪ (S)(SM)(CF) Por respuestas anteriores, se cree que no distingue que en el conjunto de los números naturales existe el sucesor, por lo que podría estar apoyándose en la idea de números consecutivos "falsos", –también puede estar asociado el tema del número mayor–.
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta. Amanda justifica su afirmación de que un sucesor es un número mayor.  Si porque siempre habia un número mayor	▪ (S)(SM) Su concepción alternativa de sucesor es un número mayor o los mayores a él.
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Su respuesta es negativa.	▪ Al responder que no, contradice sus respuestas anteriores, en las que pone de manifiesto que todos los números tienen un "siguiente" –quizás le generó dificultad comprender la pregunta–.

Códigos usados en la clasificación de las actuaciones de Amanda: (PF) Partición Finita de un segmento-al parecer unitario. (FD) Finito/Discreción. (CFD) Conversión de Fracción a expansión Decimal. (EP) Evoca Procedimientos. (SS) Subdivisiones en un Segmento. (SP) Subdivisiones Pequeñas en un segmento. (S) Sucesor. (SM) Sucesor como un número Mayor. (CF) Consecutivos Falsos.

Características del marco explicativo inicial de Amanda

Las respuestas de Amanda se encuentran en las Tablas 5.13, 5.14 y 5.15, las cuales se han clasificado usando los códigos que se encuentran al final de la última tabla. Esas clasificaciones responden a nociones de Amanda respecto a la densidad, la discreción y los números decimales. En base a esta clasificación se caracteriza el marco explicativo inicial de esta profesora en formación.

Sobre densidad y discreción: En las respuestas clasificadas como (FD), (CF), (S) y (SM) en las Tablas 5.13, 5.14 y 5.15 Amanda muestra ejemplos de pensamiento discreto ingenuo debido a que supone que un número decimal y una fracción son consecutivos, luego no hay otro número entre ellos, además, cree que el "sucesor de un número" es un número mayor. Sin embargo, en la respuesta clasificada como (PF) (ver 2ª pregunta, Tabla 5.13) expone una situación de pensamiento discreto avanzado al describir la existencia de un conjunto finito de números entre decimales. Se concluye que Amanda es una profesora en formación con tendencia a pensar de manera discreta ingenua por la mayoría de sus respuestas.

<u>Sobre números decimales</u>: 1. Se podría decir que Amanda se apoya en la conversión de una representación simbólica del número como fracción a una escritura decimal, ver respuestas clasificadas como (CFD). 2. La respuesta clasificada como (EP) en la Tabla 5.13 permite caracterizar a Amanda la idea de la ubicación de números decimales en la recta numérica. 3. Se cree que ella refiere a números decimales o fracciones como "partes más pequeñas que enteros" al realizar particiones en un segmento, ver respuestas clasificadas como (SS) y (SP) en la Tabla 5.13.

5.3.6 Marco explicativo inicial de Ana

Las respuestas de Ana al cuestionario se encuentran en las Tablas 5.16, 5.17 y 5.18, así mismo aparecen interpretaciones de las respuestas en la columna de la derecha que permiten conocer características de su marco explicativo inicial.

Tabla 5.16 Respuestas de Ana (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Primera parte

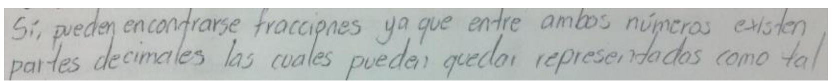
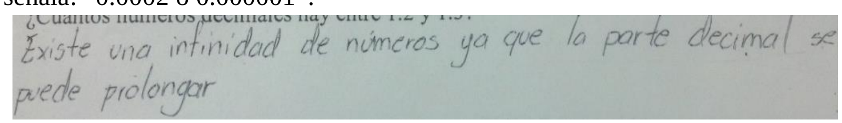
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
1. ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta. Ana argumenta la presencia de fracciones al expresar que "hay partes decimales que se pueden representar como fracciones". En la entrevista ella menciona un ejemplo: 0.5 = 1/2.  Sí, pueden encontrarse fracciones ya que entre ambos números existen partes decimales las cuales pueden quedar representados como tal	▪ (SS)(SDF)(RDF) Habla de la presencia de números con escritura decimal como subdivisiones en el segmento unitario, los cuales refiere que se pueden representar como fracciones –su registro en el cuestionario hace pensar que solo supone los números racionales–. ▪ (RDF) Al parecer, reconoce que no toda fracción es un número decimal (escritura decimal finita).
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3? Ana afirma que hay una infinidad de números decimales entre 1.2 y 1.3, y justifica su respuesta señalando que "la parte decimal se puede prolongar" poniendo énfasis en que cada vez se puede agregar dígitos en la parte decimal de un número. Durante la entrevista ella señala: "0.0002 o 0.000001".  Existe una infinidad de números ya que la parte decimal se puede prolongar	▪ (ID) Asegura que hay una infinidad de números decimales. Subyace la idea de agregar dígitos en la parte decimal de un número –en el ejemplo que menciona solo indica ceros en el medio, lo que se podría decir que está pensando cada vez en números menores, aunque éstos no están en el intervalo considerado en la pregunta (0.0002, 0.000001)–.

Tabla 5.17 Respuestas de Ana (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Segunda parte

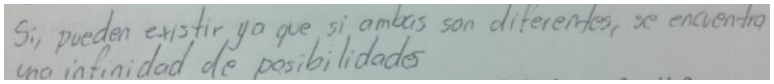
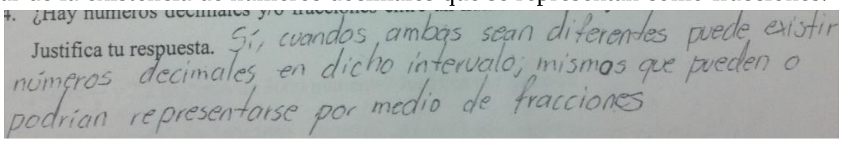
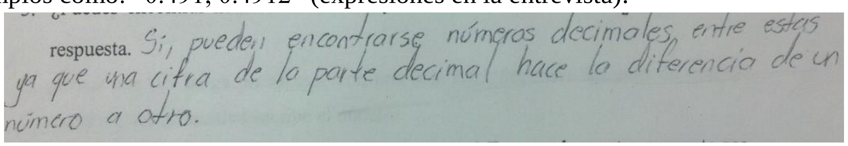
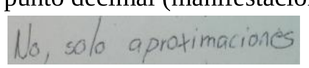
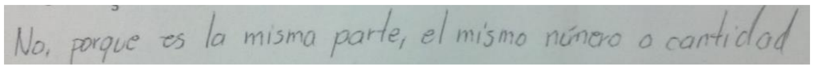
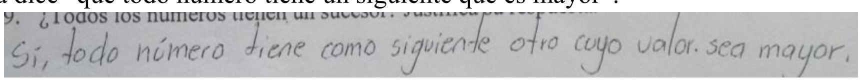
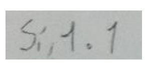
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Al parecer, Ana refiere que si las fracciones ubicadas en los extremos son diferentes respecto al valor numérico entonces hay una infinidad de "posibilidades", quizás alude esta expresión a una infinidad de números decimales por la pregunta.  Si, pueden existir ya que si ambas son diferentes, se encuentra una infinidad de posibilidades	▪ (ENE)(ID) Se podría decir que observa primero si los extremos del intervalo no son fracciones equivalentes para luego aseverar la presencia de una infinidad de números intermedios –quizás números decimales–.
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta. De nuevo Ana hace mención a la no equivalencia entre los extremos del intervalo para hablar de la existencia de números decimales que se representan como fracciones.  Justifica tu respuesta. Si, cuandos ambas sean diferentes puede existir números decimales en dicho intervalo, mismos que pueden o podrían representarse por medio de fracciones	▪ (ENE)(RDF) Sigue con el argumento anterior, de verificar la equivalencia entre decimales y/o fracciones para afirmar la existencia de éstos en el intervalo. Señala la conversión de una representación decimal finita a fracción, aunque no proporciona ejemplos. Se podría decir que tiene una flexibilidad de pensamiento en representaciones simbólicas de los números como la decimal (finita) y la fraccionaria.
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta. Ana pone énfasis en que la parte decimal de un número difiere a la de otro si se agrega o se quita una cifra para tratarse de números decimales diferentes. Ella explica que con esta forma de encontrar números decimales hay una infinidad entre 0.49 y 1/2, y describe ejemplos como: "0.491, 0.4912" (expresiones en la entrevista).  respuesta. Si, pueden encontrarse números decimales, entre estas ya que una cifra de la parte decimal hace la diferencia de un número a otro.	▪ (ID) Evoca un proceso infinito o numerable: añadir dígitos en las expansiones decimales. Con este método, al parecer no considera el "cero" en medio de la parte decimal de un número por su ejemplo: 0.491, 0.4912, por lo que se podría decir que los números que ella describe son cada vez más grandes, pero sin llegar a 1/2.
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo. Ana indica que el número decimal más pequeño no existe, ella anota que solo "aproximaciones". El término aproximaciones para ella significa el proceso de agregar "ceros" y "unos" después del punto decimal (manifestaciones en la entrevista).  No, solo aproximaciones	▪ (ID) Tiene la misma concepción que en respuestas anteriores. En esta situación señala "ceros" y "unos" que van después del punto decimal de un número para decir que no existe el decimal más pequeño. Se podría inferir que, posiblemente, esté pensando en números como 0.001, 0.0001, 0.111001, 0.111, etc.

Tabla 5.18 Respuestas de Ana (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Tercera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Ana escribió los números 1 y 2.	▪ Responde como se esperaba, pero no suministra ejemplos de procedimientos de la resolución del problema. Quizás podría haber realizado las divisiones correspondientes.
8. ¿Entre 11/5 y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta. Ana reconoce que 11/5 y 2.2 son expresiones numéricas equivalentes.  No, porque es la misma parte, el mismo número o cantidad	▪ (RDF) Posiblemente, pone de manifiesto, nuevamente, el reconocimiento de representaciones decimales y fracciones para expresar un número. Nótese que menciona términos como “parte”, “número” y “cantidad”. Pareciera que éstas son expresiones equivalentes para Ana. Quizás, con “parte” estaría relacionando una parte de la recta numérica, con “cantidad” el valor numérico y con “número” la simbología para representar dicho valor numérico.
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? Ana escribió que 7 es el sucesor de 6.	▪ (S)(SM) Se pensamiento es que el sucesor de un número (natural) es un número mayor por la expresión que aparece en la pregunta posterior.
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta. Ana dice “que todo número tiene un siguiente que es mayor”.  Si, todo número tiene como siguiente otro cuyo valor. sea mayor.	▪ (S)(SM) Su concepción alternativa de sucesor es un número mayor que le sigue a dicho número.
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Su respuesta es afirmativa. Ana escribió el número 1.1. En la entrevista señala que la expresión numérica: 1 no tiene parte decimal por lo que no sería sucesor de 0.9, por ello escribió 1.1  Si, 1.1	▪ Al parecer, no reconoce equivalencia entre decimales (1 = 1.0 = 1.00 = …). En anteriores respuestas solo reconoce la equivalencia entre un decimal y una fracción. Con el argumento que da en la entrevista, posiblemente, cree que los números naturales y enteros, cuya parte decimal es cero, no tienen parte decimal aun cuando se está pensando en el conjunto de los números decimales.

Códigos usados en la clasificación de las actuaciones de Ana: (SS) Subdivisiones en un Segmento. (SDF) Subdivisiones que corresponden a números Decimales para reescribirlas en Fracciones. (RDF) reconocimiento de una Representación Decimal y Fraccionaria de un número. (ENE) reconoce Expresiones No Equivalentes. (ID) Infinidad de números-Densidad. (S) Sucesor. (SM) Sucesor es un número Mayor.

Características del marco explicativo inicial de Ana

Las interpretaciones que se han hecho de las respuestas de Ana al cuestionario, las cuales se muestran en la columna de la derecha de las Tablas 5.16, 5.17 y 5.18, se clasificaron usando los códigos que se encuentran al final de la última tabla. Esas clasificaciones responden a ideas de Ana respecto a la densidad, la discreción y los números decimales y fracciones; y a través de ellas se puede hacer una caracterización de su marco explicativo inicial.

Sobre densidad y discreción: A través de sus expresiones Ana evidencia una tendencia a tener un pensamiento denso avanzado, ver las interpretaciones de las respuestas clasificadas como (ID) en las Tablas 5.16 y 5.17. Ella indica el proceso de añadir dígitos en medio de la parte decimal de un número –en algunos casos ceros–, para aseverar la infinidad de números intermedios entre decimales y/o fracciones. Sin embargo, pone en evidencia un pensamiento discreto ingenuo cuando supone que el sucesor es un número mayor, ver respuestas clasificadas como (S) y (SM). Con base en los supuestos anteriores se puede decir que Ana, al parecer, tiene un pensamiento discreto-denso.

Sobre decimales y fracciones: 1. Ana, posiblemente, tiene una flexibilidad de pensamiento para interpretar una representación decimal y fraccionaria para expresar un mismo número, ver respuestas clasificadas como (RDF), en las que ella pone énfasis en la conversión de una escritura decimal a fraccionaria en el conjunto de los números racionales. Así mismo, reconoce cuando una expresión fraccionaria no es equivalente a una decimal, ver respuestas clasificadas como (ENE). Sin embargo, parece que tiene dificultades para interpretar equivalencia entre decimales (ver pregunta 11). 2. Ana considera subdivisiones en un segmento las cuales corresponden a números con escritura decimal para luego reescribirlas como fracción (se supone que este proceso lo hace con racionales), ver respuesta clasificada como (SS) y (SDF) en la Tabla 5.16.

5.3.7 Marco explicativo inicial de Fabiola

A continuación, en las Tablas 5.19, 5.20 y 5.21 se encuentran tanto, las respuestas de Fabiola al cuestionario, como las interpretaciones que se hacen para encontrar características de su marco explicativo inicial.

Tabla 5.19 Respuestas de Fabiola (Estudiante de 6° semestre, 36 años)-Primera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
1 ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta. Fabiola expresa que dividiendo el segmento de recta, entre 2 y 3, en particiones se llega al número 3. Ella menciona que se pueden encontrar fracciones como 2/2, 2/3, 2/4, …	▪ (PF)(FD)(SN) La numeración 2/2, 2/3, 2/4, …, al parecer, describe una partición finita en la que se cree que Fabiola señala estas fracciones debido a que el primer extremo del intervalo es un 2 y lo relaciona con los numeradores de las mismas, pese a que no se encuentran en el intervalo entre 2 y 3. Subyace la idea de números consecutivos falsos.
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3? Fabiola registró que hay 9 números en el intervalo. Ella dice que se puede ubicar en una “regla” los extremos del intervalo y que se visualiza que “hay números pequeños” como “1.21, 1.22, 1.23, …, 1.29” (manifestaciones en la entrevista). Si nueve	▪ (PF)(FD)(SN) Evoca un proceso finito. Toma en cuenta una determinada cantidad de cifras decimales para afirmar que hay 9 números decimales en un intervalo. ▪ (EP)(FD) Considera necesario el uso de una “regla” para localizar números decimales. Nuevamente, subyace la idea de los números consecutivos falsos.
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Fabiola escribe en su cuestionario el siguiente ejemplo: “7/9 = 0.7777”, como una manera de mostrar que sí hay números en escritura decimal entre dos fracciones. Si esta puede ser por ejemplo $\frac{7}{9} = 0.7777$	▪ (CEFD) Se puede apreciar que hace uso de la conversión entre fracciones y números con escritura decimal infinita, posiblemente se refiera a números racionales. No obstante, en la pregunta se indicaba por números decimales, su ejemplo es una fracción con una escritura decimal infinita (aunque ella no especifica “puntos suspensivos” en la escritura decimal, o $0.\overline{7}$).
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta. Fabiola argumenta con la conversión entre decimales y fracciones. Ella dice que por esta razón escribió el ejemplo en la pregunta anterior (expresiones en la entrevista), pese a que no es un número decimal. Si por las fracciones se convierten en decimales y los decimales a fracción.	▪ (CEFD) Piensa en la idea de conversiones en el conjunto de los números racionales, entre fracciones y números con escritura decimal. ▪ (RDF) Reconoce, al parecer, representaciones simbólicas para expresar un número con escritura fraccionaria y decimal. Un ejemplo sería el que propone en la respuesta anterior.

Tabla 5.20 Respuestas de Fabiola (Estudiante de 6° semestre, 36 años)-Segunda parte

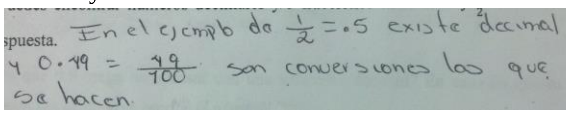
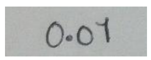
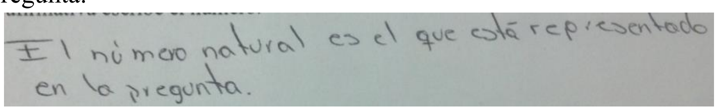
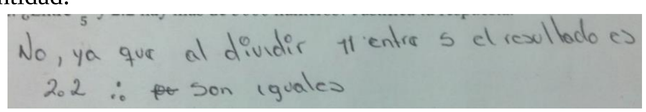
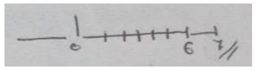
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta. Fabiola nuevamente habla de la conversión entre fracciones y números con expansión decimal (quizás, finita, periódica y mixta). Ella registra en su cuestionario 1/2 =0.5 y 0.49 = 49/100.  spuesta. En el ejemplo de $\frac{1}{2}$ = .5 existe decimal y 0.49 = $\frac{49}{100}$ son conversiones las que se hacen.	(CEFD)(RDF) Nuevamente, subyace la idea de representaciones numéricas entre fracciones y expansiones decimales, por ende, podría estar distinguiendo representaciones fraccionarias y decimales. Sin embargo, ella no está respondiendo a la pregunta, solo afirma que se convierte1/2 en el decimal 0.5, pero no dice nada acerca de la existencia de números decimales o de fracciones en ese intervalo.
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo. Fabiola supone la existencia del número decimal más pequeño: 0.01. Ella dice que consideró el 0, pero para ella el 0 no es un número decimal, es un entero, por lo que pensó en el 0.01 (expresiones en la entrevista).  0.01	▪ (DP)(FD) Considera la existencia del número decimal más pequeño. ▪ Al parecer le genera conflicto el número 0, solo lo considera como número entero mas no como número decimal (0 = 0.0 = 0.00).
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. En la entrevista Fabiola expresa que 1/6 es el número natural al que hacía referencia a lo que había anotado: “El número natural es el que está representado en la pregunta.”  El número natural es el que está representado en la pregunta.	▪ (CN) Parece que considera que las fracciones son números naturales, quizás se podría decir también, que considera solo las fracciones menores que la unidad, dado que solo se refirió a 1/6 como “número natural”.
8. ¿Entre 11/5 y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta. Fabiola realiza la división 11 entre 5 donde reconoce que 11/5 y 2.2 representa la misma cantidad.  No, ya que al dividir 11 entre 5 el resultado es 2.2 ∴ ~~pt~~ son iguales	▪ (CEFD)(RDF) Por respuestas anteriores, se puede decir que hace uso de la equivalencia entre fracciones y números con expansiones decimales, aunque en esta situación efectúa la conversión de fracción a número decimal.

Tabla 5.21 Respuestas de Fabiola (Estudiante de 6° semestre, 36 años)-Tercera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? Fabiola escribió que 7 es el sucesor de 6, pero, quizás, ella decidió dibujar la recta para argumentar su respuesta, refiriendo 6 y 7 números naturales. 	▪ (S)(SN)(EP) Podría estar apoyándose en las numeraciones descritas en las primeras preguntas en las que podría estar asociando consecutivos falsos, pese a que en este caso 6 y 7 naturales sí son consecutivos. ▪ Usa la recta numérica para la ubicación de 6 y 7, naturales, como medio para justificar su respuesta.
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta. Fabiola menciona que todos los números tienen sucesor.	▪ (S)(SN) Posiblemente, por numeraciones manifestadas al principio del cuestionario, se tiene la idea de los consecutivos falsos, por lo que se cree que podría estar apoyándose en ello.
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Fabiola escribió 1.0.	▪ (SN) Responde a la pregunta como se esperaba, se puede pensar que en su respuesta trae a colación la idea de consecutivos falsos.

Códigos usados en la clasificación de las actuaciones de Fabiola: (PF) Partición Finita de un segmento-al parecer unitario. (FD) Numero finito de números-Discreción. (CEFD) Conversión Entre Fracciones y números con escritura Decimal –finitos, periódicos y mixtos. (EP) Evoca Procedimientos. (RDF) reconocimiento de una Representación Decimal y Fraccionaria de un número. (S) Sucesor. (SN) Sucesor-Numeración. (DP) consideración de la existencia del número Decimal más Pequeño. (CN) Clasificación Números.

Características del marco explicativo inicial de Fabiola

Como puede verse en la columna del lado derecho de las Tablas 5.19, 5.20, 5.21 las respuestas se han clasificado usando los códigos que se encuentran al final de la última tabla. Esas clasificaciones responden a ideas de Fabiola sobre la densidad, la discreción, los números decimales, las fracciones, y los números naturales. En base a esta clasificación se caracteriza el marco explicativo inicial de esta profesora en formación.

