CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Departamento de Matemática Educativa

El problema de extensión lineal con apoyo de construcciones geométricas

Tesis que presenta

Paul Rey Velasco Hernández

Para obtener el grado de

Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

Directores de la Tesis

Dra. Asuman Oktaç

Dr. José Guzmán Hernández

Ciudad de México Febrero 2017

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (Conacyt) por el apoyo
económico brindado para realizar mis estudios de maestría.

Paul Rey Velasco Hernández
Becario No. 339409

Agradecimientos

A mi familia, por ser una fuente infinita de amor e inspiración durante todos estos años de mi vida.

Al Dr. José Guzmán, por darme su gran apoyo para la realización del presente trabajo de investigación. Gracias por brindarme su amistad; su pasión y entrega fueron grandes fuentes de inspiración para seguir adelante con mi investigación; lo extraño demasiado amigo José.

A la Dra. Asuman, por ayudarme a finalizar el presente documento. Las discusiones de su seminario y sus sugerencias me hicieron reflexionar demasiado acerca de mi investigación, le agradezco por el apoyo brindado durante todo este proceso.

Índice general

Capítulo 4: Análisis y discusión de los datos

Capítulo 5: Conclusiones

RESUMEN

La presente investigación está centrada en el estudio del problema de extensión lineal haciendo uso de construcciones de geometría; este problema resulta interesante para la comunidad de matemáticos educadores ya que involucra implícitamente la coordinación de varios conceptos relacionados con el Álgebra Lineal, tales como espacio vectorial, conjunto linealmente independiente y dependiente así como transformación lineal. Para abordar la problemática relacionada con su aprendizaje tomamos en consideración el marco teórico metodológico llamado Abstracción en Contexto, con el fin de diseñar una secuencia didáctica que nos permite estudiar distintos procesos de abstracción. Dichos procesos surgen cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones que son nuevas para ellos. En nuestro trabajo de investigación el grupo de estudiantes se enfrentó a representar conceptos del Álgebra Lineal haciendo uso de construcciones geométricas en GeoGebra para abordar el problema de extensión lineal. Este trabajo reporta los procesos de abstracción que reflejaron dichos estudiantes al tratar con dichas representaciones.

ABSTRACT

This research study focuses on the linear extension problem making use of geometric constructions. This problem turns out to be interesting for the community of educational mathematicians, since it involves the coordination of several Linear Algebra concepts such as vector space, linearly independent and dependent sets as well as linear transformation. In order to study the issue associated to its learning, we make use of the methodological-theoretical framework named Abstraction In Context, in order to design a didactical sequence that allows us to study different processes of abstraction. This kind of processes emerge when students are confronted with situations that are new to them. In our study, the group of students were faced with the representation of linear algebra concepts making use of geometric constructions in GeoGebra to tackle the linear extension problem. This work reports on the abstraction processes that students reflect when dealing with these representations.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta el planteamiento general de la investigación, el cual está relacionado con el *problema de extensión lineal* en Álgebra Lineal. Este problema resulta interesante para la comunidad de educadores matemáticos, ya que involucra varios conceptos del Álgebra Lineal, principalmente, los de base y transformación lineal y tiene que ver con la determinación de "una transformación lineal por medio de las imágenes de los vectores de una base" (Uicab & Oktaç, 2006, p. 459). Estos conceptos han sido objeto de investigación (e.g., Haddad, 1999; Dreyfus, Hillel & Sierpinska, 1998; Sierpinska 2000; Uicab & Oktaç, 2006, entre otros), donde los autores han diseñado e implementado actividades, tanto en ambientes de lápiz-y-papel como en ambientes tecnológicos. Algunos de estos investigadores señalan que las dificultades de aprendizaje de conceptos de Álgebra Lineal, por parte de los estudiantes, surgen, principalmente, debido al obstáculo de formalismo Dorier et al. (1997), resultado de la apropiación de conocimientos aislados en lugar de conocimientos estructurados.

Con el afán de aumentar conexiones estructuradas entre los modos de representación (del algebraico al geométrico) de conceptos de Álgebra Lineal, en esta investigación se pretende mediante el diseño de actividades en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico, potenciar los procesos de abstracción de los estudiantes, reflejados al abordar el problema de extensión lineal contextualizado en un ambiente de geometría. Para el diseño de estas actividades, se tomó como referencia los principios sugeridos por Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz (2015) y el modelo de espacio bidimensional que sugieren Dreyfus et al. (1998), aunque con algunas modificaciones que, se conjetura, permiten llegar a los objetivos de la investigación.

1.1 Antecedentes

Los conceptos abstractos de Álgebra Lineal comúnmente se abordan en un nivel universitario. Reportes de investigación (e.g., Hillel, 2000) sugieren que la mayoría de quienes participan en los procesos educativos –estudiantes y profesores– relacionados con la enseñanza y aprendizaje de dichos conceptos tienen experiencias frustrantes. Debido a esta problemática surgieron líneas de investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de Álgebra Lineal en educación matemática. De acuerdo con Hillel (2000), los primeros estudios en esta línea fueron a cargo de Harel (1985). Posteriormente surgieron otros estudios representativos (e.g., Robert & Robinet, 1989; Rogalski, 1990; Dorier, 1990; Pavlopoulou, 1993; Sierpinska, 1995; Dreyfus & Hillel, 1998; Sierpinska, Dreyfus & Hillel, 1999, entre otros).

Los conceptos que se han investigado incluyen los siguientes: espacio vectorial (Parraguez & Oktaç, 2010), conjunto linealmente independiente, conjunto linealmente dependiente, base (Kú, Trigueros & Oktaç, 2008) conjunto generador (Kú, Oktaç & Trigueros, 2011), transformación lineal (Molina & Oktaç, 2007; Roa Fuentes & Oktaç, 2010; 2012; Ramírez-Sandoval, Romero-Félix & Oktaç, 2014). Estos conceptos son de carácter particularmente importante, ya que su entendimiento es clave para las nociones que se derivan de ellos, por ejemplo, para comprender el problema de extensión lineal. Como antecedentes, es pertinente mencionar algunos estudios relacionados, principalmente, con el concepto de transformación lineal.

Hillel (2000) sugiere tres distintos modos de descripción y representación en Álgebra Lineal, donde algunas veces se puede acceder de un modo a otro, pero no son equivalentes:

1. *Modo abstracto*: se usa el lenguaje y conceptos de la teoría general formalizada, incluyendo a nociones tales como espacio vectorial, subespacio, espacio generado, dimensión, operador, núcleo;

2. *Modo algebraico*: se usa el lenguaje y conceptos de la teoría más específica de $\mathbb{R}^n$, incluyendo a nociones tales como n-tupla, matriz, rango, solución de sistemas de ecuaciones, espacio renglón;
3. *Modo geométrico:* se usa el lenguaje y conceptos de espacios de dimensión dos y tres ($\mathbb{R}^2\, y\, \mathbb{R}^3$) incluyendo nociones tales como segmento de línea dirigida, punto, línea, plano, transformación geométrica.

El autor reporta, principalmente, la dificultad de la representación de estos tres modos y del cambio de uno a otro. Dreyfus et al. (1998) hacen uso de dichos modos de descripción y representación en el reporte de un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de las nociones de vector, transformación, transformación lineal así como vector propio en dos dimensiones con un enfoque conceptual. Para el diseño de las actividades utilizaron un software de Geometría Dinámica (CABRI II). El propósito de estos investigadores –al usar esta herramienta tecnológica– fue dar un acercamiento a estos conceptos, mediante un modelo que representa al espacio bidimensional que se describe mediante las siguientes características:

a) Un vector v en el espacio bidimensional está representado como una flecha en el plano euclidiano, dicha flecha tiene inicio en un punto distinguido llamado el "origen" y está representado como "O";
b) Dos vectores son iguales si son idénticos;
c) La suma de dos vectores u, v es el vector w tal que la figura $Ouwv$ es un paralelogramo[1].

Trabajando con este modelo, los autores, en principio, permitieron que los estudiantes se familiarizaran con el mismo, para que posteriormente se les introdujera el concepto de transformación (no necesariamente lineal). Por ejemplo, la representación de un vector v (de color azul) y una transformación T que representa rotación de un vector de 60 grados alrededor de O; de manera que al aplicar la transformación T al vector $v,$ el resultado es el vector v rotado 60 grados

[1] En el presente trabajo de investigación, llamamos a la propiedad del inciso c) como 'Regla del paralelogramo'.

alrededor de O, representado por un vector rojo y un símbolo $T(v)$ (véase la Figura 1.1).

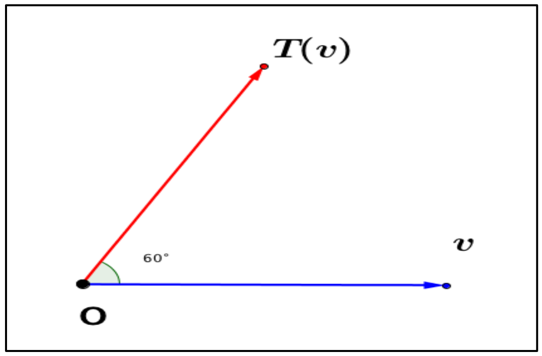


Figura 1.1. Una rotación del vector *v* de 60° como representación de una transformación

En sesiones posteriores, los autores fueron involucrando varias actividades en las que se mostraron las diferencias entre transformaciones no lineales y transformaciones lineales. Por ejemplo, se les preguntó: si dados un vector v y un número real k, entonces ¿$T(kv)$ coincide con $kT(v)$? Aunque los estudiantes comprobaron que en efecto esta condición era cierta con los vectores dados en la pantalla, no verificaron que la propiedad se seguía cumpliendo si se *arrastraba* el vector v. El arrastre de un vector v cualquiera se traduce en que fuera cierto para cualquier vector arbitrario v (para detalles específicos sobre la propiedad mencionada previamente véase Hillel, Sierpinska & Dreyfus, 1998).

Una de las dificultades que causa el modelo de espacio bidimensional, reportada por los autores, es el tipo de razonamiento de los estudiantes, pues aseguran que "$T(v)$ es la transformación de v" y no que "$T(v)$ es la imagen de v bajo T", de modo que los estudiantes ven la dependencia de v en $T(v)$ respecto a la posición de v. Para mostrar esta dependencia se basan en la siguiente construcción: Sobre la pantalla de CABRI II se representaron seis vectores, a saber: v_1, v_2, w_1, w_2, v y $T(v)$. El vector $T(v)$ fue construido de tal manera que T es una transformación lineal y además $w_k = T(v_k)$, para $k = 1, 2$. En otras palabras, si se usa una macro se puede construir $v = av_1 + bv_2$ y luego construir el vector $aw_1 + bw_2 = T(v)$.

Los estudiantes no tuvieron acceso a ninguna macro, pero podían mover libremente los vectores v_1, v_2, w_1 y w_2, y así obtener diferentes transformaciones lineales. En esa etapa de la actividad, los alumnos suponían haber entendido que el vector $T(v)$ estaba determinado por las posiciones mutuas de los vectores v_1, v_2, w_1 y w_2. Sin embargo, los estudiantes no lograron razonar como se esperaba para explicar dicha dependencia. El siguiente hecho da evidencia de lo anterior: se les solicitó a los estudiantes que definieran a la transformación T como una proyección en una recta dada L, en la que w_1 sea la proyección de v_1 en L y w_2 sea la proyección de v_2 en L. Los estudiantes no lograron realizar esta construcción de forma adecuada, ya que se enfocaron sólo en definir a $T(v)$ como la proyección de v en L, sin importar la dependencia de los demás vectores v_1, v_2, w_1 y w_2, por lo que su construcción no era consistente.

El hecho anterior resulta interesante ya que los estudiantes dan evidencia que no son conscientes de que una transformación lineal queda determinada por los vectores de una base y por las imágenes de esos vectores bajo la transformación lineal; esto equivale al problema de extensión lineal, problema que enunciaremos con más detalle en líneas posteriores.

En Sierpinska (2000) se reporta un estudio extenso; llevado a cabo entre 1993 y 1999. La autora menciona que la mayoría de los estudiantes tiene dificultades con el aprendizaje de conceptos de Álgebra Lineal, debido a que ellos optan por formas prácticas de pensar, en lugar de hacerlo de forma teórica. Con esta idea, y principios basados en Vygotsky (1987, citado en Sierpinska, 2000), la autora propone un marco de referencia que denomina: *pensamiento teórico versus pensamiento práctico.*

Sierpinska (2000) reporta que durante el periodo de 1996 a 1999 las distintas actividades que se presentaron fueron aplicadas en el ambiente del modelo de espacio bidimensional en CABRI II. Este software se usó de forma pedagógica y no como una herramienta para apoyar en procesos computacionales; también, se tomaron en cuenta, los modos 1, 2 y 3, explicados anteriormente. Uno de los experimentos de las actividades que reportó la autora (realizado a siete estudiantes de maestría en Matemática Educativa en un curso de Álgebra Lineal) que conciernen al problema de extensión lineal consistió en pedir a los estudiantes resolver el siguiente problema: dadas las imágenes de los vectores de una base bajo una transformación, construye una transformación lineal.

En el curso experimental, el problema estaba restringido a dos dimensiones, es decir, una transformación de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. También, no se solicitó explícitamente a los estudiantes que "extendieran esta transformación a todo el plano", pero se dio por hecho la existencia de tal extensión y se pidió a los estudiantes que determinaran la información que faltaba. Específicamente, se solicitó a los estudiantes que abrieran un nuevo archivo CABRI II; trazaran dos rectas numéricas; localizaran un punto O como origen y que representaran cuatro vectores etiquetados como $v_1, v_2, T(v_1)\ y\ T(v_2)$ (véase la Figura 1.2).

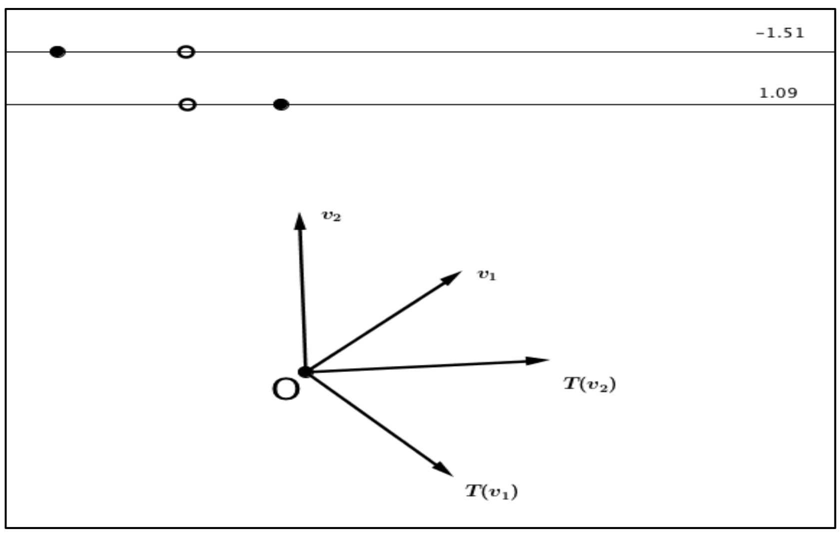


Figura 1.2. Problema de extensión lineal (adaptada de Sierpinska, 2000, p. 223)

El funcionamiento de las construcciones se explica de la siguiente manera:

> Las dos rectas numéricas permiten a los estudiantes producir dos variables, escalares independientes, mediante el movimiento de los puntos sombreados. Los números visibles encima de las rectas son las coordenadas de los puntos sombreados. El menú macro [de CABRI II] contiene funciones tales como "Suma de vectores", "Multiplicación por un escalar" y "Combinación lineal" que podían ser aplicadas a los vectores y escalares sobre la pantalla [de trabajo]. (Sierpinska, 2000, p. 223).

