



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN
Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

**“LOS NÚMEROS NEGATIVOS EN LAS RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD
DIRECTA. UNA INVESTIGACIÓN CON ESTUDIANTES DE TERCER GRADO DE
SECUNDARIA”**

TESIS QUE PRESENTA:

PABLO TORRES RAMIREZ

Para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA**

Directora de Tesis: DRA. AURORA GALLARDO CABELLO

Ciudad de México

Junio, 2019

AGRADECIMIENTOS

A la Doctora Aurora Gallardo Cabello por todo su apoyo en el transcurso de la maestría, por aceptar ser mi asesora, pero sobre todo porque sin ella esta tesis no existiría.

A las profesoras Carolina Rubí y Elizabeth por sus consejos, la ayuda y la orientación que me brindaron.

A todos los profesores de matemática educativa del área de básico por haber contribuido a mi formación.

A la Doctora Marta Elena Valdemoros Álvarez por sus aportaciones, comentarios y sugerencias para la culminación de esta tesis.

A la directora Amalia Díaz Zavaleta por todo su apoyo a mi labor docente.

A las autoridades educativas por facilitarme los grupos de estudiantes con los que realicé la investigación.

A la Doctora María Teresa Rojano Ceballos por haber aceptado ser sinodal en este trabajo.

Al personal auxiliar y administrativo del CINVESTAV, en especial a Adriana Parra Hernández y a Allan Marcos Cortéz Ortega, por su amabilidad y su atención.

A Lucía por todo su apoyo, comprensión y paciencia.

A todos los que creyeron en mí para culminar este proyecto.

DEDICATORIAS

A mis padres Margarita y Pablo

A mi hermana

Al profesor Mauricio

A mis alumnos de la generación 2015 - 2018

RESUMEN

El presente trabajo busca analizar la relación que los estudiantes de tercer grado de educación secundaria en México encuentran entre la variación directamente proporcional y los números negativos. Se pretende observar qué tipo de nexos entre dichos temas hallan los alumnos y la forma procedimental en que lo hacen, esto a través de cuestionarios escritos, además de recabar información respecto a justificaciones orales en entrevistas que puedan dar más claridad a este estudio.

Ésta es una investigación de carácter cualitativo que toma en cuenta la importancia que tienen los individuos en cuanto a su percepción y visión del tema de estudio en cuestión; el propósito es mostrar que la enseñanza de números negativos se puede extender a otros contenidos (en este caso a la proporcionalidad directa), para así darles un tratamiento más amplio y permitir que tanto maestros como alumnos dediquen más tiempo a su comprensión.

La tesis es una aportación y una propuesta que pretende enriquecer la perspectiva que se tiene de los números negativos en su enseñanza más elemental; muestra cómo los alumnos de secundaria pueden acercarse a ideas más profundas cuando se aumenta el campo de estudio de este tipo de valores hacia otras áreas presentes en el currículum de enseñanza de matemáticas en la educación básica.

ABSTRACT

The present work seeks to analyze the relationship that third grade students of secondary education in Mexico find between directly proportional variation and negative numbers. It is then intended to observe what kind of links between these issues are found by the students and the procedural form in which they do so, this through written questionnaires, as well as gathering information regarding oral justifications in interviews that may give more clarity to this study.

This is a qualitative research that takes into account the importance that individuals have in their perception and vision of the subject of study in question; the purpose is to show that the teaching of negative numbers can be extended to other contents (in this case to direct proportionality), in order to give them a broader treatment and allow both teachers and students to devote more time to their understanding.

The thesis is a contribution and a proposal that aims to enrich the perspective we have of the negative numbers in their most elementary teaching; it shows how high school students can approach deeper ideas when they increase the field of study of this type of values towards other areas present in the curriculum of teaching mathematics in basic education.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	17
CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES TEÓRICOS Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	21
1.1 Antecedentes teóricos y justificación.....	23
1.2 Planteamiento del problema de investigación.....	28
1.3 Objetivo de la investigación.....	30
1.4 Preguntas de investigación.....	30
CAPÍTULO 2 EL MÉTODO.....	33
2.1 Instrumentos metodológicos.....	36
2.1.1 Cuestionario piloto.....	36
2.1.2 Primer cuestionario.....	36
2.1.3 Segundo cuestionario.....	37
2.1.4 Entrevista.....	38
2.2 Los estudiantes y su contexto.....	39
2.3 Estudio de casos.....	40
2.4 Validación de resultados.....	41
CAPÍTULO 3 EL ESTUDIO.....	43
3.1 Descripción del Estudio.....	45
3.2 Profundizando en la entrevista.....	46
3.2.1 Primera parte de la entrevista.....	47
3.2.1.1 Caso 1. Entrevistando a K.....	47
3.2.1.2 Caso 2. Entrevistando a M.....	72
3.2.2 Segunda parte de la entrevista.....	106
3.2.3 Tercera parte de la entrevista.....	107
3.3 Análisis general del Estudio.....	110

3.3.1 Resultados y observaciones del primer cuestionario.....	110
3.3.2 Resultados y observaciones del segundo cuestionario.....	114
3.3.3 Observaciones generales de la entrevista.....	121
CONSIDERACIONES FINALES.....	125
Perspectivas.....	130
REFERENCIAS.....	133
APÉNDICES.....	139
Apéndice A Primer cuestionario.....	141
Apéndice B Segundo cuestionario.....	147
Apéndice C Tablas de resultados primer cuestionario.....	157
Apéndice D Tablas de resultados segundo cuestionario.....	173
Apéndice E Protocolo de entrevista.....	191

INTRODUCCIÓN

El estudio de los números con signo en la educación básica, específicamente en la educación secundaria, es breve y carece de variantes en su aprendizaje, en cambio las relaciones de proporcionalidad han tenido otro tratamiento, ya que se abordan en bastantes momentos de los tres años que dura esta etapa.

La importancia de los números negativos dentro de las matemáticas no parece ser captada en su introducción a los niveles básicos de educación en México, por lo que muchas veces se encuentran relegados a reglas que se aprenden para poder manipularlos, aun sin comprenderlos del todo, ni elevar su estatus a números tan necesarios como los positivos.

Las ideas anteriores hacen pensar que se necesita observar a los negativos desde otra perspectiva, darles el lugar que se merecen, tratarlos con la misma importancia que a otro tipo de números, pero, sobre todo, darles más momentos para su aprendizaje dentro del aula.

Si se analiza el programa de estudios de matemáticas a nivel secundaria de la Secretaría de Educación Pública en México que se encuentra vigente (SEP, 2011), se puede observar que hay contenidos que se extienden más ampliamente que otros; como ya se dijo las relaciones de proporcionalidad son uno de esos temas en los que se ha dedicado más tiempo para su aprendizaje.

Dentro de las relaciones de proporcionalidad hay un aspecto en el cual no se ha puesto mucha atención, y es que, en la proporcionalidad directa, se pueden integrar los números negativos de una manera natural siguiendo la definición que se ha enseñado hasta ahora para este tipo de relación.

Es entonces cuando surge la idea de este estudio, a saber, que la enseñanza de números negativos se puede extender a otros contenidos (en este caso a la proporcionalidad directa), para así darles un tratamiento más amplio y permitir que tanto maestros como alumnos dediquen más tiempo a su comprensión.

Este trabajo es únicamente una aportación y una propuesta para intentar enriquecer la perspectiva que se tiene de los números negativos en su enseñanza más elemental; muestra cómo los alumnos de secundaria pueden acercarse a ideas más profundas cuando se aumenta el campo de estudio de este tipo de valores hacia otros contenidos.

CAPÍTULO 1

**ANTECEDENTES TEÓRICOS Y PLANTEAMIENTO DEL
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

1.1 Antecedentes teóricos y justificación

Los números negativos son un tema de las matemáticas que ha presentado muchos problemas de comprensión y de aceptación no solo en alumnos de niveles básicos de educación, sino en grandes matemáticos a lo largo de la historia. Por citar algunos ejemplos: Diofanto, Bhaskara, Al-Khwarizmi, Leonardo Pisano, Girolamo Cardano, Nicolas Chuquet, Luca Pacioli, entre otros, hallaron dificultades para primero aceptar y después tratar de justificar la aparición de cantidades negativas en un tiempo en el que no era común hablar de éstas (Gallardo, 1994).

Por lo dicho anteriormente, se puede argumentar que es necesario buscar más variedad en cuanto a la enseñanza de los números con signo, no solo adiciones y sustracciones con problemas que muchas veces involucran una sola variable; es decir, que los alumnos tengan una gama mayor de aprendizaje referente a situaciones que permitan la comprensión de los números signados ya que, como menciona Gallardo (1994) “cuando el número negativo adquiere el mismo estatus que el número positivo, los procesos de sustitución cobran sentido en las expresiones algebraicas generales. A su vez, se amplían las fuentes de significado de estos números a otras áreas del conocimiento dentro y fuera de las matemáticas”.

En cuanto a investigaciones que se apoyan en el trabajo de Gallardo referente a los números enteros y que dan cuenta de la importancia de utilizar un sistema de referencia como parte del estudio y aprendizaje de este tipo de números, se puede citar los siguientes:

Torres (2008) en su trabajo respecto al uso de la recta numérica como medio para realizar la sustracción de números negativos, concluye que “efectivamente se logra la **recuperación de la sustracción con números vía recta numérica desde una perspectiva integral**. La recta numérica se vuelve una herramienta poderosa a lo largo del trabajo. Junto con la recta hay otros factores que contribuyen a darle mayor sentido: la resolución de problemas verbales aditivos...”.

Por otro lado, Velázquez (2009) en su estudio sobre el plano cartesiano como un organizador fenomenológico en la adición, sustracción, multiplicación y división de números enteros, muestra en sus resultados que “el plano cartesiano apoyó a los estudiantes de tercer grado de secundaria para representar las cuatro operaciones básicas con enteros, les permitió justificar resultados, les ayudó para corregir sus propios errores, lograron la extrapolación del cero y esto les permitió darse cuenta de que los números negativos poseen el mismo estatus que los positivos, ya que todos los puntos de una misma expresión se encuentran sobre la misma recta”.

Méndez (2016) en su investigación respecto a los significados que los estudiantes de secundaria atribuyen al cero, afirma que cuando los estudiantes “realizan operaciones en la recta numérica no solo consideran al cero como el punto de referencia, sino que a su vez le atribuyen el sentido de representar el resultado, es decir, la ausencia de objetos”.

Cabe mencionar la obra “Ensayo para introducir las magnitudes negativas en la filosofía” de Kant, escrito en 1763, pues ahí se menciona, aunque no de manera explícita, un sistema de referencia usado para oponer dichas magnitudes, dando sentido con esto a los números negativos, lo cual da indicios para pensar que cuando se quiere justificar la relación entre números enteros al iniciar su aprendizaje, el uso de construcciones tales como la recta numérica y el plano cartesiano son una base muy fuerte al buscar entender la naturaleza de oposición entre dichos valores.

También se puede citar a Freudenthal (1983) quien menciona respecto al uso de sistemas de referencia para introducir a los números negativos que “cuando se usa el método cartesiano no se puede evitar que las letras representen también números negativos. Si las rectas son descritas algebraicamente en su totalidad, si las curvas son descritas en cualquier situación es necesario admitir los valores negativos” (citado en Gallardo y Velázquez, 2011).

Todas estas perspectivas y trabajos dan cuenta del eficaz instrumento que constituye un sistema de referencia como lo es el plano cartesiano para representar y establecer la relación entre números positivos, números negativos y el cero.

Siguiendo las ideas anteriores como guía, se pensó en combinar la proporcionalidad directa con el uso y operación de los números con signo, pues de esta forma los estudiantes pueden hacer razonamientos acerca del orden de los números, la comprensión e importancia del cero como punto de referencia en representaciones gráficas como el plano cartesiano, el manejo de operaciones básicas con números enteros y cómo este tipo de valores se pueden extender a situaciones problemáticas distintas a las que comúnmente se abordan en la asignatura de matemáticas dentro del nivel secundaria en México.

Para acotar la investigación, se descartaron tanto la proporcionalidad inversa, como otros tipos de funciones lineales distintas al que interesa a este estudio, pues se considera que la conceptualización de variación directamente proporcional es suficientemente amplia como para apoyar el aprendizaje que los alumnos requieren de ambos temas (proporcionalidad y números enteros) en el nivel secundaria, además de que hay bastantes variantes en cuanto a funciones lineales se refiere, lo cual extendería demasiado la investigación y ese no es el propósito de este trabajo. Por lo tanto, se determinó que únicamente se abordaran relaciones de proporcionalidad directa, es decir, relaciones entre dos variables que tengan una pendiente mayor que cero ($m > 0$) y cuyo punto de corte con respecto al eje de las ordenadas sea cero ($b = 0$).

Para Vergnaud (1991) “la noción de relación es una noción absolutamente general. El conocimiento consiste en gran medida en establecer relaciones y en organizarlas en sistemas. Hay relaciones entre objetos en el espacio, entre cantidades físicas, entre fenómenos biológicos, sociales y psicológicos”; lo anterior describe el principio de la proporcionalidad, que es en sí una relación entre magnitudes. A partir de lo anterior, se considera también la importancia de las relaciones cuaternarias (relaciones de cuatro elementos) que menciona el mismo Vergnaud y a continuación se retoman ideas clave que apoyan el desarrollo de esta investigación.

Hablando respecto de problemas y situaciones de tipo multiplicativo, Vergnaud hace hincapié en que, al introducir la multiplicación en la enseñanza, se debe abordar como una relación cuaternaria, mencionando el isomorfismo de medidas, que es una relación entre cuatro cantidades, donde “dos cantidades son medidas de un cierto tipo, y el resto son medidas de otro tipo” (1991, p. 197).

Para la resolución de problemas multiplicativos, Vergnaud (Ibid., pp. 198 – 200) ya introduce la búsqueda de una variable desconocida a partir de las otras tres, esto como un principio de las relaciones de proporcionalidad, además de que establece una tabla de correspondencia para representar el isomorfismo entre magnitudes. También muestra (por medio de los ejemplos que da) los puntos importantes en los cuales se debe centrar la enseñanza de este tipo de situaciones: diferencia entre números enteros y números decimales, entre magnitudes continuas y magnitudes discretas, la introducción de la multiplicación como una adición reiterada, la obtención del valor unitario conociendo el vínculo de correspondencia entre dos magnitudes de naturaleza diferente, entre otras; con lo cual se muestra que el presente trabajo también recoge algunas de las ideas de las conceptualizaciones que hizo Vergnaud.

Vergnaud (Ibid., p. 202) reconoce dos tipos de procedimientos para trabajar en la solución con problemas multiplicativos en los que se debe hallar un valor faltante dados otros tres valores:

- El primero consiste en aplicar un operador vertical sin dimensión (esto se puede hacer al establecer una tabla de correspondencia) al cual llama escalar (el escalar consiste en hacer pasar de una línea a otra de la tabla de correspondencia en una misma categoría de medidas o magnitud) y que en este trabajo se menciona como factor interno.
- El segundo consiste en aplicar un operador horizontal el cual es llamado como operador – función (en la investigación este operador se reconoce como valor unitario o constante de proporcionalidad) que ayuda a pasar de una categoría (magnitud) a otra dentro de una tabla de correspondencia.

Basado en lo anterior, Vergnaud (Ibid., p. 207 y p. 210) reconoce algunas problemáticas recurrentes al finalizar la educación primaria y comenzar la educación secundaria (cabe mencionar que, en Francia, país de origen de Vergnaud, la educación primaria dura 5 años y la educación secundaria 3, en comparación con México, donde la educación primaria dura 6 años y la educación secundaria 3):

- La noción de razón
- La noción de función
- La noción de razón – operador
- La noción de proporción

Con todo lo anterior, se pretende mostrar la importancia de comprender las bases de la proporcionalidad, pues si estos conceptos y las dificultades que conllevan no se atienden, pueden generar obstáculos más adelante en el progreso de la formación de los estudiantes; además de esto, se hace notar que la presente investigación también puede contribuir al desarrollo del concepto de proporción y de función al ser éstos abordados en la educación secundaria.

Cuando se habla de proporcionalidad, se pueden establecer condiciones necesarias y suficientes, es decir, que, si una condición se cumple, las otras también lo harán. Un ejemplo de condición necesaria y suficiente para que dos magnitudes sean proporcionales es que el cociente de cada par de valores correspondientes sea una constante.

Como definición de una relación de proporcionalidad se puede decir lo siguiente:

- “Una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si existe un número, siempre el mismo, que multiplicando a cualquiera de las cantidades de un conjunto da como resultado la cantidad correspondiente a otro conjunto. Este número se llama factor constante de proporcionalidad o factor externo constante” (Block, Mendoza y Ramírez, 1995).

- Lamon (2007) define la proporcionalidad directa como el constructo matemático que caracteriza la condición o estructura subyacente a este tipo de situaciones y afirma que en la comprensión de la proporcionalidad juega un papel importante la constante de proporcionalidad, la cual expresa la razón constante de las dos cantidades que covarían, cuando dicha covariación se modela a través de una función lineal de la forma $y = kx$ donde k es dicha constante (citado en Sanchez, 2013).

Tomando en cuenta las definiciones anteriores, se puede establecer que todas las parejas de números negativos que aparezcan sobre la línea recta que se forma al graficar una relación de proporcionalidad (es decir, los que aparecen en el tercer cuadrante del plano cartesiano), son parte de esta relación porque al dividirse dan el mismo factor constante que los pares de valores positivos que aparecen en el primer cuadrante del plano. Se intenta mostrar con esto, que el pensar en los valores negativos como parte de una relación de proporcionalidad es totalmente válido para el interés de esta investigación.

Cabe decir que durante la revisión de bibliografía para justificar este estudio, no se encontraron trabajos que relacionen la proporcionalidad directa con los números negativos de forma evidente; aun así se puede mencionar un artículo muy próximo a estas ideas, escrito por Gallardo y Velázquez (2011) con el nombre “Los positivos y negativos como medios de organización de familias de rectas en el plano”, en el cual establecen el uso de este sistema de referencia para representar las operaciones básicas, esto basado en la construcción de rectas con pendiente tanto positiva como negativa, llevando (como ellos lo mencionan) a los alumnos a utilizar el sistema cartesiano más allá del primer cuadrante, además de una aseveración en el trabajo de Tesis de Saavedra (2017) referente a la negatividad en los números racionales, en el que menciona la relación entre pendiente y recta en una gráfica, y su posible extensión hacia cuadrantes en los que se manipulen valores negativos.

1.2 Planteamiento del problema de investigación

Trabajando con conceptos relacionados a proporcionalidad, y con números negativos en el nivel de educación secundaria en México, surgieron los cuestionamientos: ¿qué pasa con los números

negativos en una relación directamente proporcional?, ¿por qué se omiten?, ¿son útiles o funcionales en el planteamiento de problemas de proporcionalidad directa?, y lo más importante, ¿se puede utilizar la proporcionalidad con números negativos para enriquecer el aprendizaje de ambos contenidos dentro del aula con alumnos de este nivel?

Uno de los aspectos a notar en el actual programa de estudios en uso para educación secundaria (Programa 2011) es que la proporcionalidad o aspectos relacionados a ésta, están ampliamente distribuidos a lo largo de los tres años con los que cuenta esta etapa de la educación; se abordan desde situaciones de reparto proporcional, hasta la identificación gráfica, tabular y por medio de una función algebraica de una relación de proporcionalidad. En el caso de los números con signo, si bien se abordan desde primer grado y se ven en cada ciclo escolar en cierta medida (por ejemplo, en procesos algebraicos), mayormente se trata de aspectos operativos (suma, resta, multiplicación y división), además de resolución de problemas de casos retomados de la “vida cotidiana” que se enfocan en adición y sustracción de números con signo.

A continuación, y con la intención únicamente de mostrar el tipo de situaciones contextualizadas que se abordan para el aprendizaje de los alumnos, se presentan algunos ejemplos de problemas relacionados a números negativos tomados de distintos libros de texto de la asignatura de matemáticas, tanto de primer grado, como de segundo grado de secundaria:

“Tres socios emprenden un negocio que deja una pérdida de \$4200.00 al final del primer mes y una ganancia de \$2400.00 al final del segundo mes. Si las pérdidas y las ganancias se dividen en partes iguales entre los socios, ¿cuánto dinero ha perdido cada socio en los dos meses? ¿De qué manera puede representarse esta situación con números enteros?” (Escareño y López, 2013).

“En una serie de juegos de canicas, Pepe perdió tres canicas, luego ganó dos y después perdió cinco. ¿Cuántas canicas le sobraron?” (Block y García, 2011).

“Si una persona nació en el año 15 a.n.e. y murió en el año 38. ¿Cuántos años vivió? ¿Cuál es la expresión matemática que representa la edad de la persona? Representa esta operación en la recta numérica.” (Arriaga y Benitez, 2012).

“Leo vive en Chihuahua; su papá colocó en el patio un termómetro que mide la temperatura ambiente. En la madrugada del viernes el termómetro marcaba -8°C , para el mediodía, la temperatura aumentó 10° , ¿qué temperatura marcaba el termómetro al mediodía” (Sánchez, E., Hoyos, V., Sáiz, M. y Guzmán, J., 2012).

Con lo anterior, lo que se quiere hacer notar es, primero, la escasa variedad de contenidos para la enseñanza de números con signo y, segundo, la poca vinculación que hay entre los contenidos relacionados a números negativos con otros temas del programa de estudios 2011 para educación secundaria (para el caso de esta investigación, con la proporcionalidad directa).

El plan de estudios propone un enfoque estructural escalonado entre contenidos en la asignatura de matemáticas, por lo que enlaza muchos ejes temáticos entre sí, pues se basa en aprendizajes esperados que para ser logrados por un alumno requieren de varios temas amalgamados que den base y fundamenten dichos aprendizajes, pero como se mencionó anteriormente, en el caso de los números negativos, éstos sirven como apoyo para avanzar en otros temas, en especial los que son de carácter algebraico, pero no hay variedad de contenidos (salvo la recta numérica) que sirvan para enriquecer el aprendizaje de números enteros.

1.3 Objetivo de la investigación

Como se ha expresado anteriormente, el objetivo de investigación está enfocado en observar si alumnos de tercer grado de secundaria son capaces de vincular el uso de los números negativos con una relación de proporcionalidad directa.

1.4 Preguntas de investigación

Para esta indagación se han acotado dos preguntas:

- ¿Cómo justifican los alumnos de tercer grado de secundaria la integración de números negativos en situaciones de proporcionalidad directa?

- ¿De qué manera llevan a cabo los estudiantes de tercer grado de secundaria la manipulación de los números negativos dentro de la proporcionalidad directa?

La primera intenta mostrar qué ideas tienen los estudiantes de secundaria respecto a la proporcionalidad directa y si estas ideas les permiten relacionar e incluso justificar la aparición de números negativos.

La segunda es de carácter más procedimental y busca aportar elementos acerca de cómo se desempeñan operacionalmente los alumnos cuando encuentran valores negativos en una situación de proporcionalidad. Se pretende que los estudiantes logren representar situaciones de variación directamente proporcional, además, se quiere observar cómo integran dentro de esas representaciones a los números negativos, por ejemplo, al graficarlos sobre la recta generada, o al obtener la constante de proporcionalidad en una tabla, ya que regularmente, en este tipo de situaciones proporcionales, solo se manejan valores positivos.

CAPÍTULO 2

EL MÉTODO

Se trata de una investigación fundamentalmente cualitativa, pues se considera que este enfoque aporta muchos elementos que permiten hacer interpretaciones y conclusiones más cercanas a los sujetos de estudio.

Como lo mencionan Corbin y Strauss (2015) la investigación cualitativa es “una forma de investigación en la cual un investigador (es) o investigador (es) designado (s) recolectan e interpretan los datos, haciendo del investigador una parte tan importante del proceso de investigación como los participantes y los datos que proporcionan”. Por consiguiente, el investigador se involucra de una manera profunda en el proceso de su investigación y forma, en cierto sentido, parte de ésta.

Para complementar lo anterior, se retoma a Rodríguez, Gil y García (1999) quienes aportan una descripción del proceso que este tipo de estudio implica, diciendo que “los investigadores se aproximan a un sujeto real, un individuo real, que está presente en el mundo y que puede, en cierta medida, ofrecernos información sobre sus propias experiencias, opiniones, valores... etc. Por medio de un conjunto de técnicas y métodos como las entrevistas, las historias de vida, el estudio de caso o el análisis documental, el investigador puede fundir sus observaciones con las observaciones aportadas por los otros”.

También, Saavedra (2017) menciona que “una característica importante de este método se manifiesta en su estrategia para tratar de conocer los hechos, procesos, estructuras y personas en su totalidad, y no a través de la medición de algunos de sus elementos. La misma estrategia indica ya el empleo de procedimientos que dan un carácter único a las observaciones”.

Interesa esta visión cualitativa concebida líneas arriba porque la presente investigación involucra la perspectiva, descripción y las conclusiones a las que llegaron los estudiantes, aunado esto a las observaciones hechas por el investigador, lo cual permitió conocer más allá de las respuestas por escrito, llevando el proceso a “escuchar el fenómeno estudiado”, no solo observarlo, por medio de entrevistas.

2.1 Instrumentos metodológicos

Para la realización del presente trabajo se recurrió a los siguientes instrumentos metodológicos:

2.1.1 Cuestionario piloto

Se aplicó un cuestionario piloto a 20 alumnos de tercer grado de secundaria, el cual constaba de dos partes: la primera incluía preguntas relacionadas a ejercicios y conceptos básicos tanto de proporcionalidad directa como de números enteros; la segunda parte contenía 4 problemas de proporcionalidad directa que además involucraban valores negativos en sus datos.

La intención de aplicar este cuestionario fue para detectar y corregir cualquier problemática surgida de la interpretación que los alumnos hicieran del instrumento, para posteriormente presentar la versión final a los sujetos del estudio.

Debido a la extensión del cuestionario piloto, se decidió dividirlo en dos partes: un cuestionario exploratorio y un cuestionario con problemas de proporcionalidad directa que involucran valores negativos.

2.1.2 Primer cuestionario

El primer cuestionario cuenta con 12 preguntas abiertas, cada una con varios incisos; está construido a partir de conceptos básicos necesarios tanto para el tema de números enteros, como para el de relaciones directamente proporcionales. En el caso de los enteros, se aborda el simétrico de un número, valor absoluto, orden de los números, resolución de las cuatro operaciones básicas,

indicar si un número es mayor a otro, así como resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Para la proporcionalidad se retoman constante de proporcionalidad, tabulación, graficación y expresión algebraica en funciones lineales.

Con este instrumento se pretendió conocer si los estudiantes manejaban las ideas básicas de cada uno de los temas, esto con la intención de seleccionar a los que pudieran aportar más información en el segundo cuestionario, el cual requería que tuvieran cierto manejo, análisis, conocimiento y reflexión acerca de la proporcionalidad más allá de como la han trabajado en sus clases de matemáticas, es decir, involucrando números negativos. Cabe señalar que el cuestionario se aplicó después del quinto tema que involucra a la proporcionalidad en el tercer grado de secundaria (es decir, casi al concluir el ciclo escolar), por lo cual se supone que los alumnos ya deberían manejar con fluidez los conceptos relacionados a este contenido.

2.1.3 Segundo cuestionario

El segundo cuestionario cuenta con nueve reactivos: tres problemas de proporcionalidad que involucran valores negativos, además de una serie de preguntas abiertas acerca de la conceptualización que los estudiantes tienen de la proporcionalidad y otras referentes al sentido que los alumnos le dan a la presencia de los números negativos en estas situaciones.

En los tres problemas que se presentan se pide completar una tabla que involucra ambas variables de cada situación, obtener la constante de proporcionalidad, graficar los datos de la situación, determinar la pendiente, escribir la expresión general que permita hallar cualquier valor en cada una de las situaciones, y si se trata o no de una relación de proporcionalidad directa, además del porqué de sus respuestas. El objetivo es que justifiquen por diversos caminos lo que están haciendo respecto a la idea que tienen de proporcionalidad directa. Se agregan valores negativos en cada caso para observar si esto hace que los estudiantes pongan en duda la proporcionalidad que intentan plantear o acepten que este tipo de números pueden formar parte de dicha relación.

En las preguntas 4 y 5 referentes al concepto proporcionalidad, el objetivo es identificar a partir de qué idea o conceptos el estudiante construyó la información que dio en las situaciones problema.

En las preguntas 6, 7 y 8, se pretende observar si los estudiantes pueden aportar información acerca de condiciones suficientes para cada tipo de representación planteada en el cuestionario (tabular, gráfica y algebraica), y así justificar que existe proporcionalidad directa.

En la pregunta 9 en la que se pide justificar la aparición de números con signo, se trata de concretar lo que el estudiante hizo con estos valores en la resolución de los problemas planteados, buscando que expliquen si son parte o no de la proporcionalidad, así como buscar si tienen antecedentes respecto a la resolución de situaciones de este estilo. Esta pregunta además pretende dar paso a indagaciones más profundas en las entrevistas que se harán a algunos estudiantes.

2.1.4 Entrevista

Se decidió emplear este instrumento por su carácter personal y cercano hacia los individuos con los que se hace la investigación. Además, porque permite indagar de forma más profunda en las respuestas, a diferencia de lo que un cuestionario escrito puede aportar.

Otro aspecto que resaltar para decidirse por la utilización de este instrumento se basó en que el investigador fue profesor de los alumnos a los cuales se entrevistó, lo que hizo pensar que este vínculo podía fomentar la confianza que los estudiantes tenían hacia el entrevistador, por lo que darían respuestas más honestas.

Lo anterior se retoma de una de las ideas de Woods (1987), quien menciona que “los principales atributos personales que se requieren en las entrevistas... giran siempre en torno a la confianza, la curiosidad y la naturalidad. Nadie le habla porque sí a cualquiera”, y continúa al referirse al entrevistador: “para mí tendría que tratarse de una persona comprensiva, a la que yo supiera interesada en mí por mí mismo (y no por el proyecto) y que quisiera escuchar y apreciar mis opiniones sin juzgarlas, por raras, malignas, absurdas o mal expresadas que pudieran parecer”.

Cabe mencionar que el respeto hacia las opiniones de los alumnos, la libertad que tuvieron para expresar lo que quisieran y la confianza que se les dio al establecer esta etapa de la investigación

como una conversación libre de formalidades (sin perder de vista el objetivo de la investigación) fueron el núcleo de las entrevistas realizadas en el presente estudio.

2.2 Los estudiantes y su contexto

La investigación se realizó con estudiantes de entre 14 y 15 años, en una escuela secundaria pública de la Ciudad de México dentro de una zona catalogada según datos de PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes) como de muy baja marginación. Lo anterior contrasta con la realidad, ya que, basado en entrevistas con los orientadores de la institución se pudo rescatar la siguiente información: los alumnos provienen de familias dedicadas primordialmente a trabajos informales con padres o tutores legales que en un alto porcentaje cuentan únicamente con el nivel secundaria como máximo grado de estudios.

La colonia en la cual se encuentra ubicado el plantel es de alto riesgo en cuanto a seguridad. Un elevado número de alumnos forma parte de familias monoparentales o reconstituidas. Al ser una zona con este grado de marginalidad, el profesorado, del cual, el investigador que escribe este documento forma parte, tiene que poner más esfuerzo en su labor, ya que en muchos casos el estudiante no ha comprendido conceptos básicos, arrastra obstáculos educativos de otros niveles o no está interesado en el estudio como objetivo primordial.

Las ideas anteriores pueden significar un factor de influencia negativa en cuanto al desempeño y actitud de los estudiantes dentro del plantel, así como en los resultados de evaluaciones tanto internas como externas, y se menciona, ya que se piensa que más adelante en la investigación, se pueden explicar o justificar algunos resultados basados en el tipo de alumnos y la situación de vida en la que se encuentran.

Con respecto a la enseñanza previa de los estudiantes antes de la realización de los cuestionarios, se puede decir lo siguiente: el profesor titular de la asignatura de matemáticas ha estado con estos alumnos durante tres ciclos escolares (desde primer grado hasta tercero). Para el caso de la proporcionalidad se constató por medio de cuadernos de los estudiantes, los contenidos referentes a variación directamente proporcional que involucran conceptos como constante de

proporcionalidad, funciones lineales, pendiente, graficación, construcción de tablas y expresiones algebraicas, además de la definición de proporcionalidad. En cuanto a la enseñanza de números con signo, el docente ha abordado estos temas tomando solo en consideración el uso de operaciones básicas en relación con temas algebraicos cuando se ha requerido, además de la resolución de situaciones problemáticas de carácter aditivo, pero no con la proporcionalidad directa como se ha planteado en esta investigación.

2.3 Estudio de casos

Es importante puntualizar que se ha hecho uso del estudio de casos como un apoyo a la investigación, pues como se menciona en el siguiente capítulo, de todas las entrevistas que se realizaron, se retomaron dos en específico que fueron de un interés relevante con respecto a los objetivos que este estudio persigue.

Según Stake (1998), “dos de las utilidades principales del estudio de casos son las descripciones y las interpretaciones que se obtienen de otras personas”, además, con respecto al investigador cualitativo y las entrevistas que éste realiza, menciona que “debe llegar con una lista corta de preguntas orientadas a los temas... se trata sobre todo de evitar respuestas simples de sí o no, y de conseguir la descripción de un episodio, una relación, una explicación”. Lo anterior se respeta en este estudio, pues se buscó conocer la visión de los entrevistados de la manera más extensa posible respecto a cómo entendieron y cómo resolvieron o explicaron los problemas o ejercicios propuestos por el entrevistador.

Como ya se dijo, en esta investigación, los casos son dos alumnos (de manera individual), y es válido hacerlo de esa manera, ya que como lo mencionan Rodríguez, Gil y García (1999) “un caso puede ser una persona, una organización, un programa de enseñanza, una colección, un acontecimiento particular o un simple depósito de documentos. La única exigencia es que posea algún límite físico o social que le confiera entidad”.