Sobre densidad y discreción: Las actuaciones de Fabiola, ver las respuestas clasificadas como (PF) y (FD) en las Tablas 5.19 y 5.20, ponen de manifiesto un pensamiento discreto avanzado al suponer la existencia de una cantidad finita de números intermedios entre enteros y decimales. Así mismo evoca la idea de consecutivos falsos, ver respuestas clasificadas como (S) y (SN) en las Tablas 5.19 y 5.21, y considera la existencia de un sucesor. Además, supone la existencia del número decimal más pequeño –esta circunstancia puede estar influida por su tendencia a pensar de manera discreta, de lo contrario, pudo haber visto, por ejemplo, que entre 0 y 0.01 se encuentra al menos un decimal: 0.001, y así sucesivamente–, ver respuesta clasificada como (DP) en la Tabla 5.20.

<u>*Sobre decimales y fracciones*</u>*:* 1. Las respuestas clasificadas como (CEFD) y (RDF) en las Tablas 5.19 y 5.20 permiten que Fabiola piense las representaciones fraccionaria y decimal para expresar un número, de igual manera, evidencia flexibilidad en el uso de la equivalencia entre fracciones y números con escritura decimal. 2. La respuesta clasificada como (EP) en la pregunta 2 (ver Tabla 5.19) permite observar el uso de procedimientos para localizar decimales en la recta.

<u>*Sobre números naturales*</u>*:* 1. Para Fabiola los números naturales son, posiblemente, las fracciones comprendidas en el intervalo entre 0 y 1, ver respuesta clasificada como (CN) en la Tabla 5.20. 2. La respuesta clasificada como (EP) en la pregunta 9 (ver Tabla 5.21) permite apreciar el uso de procedimientos para ubicar números naturales apoyándose de una "regla numérica".

5.3.8 Marco explicativo inicial de Nicolás

En los siguientes apartados se muestran las interpretaciones de las respuestas de Nicolás al cuestionario en las Tablas 5.22, 5.23 y 5.24 para encontrar características de su marco explicativo inicial.

Tabla 5.22 Respuestas de Nicolás (Estudiante de 6° semestre, 23 años)-Primera parte

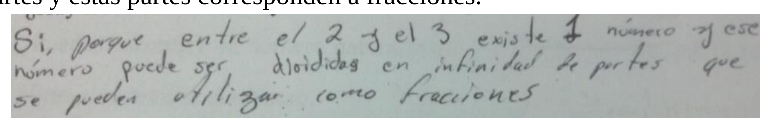
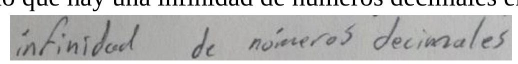
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
1 ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta. Nicolás menciona que entre 2 y 3 hay una unidad que es dividida en una infinidad de partes y estas partes corresponden a fracciones.  Si, porque entre el 2 y el 3 existe 1 número y ese número puede ser divididos en infinidad de partes que se pueden utilizar como fracciones	▪ (ID)(SS)(SF) Su pensamiento es la partición del segmento de longitud uno en infinidad de partes. Manifiesta que estas partes corresponden a fracciones.
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3? Nicolás respondió que hay una infinidad de números decimales entre 1.2 y 1.3.  infinidad de números decimales	▪ (ID)(SS) Sin argumentación alguna afirma que hay una infinidad de números decimales –quizás podría estar apoyándose en la respuesta anterior–.

Tabla 5.23 Respuestas de Nicolás (Estudiante de 6° semestre, 23 años)-Segunda parte

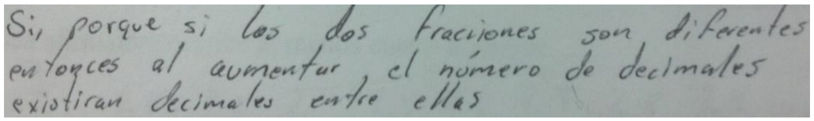
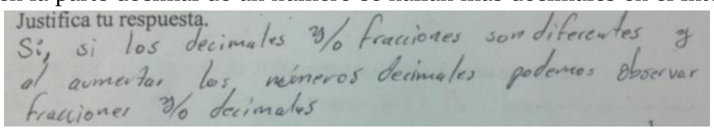
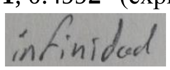
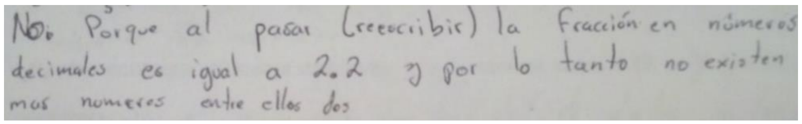
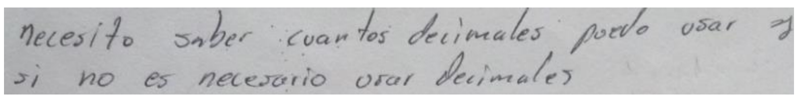
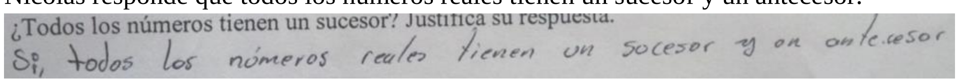
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Nicolás manifiesta que si las fracciones en los extremos son expresiones equivalentes no habría números intermedios, pero sí hay si no lo son. Él menciona que al aumentar la cantidad de cifras decimales existirán números decimales entre las fracciones. Durante la entrevista él trae a colación las centésimas, las milésimas, y las diezmilésimas.  Si, porque si los dos fracciones son diferentes entonces al aumentar el número de decimales existiran decimales entre ellas	▪ (VP)(ED) Relaciona el proceso de agregar dígitos –que evoca números grandes si no incluye ceros en medio de la parte decimal de un número– Además, indica valores posicionales de los decimales como centésimas, milésimas y diezmilésimas –quizás, quiso referir más– para afirmar la existencia de decimales entre fracciones, pero no alude a un proceso infinito. ▪ (ENE) Observa si los extremos del intervalo son expresiones diferentes antes de aseverar la presencia de números intermedios.
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta. Nicolás nuevamente explica que a través del proceso de agrandar la cantidad de dígitos en la parte decimal de un número se hallan más decimales en el intervalo.  Justifica tu respuesta. Si, si los decimales y/o fracciones son diferentes y al aumentar los números decimales podemos observar fracciones y/o decimales	▪ (EDF) Sigue con la noción anterior: añadir dígitos para asegurar la existencia de números decimales en medio del intervalo, sin referir un proceso infinito. ▪ (ENE) Nuevamente, observa que los extremos del intervalo deben ser expresiones no equivalentes para hablar de números en el intervalo.
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta. Nicolás responde que hay una infinidad de números en el intervalo dado. Él dice que se encuentran números como “0.493, 0.498, 0.499”, después dice que “se agrega una cifra más como 0.499**1**, 0.499**2**” (expresiones en la entrevista).  infinidad	▪ (ID) Relaciona un proceso infinito o numerable: añadir dígitos para verificar que cada vez hay más decimales –no menciona las fracciones– En su procedimiento solo evoca números cada vez más grandes entre 0.49 y 0.50 = 0.5, por ejemplo: 0.49**3**, 0.49**8**, 0.49**9**, 0.49**91**, 0.49**92**.
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo. Nicolás anota que no existe el número decimal más pequeño.	▪ Por expresiones anteriores, su respuesta podría inferirse a la atribución del proceso de agregar dígitos, especialmente ceros, para indicar que no existe el decimal más pequeño. Quizás esté pensando en números como -0.1, -0.01, -0.001, 0, 0.001, 0.01, 0.1, y así cada vez se hallan más decimales pequeños.

Tabla 5.24 Respuestas de Nicolás (Estudiante de 6° semestre, 23 años)-Tercera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Nicolás escribió los números 1 y 2. Nicolás expresa que realizó las divisiones de los extremos del intervalo y observó qué números naturales hay en medio.	▪ (CFD) Pone de manifiesto el uso de una representación fraccionaria a expansión decimal, y de esta forma, observar qué números naturales hay en el intervalo ($1/6 = 0.1\overline{6}$ y $7/3 = 2.\overline{3}$, luego se identifican 1 y 2).
8. ¿Entre 11/5 y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta. Nicolás refiere que al reescribir la fracción 11/5 en escritura decimal es equivalente a 2.2, en consecuencia, no existen números entre ellos.  No. Porque al pasar (reescribir) la fracción en números decimales es igual a 2.2 y por lo tanto no existen mas numeros entre ellos dos	▪ (CFD) Evidencia que las expresiones numéricas son equivalentes a través del proceso de conversión de una fracción a una escritura decimal finita.
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? Nicolás menciona que para responder la pregunta necesita saber cuántas cifras decimales usar y si es necesario usarlas.  necesito saber cuantos decimales puedo usar y si no es necesario usar decimales	▪ (S) Su pensamiento es de un sistema de conocimientos de dominio número decimal y no de dominio número natural en esta situación, pese a que en la pregunta se especifica por el conjunto de los números naturales. ▪ Su inquietud podría estar basada en su procedimiento de añadir dígitos, por ejemplo: 6.0, 6.1, 6.2, … o 6.00, 6.01, 6.02, 6.03, … o 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, … Nótese de que se está vinculando su respuesta a consecutivos falsos.
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta. Nicolás responde que todos los números reales tienen un sucesor y un antecesor.  ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica su respuesta. Si, todos los números reales tienen un sucesor y un antecesor	▪ (S) Cree que los números reales tienen sucesor, además, de un antecesor también. Se supone que piensa en la agregación de dígitos, como en el caso anterior.
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Nicolás escribió 1.0.	▪ Responde de manera adecuada, parece que se basa en el hecho de saber cuántas cifras decimales utilizar –por manifestaciones anteriores–. Además, en esta pregunta precisamente se especifica cuántas cifras decimales usar.

Códigos usados en la clasificación de las actuaciones de Nicolás: (SS) Subdivisiones en un Segmento. (SF) Subdivisiones que corresponden a Fracciones. (EDF) Existencia de números Decimales y Fracciones. (ED) Existencia de números Decimales. (CFD) Conversión de Fracción a expansión Decimal. (ENE) reconoce Expresiones No Equivalentes. (ID) Infinidad de números-Densidad. (S) Sucesor. (VP) Valores Posicionales de los números decimales.

Características del marco explicativo inicial de Nicolás

Las interpretaciones de las respuestas de Nicolás al cuestionario aparecen en el lado derecho de la Tablas 5.22, 5.23 y 5.24, las cuales se clasificaron usando los códigos que se encuentran al final de la última tabla. Esas clasificaciones responden a concepciones alternativas de Nicolás correspondientes a la densidad, la discreción y los números decimales y fracciones; y se conoce su marco explicativo inicial.

Sobre densidad y discreción:
A través de sus expresiones Nicolás evidencia una tendencia a tener un pensamiento denso avanzado, ver las respuestas clasificadas como (ID) en las Tablas 5.22 y 5.23. Él indica un proceso infinito, o numerable, como agregar dígitos en medio de la parte decimal de un número, evocando números grandes dentro de un intervalo, además de la infinidad de subdivisiones. Se podría decir que la idea de añadir dígitos influye en la no existencia del decimal más pequeño, ver respuesta a la pregunta 6, pero no influye en el "sucesor". En las respuestas clasificadas como (S) expone situaciones que muestran un pensamiento discreto ingenuo cuando cree que para socializar sobre el sucesor de cualquier número se requiere de una cierta cantidad de cifras decimales de dicho número, como los números consecutivos falsos. Se observa en la respuesta a la pregunta 11 que Nicolás responde de manera correcta debido a que se especifica que el "siguiente" debe tener una cifra decimal, quizás esto era lo que esperaba en las preguntas 9 y 10. Finalmente, se concluye que Nicolás tiende a tener un pensamiento discreto-denso.

Sobre decimales y fracciones:
1. Nicolás pone de manifiesto la conversión de fracción a escritura decimal, ver respuestas clasificadas como (CFD). 2. Considera subdivisiones en un segmento (ver respuestas clasificadas como (SS), Tabla 5.22) las cuales corresponden a fracciones (ver respuesta clasificada como (SF) en la pregunta 1). 3. Las interpretaciones de las respuestas de Nicolás clasificadas como (EDF) y (ED) en las Tablas 5.23 permiten asegurar la existencia de decimales, por un lado, y de fracciones y decimales, por el otro. 4. Asimila cuando una expresión –fraccionaria y/o decimal– no es equivalente a otra, ver respuestas clasificadas como (ENE) en la Tabla 5.23. Por último, Nicolás manifiesta valores posicionales de los números decimales, ver respuesta clasificada como (VP) en la pregunta 3.

5.3.9 Marco explicativo inicial de Olga

En este apartado, en las Tablas 5.25, 5.26 y 5.27 se encuentran las respuestas de Olga al cuestionario, así mismo aparecen en la columna de la izquierda de las tablas mencionadas las interpretaciones que se hacen para encontrar elementos que puedan definir su marco explicativo inicial.

Tabla 5.25 Respuestas de Olga (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Primera parte

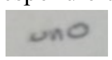
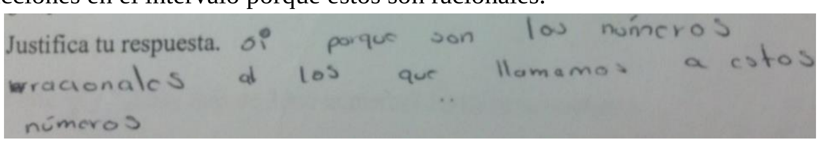
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
1 ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta. Olga menciona que en este intervalo hay números racionales, por ello hay fracciones entre 2 y 3.	▪ (ER) Piensa en números racionales como números intermedios en el intervalo, por lo que deduce que hay fracciones.
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3? Olga interpretó la pregunta como el “incremento de un decimal a otro”, es decir, la diferencia entre 1.3 y 1.2, por ello, respondió que “uno”.  uno	▪ (DD) Habla de un “incremento decimal”, lo que podría explicarse, al parecer, como la diferencia entre 1.3 y 1.2, es decir, 0.1. Se supone que cree que 0.1 es el número que se encuentra en intervalo, a menos que no se haya percatado de su error, o piense otro número.
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Olga indica que hay números decimales entre fracciones porque éstos pertenecen a los racionales.	▪ (ER) Parece que intenta justificar que existen números decimales en un intervalo debido a que pertenecen al conjunto de los números racionales que también están comprendidos allí.
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta. Olga usa el mismo argumento: anota en su cuestionario que sí hay decimales y/o fracciones en el intervalo porque éstos son racionales.  Justifica tu respuesta. sí porque son los números racionales a los que llamamos a estos números	▪ (ER) De nuevo, la presencia de decimales y/o fracciones en un intervalo se debe a la concepción de que éstos pertenecen a la familia de los números racionales.

Tabla 5.26 Respuestas de Olga (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Segunda parte

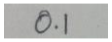
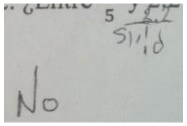
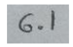
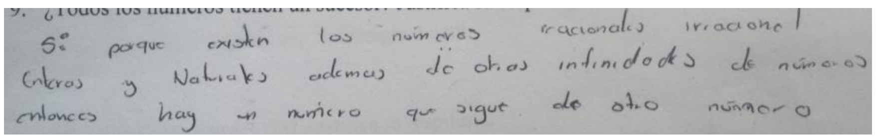
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta. Olga escribe en su cuestionario que hay "números sucesores" tanto de decimales como de fracciones. Para ella 0.49 y 1/2 son consecutivos (manifestaciones en la entrevista).	▪ (CF)(FD) Supone que no hay otro número entre un decimal y una fracción, ya que los considera como números "consecutivos". ▪ Pese a que en la pregunta anterior responde que sí hay números decimales y/o fracciones entre un decimal y una fracción, en un ejemplo particular como en este caso, no usa el mismo argumento, la presencia de números racionales en el intervalo.
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo. Olga escribió 0.1 como el número decimal más pequeño. Olga expresa que había pensado en el "0.0", pero que este número no podía ser el más pequeño porque "es cero y no es un número decimal", luego pensó en 0.1. Ella menciona que se guió por la recta numérica y observó que debía ser 0.1 porque después seguía 0.2, y así, como una "secuencia" (expresiones en la entrevista). 	▪ (CF)(FD) Subyace la idea de números consecutivos falsos. ▪ Al parecer le genera conflicto el número 0, no lo interpreta como número decimal.
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Olga escribió el número natural 1.	▪ Responde a la pregunta como se esperaba, aunque solo escribió el número natural 1. Al parecer, la representación fraccionaria en los extremos del intervalo no le afecta para encontrar un número natural en dicho intervalo. ▪ No aporta información acerca de procedimientos para resolver la pregunta. Sin embargo, se cree que haya realizado las divisiones correspondientes de los extremos del intervalo; esto por la respuesta a la siguiente pregunta.
8. ¿Entre 11/5 y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta. Olga reconoce que 11/5 y 2.2 tienen el mismo valor numérico. En su cuestionario ella realizó la división 11 entre 5 (ver esquina superior derecha de la imagen). 	▪ (CFD) Realiza el proceso de representación fraccionaria a escritura decimal finita a través de la división. ▪ Reconoce la equivalencia entre las expresiones numéricas.

Tabla 5.27 Respuestas de Olga (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Tercera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? Olga registró 6.1 en su cuestionario.  6.1	▪ (S) Posiblemente, su pensamiento se encuentra en un sistema de conocimientos de dominio número decimal para responder a esta pregunta. Se supone que cree que el sucesor es un número mayor.
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta. Olga asegura la existencia de un sucesor para todos los números. Ella escribe en su cuestionario que existen los números racionales, irracionales, enteros y naturales a lo que concluye que “hay un número que sigue de otro número”. No está claro lo que quiso decir, por lo que se le preguntó por sus ideas en la entrevista. Ella explicó a través de ejemplos: “el sucesor de 3.5 es 3.6”, enseguida se le pregunta por el de 1/2 y dice que se “debe convertir a decimal” a lo que manifiesta que después de 0.5 sigue 0.6.  Si porque existen los números racionales irracionales Enteros y Naturales ademas de otros infinidades de números entonces hay un número que sigue de otro número	▪ (S)(CF) Supone que todos los números (naturales, enteros, racionales e irracionales) tienen sucesor, que son consecutivos. ▪ (SM) Por sus manifestaciones, se piensa que evoca la noción de que el sucesor es el que le “sigue de otro número”, por lo que se podría decir que cree que el sucesor en un número mayor. ▪ (CFD) Hace empleo del proceso de conversión de una representación fraccionaria a una escritura decimal finita, como su ejemplo: 1/2 = 0.5.
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Su respuesta es negativa.	▪ Al responder que no, contradice sus respuestas anteriores, en las que pone de manifiesto que todos los números tienen un “siguiente” –quizás le generó dificultad comprender la pregunta–.

Códigos usados en la clasificación de las actuaciones de Olga: (FD) Finito/Discreción. (DD) Diferencia entre Decimales. (CFD) Conversión de Fracción a expansión Decimal. (ER) Existencia de números Racionales. (S) Sucesor. (SM) Sucesor como un número Mayor. (CF) Consecutivos Falsos.

<u>Características del marco explicativo inicial de Olga</u>

Se observa las respuestas de Olga en las Tablas 5.25, 5.26 y 5.27 que se han clasificado usando los códigos que se encuentran al final de la última tabla. Esas clasificaciones responden a concepciones alternativas respecto a la densidad, la discreción y los números decimales y fracciones y los números racionales. Con base en ello se caracteriza el marco explicativo inicial de esta estudiante para profesor.

<u>Sobre densidad y discreción</u>: Las actuaciones de Olga demuestran una tendencia a tener un pensamiento discreto ingenuo, ver respuestas clasificadas como (FD), (CF), (S) y (SM) en las Tablas 5.26 y 5.27, en las que pone en evidencia que dos números, sea número decimal y/o fracción, son consecutivos, por ende, no hay números entre las expresiones numéricas. Olga, posiblemente, cree que el sucesor es un número mayor, que es el que le sigue de acuerdo con la numeración o secuencia que describa (ver pregunta 10).

<u>Sobre números decimales y fracciones</u>: 1. Olga se apoya en el proceso de conversión de una representación simbólica del número como fracción a una escritura decimal finita, ver respuestas clasificadas como (CFD). 2. Parece que hace uso de una diferencia de decimales cuando refiere "incremento de un decimal a otro", ver interpretación clasificada como (DD) en la Tabla 5.25.

<u>Sobre números racionales</u>: Parece que Olga argumenta la existencia de números decimales en un intervalo por el hecho de que pertenecen al conjunto de los racionales, lo que implica que reconoce que los decimales son racionales, ver respuestas interpretadas como (ER) en la Tabla 5.25.

5.3.10 Marco explicativo inicial de Oscar

Las interpretaciones de las respuestas de Oscar al cuestionario se encuentran en las Tablas 5.28, 5.29 y 5.30, en la columna de la derecha, que permiten caracterizar su marco explicativo inicial.