El problema se planteó de la siguiente manera: Suponiendo que los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$ son imágenes de los vectores v_1 y v_2 respectivamente, bajo alguna transformación lineal T, ¿con sólo esta información puedes construir:

i. $T(v_1 + v_2)$;
ii. $T(2v_1)$;
iii. $T(-1.5v_1 + 0.8v_2)$;
iv. $T(v)$, para un vector arbitrario v? (Sierpinska, 2000, p. 223)

En el reporte se clasificaron las siete respuestas de los estudiantes en tres tipos de soluciones:

- Solución formal: tres estudiantes evidenciaron lo que se denomina *obstáculo de formalismo*; trabajaron exclusivamente con lápiz-y-papel empezando con la ecuación $T(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2)$, y manipulándola. El obstáculo de formalismo surgió en el hecho de que los estudiantes de alguna manera remplazaron el concepto de transformación lineal con una ecuación y trataron de imitar las acciones realizadas sobre ella en la clase.
- Solución prototipo: tres estudiantes justificaron sus respuestas en términos de ejemplos prototipo, es decir; intentaron encontrar las transformaciones lineales, con base en transformaciones específicas: rotaciones, dilataciones, proyecciones, etc.
- Solución teórica: sólo un estudiante respondió el inciso iii de forma esperada (mediante el uso de las rectas numéricas escalares); además se dio cuenta que moviendo los puntos en las rectas numéricas, el vector se podría construir de forma variable, y así dio una solución al inciso iv. Sin embargo él no estaba seguro de su argumento.

Otro trabajo relacionado con el problema de "extensión lineal" fue llevado a cabo por Uicab y Oktaç (2006). Estas autoras reportan un estudio realizado a 8 estudiantes de maestría en Matemática Educativa, en un curso sobre aprendizaje de Álgebra Lineal. En esta investigación se hizo uso de los marcos de referencia: pensamiento teórico versus pensamiento práctico (Sierpinska, 2000) y obstáculo de formalismo (Dorier et al., 1997). Ellas dieron énfasis principal a la detección del *pensamiento sistémico* (Sierpinska et al., 2002) que “consiste en pensar acerca de sistemas de conceptos donde el significado de un concepto está basado en sus relaciones con otros conceptos y no en cosas o eventos” (citado en Uicab & Oktaç, 2006, p. 467). En este estudio se planteó como actividad principal la conformada por los problemas i, ii, iii y iv de Sierpinska (2000), usando el modelo de espacio bidimensional mencionado anteriormente. La investigación constó de tres etapas:

- En la primera se llevó a cabo un curso, cuyo objetivo era la oportunidad de ver y analizar ejemplos del uso de la tecnología, usando como ambiente tecnológico el Cabri-Géomètre II. Dicho curso fue distribuido en seis módulos, en los cuales se abordaron los siguientes temas (en orden cronológico): Comandos en Cabri-Géomètre II (vectores, igualdad de vectores y operaciones entre vectores), aplicaciones del lenguaje de los vectores en la Geometría, coordenadas de un vector en una base, cambios de base, transformaciones lineales. Este curso fue adaptado de un diseño de Sierpinska y sus colaboradores.
- En la segunda, se aplicó un cuestionario diagnóstico conformado por 12 reactivos distribuidos en seis secciones, cuyo contenido estuvo relacionado con transformaciones lineales; los estudiantes ya habían cursado los módulos 1-5 y parte del 6. El módulo 1 consistió en familiarizarse con los comandos de Cabri (vectores, igualdad de vectores y operaciones sobre los vectores); el módulo 2 trató sobre las aplicaciones del lenguaje de los vectores en la geometría; en el módulo 3 se estudió sobre las coordenadas de un vector de una base; en el módulo 4 se abordó el concepto de cambio de base y finalmente en los módulos 5 y 6 se abordaron situaciones alusivas a las transformaciones lineales (Uicab y Oktaç, 2006).

  Algunas de las preguntas fueron las siguientes:

  Sección 1: ¿Cómo defines una transformación lineal?; ¿Qué significa para ti una transformación lineal?

  Sección 3: Véase la Figura 1.3

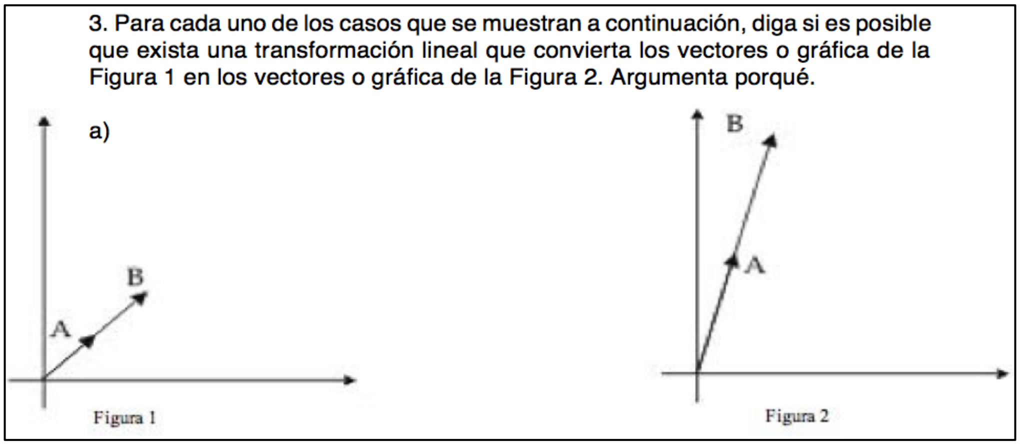


Figura 1.3. Inciso a) de la Sección 3 del cuestionario diagnóstico (Uicab & Oktaç, 2006, p. 478)

- En la tercera etapa, se llevó a cabo una entrevista conformada por tres actividades, que incluían el problema de extensión lineal (incisos i, ii, iii y iv). Los estudiantes trabajaron en grupos de dos personas.

Los resultados obtenidos por las investigadoras mostraron que sólo dos estudiantes resolvieron la actividad en forma esperada; sus soluciones se clasificaron como teóricas. De los demás estudiantes, aunque algunos lograron resolver las actividades i, ii y iii, no lograron dar una solución a la actividad iv. Las investigadoras esperaban que los estudiantes contestaran de la siguiente manera:

A. Construir v como combinación lineal de v_1 y v_2;
B. Escribir la relación $v = av_1 + bv_2$;
C. Aplicar la transformación lineal a la expresión del paso B y obtener
$$T(v) = T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2)\ ;$$
D. Finalmente, construir $T(v)$ como se indica en la última relación del paso C. (Uicab y Oktaç, 2006, p. 481)

Las investigadoras conjeturaron que los estudiantes no lograron resolver con éxito las actividades debido a que no pudieron hacer conexiones adecuadas entre los conceptos de base y de transformación lineal; sólo se enfocaron en tratar de dar una solución utilizando exclusivamente el concepto de transformación lineal. También, reportan que a pesar de haber participado en el curso, surgieron obstáculos de formalismo que consistió en dificultades para hacer conexiones entre conceptos geométricos, por ejemplo, los vectores y las construcciones geométricas involucradas entre ellos.

1.2 Problema de Investigación

La presente investigación está centrada en el problema de extensión lineal, que, como se mencionó en la revisión de la literatura, es importante, ya que involucra conceptos fundamentales para el aprendizaje de conceptos de Álgebra Lineal (por ejemplo, espacio vectorial, conjunto linealmente independiente y dependiente, base, combinación lineal y transformación lineal). Estos conceptos se incluyen en el currículo de distintas carreras (e.g., Matemáticas, Física, Actuaría, Economía, Química o Ingeniería Mecánica) en distintas universidades de nuestro país.

Es frecuente que, cuando se discute el concepto de transformación lineal, en algún curso de Álgebra Lineal, se le suele dar importancia a averiguar de manera mecánica las condiciones de la definición en términos algebraicos y no se le pone énfasis en desmenuzar, de manera concienzuda, sus propiedades. Este tipo de acciones propician que los conceptos no tengan sentido para los estudiantes; la mayoría de ellos quiere optar por una forma de pensar práctica, más que en una forma teórica (Sierpinska, 2000). Reflexionamos que el problema relacionado con el aprendizaje del concepto transformación lineal puede estar reflejado en los distintos modos de representación sugeridos por Hillel (2000) y mencionados anteriormente.

Con el afán de abordar una nueva mirada de conceptos del Álgebra Lineal, en nuestro presente estudio de investigación elegimos un grupo de estudiantes con conocimientos previos (generalmente representados en un ambiente simbólico) para extender estos conocimientos a un ambiente de representación geométrica.

Específicamente, pretendemos que los estudiantes, con ayuda de construcciones con regla-y-compás, apoyadas en un software de Geometría Dinámica, piensen y solucionen de manera geométrica el problema de extensión lineal. Considerando que generalmente las áreas de la Geometría y el Álgebra Lineal no se integran, este acercamiento puede proporcionar un contexto que lleve a establecer conexiones entre diferentes representaciones.

CAPÍTULO 2

MARCO TÉORICO Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo primero se introduce los elementos que definen al marco teórico sugerido por Dreyfus et al. (2015), llamado Abstracción en Contexto. Posteriormente se presenta los objetivos y preguntas de investigación que guían el presente trabajo.

2.1. Antecedentes

El marco *Abstracción en Contexto* (AIC[2]) es un marco teórico metodológico que tiene como objetivo el estudio de procesos de construcción, los que generan conocimiento abstracto en un contexto constituido por contenidos matemáticos, curriculares, históricos y sociales. El marco AIC surge con la finalidad de crear un puente entre los enfoques cognitivista de Freudenthal y socio-cultural de Davydov. Este puente tiene la finalidad de crear diseños para que ocurra abstracción.

El enfoque cognitivista de Freudenthal (1991, citado en Dreyfus et al., 2015) estudia ideas sobre la abstracción matemática, que a su vez conducen a la noción *matematización vertical*; este término se refiere a un proceso que lleva a la reorganización de conceptos que fueron previamente construidos en un ambiente puramente matemático. Asimismo, con este proceso los estudiantes construyen un nuevo *constructo* abstracto (el término "constructo" es usado en esta investigación, como lo sugieren Dreyfus et al. (2015), para referirse al resultado de una acción derivada de una construcción realizada por el estudiante).

Posteriormente, el marco AIC toma en consideración las ideas fundamentales de la noción de matematización vertical, para re-definir esta noción como *reorganización vertical*. Por un lado, esta última noción tiene la finalidad de

[2] Las siglas "AIC" se refieren a las palabras en el idioma ingles: Abstraction In Context.

distinguir entre lo que el profesor pretende con la matematización[3] y lo que sucede realmente en la reorganización. Por otro lado:

> En la reorganización vertical las construcciones anteriores sirven como bloques de construcción en el proceso de construcción. A menudo estos bloques de construcción no sólo se reorganizan, sino también están integrados y enlazados, lo que añade una capa de profundidad a los conocimientos del alumno, y da expresión a la naturaleza compuesta de las matemáticas. (Dreyfus et al., 2015, p. 187).

Para Davydov (1999) el surgimiento de la abstracción está descrito en su "método de ascenso a lo concreto":

> La abstracción comienza a partir de una primera forma inicial, simple, sin desarrollar y vaga, que a menudo carece de consistencia. El desarrollo de la abstracción procede del análisis, en la etapa inicial de la abstracción, a la síntesis. Es un proceso dialéctico que termina con una forma más coherente y elaborada. No procede de lo concreto a lo abstracto, sino de una forma subdesarrollada a una forma desarrollada. (citado en Dreyfus et al., 2015, p. 187).

El marco AIC toma en consideración el concepto de matematización y el método de ascenso a lo concreto, para definir *abstracción* como un proceso de reorganización vertical de los constructos matemáticos previos del estudiante, los cuales se realizaron dentro de las matemáticas y por medios matemáticos con el fin de llevar a una construcción que es nueva para el alumno (Dreyfus et al., 2015).

Este marco conceptual también adopta ideas basadas en la teoría de la actividad, tomando como fundamento teórico el de Giest (2005, citado en Dreyfus et al., 2015), el cual contempla procesos que están fundamentados en una filosofía cognitivista. Según este acercamiento, la génesis y el desarrollo de la abstracción matemática son el resultado de una secuencia de actividades, mediante una evolución continua, en el sentido de que los instrumentos, construidos mediante actividades previas, toman mayor sentido para los estudiantes.

[3] El término "matematización" se define como: "un re-esfuerzo reflexivo hecho por el estudiante hacia una construcción prevista por el matemático" (Freudenthal, 1999, citado en Dreyfus et al., 2015, p. 187).

2.1.1 Procesos de la génesis de abstracción: Necesidad, Surgimiento y Consolidación

Para el marco conceptual AIC las acciones que son observables por los investigadores y que representan el conocimiento de los estudiantes, son llamadas las acciones epistémicas; estas acciones son la base de la génesis de abstracción, misma que pasa a través de un proceso de tres etapas, que incluye la *necesidad* de un nuevo constructo, el *surgimiento* de un nuevo constructo y la *consolidación* de este constructo.

2.1.1.1 *Necesidad*

La etapa de la necesidad de un nuevo constructo es fundamental para que se produzca la abstracción; si esta no se manifiesta la génesis de la abstracción no surgiría. De acuerdo con Davydov (1990, citado en Dreyfus et al., 2015) la abstracción comienza de una forma subdesarrollada a una desarrollada. Por esta razón, los investigadores tienen que hacer un esfuerzo en el diseño de las actividades para que surja en los estudiantes esas formas subdesarrolladas que motiven a los estudiantes a participar en el proceso de abstracción.

> La necesidad de los alumnos de nuevos conocimientos es inherente al diseño de tareas, pero esta necesidad es una etapa importante del proceso de abstracción y debe preceder al proceso de construcción, la reorganización vertical de construcciones existentes previas. Esta necesidad de una nueva construcción permite el enlace entre el conocimiento del pasado y la futura construcción. Sin el análisis Davydoviano, esta necesidad, que debe preceder al proceso de construcción, podría ser visto ingenuamente y mecánicamente, pero con el análisis de la dialéctica de Davydov la abstracción proviene de una primera forma indefinida inicial a una forma construida y coherente en una relación de dos vías entre lo concreto y lo abstracto –el alumno necesita el conocimiento para dar sentido a una situación–. En el momento en que un alumno se da cuenta de la necesidad de una nueva construcción, el alumno ya tiene una forma vaga inicial de construir el futuro como resultado de los conocimientos previos. Al darse cuenta de la necesidad de la nueva construcción, el alumno entra en una segunda etapa en la que él o ella está lista para construir con su conocimiento previo con el fin de desarrollar la forma inicial a una consistente y elaborada forma superior, el nuevo constructo, que ofrece una explicación científica de la realidad. (Kidron &

Monaghan, 2009, citado en Dreyfus et al., 2015, pp. 86-87).

2.1.1.2 *Surgimiento (Acciones epistémicas: RBC)*

En la etapa de surgimiento se analiza y describe el inicio de nuevos constructos que son el resultado de la necesidad del estudiante. Estos constructos son analizados mediante tres acciones epistémicas (RBC):

1. *Reconocimiento* (Recognizing): El alumno identifica la relevancia de constructos previos al problema o situación que tiene presente.
2. *Edificando-con* (Building-with): El alumno comprende el uso y la combinación de constructos reconocidos, con el fin de lograr un objetivo localizado, tales como la actualización de una nueva estrategia, una justificación o la solución de un problema.
3. *Construcción* (Constructing): El alumno utiliza matematización vertical para reunir e integrar constructos previos y así producir un nuevo constructo.