Con respecto al propósito, Cohen y Manion (1990) afirman que “el investigador de un estudio de casos *observa* las características de una unidad individual, un niño, una pandilla, una clase, una

escuela o una comunidad”, y que dicho propósito es “probar profundamente y analizar intensamente el fenómeno diverso que constituye el ciclo vital de la unidad, con visión para establecer generalizaciones acerca de la más amplia población a la que pertenece esta unidad”. Es decir, que los resultados de las entrevistas hechas a las personas (para el caso de esta investigación, a los estudiantes), no deben ser respuestas estériles, carentes de sentido, sino que se debe ahondar en las palabras y el significado que cada individuo les da, para así tratar de entender en la medida de lo posible, qué quisieron decir, y si esto puede pasar de lo particular a lo colectivo, no olvidando el carácter personal de cada estudio de casos y la importancia que cada uno aporta al fenómeno en lo general.

2.4 Validación de resultados

Este hecho se realizó mediante el método de triangulación, específicamente el que describen Cohen y Manion (1990), quienes lo definen como “el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano”.

De igual forma, el tipo de triangulación se retoma de Cohen y Manion (1990) que se basa en una tipología propuesta primero por Denzin, la cual es la triangulación metodológica, que consiste en usar métodos diferentes sobre el mismo objeto de estudio.

Para esta investigación, como ya se dijo, se utilizaron cuestionarios y entrevistas como el medio para obtener información. Se utiliza la triangulación metodológica porque ésta permitió contrastar datos provenientes de distintos métodos y así, darles mayor fiabilidad a los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 3

EL ESTUDIO

3.1 Descripción del Estudio

La primera etapa involucró el diseño y aplicación de un cuestionario piloto a 20 estudiantes, posterior a esto, se hicieron correcciones, depuraciones y mejoras para la versión final, convirtiendo este instrumento en dos cuestionarios, debido a que el tiempo de resolución de la primera versión resultó ser muy extenso. Cabe mencionar que ninguno de los 20 estudiantes que resolvieron el cuestionario piloto participó en la investigación.

El primer cuestionario, de carácter indagatorio, se realizó a 30 alumnos de tercer grado de secundaria de distintos grupos con edades entre 14 y 15 años. La forma de elegirlos fue, primero tomando en cuenta su desempeño en la clase de matemáticas (información que fue brindada por el profesor titular de la asignatura), contrastando esta información con las aportaciones que varios profesores de otras asignaturas pudieron dar en cuánto a los alumnos que cada uno consideró destacados en su área de enseñanza. Después de analizar las respuestas de los alumnos en el primer cuestionario, se retomaron los casos que mejores resultados obtuvieron, a los cuales se les aplicó el segundo cuestionario.

De los 30 alumnos que contestaron el primer cuestionario, se decidió elegir únicamente a 12; la elección estuvo basada en, primero, la obtención de aciertos correctos, y segundo, el tipo de respuestas que los estudiantes dieron respecto a la relación entre números negativos y proporcionalidad, es decir, conjeturas, descripciones o conceptualizaciones que van encaminadas

al objetivo de esta investigación y que para la fase de entrevista permitirían una mayor riqueza en cuanto al tipo de respuestas que se buscaba obtener de cada individuo.

Después de analizar los datos que arrojó el segundo cuestionario y de haber seleccionado los casos más relevantes para la investigación, se realizó una entrevista videograbada con enseñanza a cinco estudiantes que se enfocó en preguntarles acerca de los valores negativos que aparecieron durante el proceso y resolución de cada problema del mencionado cuestionario, también en indagar qué relación encontraban entre estos números y una situación de proporcionalidad directa; además, se buscó observar durante el diálogo si los números negativos son aceptados por los estudiantes como parte de una variación directamente proporcional.

Al hacer un análisis de las respuestas dadas por los cinco estudiantes se decidió mostrar dos casos en la presente investigación, debido a lo interesante de las respuestas que brindaron durante la entrevista y las conjeturas que lograron al final de ésta.

3.2 Profundizando en la entrevista

Se trata de entrevistas de carácter individual. En general cada entrevista está dividida en tres partes: la primera corresponde a preguntas específicamente relacionadas con el objetivo de esta investigación, es decir, los números negativos, la proporcionalidad, y la relación que el estudiante encuentra entre estos dos temas; la segunda se refiere a las dificultades que los alumnos presentan en matemáticas, así como lo que más se les facilita, además del gusto que tienen por esta u otras asignaturas; la tercera está enfocada a cómo perciben su contexto escolar junto con las dificultades que esto conlleva para la conclusión de sus estudios en el nivel secundaria. El protocolo de la entrevista puede consultarse en el apéndice E que se encuentra al final de este escrito.

De las tres partes de la entrevista, la primera es la única que se transcribe de manera literal, además, de las cinco entrevistas individuales, se han elegido dos, porque muestran las interacciones y respuestas más interesantes respecto al objetivo de investigación de este estudio.

Para la segunda y tercera parte se presentan únicamente las preguntas que se le plantearon a los alumnos y se hace una conclusión general que muestra coincidencias respecto a las respuestas de los cinco estudiantes entrevistados.

3.2.1 Primera parte de la entrevista

Para la primera parte, la nomenclatura utilizada en la transcripción de dichas entrevistas es la siguiente:

- **K** y **M** se refieren a los diálogos emitidos por el primer y el segundo estudiante respectivamente.
- **E**, se refiere a los diálogos emitidos por el entrevistador.
- **O**, se refiere a las observaciones hechas por el investigador, las cuales aparecen inmediatamente después del diálogo del estudiante que es objeto de esa observación, además se integra un número tanto al diálogo del alumno como de la observación para dar mayor claridad en la lectura del texto.

A continuación, se muestran las transcripciones de las dos entrevistas:

3.2.1.1 Caso 1. Entrevistando a K

E: ¿Podrías explicarme qué es para ti una variación directamente proporcional?

1.K: Amm, que los dos, bueno referente a la tabla, “X” y “Y” se mueven proporcionalmente, ya sea disminuyendo o aumentando, ya en la gráfica se ve una línea recta que pasa por el cero, y ya.

1. O: K primero hace referencia al crecimiento o decrecimiento proporcional entre las dos variables, luego complementa indicando cómo se ve una variación directamente proporcional en un plano cartesiano, no especifica si los valores deben ser positivos o negativos.

E: ¿Me puedes dar un ejemplo de una variación directamente proporcional?

2. K: Mmm de una paleta que cuesta dos pesos y si compras dos, la otra, pues te cobrarían cuatro pesos y si compras tres, seis pesos, y así.

2. O: K se vuelve a basar en el incremento proporcional, aquí solo alude a valores positivos.

E: Ok muy bien, y por números negativos, ¿qué entiendes o qué son para ti los números negativos?

3. K: Pues sería, bueno en la vida cotidiana, pues yo creo que sería lo que debes o lo que te falta y así.

3. O: K hace uso de algo cotidiano para tratar de explicar los negativos.

E: O sea, ¿para qué crees que se inventaron o que se crearon los números negativos?

K: Para... ay no sé.

E: Lo que se te ocurra, lo que tu pienses.

4. K: Bueno, una vez en un curso un maestro nos dijo que eran para, que se inventaron como para lo que debía un banco o algo así.

4. O: K vuelve a buscar algo cotidiano para explicar los negativos.

E: ¿Para representar deudas?

K: Ajá.

E: Ok muy bien, ¿cuántos tipos de números conoces?

5. K: Serían los negativos, los, bueno los normales que se llaman, los positivos, los decimales, este, los de primero, segundo y así.

5. O: K menciona los números positivos y negativos, pero no los relaciona dentro del conjunto de los enteros.

E: Primero y segundo te refieres a...

K: Ordinales, creo que se llaman. Mmm y creo que ya.

E: Ok muy bien, ¿podrías ubicar en una recta numérica los números negativos?

K: Sí.

E: A ver, ¿cómo lo harías?

6. K: Sería... (dibuja una recta), aquí está el cero (marca una pequeña línea al centro de la recta y escribe cero abajo, después realiza varias marcas hacia la izquierda del cero y escribe de derecha a izquierda -1 , -2 , etc., hasta el -6), y pues aquí irían los positivos (indica con un signo positivo del lado derecho del cero y señala la recta).



6. O: K coloca los valores negativos a la izquierda del cero, mostrando por el signo positivo que puso, que éstos son menores que los positivos y menores que el mismo cero.

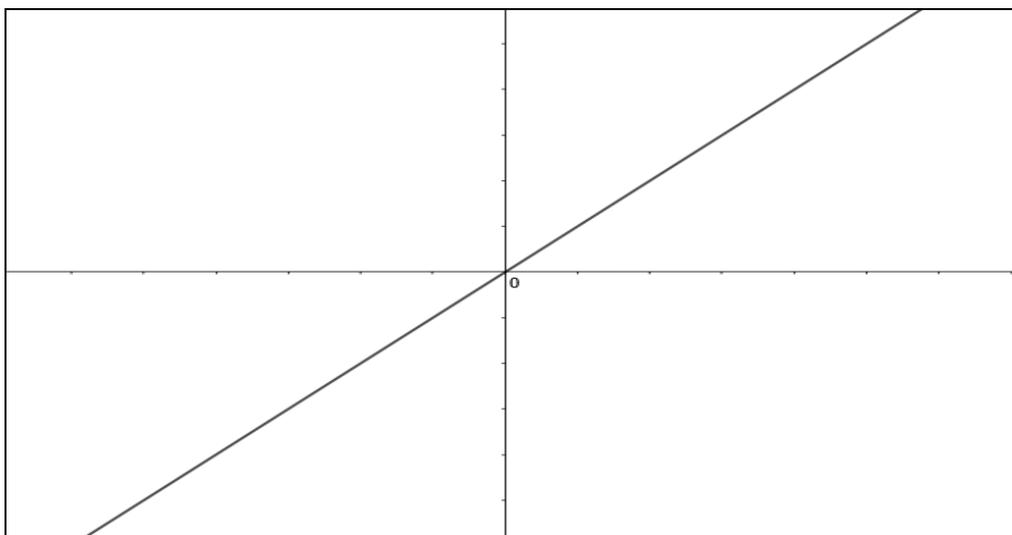
E: ¿O sea que los negativos y los positivos están juntos en esa recta numérica?, ¿y todos juntos serían parte de algo?, ¿o no tienen que ver?

7. K: Sí. Bueno, también podría ser que de aquí sea el cero y aquí termine la recta (señala el extremo derecho de la recta que trazó).

7. O: K aun no reconoce a los negativos y a los positivos, junto con el cero, como parte de los números enteros.

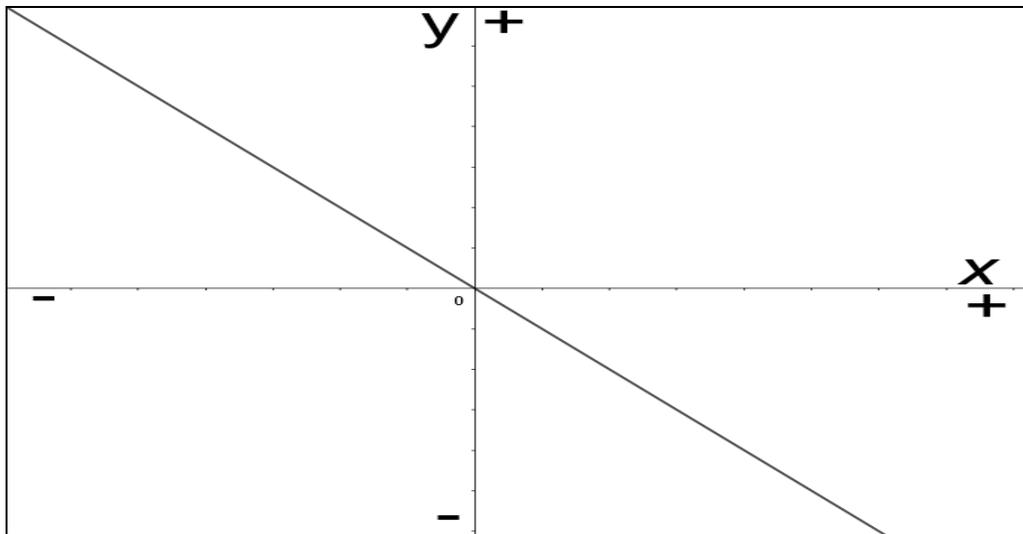
E: Ok, mira, los números positivos y los negativos, incluido el cero, conforman un conjunto que se llama números enteros, así se les llama a todos eso números juntos. Ok, bien, ¿podrías trazar en un plano cartesiano cómo se ve la relación de proporcionalidad directa que dijiste hace rato?

K: Sí (dibuja un plano cartesiano), pues siempre parte, bueno este es el cero (escribe cero al centro del plano cartesiano), y siempre parte, bueno parte o pasa de aquí y es una línea (traza una línea recta que pasa por el cuadrante superior derecho y por el inferior izquierdo del plano cartesiano), puede ser recta y no importa su inclinación.



E: O sea que si por ejemplo (traza los dos ejes que conforman un plano cartesiano) pensemos que este es otro plano cartesiano y pongo una línea recta que pasa por el cero (traza una línea que pasa por los cuadrantes superior izquierdo e inferior derecho), ¿esa es variación directamente proporcional? Es más, vamos a considerar que en este plano que pusiste, este es “Y” (escribe “Y” sobre el eje vertical), este es “X” (escribe “X” del lado derecho del eje horizontal) por decir algo, estos son positivos (escribe el símbolo positivo en los extremos del cuadrante superior derecho del plano cartesiano), estos son negativos (escribe el signo negativo en los extremos del cuadrante inferior izquierdo del plano cartesiano), igual acá (marca de la misma manera el segundo plano

cartesiano), pensándolo así, hace rato dijiste que era una línea recta que pasaba por el cero; en este plano cartesiano (señala el segundo plano cartesiano), ¿hay variación directamente proporcional?



K: Sí.

E: ¿Por qué?

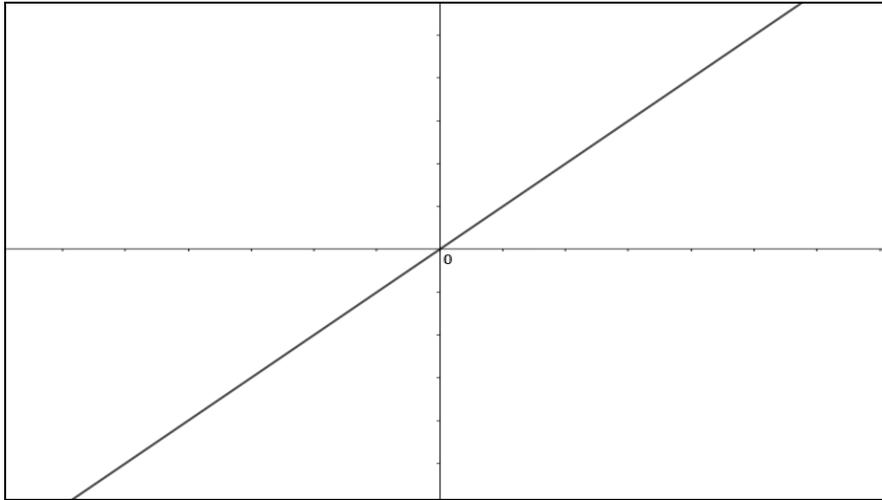
8. K: Porque igual pasa por el cero y es una línea recta, aunque es por números negativos.

8. O: K no hace distinción entre las dos rectas, solo menciona que mientras pase por el cero es variación directamente proporcional, aunque nota que los signos de los cuadrantes varían en la segunda recta.

E: Ok, la definición básica, la más básica que tengas de variación directamente proporcional respecto a sus variables, ¿cuál es?, o sea, ¿qué pasa con las dos variables en la variación directamente proporcional?

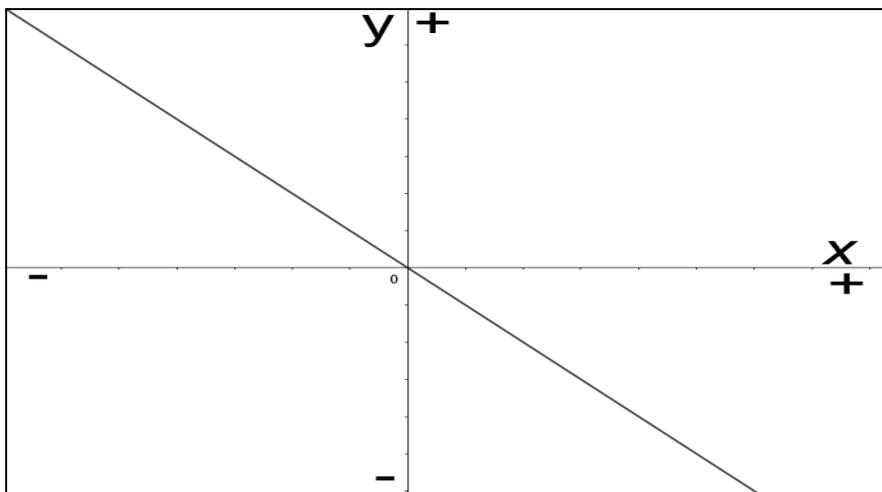
K: Aumentan o disminuyen proporcionalmente.

E: Aumentan o disminuyen proporcionalmente; entonces, la pregunta es, si aquí (señala el primer plano cartesiano), al trazar la recta, ¿están aumentando o disminuyendo proporcionalmente “X” y “Y”?

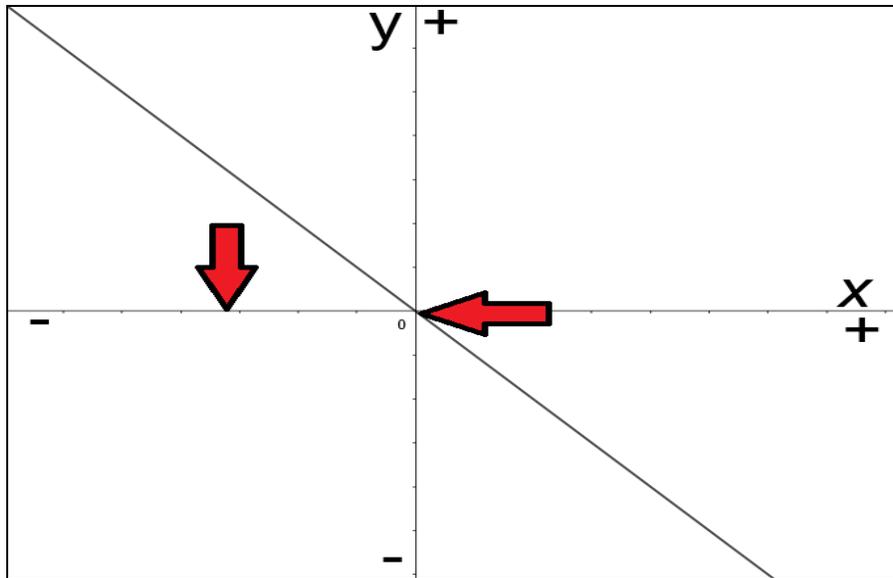


K: Sí.

E: ¿Y en ésta también (señala la recta del segundo plano cartesiano)?



K: Pues este sería menos uno (señala la parte negativa del eje vertical del plano cartesiano), y este... (señala el centro del plano cartesiano).



E: O sea, cuando una variable... por ejemplo cuando “Y” aumenta, ¿”X” también aumenta?

K: No, en este caso “X” disminuye ¿no?

E: ¿Entonces es variación directamente proporcional?

9. K: No, sería inversa.

9. O: K reconsidera y advierte que la segunda recta no muestra una variación directamente proporcional, pero la confunde con una variación inversamente proporcional.

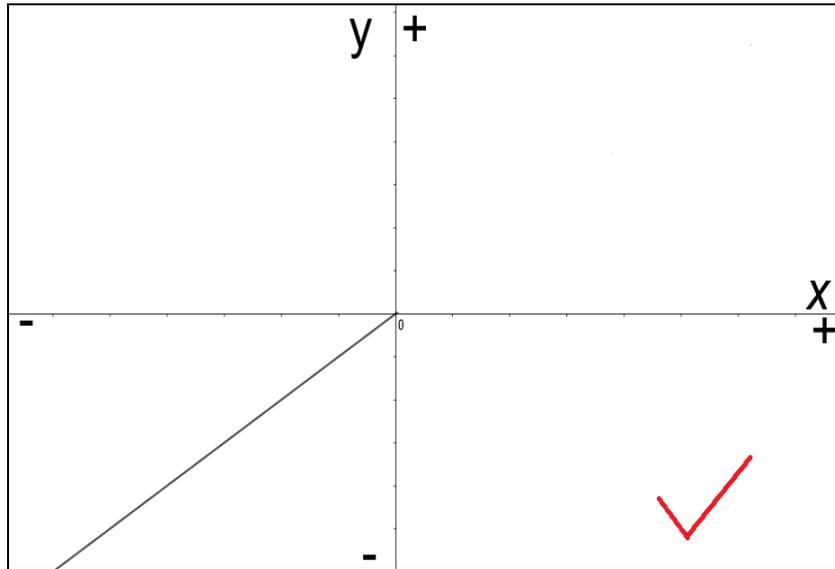
E: ¿Sería inversa?

K: Amm creo que una vez me enseñaron eso en primero, pero no me acuerdo cómo le llamaba a las reglas.

E: Ok, vamos a considerar estos otros dos casos (dibuja otros dos planos cartesianos con la misma simbolización que los dos primeros; en el tercero traza una recta que va del cero y divide al cuadrante inferior izquierdo del plano cartesiano, y en el cuarto traza una recta que parte del cero

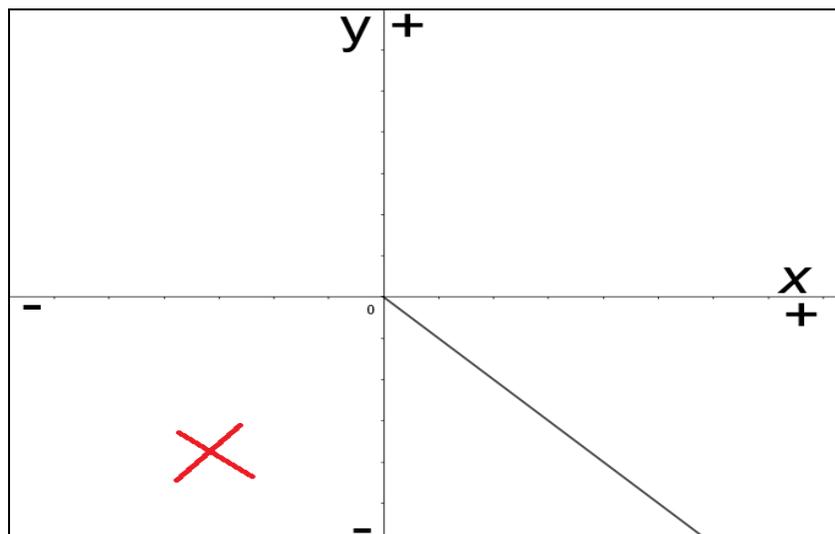
y divide al cuadrante inferior derecho del plano cartesiano). De los cuatro casos, ¿cuáles representan una variación directamente proporcional y cuáles no?

K: Este sí (señala el tercer plano cartesiano).



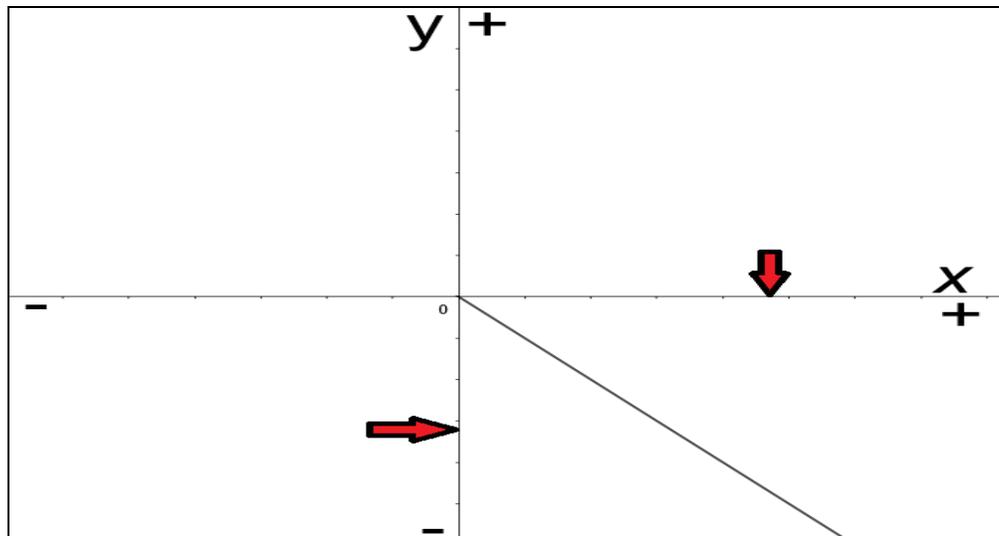
E: Ok, muy bien.

K: Y este no (señala el cuarto plano cartesiano).



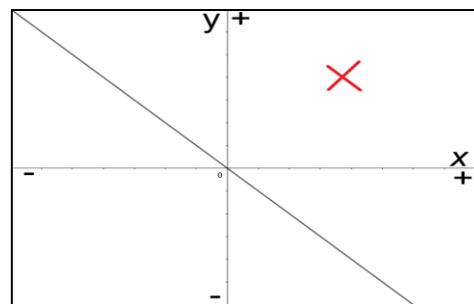
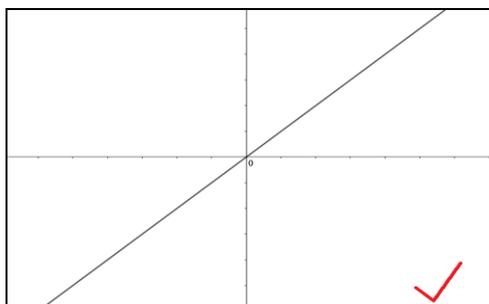
E: ¿Por qué?

K: Porque como aquí son números positivos (señala la parte positiva del eje horizontal del cuarto plano cartesiano) esto iría aumentando, pero este es negativo (señala la parte negativa del eje vertical del cuarto plano cartesiano) entonces iría disminuyendo.



E: Muy bien, entonces ya nos estamos dando cuenta que hay una condición aparte de que la variación directamente proporcional se vea como una línea recta que pasa por el cero en un plano cartesiano, ¿cuál sería?

10. K: Mmm, que tiene que ir como hacia a la derecha. Bueno la línea así (señala la recta con pendiente positiva del primer plano cartesiano) y no así (señala la recta con pendiente negativa del segundo plano cartesiano).



10. O: K trata de explicar que la pendiente de una recta que muestre variación directamente proporcional debe ser positiva y, por consiguiente, no ser negativa.

E: ¿Podríamos considerarlo respecto a los signos que tiene el plano cartesiano?, ¿o no tienen que ver?

K: Sí

E: ¿Qué característica tienen esos signos donde sí aparece la variación directamente proporcional?

K: Pues que...

E: O sea, ¿cómo es “X” y como es “Y” en cuanto a sus signos?

K: Mmm (silencio).

E: ¿Ya te diste cuenta?

K: Pues que tienen que estar como si “Y” es menos, “X” tiene que ser menos ¿no?

E: Ok muy bien.

11. K: Y si “Y” es más, bueno positivo, “X” también tiene que ser positivo.

11. O: K observa que la recta de la variación directamente proporcional debe pasar por cuadrantes que tengan los signos iguales en sus respectivos ejes, ya sea positivos o negativos.

E: Ok, entonces ya estamos viendo también una característica: que los dos signos del cuadrante del plano cartesiano donde aparece la recta que representa a la variación directamente proporcional sean, o positivos o negativos.

K: Sí.

E: Muy bien, en el primer problema de tu cuestionario, en el plano cartesiano, la pendiente que tu escribiste fue +250, ¿qué pasaría si la pendiente fuera negativa?, ¿cómo se vería la recta?

K: Mmm supongo que igual.

E: ¿No cambia?, o sea, ¿la pendiente a qué hace referencia en una recta?

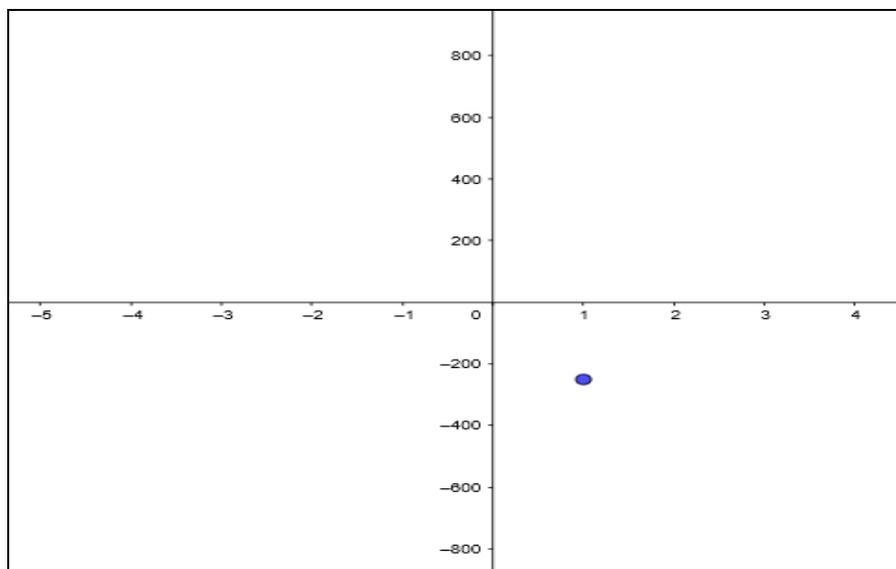
12. K: Sería menos doscientos cincuenta y queremos saber el valor de “X” que sería uno, sería más por menos, menos, entonces sería menos doscientos cincuenta (escribe):

$$K = -250$$

$$Y = (-250)(1)$$

$$Y = -250$$

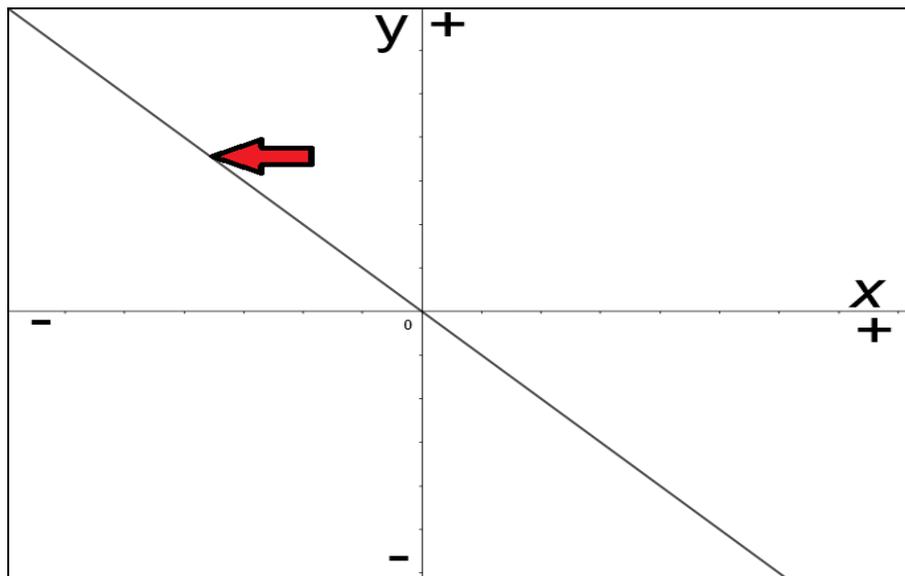
Quedaría aquí (marca un punto en el plano cartesiano en la coordenada $(+1, -250)$), entonces sería inverso ¿no?



12. O: K utiliza la ley de los signos para obtener pares de valores en el primer problema del plano cartesiano considerando a la pendiente como negativa.

E: ¿Sería una recta?

K: Sí, pero sería como así (señala la recta del plano cartesiano que pasa por los cuadrantes inferior derecho y superior izquierdo del plano cartesiano y que atraviesa el centro).



E: Ajá, entonces se vería...

K: Al revés.

E: Al revés. Entonces parece ser que, para las variaciones directamente proporcionales, otra característica es que la pendiente... ¿qué?

K: Mmm (silencio).

E: Porque por ejemplo en los casos que vimos hace rato, en los que dijiste que no había variación directamente proporcional, vemos que la pendiente es ¿negativa?

K: Sí.

E: Entonces, si ya habíamos quedado que estos dos casos (señala el segundo plano cartesiano y el cuarto plano cartesiano de los primeros cuatro que se hicieron) no eran variación directamente proporcional, ¿qué otra característica sí tiene la variación directamente proporcional?

13. K: Mmm que la pendiente tiene que ser positiva.

13. O: K se da cuenta que otra característica que la recta que describe una variación directamente proporcional debe tener, es que su pendiente sea positiva.

E: Ok, muy bien. Bueno siguiendo con algunas respuestas de tu cuestionario, la pregunta 9 que decía: “respecto a los valores negativos que aparecieron en cada situación que resolviste y basándote en tus respuestas anteriores”, el primer inciso mencionaba: ¿cómo relacionas este tipo de números (o sea los negativos) con la proporcionalidad directa?, y tú contestaste que pues como algún adeudo, pérdida, etc., ¿a qué te referías?

K: Bueno creo que ya cambió la forma de verlo en negativos porque pues ya no sería una proporcionalidad directa.

E: Mmm, ¿qué más?