Tabla 5.28 Respuestas de Oscar (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Primera parte

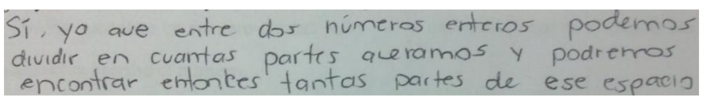
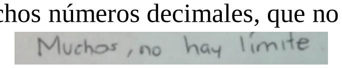
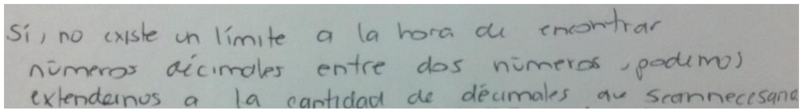
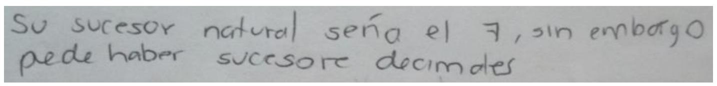
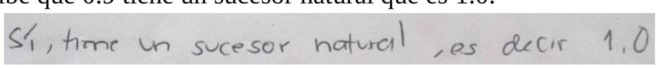
Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
1 ¿Hay fracciones entre 2 y 3? Justifica tu respuesta. Oscar expresa que al dividir el segmento entre 2 y 3 en tantas partes se pueden encontrar tantas partes como se quiera dividir, haciendo referencia a las "partes" como fracciones.  Sí, yo que entre dos números enteros podemos dividir en cuantas partes queramos y podremos encontrar entonces tantas partes de ese espacio	▪ (SS) Su pensamiento está relacionado con la partición de un segmento de longitud uno. Refiere que cada vez se encuentran más fracciones a medida que se va realizando subdivisiones en el segmento unitario –no alude un proceso infinito–.
2. ¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3?, Oscar responde que muchos números decimales, que no hay límite.  Muchos, no hay límite	▪ (ID) Sin argumentación alguna, expresa la existencia de una infinidad de números en el intervalo al anotar que no hay límite.

Tabla 5.29 Respuestas de Oscar (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Segunda parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
3. ¿Hay números decimales entre dos fracciones? Justifica tu respuesta. Para Oscar existe una infinidad de números decimales entre dos fracciones. Así es, entre dos fracciones existen infinidad de números decimales entre éstas.	▪ (ID) Sigue sin argumentar el porqué de la presencia de una infinidad en un intervalo.
4. ¿Hay números decimales y/o fracciones entre un número decimal y una fracción? Justifica tu respuesta. Oscar indica el proceso de conversión entre fracciones y números con escritura decimal. Claro, pues relativamente la fracción la podemos convertir en decimales y viceversa.	▪ (CEFD) Reconoce la equivalencia entre fracciones y números con expansiones decimales –se supone que números racionales–.
5. ¿Puedes encontrar números decimales y/o fracciones entre 0.49 y 1/2? Justifica tu respuesta. Oscar afirma que hay números decimales y/o fracciones en el intervalo. Él manifiesta: “1/2 es igual a 0.5, y entre 0.49 y 0.5 se encuentra el número 0.4900008, es decir, se encuentra más decimales poniendo ceros” (expresiones en la entrevista).	▪ (CFD) Subyace la idea del proceso de conversión de fracción a número decimal. ▪ Su pensamiento está relacionado con el proceso de añadir ceros en medio de la parte decimal de un número como un método para identificar números con escritura decimal en un intervalo, sin embargo, no refiere un proceso infinito.
6. ¿Puedes encontrar el número decimal más pequeño? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escríbelo. Oscar dice que no hay un límite para escribir el número decimal más pequeño, según él, cada vez se agrega ceros antes de un “1”. No, no hay un límite para escribir el más pequeño porque podemos agregar la cantidad de ceros que deseemos antes de un "1" y siempre va a existir un número más pequeño que éste.	▪ (ID) Evoca un proceso infinito: agregar ceros –posiblemente esté pensando en números como: 0.01, 0.001, 0.0001, -0.1, -0.01, etc.–, de ser así, existirán números cada vez más pequeños.
7. ¿Puedes encontrar un número natural entre 1/6 y 7/3? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Oscar escribió el número natural 2.	▪ Responde a la pregunta de manera adecuada, aunque solo escribió el número natural 2. No aporta información sobre cómo procedió para resolver la pregunta.

Tabla 5.30 Respuestas de Oscar (Estudiante de 6° semestre, 20 años)-Tercera parte

Manifestaciones de las respuestas a partir del cuestionario y la entrevista	Características del marco explicativo inicial
8. ¿Entre 11/5 y 2.2 hay más de 3000 números? Justifica tu respuesta. Su respuesta es afirmativa. Oscar menciona que se pueden encontrar números decimales en el intervalo que cree que existe con el hecho de agregar cada vez dígitos en la parte decimal.  Sí, no existe un límite a la hora de encontrar números décimales entre dos números, podemos extendemos a la cantidad de décimales que sean necesario	▪ No identifica las representaciones simbólicas 11/5 y 2.2 como representantes del mismo número. ▪ (ID) Usa su argumentación de agregar ceros para justificar que hay una infinidad de números en el intervalo.
9. ¿Cuál es el sucesor del número natural 6? Oscar indica que el sucesor natural de 6 es 7, no obstante, manifiesta que 6 puede tener sucesores decimales.  Su sucesor natural sería el 7, sin embargo pede haber sucesore decimales	▪ (S) Su pensamiento es de un sistema de conocimientos de dominio número natural al pensar en 7 como sucesor del número natural 6. También se encuentra en un sistema de conocimientos de dominio número decimal porque considera que hay decimales "sucesores" para 6.
10. ¿Todos los números tienen un sucesor? Justifica tu respuesta. Oscar refiere que todos los números tienen sucesor.	▪ (S) Cree que todos los números tienen un sucesor. Quizás piense en números mayores para el "sucesor de un número". ▪ No suministra ejemplos.
11. ¿Crees que 0.9 tenga un sucesor con una sola cifra decimal? En caso de que tu respuesta sea afirmativa escribe el número. Oscar escribe que 0.9 tiene un sucesor natural que es 1.0.  Sí, tiene un sucesor natural, es decir 1.0	▪ Al parecer, reconoce la equivalencia entre *1 natural* y *1.0 número decimal*, podría estar pensando en 1 = 1.0.

Códigos usados en la clasificación de las actuaciones de Nicolás: (SS) Subdivisiones en un Segmento. (ID) Infinidad de números-Densidad. (CFD) Conversión de Fracción a expansión Decimal. (CEFD) Conversión Entre Fracciones y números con escritura Decimal –finitos, periódicos y mixtos. (S) Sucesor.

Características del marco explicativo inicial de Oscar

Como puede verse en la columna del lado derecho de las Tablas 5.28, 5.29, 5.30 las respuestas se han clasificado usando los códigos que se encuentran al final de la última tabla. Esas clasificaciones responden a ideas de Oscar sobre la densidad, la discreción, los números decimales, las fracciones, y los números naturales. En base a esta clasificación se caracteriza su marco explicativo inicial.

Sobre densidad y discreción: Se observa que las respuestas clasificadas como (ID), en las Tablas 5.28 y 5.29, muestran ejemplos de pensamiento denso avanzado, aunque en las preguntas 2 y 3 Oscar no da explicaciones, sino más adelante con su argumento del proceso de agregar ceros en medio de la parte decimal de un número. No obstante, las respuestas clasificadas como (S), ver Tabla 5.30, muestran situaciones sobre discreción ingenua relacionadas con el sucesor, Oscar cree que todos los números tienen sucesor. Luego, por los anteriores supuestos, se concluye que Oscar tiende a pensar de manera discreta-densa.

Sobre decimales y fracciones: 1. El proceso de conversión entre una representación fraccionaria y una escritura decimal (números racionales) es la justificación para aseverar la existencia de decimales y/o fracciones entre ellos, ver respuestas clasificadas como (CEFD) y (CFD) en la Tabla 5.29, en la de (CFD) solamente es de fracción a número decimal. Cabe mencionar que, posiblemente, Oscar no realizó la división correspondiente, numerador entre denominador, en la pregunta 8 por lo que respondió de manera inadecuada. 2. Oscar considera subdivisiones en un segmento (ver respuesta clasificada como (SS)) las cuales corresponden a fracciones, pero sin aludir un proceso infinito.

Para finalizar este capítulo se concluye que la mitad de los estudiantes a profesor tienden a tener un pensamiento afín con la discreción-densidad, mientras que tres tienden a pensar de manera discreta avanzada y dos de manera discreta ingenua (ver Tabla 5.31), y los 10 profesores en formación tienen la concepción alternativa de que todos los números tienen sucesor.

En el siguiente capítulo se exponen el análisis y los resultados de la puesta en marcha de la secuencia didáctica –como modelo de enseñanza–, de igual manera se detalla cómo varios de los profesores en formación al parecer lograron iniciar un proceso que los conduzca a un cambio conceptual relacionado con la propiedad de densidad de los números decimales.

Tabla 5.31 Tipo de pensamiento e idea del sucesor de cada participante

Nombre	*Pensamiento afín con*	*Idea del sucesor*
Karen	Discreción avanzada	Idea de los consecutivos falsos
Karina	Discreción-densidad	Considera por un lado que solo los enteros tienen sucesor y por otro, se contradice, que cada número tiene un sucesor
Isabela	Discreción avanzada	Idea del "siguiente"-posiblemente como número mayor
Melisa	Discreción-densidad	Idea del "siguiente"-posiblemente como número mayor
Amanda	Discreción ingenua	Idea del número mayor
Ana	Discreción-densidad	Idea del número mayor
Fabiola	Discreción avanzada	Idea de los consecutivos falsos
Nicolás	Discreción-densidad	Idea de los consecutivos falsos
Olga	Discreción ingenua	Idea de los consecutivos falsos
Oscar	Discreción-densidad	Idea del "siguiente"-posiblemente como número mayor

Capítulo 6

Desarrollo de la secuencia didáctica

Siguiendo con el cumplimiento de los objetivos de la investigación cuyo informe es esta tesis y lo correspondiente a los modelos de procesos cognitivos y de comunicación del Marco Teórico Local de la densidad de los números decimales, en los siguientes apartados se exponen los resultados de la puesta en marcha de la secuencia didáctica con los 10 profesores en formación. Conforme se desarrollaron las sesiones se les proporcionó a cada participante hojas de trabajo para que hicieran los ejercicios propuestos. En la mayoría de las sesiones se grabaron videos y audios (con el teléfono celular) con el propósito de recolectar datos suficientes que permitieran poner en evidencia la ocurrencia de un cambio conceptual de los profesores en formación con respecto a la propiedad de densidad de los números decimales, a través de expresiones orales, y también escritas en las hojas de trabajo. En los casos que se consideraron relevantes se incluyen diálogos entre los participantes e intervenciones de la docente, a los cuales se les agrega la referencia con el registro en video o audio según corresponda en un pie de página.

6.1 Resultados de la primera sesión "actividades iniciales"

La secuencia didáctica se inició con la exploración con ligas y globos (ver Capítulo 4, sección 4.3.1.1). Durante la interacción con las ligas, los profesores en formación dibujaron puntos negros en medio de los puntos que ya traían las ligas. Ellos manifestaron que la liga es un implemento que se podía usar en un aula con estudiantes de secundaria como un acercamiento a la propiedad de densidad en un contexto geométrico. Ellos refirieron que entre más se estiraba la liga podía haber más espacio, por ende, más puntos imaginables. De la misma forma que se hizo la exploración con las ligas se hizo con los globos. Los estudiantes para profesor inflaron globos observando cómo aumentaba el espacio entre los puntos, sin embargo, los puntos se hacían más grandes debido al inflamiento del globo. No obstante, lo que se quiso con estas actividades iniciales es tener un primer acercamiento a la propiedad de densidad a través de los sentidos.

Seguidamente, se dio paso a la exploración del programa elaborado con GeoGebra (ver Capítulo 4, sección 4.3.1.2). La finalidad sigue siendo la misma que las actividades anteriores: mostrar en un contexto geométrico una infinidad de puntos como una analogía de lo que sucede en un contexto con números en un intervalo. Posner y sus colaboradores (1982) refieren la importancia de las analogías para que un individuo adquiera un significado inicial e inteligible de un concepto antes de adaptarse a la definición del concepto mismo.

A continuación, se presenta una interacción[12] entre los profesores en formación y la docente sobre cómo la propiedad de densidad y la idea del "no sucesor" se ven reflejados en un segmento de puntos[13]:

Docente: -Tenemos un segmento de recta, ¿qué pasa si movemos el deslizador?

Oscar: -Aparecen puntos.

Docente: -Bien, ok… vamos a mover el deslizador de tal manera que podamos dividir el segmento en dos partes, ¿cuántos puntos hay?, pero sin contar los extremos.

Oscar: -Uno.

Docente: -Si dividimos [el segmento] en tres partes, ¿cuántos puntos hay?

Algunas voces: -Cuatro.

Otras voces: -Dos.

Docente: -Sin contar los extremos.

Voces: -Dos.

Docente: -Bien, si dividimos en cuatro, ¿cuántos puntos hay?

Voces: -Tres

Docente: -¿En cinco?

Voces: -Cuatro

Docente: -¿En seis?

Voces: -Cinco.

Docente: -Bien, y si divido el segmento en infinidad de partes, ¿cuántos puntos hay?

Varias voces: -Infinidad de puntos!

Docente: -Muy bien, observamos que cada vez que dividimos el segmento hallamos más puntos, y si dividimos el segmento en una infinidad de partes habrá una infinidad de puntos, tanto que se parece al mismo segmento, como esto [señala la pantalla].

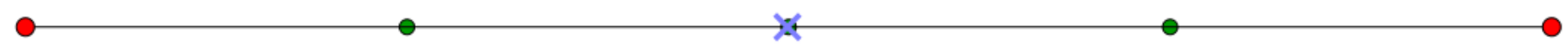
[12] Audio 13-feb, *Actividad en GeoGebra: Puntos en un segmento*, min 1:04

[13] Se muestran al lector ejemplos de gráficas que se realizaron en el momento.

Docente: -Bien… ¿será que podemos hablar del siguiente de un punto?

(Hay silencio)

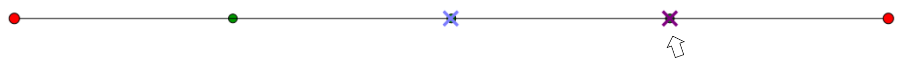
Docente: -Vamos a mirar la pantalla, vamos a dividir el segmento en cuatro partes, por ejemplo. Bien, ahora nos vamos a ubicar por acá, en la mitad, lo voy a fijar y le pongo color [azul].



Docente: -¿Cuál es el siguiente del punto azul?

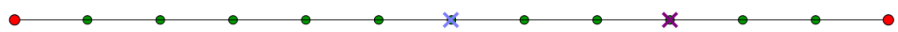
Oscar: -Es el que le sigue.

Docente: -Este [lo fija y lo pinta de color morado].



Voces: -Sí.

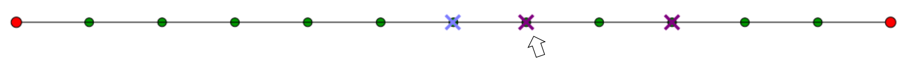
Docente: -Bien, ahora vamos a dividir el segmento en… 12 partes.



Docente: -¿Cuál es el siguiente del punto azul?

Voces: -Es el que le sigue.

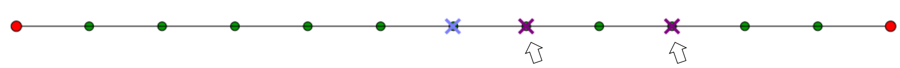
Docente: -¿Este?



Voces: -Sí.

(Nuevamente, la docente fija el punto y lo pinta de morado)

Docente: -Pero entonces, ¿cuál es el siguiente del punto azul?... si tenemos estos dos [la docente señala los dos puntos morados; se muestra al lector la gráfica correspondiente con una flecha por cada punto morado].



Docente: -Quiere decir que el punto azul no tiene un siguiente, lo mismo sucede con los números decimales.

La anterior escena describe cómo la propiedad de densidad, de manera análoga, se puede representar en un contexto geométrico a través de puntos en un segmento. Seguidamente, se socializó sobre los "siguientes" de un punto, pero al parecer, les generó dudas al interpretar que en realidad un punto dado no tiene un "siguiente". La mayoría de profesores en formación cree que los números decimales tienen un sucesor (por respuestas del cuestionario), posiblemente se deba a que creen que el sucesor de un número es un número mayor. En las siguientes sesiones se intentará que el profesor en formación se apropie de una conciencia metaconceptual de que no hay números decimales consecutivos en su orden habitual.

6.2 Resultados de la segunda sesión sobre adiciones y sustracciones

En esta segunda sesión los profesores en formación hicieron dos actividades relacionadas con adiciones y sustracciones relacionadas con la propiedad de densidad de los números decimales. Se pretende que ellos amplíen su sistema de conocimientos en el dominio de número decimal a través de los valores posicionales (décimos, centésimos, etcétera.) de los números decimales para tener un mayor acercamiento a la propiedad de densidad en el conjunto.

6.2.1 Desarrollo de la Actividad 1: Jugando a la mayor cantidad de sumandos

Al iniciar la *Actividad 1* (ver Capítulo 4, sección 4.3.2.1) la docente escribe el número *1.5* en el pizarrón, inmediatamente se contabiliza un minuto para que los profesores en formación escriban la mayor cantidad de sumandos y que la suma total se aproxime o se iguale a 10. Cabe aclarar que en los siguientes apartados se expondrá acerca de los procedimientos que hicieron los participantes de la obtención de una suma aproximada o igual a 10, ya que se quiere conocer sus habilidades y destrezas para escribir números con expansiones decimales. Y como consecuencia, tener un acercamiento a la densidad de los números decimales, puesto que los estudiantes se limitan a una cantidad finita de números decimales porque los números son expresados solamente en décimas o en centésimas, como han evidenciado investigadores.

El uso de números hasta centésimos se puso de manifiesto en esta primera experiencia por algunos estudiantes para profesor, por ejemplo, el marco explicativo de Karen. Ella utilizó números con dos cifras decimales, incluso tuvo en cuenta el número 0 para las centésimas, como se puede apreciar en la Tabla 6.1 (ver 2ª celda de la 2ª columna). Karen únicamente anota números comprendidos entre 0 y 1. Ella primero escribe una secuencia como *0.5*, *0.4*, *0.3*, y luego registra *0.25*, *0.75* y *0.*15, es decir, descompone hasta centésimas. Después, ella anota *0.80*, *0.20*, *0.70*, *0.40* y *0.30*, en los cuales reconoce que el cero pueda tener la posición de las centésimas. Posiblemente, Karen hizo uso del cero porque los números escritos anteriormente a estos últimos –en la secuencia– tienen dos cifras decimales mientras que los primeros que escribió solo tienen una cifra decimal. Sin embargo, no percibió la equivalencia entre 0.3 y 0.30, así mismo, entre 0.4 y 0.40, puesto que la actividad requería números diferentes.

Cabe mencionar que Karen en su cuestionario caracteriza la idea de número decimal como aquella expansión decimal que tiene sólo una cifra en la parte decimal, además, por algunas respuestas, tiende a tener un pensamiento discreto, pero estas concepciones alternativas no la limitan. Ella puede referirse a representaciones decimales con más de una cifra decimal (ver 5.3.1 del Capítulo 5).

Los profesores en formación que emplearon números con más de dos cifras decimales son algunos quienes en el cuestionario arrojaron respuestas de ejemplos de pensamiento denso (ver Capítulo 5). Son los casos de Melissa, Ana y Nicolás, y el resto del grupo solo usó, a los más, dos cifras decimales para escribir la mayor cantidad de sumandos diferentes en un minuto (ver 2ª columna de la Tabla 6.1).

El marco explicativo de Nicolás es el que se expone a continuación. Nicolás registró números hasta con seis cifras decimales, pero al parecer tenía una estrategia (ver 9ª celda de la 2ª columna de la Tabla 6.1). Él anota el número *0.000001* y después *0.000009*, y en las siguientes filas va cambiando la posición del dígito 9. Nicolás ubica el 9 en la posición de las millonésimas, luego en la posición de las cienmilésimas, las diezmilésimas, las milésimas, las centésimas y finalmente en las décimas. El proceso que realizó Nicolás, de manera implícita, fue multiplicar 9 por $1/10^n$, donde n es un número natural; él comenzó por las millonésimas hasta terminar en las décimas. Se observa que la suma de los números que Nicolás escribió es 1. Posiblemente, Nicolás quería realizar esta estrategia varias veces, o exactamente 10 veces para que la suma total fuese igual a 10. Cabe resaltar que Nicolás tiende a tener un pensamiento denso en algunas respuestas del cuestionario (ver 5.3.8 del Capítulo 5) lo que quizás le ayudó a planear esta destreza.

Fabiola pensó que era cada vez adicionar *1.5* más un número distinto y que las sumas alcanzaran a 10 (ver 8ª celda de la 2ª columna de la Tabla 6.1). Se puede observar que la secuencia de Fabiola, *2.0*, *2.1*, *2.2*, *2.3*, *2.4* expresan números consecutivos falsos. Posiblemente, ella quería llegar a 10 con números de una cifra decimal. Se recuerda al lector que Fabiola en su cuestionario arrojaba ejemplos afines con la discreción (ver 5.3.7 del Capítulo 5), quizás estas concepciones alternativas hayan influido en el proceso de su desarrollo de la actividad.