Las acciones RBC dan como resultado nuevos constructos; estos pueden ser identificados o no por el estudiante y generalmente dependen del contexto, de modo que estas construcciones pueden ser al principio frágiles, ya que no se garantiza que las nuevas construcciones sean totalmente adquiridas por el alumno. Por esta razón, estos constructos son flexibles, en el sentido que pueden ir cambiando continuamente.

2.1.1.3 *Consolidación (Modelo RBC + C)*

Esta etapa es un proceso sin fin en el que el estudiante toma conciencia de su constructo (adquirido mediante las acciones RBC) y, adquiere más flexibilidad y confianza para usar esta construcción. Para el estudiante el constructo se hace evidente por sí mismo y va conectando acciones de construcción sucesivas que están estrechamente relacionadas con el diseño de secuencias de actividades.

Las acciones epistémicas RBC están anidadas: La acción B depende de la acción R y la acción C depende de las acciones R y B; las acciones R y B son bloques de construcción de la acción C. “Las acciones que involucran un proceso

Construcción a veces se anidan dentro de acciones más complejas u holísticas, de otro proceso Construcción" (Hershkowitz et al., 2007, p. 44). Debido a estas características Dreyfus et al. (2015) llaman a este modelo de las acciones epistémicas anidadas dinámicamente "Modelo de abstracción en contexto", simplificado como Modelo RBC, o Modelo RBC + C, con la última letra C para hacer énfasis en la importancia de la etapa y proceso Consolidación. En la figura 2.1 se da un panorama general de cómo la abstracción es vista como una actividad compuesta de acciones.

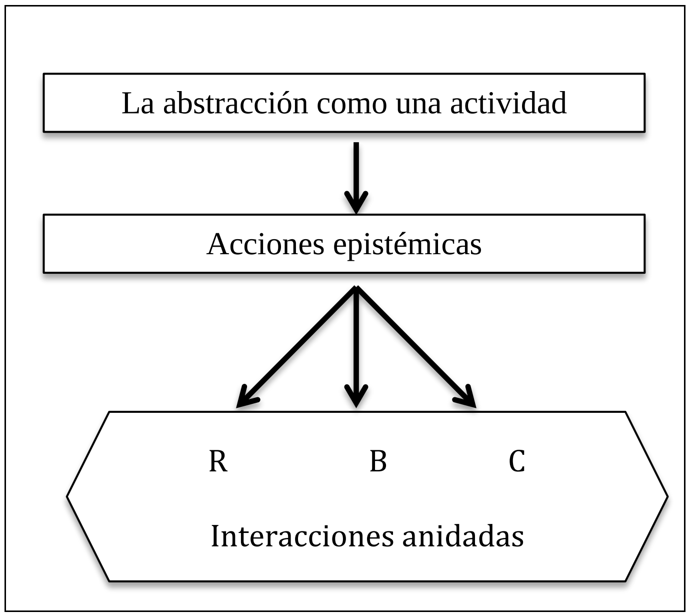


Figura 2.1. Esquema de la abstracción vista como una actividad (adaptada de Dreyfus, s. f., p. 2)

En la presente investigación se toma en cuenta el modelo RBC+C para el diseño de la secuencia de actividades, relacionadas con el problema de extensión lineal. La elaboración de dichas actividades se lleva a cabo con la finalidad que el estudiante, que está cursando una maestría en Matemática Educativa, manifieste procesos de abstracción mediante las tres etapas consideradas en nuestro marco teórico (Necesidad, Surgimiento y Consolidación) y que a su vez estas actividades propicien al estudiante la necesidad de nuevas acciones, de tal forma que permita la evolución continua de los procesos RBC+C para generar diferentes constructos, y que estos constructos sirvan como herramientas al abordar el problema de extensión lineal geométricamente.

Con el marco conceptual AIC se pretende realizar un micro-análisis a nuestra Secuencia de Actividades en el sentido de la siguiente cita:

> Atamos los datos y su análisis en conjunto a lo largo de un lapso de tiempo de varias [sesiones de] clases con el fin de observar y analizar el proceso Construcción de los estudiantes de un nuevo conocimiento matemático en una actividad, y para observar y analizar en detalle si y cómo ellos usan este conocimiento en futuras actividades, esto es, si y cómo ellos consolidan los conocimientos construidos (Hershkowitz et al., 2007, p. 43).

2.2 Objetivo general de la investigación

El objetivo general que guía nuestra investigación es el siguiente: identificar los procesos de abstracción que estudiantes de maestría en Matemática Educativa reflejan al realizar construcciones geométricas para solucionar el problema de extensión lineal representado en un ambiente de Geometría Dinámica. Para este propósito implementamos actividades diseñadas en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológicos. Con el fin de lograr lo anterior, contemplamos el siguiente objetivo particular.

2.2.1 Objetivo particular

Diseñar e implementar una Secuencia de actividades que permita a los estudiantes realizar construcciones geométricas que influencien una solución geométrica al problema de extensión lineal en un ambiente de Geometría Dinámica.

2.3 Justificación de los objetivos

Como se plantea en nuestro objetivo general, queremos identificar los conocimientos (abstractos) que reflejan los estudiantes cuando se enfrentan a una representación geométrica, que es nueva para ellos, de objetos del Álgebra Lineal. Para tener una base teórica de cómo identificar esos conocimientos o procesos que reflejan conocimiento, decidimos elegir la metodología que nos proporciona la teoría del marco teórico AIC, ya que consideramos que proporciona un acercamiento adecuado para alcanzar nuestro objetivo.

Ahora bien, respecto a nuestro objetivo particular, como mencionamos en el Capítulo 1 de esta tesis, consideramos que es importante el estudio de las representaciones de objetos matemáticos, ya que las diferentes representaciones proporcionan diferentes interpretaciones a dichos objetos, lo cual enriquece el significado de los mismos. En nuestro estudio, elegimos darle una mirada nueva al problema de extensión lineal; decidimos estudiar este problema bajo una representación geométrica con ayuda del software GeoGebra. Por ello tomamos la decisión de diseñar una secuencia didáctica que involucra construcciones geométricas derivadas de trazos de regla-y-compás, esto con la finalidad que los estudiantes se vean influenciados en pensar de manera geométrica los conceptos del Álgebra Lineal (aquellos que se presentan en el problema de extensión lineal). Específicamente, en nuestra secuencia didáctica pretendemos que los estudiantes construyan una solución geométrica a dicho problema.

Consideramos que es interesante estudiar el problema de extensión lineal bajo una mirada geométrica con ayuda del software GeoGebra, debido a que puede proporcionar conexiones interesantes en términos de aprendizaje para el estudiante. Por ejemplo, si el estudiante logra construir una solución geométrica a dicho problema, entonces puede realizar la misma construcción para verificar cuál es la imagen bajo esa transformación lineal de objetos geométricos como una recta, una circunferencia, una elipse, etc. Estos experimentos pueden ser interesantes ya que consideramos que se obtiene nuevas interpretaciones de objetos matemáticos que pueden ofrecer oportunidades a los estudiantes para realizar más reflexión sobre el significado de una transformación lineal y sus propiedades. Además, resulta interesante estudiar la relación de objetos geométricos con objetos algebraicos, ya que comúnmente estas áreas de estudio no se conectan en los estudios de investigación de Matemática Educativa.

Por último, como mencionamos anteriormente, en nuestra secuencia didáctica pretendemos influenciar una solución geométrica al problema de extensión lineal, esto con ayuda de construcciones geométricas. Además, al implementar nuestra secuencia didáctica queremos identificar los conocimientos abstractos que reflejan los estudiantes al realizar dichas construcciones; es por eso que nos planteamos las siguientes preguntas de investigación.

2.4 Preguntas de investigación

1. ¿Los estudiantes que han adquirido los conocimientos necesarios para realizar construcciones geométricas relacionadas con combinaciones lineales y las propiedades que definen a una transformación lineal, de qué manera hacen uso de dichos conocimientos cuando trabajan para dar una solución geométrica al problema de extensión lineal?
2. ¿Qué procesos de abstracción reflejan los estudiantes al abordar actividades relacionadas con el problema de extensión lineal en un ambiente de geometría?

CAPÍTULO 3

MÉTODO

En el Capítulo 1 se revisó la literatura existente en torno a la enseñanza y aprendizaje relacionada con la problemática de extensión lineal. Estos trabajos reportan, sobre el fenómeno de obstáculo de formalismo que manifiestan los estudiantes, como resultado de la apropiación de conocimientos aislados en lugar de conocimientos estructurados. También en estas investigaciones se han propuesto diferentes secuencias didácticas, diseñadas en ambientes de lápiz-y-papel y con el apoyo de tecnología, con el fin de ofrecer maneras de abordar el problema de extensión lineal.

Con ideas similares, diseñamos una secuencia de actividades elaboradas de acuerdo al marco teórico de Abstracción en Contexto (Dreyfus et al., 2015) y que tienen la finalidad de que los estudiantes de maestría en Matemática Educativa, participantes en nuestro estudio, creen conexiones adecuadas entre distintos conceptos relacionados con la problemática de extensión lineal y que dichas conexiones se vean reflejadas como distintos procesos que involucren la reorganización de sus conocimientos matemáticos previos para poder construir nuevos conocimientos; estos procesos, conjeturamos que permitirán que los estudiantes hagan una abstracción de diferentes conceptos matemáticos. En dichas Actividades se da prioridad a la interacción entre los registros algebraicos (lápiz-y-papel) y geométricos (medio geométrico). Usamos dicho marco teórico con el objetivo de identificar y analizar las acciones epistémicas o procesos de abstracción que reflejan los estudiantes, al implementar la secuencia de actividades. Estas acciones epistémicas son el resultado de la necesidad, el surgimiento, la consolidación y la interacción anidada entre estos.

En el presente capítulo presentamos el método implementado para lograr los objetivos de nuestra investigación. Describimos la población que participó en la implementación de nuestras actividades; además, mencionamos las herramientas utilizadas para la recolección de datos. Finalmente, presentamos el análisis *a priori* de nuestra secuencia de actividades, señalando las soluciones que esperamos produzcan los estudiantes al abordar cada una de las actividades. Asimismo, en cada actividad (que involucre tecnología) mencionamos las posibles acciones epistémicas: Reconocimiento, Edificando-con, Construcción y Consolidación, de acuerdo al marco teórico Abstracción en Contexto (Dreyfus et al., 2015), que pudieran reflejar los estudiantes al abordarla.

3.1 Selección y descripción de la población

La presente investigación se realizó con doce alumnos del nivel maestría, quienes cursaban la materia de Álgebra y Geometría en el segundo semestre en la maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, de una institución de la Ciudad de México. De los doce alumnos siete son hombres y cinco son mujeres y su edad se encontraba dentro del rango de 25 y 35 años. La formación de los estudiantes era la siguiente: Ingeniero Civil, Ingeniero Industrial, Ingeniero Físico, Licenciado en Informática, Licenciado en Ciencias de la Educación, Licenciada en Física, Profesor en Matemáticas, Licenciada en Matemáticas Aplicadas, Licenciado en Física y Matemáticas, Licenciado en Matemáticas y dos Licenciadas en Matemáticas. Cabe mencionar que en nuestra investigación no hicimos hincapié en observar los efectos que pudieron surgir debido al perfil de cada estudiante.

Para la realización de las actividades, era necesario que los estudiantes hubieran estudiado, en algún momento, los conceptos del Álgebra Lineal: espacio vectorial, base de un espacio vectorial, conjunto linealmente independiente, conjunto linealmente dependiente, transformación y transformación lineal. Esto no fue problema ya que los estudiantes durante su trayectoria escolar universitaria, o cursaron al menos un curso básico de Álgebra Lineal o llevaron materias de matemáticas superiores que involucraban estos conceptos. Otro requisito necesario era el manejo de un Software de Geometría Dinámica (GeoGebra). Como los doce estudiantes manejaban de forma eficiente dicho software, ya que en un semestre anterior habían cursado materias en las que utilizaron este software, resultó muy adecuada esta población para los fines de nuestro proyecto de investigación.

3.2 Selección y uso de la herramienta tecnológica

Elegimos el uso del software GeoGebra debido a las siguientes consideraciones: por un lado, es un software gratuito que está diseñado para la enseñanza de las matemáticas; por otro lado, es un software que nos proporciona las herramientas necesarias para los fines de nuestra investigación. Puntualmente, dicho software facilita una representación de un modelo similar al modelo bidimensional, descrito en el Capítulo 1 de esta tesis; con nuestro modelo pretendemos abordar el problema de extensión lineal contextualizado en términos geométricos. Además, nuestra secuencia didáctica incluye la realización de trazos geométricos derivados de la Geometría Euclidiana y como este software facilita dichos trazos –más aún los objetos geométricos representados son por lo regular dinámicos–, es por eso que elegimos dicho software ya que nos permite abordar el problema de extensión lineal desde un punto de vista no usual.

3.3. Diseño y descripción global de la secuencia de actividades

En este apartado vamos a explicar de forma global los objetivos del diseño de la secuencia de actividades; asimismo, vamos a mencionar cómo se espera que se manifiesten las etapas de la génesis de abstracción del marco Teórico AIC, a saber, Necesidad, Surgimiento y Consolidación, en la secuencia de actividades.

Con el objetivo de que los estudiantes manifiesten procesos de abstracción al abordar la problemática de extensión lineal, se diseñó una secuencia de tres actividades. Las dos primeras actividades se diseñaron con el objetivo principal de que los estudiantes pudieran adquirir nuevos conocimientos (las construcciones geométricas de una combinación lineal y de las propiedades que definen a una transformación lineal), que a nuestro punto de vista, son fundamentales antes de abordar directamente el problema de extensión lineal que está involucrado en la Actividad 3.

Como los estudiantes estudiaron, en algún momento, los conceptos de combinación lineal de elementos de una base de $\mathbb{R}^2$ exclusivamente en un ambiente de lápiz-y-papel, se pretendía que, mediante la Actividad 1, los estudiantes con ayuda de sus conocimientos algebraicos previos y del software GeoGebra, pudieran construir, utilizando exclusivamente métodos de Geometría Euclidiana, la combinación lineal de los elementos de una base de $\mathbb{R}^2$. Esto último se tomó en consideración, debido a que los estudiantes en un semestre anterior tuvieron la oportunidad de interactuar con construcciones de Geometría Euclidiana, representada en el ambiente geométrico dinámico del software GeoGebra. Además, los estudiantes nunca habían tenido la oportunidad de interactuar con conceptos de Álgebra Lineal en algún software de Geometría Dinámica. Es por ello que en la Actividad 1 se involucran dos etapas de la génesis de abstracción del Marco teórico AIC: Necesidad y Surgimiento, como se explica a continuación.

En las Actividades 1 y 2 se espera que la etapa Necesidad se vea manifestada, debido a que los estudiantes nunca han interactuado con conceptos del Álgebra Lineal en un ambiente de Geometría Dinámica. Además, se espera que los estudiantes al momento de intentar conectar el concepto de combinación lineal y las propiedades que definen a una transformación lineal (propiedad de producto por un escalar y propiedad de la suma) en los ambientes algebraicos y geométricos se vean manifestadas acciones epistémicas, dando como evidencia la etapa Surgimiento; específicamente, se espera que los alumnos reorganicen sus constructos matemáticos previos para crear nuevas construcciones (para los estudiantes) en GeoGebra. Asimismo, es importante mencionar que en estas actividades pueden surgir procesos de Consolidación, esto lo expondremos con más detalle en líneas posteriores.

En la Actividad 3 se involucra el problema de extensión lineal restringido a $\mathbb{R}^2$. En este punto, como uno de los objetivos del diseño de la secuencia se espera que los estudiantes sean conscientes de los constructos que se adquirieron en las actividades 1 y 2, de tal forma que ellos puedan identificar que la Actividad 3, en cierto sentido, es la realización de las actividades 1 y 2 en una sola. Debido a esto se espera que los estudiantes realicen acciones donde se manifieste la etapa Consolidación referente al problema de extensión lineal. Específicamente, se conjetura que el estudiante podrá ser lúcido de sus construcciones adquiridas en las actividades previas, de tal forma que se facilite la utilización de estas y que dichas construcciones adquieran sentido para dar solución al problema de extensión lineal restringido a $\mathbb{R}^2$.