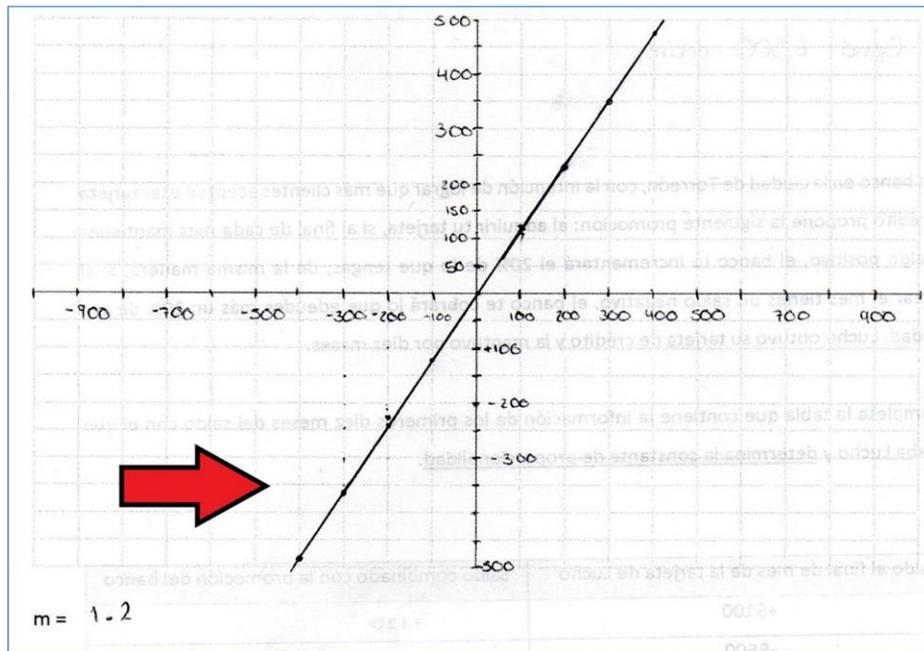
K: Bueno, sí sería directa, pero pues también tiene que ser “Y” directa al igual que “X”.

E: O sea, en la variación directamente proporcional, ¿dónde aparecen los números negativos?, ¿o no aparecen?

K: Sí, sí aparecen.

E: Podemos ver este caso (señala el plano cartesiano del problema 2 del cuestionario de K), si lo vemos por cuadrantes, ¿en qué cuadrante aparecen los números negativos?, considerando la recta de variación directamente proporcional.

14. K: Pues entonces aquí ¿no? (señala el cuadrante inferior izquierdo).



14. O: K reconoce que la proporcionalidad directa también se puede representar en el tercer cuadrante del plano cartesiano, aunque no tiene un parámetro para distinguir un cuadrante de otro.

E: Ajá, que es el cuadrante número...

K: Mmm (silencio).

E: Bueno para diferenciar los cuadrantes, regularmente se empieza por este (señala el cuadrante superior derecho), que sería el primer cuadrante, y luego los ubicas con un movimiento contrario a las manecillas del reloj; este sería el segundo (señala el cuadrante superior izquierdo), este sería el tercero (señala el cuadrante inferior izquierdo), y este sería el cuarto (señala el cuadrante inferior derecho).

15. K: Entonces el 3.

15. O: Después de la explicación de E, K ubica la proporcionalidad en el tercer cuadrante del plano cartesiano.

E: Ok, entonces ya vimos que sí hay una relación entre la proporcionalidad directa y los números negativos, que sería... ¿cuál?

K: Cuando se grafican, por ejemplo.

E: ¿Puedes explicármelo más?

16. K: Sí porque esa recta también pasa por el cuadrante 3, y ahí hay negativos.

16. O: K relaciona la proporcionalidad directa con los números negativos por medio de una representación geométrica, es decir, por medio del plano cartesiano.

E: Y entonces, ¿crees que esos negativos sean parte de la proporcionalidad directa según lo que tú definiste?

17. K: Pues sí porque si lo vemos en nuestra vida es como tener deudas o pérdidas.

17. O: K vuelve a recurrir a ejemplos cotidianos para justificar la aparición de valores negativos en una relación de proporcionalidad.

E: Ahora, en lo que estamos tratando de relacionar, dijiste que la variación directamente proporcional si se graficaba era una línea recta que pasaba por el cero, dijiste también que las cantidades aumentaban o disminuían proporcionalmente, entonces, si pensamos en una tabla que contiene parejas de números negativos, en la que los valores aumentan o disminuyen proporcionalmente, ¿se puede hablar de que los números negativos son parte de la proporcionalidad directa?, ¿habría alguna forma de incluirlos?

K: Mmm sí.

E: ¿Cómo lo harías?

K: Pues, por la constante.

E: ¿Cómo por la constante?

18. K: Sí, porque si divides cada pareja te da la constante, no importa que sean negativos.

18. O: K explica que no importa qué pareja de valores se divida, una pareja de valores positivos o una pareja de valores negativos, el resultado siempre será una constante de proporcionalidad positiva.

E: Ok, muy bien, y, por ejemplo, en los tres problemas que había en el cuestionario, ¿cómo se relacionaban esos números negativos con la proporcionalidad directa?

K: Por ejemplo, aquí (señala la tabla del primer problema del cuestionario), se marca cuando los jugadores pierden, entonces esto... bueno los números negativos se están considerando como pérdidas y podemos decir que... (silencio).

Yardas	Dólares
-11	- 2,750
+25	+6250
-6	-1500
+9	+ 2, 250
+1	+ 2 50
-7	- 1,750
+45	+11,250
-30	-7500

$k = + 250$

E: ¿Que sí podemos mover los valores de nuestra tabla hacia los negativos?

19. K: Sí, eso. Y que sí son parte de la proporcionalidad directa.

19. O: K acepta a los valores negativos como parte de la proporcionalidad directa.

E: Ok, muy bien. Respecto a tu cuestionario me llama la atención que, en las tablas de cada problema al llenarlas, le asignaste el signo que le correspondía a cada valor de manera correcta, pero en las operaciones que hiciste para llegar a esos valores noté que no escribiste ningún signo, entonces ¿cómo los determinaste?, ¿cómo supiste que unos eran negativos y otros positivos?

20. K: Mmm porque me di cuenta de que, por ejemplo, bueno hice este como proporcionalidad directa (señala la tabla del primer problema), tomando en cuenta el 9, lo multiplicaba por el 1500 y lo dividí entre 6, y ya el número que me salía solo multiplicaba los signos, que sería más por menos, menos, por menos, más, fue lo que me salió, por eso ya no lo ponía en las operaciones.

Yardas	Dólares
-11	- 2,750
+25	+6250
-6	-1500
+9	+ 2, 250
+1	+ 2 50
-7	- 1,750
+45	+11,250
-30	-7500

$k = +250$

20. O: K menciona que llenó la tabla de cada problema haciendo uso de un proceso multiplicativo, además de valerse de la ley de los signos para asignarle un signo a cada número.

E: Ah, entonces ¿solamente utilizabas tu ley de los signos?

K: Sí.

E: Ok muy bien, y por ejemplo cuando sumas o restas dos números con signo, ¿cómo le haces? Si tuvieras (escribe):

$$(+9) + (-6) =$$

O si tienes:

$$(-6) - (+8) =$$

¿Qué procedimiento sigues?

21. K: Este, pues este sería el **+9**, se quedaría igual, y el “más”, solo hace que se quiten los signos, entonces quedaría igual y ya solo vamos a, al **9** le vamos a quitar **6**, te quedarían **+3** (escribe **+9 - 6 = 3**). Y en el otro pues el “menos” que está aquí afuera (señala el signo entre el **-6** y el **+8**) hace que el de adentro se cambie (señala el signo positivo de **+8**), que es como multiplicándolo porque están los paréntesis, entonces “más” por “menos” sería “menos” y te da (escribe) **-6 - 8**, y eso sumándolo nos da **14**, bueno **-14**.

21. O: K aplica y explica cómo usa la ley de los signos para realizar las adiciones y sustracciones con este tipo de números.

E: Ok, entonces también usas tu ley de los signos para resolver las operaciones que tienen números con signo.

K: Sí.

E: Bien, y si multiplicamos (escribe):

$$(-7)(+3) =$$

O si dividimos:

$$\frac{-12}{+4} =$$

Ahí ¿cómo le haces?

22. K: Pues lo único que haces es multiplicar el **7** por el **3** y nos da **21** (lo escribe), y ya “menos” por “más” nos da “menos”, y sería **-21**, y al dividirse, dividimos el **12** entre el **4** que nos da **3** (lo escribe) y... bueno, “más” por “menos” nos da “menos”, sería **-3**.

22. O: K vuelve a recurrir a la ley de los signos para operar la multiplicación y la división con negativos.

E: O sea en la división también usas...

K: La multiplicación porque no hay como...

E: Entonces también con ley de los signos.

K: Sí también.

E: Y si no tuvieras la ley de los signos, ¿podrías resolver estas operaciones?, ¿crees que haya manera de hacerlo sin la ley de los signos?

23. K: Pues si se queda el signo del número que es más grande ¿no?, por ejemplo aquí está el **-12** (señala la división que se le pidió resolver) y este se queda como **-3** (señala el resultado de la división), entonces se queda el signo del número más grande, al igual que aquí (señala la multiplicación que resolvió), el **-7** era más grande que el **+3**, y se quedó el signo “menos”, igual aquí (señala la resta que se le pidió resolver), el **-9** era más grande que el **-6**, entonces se quedó el **+3**.

23. O: K muestra su dependencia a la ley de los signos para realizar operaciones que involucran negativos y al no poder usarla, inventa sus propias reglas, y llega a resultados contradictorios respecto del signo.

E: Ok, se queda el signo del más grande entonces. Si yo por ejemplo tengo (escribe):

$$(-3)(+9) =$$

¿Qué pasa ahí?

K: Mmm (silencio).

E: Pensando que no uso la ley de los signos. Primero, **9** por **3** son...

K: **27**

E: Entonces es ¿ **+27**?

K: Pensando eso, sí serían **+27**

E: ¿Y sí es así?

24. K: No, es **-27**. Entonces yo creo que sí es como primordial la ley de los signos, o cuando son distintos signos se hace menos y cuando son los mismos se hace más.

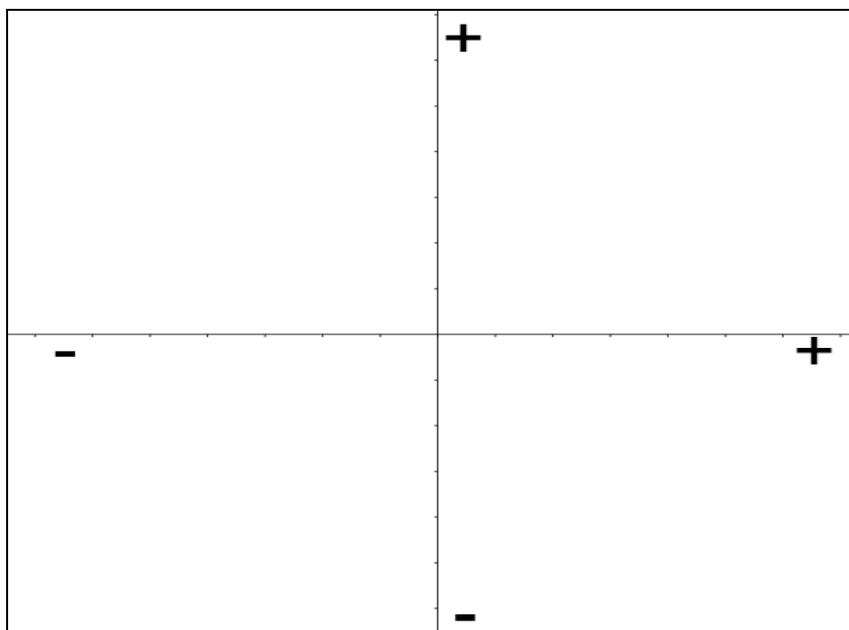
24. O: K reconoce que no sabe ni se le ocurre otra manera de operar números negativos sin la ley de los signos.

E: Ok, muy bien. Cuando realizas un plano cartesiano, ¿cómo determinas cuáles son los valores positivos y los valores negativos?

K: Basándome en la tabla que hice antes.

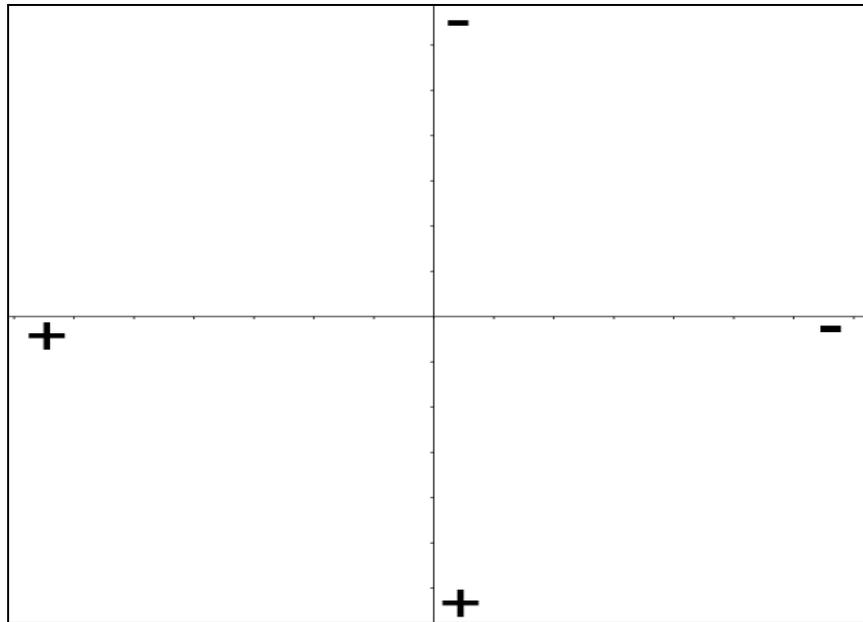
E: Pero me refiero a cuando construyes tu plano cartesiano, cuando trazas sus dos ejes, ¿cómo le haces para determinar dónde van los números negativos y los números positivos?

K: Ah pues es que, haciendo la tabla o en el plano, supongamos que esta es una recta (traza los dos ejes del plano cartesiano y señala el eje horizontal) y este es el cero (señala el centro del plano cartesiano), entonces los que están hacia la derecha son los positivos (señala la parte derecha del eje horizontal del plano cartesiano), y los que están a la izquierda son los negativos (señala la parte derecha del eje horizontal del plano cartesiano); igual si hacemos (gira la hoja de manera que el eje vertical queda ubicado como si fuera el eje horizontal), bueno, que aquí sería distinto, lo de la derecha es más y lo de la izquierda es menos.



E: Y, por ejemplo, ¿no podría decir que (dibuja un nuevo plano cartesiano) estos son positivos (marca la parte izquierda del eje horizontal del plano cartesiano, así como la parte inferior del eje vertical del plano cartesiano con un signo positivo), y estos son negativos (marca la parte derecha del eje horizontal del plano cartesiano, así como la parte superior del eje vertical del plano

cartesiano con el signo negativo)? Es decir, invierto los signos a como tú los tenías, ¿eso se puede hacer?



K: Yo supongo que sí porque es el mismo, nada más que está como volteado.

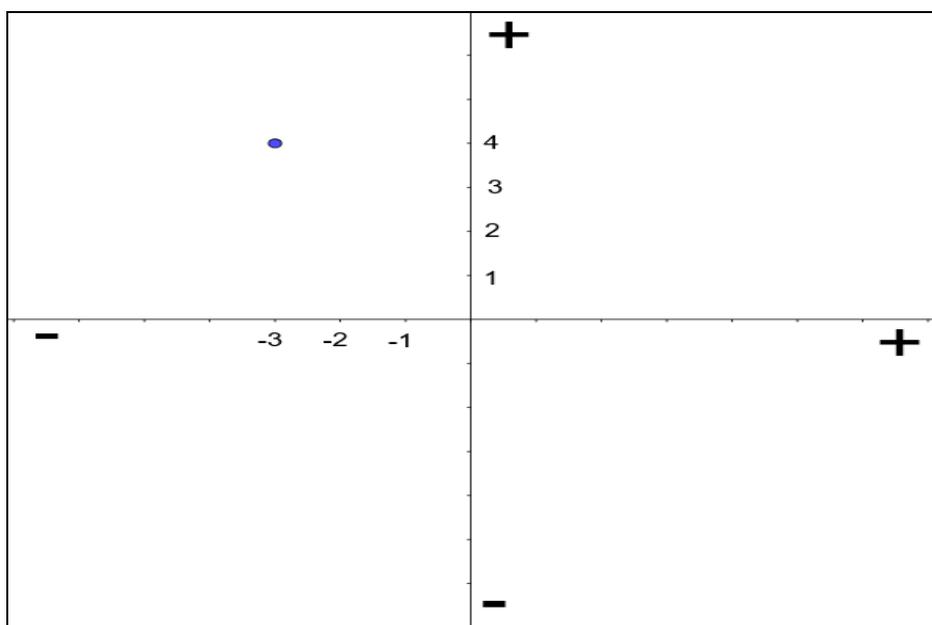
E: Ok entonces, ¿sí se puede determinar en el plano cartesiano por decisión propia en qué parte del eje están los negativos y en qué parte están los positivos?

25. K: Sí, pero siempre debe haber dos cuadrantes con signos iguales y los otros con signos distintos.

25. O: K reconoce que la posición de los signos en el plano cartesiano es relativa y que estos signos son susceptibles de ser invertidos con respecto al esquema que comúnmente se utiliza, aun así, reconoce que siempre guardan cierta relación, es decir, que se debe tener un cuadrante con dos ejes positivos, otro con dos ejes negativos y los dos restantes, con un signo positivo y uno negativo respectivamente.

E: Bueno, y en un plano cartesiano, por ejemplo, en el que acabas de hacer, ¿qué pasos sigues para ubicar una coordenada cualquiera?; digamos que cada cuadrado de la cuadrícula donde marcaste los ejes vale 1, si yo quisiera buscar la coordenada (-3, 4), ¿cómo le haces?

K: Pues el primer número lo busco en el de las “X”, así sería -1, -2, -3 (marca los tres números en la parte izquierda del eje horizontal), y el 4 (marca los números 1, 2, 3, 4 en la parte superior del eje vertical del plano cartesiano), quedaría aquí (coloca un punto en el cuadrante superior izquierdo del plano que “coincide con la coordenada que E estableció”).



E: O sea, primero te ubicas en un eje, luego te ubicas en el otro, ¿y luego?

K: Donde cruzan es donde se pone la coordenada.

E: Ok muy bien. ¿Qué operaciones que tengan números con signo tuviste que utilizar cuando completaste las tablas en cada problema de tu cuestionario?

K: ¿Operaciones con signo?

E: Sí. Bueno, ya mencionaste que los signos los operaste mentalmente, pero finalmente estabas utilizando operaciones que implicaron los números con signo. Entonces, ¿cuáles utilizaste?

K: Mmm multiplicación y división.

E: Ok. ¿No utilizaste suma y resta?

26. K: Sí, bueno cuando nos preguntaba que cuánto dinero ganó o perdió era cuando sumábamos todo, todos los positivos y todos los negativos, y ya después se restaban para saber cuánto ganó o en este caso cuánto perdió.

26. O: K reconoce que, para responder los problemas del cuestionario, que involucran proporcionalidad directa con valores negativos, utilizó las cuatro operaciones básicas, específicamente en las tablas.

E: Ok y en el plano cartesiano, ¿utilizaste alguna operación básica que tuviera números con signo?

K: ¿Sumar o restar?, no.

E: ¿Sumar o restar no? O sea, lo que hiciste hace rato para ubicar la coordenada, cuando contabas ¿no era sumar o restar?

K: Mmm sí, pero de forma muy básica. Bueno no, creo que no.

E: O sea, ¿tú no consideras eso sumar o restar?

27. K: Mmm no, pues para mí es como contar.

27. O: A pesar de que el plano cartesiano implica realizar adiciones o sustracciones, incluso multiplicaciones o divisiones para poder realizar una representación de puntos en éste, K duda en

reconocer que ha utilizado alguna operación básica porque al proceso de contar no lo considera una adición como tal. Al final no está convencida de su respuesta.

E: Ok muy bien. ¿Cómo crees que ayuda el tener números con signo en una relación de proporcionalidad directa para entenderla mejor?, ¿crees que sirva en una variación directamente proporcional o en un problema que involucre este tipo de variación operar tanto con números positivos, como con negativos?

28. K: Sí, porque por ejemplo si estás en una empresa y quieres ver las ganancias pues los números positivos representarían las ganancias y si lo quieres ver con negativos, significaría en este caso las pérdidas o lo que vas a perder si es que no sigues el procedimiento o las reglas en la empresa o algo así. O sea que para entender algunas situaciones sí son como útiles.

28. O: K recurre nuevamente a situaciones cotidianas para justificar la aparición de valores negativos en una relación de proporcionalidad directa.

E: Y, por ejemplo, ¿en el caso del último problema del cuestionario que hablaba de un submarino?

K: Pues sí porque son metros hacia abajo del agua y las horas que estaban marcadas como negativas es como si fuera tiempo pasado creo, entonces también ayuda a decir cuando hay tiempo pasado con negativos.

E: Ok, muy bien. ¿Crees que si resolvieras más problemas de este tipo, que combinan proporcionalidad directa con números negativos, mejoraría tu aprendizaje en el tema de números con signo y en el tema de proporcionalidad?, o ¿crees que, así como los aprendiste por separado, es suficiente y que hubieras podido aprender lo mismo que lo que viste en este cuestionario?

29. K: No, creo que sí es importante en lo de proporcionalidad directa o indirecta utilizar los números negativos porque nos ayudan como a tener un mayor aprendizaje, porque por ejemplo, yo antes pensaba que la proporcionalidad directa nada más era una recta que pasaba por el cero, pero ahora me di cuenta que los dos valores tienen que ser o positivos o negativos y que no solo

se ven en un cuadrante del plano cartesiano, sino que pueden estar en dos. Porque por ejemplo en el último problema, la recta pasa por el cuadrante 3 y sí es proporcionalidad directa porque cuando divides los valores te da una constante, la misma constante, aunque sean valores negativos y la pendiente de la línea sale positiva y es un problema que al principio no parece de proporcionalidad directa, pero ya llenando su tabla, graficándolo y viéndolo bien sí es.

29. O: K retoma lo que realizó y observó en la entrevista para determinar las condiciones que debe cumplir una relación de variación directamente proporcional, tanto en una tabla como en un plano cartesiano, pero ahora incluye a los números negativos como parte de esas condiciones.

E: Entonces después de haber visto y escuchado todo esto que hemos platicado respecto a las variaciones directamente proporcionales, ¿cambia cómo las estás entendiendo?, o ¿las sigues pensando exactamente igual que antes?

K: Mmm pues es que en este caso sí cambia la perspectiva, o sea te das cuenta de que la proporcionalidad directa es más grande.

E: ¿Cómo más grande?

30. K: Sí, que aparece en más cuadrantes y que hasta se pueden usar números negativos.

30. O: Nuevamente K acepta que los números negativos son parte de la proporcionalidad directa, esto basándose en todo lo que se ha platicado y realizado en la entrevista.

3.2.1.2 Caso 2. Entrevistando a M

E: ¿Podrías decirme o explicarme qué significa para ti una variación directamente proporcional?

1. M: Amm una variación directamente proporcional es en la que una recta pasa por el cero y las parejas de valores que se tengan siempre van a aumentar o disminuir proporcionalmente, y al dividir las parejas de valores darán un resultado, el mismo número todas, que sería la constante.

1. O: M inicia su explicación apoyándose en una representación gráfica para indicar cómo se ve en un plano cartesiano una relación de proporcionalidad directa, incluye el incremento o decremento proporcional entre variables, además de la obtención de la constante de proporcionalidad que se obtiene al dividir los valores correspondientes entre variables.

E: Ok, cuando te refieres a parejas de valores, ¿a qué parejas te refieres?, ¿de dónde salen esas parejas?

M: Mmm puede ser de una tabla, serían dos valores, como por ejemplo tiempo y distancia o dinero y producto, eso es.

E: O sea que la variación directamente proporcional ¿solamente implica dos variables?, ¿podrían ser tres o una?

M: No, deben ser dos.

E: Ok muy bien, me puedes decir ¿qué entiendes o qué son para ti los números negativos?

2. M: Los números negativos son menores que el cero y son como los años que, del cero para abajo van de: -1 , -2 , -3 , -4 .

2. O: M indica que los valores negativos están relacionados con el cero, es decir que hace una extrapolación de este número al considerarlo más que la ausencia de un valor o el inicio de los números naturales; complementa su idea relacionando los negativos con los años, aunque no lo explica.

E: ¿Algo más que me puedas decir de estos números?

M: Mmm (silencio).

E: Por ejemplo, ¿crees que tengan alguna utilidad en nuestra vida cotidiana o por qué crees que existen los negativos?

3. M: Yo creo que sí tienen una utilidad porque es como restar algo o los años también cuando mencionamos “antes de Cristo”, o ese tipo de cosas.

3. O: M vuelve a relacionar los negativos con años, esta vez lo contextualiza e indica que se trata de restarlos y toma como ejemplo el “antes de Cristo”, es decir, años que estaban disminuyendo hasta ese momento histórico.

E: Ok, muy bien, ¿cuántos tipos de números conoces?, o ¿cuáles conoces?

4. M: Amm enteros, racionales, negativos, decimales, y ya no recuerdo, mmm positivos también.

4. O: M menciona a los números positivos y negativos, pero no los relaciona dentro del conjunto de números enteros.

E: Ok, y entre todos esos números ¿dónde ubicas a los números negativos?

M: En los... ¿irracionales?

E: ¿Los irracionales son negativos?, bueno para empezar ¿cuáles son los irracionales?

5. M: ¿No eran las fracciones?

5. O: M ubica a los negativos dentro de los irracionales, pero al ser interrogada confunde a los irracionales con las fracciones.

E: Amm ok, tiene que ver con fracciones.

M: Mmm (silencio).

E: Si por ejemplo te digo que pi es un número irracional, ¿por qué sería un número irracional pi?

6. M: Porque no, no sería posible, así como que algo mida menos 5 metros o no sé.

6. O: M trata de justificar su respuesta hablando de la incongruencia de expresar longitudes negativas, pero no responde el por qué pi sería un número irracional.

E: Pero pi ¿es negativo entonces?

M: Mmm no.

E: ¿Cuál es el valor que conoces de pi?

M: 3.14

E: Ok y después del 14, ¿cuántos más números siguen?

M: 16, bueno era 15 y luego 9 y otros más.

E: ¿Entonces tiene fin ese número?

M: No.

E: No, y si le llamo número irracional, ¿tú crees que tenga que ver con eso?

M: Oh sí ya.

E: ¿Puedes representar ese número pi como una fracción?

M: Sí.

E: ¿Sí se puede?

M: Sí.

E: ¿Cómo quedaría?

M: Mmm (silencio), ¿no se puede quedar como 314 sobre 10?

E: Pero si pi no tiene fin, o sea, tú lo estás redondeando y está bien, pero si realmente no tiene fin ¿podrías ponerlo como una fracción?

M: No.

E: ¿Y crees que por eso sea irracional?

M: Sí.

E: Ok, entonces ya vimos que los irracionales, son los números que tú no puedes poner como una fracción, entonces ¿cuáles son los racionales?

M: Los que sí puedes poner como una fracción.

E: ¿Me puedes dar algunos ejemplos de racionales?

M: Cinco décimos, siete quintos.

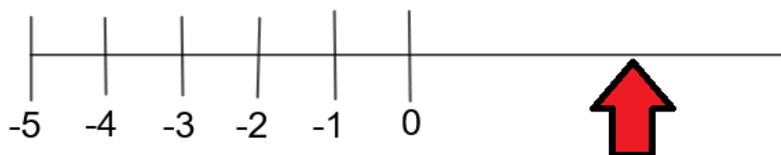
E: Muy bien, ahora, si hablamos de negativos, ¿habrá racionales negativos, o irracionales negativos?

7. M: Sí, solo les pones el signo menos.

7. O: M reconoce que entre los números racionales e irracionales puede haber valores negativos.

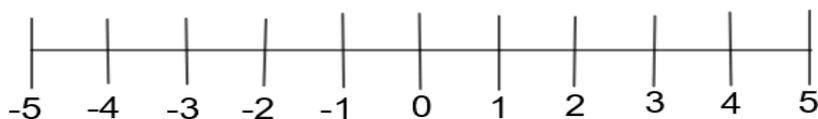
E: Y si ubicaras a los números negativos en una recta numérica, ¿cómo lo harías?, ¿puedes realizar una?

M: Sí (traza una recta horizontal, a la mitad pone una marca sobre la recta y debajo de ésta escribe cero, pone varias marcas sobre la recta hacia la izquierda de la que acaba de hacer y después del cero empieza a escribir -1 en la primera marca, -2 en la segunda, y así sucesivamente hasta llegar a -5). Sería así (señala su recta).



E: ¿Y del lado derecho qué habría?

8. M: Los números positivos (realiza marcas sobre la recta hacia la derecha del cero y comienza a escribir 1, 2, 3, 4 y 5).



8. O: M coloca los valores positivos a la derecha del cero, por lo que en su recta numérica se observa que considera a los negativos como menores que los positivos y menores que el cero. Llama la atención que para los números positivos no coloca ningún signo, ni siquiera para la parte de la recta numérica a la que le corresponden estos valores.

E: Ok, entonces estableciste el cero, pusiste los números negativos, pusiste los positivos y parece ser que dentro de una recta numérica para ti los negativos y positivos están en un mismo grupo.

M: Ajá.

E: Ok, y a ese grupo de números que tiene a lo negativos y a los positivos además del cero, ¿cómo se le llama?

M: Mmm (silencio), no, no sé.

E: Son los números enteros.

9. M: ¿Pero que no los enteros son los que no tienen decimal?

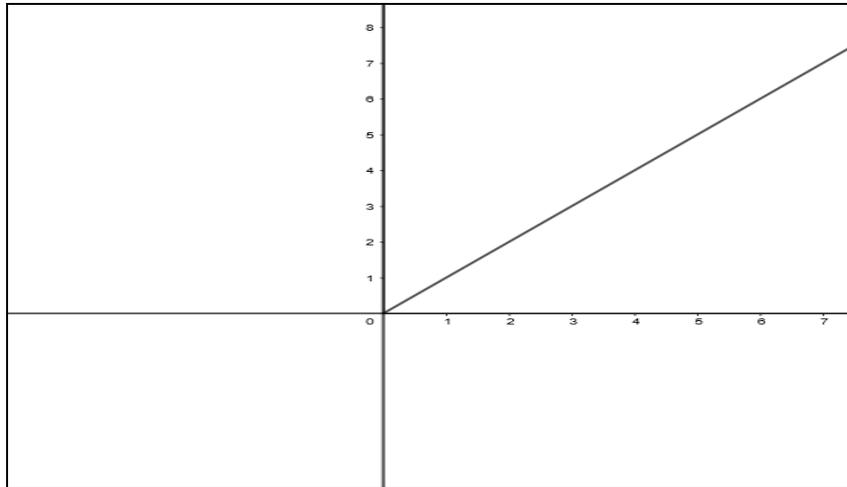
9. O: M confunde los números enteros con los naturales.

E: Esos números sin decimal que son más grandes que el cero se llaman números naturales, si tú a esos naturales, que son todos positivos, les agregas todos los negativos sin decimal y aparte el cero, estás formando el conjunto de los números enteros. Así los clasifican en matemáticas.

M: Ah ya.

E: Suena algo extraño porque desde la primaria nos hablan de los números enteros como números que no son fracciones ni decimales, pero la definición adecuada sería la que acabamos de platicar. Bueno veamos otra cosa; ¿podrías mostrar en un plano cartesiano cómo se ve una variación directamente proporcional?

M: Sí (traza los dos ejes de un plano cartesiano y establece la escala solo en el cuadrante superior derecho, y en ese mismo cuadrante traza una línea recta que pasa por el cero).



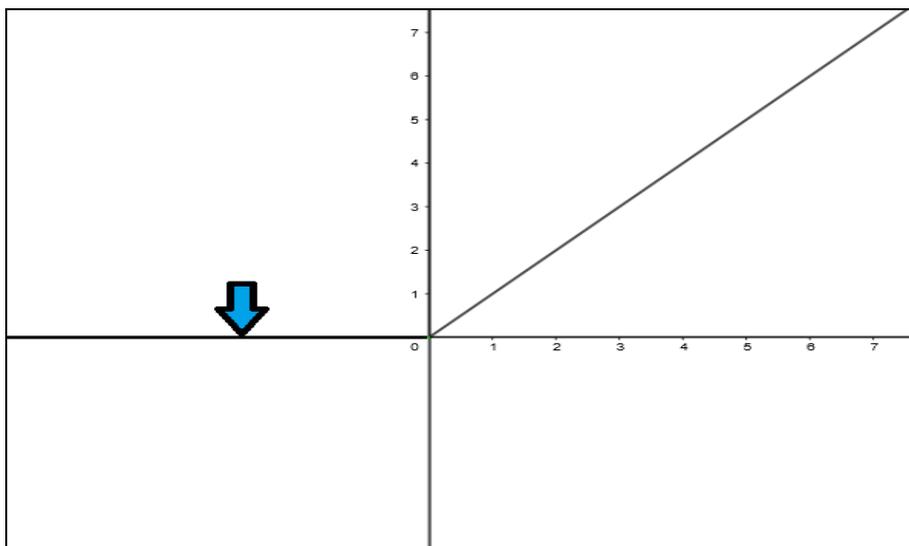
E: ¿Todos los valores que pusiste son positivos?

M: Sí.

E: ¿Cómo le haces para decir en el plano cartesiano quiénes son positivos y quiénes son negativos?