Tabla 6.1 Respuestas de la *Actividad 1* por los profesores en formación

Participante	Sumandos a partir del número *1.5*	Sumandos a partir del número *2*
Karen	1.5 + 0.5 + 0.4 + 0.3 + 0.25 + 0.75 + 0.80 + 0.15 + 0.20 + 0.70 0.40 + 0.30 +	2 + 2.5 + 1 + 0.5 + 1.4 + 0.40 + 0.6 + 0.2 + 0.1 + 0.01 + 0.02 + 0.3 +
Karina	1.5 + 0.5 + 1 + 0.3 + 0.5 + 0.2 + 4	2 + 1.502 + 0.02 + 0.3001 + 0.0342 + 0.00001 + 0.0000001
Isabella	1.5 2 2.4 1.31	2 0.4002 0.901 1.55 1.98 2.198 2.23
Melisa	1.5 + 1.417 + 1.7179 + 2.42563 + 2.3452 + 3	2 + 0.53 + 1.711 + 2.09 + 0.252 + 3.21 + 1.3 + 1.4 + 0.701 + 0.433
Amanda	1.5 + 2.5 + 6	2 + 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 + 0.7
Ana	1.5 + .2 + 1 + .35 + .22 + .4 + .1 + .44 + .282 + .5465 + .7 + .154 + .32 + → 6.2	2 + 0.51 + 0.252 + 0.15 + 1 + 0.1245 +3 + 0.75 + 0.8 + 0.1124 → 8.6
Fabiola	1.5 + .5 = 2.0; 1.5 + .6 = 2.1; 1.5 + 7 = 7.2; 1.5 + 8 = 2.3; 1.5 + 9 = 2.4	2 + 3.04 + 1.3002 + 0.4002
Nicolás	1.5 0.000001 0.000009 0.000090 0.000900 0.009000 0.090000 0.900000	2 0.0001 0.0009 0.0090 0.0900 0.9000 0.0002 0.0028 0.0270 0.2700 0.0003 0.0027
Olga	1.5 + 2 + 3 + 1 + 5 + 1.2 + 1.8	2 + 1.8 + 2 + 0.31 + 1.2 + 2.2 + 0.51 + 1.108
Oscar	1.5 + 0.5 + 2 + 2.5 + 0.20 + 0.30 + 1.8 + 0.10 + 0.4 + 0.6 + 2.8	2 + 1.1 + 0.104 + 0.90 + 2.51 + 0.52 + 1.802 + 0.15 + 0.3 + 0.2

Con el ánimo de generar una conciencia metaconceptual, como propone Vosniadou (1994), y de ampliar un poco más el sistema de conocimientos de los participantes, se les invitó a que aumentaran la expansión decimal de los sumandos en el siguiente ejercicio.

Se reinicia la actividad con el número *2*. Después de contar un minuto, cada uno de los profesores en formación mencionó los números que registró. Se distinguió que el marco explicativo de varios participantes fue el uso y notación de milésimos, diezmilésimos, cienmilésimos, incluso hasta diezmillonésimos en los sumandos, como son los casos de Karina, Isabella, Fabiola, Olga, Oscar, Melisa, Ana y Nicolás (ver 3ª columna de la Tabla 6.1 según corresponda). Estos tres últimos profesores en formación habían escrito más de dos cifras en la parte decimal de un número durante la primera experiencia, igualmente lo reflejaron en este segundo momento (ver filas correspondientes en la Tabla 6.1). Karen y Amanda siguieron conservando la misma cantidad de cifras decimales que usaron en el primer momento de la actividad.

La estrategia para ampliar la expansión decimal que justificaron los estudiantes para profesor fue el proceso de agregar dígitos en la parte decimal de un número. Por ejemplo, en los ejercicios de Karina, Fabiola y Nicolás (ver, 3ª, 8ª y 9ª celda de la 3ª columna de la Tabla 6.1) se observa el reconocimiento de ceros en medio de la parte decimal de un número. Se podría decir que Karina ya traía consigo esta idea a partir de algunas de sus respuestas al cuestionario (ver 5.3.2 del Capítulo 5).

6.2.2 Desarrollo de la Actividad 2: Juego de sumas y restas

Los profesores en formación realizaron el ejercicio en parejas sin inconvenientes con respecto a las instrucciones durante la primera experiencia de la *Actividad 2* (ver Capítulo 4, sección 4.3.2.2). No obstante, hubo uno que otro profesor en formación que, escasamente, repitió algún sumando y/o un sustraendo durante el proceso. Ellos comenzaron con números naturales, no hubo quien eligiera un número decimal para dar inicio a la actividad.

Conversaciones relevantes entre profesores en formación e intervenciones por parte de la docente, las cuales, muestran cómo ellos van ampliando su sistema de conocimientos en el dominio número decimal mediante el reconocimiento de valores posicionales (décimos, centésimos, etc.) de los números decimales, se muestran en los siguientes párrafos.

Karina y Karen

Karina eligió el número *2* y Karen el *7*. Ambas participantes comenzaron sumando y restando números naturales respectivamente, y después, anotaron números decimales. Karina ponía mucho énfasis en el proceso de agregar ceros para que se pudieran cumplir las condiciones propuestas en la actividad. La siguiente transcripción[14] es un ejemplo de este suceso:

Karina: -No puedes colocar 2.

Karen: -¿Por qué?

(Karen había escrito 6 – 2 = 4; ver 2ª celda de la 3ª fila de la tabla en la Figura 6.1[15])

Karina: -Si colocas 2 la resta da 4.

(Se observa que Karen no entiende)

Karina: -Sí, mira, 6 menos 2 es 4, y 4 es menor que 5.5, y debe ser mayor.

(Karina señala con su lápiz el 5.5, el resultado de la suma 5 + 0.5 = 5.5; ver 1ª celda de la 3ª fila de la tabla en la Figura 6.1)

Karen: -Ah sí! Ya no puedo escribir naturales.

Karina: -Ajá.

(Karen borra la resta que tenía: 6 – 2 = 4)

Karen: -Coloco…

Karina: -Puedes colocar 0.2.

Karen: -Entonces 6 menos 0.2 es 5.8 [6 – 0.2 = 5.8]… listo!

Karina: -Bien, voy yo… 5.5 más 0.001 es 5.501 [5.5 + 0.001 = 5.501]

(Es el turno de Karen, pero parece que se queda pensando)

Karina: -Simplemente escribe ceros y cualquier número.

Karen: -¿0.02?

Karina: -Ajá.

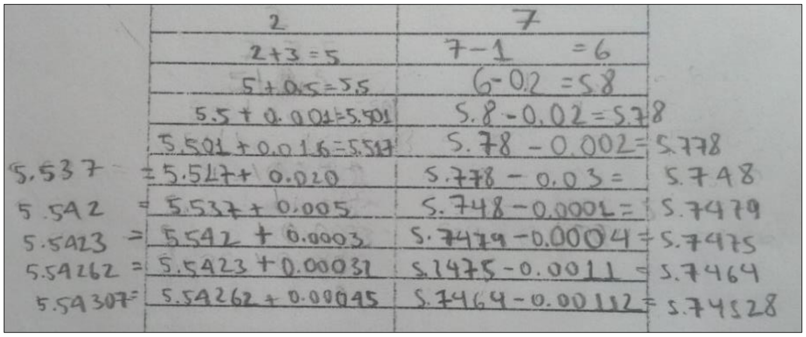
Karen: -Ah ya entendí!

(En ese momento Karen saca la calculadora, hace la respectiva operación y registra 5.8 – 0.02 = 5.78 en la celda correspondiente de la tabla).

Karina le sugiere a su compañera el uso de ceros en medio de la parte decimal de un número para continuar con el procedimiento del ejercicio. Se recuerda al lector que Karina mostró en su cuestionario ejemplos de respuestas de pensamiento denso en los cuales subyace la idea de un procedimiento infinito a través del proceso de agregar dígitos y que pareciera que está pensando en intercalar ceros en el medio de la parte decimal de un número.

[14] Video 14-feb, *Actividad 2*, min 3:21

[15] Allí aparece la operación 6 – 0.2 = 5.8, pero inicialmente Karen había escrito 6 – 2 = 4



	2	7	
	2+3=5	7-1 =6	
	5+0.5=5.5	6-0.2 =5.8	
	5.5 + 0.001=5.501	5.8-0.02=5.78	
	5.501+0.016=5.517	5.78 - 0.002=	5.778
5.537	=5.517+ 0.020	5.778 - 0.03 =	5.748
5.542	= 5.537+ 0.005	5.748-0.0001=	5.7479
5.5423	= 5.542 + 0.0003	5.7479-0.0004=	5.7475
5.54262	= 5.5423 + 0.00032	5.1475-0.0011 =	5.7464
5.54307	= 5.54262 + 0.00045	5.7464-0.00112=	5.74528

Figura 6.1 Karina y Karen respectivamente, *Actividad 2*

En esta experiencia también se aprecia que Karen, quien en su cuestionario mostró respuestas que ponen de manifiesto un pensamiento discreto y que tiene la concepción alternativa de que un número decimal son las décimas únicamente (mencionado en el tercer párrafo de la sección 6.2.1 del presente capítulo), ha extendido la cantidad de cifras decimales (ver columna derecha de la tabla en la Figura 6.1). Esta ocurrencia pondría en evidencia un cambio conceptual de manera paulatina, puesto que Karen está ampliando su sistema de conocimientos en el proceso de añadir dígitos, especialmente ceros en los sustraendos, para interpretar que cada vez hay números decimales, y a partir de esto, más adelante, comprender la existencia de una infinidad de decimales entre dos dados.

Nicolás y Ana

Nicolás y Ana ponen en evidencia el empleo números decimales cada vez más pequeños por medio del proceso de añadir ceros (en los sumandos y sustraendos) para que las adiciones y las sustracciones se aproximen, como se muestra en la experiencia observada[16]:

Ana: -Se ponen más ceros, sería 0.00003 (ver 2da celda de la 12^{a} fila de la tabla en la Figura 6.2)

(En ese momento la docente interviene para preguntar por el significado de "se ponen más ceros")

Docente: -¿A qué te refieres con "se ponen más ceros"?

Ana: -Que se agrega ceros aquí [señala con su lápiz la parte decimal del número 0.00003], pues creo que es la forma para que las restas no sean menores que las sumas.

Nicolás: -Ajá, así los resultados se van acercando.

[16] Video 14-feb, *Actividad 2*, min 15:58

Docente: -Es decir, ¿agregan ceros en los sustraendos para que las restas no sean más pequeñas que las sumas?

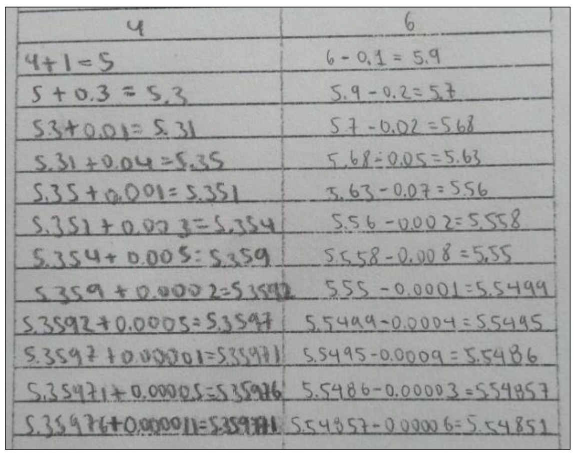
Ana: -Sí.

Docente: -De igual forma para los sumandos, para que las sumas no sean más grandes que las restas. ¿Sí?

Ana y Nicolás: -Sí.

Docente: -De lo contrario, si usaran dígitos diferentes de cero, ¿no se cumpliría estas condiciones [condiciones de la *Actividad 2*]?

Nicolás: -Sí, ya lo probamos y no, debe ser con ceros [es decir, si se agregaran dígitos diferentes de cero no se cumplirían las reglas de la Actividad].

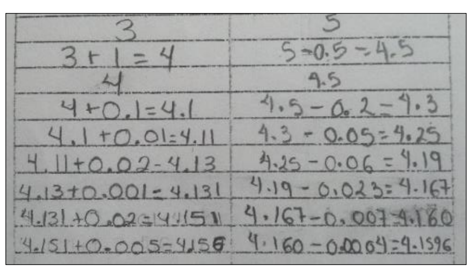


4	6
4+1=5	6-0.1=5.9
5+0.3=5.3	5.9-0.2=5.7
5.3+0.01=5.31	5.7-0.02=5.68
5.31+0.04=5.35	5.68-0.05=5.63
5.35+0.001=5.351	5.63-0.07=5.56
5.351+0.003=5.354	5.56-0.002=5.558
5.354+0.005=5.359	5.558-0.008=5.55
5.359+0.0002=5.3592	5.55-0.0001=5.5499
5.3592+0.0005=5.3597	5.5499-0.0004=5.5495
5.3597+0.00001=5.35971	5.5495-0.0009=5.5486
5.35971+0.00005=5.35976	5.5486-0.00003=5.54857
5.35976+0.000011=[illegible]	5.54857-0.00006=5.54851

Figura 6.2 Nicolás y Ana respectivamente, *Actividad 2*

Amanda y Fabiola

Amanda y Fabiola empezaron con números muy cercanos, *3* y *5* respectivamente, por lo que fue más visible que los resultados de las adiciones y sustracciones se aproximaran, como se puede apreciar en los últimos renglones de la tabla (ver Figura 6.3).



3	5
3+1=4	5-0.5=4.5
4	4.5
4+0.1=4.1	4.5-0.2=4.3
4.1+0.01=4.11	4.3-0.05=4.25
4.11+0.02-4.13	4.25-0.06=4.19
4.13+0.001=4.131	4.19-0.023=4.167
4.131+0.02=4.151	4.167-0.007=4.160
4.151+0.005=4.156	4.160-0.0004=4.1596

Figura 6.3 Amanda y Fabiola respectivamente, *Actividad 2*

Melisa e Isabella

Melisa eligió el número *0* entre 0 y 5, e Isabella el *9* entre 5 y 10. Sus marcos explicativos consistió en iniciar con números localizados casi en los extremos. Sin embargo, ellas realizaron numerosos procedimientos y al final los resultados se aproximaban a *4.1* por el lado de Melisa, mientras que por el lado de Isabella a *6.6*. Se puede decir que estas expresiones numéricas se estaban acercando pese a que el proceso comenzó con *0* y *9* (ver Figura 6.4). Cabe mencionar que al final del proceso de la actividad, Isabella, al parecer, no realizó correctamente las sustracciones en la calculadora (ver las dos últimas celdas de la 2ª columna). Concluyendo la actividad, la docente prosiguió preguntando a las participantes qué observaron, especialmente a Isabella, ya que en su cuestionario mostró algunos ejemplos relacionados con la discreción[17]:

Isabella: -Los decimales [los resultados de las sumas y restas] se van acercando.

Docente: -¿Crees que en algún momento los resultados de las sumas y restas llegarán a ser iguales?

Isabella: -No porque los decimales se vuelven más pequeños y nunca llegarían a ser iguales.

Docente: -¿Qué quiere decir que los decimales se vuelven más pequeños?

Isabella: -Cuando se ponen ceros [en medio de la parte decimal de un número]… cada vez se ponen ceros y ceros y nunca termina.

Docente: -¿En los sumandos y sustraendos?

Isabella: -Ajá.

Docente: -Bien, ¿cómo está relacionada la densidad de los números decimales con la actividad?

Isabella: -Que siempre se puede encontrar un decimal entre dos números, y ya no va a ver tanta diferencia en los resultados cuando se hacen las restas y las sumas.

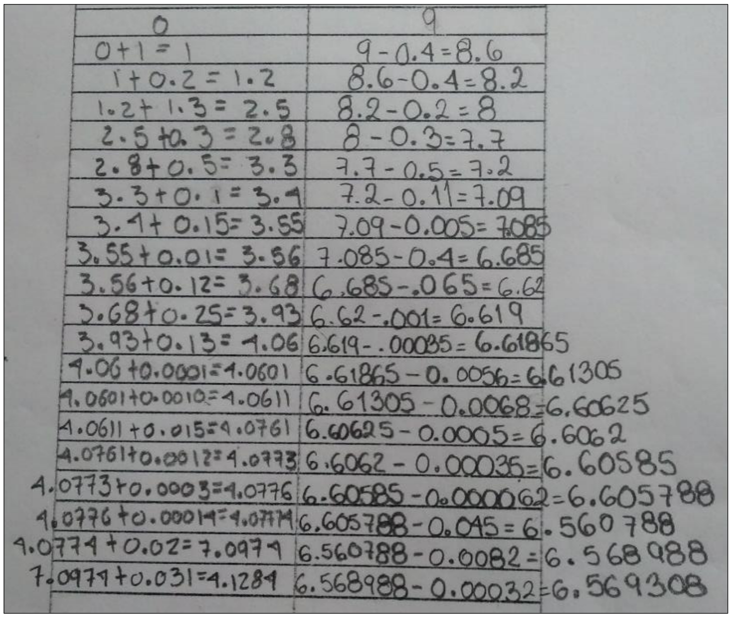
Docente: -¿Qué quieres decir que no va a haber tanta diferencia en los resultados?

Isabella: -Que se van acercando los decimales [los resultados de sumas y restas] y nunca van a ser los mismos, y por eso la densidad, porque siempre se pueden encontrar otros.

Isabella está ampliando su sistema de conocimientos en el dominio de número decimal en el que, al parecer, comprende de manera gradual nociones acerca de la propiedad de

[17] Audio 14-feb, *Actividad 2*, min 5:31

densidad mediante el proceso de agregar dígitos, especialmente ceros, en medio de la parte decimal de un número.

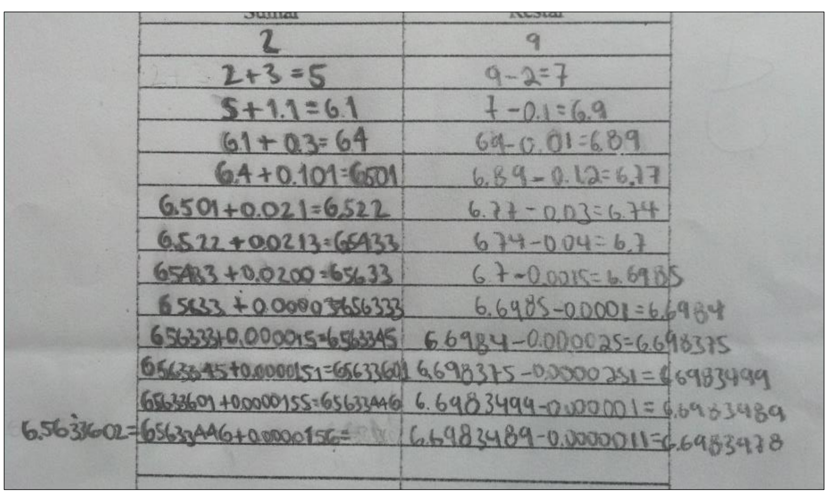


0	9
0+1 = 1	9-0.4=8.6
1+0.2 = 1.2	8.6-0.4=8.2
1.2+ 1.3 = 2.5	8.2-0.2=8
2.5 +0.3 = 2.8	8-0.3=7.7
2.8+0.5= 3.3	7.7-0.5=7.2
3.3+0.1 = 3.4	7.2-0.11=7.09
3.4+ 0.15= 3.55	7.09-0.005= 7.085
3.55+0.01= 3.56	7.085-0.4=6.685
3.56+0.12= 3.68	6.685-.065=6.62
3.68+0.25=3.93	6.62-.001= 6.619
3.93+0.13= 4.06	6.619-.00035= 6.61865
4.06+0.0001=4.0601	6.61865-0.0056=6.61305
4.0601+0.0010=4.0611	6.61305-0.0068=6.60625
4.0611+0.015=4.0761	6.60625-0.0005=6.6062
4.0761+0.0012=4.0773	6.6062-0.00035=6.60585
4.0773+0.0003=4.0776	6.60585-0.000062=6.605788
4.0776+0.00014=4.07774	6.605788-0.045=6.560788
4.07774+0.02=7.0974	6.560788-0.0082=6.568988
7.09774+0.031=4.1284	6.568988-0.00032=6.569308

Figura 6.4 Melisa e Isabella respectivamente, *Actividad 2*

Oscar y Olga

Oscar y Olga hicieron diversas adiciones y sustracciones comenzando con *2* y *9* respectivamente. Pese a que los números que escogieron al comienzo de la actividad están alejados en cuanto a distancia, las adiciones y sustracciones se fueron acercando, como se puede apreciar en la Figura 6.5.



2	9
2+3=5	9-2=7
5+1.1=6.1	7-0.1=6.9
6.1+0.3=6.4	6.9-0.01=6.89
6.4+0.101=6.501	6.89-0.12=6.77
6.501+0.021=6.522	6.77-0.03=6.74
6.522+0.0213=6.5433	6.74-0.04=6.7
6.5433+0.0200=6.5633	6.7-0.0015=6.6985
6.5633+0.00003=6.56333	6.6985-0.0001=6.6984
6.56333+0.000015=6.563345	6.6984-0.000025=6.698375
6.563345+0.0000151=6.5633601	6.698375-0.0000251=6.6983499
6.5633601+0.0000155=6.5633446	6.6983499-0.000001=6.6983489
6.5633602=6.5633446+0.0000156=	6.6983489-0.0000011=6.6983478

Figura 6.5 Oscar y Olga respectivamente, *Actividad 2*

Inmediatamente, la actividad se efectuó con todos los profesores en formación. Cada uno de ellos pasaba al pizarrón a anotar la adición o sustracción correspondiente de tal manera que se cumplieran las reglas de la actividad. En la Figura 6.6 se observa a dos profesores en formación realizando el procedimiento. Los primeros participantes eligieron *4* y *10* para dar inicio a la actividad y no hubo dificultad durante el desarrollo de la misma.