3.4. Análisis *a priori* de la secuencia de actividades

En esta sección se realiza un análisis *a priori* de la secuencia de actividades, en el sentido de pre-ver qué tipo de acciones epistémicas de los estudiantes se pueden observar durante la implementación de la secuencia. De acuerdo con Dreyfus et al. (2015) es importante describir las posibles trayectorias de aprendizaje de los estudiantes durante la implementación de las actividades y tenemos que tener presente la pregunta siguiente: ¿qué conocimiento es útil o incluso necesario para hacer frente a la tarea?; esta pregunta debe guiar el análisis *a priori*. Según los mismos autores dicho análisis es de suma importancia ya que proporciona una hipótesis de trabajo que nos sirve como base para posteriormente ser comparada con un análisis posterior, que puede ser confirmado o modificado por el micro-análisis de los datos.

Por ello consideramos pertinente dar una descripción lo más detallada posible de cada actividad, con sus respectivos objetivos y sus posibles soluciones; y en el caso de las actividades que involucran construcciones geométricas se pretende identificar situaciones en dónde pueden surgir los procesos epistémicos Reconocimiento, Edificando-con, Construcción y Consolidación motivados por las etapas Necesidad, Surgimiento y Consolidación de la génesis de abstracción del marco Teórico AIC. Cabe mencionar que pretendemos utilizar el modelo RBC+C únicamente en las acciones donde se involucren construcciones geométricas, dado que los estudiantes ya cuentan con conocimientos previos contextualizados en un ambiente algebraico, por lo que no contemplamos que existan conocimientos nuevos en dicho ambiente, para poder interpretarlos bajo las acciones RBC+C. Por último, la secuencia puede consultarse en el Apéndice de esta tesis.

3.4.1 Actividad 1. Representaciones geométricas y algebraicas de vectores como combinación lineal de elementos de una base de $\mathbb{R}^2$

Objetivo: En esta actividad se espera que los estudiantes relacionen las representaciones algebraicas y geométricas de los conceptos combinación lineal, independencia/dependencia lineal y base, para posteriormente poder construir de manera geométrica en GeoGebra un vector como combinación lineal a partir de dos vectores de una base de $\mathbb{R}^2$, utilizando métodos de Geometría Euclidiana. Con el afán de lograr lo pretendido anteriormente, la Actividad 1 se diseñó en tres secciones que presentamos a continuación, junto con posibles soluciones de las mismas.

3.4.1.1 Sección 1.1 Actividades con lápiz-y-papel

Esta sección está constituida por dos Actividades:

Actividad 1.1: Tiene como objetivo recolectar información sobre las concepciones que tienen los estudiantes del concepto de conjunto linealmente independiente.

El enunciado de dicha actividad es el siguiente: Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: $v_1 = (0,8)$ y $v_2 = (4,0)$. Justifica por qué v_1 y v_2 son linealmente independientes. "No basta decir porque son elementos de la base".

Posibles soluciones: Para contestar la pregunta, los estudiantes pueden emplear alguno de los siguientes razonamientos:

1. Para todo número real λ, no es posible que:

   $(0,8) = \lambda(4,0)$ o $(4,0) = \lambda(0,8)$, ya que:

   Si $(0,8) = \lambda(4,0)$, entonces $0 = 4\lambda$ y $8 = \lambda 0 = 0$, lo que es imposible. Análogamente, pasa un hecho imposible si suponemos que $(4,0) = \lambda(0,8)$.
2. Para todo par de números reales λ_1 y λ_2, tales que $\lambda_1(0,8) + \lambda_2(4,0) = 0$, se cumple si $4\lambda_2 = 0$ y $8\lambda_1 = 0$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
3. Los vectores dados no son colineales.

Actividad 1.2: Esta actividad tiene como objetivo recolectar información sobre las concepciones que tienen los estudiantes de los conceptos de combinación lineal y de conjunto generador restringidos a $\mathbb{R}^2$ en su representación algebraica.

El enunciado de dicha actividad es el siguiente: Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: $v_1 = (0,8)$ y $v_2 = (4,0)$. Justifica por qué es posible escribir el vector $v = (x,y)$ como combinación lineal de v_1 y v_2.

En la hoja de trabajo aparece que justificaran para un vector $v = (x, y)$, pero durante la ejecución de las actividades se les indicó a los estudiantes que eligieran un vector particular v, debido a que este vector lo seguirían ocupando en actividades posteriores

Posible solución: Si por ejemplo el alumno elige el vector $v = (2, 1)$, entonces se muestra que existe un par de números reales λ_1 y λ_2, tales que:

$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Esta igualdad es posible lograrla dado que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v = (2,1) \iff \lambda_1(0, 8) + \lambda_2$$

$$(4,0) = (2,1) \iff$$

$$\iff (0, 8\lambda_1) + (4\lambda_2, 0) = (2,1) \iff (4\lambda_2, 8\lambda_1) = (2,1) \iff$$

$$\iff \quad 4\lambda_2 = 2 \quad \text{y} \quad 8\lambda_1 = 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda_2 = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_1 = \tfrac{1}{8}$$

$$\Longrightarrow \qquad v = \frac{1}{2}\, v_1 + \frac{1}{8}\, v_2.$$

Cabe mencionar que el proceso anterior siempre será válido para cualquier vector v que elija cada estudiante, pues v_1 y v_2 forman una base para $\mathbb{R}^2$.

3.4.1.2 Sección 1.2 Actividad con tecnología

Esta sección está constituida por una actividad que se explica a continuación.

Actividad 1.3: El objetivo de esta actividad es, por un lado, detectar si los estudiantes reconocen, mediante el proceso Reconocimiento, motivado por la sección anterior de la Actividad, que el concepto de combinación lineal de dos elementos de una base de $\mathbb{R}^2$ puede ser representado geométricamente utilizando GeoGebra. Por otro lado, nos interesa saber si los estudiantes pueden construir y representar, mediante los procesos Edificando-con y Construcción, de manera geométrica en GeoGebra dicha combinación lineal.

El enunciado de esta actividad es el siguiente: Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: $v_1 = (0, 8)$ y $v_2 = (4, 0)$. Dado el vector $v = (x, y)$, justifica si es posible trazar el vector v como combinación lineal de v_1 y v_2, usando métodos de geometría Euclidiana. Ejecuta el archivo *Actividad_1.3*.

En esta actividad los estudiantes tienen que elegir dos valores específicos para x e y. Por ejemplo en la Figura 3.1, se muestra el caso cuando $x = 2 = y$.

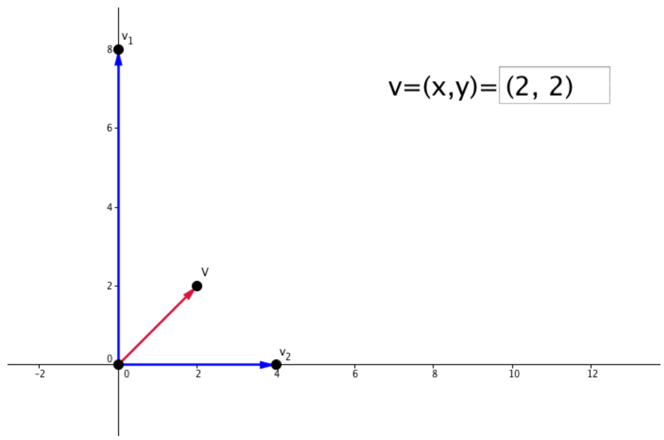


Figura 3.1. Actividad 1.3, con valores $\boldsymbol{x = 2}$ e $\boldsymbol{y = 2}$

Posible solución ($\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{B_1}$ y $\boldsymbol{C_1}$)[4] : La construcción se puede realizar con los pasos que mostramos a continuación y que se pueden guiar con la Figura 3.2.

a) Con la función "Recta Paralela" en GeoGebra, se construyen las rectas L_{v_1} y L_{v_2} que prolongan a los vectores v_1 y v_2, respectivamente.
b) De igual manera que en el paso a), se construyen las rectas R_{v_1} y R_{v_2} que pasan por el punto terminal del vector v y que son paralelas a las rectas L_{v_1} y L_{v_2}, respectivamente.
c) Con la función "Intersección de Dos Objetos" en GeoGebra, se encuentran las intersecciones de L_{v_1} con R_{v_2} y de L_{v_2} con R_{v_1}. Estas intersecciones serán los vectores $\lambda_1 v_1$ y $\lambda_2 v_2$ cuya suma es la combinación lineal buscada, donde λ_1 y λ_2 son dos números reales.

La solución que mencionamos anteriormente es una propuesta de cómo los estudiantes pueden solucionar el problema, sin embargo no creemos que sea única,

[4] En esta solución se involucra una construcción donde se evidencian los procesos epistémicos Reconocimiento, Edificando-con y Construcción del marco AIC; estos procesos los denotamos como R_1, B_1 y C_1, respectivamente ya que representan el inicio del camino.

dado que los estudiantes pueden emplear estrategias diferentes para realizar las mismas construcciones, por ejemplo, algún estudiante puede utilizar rectas perpendiculares en lugar de rectas paralelas, etc. En nuestro ejemplo (solución) podemos ver que el alumno primero tiene que identificar, mediante el proceso R_1 que una combinación lineal puede ser representada en un contexto geométrico, posteriormente tiene que utilizar el proceso B_1 para reorganizar sus constructos previos y crear una estrategia, en este caso la estrategia fue utilizar la suma de vectores. Finalmente, el alumno utiliza el proceso C_1 para realizar las construcciones geométricas mencionadas en los pasos a) hasta c).

.

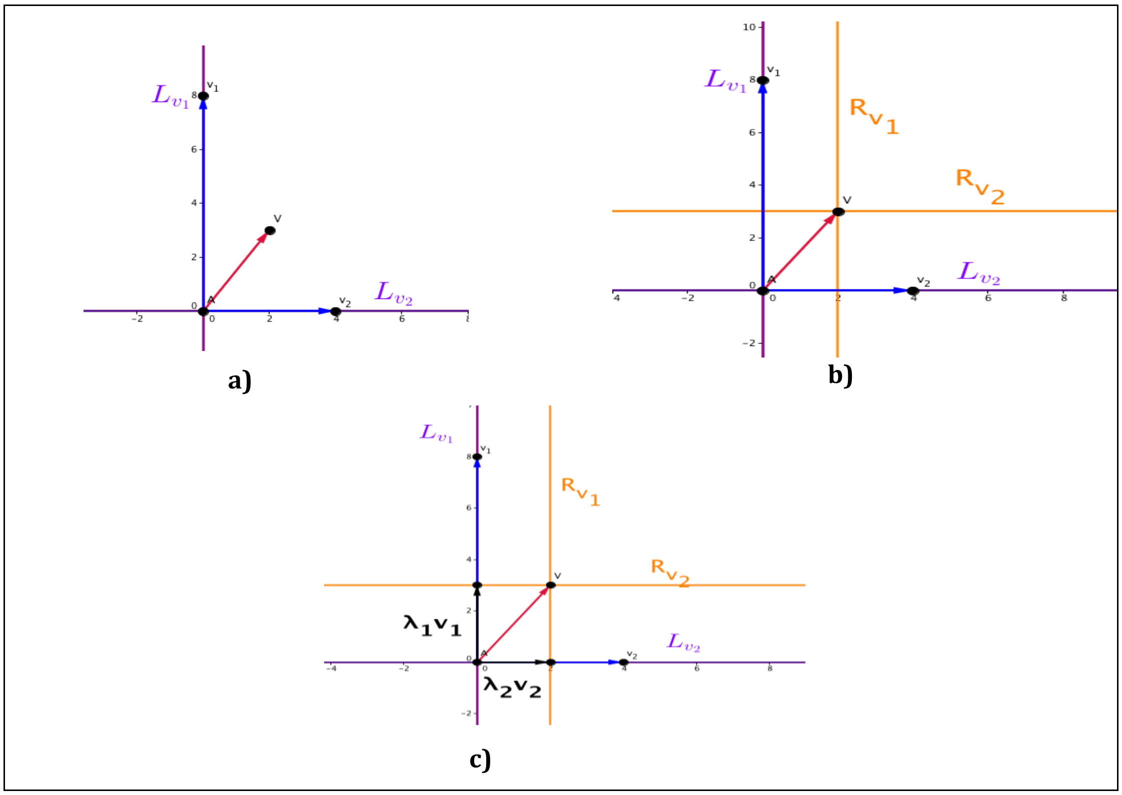


Figura 3.2. Pasos de la solución de la Actividad 1.3

3.4.1.3 Sección 1.3 Actividades con lápiz-y-papel y tecnología

Esta sección está constituida por las Actividades 1.4, 1.5 y 1.6. El objetivo de la Actividad 1.4 es que los alumnos interactúen, comparen y reflexionen sobre sus resultados que obtuvieron en el ambiente de lápiz-y-papel y en el ambiente geométrico, para que finalmente logren obtener nuevos constructos, mediante el proceso Construcción, acerca del concepto de combinación lineal. Las actividades 1.5 y 1.6 tienen el mismo objetivo que las actividades 1.3 y 1.4, respectivamente, aunque se conjetura que las actividades 1.5 y 1.6 propician más la abstracción que en las actividades 1.3 y 1.4, debido a que los vectores que conforman la base no pertenecen a los ejes coordenados.

Enunciado de la Actividad 1.4: Con los mismos datos de la Actividad 1.3, escribe de forma algebraica el vector v como combinación lineal de v_1 y v_2. Compara tus resultados con los que obtuviste en la Actividad 1.3. Si tus resultados no coinciden ¿qué puedes hacer para ajustarlos?

Posible solución (Actividad 1.4): Se espera que los estudiantes encuentren de forma algebraica la combinación lineal pedida y después comparen estos resultados con los datos que obtuvieron de la Actividad 1.3. Específicamente, se pretende que los estudiantes comparen las coordenadas de los vectores obtenidas con GeoGebra, con las obtenidas en sus datos algebraicos, a lápiz-y-papel.

Enunciado de la Actividad 1.5: Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: $v_1 = (6, 2)$ y $v_2 = (-2, 4)$. Dado el vector $v = (x, y)$, justifica si es posible trazar el vector v como combinación lineal de v_1 y v_2, usando métodos de geometría Euclidiana. Ejecuta el archivo *Actividad_1.5*.

Posible solución (Actividad 1.5): Se espera que los estudiantes respondan exactamente igual que en la Actividad 1.3, de modo que se pretende que los estudiantes empiecen con el proceso de Consolidación (+C_1) que se deriva de los procesos R_1, B_1 y C_1, manifestados en la actividad 1.3 (véase la solución de la Actividad 1.3).

Enunciado de la Actividad 1.6: Con los mismos datos de la Actividad 1.5, escribe de forma algebraica el vector v como combinación lineal de v_1 y v_2. Compara tus resultados con los que obtuviste en la Actividad 1.5.

Posible solución (Actividad 1.6): se espera la misma solución que en la Actividad 1.4.