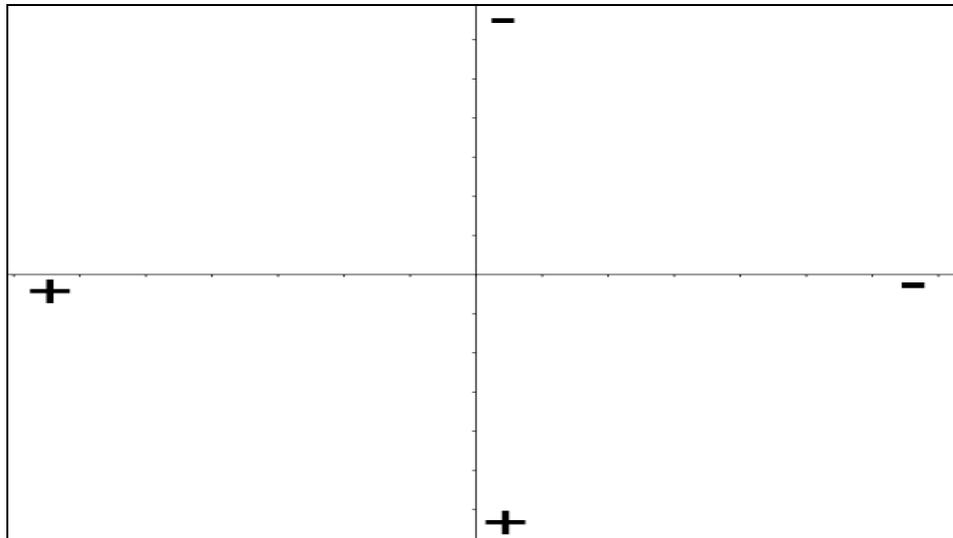
M: Amm arriba y derecha son positivos, izquierda y abajo son negativos.

E: Ok, y entonces ¿yo no podría decir que estos son positivos? (señala la parte izquierda del eje horizontal del plano cartesiano):



M: No.

E: ¿No se puede?, me refiero a cambiar, es decir que arriba y derecha sean negativos, y que izquierda y abajo sean negativos, por ejemplo, así (dibuja un plano cartesiano con los signos invertidos respecto a lo que M dijo):



M: Ah sí, sí se podría.

E: O sea tú los puedes poner como mejor te convenga.

10. M: Sí, depende la situación, pero siempre hay positivos juntos y negativos juntos.

10. O: M reconoce que la posición de los signos en el plano cartesiano es relativa y que estos signos son susceptibles de ser invertidos con respecto al esquema que comúnmente se utiliza, aun así, reconoce que siempre guardan cierta relación dentro de los cuadrantes.

E: Ok, y en el caso de los ejes, pensando que hablamos de “X” y “Y”, ¿quién es “X” y quién es “Y”?

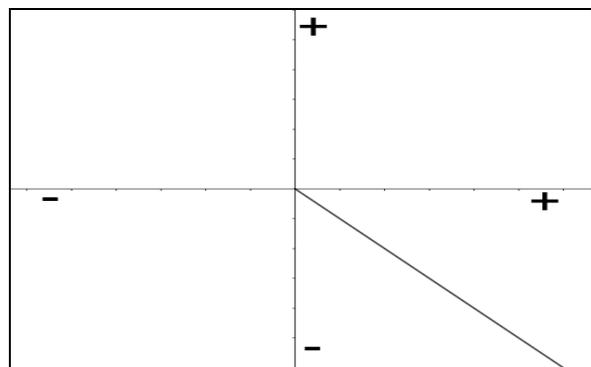
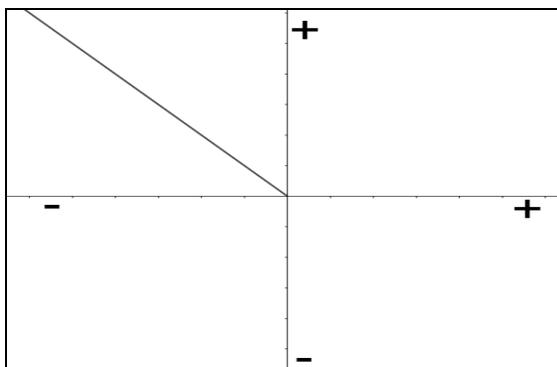
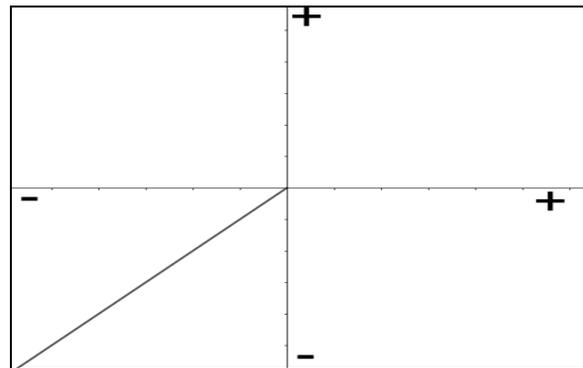
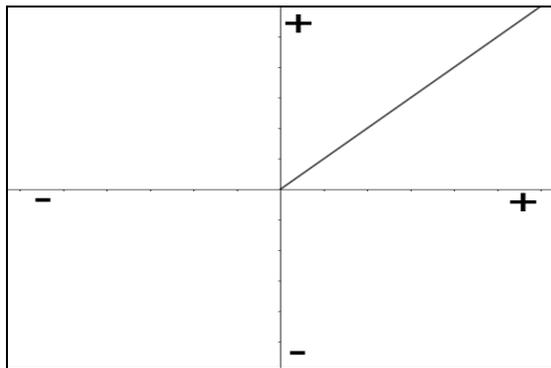
M: El horizontal es “X” y el vertical es “Y”.

E: Y esos ¿se podrían cambiar?, es decir, ¿que el horizontal fuera “Y” y el vertical fuera “X”?

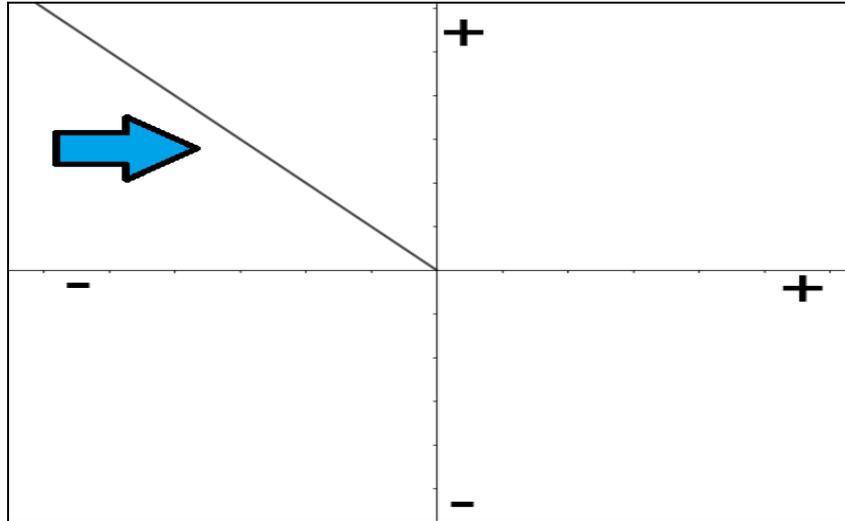
11. M: Sí, también se podría, inclusive cambiar los nombres.

11. O: M hace la observación de que las etiquetas para nombrar a los ejes también son relativas y dependen de la situación.

E: Ok, muy bien. Hablando del plano cartesiano que acabas de hacer, si tomamos en cuenta los valores positivos como dijiste hacia la derecha y hacia arriba, y los valores negativos hacia la izquierda y hacia abajo, vamos a trazar otros tres planos cartesianos con rectas en los otros cuadrantes para compararlos con el que ya hiciste (traza junto al primero otros tres planos cartesianos, además dibuja una recta que pasa por el cero en un cuadrante distinto en cada plano cartesiano):



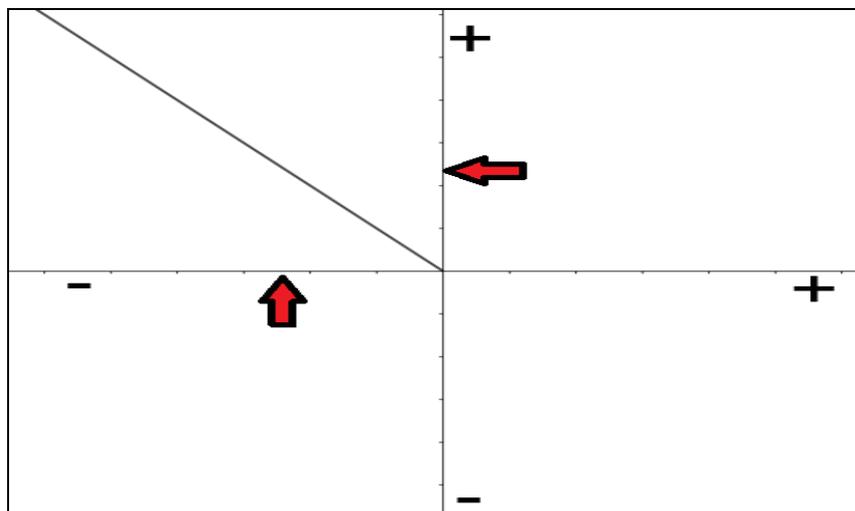
En este cuadrante que está aquí (señala el plano cartesiano que contiene la recta en el cuadrante superior izquierdo), ¿hay variación directamente proporcional?, porque hace rato dijiste que era una línea recta que pasa por el cero y la que acabo de hacer es una línea recta que pasa por el cero.



M: Mmm no.

E: ¿Por qué no?

M: Porque esta línea es negativa (señala la parte izquierda del eje horizontal del plano cartesiano) y esta línea es positiva (señala la parte superior del eje vertical del plano cartesiano).

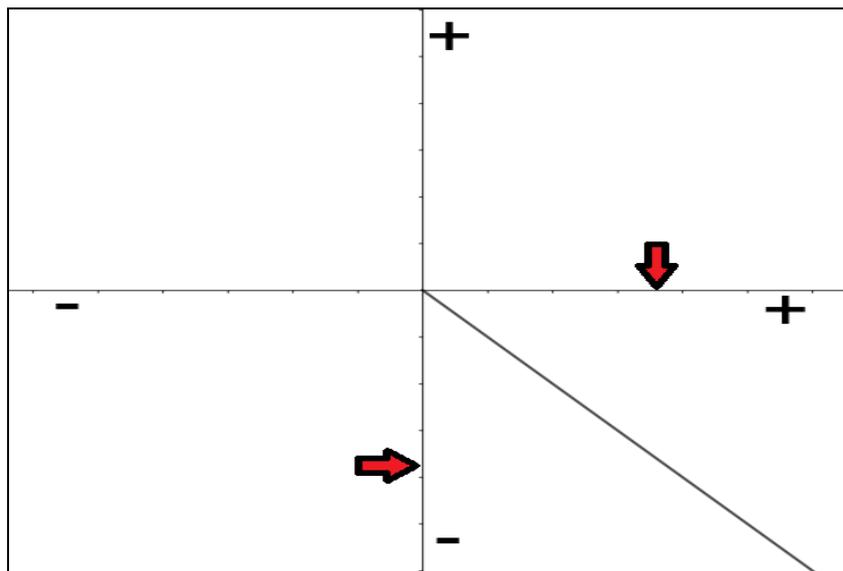


E: ¿Y eso qué implicaría?

M: Que uno aumenta y el otro disminuye.

E: Ok, muy bien, ¿y en este cuadrante? (señala el plano cartesiano que contiene la recta en el cuadrante inferior derecho).

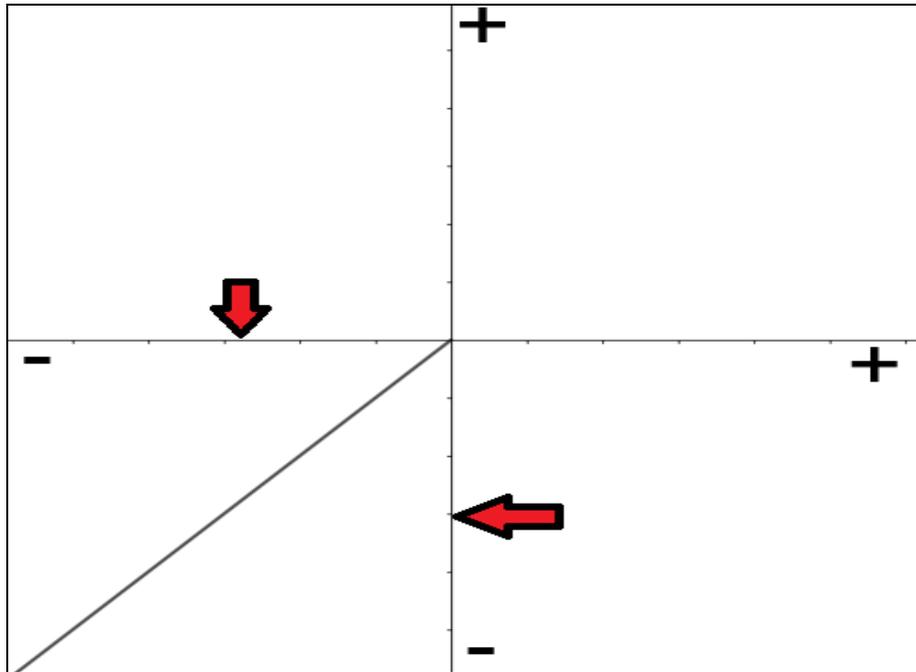
12. M: Sería lo mismo porque este está aumentando (señala la parte derecha del eje horizontal del plano cartesiano) y este está disminuyendo (señala la parte inferior del eje vertical del plano cartesiano).



12. O: M muestra que en el plano cartesiano una recta no puede ser directamente proporcional si en los semiejes del cuadrante en el cual se ubica, los signos son contrarios.

E: ¿Y en este cuadrante? (señala el plano cartesiano que contiene la recta en cuadrante inferior izquierdo).

13. M: Esa sí sería directamente proporcional porque las dos disminuyen (señala tanto la parte inferior del eje vertical como la parte izquierda del eje horizontal del plano cartesiano), o sea por el cero.

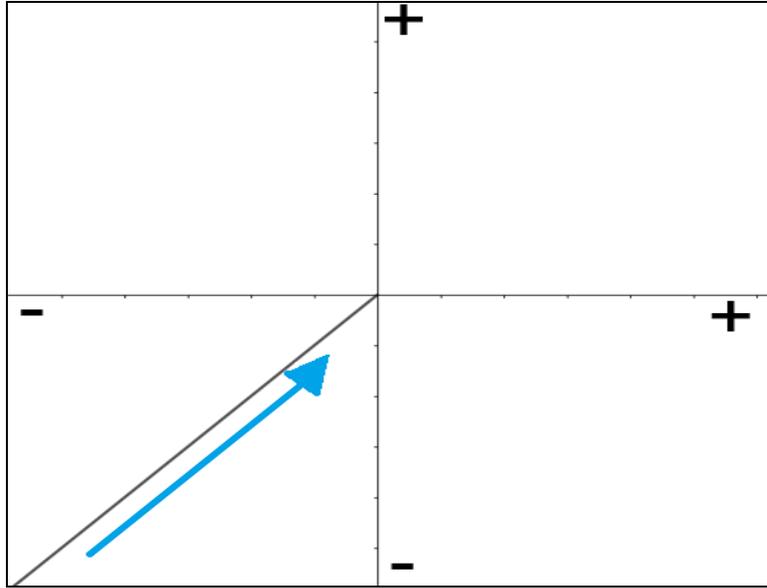


13. O: M relaciona los semiejes negativos del plano cartesiano como una disminución de valor.

E: Ok, ¿solo disminuyen?

M: Pues sí.

E: Si por ejemplo yo me ubico aquí (señala el final de la línea que trazó en el cuadrante inferior izquierdo) y voy subiendo (desliza el dedo sobre la línea dirigiéndose al centro del plano cartesiano) ...

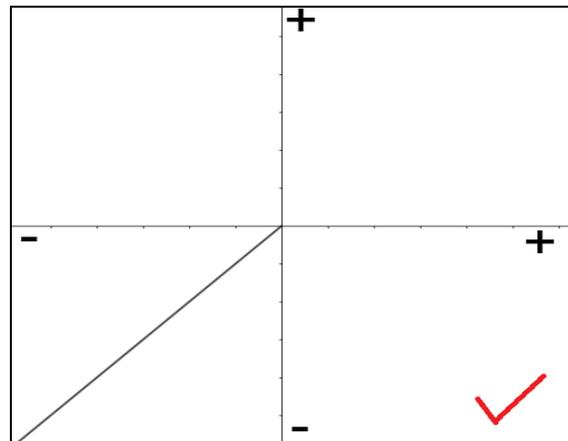
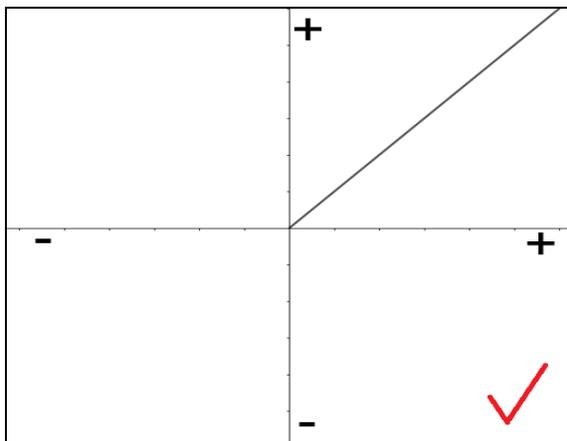


14. M: Ah también pueden aumentar.

14. O: M reconsidera y admite que en la recta que aparece entre los semiejes negativos del plano cartesiano, específicamente en el tercer cuadrante, también puede haber un incremento si se considera que la recta crece hacia el cero.

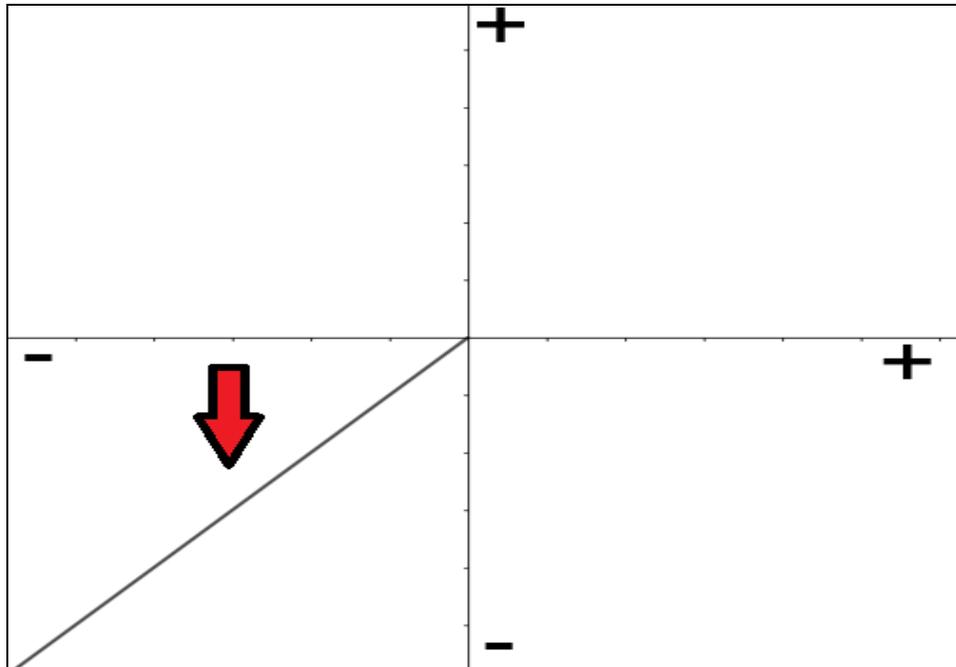
E: Ok, entonces la variación directamente proporcional ¿en qué cuadrantes aparece?

M: En este y en este (señala los planos cartesianos que tienen sus rectas en los cuadrantes superior derecho e inferior izquierdo respectivamente).



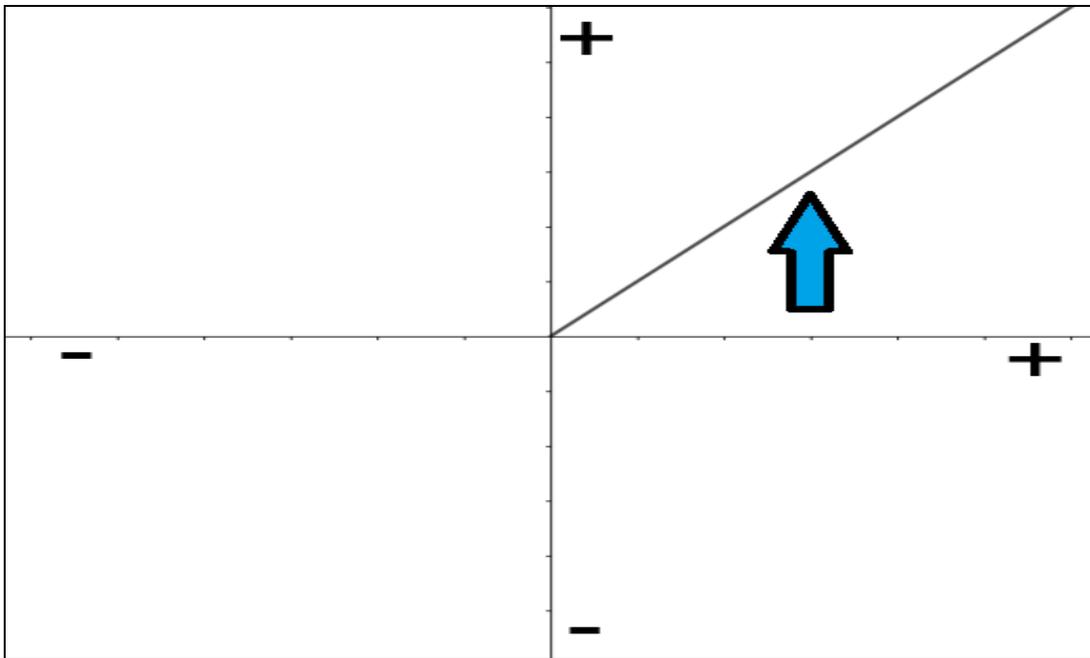
E: Ok muy bien, ahora vamos a ver algunas de tus respuestas en el cuestionario; en la última pregunta que dice: “Respecto a los valores negativos que aparecieron en cada situación que resolviste y basándote en tus respuestas anteriores”, el primer inciso te preguntaba “¿cómo relacionas este tipo de números con la proporcionalidad directa?”, y tú escribiste que como son negativos disminuyen proporcionalmente, ¿qué quisiste decir ahí?

15. M: Mmm como está aquí (señala el cuadrante inferior izquierdo de uno de los planos cartesianos que M y E acaban de analizar) que como los dos son negativos pueden disminuir o pueden aumentar proporcionalmente.



15. O: M hace ver que entiende que, aunque la recta se presente en un cuadrante que involucra solo valores negativos, puede haber un incremento o un decremento proporcional entre variables.

E: Y entonces, ¿no pierden la relación que ocurre acá o que conocías? (señala el plano cartesiano que contiene la recta en el cuadrante superior derecho).



16. M: No, sigue la proporción.

16. O: M observa que la proporcionalidad directa se mantiene tanto en el tercer cuadrante del plano cartesiano como en el primero.

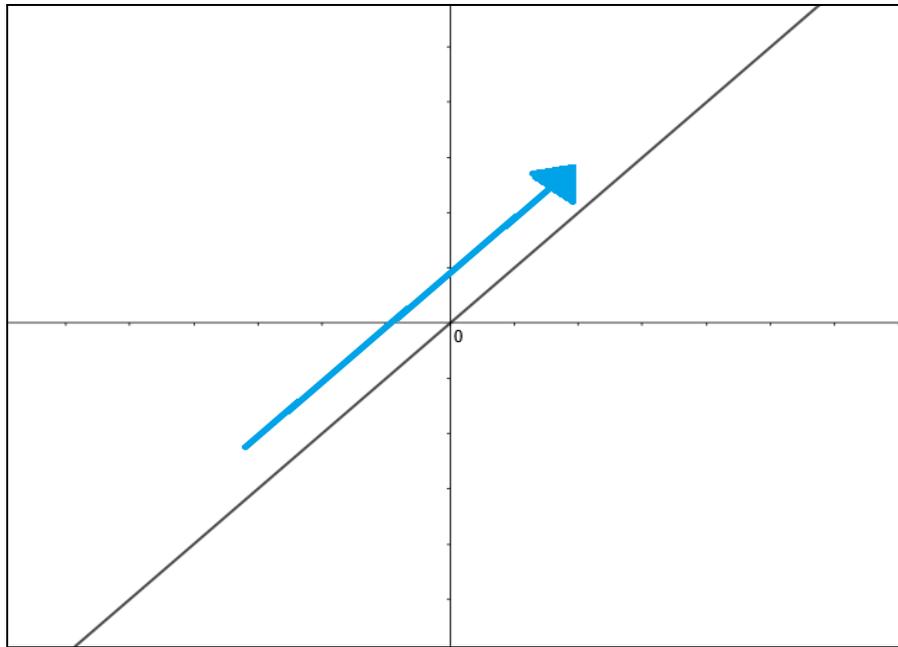
E: ¿De qué otra manera podría yo justificar eso?, o sea, ¿qué otra cosa aparece ahí en cada pareja de valores para poder decir que hay proporcionalidad directa?

17. M: Ah, al dividir las parejas de valores como resultado da la constante que daría en todas las parejas de valores y sería proporcionalidad directa.

17. O: M recurre a la obtención de la constante de proporcionalidad para justificar que en la recta que está en el plano cartesiano existe proporcionalidad directa sin importar si pasa por el primer cuadrante o por el tercer cuadrante.

E: Y entonces, por ejemplo, en este plano cartesiano (construye un nuevo plano cartesiano y traza una recta que pasa por el cero y que se ubica tanto en el primer como en el tercer cuadrante del plano cartesiano) ¿la constante es igual en toda esta línea (señala y recorre con el dedo toda la línea

que pasa por los cuadrantes inferior izquierdo y superior derecho del plano cartesiano) aunque esté en el cuadrante que tiene solo valores negativos?



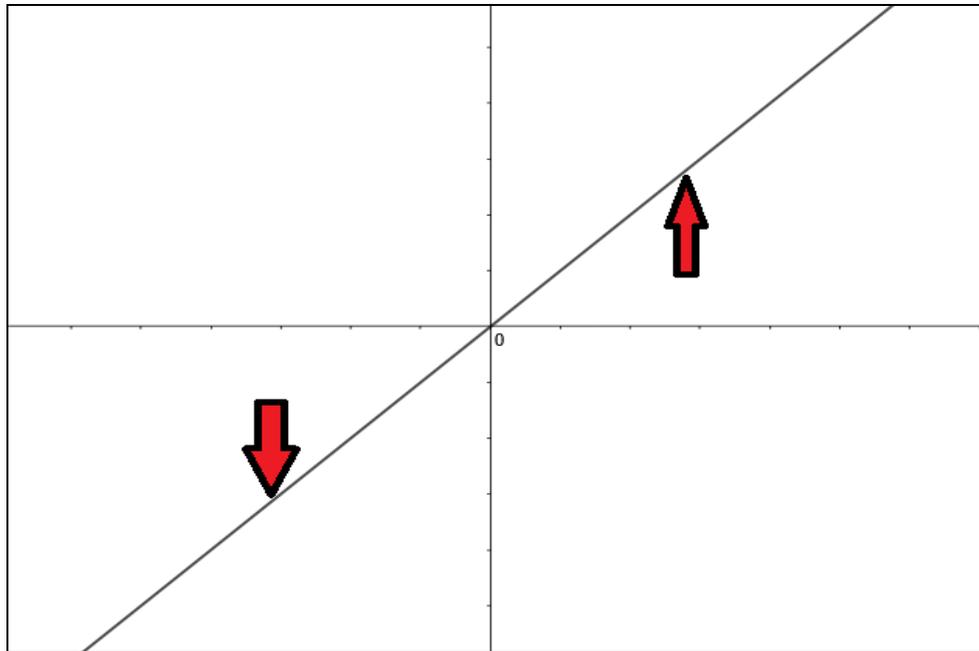
18. M: Mmm sí sale la misma.

18. O: M concluye que en una recta que representa una variación directamente proporcional, la constante de proporcionalidad es la misma no importando si se trata de un cuadrante con ambos semiejes negativos o ambos positivos.

E: Ok muy bien, en el inciso b de la última pregunta del cuestionario que estábamos analizando donde te preguntaba si crees que los negativos son parte de este tipo de proporcionalidad, según lo que acabas de definir, pusiste que sí ya que también la recta cruza por el cero y disminuyen proporcionalmente, entonces ahí, ¿te referías a algo similar a lo que dijiste hace un momento?

M: Sí porque si cruzan por el cero, aquí en este cuadrante (señala el cuadrante superior derecho del plano cartesiano que E acaba de construir) pueden aumentar o disminuir y aquí también (señala el cuadrante inferior izquierdo del mismo plano cartesiano), entonces... y las dos cruzan por el

cero, pero solo puede ocurrir en estos dos cuadrantes porque, o los dos son negativos, o los dos son positivos.



E: Ok, entonces parece ser que esa es otra condición, ¿cómo la diríamos?

19. M: Que las parejas de valores deben tener el mismo signo.

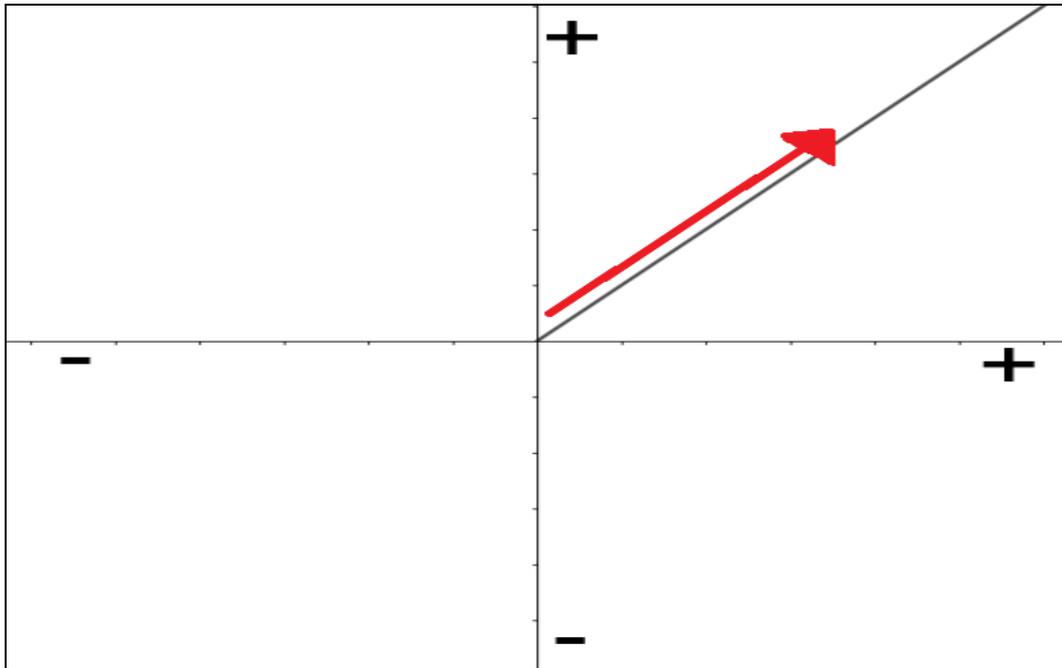
19. O: M concluye que para que exista proporcionalidad directa en un plano cartesiano, los semiejes entre los que se encuentre dicha recta deben ser ambos positivos o ambos negativos.

E: Muy bien; regresando al cuestionario, ahí se te preguntaba si habías visto este tipo de problemas durante tu paso por la secundaria; se refería a los que involucran números negativos y proporcionalidad directa. Tú respondiste que no los habías visto, ¿es así?

M: No, nunca los había visto.

E: ¿Cómo o de qué tipo eran los problemas que habías visto de proporcionalidad?

M: Amm siempre se usaba este cuadrante (señala el plano cartesiano que tiene la recta en el cuadrante superior derecho), siempre iban de aquí (señala el centro del plano cartesiano) para los positivos (desliza el dedo por la recta).



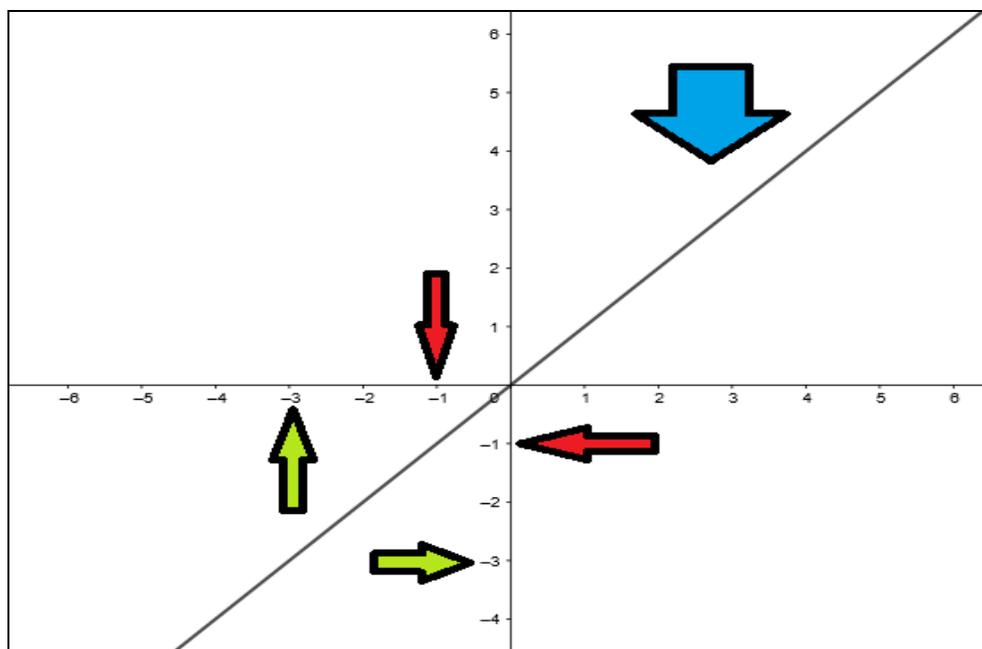
E: Ok, muy bien, y entonces, después de todo lo que acabamos de platicar, ¿son parte de la variación directamente proporcional los números negativos?