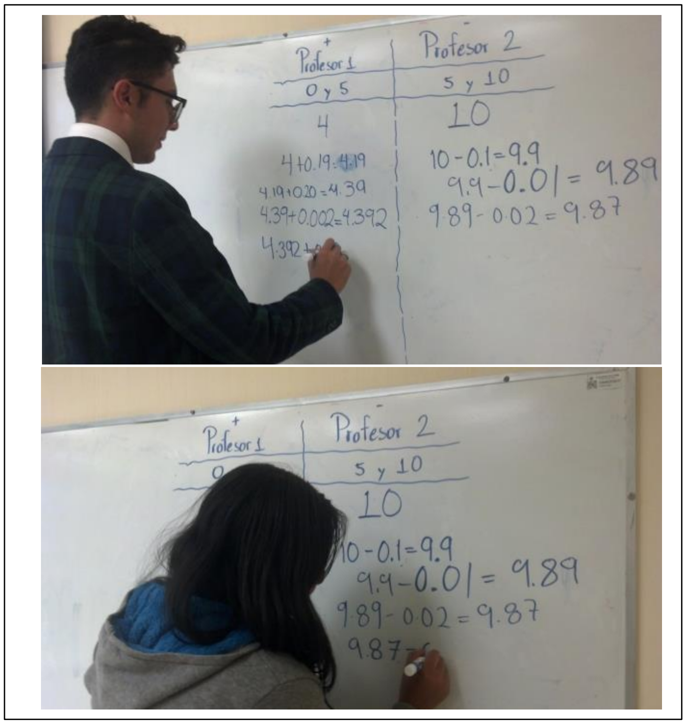


Figura 6.6 Profesores en formación realizando la *Actividad 2* en el pizarrón

Manifestaciones de varios profesores en formación indicaron que la táctica para que la suma debiera ser estrictamente menor que la resta escrita por su compañero (profesor 2), y que la resta debiera ser estrictamente mayor que la suma escrita por el primer profesor era precisamente el hecho de agregar ceros en medio de la parte decimal de un número. Recurriendo a las ideas de Fischbein (2001), un elemento siempre se puede añadir a otro para que pueda haber una infinidad de elementos, en este caso una infinidad de números. Reforzando la idea anterior, Vamvakoussi y Vosniadou (2012) mencionan que los estudiantes que piensan en términos de decimales, “infinitamente muchos” significa algo más que una “gran cantidad”, significa una cantidad interminable de números, en el sentido de que siempre hay uno más para ser encontrado, añadiendo un dígito decimal.

La importancia del uso de la calculadora fue expresada por los profesores en formación para poder hacer cálculos ágilmente, ya que para ellos tomaba tiempo hacer las operaciones, y creen que para un estudiante de secundaria lo será también. Un aspecto relevante que ellos trajeron a colación es la situación de que los alumnos de secundaria solo conocen las décimas, y por mucho, las centésimas, y que la propiedad de densidad de los números decimales podría promover el refuerzo de los valores posicionales de los números decimales a través de la actividad.

6.3 Resultados de la tercera sesión relacionada con intervalos

Con las actividades propuestas para la tercera sesión, relacionadas con intervalos, se quiso inducir al profesor en formación el empleo de expansiones decimales con varias cifras decimales y no limitarse a décimas o a centésimas. Se espera que lo anterior se vea reflejado en los extremos del intervalo que encuadran al "número escondido o pensado" así como también dicho número escondido o pensado.

6.3.1 Desarrollo de la Actividad 3: Encuadrar un número decimal entre dos números cuyas cifras decimales sean consecutivas

Inicialmente se sugirió a los estudiantes para profesor el empleo de números naturales en los extremos del intervalo y el uso de décimas en el número escondido, posteriormente, el empleo de más de una cifra decimal para esta actividad (*Actividad 3*, ver Capítulo 4, sección 4.3.3.1).

Se describe a continuación un diálogo[18] de una pareja en la que una participante registró el número *13.415* en un fragmento de papel y su compañera trata de acertar el intervalo –donde se halla el número– cuyos extremos deben ser números con cifras decimales consecutivas.

Amanda: -¿Entre 13 y 14? (ver 2ª columna de la Figura 6.7).

Fabiola: -Sí!

(Parece que Fabiola se expresa eufóricamente, tal vez porque Amanda había tardado en mencionar el intervalo donde los extremos fueran consecutivos)

Amanda: -Bien… ahora con ¿una cifra decimal?

(Amanda pregunta si los extremos del intervalo deben tener una cifra decimal)

Fabiola: -Sí.

Amanda: -¿Está entre 13.5 y 14?

Fabiola: -No.

Amanda: -¿Entre 13 y 13.5?

[18] Audio 15-feb, *Actividad 3*, min 2:57

Fabiola: -Sí, pero más pequeño [se refiere a un intervalo más pequeño]

Amanda: -¿13.4 y 13.5?

Fabiola: -Sí, pero ahora con centésimas.

(Fabiola se refiere a que los extremos del intervalo deben tener dos cifras decimales)

Amanda: -¿13.42 y 13.48?

(Hay silencio, parece que Fabiola se queda pensando)

Fabiola: -No.

Amanda: -¿Está entre 13.45 y 13.47?

Fabiola: -No… [hay silencio, parece que nuevamente está pensando], este intervalo está en el anterior que dijiste.

Amanda: -Ahhh… el número está entre ¿13.42 y 13.43?

Fabiola: -Mmm… sí, ah no!

Amanda: -Otra vez me confundí, quería decir si está entre ¿13.41 y 13.42?

Fabiola: -Sí! Es el intervalo.

Amanda: -¿Cuál es?

(Amanda pregunta por el número escondido)

Fabiola: -13.415.

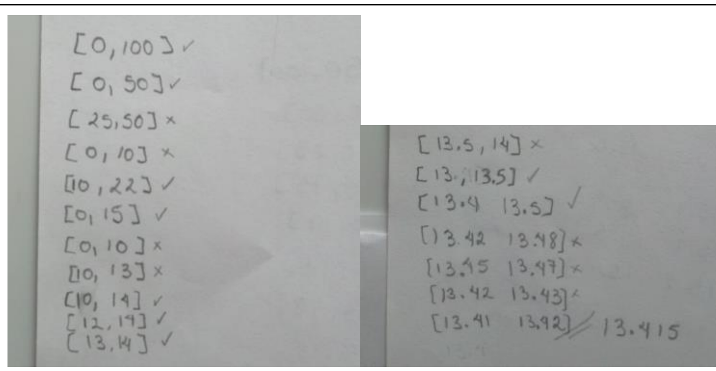


Figura 6.7 Desarrollo de la *Actividad 3* por Amanda y Fabiola

Amanda había registrado, al inicio, varios intervalos antes de acertar con el intervalo cuyos extremos fueran naturales consecutivos para luego empezar a descomponer estos extremos en décimos, y luego en centésimos, y así como se requería según la cantidad de cifras decimales del número escondido. Se observa que Amanda tenía tendencias a pensar de manera discreta por los resultados reflejados en el cuestionario, en algunas respuestas ella consideraba que no había otro número entre dos números dados (ver 5.3.5 del Capítulo 5).

En el trabajo en parejas, algunos profesores en formación se limitaron a escribir el número escondido hasta milésimas, otros hasta centésimas. Ellos indicaron que el tiempo fue una limitación para que pudieran considerar más cifras decimales, por ello, en la segunda parte de esta actividad se intentó que los participantes usaran más cifras decimales.

La representación numérica hasta diezmilésimas en el número escondido fue tomada en cuenta por los estudiantes para profesor en la etapa grupal. Se muestra en la Figura 6.8 un ejemplo de un profesor en formación quien escribió los intervalos mencionados por cada uno de sus compañeros e iba marcando con una equis cuáles no correspondían. El número escondido es del orden de los diezmilésimos: *28.9306*.

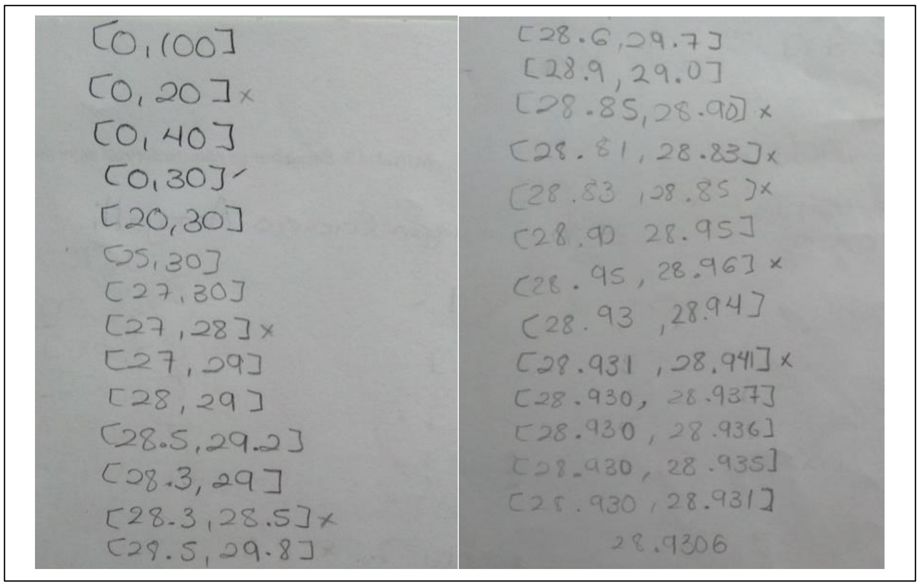


Figura 6.8 Intervalos considerados por los profesores en formación en la 2ª etapa de la *Actividad 3*

Se observa en la figura anterior cómo los profesores en formación van describiendo progresivamente el proceso de extender las cifras decimales, aunque muchos de ellos empezaron a lograr ver este suceso en la *Actividad 2* de la sesión anterior, se refuerza el proceso en esta actividad. Ellos indicaron que consideran la propiedad de densidad de los números decimales cuando deben buscar intervalos cuyos extremos son décimos, luego, centésimos, y finalmente, milésimos, para encuadrar el número escondido, como se aprecia en la figura anterior. Es decir, a través de los extremos del intervalo, ellos apreciaron que cada vez hay más números en dicho intervalo. Igualmente, ellos manifestaron que hubiese ocurrido de la misma manera si el número escondido fuese del orden de los cienmilésimos, y así sucesivamente.

También se observa en la figura anterior que cuando se nombra el intervalo cuyos extremos naturales son consecutivos, [28,29], en el que se encuentra el número pensado, algunos participantes mencionaron intervalos más grandes al agregar cifras decimales. Por ejemplo: [28.5,**29.2**], [28.5,**29.8**], [28.6,**29.7**]. Así mismo se evidencia que un participante manifestó el intervalo [28.9,**29.0**] en el que reconoce el cero en la posición de las centésimas.

La existencia de un sucesor para el primer extremo del último intervalo que mencionaron, 28.930, fue debatida en el momento. Las siguientes son expresiones por algunos profesores en formación con respecto a esta temática:

- "28.931 es el que le sigue", por Olga.
- "28.931 es sucesor de 28.930 porque es mayor", por Isabella.
- "Todos tienen sucesor, por ejemplo, el sucesor de 5.1 es 5.2 porque es mayor", por Ana.
- "O puede ser 5.11" [en respuesta a la anterior expresión], por Amanda.

Ante estas concepciones alternativas, de que el sucesor es un número mayor, se permitió que ellos mismos aprendieran de sus concepciones erróneas a través de las actividades diseñadas en las siguientes sesiones hasta que sintieran insatisfacción con sus conceptos actuales y se produjera un cambio conceptual.

6.3.2 Desarrollo de la Actividad 4: Buscar el número pensado

La *Actividad 4* (ver Capítulo 4, sección 4.3.3.2) se llevó a cabo con todos los profesores en formación. Al principio cada uno de ellos representaba en el segmento de 0 a 10 los números decimales y los intervalos que cada uno iba diciendo. Después, la mayoría de los estudiantes para profesor dejó de usar la recta numérica debido a limitaciones de tiempo dada la dinámica de la actividad.

El desglosamiento fue la destreza que realizó Olga para graficar las representaciones numéricas en el segmento de 0 a 5 cuando el número pensado es *1.001* (ver Figura 6.9). Ella señala el intervalo entre *1* y *2*, posteriormente dibuja el segmento de recta entre *1.0* y *1.1*, hace diez particiones iguales y registra *1.05* en su posición correspondiente. En seguida, Olga grafica el segmento comprendido entre *1.00* y *1.01* y nuevamente hace particiones iguales y ubica el número *1.001*. El desglosamiento de un segmento de la recta numérica es una opción para que los alumnos de primaria y secundaria puedan visualizar cantidades pequeñas. Cabe mencionar que Olga reconoce que el cero pueda tener la última posición de un número decimal, por ejemplo, el número *1.00* que anotó en su hoja de trabajo.

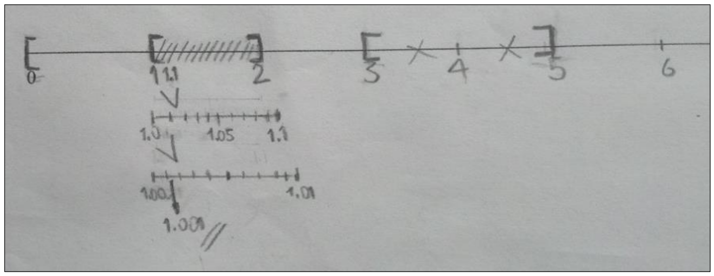


Figura 6.9 Desglosamiento de un segmento de recta elaborado por Olga

La discusión llevada a cabo en el aula por los profesores en formación para identificar el número pensado *1.001* –propuesto por su compañera Fabiola– pusieron en juego sus habilidades y destrezas, que se muestran en la siguiente transcripción[19]:

Oscar: -¿Está entre 0 y 5?

Fabiola: -Sí.

Ana: -¿Tu número está entre 3 y 5?

Fabiola: -Sí.

Olga: -¿Tiene dos decimales? [refiere si el número tiene dos cifras decimales]

Fabiola: -No, no tiene dos decimales.

Nicolás: -¿Tiene tres decimales?

Fabiola: -Sí, tiene tres decimales

Docente: ¿Es decir, el número tiene tres cifras decimales?

Fabiola: -Sí.

Docente: -Bien, continuamos.

Karen: -¿Está entre 3 y 4?

Fabiola: -No.

Karina: ¿Entre 4 y 5?

Fabiola: No.

(En ese momento parece que se genera confusión entre los participantes)

Oscar: -Pero… habías dicho que el número estaba entre 3 y 5… no entiendo.

Fabiola: -Sí… [observa su hoja y parece que está pensando] el número no está entre 3 y 5… sí, el número no está entre 3 y 5… el número está a la izquierda.

Docente: -Bien, es decir, el número se encuentra a la izquierda del intervalo entre 3 y 5.

Voces: -Ah ok.

[19] Video 15-feb, *Actividad 4*, min 5:39

Docente: -¿Continuamos?

Nidia[20]: -¿Está entre 2 y 3?

Fabiola: -No.

Isabella: -¿Entre 0 y 1?

Fabiola: -No.

Omar: -¿Entre 1 y 2?

Fabiola: -Sí, entre 1 y 2.

Docente: -Bien, observamos que el número tiene tres cifras decimales y está entre 1 y 2, quiere decir que entre 1 y 2 podemos encontrar números decimales, ¿sí?

Karen: -Pero 1 y 2 son naturales, y pues no hay un decimal [refiere que no hay un decimal entre 1 y 2].

Docente: -Así es, es solo que estamos en el contexto de los números decimales.

Karina: -Sí, mira, 1 es igual a 1.0, por ejemplo.

(Parece que Karen sigue con dudas)

Docente: -Se trata de equivalencia entre decimales, por ejemplo, una unidad son diez décimos.

Karen: -O también, por ejemplo, ¿1 es 1.00?

Varios participantes: -Sí, así.

Nicolás: -Entonces, si 1 y 2 son decimales… 1.0 y 2.0 ¿sí?, podemos encontrar una infinidad de decimales por la densidad.

Docente: -Así es, la densidad de los números decimales, que entre dos decimales, o dos racionales, podemos encontrar siempre un número decimal. ¿Sí?

Varios participantes: -Sí.

Docente: -¿Sí quedó claro? [mira a Karen].

Karen: -Sí… es solo que no es normal ver a 1 y 2 como decimales, pero ya entendí que 1 y 2 son decimales también. Gracias.

Docente: -Ok, ¿continuamos?

Ana: -Yo… ¿el tercer decimal es múltiplo de 5?

Fabiola: -Mmm… creo que no… no!

---

[20] Nidia es una profesora en formación que solo asistió a tres de cuatro sesiones del taller, razón por la cual no está incluida en el análisis de datos (ver primeros apartados del Capítulo 5).

Amanda: -¿Está entre 1.1 y 1.4?

Fabiola: -No.

Olga: -¿Entre 1.44 y 1.48?

Fabiola: -No.

Docente: -Bien, recordemos que para facilitar el desarrollo de la actividad estamos mirando, por ahora, el intervalo cuyos extremos tengan una cifra decimal, y que estas cifras decimales sean consecutivas, ¿sí?, como en la actividad anterior[21].

Voces: -Sí.

Docente: -Bien, ¿quién va?

Nicolás: -Yo… ¿el tercer decimal es par?

Fabiola: -No, no es par.

Docente: -Es decir, el número es impar.

Karen: -¿El número está entre 1.4 y 1.5?

Fabiola: -No.

Karina: -¿Entre 1 y 1.1?

Fabiola: -Sí!

Melisa: -¿Quiere decir que está entre 1.0 y 1.1?

Docente: -Bien *Melisa* [en la grabación se menciona su nombre verdadero].

Fabiola: -Sí, el número está entre 1.0 y 1.1.

Nidia: -¿El número está entre 1.05 y 1.07?

Fabiola: -No.

Melisa: -¿Es 1.011?

Fabiola: -No.

Isabella: -¿Es 1.015?

Fabiola: -No.

Oscar: -¿El primer decimal y el segundo decimal son ceros? [se refiere a la primera y segunda cifras decimal].

Fabiola: -Sí, son ceros.

Oscar: -Pues ya está! Sigues tú [mira a Ana].

Ana: -¿Tu número es 1.003?

[21] Hace referencia a la *Actividad 3*.

Fabiola: -No.

Amanda: -¿Es 1.001?

Fabiola: -Sí!

La insatisfacción en los conceptos existentes de Karen se pone de manifiesto, posiblemente, cuando ella expresa 1 como 1.00, ya que, al parecer, consideraba el 1 como número natural para cualquier conjunto de números, sea de decimales u otros. Siguiendo las ideas de Posner y sus colegas (1982), las nuevas concepciones deben ser inteligibles para que pueda ocurrir un primer paso hacia el cambio conceptual. Para Karen las nuevas concepciones le son inteligibles, como el hecho de que los números cuya parte decimal es cero, son también números decimales si se refiere al conjunto de los números decimales.

La existencia de un sucesor fue cuestionada, nuevamente, a los profesores en formación. Algunos de ellos expresaron que 1 y 2 son consecutivos si se habla de números naturales mientras que si se relacionan con el conjunto de los números decimales no lo son (es decir, por ejemplo, 1=1.0 y 2=2.0 son consecutivos falsos porque en medio de ellos se encuentra al menos un número distinto de éstos, como 1.5). Esta ocurrencia pone en evidencia un cambio de sistema de conocimientos de dominio número natural a uno de dominio número decimal. No obstante, hubo profesores que siguieron manteniendo la idea de la existencia de un sucesor en el conjunto de los decimales, como es el caso de Amanda, para ella todavía el sucesor es un número mayor.

Los estudiantes para profesor mostraron habilidades y destrezas para tratar de identificar el número buscado propuesto por Fabiola. Es interesante ver cómo salen temas como el múltiplo de un número, si el número es par o impar, si hay ceros en la parte decimal, de igual manera, la habilidad para prestar atención a las manifestaciones que se van refiriendo durante el desarrollo del ejercicio.

6.4 Resultados de la cuarta sesión relacionada con la comparación de números decimales

La secuencia didáctica finaliza con la cuarta sesión. Se hicieron dos actividades relacionadas con la propiedad de comparación de números decimales. Se espera que a través de la propiedad de comparación de números decimales los profesores en formación descubran la existencia de un número entre un número menor y otro mayor. Antes de dar continuidad a las actividades se hacen es esta sesión la exploración de los applets elaborados por Antonija Horvatek.

6.4.1 Exploración de los applets elaborados por Antonija Horvatek

Los profesores en formación hicieron uso de los applets (ver Capítulo 4, sección 4.3.4.1) para hacer una exploración. Al comienzo, ellos manejaron el primer applet del bloque de *Decimal numbers*, de Horvatek, correspondiente a particiones equitativas en un segmento con sus respectivos números decimales. Ellos observaron que entre dos números cuyas cifras decimales son consecutivas (por ejemplo, 3.**21** y 3.**22**) se pueden localizar números en medio de ellos. La concepción alternativa de que los números decimales son "consecutivos" fue cuestionada también. Se quiso mostrar con el applet la localización de al menos nueve números intermedios en los segmentos que aparecen allí, por lo que los decimales no podían ser consecutivos, pese a que las cifras decimales son consecutivas en los extremos de dichos segmentos.

Los estudiantes para profesor manifestaron que los segmentos que aparecen en los applets solo mostraban 10 divisiones y que hubiese sido más interesante si mostraran más subdivisiones. Una de las razones frente al cuestionamiento del porqué hubiese sido más interesante fue la de Fabiola: "Sí, porque se vería la infinidad". Expresiones como esta hace que, posiblemente, el profesor en formación, o en este caso Fabiola, después de tres días de taller, se esté apropiando del concepto de la propiedad de densidad. Por este tipo de respuestas y por anteriores manifestaciones, como las de la conversación descrita en la sección 6.3.1 del este capítulo, Fabiola, al parecer, está modificando de manera gradual sus concepciones alternativas. Ella, quizás, está sintiendo insatisfacción con sus conceptos existentes sobre la finitud de números intermedios en un intervalo expresada en las respuestas al cuestionario. Se relaciona la conversación mencionada anteriormente debido a la habilidad que tuvo Fabiola para aumentar la cantidad de cifras decimales en el *número escondido*, en la resolución al cuestionario ella solo usaba números hasta centésimos.