Comentario: Antes de continuar con el análisis *a priori* de las actividades 2 en adelante, queremos comentar sobre su diseño. Durante la primera implementación de la Actividad 1, nos percatamos que en el caso de la mayoría de los estudiantes, al momento de llegar a las sub-actividades relativas al uso de la tecnología no surgió la etapa de Necesidad. Se les había pedido a los estudiantes que para representar una combinación lineal en GeoGebra utilizaran herramientas del software que se derivan de trazos de la Geometría Euclidiana, esto con el afán de que no utilizaran las herramientas más avanzadas del software; sin embargo el diseño de las actividades no llevó a esta construcción como una necesidad. Nos permitimos mostrar un ejemplo para poder explicar mejor esta situación: Supongamos que en la Actividad 1.2, $v = (x, y) = (8, 16)$; entonces la solución será:

$$v = 2(0,8) + 2(4,0) = 2v_1 + 2v_2.$$

Luego, en la Actividad 1.3, se les pedía con los mismos datos de la Actividad 1.2, que trazaran la combinación lineal en GeoGebra. En este punto casi todos los alumnos, utilizaron la ecuación $v = 2v_1 + 2v_2$ (obtenida en la Actividad 1.2), en el sentido de que para obtener la combinación lineal, simplemente obtuvieron los vectores $2v_1$ y $2v_2$, argumentando que la suma de estos dos vectores era la combinación lineal buscada. Cabe aclarar que algunos estudiantes sí utilizaron métodos de Geométrica Euclidiana. Por ejemplo, para trazar $2v_1$un estudiante trazó una circunferencia con centro en v_1 y que pase por el origen, luego trazó una recta que pase por v_1 y la intersección (distinta del origen) de esta recta con la circunferencia es el vector buscado. Pero, otros estudiantes trazaron directamente $2v_1$ y $2v_2$, simplemente insertando estos objetos con funciones de GeoGebra. Aunque no calificamos de incorrecto lo que los estudiantes contestaron, nosotros como investigadores esperábamos la solución presentada anteriormente de la Actividad 1.3, para que se centraran únicamente en representaciones geométricas. El diseño de las actividades 2 y 3 toma en cuenta esta situación.

3.4.2 Actividad 2. Propiedades de las transformaciones lineales

Con base en el marco AIC, esta actividad tiene como objetivo que los estudiantes reconozcan, comprendan y construyan, mediante los procesos Reconocimiento, Edificando-con y Construcción, respectivamente, conexiones adecuadas entre las representaciones algebraica y geométrica, de las dos propiedades principales que definen a las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$: propiedad de producto por un escalar y propiedad de la suma. Estas conexiones, a su vez, se espera que potencien la abstracción de los estudiantes en torno al concepto de transformación lineal. La actividad 2 está constituida por tres secciones que se describen a continuación, junto con sus posibles soluciones.

3.4.2.1 Sección 2.1. Actividad con lápiz-y-papel

Esta sección está constituida por la siguiente actividad:

Actividad 2.1: Tiene el objetivo de analizar las concepciones algebraicas de los estudiantes sobre la propiedad de multiplicación por un escalar de las transformaciones lineales.

El enunciado de esta actividad es el siguiente: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (x, y)$. Justifica por qué si se conoce $T(v)$, entonces es posible obtener: $T(3v)$, $T(\pi v)$, y $T(-v)$.

Posible solución: Si conocemos $T(v)$, entonces $T(kv) = k\,T(v)$, esto por la propiedad de producto por un escalar de T, de modo que $T(kv)$ queda en función de $T(v)$, salvo por un múltiplo escalar de k, con $k \in \{3, \pi, -1\}$.

3.4.2.2 Sección 2.2. Actividad con tecnología

Esta sección está constituida por una actividad que se explica a continuación.

Actividad 2.2: El objetivo de esta actividad es, por un lado, detectar si los estudiantes identifican, mediante el proceso Reconocimiento, que la propiedad de producto por un escalar de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$, puede ser representada en un ambiente de geometría, utilizando GeoGebra. Por otro lado, nos interesa observar si los estudiantes, mediante los procesos Edificando-con y Construcción, pueden construir y representar de manera geométrica (mediante métodos de Geometría Euclidiana) dicha propiedad.

El enunciado de esta actividad es el siguiente: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (x, y)$. Justifica si es posible el trazo de $T(2v)$ y $T(1.5v)$, usando métodos geométricos Euclidianos. Ejecuta el archivo *Actividad_2.2*.

Cabe aclarar que en esta actividad los vectores v y $T(v)$ son aleatorios en GeoGebra, en el sentido de que se pueden arrastrar a cualquier lugar de la pantalla, pero no dependen uno del otro, ya que si se movía v no se movía $T(v)$ y viceversa. Debido a esto los alumnos estaban forzados a utilizar métodos de Geometría Euclidiana para realizar las construcciones en esta actividad. Esto fue parte del diseño que se refirió en el Comentario anterior (p. 31).

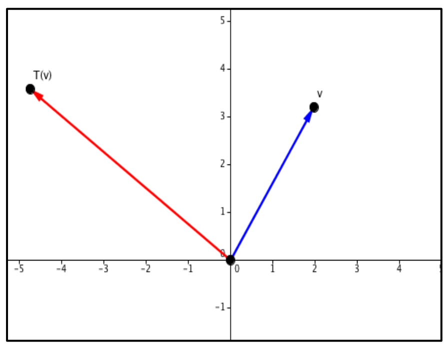


Figura 3.4. Actividad 2.2 en GeoGebra

Posible solución (R_2, B_2 y C_2)[5]: Si conocemos $T(v)$, entonces $T(kv) = kT(v)$, ya que T es una transformación lineal, de modo que el vector $T(kv)$ se puede obtener de la siguiente manera: Trazamos una circunferencia C con centro en el origen y de radio k veces la longitud del vector $T(v)$. Si trazamos una semirrecta que prolongue el vector $T(v)$ en su misma dirección, entonces la intersección de esta recta con la circunferencia C será el vector buscado $T(kv)$, con $k \in \{2, 1.5\}$. En la Figura 3.5 se muestra el caso cuando $k = 2$.

La solución que mencionamos anteriormente es una propuesta de como los estudiantes pueden solucionar el problema, sin embargo no creemos que sea única, dado que los estudiantes pueden emplear estrategias diferentes para realizar las

[5] En esta solución se involucra una construcción donde se evidencian los procesos epistémicos Reconocimiento, Edificando-con y Construcción del marco AIC; estos procesos los denotamos como R_2, B_2 y C_2, respectivamente, ya que siguen de los procesos R_1, B_1 y C_1,.

mismas construcciones, por ejemplo, algún estudiante puede utilizar recta en lugar de semirrecta, etc. En nuestro ejemplo (solución) podemos ver que el alumno primero tiene que identificar, mediante el proceso R_2, que la propiedad $T(kv) = kT(v)$ puede ser representada en un contexto geométrico, posteriormente tiene que utilizar el proceso B_2 para reorganizar sus constructos previos y crear una estrategia, en este caso la estrategia fue utilizar la dilatación o contracción de vectores. Finalmente, el alumno utiliza el proceso C_2 para realizar las construcciones geométricas mencionadas anteriormente.

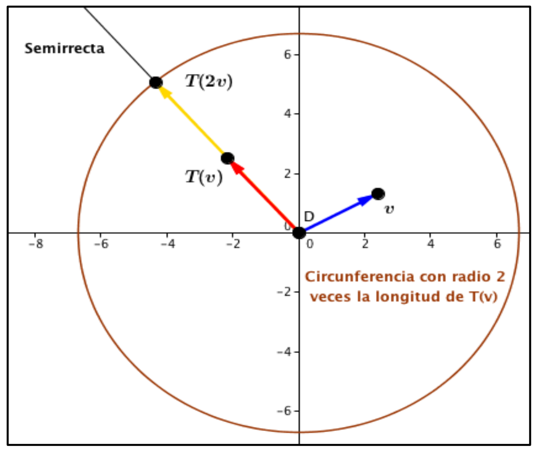


Figura 3.5. Actividad 2.3 cuando $k = 2$

3.4.2.3 Sección 2.3. Actividad con lápiz-y-papel y tecnología

Esta sección está constituida por la **Actividad 2.3**. La finalidad de esta actividad es que mediante los procesos Edificando-con y Construcción, los alumnos interactúen y comparen sus resultados que obtuvieron en el ambiente de lápiz-y-papel con los que obtuvieron en el ambiente geométrico, para que finalmente logren producir nuevos constructos relacionados con la propiedad de producto por un escalar de las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$.

El enunciado de esta actividad es el siguiente: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (2,3)$, de tal forma que $T(v) = (-3,1)$. Obtén $T(2v)$, $T(1.5v)$ y $T(-3v)$ de forma algebraica y geométrica, usando Geogebra. (Ejecuta el archivo: Actividad_2.3.) Compara tus resultados con los obtenidos usando lápiz-y-papel; ajústalos si es necesario.

Posible solución: Para el caso cuando $k = 2$, tenemos que $T(2v) = 2T(v) = 2(-3{,}1) = (-6{,}2)$. Así en el ambiente algebraico obtenemos que $T(2v) = (-6{,}2)$. Para obtener $T(2v)$ en GeoGebra se hace lo mismo que en la Actividad 2.2, pero en este caso el vector $T(v) = (-3, 1)$ está fijo en la pantalla de GeoGebra. Además, una vez que se obtiene el punto $T(2v)$ en GeoGebra se verifican si las coordenadas de dicho punto coinciden con el punto $(-6{,}2)$. La respuesta en los casos cuando $k = 1.5$ o $k = -3$, son análogos.

3.4.2.4 Sección 2.4. Actividad con lápiz-y-papel

Esta sección está constituida por la Actividad 2.4, la cual tiene el objetivo de analizar las concepciones algebraicas de los estudiantes sobre la propiedad de la suma de las transformaciones lineales.

El enunciado de esta actividad es el siguiente: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (-2, -1)$ y $v_2 = (1, 4)$. Justifica por qué si $T(v_1)$ = (1,1) y $T(v_2)$ = (−3,4), entonces es posible obtener $T(-1, 3)$.

Posible solución: Como $(-1, 3) = v_1 + v_2$, entonces $T(-1, 3) = T\ (v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, esto último por la propiedad de la suma de T. Por lo tanto, $T(-1, 3)$ = $T(v_1) + T(v_2)$ = $(1{,}1) + (-3, 4) = (-2, 5)$.

3.4.2.5 Sección 2.5. Actividad con tecnología

El objetivo de esta actividad es, por un lado, detectar si los estudiantes reconocen, mediante el proceso Reconocimiento, que la propiedad de la suma de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$, puede ser representada en un ambiente de Geometría Dinámica, utilizando GeoGebra. Por otro lado, nos interesa observar si los estudiantes, mediante los procesos Edificando-con y Construcción, pueden construir y representar de manera geométrica (mediante métodos de Geometría Euclidiana) dicha propiedad.

El enunciado de la actividad es el siguiente: Ejecuta el archivo *Actividad_2.5*. Si T es una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ de tal forma que $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan, respectivamente, bajo T las imágenes de v_1 y v_2, entonces es posible obtener $T(v_1 + v_2)$, usando métodos geométricos Euclidianos. Apóyate en GeoGebra y justifica tu respuesta.

Posible solución ($\boldsymbol{R_3}, \boldsymbol{B_3}$ y $\boldsymbol{C_3}$)[6]: Debido a la propiedad de la suma de T, tenemos que: $T(v_1 \ + v_2) = \ T(v_1) + \ T(v_2)$. Así, al tener representados a los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$, podemos obtener al vector $T(v_1 + v_2)$ como resultado de la suma de los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$. Para realizar la suma de estos dos vectores en GeoGebra, realizamos los siguientes pasos:

I. Con la función "Recta Paralela" en GeoGebra, se construye la recta $L_{T(v_{1})}$ que es paralela al vector $T(v_1)$ y que pasa por la punta del vector v_2.
II. De igual manera, que en el paso I, se construye la recta L_{Tv_2} que es paralela al vector $T(v_2)$ y que pasa por la punta del vector v_1.
III. Con la función "Intersección de Dos Objetos" en GeoGebra, se encuentra la intersección de las rectas L_{v_1} y L_{v_2}. Esta intersección es la suma de los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$.

La solución que mencionamos anteriormente es una propuesta de cómo los estudiantes pueden solucionar el problema, sin embargo no creemos que sea única. En nuestro ejemplo (solución) podemos ver que el alumno primero tiene que identificar, mediante el proceso R_3, que la propiedad: $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + \ T(v_2)$ puede ser representada en un contexto geométrico, posteriormente tiene que utilizar el proceso B_3 para reorganizar sus constructos previos y así crear una estrategia para resolver el problema, en nuestro caso se recurre a la suma de vectores. Finalmente el alumno utiliza el proceso C_3 para realizar los pasos del I al III.

Cabe aclarar que para poder obtener la suma de los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$ en esta actividad, conjeturamos que los estudiantes tienen que utilizar métodos de Geometría Euclidiana, ya que los vectores v_1, v_2, $T(v_1)$ y $T(v_2)$ no tienen coordenadas fijas en GeoGebra. Esto fue parte del diseño de la actividad.

3.4.2.6 Sección 2.6. Actividad con lápiz-y-papel y tecnología

---

[6] En esta solución se involucra una construcción donde se evidencian los procesos epistémicos Reconocimiento, Edificando-con y Construcción del marco AIC; estos procesos los denotamos como R_3, B_3 y C_3, respectivamente.

Esta sección está constituida por la Actividad 2.6, cuya finalidad es básicamente que los estudiantes realicen la Actividad 2.4, pero en el ambiente de GeoGebra, para que puedan comparar sus resultados en ambas actividades, para que así se logre la interacción entre los ambientes de lápiz-y-papel y tecnología.

El enunciado de la actividad 2.6 es el siguiente: Con los mismos datos de la Actividad 2.4. Obtén $T(-1,3)$ de forma algebraica y geométrica, usando GeoGebra. (Ejecuta el archivo: *Actividad_2.6*.) Compara tus resultados con los obtenidos usando lápiz-y-papel; ajústalos si es necesario.

Comentario: Gracias a este diseño, en la Actividad 2 logramos primero que los alumnos se centraran únicamente en representaciones puramente algebraicas en la Actividad 2.4, y segundo que en la Actividad 2.5 se enfocaran en representar la propiedad de suma de las transformaciones lineales en el ambiente de Geometría Dinámica, utilizando exclusivamente métodos de Geometría Euclidiana. Por último, también se logró que en general los alumnos interactuaran con los dos ambientes mencionados en la Actividad 2.6, para después comparar sus resultados. Las actividades 2.1, 2.2, 2.3 se desarrollaron de forma similar.

3.4.3 Actividad 3. Extensión de transformaciones lineales

Esta actividad tiene como objetivo que los estudiantes realicen conexiones adecuadas entre los constructos adquiridos en las actividades previas, mediante procesos de Consolidación, para poder dar solución al problema de extensión lineal de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$, tanto en el ambiente algebraico como en el ambiente geométrico. La actividad 3 está compuesta por las siguientes secciones.

3.4.3.1 Sección 3.1 Actividad con lápiz-y-papel

Esta sección está constituida por la Actividad 3.1, la cual tiene el objetivo de analizar las concepciones algebraicas de los estudiantes sobre un problema específico de extensión lineal y si pueden usar o no de forma adecuada los conocimientos adquiridos en las actividades 1 y 2, usando ambas propiedades de una transformación lineal.

El enunciado de la actividad es el siguiente: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y v = (2, 4). Justifica por qué si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de v_1= *(1,0)* y v_2= *(0,2),* respectivamente, bajo *T,* entonces es posible obtener *T(v).*

Posible solución: Una posible solución consiste en lo siguiente:

i. Escribir a v como combinación lineal de v_1 y v_2, a saber, $v = 2v_1 + 2v_2$;

ii. aplicar T a la última ecuación obtenida en el paso i, para obtener:

$$T(v) = T(2v_1 + 2v_2);$$

iii. utilizar las propiedades de la transformación lineal T en la ecuación obtenida en el paso ii, para obtener:

$$T(v) = T(2v_1 + 2v_2) = T(2v_1) + T(2v_2) = 2T(v_1) + 2T(v_2).$$

Así, $T(v)$ queda en función de $T(v_1)$ y $T(v_2)$, que son objetos conocidos.