M: Sí, bajo ciertas condiciones, pero sí son parte de eso.

E: Ok, y ¿cuál sería la relación que encuentras entre los números negativos y la variación directamente proporcional?, ¿cómo relacionas esos dos temas?

20. M: Pues que si son negativos los dos ejes y si se dividen las parejas de valores, mmm si le ponemos números (escribe una escala de valores en los ejes del último plano cartesiano que han estado analizando), por ejemplo este y este (señala el -1 del eje vertical y el -1 del eje horizontal del plano cartesiano), o este y este (señala el -3 del eje vertical y el -3 del eje horizontal del plano cartesiano), también darían una constante y también disminuirían o también aumentarían

proporcionalmente, por eso también son proporcionales como en el cuadrante de acá (señala el cuadrante superior derecho del plano cartesiano).



20. O: La relación que M hace entre la proporcionalidad y los números negativos se enfoca en la constante de proporcionalidad y el aumento o disminución proporcional en la recta dentro del tercer cuadrante del plano cartesiano, relación que compara con lo que conocía previamente que ocurre en el primer cuadrante del plano cartesiano.

E: Ok, muy bien, vamos a ver; en tu cuestionario, en los tres problemas que realizas colocas los valores de cada tabla con los signos que les corresponden, pero como no vi operaciones en la hoja no supe cómo le hiciste para colocar esos signos, ¿puedes decirme cómo le hiciste?, me refiero a ¿cómo supiste cuáles eran positivos y cuáles eran negativos?

M: Ah pues por ejemplo en esta tabla (señala la tabla que corresponde al primer problema del cuestionario), el número negativo en las yardas significaba que perdieron, algo así, entonces si este era negativo (señala el primer valor de la tabla que se refiere a la variable yardas, el cual es -11), entonces el de acá tenía que ser negativo (señala el valor correspondiente a -11 , el cual es -2750 y se refiere a dólares en la tabla), y si este era positivo (señala el valor $+25$ del lado de las yardas),

entonces éste también tenía que ser positivo (señala el **+6250**, que es el correspondiente del valor **+25**, y que se refiere a dólares).

Yardas	Dólares
 -11	-2750 
 +25	+6250 
-6	-1500
+9	+ 2250
+1	+250
-7	-1750
+45	+11,250
-30	-7500

$K = 250$

E: Ok, muy bien, pero ¿por qué no pusiste operaciones?, o ¿dónde las hiciste?

M: Creo que lo hice mentalmente

E: ¿Todas las operaciones?

21. M: Sí o creo que usé una hoja extra, no recuerdo.

21. O: M no especifica qué procedimiento siguió para llenar las tablas en los problemas.

E: Porque no pusiste una sola operación en todo el cuestionario, pero está bien.

M: Pero no usé calculadora.

E: Ok, está bien, no estoy diciendo que la hayas usado. Bueno vamos a continuar. Por ejemplo, cuando sumas o restas números con signo, ¿cómo le haces?, si yo tuviera positivo tres menos negativo ocho (escribe):

$$(+3) - (-8) =$$

O, negativo seis más negativo siete (escribe):

$$(-6) + (-7) =$$

¿Cómo le haces para resolverlos?

M: Amm en el primero, primero elimino los paréntesis, que sería aquí más tres (escribe **+3**), más ocho (escribe **+8**), eso sería igual a más once (escribe **+11**), y luego aquí (se refiere a la segunda operación), serían menos seis (escribe **-6**), menos siete (escribe **-7**), son menos trece (escribe **-13**):

$$+3 + 8 = +11$$

$$-6 - 7 = -13$$

E: ¿Y cómo eliminaste los paréntesis?

M: Ah, pues en el primer número (señala el **+3** de la primera operación) como no hay signo afuera entonces se quedan así, y si el signo que está afuera del paréntesis es negativo (señala el signo **-** que está entre **+3** y **-8**) afecta al de adentro (señala el signo **-8**) y lo convierte en contrario, entonces aquí es negativo (señala el signo que está entre **+3** y **-8**) por negativo (señala el signo de **-8**), bueno diciéndolo así, sería positivo, y aquí (señala el signo **+** que está entre **-6** y **-7** en la segunda operación) el positivo no afecta nada en el número de adentro (señala al **-7**), entonces se elimina (señala los paréntesis de **-7**) y se queda con el signo el número del paréntesis:

$$(+3) - (-8) = +3 + 8 = +11$$

$$(-6) + (-7) = -6 - 7 = -13$$

E: ¿O sea que usas la ley de los signos para eliminar los paréntesis?

M: Sí.

E: ¿Podiera ser que en las tablas del cuestionario hayas utilizado también la ley de los signos para colocar a cada valor el signo que les correspondía?

22. M: Mmm sí, de hecho, así creo que le hice.

22. O: M aclara cómo colocó los signos en los valores de las tablas del cuestionario, haciendo uso de la ley de los signos.

E: Ok, y ¿cuándo multiplicas o divides?, por ejemplo, si tuviéramos positivo siete que multiplica a negativo ocho (escribe):

$$(+7)(-8) =$$

O si tuviéramos negativo doce que divide a positivo dos (escribe):

$$\frac{-12}{+2} =$$

Ahí ¿cómo le haces?

M: Pues... primero los multiplico, bueno primero los signos que sería más por menos, es menos (señala los signos de la multiplicación) y siete por ocho son cincuenta y seis (escribe **-56**), y aquí

(señala la división) pues primero veo cuánto va a dar con la ley de los signos, sería menos entre más es menos (señala los signos de la división), y doce entre dos son seis (escribe **-6**):

$$(+7)(-8) = -56$$

$$\frac{-12}{+2} = -6$$

E: Entonces para resolver las operaciones que requieren manipular números con signo ¿siempre utilizas la ley de los signos?

23. M: Sí.

23. O: M muestra una dependencia al uso de la ley de los signos para manipular operaciones que involucran valores negativos.

E: ¿Crees que este tipo de operaciones se puedan resolver sin la ley de los signos?, por ejemplo, digamos que se te olvida esa ley, ¿podrías resolver las operaciones sin la ley que usas?

M: Mmm no, creo que no.

E: No, o sea, ¿no hay manera de resolverlo?

24. M: Amm no lo sé, pues ¿cómo sabría qué signo sería de este lado (señala la parte derecha después del signo igual de la operación $(-7)(-8) = -56$) si no sé la ley de los signos, entonces pues no.

24. O: M reitera que es incapaz de resolver operaciones que involucran números con signo sin recurrir a la ley de los signos.

E: Ok, muy bien. Vamos a ver otra cosa. ¿Qué operaciones que involucran números con signo tuviste que realizar para llenar las tablas del cuestionario?

M: Mmm por ejemplo en la primera tabla, menos mil setecientos cincuenta entre menos siete, eso da más doscientos cincuenta (escribe $\frac{-1750}{-7} = +250$), o si no tenía un número de la tabla, entonces la constante que sería más doscientos cincuenta por menos siete y da menos mil setecientos cincuenta (escribe $(+250)(-7) = -1750$).

Yardas	Dólares
-11	-2750
+25	+6250
-6	-1500
+9	+2250
+1	+250
-7	-1750
+45	+11,250
-30	-7500

$k = 250$

E: Entonces de las cuatro operaciones básicas, ¿cuáles utilizaste?

25. M: Multiplicación y división.

25. O: M reconoce que para llenar la tabla utilizó dos de las operaciones básicas: multiplicación y división.

E: Y en el plano cartesiano de cada problema, cuando hiciste tus rectas ¿utilizaste alguna operación básica?

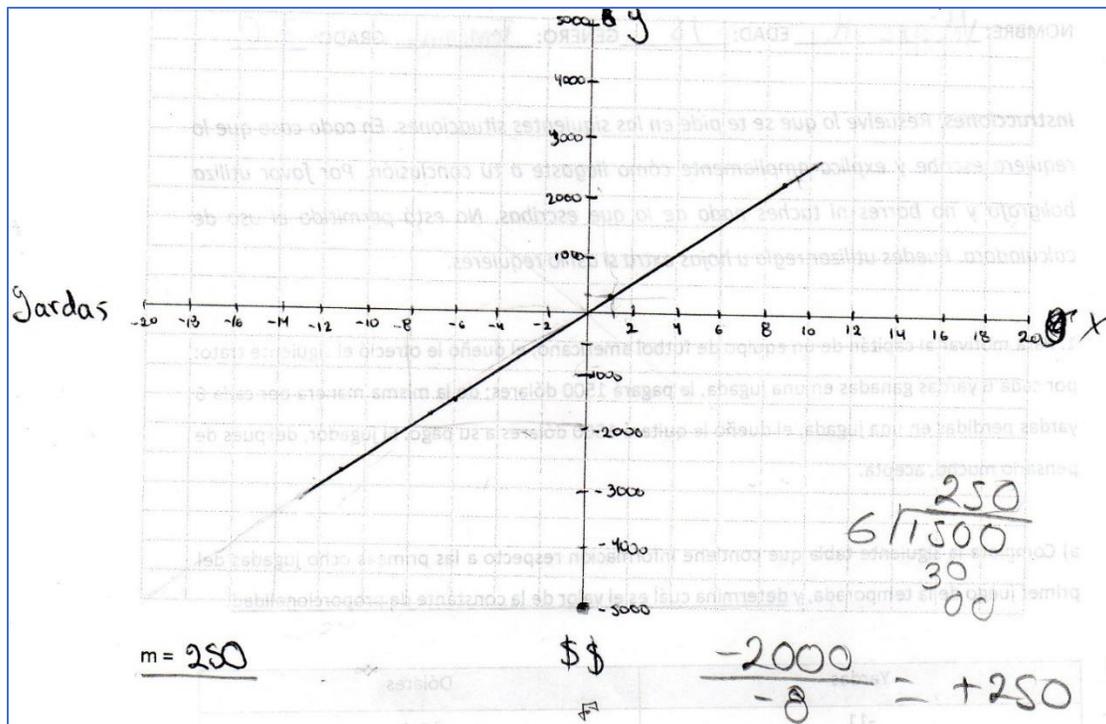
M: Mmm no.

E: ¿No?

26. M: No, solo usé la tabla.

26. O: M no identifica el uso de alguna operación básica para la construcción de la recta en el plano cartesiano.

E: ¿Cómo le haces para ubicar una coordenada?, por ejemplo, de este que ya tienes hecho (señala el plano cartesiano del problema de las yardas), ¿cómo ubicaste las coordenadas?

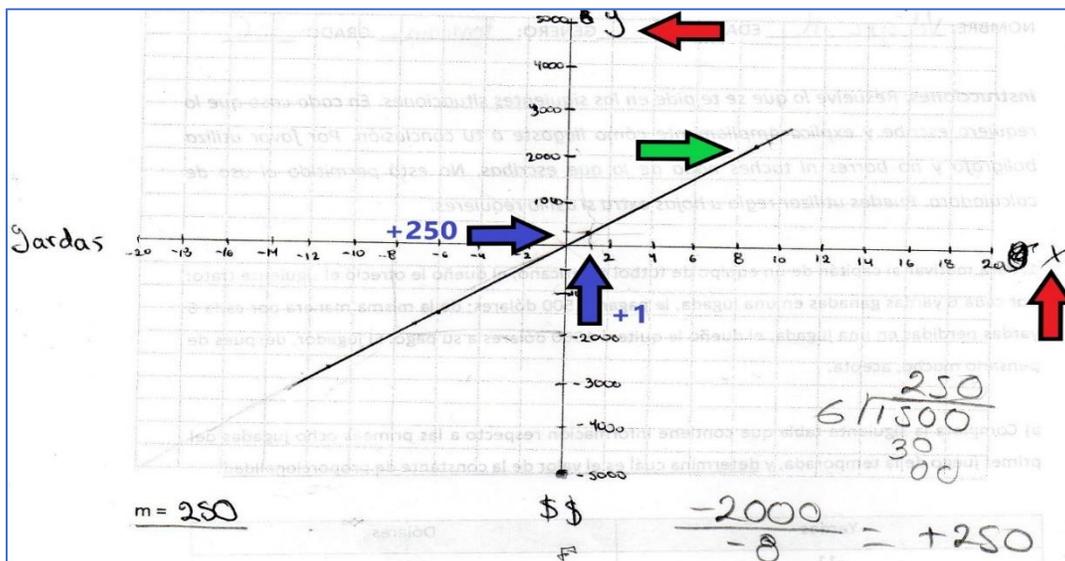


M: Por ejemplo, el primer número sería, no sé, uno (señala el +1 de la tabla del primer problema) que es "X", y doscientos cincuenta (señala el valor correspondiente de +1 en la tabla, el cual es +250) que es "Y".

Yardas	Dólares
-11	-2750
+25	+6250
-6	-1500
+9	+2250
+1	+250
-7	-1750
+45	+11,250
-30	-7500

$k = 250$

Acá yo así los puse (señala las etiquetas de los ejes en el plano cartesiano del problema), aquí estaría ubicado el doscientos cincuenta (señala la primera marca de la parte superior del eje vertical del plano cartesiano), y aquí el uno (señala la primera marca de la parte derecha del eje horizontal del plano cartesiano), entonces (señala la recta que está en el plano cartesiano) van siguiendo de forma vertical y horizontal y donde se cruzan es donde es el punto para unir la recta.



E: O sea que ¿primero te ubicas en un eje y luego en el otro para ver dónde se cruzan y poner en ese lugar un punto?

M: Sí.

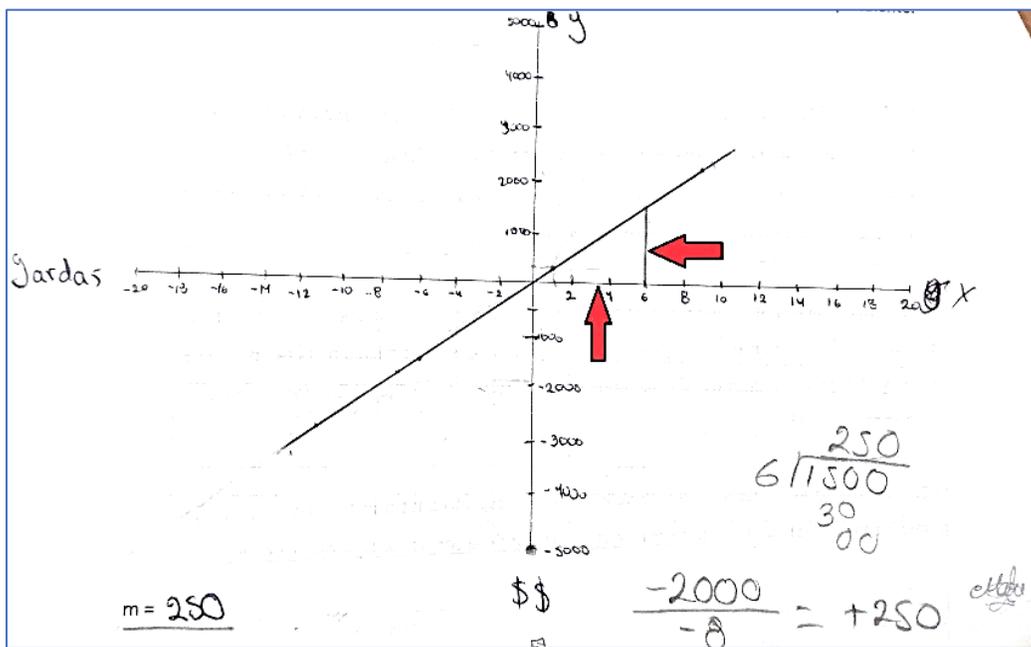
E: ¿Y eso no se parece a ir sumando o restando?

27. M: Ah pues sí, también.

27. O: M reconoce que el buscar coordenadas en un plano cartesiano implica usar la adición y la sustracción.

E: Y si por ejemplo quisieras determinar la pendiente en esa recta, si no tuvieras la tabla, ¿cómo le harías?

28. M: Amm sería hacer un triángulo, por ejemplo, aquí, (traza un triángulo debajo de la recta en el plano cartesiano), de aquí para acá son mil quinientos (señala la altura del triángulo), y de aquí para acá son seis (señala la base del triángulo), entonces se dividen este entre este (señala la altura del triángulo y después su base), son mil quinientos entre seis, serían 250 (escribe $\frac{1500}{6} = 250$), y ya daría la pendiente o también la constante que es lo mismo.



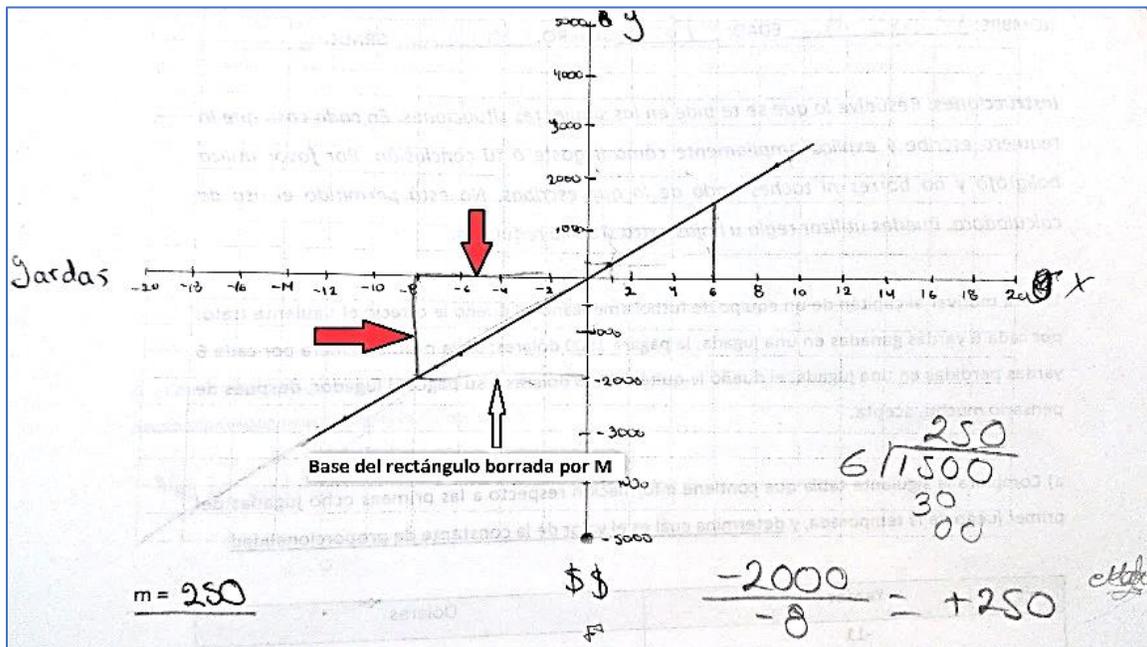
28. O: M menciona que la pendiente de la recta y la constante de proporcionalidad son lo mismo.

E: Y si no tuvieras esta parte de la recta (señala el cuadrante superior derecho del plano cartesiano) y quisieras sacar la pendiente acá (señala la parte de la recta que se encuentra en el cuadrante inferior izquierdo, ¿cómo le harías?

M: Sería lo mismo.

E: ¿Puedes mostrarme?

M: Por ejemplo aquí ocho (dibuja un rectángulo que tiene su diagonal atravesada por la recta del plano cartesiano), es menos ocho aquí (remarca con el lápiz la altura del rectángulo que se ubica en el punto -8 del eje horizontal del plano cartesiano), bueno, nada más voy a usar uno (borra la base del rectángulo que está ubicada en el punto -2000 del eje vertical del plano cartesiano; de esta manera deja trazado un triángulo); emm de aquí para acá son dos mil, bueno, menos dos mil (señala la altura del triángulo) y menos ocho (señala la base del rectángulo), entonces menos dos mil entre menos ocho serían más doscientos cincuenta (escribe $\frac{-2000}{-8} = +250$, y esa es la pendiente.



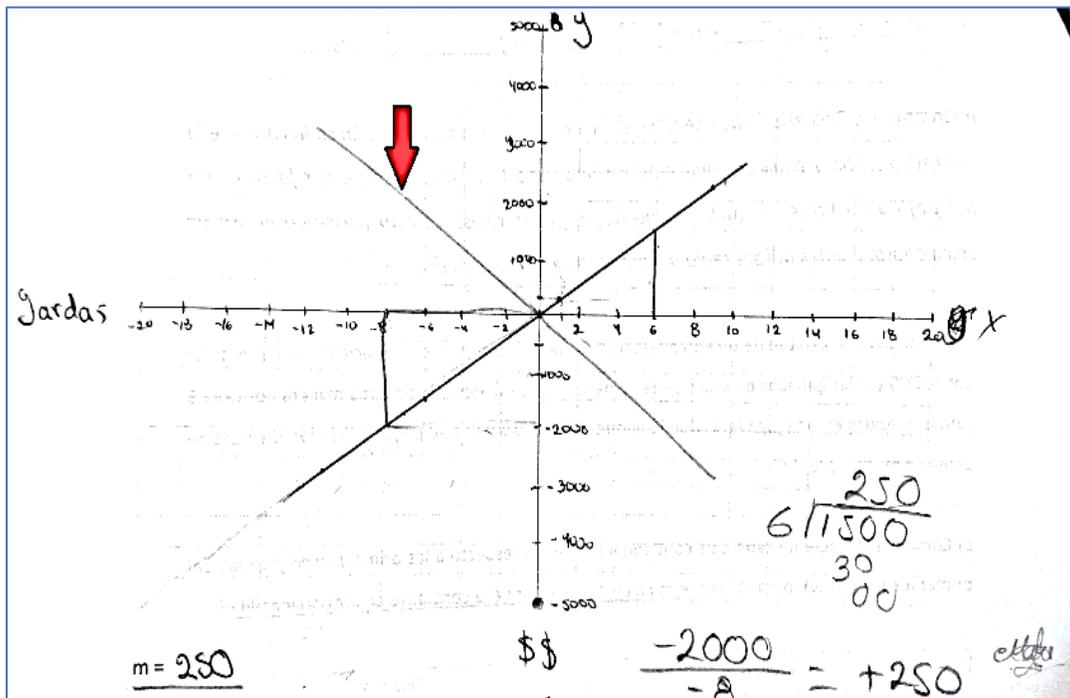
E: Ok, muy bien, entonces la pendiente ¿es la misma en los dos cuadrantes?

29. M: Sí, es la misma porque es de la misma recta.

29. O: M vuelve a hacer la observación de que en la recta que atraviesa tanto el tercer como el primer cuadrante del plano cartesiano, la constante de proporcionalidad es la misma.

E: Muy bien, y si la pendiente saliera negativa, ¿cómo se vería la recta?

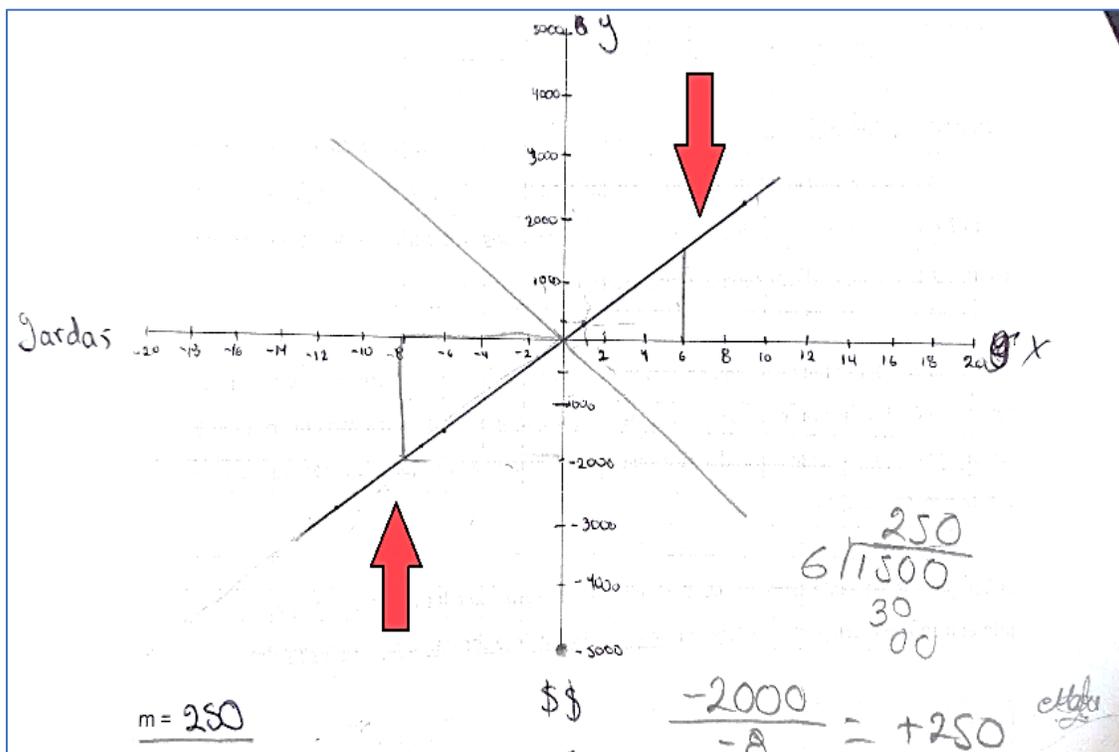
30. M: Se vería así ¿no?, como para acá (dibuja una recta que parte del cero hacia el cuadrante superior izquierdo del plano cartesiano), o para acá (prolonga la recta que acaba de trazar hacia el cuadrante inferior derecho del plano cartesiano).



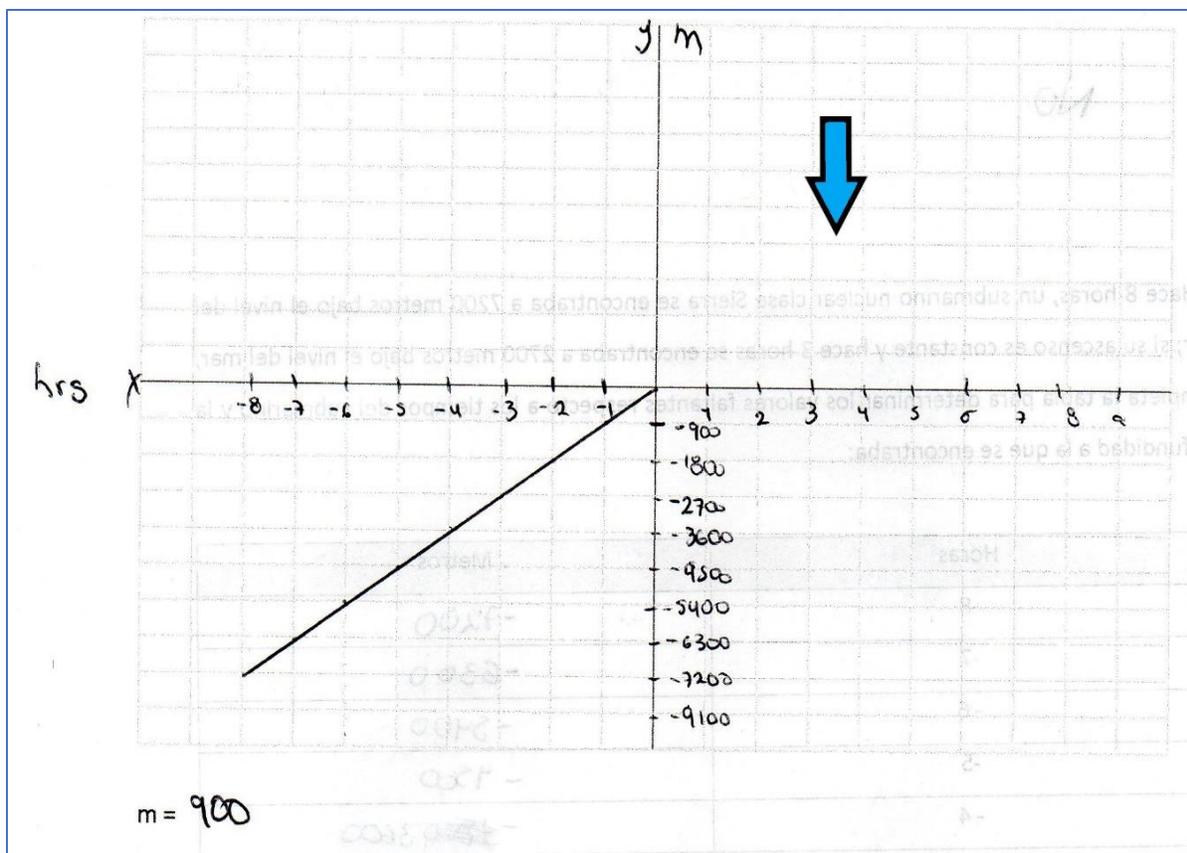
30. O: M reconoce la diferencia que hay en la inclinación que tiene una recta cuando su pendiente es negativa y cuando su pendiente es positiva.

E: Ok, está muy bien. Dime, ¿cómo crees que ayuda el tener números negativos en una relación de variación directamente proporcional para entenderla mejor?, ¿crees que ayude?, o ¿crees que sea suficiente saber solamente lo que pasa en este cuadrante donde solo hay positivos? (señala el cuadrante superior derecho).

M: Yo creo que sería suficiente porque lo mismo que pase aquí (señala la recta del cuadrante superior derecho), si están involucrados números negativos, lo mismo que pase aquí, va a pasar acá (señala la recta del cuadrante inferior izquierdo).



E: Y si por ejemplo tuvieras que resolver un problema que solamente se basa en el tercer cuadrante como lo fue el problema del submarino, ahí por ejemplo no tienes el primer cuadrante (señala el cuadrante superior derecho del plano cartesiano), entonces teniendo solamente el plano cartesiano y la recta, ¿te ayudarían los negativos a determinar si existe proporcionalidad directa?

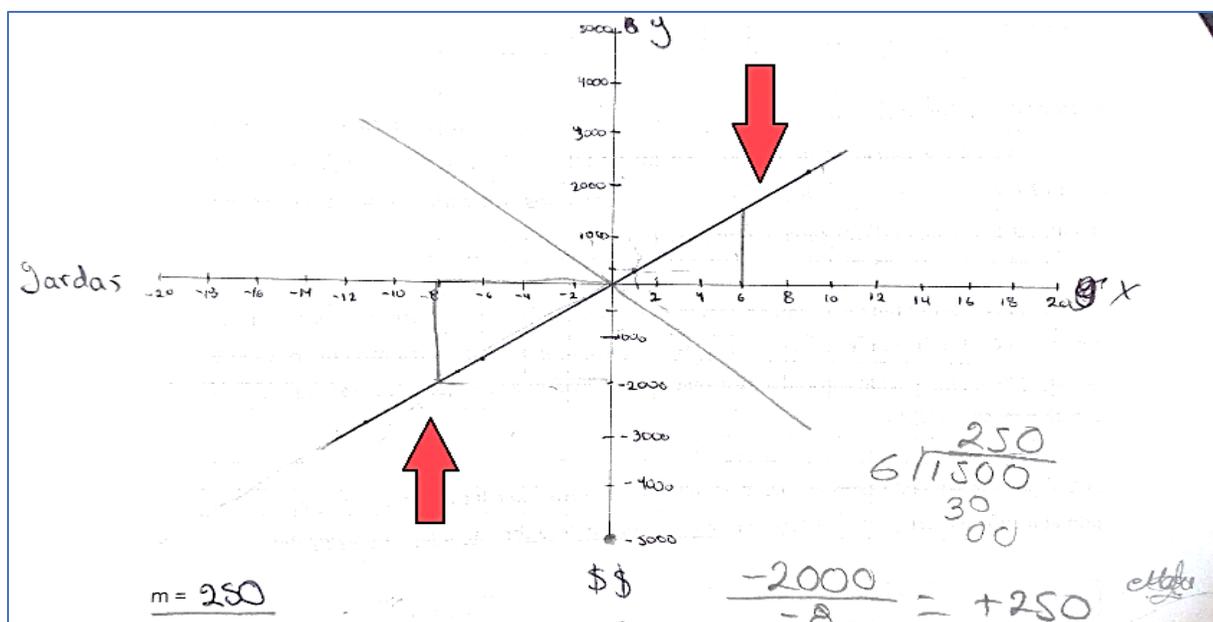


31. M: Mmm sí. Ahí sí los necesito.

31. O: M reconoce que, en algunos problemas de proporcionalidad, el uso de valores negativos es necesario para determinar si existe o no proporcionalidad.

E: Entonces, ¿crees que el extender la proporcionalidad al tercer cuadrante ayuda a entenderla o a determinarla?

32. M: Sí, porque hace rato que hice el triángulo para sacar la pendiente aquí abajo (señala el cuadrante inferior izquierdo), me dio lo mismo que arriba (señala el cuadrante superior derecho), entonces pues no importa en cuál de los dos cuadrantes sea, es la misma pendiente y entonces todo es igual.



32. O: M vuelve a hacer la observación de que la pendiente de la recta se mantiene igual en ambos cuadrantes.

E: ¿A qué te refieres con todo?

33. M: A la proporcionalidad, las parejas de números que se dividen, la recta que pasa por el cero y así.

33. O: M reitera que la constante de proporcionalidad en ambos cuadrantes por donde atraviesa la recta es la misma, y que, por tanto, las características de la proporcionalidad involucradas serán iguales.

E: Ok muy bien, ¿crees que si resolvieras más problemas de variación directamente proporcional que involucran negativos, mejoraría tu aprendizaje en los dos temas?, o ¿consideras que así como los estudiaste por separado es suficiente?, o sea, si empezaras a ver más de estos problemas que involucran el tercer cuadrante, que involucran números negativos, que involucran proporcionalidad directa, ¿mejorarías en cuanto al tema de números negativos y en cuanto al tema de variación directamente proporcional?, o ¿crees que sin mezclarlos podrías avanzar igual?