Esta primera parte no solo generó una reflexión sobre el no sucesor, la equivalencia entre decimales fue otro hecho relevante, especialmente para aquellos participantes quienes aún enfrentaban dificultad para apreciar el mismo valor numérico entre un decimal con ceros en las últimas posiciones y el mismo número sin ceros. Se muestra una breve escena de lo ocurrido al respecto[22]:

Docente: -Creo que puedes ver que 26.91 es lo mismo que 26.910.

Karen: -Sí, igual el otro [se refiere al otro extremo 26.92 = 26.920].

Docente: -Así es.

[22] Audio 16-feb, *Actividad con el applet de Antonija Horvatek*, min 3:16

Karen está ampliando su sistema de conocimientos en el dominio de número decimal, y por tanto un cambio conceptual en el sentido de que al parecer lleva a cabo un proceso de re-significación o re-conceptualización sobre la equivalencia entre números decimales.

Se muestra a continuación una breve conversación[23] sobre la interacción con el segundo applet del bloque *Decimal numbers*:

Oscar: -Mira… aquí está el 2 [indica la parte entera].

Ana -Sí, y luego el segmento [segmento correspondiente entre 2 y 3] se divide en 10 partes y señala 2.1 [indica 21 décimas]… ahora entre 2.1 y 2.2 [el segmento correspondiente entre 2.1 y 2.2] se divide en 10 partes.

Oscar: -Son las centésimas.

Ana: -Ajá… y aparece 2.10

Oscar: -Y entre 2.10 y 2.11 se divide en 10 partes.

Ana: -Milésimas, ¿verdad?

Oscar: -Sí, ahí está, 2.013

Ana y Oscar exploran el desglosamiento de un segmento de recta correspondiente al número 2.153 (ver Figura 6.10), además, emplean un lenguaje adecuado referente a los valores posicionales como las centésimas y las milésimas.

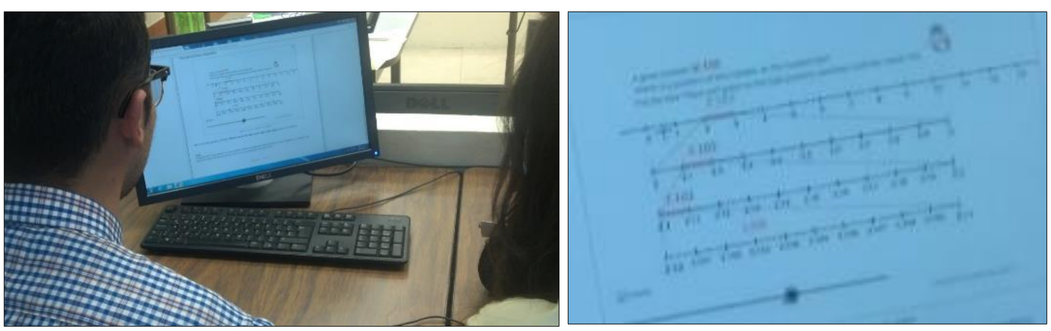


Figura 6.10 Oscar y Ana realizando el desglosamiento de recta pertinente al número 2.103

Los estudiantes para profesor indicaron que la interacción con el applet ayuda a un alumno de secundaria a aprender y distinguir los valores posicionales de un número decimal. Ellos refieren que primero se detalla la ubicación de la parte entera del número en el segmento correspondiente de la recta. Seguidamente, el programa realiza un *zoom out* de dicho segmento y se divide equitativamente en 10 partes: las décimas, y se localiza la décima correspondiente. En el tercer paso hay un desglosamiento nuevamente, en el que se muestran

[23] Video 16-feb, *Actividad con el applet de Antonija Horvatek*, min 9:02

las centésimas, y se ubica la centésima correspondiente del número. En el cuarto paso se realiza una última expansión mostrando las milésimas.

Los profesores en formación también señalaron que el programa tiene como límite la visualización hasta las milésimas. Sin embargo, se discutió que podría ser un buen comienzo para que un estudiante de secundaria no solo distinguiera los diferentes valores posicionales sino que podría apreciar que la expansión decimal es infinita si se añade un dígito más a medida que se hacen más desglosamientos. Consecuentemente, podría conducir al estudiante de secundaria a la idea de la propiedad de densidad.

6.4.2 Desarrollo de la Actividad 5: Jugando a la fila de números

Cada pareja de profesores tomó una hoja que tenía escrito un intervalo para que recibiera los números comprendidos en él conforme la docente iba sacando de un sobre fragmentos de papel en los que estaban escritos números de cero hasta seis cifras decimales (*Actividad 5*, ver Capítulo 4, sección 4.3.4.2). En la siguiente experiencia observada[24] se evidencia cómo Amanda por un momento conserva la concepción alternativa de la existencia de un sucesor de un decimal. También se muestra cómo ella relaciona la comparación de números decimales para justificar que 21.0002 está entre 21.0001 y 21.00069:

Docente: -¿21.0002?

Amanda: -Nosotras! [El número está entre 21.0001 y 21.00069, el intervalo que ellas tenían en el momento].

Docente: -¿Por qué?

Amanda: -Mmm… porque 21.0001 va después de 21.0002 y está antes de 21.00069.

Docente: -Bien… para ti ¿21.0002 es sucesor de 21.0001?

Amanda: -Creo que sí, pues 21.0002 es mayor que 21.0001.

Docente: -21.0002 es mayor que 21.0001, pero entonces ¿entre 21.0001 y 21.0002 no hay otro decimal?

Amanda: -Ah no! Perdón… No son sucesores [se refiere a que 21.0001 y 21.0002 no son consecutivos].

Ocurrencias como la anterior se evidenció también para el número 21.99 en el intervalo [21.98, 22]; de igual forma para el número 21.089 como antecesor de 21.09 en el intervalo [21.00999, 21.09]. Seguidamente, cada pareja de profesores en formación pasó al pizarrón a poner la secuencia de números de manera ascendente (ver Figura 6.11).

[24] Audio 16-feb, *Actividad 5*, min 8:34

Terminada esta parte, se socializó sobre el “no sucesor” así como también del “no antecesor” debido a concepciones alternativas de que los números decimales son consecutivos por algunos profesores en formación. Con el ánimo de que el profesor en formación adquiera una conciencia metaconceptual de que la propiedad de densidad ayuda a visualizar que los números decimales no son consecutivos, se expuso que entre pares de números consecutivos falsos se halla al menos un número decimal, mayor que el primer consecutivo falso y menor que el segundo consecutivo falso, por tanto, una infinidad.

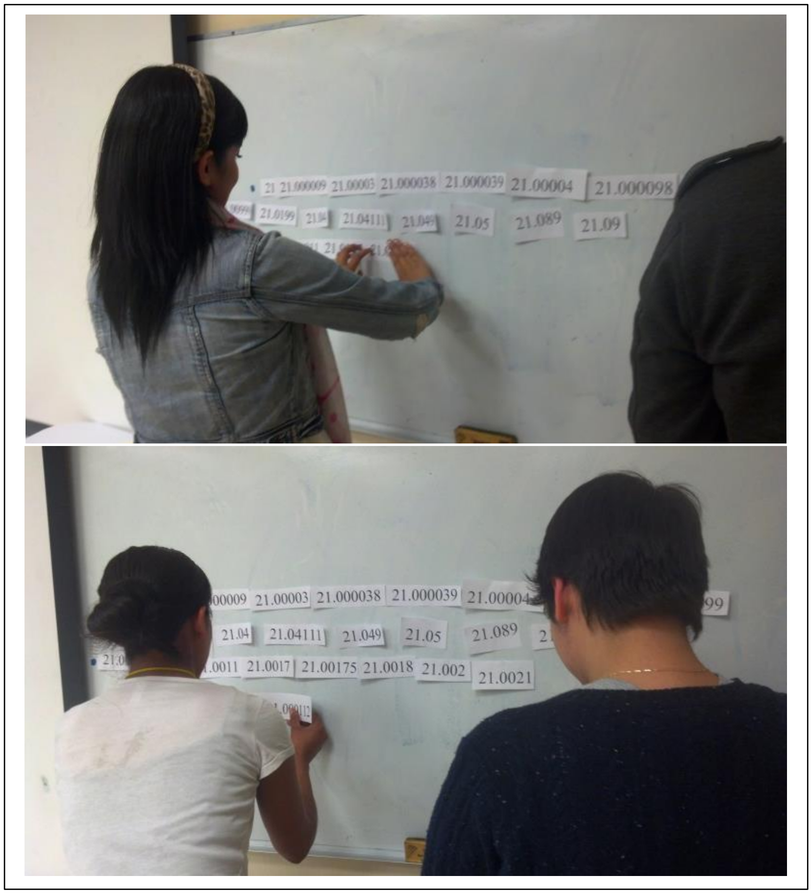


Figura 6.11 Profesores en formación realizando la *Actividad 5* en el pizarrón

Se señalaron pares de números en cada secuencia (cada secuencia es un renglón, como se observa en la Figura 6.12). Por ejemplo, en el primer renglón (de arriba hacia abajo, ver Figura 6.12) los números 21.00003 y 21.00004 (marcados con ^) son consecutivos falsos. Se quiso entonces, mostrar que entre este par de números decimales, con su orden habitual, se localizan al menos dos números decimales, mayores que el primero y menores que el segundo: 21.000038 y 21.000039. En el segundo renglón se identificaron dos números decimales en medio del par de consecutivos falsos 21.04 y 21.05. Se visualizó mejor en el tercer renglón, en el par 21.001 y 21.002 se encuentran los números 21.0011, 21.0017, 21.00175 y 21.0018, que son mayores que el primero y menores que el segundo.

Expresiones como la de Isabella: “Sí, ahí se ve, que los decimales no son consecutivos, igual siempre se están poniendo ceros y ceros [se refiere a poner ceros en medio de la parte decimal de un número]”, hace deducir que, posiblemente, hay una ocurrencia de cambio conceptual. Ella tendía a pensar de manera discreta en algunas preguntas del cuestionario, en consecuencia, pensaba que todos los números tenían un sucesor. Al parecer, en esta actividad ella reconoce que no existe un sucesor para un número decimal.

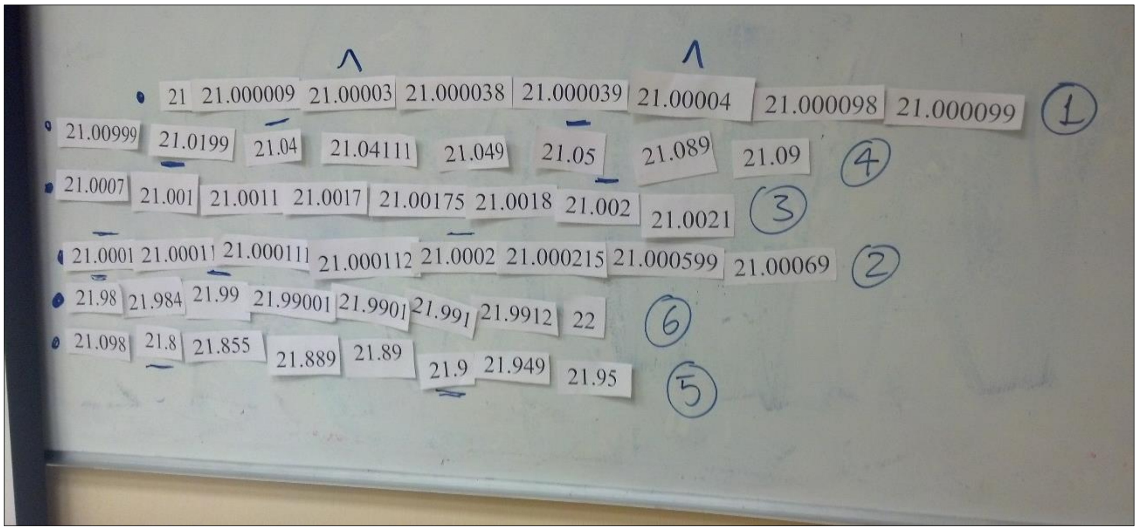


Figura 6.12 Secuencias formadas por los profesores en formación, *Actividad 5*

La existencia del número decimal más pequeño fue socializada en esta sesión. Se preguntó por el tema a Fabiola y a Olga, quienes en el cuestionario indicaron *0.01* y *0.1*, respectivamente, como el número decimal más pequeño. Fabiola mencionó que “viendo el tema [la densidad] no hay uno más pequeño”. En cambio, Olga refirió que sí existe el decimal más pequeño, “el cero”, a lo que se le cuestionó por un número menor que cero. Olga manifestó que *-1*, luego se preguntó por el más pequeño entre los dos y respondió que *-1*. Cabe resaltar que Olga anteriormente (en el cuestionario) no consideraba al cero como un decimal.

Antes de continuar con la siguiente actividad, se quiso discutir cómo iban ordenadas, de manera ascendente, cada una de las secuencias, es decir, qué secuencia –cada renglón de números que aparece en el pizarrón, ver Figura 6.12– iba en el primer lugar, cuál en el segundo y así sucesivamente. Los profesores en formación se guiaron por los extremos izquierdos de cada secuencia para decidir desde el más pequeño hasta el más grande (se aprecia hacia la derecha en la Figura 6.12 que el orden de las secuencias se encuentra marcado por números encerrados en círculos).

6.4.3 Desarrollo de la Actividad 6: Juego de menores y mayores

De manera individual, cada profesor en formación completó los cuadros en blanco de tal manera que se cumpliera la ordenación que aparece escrita en la hoja de trabajo (*Actividad 6*, ver Capítulo 4, sección 4.3.4.3).

Algunos profesores en formación no percibieron la equivalencia entre decimales, son los casos de Isabella, Olga, Oscar y Amanda.

- Olga agrega un cero en la posición de las diezmilésimas (ver Figura 6.13).
- Olga e Isabella agregaron dos ceros en las posiciones cienmilésimas y millonésimas del número 30.8712 (ver Figura 6.13 y Figura 6.14).
- Oscar agregó un cero en la posición de las cienmilésimas el número 30.8721 (ver Figura 6.15).
- Amanda agregó un cero al final del número 30.87125 (ver Figura 6.16).

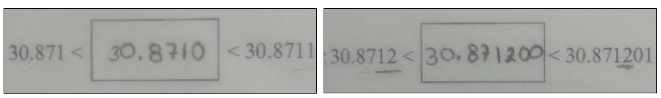


Figura 6.13 Olga, *Actividad 6*

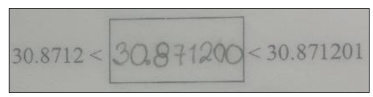


Figura 6.14 Isabella, *Actividad 6*

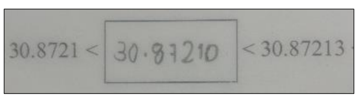


Figura 6.15 Oscar, *Actividad 6*

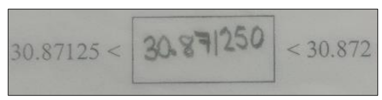


Figura 6.16 Amanda, *Actividad 6*

Aunque ya se había hablado de la equivalencia entre decimales en actividades anteriores, se cree que estos profesores en formación al ver que la expansión decimal del número a la derecha de cada cuadro es grande (hasta cienmilésimos), estén haciendo una transferencia de una propiedad de los naturales a los decimales. Por ello, al agregar ceros al final de la parte decimal del número creen que este "nuevo número" es más grande que el primero, y sin embargo, estas expresiones numéricas son equivalentes.

En esta parte de la secuencia:

$$30.8712 < \boxed{} < 30.871201$$

Olga e Isabella pensaron que antes de un "01" (las dos últimas cifras de 30.871201) se encuentran los números "00", pero no se dieron cuenta que al poner 00 al final de 30.8712 equivale al mismo número.

Dos profesores en formación cambiaron varias cifras por otras en la parte decimal de un número y posiblemente no se dieron cuenta que invirtieron el orden de ambos números (el original y el que aparece en el cuadro). Son las situaciones de Karen y Olga.

- Karen cambió el dígito 7 por el *5* en las centésimas y después agregó dos ceros, como se aprecia en la Figura 6.17, pero *30.8500* no es mayor que 30.87213.
- Olga cambió el 1 por el *0* en la posición de las diezmilésimas y agregó un *4* en la posición de las cienmilésimas (ver Figura 6.18); 30.87204 no es mayor que 30.8721.

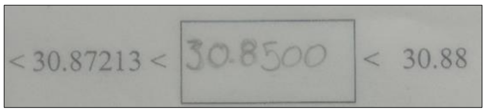


Figura 6.17 Karen, *Actividad 6*

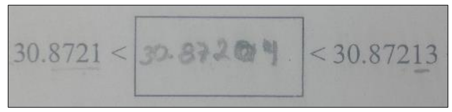


Figura 6.18 Olga, *Actividad 6*

Cinco estudiantes para profesor completaron la secuencia de manera correcta. En la Figura 6.19 se observa el desarrollo de Melisa y Ana. Su estrategia fue detallar los últimos dígitos de los números que aparecen allí, y con base en ello, modificarlos, en otros casos, añadir dígitos sin alterar la ordenación.

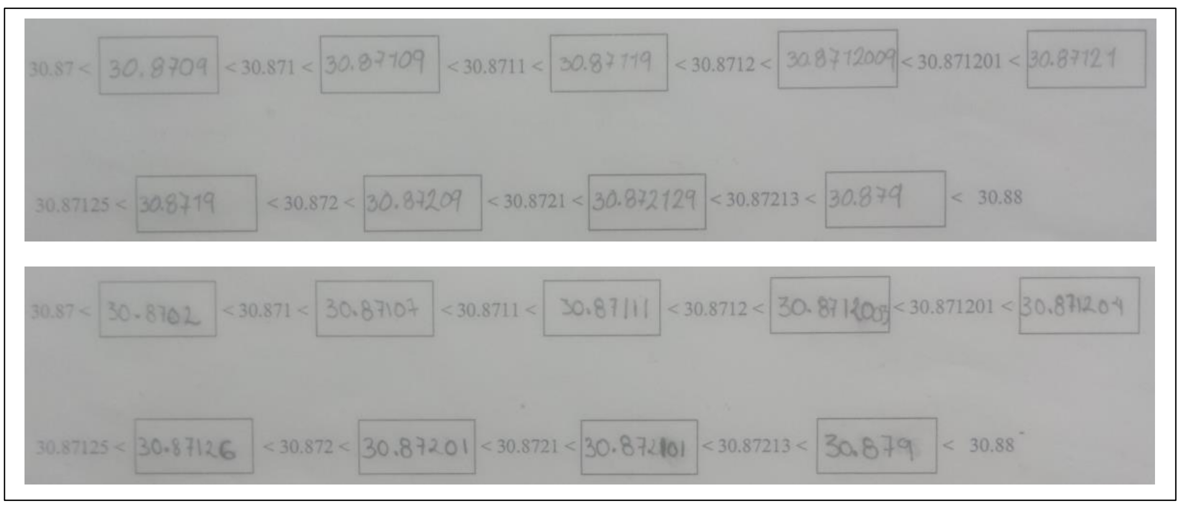


Figura 6.19 Secuencias formadas por Melisa y Ana, hojas de trabajo, *Actividad 6*

Concluida la prueba individual se dio el siguiente paso para que los profesores en formación participaran escribiendo en el pizarrón los números registrados en sus hojas de trabajo (ver Figura 6.20).

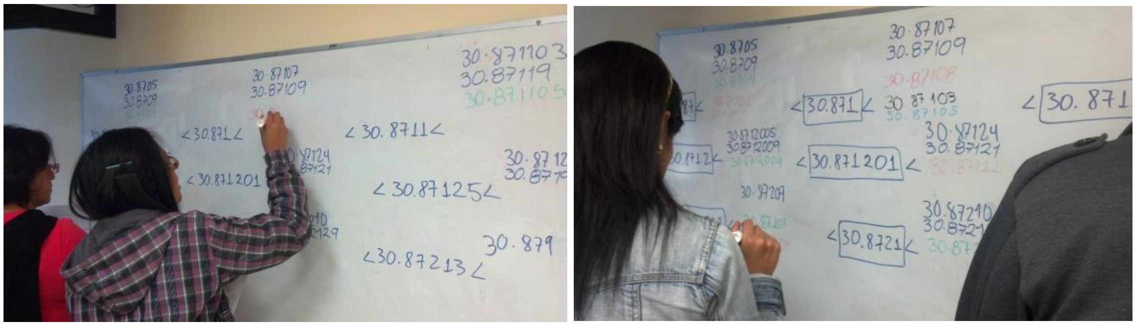


Figura 6.20 Profesores en formación realizando la *Actividad 6* en el pizarrón

Nuevamente se cuestionó por el sucesor, a lo que varios profesores en formación respondieron que la propiedad de densidad sí ayudaba a ver el hecho de que los números decimales no son consecutivos, ya que en medio de ellos hay muchos decimales; otros manifestaron, una infinidad. Marcos explicativos como los siguientes refuerzan lo anterior:

- “La densidad no permite que los números [decimales] sean consecutivos, hay infinitos números [se refiere a una infinidad de números]”, por Ana.
- “Es que nunca podrán ser sucesores [consecutivos] unos con otros, porque siempre hay un número diferente entre dos números”, por Amanda.