3.4.3.2 Secciones 3.2 y 3.3 Actividad con tecnología y Actividad con lápiz-y-papel y tecnología

Estas secciones están constituidas por las actividades 3.2 y 3.3 que se explican a continuación.

Actividad 3.2: Tiene el objetivo de que los estudiantes resuelvan un problema de extensión lineal en GeoGebra; se espera que los alumnos con ayuda de sus constructos, obtenidos en las actividades 1 y 2, consoliden un método para resolver dicho problema en $\mathbb{R}^2$ en un ambiente geométrico.

El enunciado de la actividad es el siguiente: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y v = (4, 8). Si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de $v_1 = (2{,}0)$ y v_2 = (0,4), respectivamente, bajo T, entonces justifica si es posible el trazo de $T(v)$ usando métodos geométricos Euclidianos. Ejecuta el archivo *Actividad_3.2.*

Posible solución: Se espera que los estudiantes identifiquen que esta actividad es en cierto sentido realizar partes de las actividades 1 y 2 en una sola, realizando los siguientes pasos:

P1. Construir a v como combinación lineal de v_1 y v_2, exactamente como en la solución de la Actividad 1.3, presentada anteriormente.

P2. Reconocer visualmente en GeoGebra, que $v = 2v_1 + 2v_2$, para luego aplicar T a la ecuación obtenida en P1.

P3. Reconocer que $T(v) = T(2v_1 + 2v_2)$ se puede igualar con $2T(v_1) + 2T(v_2)$, por las propiedades de T.

P4. Construir el vector $2T(v_1) + 2T(v_2)$. Para ello, primero se obtienen los vectores $2T(v_1)$ y $2T(v_2)$ exactamente como en la solución de la Actividad 2.2, presentada anteriormente. Luego se obtiene la suma de estos vectores, exactamente como en la solución de la Actividad 2.4, presentada anteriormente.

Actividad 3.3: Esta actividad tiene los mismos datos que la Actividad 3.2, a excepción que se le pide al estudiante que le dé valores fijos a los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$ de modo que el estudiante resuelva tanto de forma algebraica, como de forma geométrica en GeoGebra el problema de extensión lineal y compare sus resultados en ambos ambientes, con el fin de que esto le propicie una reflexión acerca de sus resultados, y esta reflexión le permita, si es necesario, modificar sus respuestas a las actividades 3.1 y 3.2.

El enunciado de la actividad es el siguiente: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (2, 4)$. Justifica por qué si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,2)$, respectivamente, bajo T, entonces es posible obtener $T(v)$.

Posible solución: Primero se realizan los pasos i – iii de la Actividad 3.1, con los valores fijos de $T(v_1)$ y $T(v_2)$. Segundo, se realizan los pasos P1 – P4 de la Actividad 3.2 en Geogebra con los valores fijos de $T(v_1)$ y $T(v_2)$ en GeoGebra. Por último, se comparan los datos obtenidos en ambos ambientes (de lápiz-y-papel y de tecnología) para verificar si coinciden dichos datos.

Comentario sobre los procesos de Consolidación: En los pasos de la solución de la Actividad 3.2, podemos identificar los siguientes puntos:

- Podemos ver que en el paso P1 se continúa con el proceso de Consolidación $+C_1$ (Este proceso se construye en la Actividad 1.5), por lo que podemos denotar a este nuevo proceso como $++C_1$, para indicar que la consolidación sigue evolucionando.
- Se puede ver en el paso P4 que empiezan a aparecer nuevos procesos de consolidación $+C_2$ y $+C_3$ que son derivados respectivamente de los procesos epistemológicos: (R_2, B_2 y C_2) y (R_3, B_3 y C_3) (véase las soluciones de las actividades 2.2 y 2.4).
- De acuerdo a los dos puntos anteriores se puede visualizar en la Figura 3.6 un esquema de la posible evolución de los procesos epistémicos de los estudiantes al abordar la Actividad 3.2. Cabe aclarar que en la representación que se muestra en la Figura 3.6 cada círculo (que representa un proceso) tiene una jerarquía de orden parcial y no total con respecto a la contención estricta. Puntualmente, las únicas cadenas comparables (con el mayor número de procesos) son las siguientes:

$$R_1 \subset B_1 \subset C_1 \subset +C_1 \subset ++C_1$$

$$R_2 \subset B_2 \subset C_2 \subset +C_2$$

$$R_3 \subset B_3 \subset C_3 \subset +C_3.$$

  Además, puede suceder que algunos procesos de las actividades 1, 2 y 3 se conecten, pero consideramos que no son comparables con respecto a la contención, ya que los conceptos que se manejan en cada actividad son distintos. Por ejemplo, en la Actividad 3 el alumno tiene que evocar un proceso de Reconocimiento que concierne a la suma de vectores y este proceso está involucrado en los procesos de la Actividad 1, por lo que en cierto sentido los procesos se conectan, pero los conceptos de propiedad de la suma de una transformación lineal y el de una combinación lineal de vectores de una base son distintos.

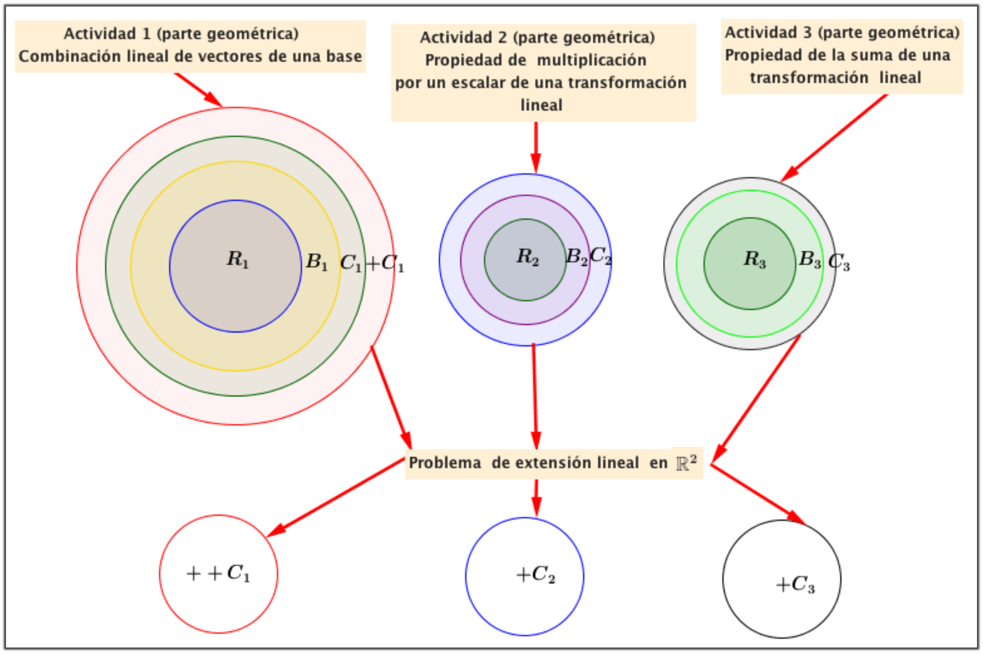


Figura 3.6. Procesos de abstracción involucrados en la Actividad 3.2

3.4.3.3. Secciones 3.4, 3.5. y 3.6

Estas secciones están constituidas por las actividades 3.4, 3.5 y 3.6, que son idénticas a las actividades 3.1, 3.2 y 3.3 respectivamente, excepto que los vectores que conforman la base de $\mathbb{R}^2$ son diferentes a los de las otras actividades; además, estos vectores ya no pertenecen a los ejes coordenados. Este diseño tiene el objetivo que los estudiantes manifiesten el surgimiento de un nuevo proceso Consolidación, que denotamos como $+C_p$[7]. Este proceso está anidado a los procesos $++C_1$, $+C_2$ y $+C_3$ (véase la Figura 3.7). Además, el proceso $+C_p$ propicia la solución algebraica y geométrica del problema general de extensión lineal en $\mathbb{R}^2$.

Cabe aclarar que en la Figura 3.7 sucede algo similar a lo que comentamos sobre la Figura 3.6, sólo que en este caso las únicas cadenas comparables (con el mayor numero de procesos) son las siguientes:

$$R_1 \subset B_1 \subset C_1 \subset +C_1 \subset ++C_1 \subset +C_p$$
$$R_2 \subset B_2 \subset C_2 \subset +C_2 \subset +C_p$$

[7] Este proceso es el principal de este trabajo de investigación, por eso lo denotamos con un subíndice *p* para hacer elución a la palabra “*principal*”.

$$R_3 \subset B_3 \subset C_3 \subset +C_3 \subset +C_p$$

De manera que el proceso $+C_p$ es el resultado de la coordinación de los procesos $++C_1$, $+C_2$ y $+C_3$.

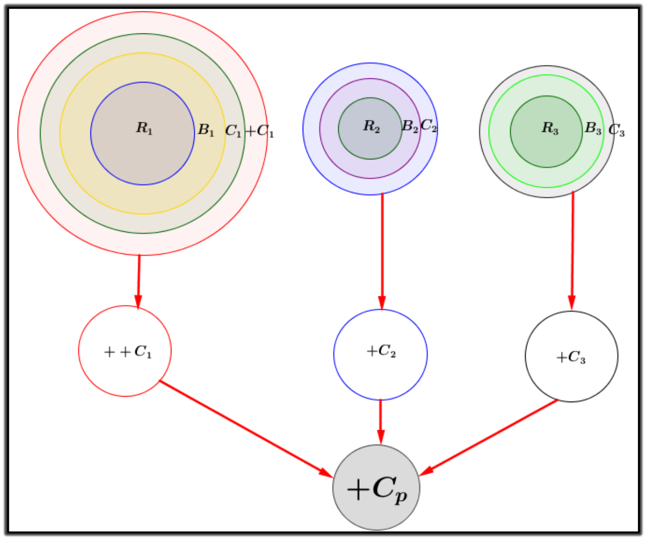


Figura 3.7. Procesos anidados que dan como resultado el proceso de Consolidación $+C_p$

Enunciado de la actividad 3.4: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (7, 11)$. Justifica por qué si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (2, 4)$, respectivamente, bajo T, entonces es posible obtener $T(v)$.

Enunciado de la actividad 3.5: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (4, 10)$. Si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de $v_1 = (2, 2)$ y $v_2 = (1, 4)$, respectivamente, bajo T, entonces justifica si es posible el trazo de $T(v)$ usando métodos geométricos Euclidianos. Ejecuta el archivo *Actividad_3.5.*

Enunciado de la actividad 3.6: Con los mismos datos de la Actividad 3.5 y obteniendo dos valores exactos y fijos de $T(v_1)$ y $T(v_2)$ en GeoGebra, escribe de forma algebraica a $T(v)$. Compara y ajusta, de ser necesario, tus resultados con los obtenidos en la Actividad 3.5.

Posibles soluciones de las Actividades 3.4, 3.5 y 3.6: Son exactamente las mismas que las actividades 3.1, 3.2 y 3.3, respectivamente.

3.5 Implementación de la Secuencia de actividades y las discusiones grupales

Para la implementación de nuestros instrumentos de recolección de datos (actividades y discusiones), se necesitaron cinco sesiones que fueron implementadas con la supervisión de dos de los investigadores. Las sesiones fueron las siguientes:

- Sesión 1 (90 minutos): se aplicó exclusivamente la Actividad 1.
- Sesión 2 (60 minutos): se realizó una discusión respecto a la Actividad 1.
- Sesión 3 (130 minutos): en los primeros 90 minutos se aplicó la Actividad 2 y en los 40 minutos restantes, se realizó una discusión acerca de dicha actividad.
- Sesión 4 (90 minutos): se aplicó la Actividad 3.
- Sesión 5 (30 minutos): se realizó una discusión respecto a la Actividad 3.

Las discusiones que se realizaron en las sesiones 2, 3 y 5 fueron dirigidas por uno de los investigadores y de forma grupal, es decir, de acuerdo a las respuestas de cada estudiante, el investigador primero preguntó a un estudiante en particular que explicara su respuesta, para que se hiciera una discusión grupal acerca de ella. Los estudiantes eran libres de contestar abiertamente, el investigador sólo dirigía al grupo (realizando preguntas) y nunca les daba las respuestas de forma directa, ya que la finalidad era que, con ayuda de la discusión, todo el grupo llegara a un común acuerdo para reflexionar y convencerse acerca de una respuesta final grupal. Cada discusión fue video-grabada para recolectar estos datos.

La implementación de las actividades (sin tomar en cuenta las discusiones) fue realizada por los estudiantes de forma individual; dos de los investigadores permanecieron presentes para responder las posibles dudas que pudieran surgir con las indicaciones pedidas en cada actividad.

En las actividades que requerían el uso de la tecnología, cada estudiante contó con su respectiva computadora; además se les indicó a los alumnos que conforme terminaran las actividades (aquellas donde usaron tecnología), compartieran vía correo electrónico sus archivos, exclusivamente con los investigadores encargados del presente estudio, con el propósito de recolectar los datos derivados de sus construcciones en GeoGebra. Específicamente, se pretendía que mediante una función en GeoGebra que se llama “protocolo de construcción” se analizaran los pasos que fueron construyendo los estudiantes en cada actividad referente al uso de la tecnología. Los demás datos que se analizaron fueron aquellos que se recolectaron en las hojas de trabajo de cada actividad y en sus comunicaciones verbales obtenidas mediante las video-grabaciones. En el siguiente capítulo del presente trabajo se da a conocer el análisis que se efectuó a partir de la recolección de estos datos.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LOS DATOS

En el capítulo anterior se presentó un análisis *a priori* de nuestra secuencia de actividades. De acuerdo con el marco teórico Abstracción en Contexto, que se implementa en el presente trabajo, este análisis es fundamental ya que proporciona una hipótesis de trabajo que sirve para posteriormente ser comparado con un micro-análisis de los datos obtenidos en la secuencia de actividades. Este micro-análisis tiene como fundamento principal identificar las acciones epistémicas (Reconocimiento, Edificando-con, Construcción y Consolidación) que reflejaron los estudiantes durante la implementación de las actividades. En este capítulo se realiza una revisión a dichos datos, tomando como hipótesis inicial de trabajo nuestro análisis *a priori*. Asimismo, en la parte final del presente capítulo se hace una discusión acerca del análisis de los datos obtenidos.

4.1 Elección y análisis de los datos de los estudiantes

Nuestra secuencia consta de tres actividades en forma de secuencia gradual, en el sentido de que con ayuda de las dos primeras actividades se puede resolver la tercera actividad. En este capítulo vamos a presentar un análisis de los datos, escogiendo episodios de algunos estudiantes que reflejen la evolución de sus acciones epistémicas durante la implementación de las actividades (principalmente aquellas que involucran tecnología).

En este análisis se pretende identificar las acciones epistémicas (Reconocimiento, Edificando-con, Construcción, y Consolidación) que reflejaron los estudiantes al abordar la secuencia de actividades. En lo que sigue denotamos a los estudiantes como $E_1, E_2, \dots, E_{12}$ sin especificar su género.

Recordemos que, además de resolución de actividades, hubo discusiones grupales, que se video-grabaron (véase la sección 3.5 del Capítulo 3 de esta tesis); de estas discusiones pretendemos analizar las respuestas de los estudiantes donde se reflejen acciones epistémicas que pudieron influir en dichas respuestas. Para identificar al investigador durante estas discusiones lo denotamos como I.