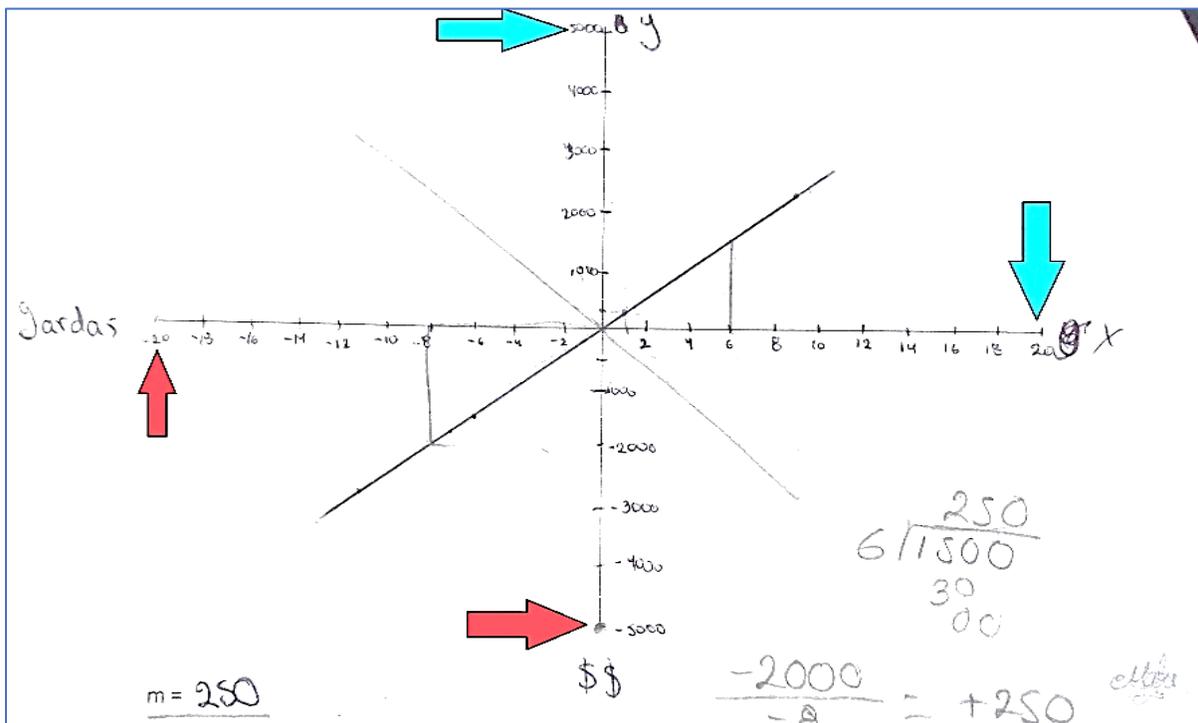
34. M: Sí, sí avanzaría más mezclándolos, porque al fin y al cabo es casi lo mismo, bueno lo mismo, o sea que pasa lo mismo en los dos cuadrantes.

34. O: Para M la proporcionalidad directa se presenta en dos cuadrantes del plano cartesiano.

E: Encontrarte con este tipo de problemas, los tres del cuestionario ¿te dio otra perspectiva de la proporcionalidad directa?, o ¿te quedaste con los mismos conceptos que antes de verlos?

35. M: Sí porque yo no sabía que también se usaba el tercer cuadrante, no me había dado cuenta, y ya comprendí por qué, porque los dos son negativos (señala los ejes del cuadrante inferior izquierdo del plano cartesiano), o los dos son positivos (señala los ejes del cuadrante superior derecho del plano cartesiano), o también lo de la constante que tienen la misma, entonces eso es algo que antes no sabía, no había intentado.

34. O: M retoma lo que realizó y observó en la entrevista para determinar las condiciones que debe cumplir una relación de variación directamente proporcional en un plano cartesiano, incluyendo a los números negativos como parte de esas condiciones.



3.2.2 Segunda parte de la entrevista

Como ya se mencionó anteriormente, esta parte hace referencia al aprendizaje que los alumnos entrevistados tuvieron durante su estancia en la secundaria, haciendo énfasis en la asignatura de matemáticas y los temas abordados en la primera parte de la entrevista, pero sin dejar de lado sus intereses respecto a cualquier asignatura, por la importancia que representa saber qué motiva a un alumno a aprender dentro de un aula.

A continuación, se presentan las observaciones más relevantes dadas por los cinco alumnos entrevistados en cada pregunta:

1. Durante los tres años que estuviste en secundaria, ¿qué es lo que más se te ha dificultado en la asignatura de matemáticas?

Lo más mencionado fue referente a problemas de geometría, probabilidad y álgebra; cabe mencionar que dentro de las dificultades en álgebra se repitió mucho el manejo de signos negativos.

2. ¿Qué es lo que más se te dificulta en ejercicios o problemas que se refieren a proporcionalidad directa?

En este caso, todos los estudiantes mencionaron que graficar en el plano cartesiano es la mayor dificultad a la que se enfrentan en este tipo de situaciones.

3. ¿Qué es lo que más se te dificulta en ejercicios o problemas que se refieren al uso de números negativos?

Para esta pregunta las respuestas se enfocaron en: colocar los signos al realizar operaciones, comprender el uso de la ley de los signos, el manejo de los paréntesis cuando se trata de una multiplicación, una adición o una sustracción, y la comprensión de los problemas que implican usar este tipo de números.

4. ¿Qué es lo que más se te facilita en el tema de proporcionalidad directa?

El llenado de tablas fue mencionado por todos los alumnos, también la obtención de la constante de proporcionalidad y determinar una expresión algebraica para representar dicha relación de proporcionalidad.

5. ¿Qué es lo que más se te facilita en el tema de números con signo?

La multiplicación y división de números con signo fue mencionada por todos los alumnos, al referir que es más fácil de entender y de aplicar que la adición o la sustracción.

3.2.3 Tercera parte de la entrevista

Las dificultades que un alumno de secundaria tiene que pasar para concluir sus estudios en este nivel, pensamos, es un factor de influencia para su aprendizaje, sus proyectos a futuro y su vida adulta, de tal manera, nos sensibilizamos hacia estas cuestiones, por lo que el objetivo de esta última parte fue **entender** a las personas que formaron parte de este estudio y tratar de observar su proceso educativo desde una misma perspectiva.

A continuación, se presentan las observaciones más relevantes dadas por los cinco alumnos entrevistados en cada pregunta:

1. ¿Cuáles son las dificultades que has tenido que atravesar para concluir tu educación secundaria?

Aquí se mencionaron la difícil convivencia con los compañeros, por ejemplo, una persona mencionó que cuando se sabe más que los demás en una clase, se corre el riesgo de ser acosada verbalmente, por lo que prefiere tener un perfil bajo; también se mencionó mucho los problemas que los alumnos tienen en casa, en su ambiente familiar; otro aspecto a destacar fue el no tener todas sus clases durante el ciclo escolar (esto por diversas cuestiones que se explican más adelante en la entrevista).

2. ¿Cuál es la percepción que tienes de la convivencia escolar dentro de esta escuela?

La convivencia, según la perspectiva de los entrevistados, es muy complicada; en palabras de los estudiantes: “no me siento seguro ni cómodo en la escuela”, “cualquier conflicto se soluciona con violencia”, “hay muchas peleas”, “el problema es que esa violencia ya se considera normal”, “es una colonia peligrosa”, “el nivel cultural es bajo”, “no hay educación de casa”, “hay problemas de adicciones”.

3. ¿Qué aspectos relacionados a la escuela crees que impiden que tengamos mejores resultados en cuanto a evaluaciones como COMIPEMS o en cuanto al desempeño académico de los alumnos?

Aquí se mencionó que a muchos alumnos no les interesa la escuela, que no tienen un proyecto de vida, que no tienen aspiraciones, que su mundo se limita a los vicios del lugar donde viven, y aunque hay quienes a pesar de que sí quieren estudiar a niveles educativos superiores, no tienen los medios para hacerlo. También, acerca de la educación que reciben, dijeron que varios maestros faltan mucho o no les interesa su trabajo, que no les importa que los estudiantes aprendan, además de asignaturas en las cuales no tuvieron docente durante una gran parte del ciclo escolar. Una tercera cuestión que se abordó es que el sistema educativo es permisivo, pues se prioriza la acreditación de todos los alumnos por encima del aprendizaje, entonces, todos los estudiantes aprueban, aunque no lo merezcan, y al presentar su examen de ingreso al nivel medio superior (examen COMIPEMS), no contestan bien porque no aprendieron.

4. ¿Qué es lo que más te gusta de tu escuela?

Mencionaron mucho que las amistades son algo que les agrada bastante de su escuela, además de los convivios que se realizan a lo largo del ciclo escolar, los espacios de uso común (patios y canchas), las personas dentro de la institución que son amables, y algunas asignaturas donde los maestros comprometidos con su labor que se preocupan porque el estudiante avance en su aprendizaje.

5. ¿Qué es lo que menos te gusta de tu escuela?

Los aspectos que se comentaron en esta pregunta fueron: los maestros que no se dedican a realizar su trabajo, lo poco que a los directivos les interesan los alumnos, la mala convivencia, la forma de enseñar de algunos profesores (clases solo teóricas, aburridas, poco dinámicas), aulas en malas condiciones, la violencia que se genera entre alumnos por cualquier motivo, que no se otorgan recursos didácticos y materiales a la escuela por parte del gobierno para que los alumnos aprendan, la falta total de computadoras e internet, que no haya consecuencias serias ante la indisciplina, por mencionar los más repetidos.

6. ¿Cuál es tu asignatura favorita?, ¿por qué?

La mayoría de los alumnos mencionaron matemáticas como su asignatura favorita; la razón fue por cómo enseña el profesor y el interés que pone en que sus estudiantes aprendan, que se ve que le gusta mucho su trabajo y que en su clase siempre se trabaja, además de que en esa clase se ponen a pensar y se cuestionan muchas cosas. Una persona mencionó química como su asignatura favorita, aunque mencionó que la maestra casi no enseña y que le gustaría que hubiera sido diferente.

7. ¿Cuál es la asignatura que menos te gusta?, ¿por qué?

La asignatura más mencionada fue historia, y las razones se deben a lo aburrido que es memorizar fechas, que el maestro no enseñaba mucho o que le interesaba más hablar de otras cosas que de la asignatura. Otras clases mencionadas fueron química, español e inglés, en las que se coincidió en el poco interés de los profesores, ya sea por impartir su clase o por innovar en ésta, además del nulo trabajo que en éstas se realizaba.

3.3 Análisis general del Estudio

3.3.1 Resultados y observaciones del primer cuestionario

El contenido de cada pregunta del primer cuestionario se encuentra detallado en el apéndice A de este escrito, por lo que en este apartado únicamente se hace referencia al número de preguntas y los resultados obtenidos. Si el lector quiere revisar tanto la redacción completa de la pregunta, como los resultados obtenidos por cada alumno en cada uno de los doce reactivos (apéndice C), puede remitirse a las páginas 141 y 157.

Las preguntas 2, 4 5 y 7 son las que los alumnos más contestaron correctamente. Respectivamente se refieren a: indicar entre dos números cuál es mayor, determinar el valor absoluto de un número, ordenar números con signo de menor a mayor, y resolver operaciones de números con signo que implican multiplicación y división.

Llama la atención que en las preguntas que se refieren a ordenar números e indicar cuál es el de mayor valor, los estudiantes recurrieron al uso de la recta numérica como un organizador de posiciones positivas y negativas que tenía al cero como punto de referencia. Para el caso de la resolución de operaciones, la correcta manipulación de valores con signo en multiplicación y división parece deberse al uso recurrente de la ley de los signos, ya que, aunque no hay evidencia escrita en los cuestionarios, al preguntarles a algunos alumnos sobre esto en entrevistas posteriores, su respuesta fue que habían utilizado dicha ley.

Las preguntas que mayormente fueron contestadas de forma errónea fueron la 6, 8 y 10, las cuales se refieren respectivamente a: resolver operaciones de números con signo que implican adición y sustracción, hallar el valor de una incógnita en una ecuación y representar en un plano cartesiano información proveniente de tablas, indicando además si existe o no proporcionalidad directa.

Se observó en los cuestionarios, que al tratarse de adiciones y sustracciones que además integraban paréntesis para cada número, algunos alumnos multiplicaban los tres signos que estaban

en la operación y también multiplicaban los valores absolutos, es decir, que el paréntesis los hizo pensar de forma automática que se trataba de una multiplicación (aunque no fuera así). Por mencionar dos ejemplos:

$$(+5) + (-2) = -10$$

$$(-6) - (+3) = +18$$

En otros casos, si se trataba de una adición sumaban ambos valores dentro de los paréntesis, si se trataba de una sustracción, restaban ambos valores dentro del paréntesis y para definir el signo del resultado, multiplicaban los signos dentro del paréntesis. Por ejemplo:

$$(-6) + (+3) = -9$$

$$(+4) - (-5) = -1$$

Al resolver las ecuaciones de primer grado que se les plantearon, el error observado que más destacó fue en los “despejes” (equilibrio de la igualdad) que realizaron los alumnos:

$$a + 18 = -3$$

$$a = +18 - 3$$

$$a = 15$$

$$\frac{72}{y} = -3$$

$$y = -3(72)$$

$$y = -216$$

$$-\frac{90}{k} = -6$$

$$-90 - 6 = k$$

$$-96 = k$$

En el primer ejemplo se nota que el alumno no considera que cuando se trata de una sustracción o una adición, al querer equilibrarse la igualdad, el valor 18 debiera quedar con signo negativo (es decir, $a = -18 - 3$). Para el segundo caso el estudiante sí considera que cuando se trata de una división, el equilibrio de la ecuación requiere de la operación contraria (multiplicación), sin embargo, ignora el despeje de la incógnita y solo manipula los números saltándose un paso en la resolución (debió quedar $72 = (-3)(y)$, para después llegar a $y = \frac{72}{-3}$). En la última situación el alumno decide pasar el valor -6 del otro lado de la igualdad, pero sin un equilibrio aparente que lo muestre con su signo opuesto, sino simplemente moverlo con todo y el signo negativo, ignorando el proceso que se sigue en este tipo de operaciones.

El error más común al graficar en el plano cartesiano información proveniente de tablas fue el establecimiento de la escala en los ejes, ya que, en algunos casos tomaron los valores de la tabla sin considerar si estaban en orden, es decir, después del cero aparecía 24 (que era el primer valor de la tabla), luego 2 (que era el segundo valor de la tabla), después 20, y así sucesivamente. Otra parte de los estudiantes sí los ordenó, pero mantuvo los mismos valores sin considerar la distancia entre ellos, es decir que, en la graduación de su eje, se leían los valores 1, 4, 8.5, 10, 11, 12, 15, 21.7, todos a la misma distancia respecto de su antecesor y su sucesor.

En las preguntas que los estudiantes mayormente no contestaron, destacan la 1, 11 y 12, que se refieren respectivamente a: determinar el simétrico de un número, expresar algebraicamente la información de una tabla que involucra proporcionalidad directa y representar gráficamente en el plano cartesiano una función lineal, determinando además el significado de cada elemento de dicha función.

En el caso del simétrico, la razón de no contestar puede deberse a que los alumnos no conocen ese concepto o que olvidaron a qué se refiere. Por otro lado, el no poder pasar de una representación tabular a una expresión algebraica y después a una representación gráfica, puede deberse al poco manejo que tienen de generalizaciones algebraicas, además de sus conocimientos previos al manipular funciones, haciéndose presente la problemática recurrente que los estudiantes de este nivel atraviesan al iniciar y avanzar en el estudio del álgebra, como lo evidencia Gallardo (1987) en su estudio sobre “Habilidades pre-algebraicas en los niños de menor rendimiento escolar”.

Con lo anterior, se pudo observar que los alumnos en general manejan mejor la proporcionalidad directa que los números con signo, a pesar de ello, un aspecto en el que algunos de ellos recurrentemente fallaron fue el uso del plano cartesiano; respecto a los ejercicios que involucran números con signo, los errores más cometidos se encuentran cuando se involucra una adición o una sustracción de valores, además de que en la multiplicación y división muestran una tendencia marcada al uso de la ley de los signos.

Se puede destacar también que, como se mencionó al inicio de este escrito, la enseñanza de la proporcionalidad es mucho más extensa que la de los números con signo en el nivel secundaria,

ya que los estudiantes que formaron parte del estudio mostraron más conocimiento al tratarse de relaciones proporcionales que del uso de números signados.

De manera general se pueden mencionar los aspectos más relevantes encontrados en este primer instrumento, los cuales se recolectaron buscando coincidencias entre varios casos, mismos que ayudaron a la elección de los alumnos que presentaron el segundo cuestionario; estos aspectos se enlistan a continuación:

Problemáticas recurrentes:

- ▶ No poder determinar el simétrico de un número.
- ▶ No colocar el signo al resultado cuando realizan operaciones básicas que involucran valores positivos y negativos.
- ▶ Cuando aparecen paréntesis en una operación, multiplicar valores a pesar de que se trate de una adición o una sustracción.
- ▶ Al tratar de hallar el valor de una incógnita en una ecuación, cambiar de manera arbitraria los signos en los despejes.
- ▶ Graficar erróneamente información proveniente de una tabla debido al incorrecto establecimiento de la escala.

Aciertos recurrentes:

- ▶ Atribuir el mayor valor entre dos números tomando como referencia el valor absoluto.
- ▶ Ordenar de menor a mayor un conjunto de números signados utilizando la recta numérica como apoyo.
- ▶ Resolver multiplicaciones o divisiones de números con signo.
- ▶ Completar una tabla que involucra proporcionalidad directa y hallar la constante de proporcionalidad.
- ▶ Determinar (los que sí contestaron) la expresión algebraica que representa una situación de proporcionalidad directa.

3.3.2 Resultados y observaciones del segundo cuestionario

Tanto el segundo cuestionario completo, como las tablas de resultados por reactivo, se encuentran en el apéndice B (página 147) y en el apéndice D (página 173) respectivamente, por lo que el lector puede remitirse a esas secciones si desea analizar más a detalle la información.

La primera parte de este cuestionario contiene 3 problemas que llevan a los alumnos a encontrar una relación proporcional, haciendo uso de valores negativos; se pide en cada problema construir una representación tabular, una representación gráfica y una expresión algebraica, además de obtener la constante de proporcionalidad (al construir la tabla) y la pendiente (en el caso de la representación gráfica); finalmente, se pregunta si es o no una relación de proporcionalidad.

La segunda parte del instrumento pide al estudiante conceptualizar, describir o determinar las condiciones necesarias y suficientes para que entre dos variables exista una relación de proporcionalidad.

Para la tercera sección, las preguntas se enfocan en la relación que los estudiantes encontraron entre la proporcionalidad y los números negativos, según los problemas que se les fueron presentando y los conceptos que construyeron durante la segunda parte de dicho cuestionario.

A continuación, se presentan las observaciones generales por pregunta que se hicieron basadas en las respuestas de los doce alumnos elegidos para este instrumento:

Pregunta 1. Para motivar al capitán de un equipo de futbol americano, el dueño le ofreció el siguiente trato: por cada 6 yardas ganadas en una jugada, le pagará 1500 dólares; de la misma manera por cada 6 yardas perdidas en una jugada, el dueño le quitará 1500 dólares a su pago. El jugador, después de pensarlo mucho, acepta.

a) Completa la siguiente tabla que contiene información respecto a las primeas ocho jugadas del primer juego de la temporada, y determina cuál es el valor de la constante de proporcionalidad.

- b) Grafica los datos obtenidos en el siguiente plano cartesiano y determina el valor de la pendiente.
- c) Determina la expresión general que permita obtener los dólares ganados o perdidos en función de las yardas.
- d) ¿Se trata de una relación de proporcionalidad directa? Justifica ampliamente tu respuesta.

En el problema anterior, todos los alumnos llenaron completamente la tabla, todos obtuvieron tanto la constante de proporcionalidad como la pendiente de la recta, la mayoría realizó correctamente la gráfica, poco más de la mitad obtuvo la expresión algebraica que relaciona ambas variables de la situación.

Todos los alumnos contestaron que la situación se trata de una relación de proporcionalidad directa, además de eso, la mayoría lo justificó recurriendo al plano cartesiano, al decir que se genera una línea recta que pasa por el cero.

Se puede destacar también que, de todos los alumnos, una sola persona colocó signo a los valores positivos de la tabla, la pendiente y la constante de proporcionalidad. Además de esto, ningún estudiante muestra el proceso que siguió para obtener la pendiente, tampoco hay evidencia en ningún caso de cómo fueron determinados los signos de los valores en la tabla.

Pregunta 2. Un banco en la ciudad de Torreón, con la intención de lograr que más clientes acepten usar tarjeta de crédito propone la siguiente promoción: al adquirir tu tarjeta, si al final de cada mes mantienes un saldo positivo, el banco te incrementará el 20% de lo que tengas; de la misma manera, si al finalizar el mes tienes un saldo negativo, el banco te cobrará lo que adeudes más un 20% de esa cantidad. Lucho obtuvo su tarjeta de crédito y la mantuvo por diez meses.

- a) Completa la tabla que contiene la información de los primeros diez meses del saldo con el que contaba Lucho y determina la constante de proporcionalidad.

- b) Grafica los datos obtenidos en el siguiente plano cartesiano y determina el valor de la pendiente.
- c) Determina la expresión general que permita obtener el saldo combinado con la promoción del banco en función del saldo al final del mes de la tarjeta de Lucho.
- d) ¿Se trata de una relación de proporcionalidad directa? Justifica ampliamente tu respuesta.

Para este segundo problema, la mayoría de los alumnos llenaron correctamente la tabla, obtuvieron la constante de proporcionalidad y la pendiente, además, también casi todos, realizaron de forma correcta la gráfica. En este caso, los estudiantes en su mayoría no pudieron obtener la expresión algebraica que relaciona las dos variables de la situación.

Todos los alumnos contestaron que se trataba de un problema de proporcionalidad directa, y al igual que en el anterior, la justificación estuvo basada mayormente en que, al graficar los datos en un plano cartesiano, se obtiene una línea recta que pasa por el cero.

Cabe destacar que, en el llenado de la tabla, la mitad de los alumnos no coloca los signos correspondientes a cada valor; además de eso, al graficar en el plano cartesiano, algunos estudiantes no colocaron signos en ningún semieje, sin embargo, construyeron una recta que pasa por el cero. En la construcción de la expresión algebraica (que es donde hubo más errores), se piensa que pudo dificultársele a los estudiantes, debido al uso de porcentajes en la redacción del problema. Tampoco aquí hay evidencias de cómo los alumnos determinaron la pendiente, ni de cómo asignaron (los que sí lo hicieron) los signos para cada valor en la tabla.

Pregunta 3. Hace 8 horas, un submarino nuclear clase Sierra se encontraba a 7200 metros bajo el nivel del mar; si su ascenso es constante y hace 3 horas se encontraba a 2700 metros bajo el nivel del mar, completa la tabla para determinar los valores faltantes respecto a los tiempos del submarino y la profundidad a la que se encontraba:

- a) Según la tabla anterior, determina la constante de proporcionalidad:

- b) Grafica los datos obtenidos en el siguiente plano cartesiano y determina el valor de la pendiente.
- c) Determina la expresión general que permita obtener los metros a los que se encuentra sumergido el submarino en función de las horas transcurridas.
- d) ¿Se trata de una relación de proporcionalidad directa? Justifica ampliamente tu respuesta.

Para el tercer problema, la mayoría de los alumnos llenaron correctamente la tabla, obtuvieron tanto la constante de proporcionalidad como la pendiente de la recta, además de que realizaron bien la gráfica en el plano cartesiano; la mayor parte de ellos también, obtuvieron la expresión algebraica que relaciona las dos variables de esta situación.

Al preguntarles si se trataba de una relación de proporcionalidad directa, la mayoría de los estudiantes dijo que sí, justificando su respuesta en el plano cartesiano (al igual que en los otros dos problemas), al decir que se observa una línea recta que pasa por el cero; dos personas contestaron que no, y las razones fueron:

- No, porque a pesar de que pasa por el cero, la recta se encuentra en un cuadrante con valores negativos en ambos semiejes.
- No, porque las horas aumentan y el nivel del mar disminuye.

En específico, en este problema que lleva a los estudiantes al manejo de valores negativos en ambas variables, se puede destacar que hubo quienes consideraron a la pendiente como negativa, otros consideraron a la constante de proporcionalidad también negativa; además, al realizar el plano cartesiano, en los doce casos fueron colocados los signos para cada semieje del cuadrante donde la recta apareció trazada, lo cual hace pensar que una situación que solo implica valores negativos de alguna manera “obliga” al estudiante a signar los semiejes del plano.

Pregunta 4. Escribe, describe o ejemplifica la definición que tengas de una relación de proporcionalidad directa.

Al tratar de definir una relación de variación directamente proporcional los estudiantes se basaron mayormente en que cuando ésta es graficada, se obtiene una línea recta que pasa por el cero, además de la obtención de la constante de proporcionalidad al dividir las parejas de valores correspondientes de las dos variables que se estén usando. Es decir, que se apoyan mayormente en un sistema de referencia para justificar el concepto de proporcionalidad directa.

Pregunta 5. ¿Qué características debe tener una relación entre dos variables para considerarse que es del tipo proporcionalidad directa?

Cuando los alumnos trataron de determinar las características que se encuentran inmersas en una variación directamente proporcional, una mayor parte se volvió a basar en cómo se observa una relación de este tipo cuando se grafica, es decir, una línea recta que pasa por el cero; otra parte hizo la observación de que al dividir las parejas de valores correspondientes en ambas variables, se obtiene una constante de proporcionalidad; además hubo estudiantes que mencionaron un aumento o disminución proporcional entre las variables, aunque no especificaron más. Nuevamente se observa que los alumnos recurren a un sistema de referencia para explicar la relación de proporcionalidad sobre la cual se les está cuestionando.

Pregunta 6. ¿Cómo puedes determinar, en una tabla, que entre las dos variables existe una relación de proporcionalidad directa? Justifica tu respuesta.

En este caso, casi todos los estudiantes contestaron que, al dividir las parejas de valores correspondientes, se obtiene una constante de proporcionalidad, lo cual indica que hay variación directamente proporcional; los que contestaron distinto, solo mencionaron un incremento constante en las variables. Siguiendo las ideas de Vergnaud, se puede ver que los alumnos recurrieron a la obtención de un operador horizontal para completar la tabla.

Pregunta 7. ¿Cómo puedes determinar, en un plano cartesiano, que entre las dos variables existe una relación de proporcionalidad directa? Justifica tu respuesta.

La mayoría de los estudiantes contestó que en la gráfica se debe observar una línea recta que pasa por el cero; otras respuestas mencionaron que se observa una línea recta solamente sin dar mayores detalles.

Pregunta 8. ¿Cómo puedes determinar en una expresión algebraica del tipo $Y = mx + b$, que existe una relación de proporcionalidad directa? Justifica tu respuesta.

Para este caso, varios alumnos no contestaron, los que lo hicieron, refirieron que la “constante b” indica el punto de corte de un eje del plano cartesiano, y que para que sea variación directamente proporcional, ese punto de corte debe ser igual a cero, es decir, $Y = mx + 0$, ó $Y = mx$.

Pregunta 9. Respecto a los valores negativos que aparecieron en cada situación que resolviste, y basándote en tus respuestas anteriores:

Inciso 9a) ¿Cómo relacionas ese tipo de números con la proporcionalidad directa?

En este inciso, las respuestas más relevantes fueron las siguientes:

- También hay valores negativos que son proporcionales.
- La recta de proporcionalidad directa se puede prolongar hacia un cuadrante con valores únicamente negativos.
- Los números negativos pueden representar adeudos en un problema de proporcionalidad.
- Los valores negativos pueden disminuir proporcionalmente.
- Ambos valores deben ser negativos para que exista proporcionalidad directa.
- Al dividir dos valores negativos, da una constante de proporcionalidad positiva.
- La recta con valores negativos que es directamente proporcional también corta en el cero.
- Las dos variables deben ser negativas o positivas al mismo tiempo.
- Se comportan igual los números negativos en el plano cartesiano respecto de una variación directamente proporcional.

Inciso 9b) ¿Crees que son parte de este tipo de proporcionalidad según tu definición? Justifica tu respuesta.

Para este inciso, dos estudiantes contestaron que los números negativos no forman parte de la proporcionalidad, pero no justificaron el por qué. Para el caso de quienes sí los consideraron como parte de la proporcionalidad directa, las respuestas más relevantes fueron las siguientes:

- Sí, porque se pueden representar como adeudos o pérdidas.
- Sí, porque en el plano cartesiano se comportan como los positivos respecto a una variación directamente proporcional.
- Sí, solo que utilizan un cuadrante distinto en el plano cartesiano cuando la recta se prolonga.
- Sí, aunque depende del problema que se haya planteado.
- Sí, porque al dividir dos valores negativos también se obtiene una constante de proporcionalidad positiva.

Inciso 9c) ¿Has visto alguna vez durante tu paso por la secundaria problemas de proporcionalidad directa que hagan uso de números negativos?

Para este último inciso, los estudiantes dividieron la respuesta, la mitad dijo sí haber resuelto problemas de este tipo durante la secundaria, y la otra mitad respondió que no. A este respecto, en sus cuadernos de matemáticas de tercer grado y en entrevista con profesores de esta asignatura, no hay evidencia de que este tipo de situaciones hayan sido proporcionadas a los alumnos.

En este segundo cuestionario se observó, de manera general, que los estudiantes basan su concepción de una relación de proporcionalidad en las características de la gráfica del plano cartesiano y en la obtención de la constante de proporcionalidad, las cuales son condiciones suficientes y necesarias para definir este tipo de relación. El tercer problema de dicho instrumento fue el que más respuestas variadas dio, debido a que solo utiliza valores negativos tanto en la tabla como en el plano cartesiano. Se hace notar aquí también que, en la mayoría de los casos, el manejo de la proporcionalidad a nivel secundaria es muy adecuado, no así en el manejo de números con

signo. También aquí se repite la tendencia de los alumnos a utilizar la ley de los signos para operar estos valores.

Continuando con los números negativos, si bien los estudiantes muestran un conocimiento limitado de éstos, a pesar de ello, las relaciones que hacen entre proporcionalidad y negativos son muy interesantes y profundas, primero, porque extienden su conocimiento de proporcionalidad hacia otro tema, el de los números enteros, además de que justifican su aparición basados en las condiciones suficientes y necesarias que las relaciones directamente proporcionales deben tener.

3.3.3 Observaciones generales de la entrevista

Con respecto a la entrevista, en los dos casos de los cuales se transcribieron de forma completa las respuestas de la primera parte de ésta, es notorio que los dos estudiantes manipulan correctamente los números con signo en las cuatro operaciones básicas y que conocen los conceptos que se manejan en el nivel secundaria respecto a este tipo de valores; además, tienen un buen manejo de la proporcionalidad, puesto que pueden explicarla y justificarla de distintas maneras: ya sea mediante una tabla de correspondencia o una gráfica en el plano cartesiano, razón por la cual fueron elegidos para profundizar en sus respuestas y darle más claridad a este estudio.

De lo anterior, lo más interesante es que, basado en las respuestas que se obtuvieron de ellos, se puede afirmar que, al tener conceptos bien fundamentados de un tema en específico, pudieron extender ese conocimiento hacia el estudio de los negativos, ya que se dieron cuenta, ambos, que las relaciones de proporcionalidad directa contienen valores negativos y que en ciertas situaciones son útiles para explicar los resultados de dichas situaciones.

También es relevante mencionar el proceso que ambos entrevistados siguen para poder aceptar la aparición de los números negativos, quienes comenzaron justificando su existencia con situaciones cotidianas como las deudas o los años a través de la historia (antes de Cristo y después de Cristo), que después de eso, recurrieron a un sistema de referencia para darles forma y sentido a sus explicaciones: primero, para operaciones y situaciones sencillas de una sola variable, recurrieron al uso de la recta numérica para ubicar adiciones y sustracciones de este tipo de valores,

después, cuando la situación se tornó más compleja (cuando se agregó una variable más), utilizaron tablas de correspondencia y planos cartesianos para describir su comportamiento; finalmente al tratar de integrar la proporcionalidad con números signados (positivos y negativos), el proceso se dio de una forma gradual y natural, mostrando los alumnos que los negativos son parte de este tipo de relación; más aún, cuando los estudiantes cayeron en contradicción, recurrieron a las definiciones básicas que tienen de proporcionalidad para ellos mismos darse cuenta cómo se comportan los valores negativos en estas relaciones de variación directa.

Las respuestas de los alumnos muestran un punto clave del cual se hace referencia en el apartado teórico de este documento: se trata de la constante de proporcionalidad, la cual es usada primero, para determinar los valores faltantes de una tabla de correspondencia, y segundo, para justificar la aparición de números negativos en una relación de proporcionalidad, ya que, como ellos mencionan, cuando divides una pareja de valores, ambos positivos o ambos negativos, obtienes un valor positivo, y si se aplica eso a una relación de proporcionalidad, se encuentra que al tener pares de valores con el mismo signo, el resultado es la misma constante de proporcionalidad para todos (sean dos positivos o dos negativos).

Indagando un poco más en la constante de proporcionalidad explicada por los estudiantes, se puede notar cómo encuentran relación de ésta con la pendiente en el plano cartesiano, con la cual ocurre lo mismo al dividir parejas de valores ordenados, además de que se dan cuenta que la pendiente (o constante de proporcionalidad) siempre debe ser positiva en una variación directamente proporcional, por lo que, siempre pasará por los mismos dos cuadrantes del plano, cuadrantes que tienen la peculiaridad de tener cada uno, ambos semiejes con el mismo signo (ya sean positivos o negativos).