Sin embargo, se reforzó el tema con lo plasmado en el pizarrón (ver Figura 6.21) a través de pares de números en los que se observaron decimales en medio. Se indicó que en el par 30.872 y 30.8721, con el orden usual de decimales, hay otros más, distintos a ellos, y que por tanto, 30.872 y 30.8721 no son consecutivos (ver recuadro superior de la Figura 6.21). Se cuestionó a los participantes si había otras estrategias para hallar números intermedios en esta actividad. Nicolás mencionó “la media aritmética”. Se realizó un breve ejemplo con un par de números de la actividad para mostrar que con ella se puede hallar números intermedios en un intervalo.

Finalmente, cabe mencionar que también se realizaron las respectivas correcciones para los números *30.8500* y *30.87210* que fueron anotados por los participantes en el pizarrón, el primero no es mayor que 30.87213 y el segundo es equivalente a 30.8721 (ver recuadro inferior de la Figura 6.21).

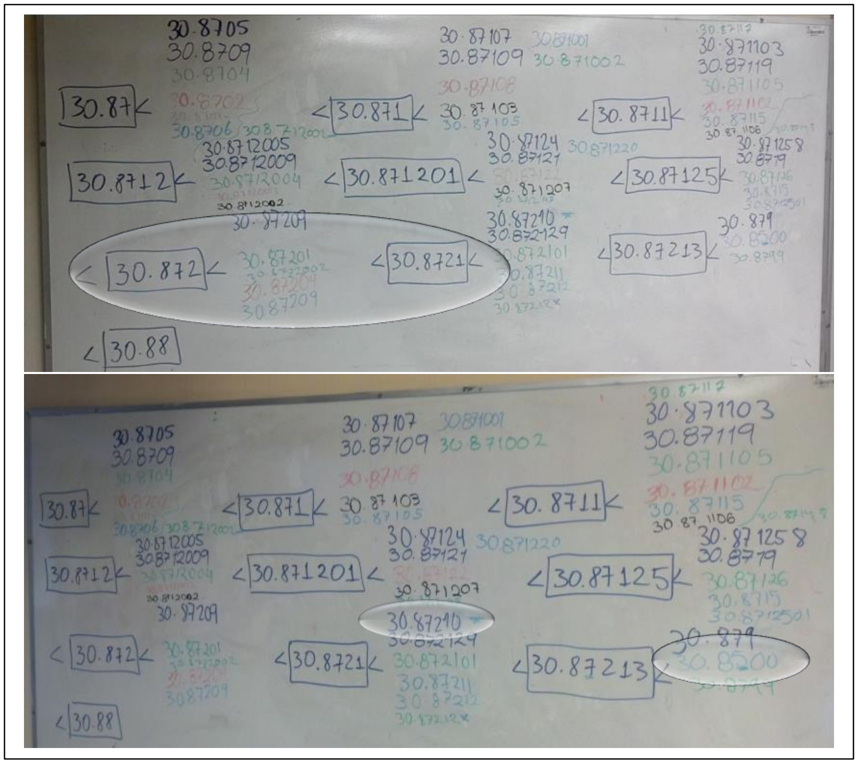


Figura 6.21 Elaboración de la *Actividad 6* en el pizarrón

En este capítulo, correspondiente a los modelos de los procesos cognitivos y de comunicación del Marco Teórico Local, se han puesto de manifiesto indicios de cambios conceptuales con respecto a varias concepciones alternativas de los estudiantes. Concepciones alternativas como la discreción en el conjunto de los números decimales debido a que algunos estudiantes para profesor solo consideraban números hasta centésimos, la existencia de un sucesor en el conjunto de los números decimales y equivalencia entre decimales. Y dos casos de profesores en formación quienes, al parecer, consideraban la existencia del número decimal más pequeño.

En el capítulo siguiente se responderán a las dos preguntas de investigación planteadas al inicio de este informe, no obstante, se han ido respondiendo a estas preguntas en el Capítulo 5 y en este capítulo.

Capítulo 7

Conclusiones

La puesta en marcha de la experimentación educativa a través de la aplicación y desarrollo del cuestionario y de la secuencia didáctica con profesores en formación, conlleva a conclusiones que responden las preguntas de investigación formuladas al inicio del proyecto de investigación cuyo informe es esta tesis.

7.1 Respuesta a la primera pregunta de investigación

¿Cuáles son las concepciones, o marcos explicativos iniciales, que apropia un profesor en formación en matemáticas con respecto a la propiedad de densidad de los números decimales?

Los profesores en formación respondieron un cuestionario de preguntas al inicio de la secuencia didáctica el cual arrojó resultados que fueron expresados a través de marcos explicativos iniciales. Se exponen a continuación, primero, aquellos marcos explicativos relacionados con las categorías propuestas por Vamvakoussi y Vosniadou (2004) sobre discreción y densidad, y segundo, aquellos afines con la equivalencia entre representaciones numéricas y valores posicionales de los números decimales.

En discreción ingenua:

- Hubo estudiantes para profesor quienes consideraron que los extremos (fracciones y/o decimales) de un intervalo son consecutivos y por ello aseguraron que no puede haber otro número en dicho intervalo.

En discreción avanzada:

- El proceso de particiones o subdivisiones finitas en un intervalo fue uno de los argumentos que usaron los profesores en formación para afirmar la existencia de una cantidad finita de números decimales, fracciones, y/o combinaciones, en el intervalo. Posiblemente, algunos pensaron en la localización de números decimales y fracciones en el segmento correspondiente.

- La concepción alternativa de que solamente los décimos –a lo mucho centésimos– son los números decimales puede estar influida en las respuestas relacionadas con conjuntos finitos dentro de un intervalo. No obstante, algunos estudiantes para profesor no se vieron afectados por lo anterior, es decir, independientemente de su concepción sobre el concepto de número decimal se limitaron a escribir cierta cantidad de números en un intervalo.

Observaciones concernientes con el pensamiento discreto:

- Los estudiantes para profesor, que a través de sus respuestas mostraron ejemplos de pensamiento discreto ingenuo y pensamiento discreto avanzado, tuvieron la concepción alternativa de que los números, especialmente los decimales, son consecutivos, en consecuencia, la consideración de la existencia de un sucesor. Algunos profesores en formación creyeron que *este sucesor* es cualquier número mayor, o los mayores que el número dado.

- Por las respuestas del cuestionario solo Olga fue incluida en la categoría discreción ingenua mientras que los casos de Karen, Isabella, Amanda y Fabiola se ubicaron en discreción avanzada. Las cinco estudiantes para profesor coincidieron en la existencia de un sucesor de un número diferente al de los naturales.

En densidad ingenua:

- Hubo profesores en formación que aseguraron la presencia de una infinidad de números intermedios en un intervalo, pero sin justificación alguna.

En densidad avanzada:

- El proceso de agregar dígitos en la parte decimal de un número, especialmente ceros, fue la justificación más notoria para aseverar la existencia de una infinidad de números decimales en un intervalo.

- El proceso de subdivisiones infinitas correspondientes a números decimales, y también a fracciones, fue uno de los argumentos usados por los profesores en formación para afirmar la infinidad de números decimales y/o fracciones en un intervalo.

En densidad-discreción:

- Fueron cinco profesores en formación –Karina, Melisa, Ana, Nicolás y Oscar– quienes mostraron en sus respuestas ejemplos de pensamiento discreto y pensamiento denso. No obstante, ellos aseguraron la infinidad de números intermedios en un intervalo (en algunas situaciones, no en todas las propuestas que aparecen en el cuestionario), pero consideraron la existencia de un sucesor, especialmente en los números decimales, algunos refirieron el sucesor como un número mayor. Posiblemente, este acontecimiento se debió a que ellos se ubicaron en un sistema de conocimientos de dominio número decimal para responder preguntas relacionadas con la existencia de un sucesor en cualquier conjunto de números, a excepción de los naturales.

Otros marcos explicativos iniciales

- El profesor en formación no se vio influenciado por la representación simbólica de los extremos de un intervalo para interpretar que hay decimales entre fracciones y fracciones entre decimales. En consecuencia, el proceso de cambiar una representación fraccionaria a una con escritura decimal fue una de las explicaciones más evidente dada por ellos para indicar que hay números decimales en un intervalo. Sin embargo, varios de ellos no advirtieron que esta conversión no siempre produce un número decimal, es decir una expansión decimal finita. También hubo casos en que el estudiante para profesor usó la equivalencia entre fracciones y números con escritura decimal (números racionales) para señalar que hay números en un intervalo.

- El reconocimiento de valores posicionales de los números decimales como décimos, centésimos, milésimos, entre otros, fue uno de los marcos explicativos que usaron los profesores en formación para asegurar la existencia de números decimales en un intervalo.

- La equivalencia entre representaciones numéricas de los extremos del intervalo para decidir la presencia de números intermedios fue una indicación que Ana y Nicolás sugirieron antes de contestar las preguntas pertinentes con la finitud e infinitud de dichos números intermedios.

7.2 Respuesta a la segunda pregunta de investigación

¿El modelo de enseñanza propuesto, a través de una secuencia didáctica, promueve un cambio conceptual de las concepciones o marcos explicativos relacionados con la propiedad de densidad de los estudiantes para profesor en matemáticas?, ¿por qué?

El modelo de enseñanza, propuesto a través de la secuencia didáctica, al parecer promueve un cambio conceptual en las concepciones que tienen los profesores en formación acerca de la propiedad de densidad de los números decimales. Sin embargo, se sugiere poner un mayor énfasis en el tema de la inexistencia del sucesor en el conjunto de los decimales debido a que algunos estudiantes para profesor comprendieron esta temática en las últimas actividades del taller. Aunque ya se explicitaron ocurrencias de cambio conceptual durante el transcurso del taller (Capítulo 6) se expone a continuación justificaciones relevantes del porqué el modelo de enseñanza propuesto promovió un cambio conceptual de los participantes.

- El marco explicativo más representativo, durante la aplicación y desarrollo de la secuencia didáctica, por la mayoría de profesores en formación, fue la ampliación de la expansión decimal, en algunos casos, con ceros, en los números decimales como una forma de hallarlos en medio de un intervalo. Al inicio del taller, hubo profesores en formación quienes usaron prontamente este marco explicativo que les había servido para expresar el porqué se pueden encontrar números decimales en un intervalo, en preguntas del cuestionario. Por ejemplo, el caso de Nicolás. Él ya traía consigo tendencias a pensar de manera densa –salvo por cuestiones relacionadas con la existencia de un sucesor en los decimales por lo que se le vinculó con la discreción-densidad–, entonces, su acercamiento al pensamiento denso pudo haberle facilitado su actuación en las primeras actividades, de hecho, en todas las actividades.

- Estudiantes para profesor, como Fabiola, Isabella y Olga, quienes mostraron tendencias a pensar de manera discreta en la resolución del cuestionario, aumentaron la cantidad de cifras decimales –en algunas situaciones hasta diezmillonésimas– en los números comprendidos entre el número escrito por la docente y el número10 (*Actividad 1*). Amanda y Karen anotaron solo hasta centésimos en sus ejercicios de la actividad.

- De manera gradual, aquellos profesores en formación quienes habían tenido dificultad en la comprensión de la existencia de una infinidad de números decimales en un intervalo, fueron ampliando su sistema de conocimientos en el dominio número decimal. Las profesoras en formación Karen y Amanda reconceptualizaron su concepción alternativa sobre la finitud de números en un intervalo al socializar sobre la idea de añadir un dígito más, una muestra más de un posible cambio conceptual.

- La socialización sobre la existencia de un sucesor en el conjunto de los números decimales fue cuestionada durante el trascurso del taller. Varios estudiantes para profesor aun incluían en su marco explicativo la existencia de un sucesor de un decimal como un número mayor, o en algunos casos, como los números mayores. La reconceptualización o resignificación sobre el tema se evidenció cuando los profesores en formación interactuaron con los applets de Horvatek y las actividades relacionadas con la comparación de números decimales presentadas en la última sesión del taller. Para varios de ellos, la temática del sucesor no estaba relacionada con la propiedad de densidad hasta que ellos visualizaron de manera clara y coherente que entre dos números consecutivos falsos existe al menos uno distinto de ellos.

7.3 Reflexiones acerca del modelo de enseñanza propuesto

- El modelo de enseñanza propuesto está basado en actividades en las que, posiblemente, se puede iniciar un proceso de ocurrencias de cambios conceptuales con estudiantes, de manera paulatina, acerca de las concepciones que tienen sobre la propiedad de densidad de los números decimales.

- Se considera que la propuesta didáctica es un modelo de enseñanza de innovación que puede ser de interés tanto para profesores en servicio como para estudiantes y que puede ser impartido en primaria y en secundaria, antes de que los alumnos estudien la propiedad de densidad de los números decimales, o la de los racionales.

- La secuencia didáctica se diseñó y elaboró con actividades que no solo son para resolver a lápiz y papel, también implementa el diálogo con su compañero, en las actividades de pareja, para compartir opiniones e inquietudes, especialmente revisar sus conocimientos previos y creencias. De igual manera, a nivel grupal, en el que se conoce el pensamiento de cada uno de los participantes.

- Las actividades iniciales, como las de las ligas y globos, tenían el objeto de acercar a los docentes en formación a nociones sobre la propiedad de densidad, que pueden ser aplicadas con niños de primaria o jóvenes de secundaria. Se espera que los profesores en formación que participaron en el taller puedan llevar a cabo estas actividades en un aula con sus futuros alumnos, igualmente, las demás actividades de la secuencia didáctica.

- La actividad elaborada con GeoGebra: puntos en un segmento, es un acercamiento a la propiedad de densidad en la que un estudiante puede visualizar en un contexto geométrico lo que pudiera ocurrir en un contexto numérico con números intermedios en un intervalo.

- La interacción con los applets de Horvatek es un ejemplo para quienes enfrentan dificultades acerca de la inexistencia de un sucesor de un número diferente al de los naturales, ya que se visualiza claramente que dos números decimales no son consecutivos porque siempre se puede hallar uno en medio de éstos.

- Se recomienda en una próxima experimentación socializar el concepto formal de la propiedad de densidad y del número decimal con los participantes, así mismo –por las dificultades que los profesores en formación evidenciaron al inicio de la secuencia didáctica– el concepto de número natural y del número fraccionario.

Finalmente, lo que se encuentra en esta tesis es la construcción de un Modelo Teórico Local (MTL) de la propiedad de densidad de los números decimales. En el siguiente capítulo se describirán las implicaciones para investigaciones futuras. Se puede hacer una revisión de la problemática tomando como punto de partida este MTL e iniciar un ciclo reiterativo para la construcción de otro MTL con el que se pueda profundizar sobre los marcos explicativos y los modelos de enseñanza que promuevan cambios conceptuales.

Capítulo 8

Investigación futura

Un modelo de enseñanza
para introducir la propiedad de densidad de los números decimales

Se muestra a continuación la estrucutra de una investigación futura en la cual se pretende iniciar un proceso reiterativo para la costrucción de un nuevo Modelo Teórico Local partiendo del MTL propuesto en esta tesis.

8.1 Introducción

La investigación expuesta en esta tesis estuvo centrada en los marcos explicativos de los estudiantes para profesor de secundaria en la especialidad de matemáticas. A partir de una experimentación educativa, cuyos resultados mostraron inicios de un proceso de cambio conceptual, se pretende extender el estudio con profesores en servicio y alumnos de secundaria.

En los siguientes párrafos se exponen los lineamientos generales para llevar a cabo una futura investigación, en la cual se continúa la línea estructurada por medio del estudio cuyo informe conforma los capítulos uno a siete de este documento.

8.2 Antecedentes

- Neumann (1998) realizó un estudio de investigación en 1996 acerca de las ideas de los estudiantes sobre la densidad de las fracciones en varias escuelas en Alemania. Los estudiantes eran de séptimo grado de educación elemental que asistían a cursos de matemáticas avanzadas. Neumann observó que los estudiantes asociaban propiedades de los números naturales al conjunto de las fracciones por lo que ellos solo pensaban en un número finito de números en un intervalo. De igual manera, el autor notó que algunos estudiantes consideraban la existencia de muchas fracciones en el intervalo, pero no una infinidad.

- Khoury y Zazkis (1994) consideran que los profesores en formación interpretan números diferentes para un mismo valor numérico, por ejemplo, 3/4 y 0.75 son diferentes números para los estudiantes para profesor, por el hecho de que el primero tiene una representación fraccionaria y el segundo una representación decimal. Según Vamvakoussi y Vosniadou (2004) ha habido evidencias sobre esta situación, para muchos estudiantes de educación básica primaria y secundaria, 1/2 y 2/4 representan números distintos por lo que responden que entre estos números hay una determinada cantidad finita o una infinidad de números.

- En términos de Broitman, Itzcovich y Quaranta (2003) los estudiantes de los últimos grados de primaria creen que los números decimales son consecutivos por lo que afirman que no hay otro número entre ellos. De igual manera sucedió con algunos profesores en formación, en el estudio realizado por Tirosh, Fischbein, Graeber, y Wilson, en el año 1999, además de que otros consideraron una finitud de números intermedios en un intervalo.

- El propósito principal del estudio realizado por Vamvakoussi y Vosniadou, en el año 2004, fue indagar los conocimientos previos de los estudiantes (15 años) sobre la propiedad de densidad de los números racionales, en una escuela en Atenas. Las investigadoras sostienen que los estudiantes creen que en un intervalo hay una cantidad finita de números debido a que asocian esta idea con la discreción de los números naturales.

- Investigaciones hechas por Vamvakoussi y Vosniadou (2007, 2010) y otra por Vamvakoussi, Christou, Mertens y Van Dooren (2011) muestran una vez más que la presuposición de la discreción de los números naturales es una limitación para que los alumnos visualicen la presencia de una infinidad de números intermedios en un intervalo. Vamvakoussi y Vosniadou, por los resultados de sus estudios (2004, 2007, 2010), señalan que la representación simbólica de los extremos de un intervalo afecta el juicio del estudiante para decidir si hay una finitud o una infinitud de números en un intervalo, es decir, los alumnos sostienen que solo puede haber decimales entre decimales y fracciones entre fracciones, pero no decimales entre fracciones y/o fracciones entre decimales.

8.3 Planteamiento del problema de investigación

Comprender la propiedad de densidad de los números decimales es uno de los mayores problemas que el alumno enfrenta cuando no tiene sus ideas claras sobre el tema (Ávila y García, 2008). Varios estudiantes tienen una concepción de número decimal como aquel que tiene una sola cifra decimal, y otros consideran los centésimos, según Ávila y García (2008), por ello, se limitan a considerar una cierta cantidad finita de números en un intervalo. Se mostró en la investigación, descrita en esta tesis, que algunos profesores en formación registraron una cantidad finita: nueve números con dos cifras decimales entre 1.2 y 1.3, como respuesta a una pregunta del cuestionario aplicado al inicio de la experimentación. Otros pensaron que no había un número en este intervalo porque consideraban los extremos como consecutivos, los consecutivos falsos, es decir, en medio de dos números decimales –cuyas partes decimales son consecutivas– no hay otro número.

La propiedad de discreción de los números naturales es una limitación para que un estudiante comprenda la propiedad de densidad (Vosniadou, Vamvakoussi, y Skopeliti, 2008), es decir, el alumno asocia esta propiedad de los naturales y de los enteros a un conjunto distinto de ellos. Brousseau (1981) señala que el conocimiento de los números naturales hace que el niño no estudie con facilidad los números decimales. En este informe se evidenció cómo varios estudiantes para profesor enfrentaron dificultades con respecto a la equivalencia entre números decimales. Ellos, posiblemente, hicieron transferencia de una propiedad de los naturales a los decimales por lo que cuando agregaron ceros al final de la parte decimal del número creyeron que este "nuevo número" era más grande que el primero, sin notar que estas expresiones numéricas eran equivalentes.

La investigación descrita en este documento proporcionó un Modelo Teórico Local de la propiedad de densidad de los números decimales. Filloy (1999) indica que los Modelos Teóricos Locales son apropiados para fenómenos específicos en los cuales se toman en cuenta cuatro componentes: *Modelos de Enseñanza* junto con los *Modelos para Procesos Cognitivos y de Comunicación*, y ambos relacionados con los *Modelos de Competencia Formal*.

La secuencia didáctica propuesta en esta tesis es un ejemplo de un Modelo de Enseñanza que fue puesta en marcha con profesores en formación y que se espera también ponerla en marcha con maestros en servicio, pero con breves modificaciones con base en una prueba de validación, que se mencionará más adelante. A partir de la aplicación de la secuencia didáctica, se pretende que los profesores elaboren secuencias de enseñanza para sus estudiantes. Los Modelos para Procesos Cognitivos y de Comunicación incluyeron, en este estudio, el conocimiento sobre las dificultades concernientes a la propiedad de densidad de los números decimales (ver Capítulos 5 y 6), de igual manera, se espera en la investigación futura conocer las dificultades que enfrentan tanto profesores, como estudiantes de secundaria. Y por último, el Modelo del Componente Formal, descrito en el Capítulo 2, contiene conocimientos que se espera que un profesor tenga sobre el tema, o conocimientos que el investigador debe tener para entender los textos matemáticos que producen los estudiantes.

Con base en lo anterior y la problemática presentada en esta tesis se formularon las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cuáles son las concepciones, *o marcos explicativos*, de los profesores en servicio y de estudiantes de secundaria con respecto a la discreción y densidad de los números decimales?

2. ¿Cuál es el papel del modelo de enseñanza propuesto en el caso de que se promueva un cambio conceptual?

A partir de estas preguntas y con el propósito de responderlas se diseñaron los siguientes objetivos de la investigación:

1. Indagar las concepciones alternativas que tienen los profesores en servicio y los estudiantes de secundaria con relación a la propiedad de densidad de los números decimales.