4.2 Procesos epistémicos esperados

Aquí presentamos un resumen de los procesos epistémicos esperados en cada actividad, expuestos anteriormente en el capítulo 3:

A. Actividad 1: En la parte referente al trabajo exclusivo con lápiz-y-papel se espera recolectar información sobre las concepciones de los estudiantes, respecto a los conceptos: conjunto linealmente independiente y combinación lineal. La parte referente al trabajo con tecnología es la que más nos interesa analizar, ya que esta parte para ellos es una representación totalmente nueva de conceptos del Álgebra Lineal, por lo que se espera que surjan los procesos epistémicos Reconocimiento, Edificando-con, Construcción y Consolidación; estos procesos tienen, en el orden respectivo, la nomenclatura siguiente: R_1 , B_1, C_1 y $+C_1$.

B. Actividad 2: En la parte referente al trabajo exclusivo con lápiz-y-papel, se espera que pase lo mismo que la Actividad 1. La parte referente al trabajo de tecnología es de mayor interés para esta investigación, ya que de esta actividad surgen dos construcciones que son nuevas para los estudiantes y se espera que en cada construcción con el software se vean reflejadas las acciones epistémicas Reconocimiento, Edificando-con y Construcción. En la primera construcción denotamos a estos procesos como R_2 , B_2 y C_2 ; en la segunda construcción denotamos a los procesos como R_3 , B_3, C_3 .

C. Actividad 3: En esta actividad también, en la parte referente al trabajo exclusivo con lápiz-y-papel, se espera que pase lo mismo que la Actividad 1. La parte referente al trabajo con tecnología es muy importante, ya que en esta parte se presenta el problema de extensión lineal en un ambiente geométrico y además la solución a esta se pretende que venga influenciada por las actividades 1 y 2, ya que el problema de extensión lineal se puede resolver con ayuda de las construcciones realizadas en dichas actividades. Es por ello que se pretende el surgimiento de los procesos Reconocimiento, Edificando-con y Construcción, y que al final estos son compactados en un nuevo proceso de Consolidación que denotamos como C_p (véase la figura 3.6 del Capítulo 3 de esta tesis).

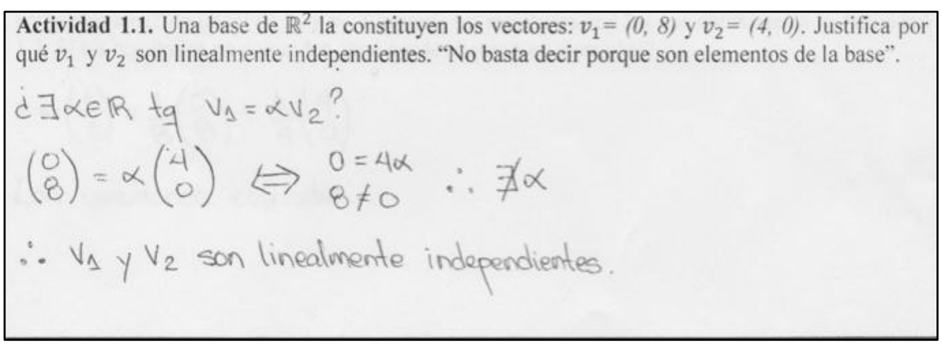
4.3 Análisis de la Actividad 1

En esta sección realizamos un análisis de los datos de los estudiantes, obtenidos de todas las secciones que conforman la Actividad 1.

4.3.1 *Actividades 1.1 y 1.2*

Recordemos que la finalidad de estas actividades era recolectar información sobre las concepciones de los estudiantes acerca de los conceptos de conjunto linealmente independiente, base, combinación lineal y conjunto generador, todos restringidos a $\mathbb{R}^2$. Se pretendía que los estudiantes partieran de sus propias concepciones para que posteriormente, con la ayuda de estas primeras dos actividades pudieran abordar las actividades 1.3 y 1.4, que son referentes a la tecnología.

En la Actividad 1.1, con excepción de E_2 (quien respondió involucrando el concepto de determinante de la matriz asociada) y E_5 (quien no respondió), los estudiantes contestaron conforme se esperaba en el análisis *a priori*. En las figuras 4.1 y 4.2 puede verse, como ejemplos, las respuestas de los estudiantes E_{12} y E_1.


Actividad 1.1. Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: $v_1 = (0, 8)$ y $v_2 = (4, 0)$. Justifica por qué v_1 y v_2 son linealmente independientes. "No basta decir porque son elementos de la base".

¿$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $v_1 = \alpha v_2$?

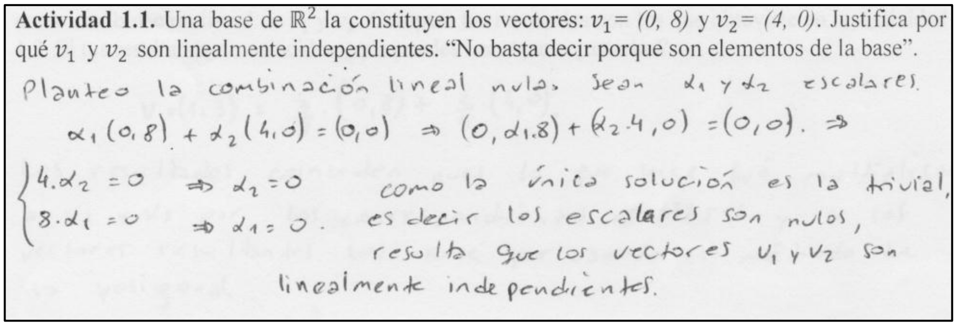
$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 0 = 4\alpha \\ 8 \neq 0 \end{matrix} \quad \therefore \nexists \alpha$

$\therefore$ v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Figura 4.1. Respuesta de la Actividad 1.1 del estudiante $\boldsymbol{E_{12}}$

En la Figura 4.1 podemos observar que el estudiante E_{12} se pregunta si el vector v_1 es un múltiplo escalar del vector v_2. Para responder esta pregunta, supone cierta dicha cuestión, escribiendo $(0, 8) = \alpha(4, 0)$. El estudiante deduce que para que esta igualdad cumpla, $8 = 0$. Sin embargo, como $8 \neq 0$, deduce que los vectores

v_1 y v_2 son linealmente independientes, ya que demostró que v_1 no puede ser múltiplo escalar de v_2.


Actividad 1.1. Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: $v_1 = (0, 8)$ y $v_2 = (4, 0)$. Justifica por qué v_1 y v_2 son linealmente independientes. "No basta decir porque son elementos de la base".

Planteo la combinación lineal nula. Sean α_1 y α_2 escalares.

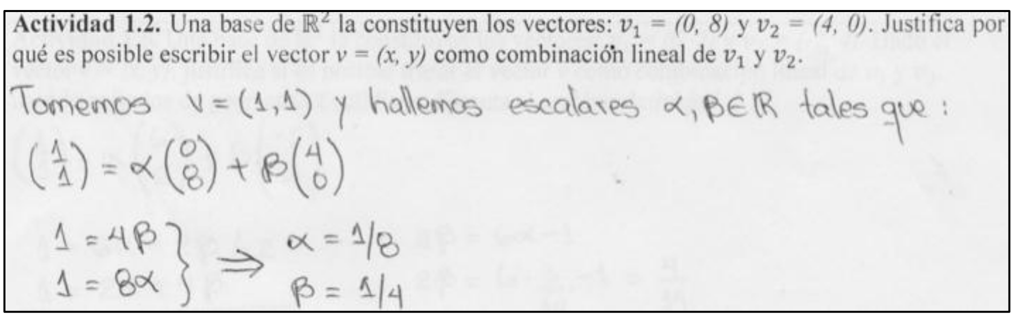
$\alpha_1(0,8) + \alpha_2(4,0) = (0,0) \Rightarrow (0, \alpha_1.8) + (\alpha_2.4, 0) = (0,0). \Rightarrow$

$\begin{cases} 4.\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ 8.\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0. \end{cases}$ como la única solución es la trivial, es decir los escalares son nulos, resulta que los vectores v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Figura 4.2. Respuesta de la Actividad 1.1 del estudiante $\boldsymbol{E_1}$

En la Figura 4.2 podemos observar que el estudiante E_1 plantea la ecuación $\alpha_1(0,8) + \alpha_2(4,0) = (0,0)$, y la llama combinación lineal nula. Luego deduce que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$, para concluir que los vectores son linealmente independientes.

En la Actividad 1.2, con excepción del estudiante E_5 (quien justificó con argumentos geométricos), los estudiantes respondieron de forma similar, respecto al mecanismo que se consideró en el análisis *a priori*. En la Figura 4.3 puede verse, como ejemplo, la respuesta del estudiante E_{12}.


Actividad 1.2. Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: $v_1 = (0, 8)$ y $v_2 = (4, 0)$. Justifica por qué es posible escribir el vector $v = (x, y)$ como combinación lineal de v_1 y v_2.

Tomemos $v = (1,1)$ y hallemos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix} 1 = 4\beta \\ 1 = 8\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1/8 \\ \beta = 1/4 \end{matrix}$

Figura 4.3 Respuesta de la Actividad 1.2 del estudiante $\boldsymbol{E_{12}}$

En la Figura 4.3 podemos observar que el estudiante E_{12} elige[8] el vector $v = (1,1)$. Después el estudiante plantea la ecuación $(1,1) = \alpha(0,8) + \beta(4,0)$. Al resolver la ecuación anterior obtiene que $\alpha = {}^{1}/_{8}$ y $\beta = {}^{1}/_{4}$.

[8] Recordemos que en esta actividad, aunque no se mencionó en la hoja de trabajo, se les indicó a los estudiantes, durante la implementación de las actividades, que eligieran un vector específico.

4.3.2 *Actividades 1.3 y 1.4*

En la actividad 1.3 se pretendía que los estudiantes representaran a un vector como combinación lineal de elementos de una base de $\mathbb{R}^2$ utilizando el software GeoGebra, con ayuda de herramientas del software que se derivan de métodos de regla-y-compás. Esta representación fue totalmente nueva para los estudiantes, por lo que les causó problemas entender lo que se pedía en dicha actividad. Lo anterior se puede reflejar en el siguiente diálogo de la discusión grupal:

[1] I: Vamos a discutir respecto a la Actividad 1.3. Primero quiero que me den un panorama general de lo que entendieron acerca de esta actividad.

[2] E_8: Mira, a mí me ocurrió lo siguiente… cuando vi el archivo [de GeoGebra], vi los vectores y entonces yo decía… bueno, creo que tú esperabas [refiriéndose al investigador] que yo pusiera el vector [se quedó pensando].

[3] E_{12}: El vector resultado [le da una sugerencia a E_8].

[4] E_5: El vector suma [le da una sugerencia a E_8].

[5] E_8: Aja el vector suma de los dos vectores que nos salieron al principio.

[6] E_8: Ya ves que yo te decía [refiriéndose al investigador]; ¿pero qué quieres que haga ahí? [algunos estudiantes murmullan diciendo “exacto”]

[7] E_8: En este caso era como muy ambiguo lo que podíamos entender porque… en el archivo… a la hora de entenderlo como combinación lineal, pues entonces tengo que poner un vector que represente mis escalares en los dos ejes para obtener la resultante [refiriéndose a un vector resultado de una suma de vectores]. Eso fue lo que yo entendí que teníamos que hacer [algunos estudiantes hacen gestos, para reflejar que están de acuerdo].

[8] E_{12}: En mi opinión, yo pensé que o debería estar oculto ese vector [refiriéndose al vector que se quiere representar como combinación lineal]… o sólo darnos los dos vectores [refiriéndose a los vectores de la base] y construir el resultado [refiriéndose al resultado de una suma de vectores]. Y cuando lo introduje y me lo graficó, dije “¿ahora qué tengo que hacer?”.

[9] I: ¿Para ustedes qué significa la representación de una combinación lineal de dos vectores en GeoGebra?

[10] E_{12}: O sea, el procedimiento creo que todos lo teníamos claro; aplicar la regla del paralelogramo, o sea, suma de vectores de algún modo [algunos estudiantes hacen gestos de estar de acuerdo con esto]. Son vectores que de algún modo [refiriéndose a los vectores que tenía que sumar]… Porque al final ya estaban multiplicados por escalares [se refiere a múltiplos de los vectores que conforman la base], que al final son los vectores que tenemos que sumar. Pero es que de algún modo nos estabas dando graficado el vector [se queda haciendo señas con las manos].

[11] E_5: La resultante y los vectores también.

Parece que el problema de dar un vector y preguntar si éste se puede trazar como combinación lineal de otros dos vectores dados no tiene significado para los estudiantes en el ámbito geométrico, aunque algebraicamente resolvieron sin dificultad un problema equivalente en la actividad anterior. Sin embargo de acuerdo al diálogo anterior podemos deducir que se ve manifestada la Etapa de Necesidad en algunos estudiantes, de la siguiente manera: En las líneas [2] y [5] se da evidencia que el estudiante E_8 parte de sus conocimientos de suma de vectores en un ambiente de lápiz-y-papel, para posteriormente en la línea [7] manifestar la necesidad de colocar vectores en los ejes con el fin de representar la suma de dos vectores en el ambiente de GeoGebra. Esto también refleja lo que mencionan Kidron y Monaghan (2009, citado en Dreyfus et al., 2015) que la necesidad de una nueva construcción permite el enlace entre el conocimiento del pasado y la futura construcción.

También podemos identificar, en el diálogo anterior, que aparecen algunos procesos de la Etapa Surgimiento. En la línea [7] el estudiante E_8 refleja acciones de Reconocimiento (al reconocer que sus conocimientos de suma de vectores se pueden trasladar al problema que tenía presente) y acciones de Edificando-con (al comentar la estrategia que entendió o siguió para poder resolver el problema). Además en [10] el estudiante E_{12} continúa con la discusión y refleja que utilizó conocimientos de la regla del paralelogramo (refiriéndose a la suma de vectores) para poder representar la combinación lineal en GeoGebra. Asimismo, refleja los procesos Reconocimiento y Edificando-con, ya que ha reconocido una estrategia y creado una específica de cómo resolver el problema en GeoGebra (utilizando la regla del paralelogramo).

A continuación vamos a presentar el análisis de los datos de la Actividad 1.3 (obtenidos de las hojas de trabajo y del protocolo de construcción de GeoGebra) del estudiante E_{12}, con el fin de explicar ciertas acciones que se ven reflejadas en los comentarios del estudiante en el diálogo anterior (específicamente en las líneas [8] y [10]).