Lo más importante que se debe mencionar aquí es que ambos alumnos aceptan y reconocen que la proporcionalidad está presente en valores negativos (o viceversa), ellos mismos se dan cuenta que “pensando más allá” de lo convencional o lo que siempre se enseña en la escuela, pueden llegar a resultados más complejos e interesantes. Un alumno comenta: “no sabía que se usaba el tercer cuadrante, no me había dado cuenta, y ya comprendí por qué... es algo que antes no sabía, [que] no había intentado”, lo cual muestra la relevancia que este tipo de investigaciones tiene,

puesto que la perspectiva de un estudiante puede cambiar y ampliarse si se sigue el camino adecuado, que en este caso se enfocó en mostrar cómo puede acrecentarse el aprendizaje, conocimiento y manipulación de los números negativos usando de base un tema que ellos manejan y comprenden (la proporcionalidad).

Hablando de los cinco estudiantes entrevistados, y retomando la relevancia que este estudio le dio a la perspectiva de los participantes, se puede mencionar lo siguiente: en las dos últimas partes de la entrevista los alumnos dejaron ver que la zona marginal a la cual pertenece la institución sí obstaculiza de alguna manera su avance en la escuela, por el hecho de no sentirse seguros o tranquilos debido al nivel de violencia que se vive día a día, la complicada convivencia con los compañeros, los recurrentes problemas familiares, además de las carencias que su escuela muestra, no solo estructurales sino de personal.

Es importante hacer ver que, de los alumnos a los que se les hizo la entrevista, todos hicieron ver que los profesores son parte importante tanto del proceso de enseñanza, como de las problemáticas que forman parte de su paso por la escuela: por un lado mencionaron a los docentes que no se comprometen con su labor, que no dedican el tiempo de clase a enseñar y que les gustaría tener más atención de ellos en ese sentido; por otro lado es notorio que, cuando los alumnos son apreciados dentro del aula, que se les considera, que se les trata de enseñar, responden muy bien y avanzan mucho en su aprendizaje. Esto se pudo ver en todos los instrumentos realizados con ellos durante el estudio, más aún en la entrevista, en la que la mayoría mencionó a matemáticas como su asignatura favorita por diversos factores que van desde el estímulo del maestro, hasta los retos a los que se han enfrentado en esa asignatura.

Con lo anterior se intenta decir, que no importa el contenido o tema que se trate o del cual se quiera innovar, en una zona difícil como en la que se encuentra la escuela visitada para realizar este estudio, el profesor tiene que dar un esfuerzo extra si quiere conseguir que alumnos de estas características aprendan y trasciendan académicamente, ya que el docente es un factor de cambio fundamental para bien o para mal.

CONSIDERACIONES

FINALES

En esta investigación se considera de vital importancia que el estudio de la historia de los números negativos debiera estar ligado con su aprendizaje para la mejor aceptación y comprensión de éstos, no solo como una imposición académica que obliga a los estudiantes a operar con números que aparecen de repente y cuyas operaciones básicas se enseñan de una forma mecánica y sin un sentido específico; por citar un ejemplo:

En la entrevista se hizo recurrente el uso de la ley de los signos para resolver operaciones, y al cuestionar directamente a los alumnos si había otro camino para resolverlas, aseguraron que no, o que no conocían otro, inclusive uno de ellos trató de inventar una nueva forma de resolución que cayó en la imitación de la ley de los signos, pero con algunas modificaciones.

También se debe hacer notorio que la limitada enseñanza de los números negativos advierte de las posibles futuras dificultades ante las que muchos alumnos se encontrarán al ingresar a niveles de educación superiores (por ejemplo, en áreas de estudio tales como el álgebra) si su comprensión no ha sido asimilada.

Por consiguiente, y basado en los resultados obtenidos tanto en el primer y segundo cuestionario, como en las entrevistas individuales realizadas a los estudiantes, se proponen algunos puntos clave para tener en cuenta en la enseñanza y en el estudio a nivel de educación básica de los números negativos:

- Visión de los números enteros desde un contexto histórico para su mejor comprensión y aceptación.
- Profundizar en el uso de la recta numérica y el plano cartesiano como herramientas para construir conceptos relativos a números con signo.
- Verdadero entendimiento en sustitución de la memorización de reglas establecidas para operar con números enteros.
- Variedad en el tipo de situaciones problema que se les plantean a los alumnos y que involucran números signados.

A este respecto, el aprendizaje de los números negativos pudiera seguir el mismo proceso que ha seguido el de la proporcionalidad, cuyos conceptos son introducidos desde edades escolares muy tempranas, no con todo el rigor matemático posible (en el caso de los primeros), sino con ideas básicas para iniciar a los alumnos en la comprensión y aceptación de su estatus como números, ya que, como se mostró en este estudio, los conceptos de proporcionalidad son mejor manejados por los estudiantes que los conceptos de números signados, y esto parece deberse a la extensión y tratamiento que se le da a cada área de estudio, siendo mucho mayor la de la proporcionalidad.

Con respecto a la visión de los alumnos mostrada en las entrevistas realizadas, y haciendo consideraciones respecto a la situación educativa en la que se encuentran (zona en que se ubica la escuela, familias de las que provienen, aspiraciones que tienen, dificultades cotidianas, etc.), Gallardo (1987) menciona que “es necesario considerar la interacción del alumno con su medio social y las repercusiones de ello en su labor escolar”, lo cual da muestra de la relevancia que tiene la historia de vida de cada uno de ellos y su inclusión en la sociedad, es decir, que el aprendizaje no se reduce simplemente al salón de clases.

En palabras de los estudiantes de esta investigación, el sistema educativo muestra carencias, por lo que el esfuerzo principal debe enfocarse en brindarles las oportunidades necesarias para que ellos aprendan, además de eso, en zonas marginales como ésta en la que se realizó el estudio, el reto es doble, se debe convencer no solo a los alumnos, sino a profesores y a la comunidad en general que si no hay apoyo de todos los involucrados, los resultados siempre serán contraproducentes; a pesar de estos obstáculos, esta investigación muestra cómo se puede empezar a revertir la tendencia al fracaso y al abandono escolar con una idea tan sencilla como: preocuparse e interesarse por los estudiantes y su aprendizaje sin olvidar que son personas, no máquinas y que gran parte de la adquisición de conocimiento dentro del aula comienza con la curiosidad y el reto.

Se tienen entonces, a partir de todo el análisis general de resultados, elementos para responder a las preguntas de esta investigación (mismas que se plantearon al inicio de esta tesis) de la siguiente manera:

¿Cómo justifican los alumnos de tercer grado de secundaria la integración de números negativos en situaciones de proporcionalidad directa?

Basado en las respuestas de los instrumentos utilizados en este estudio, para los estudiantes, la proporcionalidad directa implica parejas de valores que aumentan o disminuyen proporcionalmente, esas parejas al dividirse entre sí dan como resultado una constante, además de que, al graficarlas en el plano cartesiano, representan una línea recta que pasa por el cero. Con lo anterior y tomando como referencia los tres problemas del segundo cuestionario junto con las entrevistas, ellos integraron los números negativos, primero estableciendo que la situación a resolver debía implicar el uso de estos valores haciendo alusión a cuestiones cotidianas como las pérdidas, las deudas o el tiempo pasado, y después aseverando que también entre valores negativos se puede establecer un crecimiento o decrecimiento proporcional, además de que al unirlos con los positivos, se comportan de la misma manera en cuanto a relaciones de proporcionalidad se refiere. En otras palabras, los estudiantes no negaron a los negativos como parte de la proporcionalidad, sino que justificaron su aparición basándose en conocimientos previos y la extensión de su

definición de proporcionalidad que hasta el momento para ellos solo se refería a números positivos.

¿De qué manera llevan a cabo los estudiantes de tercer grado de secundaria la manipulación de los números negativos dentro de la proporcionalidad?

Durante la resolución de problemas de proporcionalidad que implicaron el uso de números negativos, los alumnos mostraron que cuando se dividen parejas de valores positivos y cuando se dividen parejas de valores negativos, resulta el mismo valor positivo, esto relacionado a la obtención de la constante para mostrar que hay proporcionalidad. Otra manera muy recurrente de mostrar cómo están relacionados los números positivos con la proporcionalidad, fue la utilización del plano cartesiano, pues mostraron que, si la recta de valores únicamente positivos que pasa por el cero se prolonga hacia otro cuadrante, que se caracteriza por tener dos semiejes negativos, se sigue tratando de la misma recta y por lo tanto de la misma proporcionalidad tanto para positivos como para negativos. Mostraron también que para que la proporcionalidad directa se mantenga, las parejas de valores deben ser ambas positivas o ambas negativas.

Perspectivas

Este estudio se realizó tomando en consideración el poco tiempo que se da para el aprendizaje de los números enteros en la educación secundaria en México; durante el proceso se encontró que hay formas de extender su enseñanza sin dejar de lado otros temas, de lo cual, se desprenden las siguientes ideas que pueden servir como guía para futuras investigaciones:

La proporcionalidad permite tener un sistema de referencia para profundizar en el aprendizaje de los números con signo, y de manera recíproca, el uso de los números con signo dentro de la proporcionalidad permite enriquecer el aprendizaje de la constante de proporcionalidad, además de su relación con la pendiente de una recta, que, al ser extendido el estudio de dichas rectas, puede mostrar el aspecto negativo de éstas.

Las tablas de correspondencia permiten a los estudiantes visualizar de forma clara muchas de las relaciones que existen entre los números negativos y la proporcionalidad, por lo que su uso siempre debe ser considerado cuando se quiera integrar ambos temas, y debe también reconocerse como punto clave su uso como herramienta en la conceptualización de la constante de proporcionalidad, el factor interno y los problemas multiplicativos.

El plano cartesiano es una poderosa herramienta de representación gráfica y debiera ser profundizado su uso en relación con los números negativos, ya que, como se mostró en este estudio, su uso es muy recurrente para tratar de justificar o explicar las ideas o conceptos que los alumnos desarrollaron; a pesar de esto, su manipulación se llegó a ver limitada y en ocasiones incorrecta, por lo cual se puede apreciar que esto podría ser una problemática recurrente al integrar ambos temas en el aprendizaje de los alumnos.

El contexto histórico y cotidiano tiene una fuerte esencia en las explicaciones que dieron los alumnos entrevistados respecto de la aparición o existencia de los números negativos (a pesar de ser solo nociones e ideas), hecho por el cual, se sugiere continuar con trabajos como el que ha desarrollado Gallardo por muchos años, ampliando así las fuentes de consulta respecto de un tema tan relevante como lo es la aceptación de los números negativos, su elevación a estatus de número, así como el tratamiento operativo que se les da.

De manera concreta, también en este estudio se hizo ver que el aprendizaje de los números enteros está muy ligado a su manipulación haciendo uso de la ley de los signos, por lo que se podría partir de la premisa de que es necesario abordarlos desde otros caminos y otros enfoques que hagan olvidar la mencionada ley, sustituyéndola por verdadera comprensión de los negativos, teniendo en cuenta que hay que ser muy cautos en su enseñanza.

REFERENCIAS

Arriaga, A. y Benítez, M. (2012). *Matemáticas 1 por competencias* (p. 227). México: Pearson.

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, N. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: SM de ediciones S.A. de C.V., Somos Maestr@s. Enseñar y aprender, 128pp.

Block, D. y García, S. (2017). *Conect@ Estrategias. Matemáticas 1* (p. 233). México: Ediciones SM.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. (pp. 163 – 166 y pp. 331 – 335). Madrid: Editorial La Muralla.

Corbin, J. y Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research. Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (p. 3). United States of America: Sage.

Escareño, F. y López O. (2015). *Matemáticas 2* (p. 23). México: Editorial Trillas.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of Mathematical Structures. Negative Numbers and Directed Magnitudes*. (p. 432). Mathematics Education Library.

Gallardo, A. (1987). *Habilidades pre-algebraicas en los niños de menor rendimiento escolar*. Tesis de Maestría en Ciencias. México: CINVESTAV – IPN.

Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis Doctoral. México: CINVESTAV – IPN.

Gallardo, A. y Velázquez, E. (2011). Los positivos y negativos como medio de organización de familias de rectas en el plano. *Revista Números*, vol. 78, noviembre de 2011, pp. 47 – 71.

Kant, E. (1992). *Ensayo para introducir las magnitudes negativas en la filosofía*. En Kant E. Opúsculos de filosofía natural. Madrid: Alianza.

- Rodríguez, G., Gil J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. (p. 62 y pp. 91 - 92). Málaga: Ediciones Aljibe.
- Saavedra, G. (2017). *Surgimiento de la negatividad en los números racionales*. Tesis Doctoral. México: CINVESTAV – IPN.
- Sánchez, E., Hoyos, V., Sáiz, M. y Guzmán, J. (2012). *Matemáticas I*. (p. 239). México: Grupo Editorial Patria.
- Sanchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 16, núm. 1, 2013, pp. 65 - 97.
- SEP (2011). Programa de Estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.
- SEP (2018). PLANEA en educación básica. Plan Nacional Para la Evaluación de los aprendizajes. Recuperado de <http://planea.sep.gob.mx/ba/>
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. (pp. 63 - 65). Madrid: Ediciones Morata, S. L.
- Torres, F. (2008). *La sustracción en recta numérica versus los números negativos: un estudio de caso en el nivel secundaria desde una perspectiva integral*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.
- Velázquez (2009). El plano cartesiano como un organizador fenomenológico en la adición, sustracción, multiplicación y división de números enteros. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. (Capítulo 1 y Capítulo 11). México: Editorial Trillas.

Woods P. (1987). *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa.* (pp. 77-78). España: Ediciones Paidós Ibérica.

APÉNDICES

Apéndice A. Primer cuestionario

Se muestra a continuación el instrumento que los alumnos tuvieron en sus manos para que el lector observe a detalle qué conceptos estuvieron involucrados, así como la forma de presentarlos. Este primer cuestionario es de carácter operativo y retoma contenidos que se abordan en el programa de estudio de matemáticas a nivel secundaria.

CUESTIONARIO DE EJERCICIOS REFERENTES A NÚMEROS NEGATIVOS Y A PROPORCIONALIDAD

NOMBRE: _____ EDAD: _____ GÉNERO: _____ GRADO: _____

POR FAVOR RESPONDE LOS SIGUIENTES REACTIVOS, UTILIZA BOLÍGRAFO, NO TACHES NI BORRES NADA DE LO QUE ESCRIBAS, SI NECESITAS ESPACIO PUEDES UTILIZAR HOJAS EXTRA. NO ESTÁ PERMITIDO EL USO DE CALCULADORA. PUEDES UTILIZAR REGLA DE SER NECESARIO.

<p>1. Anota el simétrico de cada valor:</p> <p>16 _____</p> <p>+80 _____</p> <p>-7 _____</p> <p>-100 _____</p> <p>13 _____</p>	<p>2. Indica cuál de los dos valores es mayor en cada caso:</p> <p>+12 _____ +15</p> <p>-8 _____ +8</p> <p>0 _____ -4</p> <p>5 _____ 0</p> <p>-13 _____ +11</p> <p>-6 _____ -9</p> <p>+20 _____ -40</p>
<p>3. Completa las siguientes igualdades:</p> <p>7 _____ = 0</p> <p>-9 _____ = 0</p> <p>x _____ = 0</p> <p>-a _____ = 0</p>	<p>4. Anota el valor absoluto en cada caso:</p> <p>$-11 =$ _____</p> <p>$+5 =$ _____</p> <p>$+8 =$ _____</p> <p>$-70 =$ _____</p> <p>$19 =$ _____</p>
<p>5. Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos de números:</p> <p>19, -1, -18, 17, -16, -29, 0, 32</p> <p>93, -76, -89, 56, -81, +12</p>	<p>6. Resuelve las siguientes operaciones:</p> <p>$(+5) + (-2) =$</p> <p>$(-6) + (+3) =$</p> <p>$(-7) + (-4) =$</p> <p>$(+8) + (+14) =$</p> <p>$(-9) + (+9) =$</p> <p>$(+4) - (-5) =$</p> <p>$(+3) - (+4) =$</p> <p>$(-6) - (+3) =$</p> <p>$(+7) - (-1) =$</p> <p>$(-9) - (+9) =$</p>

7. Resuelve las siguientes operaciones:

$$(+8) (+9) =$$

$$(-5) (+4) =$$

$$(-2) (-12) =$$

$$(9) (-7) =$$

$$(-21) \div (+3) =$$

$$(45) \div (-9) =$$

$$(-50) \div (-50) =$$

$$(-56) \div (+14) =$$

8. Halla el valor de cada incógnita:

$$x - 12 = -1$$

$$a + 18 = -3$$

$$9 - (-r) = 7$$

$$21 + (-h) = -4$$

$$\frac{-27}{f} = 9$$

$$\frac{x}{y} = -7$$

$$\frac{-8}{72} = -3$$

$$\frac{y}{k} = -6$$

$$\frac{-90}{k} = -6$$

9. Completa las tablas y determina la constante de proporcionalidad en cada caso:

Litros de gasolina	Kilómetros recorridos
1	
2	
3	
4	
5	75
6	
7	
8	

Altura de una vela	Horas encendida
12 cm	
1 cm	
10 cm	
15 cm	30
11 cm	
4 cm	
8.5 cm	
21.7 cm	

10. Grafica las dos situaciones anteriores y determina de qué tipo de variación se trata. Determina además la pendiente en cada caso haciendo uso del gráfico.



11. Escribe la expresión algebraica para cada uno de los dos casos anteriores que permita determinar cualquier valor de la tabla (en el primer caso, los kilómetros recorridos y en el segundo, las horas que la vela se mantiene encendida).

12. Realiza la gráfica de la siguiente función: $Y = 2x + 8$. Indica además qué significado tienen tanto el 2 como el 8 en la gráfica. Si la recuerdas, escribe la generalización de una función lineal. Determina también si se trata o no de una variación directamente proporcional y justifica tu respuesta.



Apéndice B. Segundo cuestionario

En este segundo instrumento interesa mostrar al lector cómo se estructuraron los problemas y las preguntas planteadas a los alumnos, comenzando con dos situaciones de proporcionalidad directa que gráficamente ocupan dos cuadrantes del plano cartesiano, después un caso que se representa únicamente en un cuadrante cuyos semiejes son ambos negativos, para finalmente pedirles que, a partir de lo que realizaron y de sus conocimientos previos, conceptualizaran la proporcionalidad directa involucrando números negativos.

NOMBRE: _____ EDAD: _____ GÉNERO: _____ GRADO: _____

Instrucciones: Resuelve lo que se te pide en las siguientes situaciones. En cada caso que lo requiera escribe y explica ampliamente cómo llegaste a tu conclusión. Por favor utiliza bolígrafo y no borres ni taches nada de lo que escribas. No está permitido el uso de calculadora. Puedes utilizar regla u hojas extra si así lo requieres.

1. Para motivar al capitán de un equipo de futbol americano, el dueño le ofreció el siguiente trato: por cada 6 yardas ganadas en una jugada, le pagará 1500 dólares; de la misma manera por cada 6 yardas perdidas en una jugada, el dueño le quitará 1500 dólares a su pago. El jugador, después de pensarlo mucho, acepta.

a) Completa la siguiente tabla que contiene información respecto a las primeras ocho jugadas del primer juego de la temporada, y determina cuál es el valor de la constante de proporcionalidad.

Yardas	Dólares
-11	
	+6250
-6	-1500
+9	
+1	
-7	
	+11,250
	-7500

K =

b) Grafica los datos obtenidos en el siguiente plano cartesiano y determina el valor de la pendiente.



m =

c) Determina la expresión general que permita obtener los dólares ganados o perdidos en función de las yardas.

d) ¿Se trata de una relación de proporcionalidad directa? Justifica ampliamente tu respuesta.

e) ¿Cuánto dinero ganó o perdió al final de la serie de ocho jugadas?

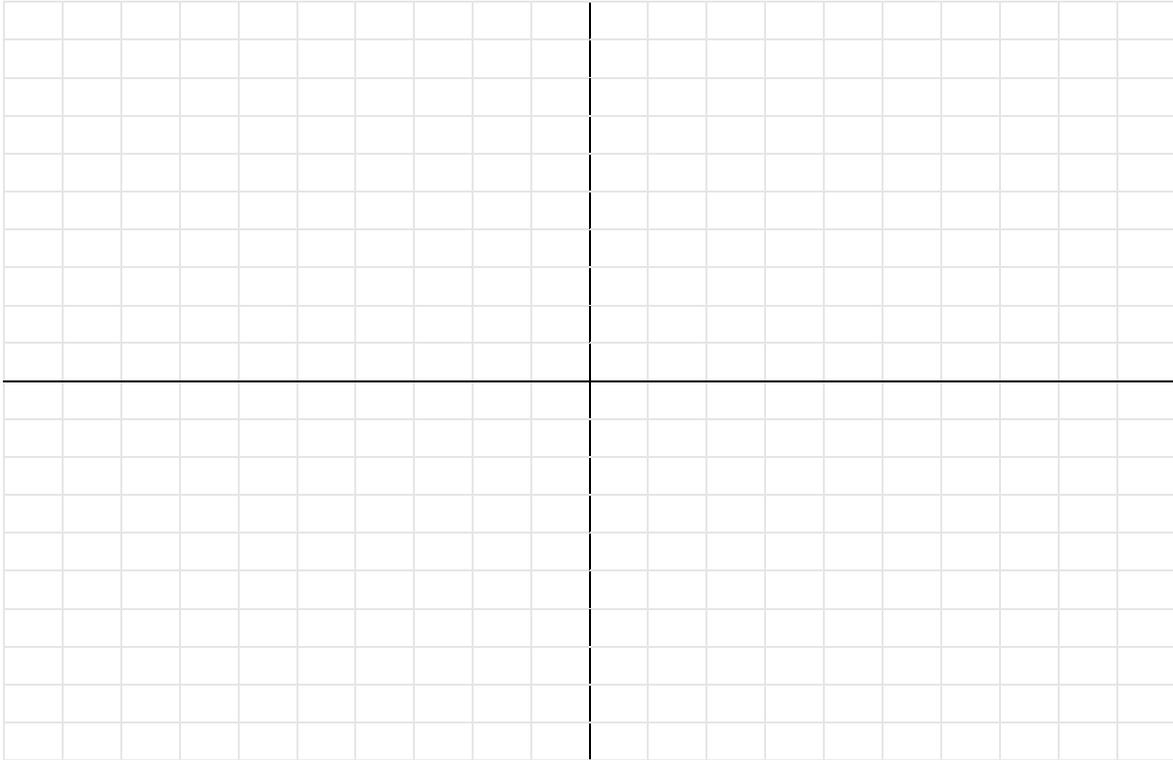
2. Un banco en la ciudad de Torreón, con la intención de lograr que más clientes acepten usar tarjeta de crédito propone la siguiente promoción: al adquirir tu tarjeta, si al final de cada mes mantienes un saldo positivo, el banco te incrementará el 20% de lo que tengas; de la misma manera, si al finalizar el mes tienes un saldo negativo, el banco te cobrará lo que adeudes más un 20% de esa cantidad. Lucho obtuvo su tarjeta de crédito y la mantuvo por diez meses.

a) Completa la tabla que contiene la información de los primeros diez meses del saldo con el que contaba Lucho y determina la constante de proporcionalidad.

Saldo al final de mes de la tarjeta de Lucho	Saldo combinado con la promoción del banco
+\$100	
-\$600	
+\$550	
-\$200	
+\$375	+\$450
-\$300	
	+\$840
-\$400	-\$480
	+\$1200
-\$1000	

K =

b) Grafica los datos obtenidos en el siguiente plano cartesiano y determina el valor de la pendiente.



m =

c) Determina la expresión general que permita obtener el saldo combinado con la promoción del banco en función del saldo al final del mes de la tarjeta de Lucho.

d) ¿Se trata de una relación de proporcionalidad directa? Justifica ampliamente tu respuesta.

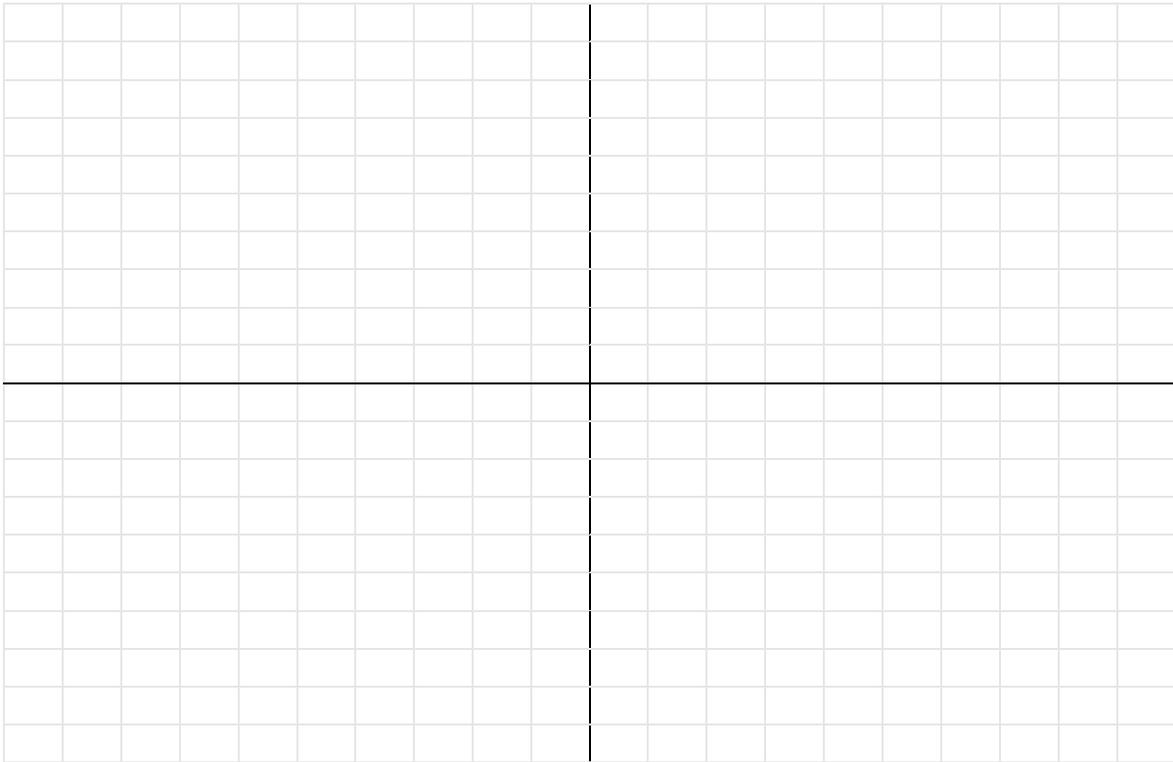
e) Si se hace un balance de los diez meses, ¿Lucho le quedó a deber dinero al banco?

3. Hace 8 horas, un submarino nuclear clase Sierra se encontraba a 7200 metros bajo el nivel del mar; si su ascenso es constante y hace 3 horas se encontraba a 2700 metros bajo el nivel del mar, completa la tabla para determinar los valores faltantes respecto a los tiempos del submarino y la profundidad a la que se encontraba:

Horas	Metros
-8	
-7	
-6	
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	

a) Según la tabla anterior, determina la constante de proporcionalidad:

b) Grafica los datos obtenidos en el siguiente plano cartesiano y determina el valor de la pendiente.



m =

c) Determina la expresión general que permita obtener los metros a los que se encuentra sumergido el submarino en función de las horas transcurridas.

d) ¿Se trata de una relación de proporcionalidad directa? Justifica ampliamente tu respuesta.

4. Escribe, describe o ejemplifica la definición que tengas de una relación de proporcionalidad directa.

5. ¿Qué características debe tener una relación entre dos variables para considerarse que es del tipo proporcionalidad directa?

6. ¿Cómo puedes determinar, en una tabla, que entre las dos variables existe una relación de proporcionalidad directa? Justifica tu respuesta.

7. ¿Cómo puedes determinar, en un plano cartesiano, que entre las dos variables existe una relación de proporcionalidad directa? Justifica tu respuesta.

8. ¿Cómo puedes determinar en una expresión algebraica del tipo $Y = mx + b$, que existe una relación de proporcionalidad directa? Justifica tu respuesta.

9. Respecto a los valores negativos que aparecieron en cada situación que resolviste, y basándote en tus respuestas anteriores:

a) ¿Cómo relacionas ese tipo de números con la proporcionalidad directa?

b) ¿Crees que son parte de este tipo de proporcionalidad según tu definición? Justifica tu respuesta.

c) Has visto alguna vez durante tu paso por la secundaria problemas de proporcionalidad directa que hagan uso de números negativos?

Apéndice C. Tablas de resultados primer cuestionario

Se muestra a continuación un concentrado por pregunta de las respuestas que dieron en cada reactivo del primer cuestionario los 30 alumnos de tercer grado a los cuales se les pidió resolverlo.

En cada una de las siguientes tablas no se escribe la pregunta completa, únicamente el número y una descripción breve de a cuál se refiere; si el lector quiere ver la pregunta completa, puede remitirse al apéndice A. Primer Cuestionario. Al final de cada tabla aparece un conteo de respuestas correctas, erróneas y sin contestar. Esto, para que el lector observe en qué conceptos destacan los alumnos.

La nomenclatura que aparece en las tablas es la siguiente:

CC: Contestó Correctamente

NC: No Contestó

CE: Contestó Erróneamente

Pregunta 1. Anota el simétrico de cada valor.

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar	/			
Miguel	/			
Gamaliel	/			
Alan	/			
Adolfo	/			
Antonio	/			
Wendy	/			
Fernanda		/		
Pastor		/		
David		/		
Carmen		/		
Sebastián		/		
Néstor			/	Dividió los valores entre dos
Quiroz	/			
Erik		/		
Julio		/		
Adonay		/		
Valeria		/		
Mariana		/		
Sabina		/		
Rocío		/		
Emily		/		
Yathana			/	Puso signos aleatoriamente, pero entendió que debía cambiarlos
Danna		/		
Daniela	/			
Caciel		/		
Gabriela		/		
Kitzel	/			
Naomi	/			
Cristian		/		
Total	11	17	2	

Pregunta 2. Indica cuál de los dos valores es mayor en cada caso.

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar		/		
Miguel			/	Considera los simétricos como de igual valor, en negativos atribuye mayor valor al que tenga más valor absoluto
Gamaliel			/	Considera los simétricos como de igual valor, se guía por el valor absoluto para decidir cuál número es mayor
Alan		/		
Adolfo		/		Utiliza de forma inversa los signos mayor y menor que
Antonio		/		Utiliza de forma inversa los signos mayor y menor que
Wendy		/		Considera los simétricos como de igual valor
Fernanda		/		
Pastor		/		
David		/		
Carmen		/		
Sebastián		/		
Néstor		/		
Quiroz		/		
Erik			/	Considera los simétricos como de igual valor, en negativos atribuye mayor valor al que tenga más valor absoluto
Julio		/		
Adonay		/		
Valeria			/	Se guía por el valor absoluto para decidir cuál número es mayor
Mariana		/		
Sabina		/		
Rocío		/		
Emily		/		
Yathana		/		
Danna		/		
Daniela			/	Entre valores con signos opuestos y con signos negativos, atribuye el mayor valor basándose en el valor absoluto
Caciel		/		Entre simétricos, considera al negativo como de mayor valor
Gabriela			/	Utiliza el valor absoluto para decidir cuál número es mayor
Kitzel		/		
Naomi		/		Considera a los simétricos como de igual valor
Cristian		/		
Total	0	25	5	

Pregunta 3. Completa las siguientes igualdades.

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar	/			
Miguel	/			
Gamaliel	/			
Alan			/	Asigna signos contrarios a los valores, pero no se basa en simétricos, cuando hay literales las sustituye por números
Adolfo		/		
Antonio		/		
Wendy		/		
Fernanda		/		
Pastor		/		
David		/		
Carmen		/		
Sebastián		/		
Néstor		/		
Quiroz		/		
Erik			/	Genera ecuaciones para intentar igualar a cero cada ejercicio
Julio		/		
Adonay		/		
Valeria	/			
Mariana		/		
Sabina		/		
Rocío		/		
Emily		/		
Yathana			/	Cuando hay literales las sustituye con números
Danna		/		
Daniela	/			
Caciel	/			
Gabriela	/			
Kitzel		/		
Naomi			/	En los ejercicios con literales utiliza letras distintas a las planteadas
Cristian		/		
Total	7	19	4	

Pregunta 4. Anota el valor absoluto en cada caso.

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar		/		
Miguel		/		
Gamaliel		/		
Alan		/		
Adolfo		/		
Antonio		/		
Wendy		/		
Fernanda		/		
Pastor		/		
David		/		
Carmen		/		
Sebastián		/		
Néstor		/		
Quiroz		/		
Erik		/		
Julio		/		
Adonay		/		
Valeria		/		
Mariana		/		
Sabina	/			
Rocío		/		
Emily		/		
Yathana		/		
Danna		/		
Daniela	/			
Caciel	/			
Gabriela	/			
Kitzel		/		
Naomi		/		
Cristian		/		
Total	4	26	0	

Pregunta 5. Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos de números.

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar		/		
Miguel			/	Los ordenó de mayor a menor en un caso y no tomó en cuenta los signos en el otro caso
Gamaliel		/		
Alan		/		
Adolfo		/		
Antonio		/		
Wendy		/		
Fernanda		/		
Pastor		/		
David		/		
Carmen		/		
Sebastián		/		
Néstor		/		
Quiroz		/		
Erik		/		
Julio		/		
Adonay			/	Los ordenó de mayor a menor
Valeria			/	Los ordena sin considerar el signo, solo se basa en el valor absoluto
Mariana		/		
Sabina		/		
Rocío		/		
Emily		/		
Yathana			/	Ubica los negativos a la izquierda de los positivos, al ordenar los negativos se basa en su valor absoluto
Danna		/		
Daniela		/		
Caciel		/		
Gabriela		/		En el caso en que no hay cero, lo coloca como referencia entre negativos y positivos
Kitzel		/		
Naomi		/		
Cristian		/		
Total	0	26	4	

Pregunta 6. Resuelve las siguientes operaciones (adición y sustracción).