2. Evidenciar las actuaciones tanto de profesores, como de estudiantes que permitan poner en cumplimiento la puesta en marcha de una secuencia didáctica.

3. Caracterizar las partes de la secuencia didáctica propuesta que jueguen un papel relevante en la promoción de un cambio conceptual.

8.4 Marco Conceptual

El enfoque de desarrollo-cognitivo del Cambio Conceptual propuesto por Carey (1987) señala la importancia de los sistemas de conocimientos de un dominio específico. Ella dice que el individuo se encuentra en un sistema de conocimientos cuando relaciona un conocimiento de un concepto con otro, el niño aprende un concepto y lo asocia con otros ya aprendidos. Carey señala que los cambios que se producen entre la infancia y la edad adulta son fuertes reestructuraciones de los conceptos, en las cuales se presenta un cambio conceptual. Carey y Spelke (1994) argumentan que las personas están dotadas de sistemas de conocimientos de *dominios-específicos*, por ejemplo, el sistema de conocimientos de dominio número decimal, como se ha mostrado en esta investigación. El profesor en formación se encontraba en un sistema de conocimientos de dominio número decimal cuando relacionaba la densidad con el conjunto de los números decimales, pero se ubicaba en un sistema de conocimientos de dominio número natural cuando relacionaba la existencia del sucesor de un número. En consecuencia, cada vez que un alumno resuelva una situación problema se ubica en el sistema de conocimientos correspondiente. Por ejemplo, el niño no dejará de usar las nociones vinculadas con la multiplicación de números naturales por usar noción de multiplicación de fracciones, él usará las primeras cuando la situación lo requiera, de igual manera con la segunda, y se ubicará en el sistema de conocimientos correspondiente.

Vosniadou y Verschaffel (2004) mencionan que un sistema de conocimientos consiste de varios elementos como presuposiciones, creencias y modelos mentales que proporcionan una explicación y una predicción. El sistema de conocimientos de dominio-específico se va conceptualizando cada vez que el estudiante va aprendiendo, este aprendizaje puede ser producido por sus experiencias y/o por alguna instrucción (Carey y Spelke, 1994).

Investigadores como Stafylidou, Vamvakoussi, Verschaffel y Vosniadou han usado el enfoque de desarrollo-cognitivo del Cambio Conceptual propuesto por Carey (1987) y lo han utilizado en el área de las matemáticas. Vosniadou, en el año 1994, propone un marco teórico para el Cambio Conceptual como una modelización, especialmente para áreas relacionadas con las ciencias como la física, la biología, entre otras. Ella menciona que el niño forma un modelo mental –como una representación mental– de un objeto o situación. Según la investigadora, cuando el niño entra a la escuela, dicho modelo mental es parcialmente modificado, este nuevo modelo mental se llama modelo sintético. El estudiante tiene un modelo sintético cuando recibe información nueva y ésta es inconsistente con los conceptos construidos hasta el momento, proceso en el cual hace que el alumno acepte ciertas afirmaciones, otras no. Por ejemplo, en un estudio hecho por Vamvakoussi y Vosniadou, en el año 2012, los estudiantes (15 años aproximadamente) pensaban que solo había una finitud de números en medio de un intervalo. Seguidamente, las autoras hicieron una actividad con ellos y posteriormente, algunos alumnos ya no pensaban en la finitud de números en un intervalo, sin embargo, la representación simbólica de los números afectaba su juico para decidir qué números debían estar en un intervalo. Para los alumnos solo podía haber infinidad de decimales entre decimales, pero no entre fracciones, de igual manera, al contrario: infinidad de fracciones entre fracciones, pero no entre decimales.

En el año 2008, Vosniadou propone que los modelos sintéticos que forman los estudiantes sean distinguidos por medio de sus *concepciones alternativas*. Vosniadou define las concepciones alternativas como interpretaciones que tiene un alumno sobre la nueva información adquirida, bien sea en una escuela o por fuera del ámbito escolar. Se podría decir que las expresiones modelos sintéticos y concepciones alternativas son expresiones sinónimas, la diferencia está en que los primeros dependen de los modelos mentales, mientras las segundas son propias de cada quien en el momento de interpretar información.

Finalmente, el cambio conceptual requiere cambios en las presuposiciones y creencias que el estudiante debe hacer en sus representaciones mentales para que pueda acceder a los *modelos científicos*, como sostiene Vosniadou (2013).

En el ámbito educativo de las matemáticas, Stafylidou y Vosniadou (2004) y Vosniadou y Verschaffel (2004) suelen usar marcos explicativos iniciales en lugar de modelos mentales, marcos explicativos en vez de modelos sintéticos. Los marcos explicativos iniciales no son las primeras observaciones que realiza el individuo –como sucede con los modelos mentales–

sino las primeras reflexiones que forman una estructura coherente y sólida sobre la naturaleza que él hace, junto con sus presuposiciones y creencias que lo rodean durante su proceso de aprendizaje (Vosniadou y Verschaffel, 2004). En la investigación cuyo informe es esta tesis se observó que los profesores en formación tenían marcos explicativos iniciales con respecto a la discreción y densidad, el concepto de número decimal y el de fracción, el proceso de conversión de una representación fraccionaria a una representación con escritura decimal y la existencia de un sucesor en el conjunto de los números decimales (ver Capítulo 5).

Siguiendo las ideas a Stafylidou y Vosniadou (2004) y Vosniadou y Verschaffel (2004) se puede decir que los marcos explicativos son las reflexiones que hace un estudiante acerca de lo que percibe, de lo que ve, de lo que interpreta, y explica a su manera, con sus propias palabras un concepto aprendido, como se evidenció en el Capítulo 6 durante la puesta en marcha de la secuencia didáctica con los estudiantes para profesor.

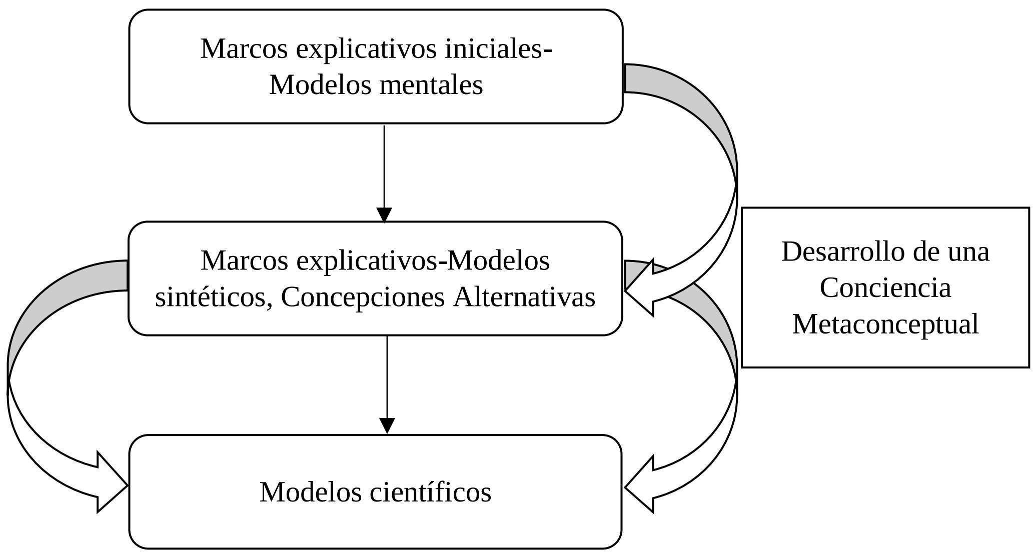


Figura 8.1 Modelización de fenómenos y conceptos
que el estudiante adquiere durante su proceso de aprendizaje

Cuando el estudiante no es consciente de que las presuposiciones y creencias son hipotéticas y limitan la forma en que interpreta la nueva información, es decir, cree que son verídicas, que no se pueden refutar, se encuentra en –lo que Vosniadou (1994) llama– una falta de una *conciencia metaconceptual*. Vosniadou (1994) pone énfasis en la importancia de enseñar ciencia de tal manera que los estudiantes se conviertan en seres capaces de ser conscientes de que sus presuposiciones no son hechos verdaderos sino hipótesis e interpretaciones teóricas que deben ser sujetos a experimentación. De ahí la importancia de generar conciencia de los errores que tienen los estudiantes. La falta de conciencia metaconceptual impide que los niños cuestionen sus conocimientos previos y fomenta la asimilación de nueva información a las estructuras conceptuales existentes generando conceptos erróneos (Ioannides y Vosniadou, 1998).

En la Figura 8.1 se aprecia cómo se piensa que el alumno pasa por un proceso de diferentes etapas hasta llegar a los modelos científicos, en los que se espera que logre un cambio conceptual.

Vosniadou y Vamvakoussi cuando realizaron el estudio de investigación en el año 2004 propusieron cinco categorías relacionadas con la discreción y densidad. Las investigadoras se basaron en las respuestas de los estudiantes y las categorizaron, ver Tabla 8.1

Tabla 8.1 Caracterizaciones del pensamiento del estudiante
con respecto a la finitud e infinitud de números en un intervalo

Discreción ingenua	Estudiantes que piensan que no hay otro número entre dos números racionales consecutivos falsos, es decir, se considera la existencia de un sucesor para un número racional.
Discreción avanzada	Estudiantes que piensan que hay un número finito de números entre dos números racionales consecutivos falsos.
Discreción-densidad	Estudiantes que interpretan que entre dos números racionales hay una cantidad infinita de números en algunos intervalos, y en otros, que hay un número finito de números intermedios.
Densidad ingenua	Estudiantes que comprenden que hay una infinidad de números en un intervalo, pero no justifican con la propiedad de densidad. Además, en esta categoría se encuentran los estudiantes que se ven afectados por la representación simbólica de los extremos del intervalo, es decir, creen que solo puede haber una infinidad de números decimales entre decimales y una infinidad de fracciones entre fracciones, pero no fracciones entre decimales o, al contrario.
Densidad avanzada	Esta categoría corresponde a una comprensión bastante sofisticada de la propiedad de densidad por el estudiante. Para ser colocado en esta categoría, el estudiante comprende que entre dos números racionales hay una infinidad de números racionales, independientemente de su representación simbólica, además, de justificar con la propiedad de la densidad.

8.5 Metodología

Con base en la experimentación educativa propuesta en la investigación cuyo informe es esta tesis, a continuación, se muestra lo que constituye una propuesta de diseño y elaboración de una nueva experimentación educativa:

1. Un cuestionario inicial y un cuestionario final, ambos de papel y lápiz, que incluyen preguntas de opción múltiple y la opción de justificar la respuesta elegida por el participante. Por ejemplo:

¿Cuántos números decimales hay entre 1.2 y 1.3?

a. No hay un número entre éstos.
b. Un solo número, ¿cuál?

c. *Nueve números, ¿cuáles?*
d. *Una cantidad finita, ¿cuántos?*
e. *Infinidad de números.*
f. *No lo sé.*

Justificación de la respuesta elegida: ____________________________________

Además, con base en los resultados de la secuencia didáctica con los profesores en formación, en el Capítulo 6, se quiere incluir números con más de dos cifras decimales como los milésimos, diezmilésimos, entre otros, en el diseño de las preguntas. Por ejemplo:

¿Cuántos números decimales hay entre 0.001 y 0.01?

2. Una secuencia didáctica, con actividades que promuevan el cambio conceptual: de lo discreto a lo denso. El diseño y elaboración de las actividades se realizarán teniendo como referencia la secuencia didáctica presentada en el Capítulo 4.

La puesta en marcha de la experimentación educativa se hará en tres fases:

En la primera fase se realizará una validación de la experimentación educativa con un grupo de profesores de secundaria en alguna institución educativa de Ciudad de México. Los resultados obtenidos de esta experiencia serán fundamentales para hacer ajustes en el diseño de las actividades, así como de los cuestionarios inicial y final.

En una segunda fase, se convocará de manera abierta a profesores de secundaria, con especialidad en matemáticas, para hacer partícipes de la experimentación educativa.

En una tercera fase, después del desarrollo de la experimentación educativa con los profesores se pretende lograr que ellos diseñen y elaboren secuencias de enseñanza para sus estudiantes con el fin de promover un cambio conceptual.

Finalmente, para identificar las concepciones alternativas de los participantes se capturarán videos, audios y hojas de trabajo durante el proceso de la experimentación educativa.

Referencias bibliográficas

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Matemática Educativa, 20*(2), 5-33.

Ávila, A. y García, S. (2008). *Los decimales más que una escritura*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Blair, K., Tsang, J., y Schwartz, D. (2013). How perception and culture give rise to abstract mathematical concepts in individuals. En S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change*, (pp. 322–340). New York: Routledge.

Broitman, C., Itzcovich, H. y Quaranta, M. E. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Relime*, *6*(1), 5-26.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield (Eds. y Trads.), *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques, 1970-1990*, (pp. 149-222).

Caravita, S., y Hallden, O. (1994). Re-framing the problem of Conceptual Change. *Learning and Instruction, 4*, 89-111.

Carey, S. (1987). *Conceptual Change in childhood.* Cambridge, MA: MIT Press.

Carey, S. (1991). Knowledge acquisition: Enrichment or Conceptual Change? En S. Carey, y R. Gelman (Eds.), *The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition* (pp. 257-291). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carey, S., y Spelke, E. S. (1994). Domain-specific knowledge and Conceptual Change. En L. A. Hirschfeld, y S. A. Gelman (Eds.), *Mapping the mind: Domain specificity in cognition and culture* (pp. 169-200). Cambridge: Cambridge University Press.

Carey, S., y Spelke, E. S. (1996). Science and core knowledge. *Philosophy of Science, 63,* 515-533.

Castillo, G. (2015). *Concepciones que ponen en juego los docentes en formación cuando planifican sus clases* (Tesis de maestría). Ciudad de México: Cinvestav.

Centeno, P, J. (1997). *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis. ISBN: 84-7738-028-7

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. En A. Kelly, y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Methodologies for Science and*

Mathematics Education (pp. 341-385). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. Recuperado de: https://scholar.google.com.mx/citations?user=JyAq-r8AAAAJ&hl=es&oi=sra

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 309–329. doi:10.1023/A:

Flores, F. (2007). El aprendizaje como Cambio Conceptual. En S. Bello (Ed.), *Cambio Conceptual ¿una o varias teorías? Reseñas del seminario sobre el Cambio Conceptual* (pp. 15-22). México, D.F: UNAM.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., y Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 426–425). Chipre: ERME, Departamento de Educación, Universidad de Chipre.

Ioannides, C., y Vosniadou, S. (1998). From conceptual development to science education: a psychological point of view. *International Journal of Science Education*, (*20*)10, 1213-1230. doi: 10.1080/0950069980201004

Khoury, H. A., y Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 191–204.

Kuhn, T. (1970). *The structure of scientific revolutions* (2nd ed). Chicago: Chicago Press.

Merenluoto, K., y Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Outlines for new teaching strategies. *Learning and Instruction*, *14*, 519-534.

Neumann, R. (1998). Students' ideas on the density of fractions. En H. G. Weigand, A. Peter-Koop, N. Neil, K. Reiss, G. Törner, y B. Wollring (Eds), *Proceedings of the annual meeting of the Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik* (pp. 97-104). Recuperado de http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1998/

O'Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 143–185.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., y Gertzog, W.A. (1982). Accomodation of a scientific conception: Toward a theory of Conceptual Change. *Science Education*, *66*, 211-227.

Pozo, J. I., Scheuer, N., Pérez, M., Mateos, M., Martín, E., y Cruz, M. (2006). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje. Las concepciones de profesores y alumnos.* Barcelona: Graó. ISBN 13: 978-84-7827-432-1

Sáiz, M. L. (2003). *El Pensamiento del Maestro de Primaria acerca del Concepto Volumen y de su Enseñanza* (Tesis doctoral). Ciudad de México: Cinvestav.

SEP (2002). *Los números y sus relaciones. Programa de estudio. Licenciatura en Educación Secundaria, Especialidad: Matemáticas, tercer semestre*. Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de http://camzac.edu.mx/newsite/doc_descarga/programas/mat/3num_rel.pdf

SEP (2010). *Plan de estudios 1999. Licenciatura en Educación Secundaria. Documentos básicos.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de http://www.dgespe.sep.gob.mx/public/planes/les/plan.pdf

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria. Sexto grado*. Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de http://www.dee.edu.mx:8080/piad/resource/pdfp/Programa_estudios_sexto.pdf

SEP (2016). *Desafíos Matemáticos. Sexto grado. Libro para el maestro (ciclo escolar 2016-2017).* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de file:///C:/Users/Mayra%20Zulay/Downloads/Primaria_Sexto_Grado_Desafios_matematicos_Libro_para_el_maestro_Libro_de_texto.pdf

Smith, J. P., diSessa, A., y Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of the Learning Sciences*, *3*(2), 115-163.

Stafylidou, S., y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*, 503-518. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., y Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Recuperado de http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., y Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction*, *21*, 676-685. doi:10.1016/j.learninstruc.2011.03.005

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., y Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*, 344–355. doi:10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*, 453-467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in an interval? Presuppositions, synthetic models and the effect of the number line. En S. Vosniadou, A. Baltas, y X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, (pp. 267-283). Oxford, UK: Elsevier.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, (*28*)2, 181-209. doi:10.1080/07370001003676603

Vamvakoussi, X., y Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 265-284.

Vamvakoussi, X., Vosniadou, S., y Van Dooren, W. (2013). The framework theory approach applied to mathematics learning. En S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change*, (pp. 305–321). New York: Routledge.

Van Hoof, J., Verschaffel, L., y Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, *90*, 39-56. doi:10.1007/s10649-015-9613-3

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learning and Instruction 4*, 45-69.

Vosniadou, S. (2002). Exploring the relationships between Conceptual Change and intentional learning. En G. M. Sinatra, y P. R. Pintrich (Eds.), *Intentional Conceptual Change* (pp. 377–406). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vosniadou, S. (2013). Conceptual change in learning and instruction: The framework theory approach. En S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change*, 2da Edición (pp. 11-30). Nueva York: Routledge.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., y Christou, K. P. (2005). *What can we gain from a Conceptual Change approach to the learning and teaching of mathematics?* Ponencia presentada en la 4ta Conferencia Mediterránea sobre Educación Matemática (*Mediterranean Conference on Mathematics Education)* (pp. 435-446). Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/278242353_WHAT_CAN_WE_GAIN_FROM_A_CONCEPTUAL_CHANGE_APPROACH_TO_THE_LEARNING_AND_TEACHING_OF_MATHEMATICS

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., y Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to Conceptual Change. En S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 3–34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vosniadou, S., y Verschaffel, L. (2004). Extending the Conceptual Change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, *14*, 445–451.

Widjaja, K., Stacey, K., y Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from Indonesian pre-service teachers. *Journal of Science and Mathematics. Education in Southeast Asia*, *31*(2), 117-131.

Anexo: Convocatoria

INSCRIPCIONES

El taller tiene una duración de 8 horas, dos por cada sesión.
Inicio: Lunes 13 de febrero.
Finalización: Jueves 16 de febrero.
Hora: 4:00 a 6:00 pm.
Lugar: Cinvestav Zacatenco
(Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, con calzada Ticomán. Delegación Gustavo A. Madero)

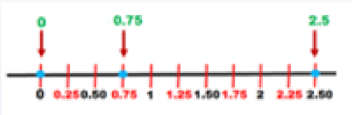
Inscripciones (cupo limitado):
mayra.suarez@cinvestav.mx
Favor escribir nombre completo, edad y semestre actual.

Al finalizar el taller se les entregará una constancia.

Impartido por:
Lic. Mayra Zulay Suárez Rodríguez
Dra. Olimpia Figueras Mourut de Montpellier

Departamento de Matemática Educativa

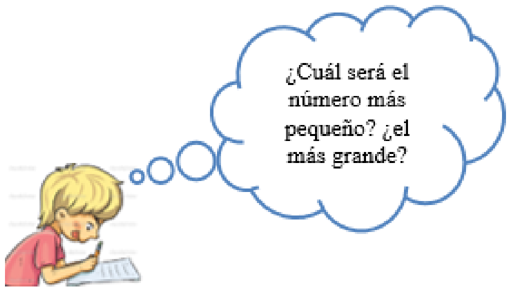
Taller sobre la Densidad de Números Decimales



Los invitamos al taller que se llevará a cabo en las instalaciones del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav).

El taller tratará el tema de la densidad de números decimales a través de actividades lúdicas y herramientas tecnológicas como GeoGebra.

El propósito de las actividades es generar reflexiones acerca de la enseñanza del tema que les puedan servir en un futuro con sus estudiantes, debido a que la densidad es poco estudiada en las aulas, pero es importante en la comprensión y el uso de los números decimales.



- ¿Cómo hacer de la densidad de los números decimales un concepto entendible para sus futuros estudiantes?
- ¿Qué actividades crees que podrías diseñar y/o realizar con respecto a la densidad de los números decimales?

Las actividades que desarrollarás durante el taller son dinámicas, en ellas podrás ver cómo a través del juego un estudiante de secundaria puede acercarse a la noción de densidad de números decimales.

PROGRAMACIÓN DE ACTIVIDADES

Lunes 13

Inicio del taller. Reflexiones sobre la enseñanza de la densidad de números decimales.
Actividad con ligas y globos.

Martes 14

Jugando a la mayor cantidad de sumandos.
Juego de sumas y restas.

Miércoles 15

Encuadrar un número decimal entre dos números.
Buscar el número pensado.

Jueves 16

Actividad con applets
Juego de menores y mayores.
Jugando a la fila de números.