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar	/			
Miguel			/	Multiplica valores, ignora el signo de adición y sustracción entre ambos números
Gamaliel			/	En adición suma valores, usa ley de signos para resultado, en sustracción resta valores, usa ley de signos para resultado
Alan			/	La adición la resuelve correctamente, en sustracción resta sin tomar en cuenta los signos de los números
Adolfo			/	En adición suma valores, usa ley de signos para resultado, en sustracción resta valores, usa ley de signos para resultado
Antonio		/		
Wendy			/	La adición la resuelve correctamente, en sustracción no contestó
Fernanda			/	La adición la resuelve correctamente, la sustracción no
Pastor			/	La adición la resuelve correctamente, la sustracción no
David		/		
Carmen		/		
Sebastián			/	La adición la resuelve correctamente, en sustracción no contestó
Néstor		/		Resolvió erróneamente la sustracción de simétricos
Quiroz		/		
Erik			/	En algunos casos hace bien la operación, pero coloca erróneamente el signo final, los demás los resuelve bien
Julio		/		
Adonay			/	La adición la resuelve correctamente, la sustracción no
Valeria			/	La adición la resuelve correctamente, la sustracción no
Mariana		/		
Sabina			/	En adición suma valores, usa ley de signos para resultado, en sustracción resta valores, usa ley de signos para resultado
Rocío		/		
Emily			/	Multiplica valores, ignora el signo de adición y sustracción entre ambos números
Yathana			/	Multiplica valores, ignora el signo de adición y sustracción entre ambos números
Danna			/	Multiplica valores, ignora el signo de adición y sustracción entre ambos números
Daniela			/	Suma los valores en adición y también en sustracción, aplica ley de signos para resultado
Caciel			/	Multiplica valores, ignora el signo de adición y sustracción entre ambos números
Gabriela			/	En adición suma valores, usa ley de signos para resultado, en sustracción resta valores, usa ley de signos para resultado
Kitzel		/		
Naomi			/	La adición la resuelve correctamente, en sustracción no contestó
Cristian			/	Multiplica valores, ignora el signo de adición y sustracción entre ambos números
Total	1	9	20	

Pregunta 7. Resuelve las siguientes operaciones (multiplicación y división).

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar	/			
Miguel	/			
Gamaliel		/		
Alan			/	Tiene dificultades al multiplicar o dividir los signos
Adolfo		/		
Antonio		/		
Wendy	/			
Fernanda		/		
Pastor		/		
David		/		
Carmen		/		
Sebastián			/	Tiene dificultades al dividir los signos, en el caso de multiplicación lo hace bien
Néstor		/		
Quiroz		/		
Erik		/		
Julio		/		
Adonay			/	Tiene dificultades al multiplicar o dividir los signos
Valeria			/	Tiene dificultades al multiplicar o dividir los signos
Mariana		/		
Sabina		/		
Rocío		/		
Emily		/		
Yathana			/	Algunos casos los contestó bien en cuanto al uso de signos, en otros hay errores que parecen por descuido u omisión
Danna		/		
Daniela		/		
Caciel			/	Los casos de multiplicación los resuelve correctamente, los casos de división no los contestó
Gabriela		/		
Kitzel		/		
Naomi		/		Los únicos casos que no resuelve correctamente son cuando se multiplican o dividen dos signos negativos
Cristian		/		
Total	3	21	6	

Pregunta 8. Halla el valor de cada incógnita (ecuaciones de primer grado).

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar			/	No hace uso de las operaciones entre signos, no despeja valores para hallar el valor de la incógnita, en lugar de eso, estima
Miguel	/			
Gamaliel			/	Cuando despeja cambia de manera errónea los signos que usa; en casos en que la ecuación implicó división, no contestó
Alan			/	Cuando despeja cambia de manera errónea los signos que usa; en casos en que la ecuación implicó división, no contestó
Adolfo		/		
Antonio			/	En algunos casos contesta correctamente, en otros se equivoca al colocar el signo con el resultado final
Wendy			/	La mayoría de los casos no los contestó, en los otros, estima valores y coloca erróneamente los signos
Fernanda			/	En la mayoría de los casos contesta bien, en otros equivoca la operación entre signos
Pastor		/		
David		/		
Carmen			/	Adiciones y sustracciones las contesta bien, cuando la ecuación implica división se equivoca al operar con los signos
Sebastián		/		
Néstor		/		En la mayoría de los casos contesta bien, en otros equivoca la operación entre signos
Quiroz		/		
Erik		/		En los casos que implican división equivoca la operación entre números, pero la operación entre signos la realiza bien
Julio		/		
Adonay		/		
Valeria			/	En los casos que implican división despeja erróneamente, en los casos de adición y sustracción opera mal los signos
Mariana		/		
Sabina		/		
Rocío			/	En todos los casos opera correctamente los signos, pero en algunos de estos opera mal los números
Emily			/	Opera correctamente adiciones y sustracciones, en divisiones opera mal tanto números como signos
Yathana	/			
Danna			/	Opera correctamente adiciones y sustracciones, en divisiones opera mal tanto números como signos
Daniela			/	Opera correctamente divisiones, en adiciones y sustracciones opera erróneamente signos y por tanto números
Caciél			/	Estima erróneamente resultados e ignora el signo
Gabriela			/	Estima erróneamente resultados e ignora el signo
Kitzel		/		
Naomi		/		En todos los casos opera correctamente signos, en unos pocos equivoca la operación entre números
Cristian			/	Opera correctamente adiciones y sustracciones, en divisiones opera mal tanto números como signos
Total	2	13	15	

Pregunta 9. Completa las tablas y determina la constante de proporcionalidad en cada caso.

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Miguel			/	En uno de los dos casos llena correctamente la tabla y obtiene k, en el otro no llena correctamente la tabla ni obtiene k
Gamaliel		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Alan		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Adolfo		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Antonio		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Wendy		/		
Fernanda		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Pastor		/		
David		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Carmen		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Sebastián		/		
Néstor		/		
Quiroz		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Erik		/		
Julio		/		
Adonay		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Valeria			/	Solo llenó correctamente una tabla, todo lo demás lo dejó en blanco
Mariana		/		
Sabina		/		
Rocío			/	Llena correctamente las tablas, calcula erróneamente la constante de proporcionalidad
Emily		/		
Yathana		/		
Danna		/		
Daniela		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Caciel		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Gabriela		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Kitzel		/		
Naomi		/		Llena correctamente las tablas, no determina la constante de proporcionalidad
Cristian		/		
Total	0	27	3	

Pregunta 10. Grafica las dos situaciones anteriores y determina de qué tipo de variación se trata. Determina además la pendiente en cada caso haciendo uso del gráfico.

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar			/	Realiza correctamente las gráficas, determina erróneamente la pendiente, no indica el tipo de variación
Miguel			/	En un caso determina realiza correctamente la gráfica y determina correctamente la variación, en el otro no
Gamaliel			/	Grafica erróneamente, no determina la pendiente ni la variación
Alan			/	En un caso grafica correctamente, en el otro no. No determina pendiente ni tipo de variación
Adolfo		/		
Antonio		/		
Wendy			/	En un caso grafica correctamente y determina el tipo de variación, en el otro caso grafica erróneamente y no contesta
Fernanda			/	Grafica correctamente, no indica pendiente ni el tipo de variación
Pastor		/		
David		/		Solo faltó determinar el tipo de variación
Carmen		/		
Sebastián			/	Grafica erróneamente, no determina pendiente ni tipo de variación
Néstor			/	Grafica correctamente, no indica pendiente ni el tipo de variación
Quiroz		/		Solo faltó determinar el tipo de variación
Erik		/		Solo faltó determinar la pendiente
Julio			/	Grafica correctamente, no indica pendiente ni el tipo de variación
Adonay		/		Solo faltó determinar el tipo de variación
Valeria	/			
Mariana		/		
Sabina		/		Determina erróneamente la pendiente
Rocío			/	En un caso grafica correctamente y determina variación, en el otro, grafica y determina variación erróneamente
Emily		/		
Yathana		/		
Danna		/		
Daniela			/	Faltó graficar un caso, en el otro grafica correctamente y determina tipo de variación
Caciél			/	Grafica erróneamente, no determina la pendiente ni la variación
Gabriela			/	Solo grafica un caso correctamente, lo demás no lo contesta
Kitzel		/		
Naomi		/		
Cristian		/		
Total	1	16	13	

Pregunta 11. Escribe la expresión algebraica para cada uno de los dos casos anteriores que permita determinar cualquier valor de la tabla.

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar	/			
Miguel			/	Escribe erróneamente el valor de la pendiente en el primer caso, el segundo no lo contesta
Gamaliel	/			
Alan	/			
Adolfo			/	El primer caso lo contesta correctamente, en el segundo separa con una adición el valor de pendiente y de una variable
Antonio			/	El primer caso lo contesta correctamente, en el segundo separa con una adición el valor de pendiente y de una variable
Wendy		/		No expresa las expresiones como una relación entre dos variables
Fernanda		/		
Pastor		/		
David		/		
Carmen		/		
Sebastián		/		No expresa las expresiones como una relación entre dos variables
Néstor		/		Expresa la pendiente como una razón
Quiroz		/		Ambas expresiones algebraicas las iguala a cero
Erik		/		
Julio			/	El primer caso lo contesta correctamente, el segundo expresa una función lineal que no es vdp
Adonay			/	Escribe ambos casos correctamente, pero agrega como adición el valor de 1 en los dos
Valeria	/			
Mariana		/		
Sabina		/		No expresa las expresiones como una relación entre dos variables
Rocío		/		Expresa la pendiente como una razón
Emily		/		No expresa las expresiones como una relación entre dos variables
Yathana	/			
Danna		/		No expresa las expresiones como una relación entre dos variables
Daniela	/			
Caciél	/			
Gabriela	/			
Kitzel		/		No expresa las expresiones como una relación entre dos variables
Naomi		/		
Cristian		/		
Total	8	17	5	

Pregunta 12. Realiza la gráfica de la función $Y = 2x + 8$. Indica además qué significado tienen tanto el 2 como el 8 en la gráfica. Si la recuerdas, escribe la generalización de una función lineal. Determina también si se trata de una variación directamente proporcional y justifica.

Nombre	NC	CC	CE	Observaciones
Omar	/			
Miguel		/		
Gamaliel	/			
Alan			/	Grafica erróneamente, los demás requerimientos de la pregunta no los contesta
Adolfo	/			
Antonio	/			
Wendy			/	Grafica correctamente, los demás requerimientos no los contesta
Fernanda			/	Grafica correctamente, define erróneamente que sí es una vdp, interpreta mal la pendiente y el corte de las ordenadas
Pastor		/		
David		/		
Carmen		/		
Sebastián		/		Solo faltó decir si se trata o no de una vdp
Néstor			/	Solo grafica
Quiroz		/		Solo define erróneamente que se trata de una vdp, todo lo demás lo responde correctamente
Erik		/		Solo faltó decir si se trata o no de una vdp
Julio	/			Escribió no entender la pregunta
Adonay			/	Grafica erróneamente, lo demás no lo contesta
Valeria	/			
Mariana		/		
Sabina		/		
Rocío		/		
Emily		/		Define la pendiente como "la distancia que existe entre cada número"
Yathana	/			
Danna		/		
Daniela	/			
Caciel		/		Define todo correctamente a excepción del punto de corte de las ordenadas que aparece en la expresión algebraica
Gabriela	/			
Kitzel			/	Define correctamente la pendiente y el corte de las ordenadas, entiende que no es una vdp pero dice que es una vip
Naomi			/	Define correctamente la pendiente y el corte de las ordenadas, entiende que no es una vdp pero dice que es una vip
Cristian			/	Grafica correctamente, pero indica que es una vip
Total	9	13	8	

A continuación, se presenta una tabla de resultados generales por alumno, la cual muestra además el porcentaje de los alumnos con mayor número de aciertos, de mayor a menor.

La nomenclatura utilizada para esta tabla es la siguiente:

CC: Contestó Correctamente

CE: Contestó Erróneamente

NC: No Contestó

TNC: Total No Contestó (por alumno)

TCC: Total Contestó Correctamente (por alumno)

TCE: Total Contestó Erróneamente (por alumno)

%CC: Porcentaje Contestó Correctamente (por alumno)

PR: PREGUNTA

Nombre	PR1	PR2	PR3	PR4	PR5	PR6	PR7	PR8	PR9	PR10	PR11	PR12	T NC	T CC	T CE	% CC
Mariana	CC	CC	CC	0	12	0	100.0									
David	CC	CC	CC	0	12	0	100.0									
Pastor	CC	CC	CC	CC	CC	CE	CC	CC	CC	CC	CC	CC	0	11	1	91.66
Carmen	CC	CE	CC	CC	CC	CC	0	11	1	91.66						
Quiroz	NC	CC	CC	CC	1	11	0	91.66								
Kitzel	NC	CC	CC	CE	1	10	1	83.33								
Julio	CC	CE	CE	NC	1	10	2	83.33								
Sabina	CC	CC	CC	NC	CC	CE	CC	CC	CC	CC	CC	CC	1	10	1	83.33
Emily	CC	CC	CC	CC	CC	CE	CC	CE	CC	CC	CC	CC	0	10	2	83.33
Danna	CC	CC	CC	CC	CC	CE	CC	CE	CC	CC	CC	CC	0	10	2	83.33
Sebastián	CC	CC	CC	CC	CC	CE	CE	CC	CC	CE	CC	CC	0	9	3	75.00
Néstor	CE	CC	CE	CC	CE	0	9	3	75.00							
Erik	CC	CE	CE	CC	CC	CE	CC	CC	CC	CC	CC	CC	0	9	3	75.00
Rocío	CC	CE	CE	CE	CC	CC	0	9	3	75.00						
Cristian	CC	CC	CC	CC	CC	CE	CC	CE	CC	CC	CC	CE	0	9	3	75.00
Naomi	NC	CC	CE	CC	CC	CE	CC	CC	CC	CC	CC	CE	1	8	3	66.66
Adolfo	NC	CC	CC	CC	CC	CE	CC	CC	CC	CC	CE	NC	2	8	2	66.66
Antonio	NC	CC	CC	CC	CC	CC	CC	CE	CC	CC	CE	NC	2	8	2	66.66
Fernanda	CC	CC	CC	CC	CC	CE	CC	CE	CC	CE	CC	CE	0	8	4	66.66
Adonay	CC	CC	CC	CC	CE	CE	CE	CC	CC	CC	CE	CE	0	7	5	58.33
Wendy	NC	CC	CC	CC	CC	CE	NC	CE	CC	CE	CC	CE	2	6	4	50.00
Caciel	CC	CC	NC	NC	CC	CE	CE	CE	CC	CE	NC	CC	3	5	4	41.66
Omar	NC	CC	NC	CC	CC	NC	NC	CE	CC	CE	NC	NC	6	4	2	33.33
Alan	NC	CC	CE	CC	CC	CE	CE	CE	CC	CE	NC	CE	2	4	6	33.33
Gamaliel	NC	CE	NC	CC	CC	CE	CC	CE	CC	CE	NC	NC	4	4	4	33.33
Yathana	CE	CC	CE	CC	CE	CE	CE	NC	CC	CC	NC	NC	3	4	5	33.33
Gabriela	CC	CE	NC	NC	CC	CE	CC	CE	CC	CE	NC	NC	4	4	4	33.33
Daniela	NC	CE	NC	NC	CC	CE	CC	CE	CC	CE	NC	NC	5	3	4	25.00
Miguel	NC	CE	NC	CC	CE	CE	NC	NC	CE	CE	CE	CC	4	2	6	16.66
Valeria	CC	CE	NC	CC	CE	CE	CE	CE	CE	NC	NC	NC	4	2	6	16.66

Se anexa además una tabla que indica cuáles preguntas fueron mayormente respondidas de manera correcta, cuáles mayormente se contestaron de forma errónea, y cuáles no fueron contestadas por la mayoría de los estudiantes.

No. de pregunta	CC	CE	NC
1	17	2	11
2	24	6	0
3	19	4	7
4	26	0	4
5	26	4	0
6	9	20	1
7	21	6	3
8	13	15	2
9	27	3	0
10	16	13	1
11	17	5	8
12	13	8	9

Apéndice D. Tablas de resultados segundo cuestionario

Se presentan a continuación, los resultados por reactivo que obtuvieron los alumnos a quienes se les aplicó el segundo cuestionario. Las respuestas se presentan en tablas para tratar de hacer más claro al lector el cómo se eligió a los estudiantes a los cuales se les hizo la entrevista.

La nomenclatura utilizada para las tablas de los primeros tres problemas es la siguiente:

CC: Contestó Correctamente

CE: Contestó Erróneamente

NC: No Contestó

AL: Alumno

T: Llenado de tabla

K: Obtención de constante de proporcionalidad

G: Graficación de la relación de proporcionalidad

M: Obtención de la pendiente

EA: Obtención de la expresión algebraica

VDP: Determina si es variación directamente proporcional

SJ: Sí, justifica su respuesta

SNJ: Sí, no justifica su respuesta

Primer problema

Para motivar al capitán de un equipo de futbol americano, el dueño le ofreció el siguiente trato: por cada 6 yardas ganadas en una jugada, le pagará 1500 dólares; de la misma manera por cada 6 yardas perdidas en una jugada, el dueño le quitará 1500 dólares a su pago. El jugador, después de pensarlo mucho, acepta.

- a) Completa la siguiente tabla que contiene información respecto a las primeras ocho jugadas del primer juego de la temporada, y determina cuál es el valor de la constante de proporcionalidad.

- b) Grafica los datos obtenidos en el siguiente plano cartesiano y determina el valor de la pendiente.

- c) Determina la expresión general que permita obtener los dólares ganados o perdidos en función de las yardas.

- d) ¿Se trata de una relación de proporcionalidad directa? Justifica ampliamente tu respuesta.

AL	T			K			G			M			EA			VDP		
	CC	CE	NC	SJ	SNJ	NC												
Sa	*			*			*			*			*			*		
Ki	*			*			*			*			*			*		
Ma	*			*			*			*			*			*		
Na	*			*			*			*			*			*		
Ro	*			*			*			*			*	*		*		
Er	*			*			*			*			*			*		
Fe	*			*				*		*			*			*		
Qu	*			*			*			*			*			*		
Ca	*			*			*			*			*	*		*		
Pa	*			*			*			*			*			*		
Da	*			*				*		*			*	*		*		
Em	*			*			*			*			*	*		*		

Observaciones:

- * Solo una persona coloca signos positivos tanto a la pendiente como a la constante de proporcionalidad.
- * Ningún alumno da muestra de qué proceso siguió para obtener la pendiente.
- * Ningún alumno da muestra de qué proceso siguió para determinar los signos de los valores que colocó en la tabla.
- * La mayoría de los alumnos justifican la relación de proporcionalidad directa basándose en la recta que se genera en el plano cartesiano.

Segundo problema

Un banco en la ciudad de Torreón, con la intención de lograr que más clientes acepten usar tarjeta de crédito propone la siguiente promoción: al adquirir tu tarjeta, si al final de cada mes mantienes un saldo positivo, el banco te incrementará el 20% de lo que tengas; de la misma manera, si al finalizar el mes tienes un saldo negativo, el banco te cobrará lo que adeudes más un 20% de esa cantidad. Lucho obtuvo su tarjeta de crédito y la mantuvo por diez meses.

- a) Completa la tabla que contiene la información de los primeros diez meses del saldo con el que contaba Lucho y determina la constante de proporcionalidad.

- b) Grafica los datos obtenidos en el siguiente plano cartesiano y determina el valor de la pendiente.

- c) Determina la expresión general que permita obtener el saldo combinado con la promoción del banco en función del saldo al final del mes de la tarjeta de Lucho.

- d) ¿Se trata de una relación de proporcionalidad directa? Justifica ampliamente tu respuesta.

AL	T			K			G			M			EA			VDP			
	CC	CE	NC	SJ	SNJ	NC													
Sa	*			*				*		*				*					*
Ki	*			*			*			*			*			*			
Ma	*			*			*			*			*			*			
Na	*			*			*			*			*			*			
Ro		*			*			*			*			*		*			
Er	*				*		*				*			*		*			
Fe	*			*			*			*				*		*			
Qu	*			*			*			*				*		*			
Ca	*			*			*			*				*		*			
Pa	*			*			*			*				*		*			
Da	*			*			*			*				*		*			
Em	*			*			*			*				*		*			

Observaciones:

- * La mitad de los alumnos no colocan los signos de los valores en la tabla al llenarla.
- * Algunos alumnos no colocan signos en su plano cartesiano, sin embargo, grafican correctamente si se considera que los números positivos están a la derecha y arriba, y los números negativos están a la izquierda y abajo en los ejes del plano.
- * La construcción de la expresión algebraica se dificultó debido al uso de porcentaje en la redacción del problema.
- * Al justificar la relación de proporcionalidad, los alumnos en su mayoría se basan en las características que tiene la recta que se genera en el plano cartesiano.

Tercer problema

Hace 8 horas, un submarino nuclear clase Sierra se encontraba a 7200 metros bajo el nivel del mar; si su ascenso es constante y hace 3 horas se encontraba a 2700 metros bajo el nivel del mar, completa la tabla para determinar los valores faltantes respecto a los tiempos del submarino y la profundidad a la que se encontraba.

- Según la tabla anterior, determina la constante de proporcionalidad.
- Grafica los datos obtenidos en el siguiente plano cartesiano y determina el valor de la pendiente.
- Determina la expresión general que permita obtener los metros a los que se encuentra sumergido el submarino en función de las horas transcurridas.
- ¿Se trata de una relación de proporcionalidad directa? Justifica ampliamente tu respuesta.

AL	T			K			G			M			EA			VDP		
	CC	CE	NC	SJ	SNJ	NC												
Sa		*		*			*					*	*			*		
Ki	*			*			*			*			*			*		
Ma	*			*			*			*			*			*		
Na	*			*			*			*			*			*		
Ro	*			*			*				*			*				**
Er		*			*			*			*			*				**
Fe	*			*				*		*				*		*		
Qu	*			*			*			*			*			*		
Ca	*				*		*			*				*		*		
Pa	*				*		*				*		*			*		
Da	*			*				*		*			*			*		
Em	*			*			*			*			*			*		

Observaciones:

* En este problema, los planos cartesianos de cada alumno tienen los signos negativos en el cuadrante correspondiente, es decir, donde pasa la recta que se forma a partir de las parejas de valores dadas.

* Algunos alumnos consideraron la pendiente con valor negativo, algunos otros consideraron la constante de proporcionalidad como negativa.

** Dos alumnos consideraron que no había proporcionalidad directa, la justificación de esto fue relacionada a la aparición de los números negativos en la situación problema.

Preguntas 4 y 5

Nomenclatura utilizada para las preguntas 4 y 5:

CN: Define utilizando Condiciones Necesarias

CSN: Define utilizando Condiciones Suficientes y Necesarias

NC: No Contestó

Pregunta 4

Escribe, describe o ejemplifica la definición que tengas de una relación de proporcionalidad directa.

ALUMNO	CN	CSN	NC
Sabina		*	
Kitzel		*	
Mariana		*	
Naomi		*	
Rocío		*	
Erick	*		
Fernanda		*	
Quiroz		*	
Carmen		*	
Pastor		*	
David		*	
Emily		*	

Observaciones:

*La mayoría de los alumnos define la proporcionalidad directa basándose en las características de la recta que se forma en el plano cartesiano y en la obtención de la constante de proporcionalidad al dividir las parejas de valores.

Pregunta 5

¿Qué características debe tener una relación entre dos variables para considerarse que es del tipo proporcionalidad directa?

ALUMNO	CN	CSN	NC
Sabina		*	
Kitzel		*	
Mariana		*	
Naomi		*	
Rocío		*	
Erick	*		
Fernanda		*	
Quiroz		*	
Carmen	*		
Pastor	*		
David	*		
Emily		*	

Observaciones:

*La mayoría de los alumnos identifica como características en una relación de proporcionalidad las que representa la recta que se forma en el plano cartesiano (que pasa por el origen y que es una línea recta), y la obtención de la constante de proporcionalidad al dividir las parejas de valores correspondientes como condiciones suficientes y necesarias. Algunos alumnos identifican solo condiciones necesarias y éstas se refieren al aumento o disminución proporcional entre las dos variables.

Pregunta 6

¿Cómo puedes determinar, en una tabla, que entre las dos variables existe una relación de proporcionalidad directa? Justifica tu respuesta.

Nomenclatura utilizada para la pregunta 6:

K: Determina a partir de la constante de proporcionalidad

FI: Determina a partir del Factor Interno

+/-: Determina a partir del aumento o disminución proporcional entre variables

ALUMNO	K	FI	+/-
Sabina	*		
Kitzel	*		
Mariana	*		
Naomi			*
Rocío	*		
Erick			*
Fernanda	*		
Quiroz	*		
Carmen			*
Pastor	*		
David			*
Emily		*	

Observaciones:

*La mayoría de los alumnos determina la proporcionalidad directa en una tabla a partir de la obtención de la constante de proporcionalidad al dividir cada pareja de valores correspondientes.

Pregunta 7

¿Cómo puedes determinar, en un plano cartesiano, que entre las dos variables existe una relación de proporcionalidad directa? Justifica tu respuesta.

Nomenclatura utilizada para la pregunta 7:

K: Determina a partir de la constante de proporcionalidad.

RPC: Determina justificando que la recta pasa por el cero en el plano cartesiano.

LR: Determina justificando que se forma una línea recta en el plano cartesiano.

NC: No contestó.

ALUMNO	K	RPC	LR	NC
Sabina	*			
Kitzel		*		
Mariana		*		
Naomi	*			
Rocío				*
Erick			*	
Fernanda		*		
Quiroz			*	
Carmen		*		
Pastor		*		
David			*	
Emily		*		

Observaciones:

*La mayoría de los alumnos determina la proporcionalidad en un plano cartesiano justificando que se trata de una línea recta que pasa por el origen.

Pregunta 8

¿Cómo puedes determinar en una expresión algebraica del tipo $Y = mx + b$, que existe una relación de proporcionalidad directa? Justifica tu respuesta.

Nomenclatura utilizada en la pregunta 8:

PCB: Determina justificando que $b = 0$ y que se trata del Punto de Corte en el eje de las ordenadas.

OR: Justifica dando Otra Respuesta.

NC: No Contestó

ALUMNO	PCB	OR	NC
Sabina	*		
Kitzel	*		
Mariana			*
Naomi	*		
Rocío		*	
Erick		*	
Fernanda	*		
Quiroz		*	
Carmen		*	
Pastor	*		
David			*
Emily		*	

Observaciones:

*La mitad de los alumnos justificaron su respuesta en el hecho de que en la expresión general para una relación de proporcionalidad directa ($Y = mx + b$), el valor correspondiente a “b”, debe ser igual a cero o no aparecer, quedando únicamente $Y = mx$.

*Los alumnos que dieron una respuesta distinta justificaron con explicaciones fuera de las condiciones suficientes y necesarias de proporcionalidad, por lo que no se pudieron categorizar.

Pregunta 9

Respecto a los valores negativos que aparecieron en cada situación que resolviste, y basándote en tus respuestas anteriores:

a) ¿Cómo relacionas ese tipo de números con la proporcionalidad directa?

ALUMNO	Los relaciona	No los relaciona
Sabina	*	
Kitzel	*	
Mariana	*	
Naomi	*	
Rocío		*
Erick	*	
Fernanda	*	
Quiroz	*	
Carmen	*	
Pastor	*	
David	*	
Emily	*	

Observaciones:

*Las formas en que los alumnos realizaron esta relación, se detalla en el apartado RESULTADOS Y OBSERVACIONES DEL SEGUNDO CUESTIONARIO, por lo que dicha información no se repitió aquí.

b) ¿Crees que son parte de este tipo de proporcionalidad según tu definición? Justifica tu respuesta.

ALUMNO	Sí son parte	No son parte
Sabina	*	
Kitzel	*	
Mariana	*	
Naomi	*	
Rocío		*
Erick	*	
Fernanda	*	
Quiroz	*	
Carmen		*
Pastor	*	
David	*	
Emily	*	

Observaciones:

*Las formas en que los alumnos lo justificaron, se detalla en el apartado RESULTADOS Y OBSERVACIONES DEL SEGUNDO CUESTIONARIO, por lo que dicha información no se repitió aquí.

c) Has visto alguna vez durante tu paso por la secundaria problemas de proporcionalidad directa que hagan uso de números negativos?

ALUMNO	Sí los he visto	No los he visto
Sabina	*	
Kitzel	*	
Mariana		*
Naomi		*
Rocío		*
Erick	*	
Fernanda	*	
Quiroz	*	
Carmen	*	
Pastor		*
David		*
Emily	*	

Observaciones:

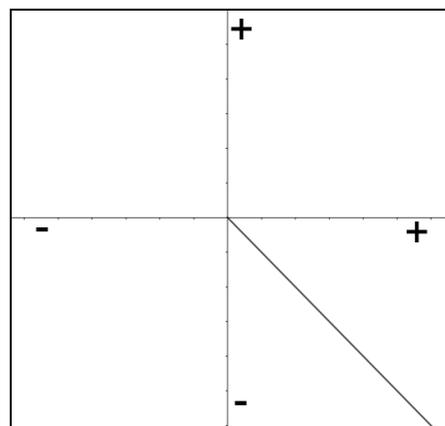
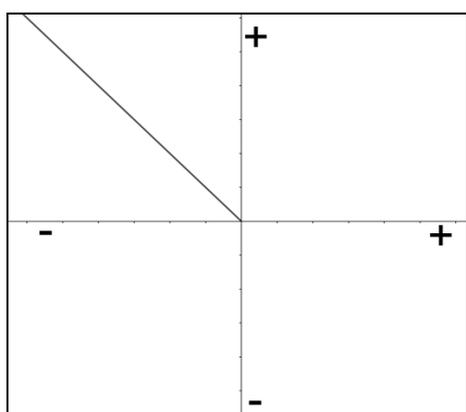
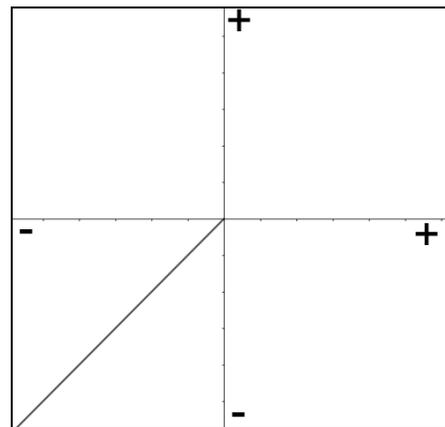
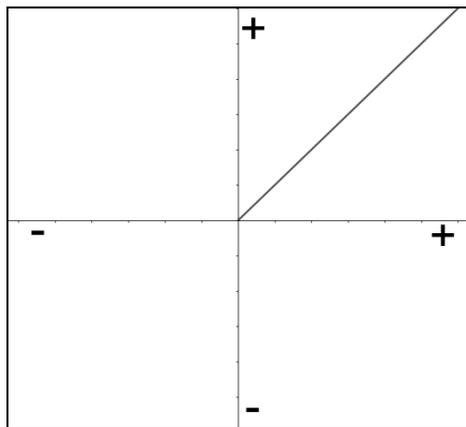
*Las formas en que los alumnos justificaron, se detalla en el apartado RESULTADOS Y OBSERVACIONES DEL SEGUNDO CUESTIONARIO, por lo que dicha información no se repitió aquí.

Apéndice E. Protocolo de entrevista

Se presenta a continuación la guía de preguntas que se siguió con los cinco alumnos entrevistados, aunque esto no significa que todas las entrevistas fueron exactamente iguales, ya que, basado en cada persona, se hicieron cuestionamientos que respondían a dudas e intereses respecto a las respuestas que se dieron en el segundo cuestionario, por considerarlas muy relevantes para este estudio.

Primera parte:

1. ¿Podrías explicarme qué significa para ti una variación directamente proporcional?
2. ¿Podrías decirme qué entiendes por números negativos?, ¿qué son para ti?
3. ¿Cuántos tipos de números conoces?, ¿dónde ubicas a los números negativos entre todos esos números?
4. ¿Puedes trazar en un plano cartesiano cómo se ve una relación de proporcionalidad directa?
5. ¿Cuál de estas rectas no pertenece a una variación directamente proporcional?, ¿por qué?



6. ¿Cómo es la variación entre dos magnitudes cuando se habla de proporcionalidad directa?
7. Según las respuestas de tu cuestionario, ¿los números negativos son en realidad parte de la variación directamente proporcional?
8. Aquí se hizo una variante en las preguntas para cada alumno según las respuestas de los cuestionarios, por lo que no se colocarán todas las variaciones que surgieron.

Segunda parte:

1. Durante los tres años que estuviste en secundaria, ¿qué es lo que más se te ha dificultado en la asignatura de matemáticas?
2. ¿Qué es lo que más se te dificulta en ejercicios o problemas que se refieren a proporcionalidad directa?
3. ¿Qué es lo que más se te dificulta en ejercicios o problemas que se refieren al uso de números negativos?
4. ¿Qué es lo que más se te facilita en el tema de proporcionalidad directa?
5. ¿Qué es lo que más se te facilita en el tema de números con signo?

Tercera parte:

1. ¿Cuáles son las dificultades que has tenido que atravesar para concluir tu educación secundaria?
2. ¿Cuál es la percepción que tienes de la convivencia escolar dentro de esta escuela?
3. ¿Qué aspectos relacionados a la escuela crees que impiden que tengamos mejores resultados en cuanto a evaluaciones como COMIPEMS o en cuanto al desempeño académico de los alumnos?

4. ¿Qué es lo que más te gusta y qué es lo que menos te gusta de tu escuela?

5. ¿Cuál es tu asignatura favorita?, ¿por qué?

6. ¿Cuál es la asignatura que menos te gusta?, ¿por qué?