Para realizar la construcción de la Actividad 1.3 el estudiante E_{12} se apoyó en sus resultados de la Actividad 1.2 (véase la Figura 4.3). A continuación explicamos el razonamiento del estudiante para resolver la Actividad 1.3, con apoyo de la Figura 4.4 que contiene los pasos de las construcciones en GeoGebra, que realizó dicho estudiante:

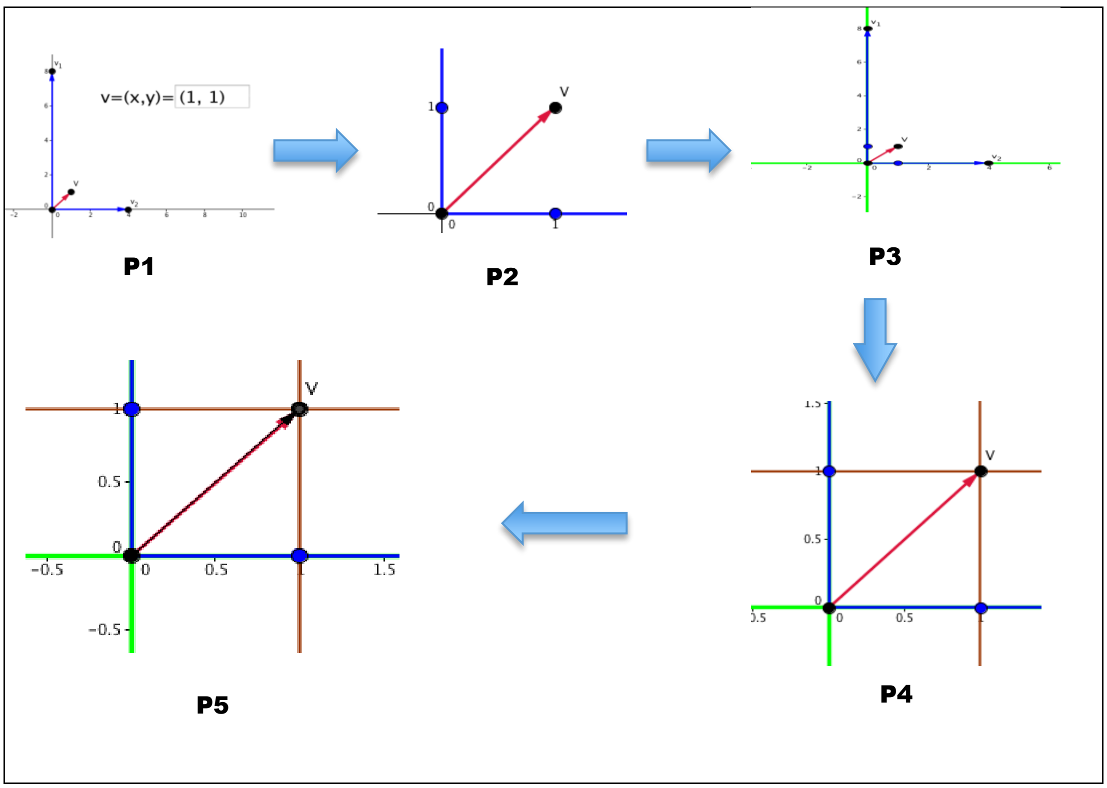


Figura 4.4. Construcciones de la Actividad 1.3 del estudiante $\boldsymbol{E_{12}}$

P1: Introdujo en la casilla los valores 1 y 1 para formar el vector $v = (1, 1)$ (vector rojo).

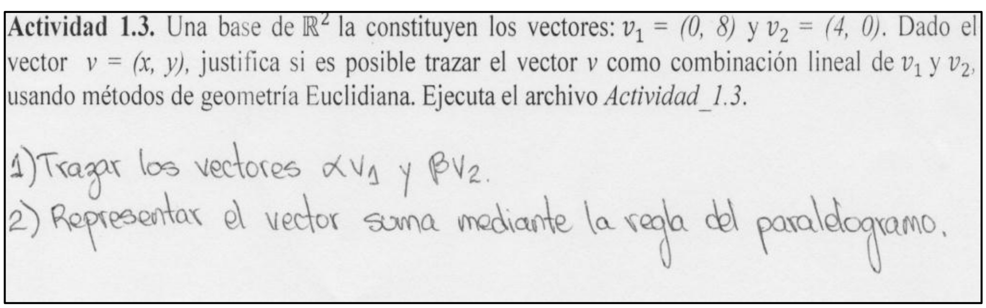
P2: Introdujo (directamente) en GeoGebra los vectores que encontró en la Actividad 1.2, es decir, los vectores $\alpha(0,\ 8)$ y $\beta(4{,}0)$ con $\alpha = \frac{1}{4}$ y $\beta = \frac{1}{8}$ (valores que encontró en la Actividad 1.2, véase la Figura 4.3). Así, los puntos azules son el resultado de su construcción.

P3: Graficó las rectas que son paralelas a los vectores v_1 y v_2, dando como resultado las rectas de color verde.

P4: Trazó rectas paralelas que pasaran por los vectores que construyó en P2 (“los puntos azules”), dando como resultado las rectas de color café.

P5: Trazó el punto de intersección de las rectas cafés, luego trazó el vector (“flecha”) desde el origen hacia este punto de intersección. En la imagen puede verse que, como resultado de estas construcciones, se superponen tanto el punto de intersección de las rectas cafés con el punto v, como el vector rojo (“flecha”) con el vector negro (“flecha”). En líneas posteriores mencionaremos la diferencia de los vectores rojo y negro, según la percepción del estudiante.

Finalmente el estudiante E_{12} justificó todos los pasos anteriores en la hoja de trabajo como se muestra en la Figura 4.5.



Actividad 1.3. Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: $v_1 = (0,\ 8)$ y $v_2 = (4,\ 0)$. Dado el vector $v = (x,\ y)$, justifica si es posible trazar el vector v como combinación lineal de v_1 y v_2, usando métodos de geometría Euclidiana. Ejecuta el archivo *Actividad_1.3*.

1) Trazar los vectores αv_1 y βv_2.
2) Representar el vector suma mediante la regla del paralelogramo.

Figura 4.5. Respuesta de la Actividad 1.3 del estudiante E_{12}

Ahora bien, podemos ver que de P1 hasta P5 los comentarios del estudiante E_{12} reflejan el proceso Construcción ya que crea un nuevo constructo; realiza las construcciones con representaciones de conceptos del Álgebra Lineal en GeoGebra, algo que nunca había hecho antes, por lo que la construcción que realizó (la combinación lineal en GeoGebra) es nueva para él. Coincidimos con Dreyfus et al. (2015), en que una forma para distinguir los procesos Construcción y Edificando-con, es verificar si la construcción que hizo es nueva para el estudiante, en este caso se trata de un proceso Construcción; y si la construcción que realizó no es nueva para él, entonces el proceso es Edificando-con.

Si analizamos detenidamente los pasos de P1 a P2, podemos darnos cuenta que para encontrar los vectores (que conforman la combinación lineal buscada) el alumno hace uso de sus conocimientos algebraicos, esto debido a la influencia que tuvo la Actividad 1.2. Esto es una diferencia con lo que se pretendía en nuestro análisis *a priori* (ya que se esperaba que el alumno pensara sin hacer uso de operaciones algebraicas, como lo indica el enunciado del problema).

Lo que comentamos en el párrafo anterior causó conflictos a dicho estudiante, en el siguiente sentido: en el paso P4, pareciera que el estudiante ha terminado su construcción, más no fue así ya que en el paso P5 el estudiante se ve en la necesidad de trazar nuevos objetos geométricos que al final se superponen con el vector rojo y el punto v. Esto creó conflictos en el estudiante, ya que, al llegar a esto, él pidió ayuda a uno de los investigadores para preguntarle ¿qué hacer? Esto se debió a que al ver que los objetos se superponían, el estudiante sintió que no había representado la combinación lineal, debido a que para el estudiante no se debía colocar el vector rojo en la pantalla, sino más bien se tendría que encontrar ese vector rojo sólo con ayuda de los vectores que conformaban la base, como también se refleja en las líneas [8] y [10] de la discusión.

Dado lo anterior podemos conjeturar que el estudiante E_{12} vió la combinación lineal sólo como el resultado de la suma de dos vectores y no como una representación que está conformada por cuatro elementos: El vector v (dado), los dos vectores "múltiplos de los elementos de la base" y la representación de la suma de vectores conforme el modelo del espacio bidimensional que mencionamos en el Capítulo 1 de esta tesis.

Así que podemos afirmar que podría mejorarse el diseño de la secuencia buscando una situación que motivara a los estudiantes a pensar en forma geométrica, para que después compararan sus resultados en ambos ambientes, algebraico y geométrico.

Deducimos que los estudiantes no se vieron en la necesidad de abordar directamente el problema en forma geométrica, debido a que era más fácil para ellos hacer los cálculos algebraicos; aparte que se les pidió que hicieran estos cálculos antes de abordar el problema en tecnología. Para ilustrar esto, presentamos un diálogo en el que uno de los estudiantes comenta sobre la razón que lo llevó a resolver el problema de esta manera:

[12] I: Creo que la mayoría de ustedes [refiriéndose a los estudiantes] utilizó sus recursos algebraicos para poder dar una solución al problema de la Actividad 1.3… porque simplemente lo que hicieron fue agregar [en GeoGebra] los vectores que fueron resultado de la multiplicación por un escalar a los vectores base [“exacto” dicen muchos estudiantes]… esto a lo mejor, siento que influyó para que la actividad no tuviera sentido o causara conflictos en ustedes.

[13] E_9: No, no es que no tuviera sentido, es que ese era el camino sencillo, de construir el vector resultante para caer en el problema que tú estás diciendo.

Después de este diálogo, el investigador sigue con la conversación para que los alumnos trataran de afrontar el problema de forma geométrica:

[14] I: ¿Qué pasaría si no podemos usar recursos algebraicos para abordar este problema?... [El investigador tiene abierto un archivo en GeoGebra que se proyecta en una pantalla donde los demás alumnos pueden verlo, véase la Figura 4.6]. Imagínense que no tenemos disponibles a la vista los ejes coordenados y que los vectores que forman la base son fijos, y el vector v varía en GeoGebra [se puede arrastrar en toda la pantalla de GeoGebra].

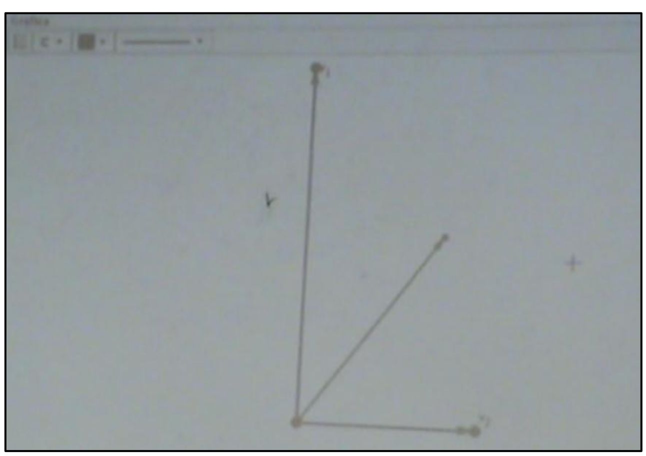


Figura 4.6. Archivo de GeoGebra proyectado, durante la discusión grupal

[15] E_{12}: Ya agarra otro sentido la actividad [“exacto” dicen algunos estudiantes].

[16] I: ¿Sí sienten que se verían forzados a utilizar otro método? [la mayoría de los estudiantes dicen en voz alta: “sí, seguro”] ¿Cómo lo resolverían?

[17] E_1: Es lo que yo hice [refiriéndose al procedimiento que hizo para contestar dicha actividad]. Bueno según yo para poder determinar que ese vector se podía escribir como combinación lineal de los otros dos, era como… que podían existir esos escalares, no… bueno que existen esos escalares [refiriéndose a los escalares que determinan la combinación lineal], entonces dije bueno si yo tengo el vector allí entonces tenía que trazar las perpendiculares de los vectores [refiriéndose a los de la base].

[18] I: ¿Puedes pasar a explicarnos tu procedimiento? [El estudiante E_1 pasa y explica con más detalle su procedimiento, pero antes muchos estudiantes piensan en voz alta diciendo que ellos utilizarían las proyecciones ortogonales].

Del diálogo anterior podemos sugerir que, con base en las líneas [12] a [15], para abordar la Actividad 1.3 de forma geométrica, una opción sería que no se les de valores específicos (numéricos) a los vectores y que los ejes coordenados no sean visibles. Además, sugerimos que los vectores que conformen la base, estén fijos en la pantalla de GeoGebra y el vector que se quiere escribir como combinación lineal pueda variar en la pantalla de GeoGebra.

Ahora bien, respecto a la línea [17], cabe mencionar que el estudiante E_1, durante la implementación de la actividad, abordó el problema de dos formas. La primera fue similar a la que hemos estado mencionando, con apoyo de cuentas algebraicas; la segunda fue de forma geométrica (de forma aproximada al análisis *a priori*), pero en esta segunda respuesta, encontramos etapas importantes que nos interesa resaltar. Analicemos la segunda respuesta de este estudiante con base en el protocolo de construcción de GeoGebra (véase la Figura 4.7) como la explicó durante la discusión grupal:

T1: Introdujo en la casilla los valores 3 y 2 para formar el vector $v = (3, 2)$ (vector rojo).

T2: Trazó una recta perpendicular al vector v_2 que pasa por v (recta café).

T3: Trazó una recta perpendicular al vector v_1 que pasa por v (recta verde).

T4: Trazó las intersecciones de las rectas café y verde con los vectores v_1 y v_2 (puntos azules), para completar la representación de la combinación lineal.

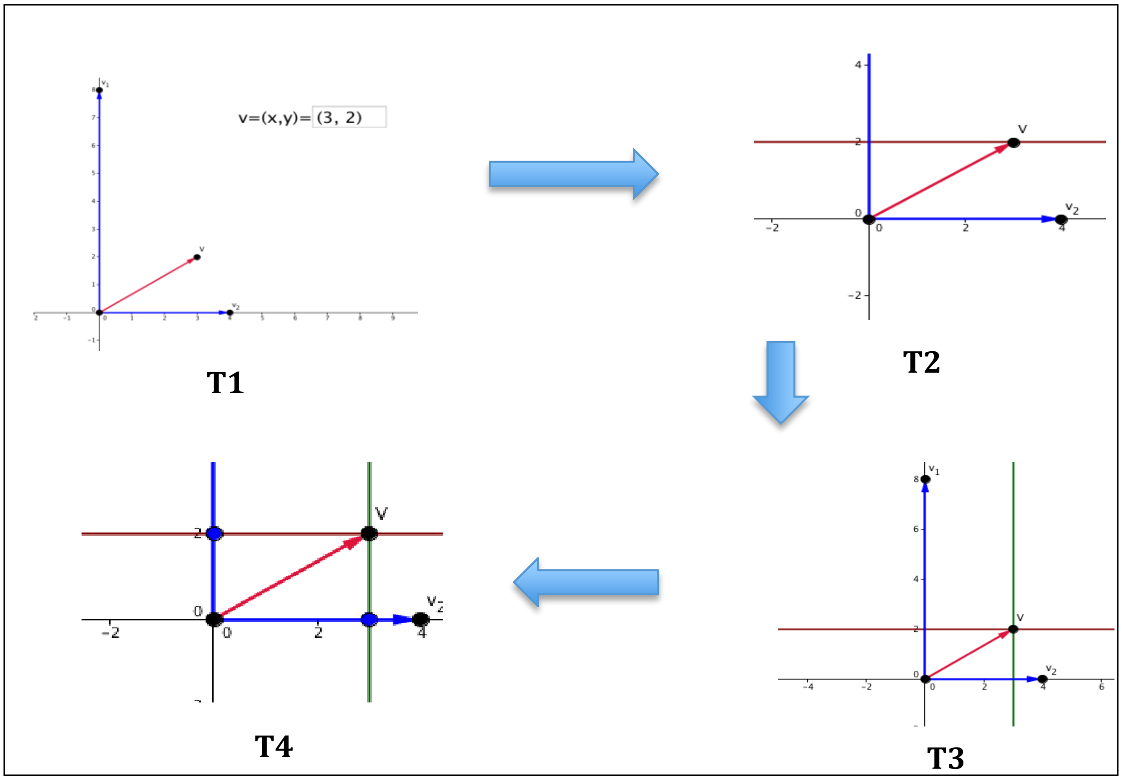


Figura 4.7. Construcciones de la Actividad 1.3 del estudiante $\boldsymbol{E_1}$

Podemos observar de los pasos T1 a T4 que el estudiante realiza el proceso Construcción, y aborda el problema de forma geométrica, utilizando rectas perpendiculares e intersecciones de objetos geométricos. En este punto el estudiante E_1 adquirió un nuevo constructo, que pareciera es correcto, en el sentido de que este constructo le pueda servir para un problema más general, es decir, cuando los vectores base no son perpendiculares. Más adelante vamos a analizar la respuesta de este mismo estudiante en donde la actividad es más general en el sentido de que la base ya no está contenida en los ejes coordenados.

Para finalizar el análisis de la Actividad 1.3, reportamos que después de la línea [18] del diálogo, el estudiante compartió su respuesta a todo el grupo y se creó una reflexión entre los demás estudiantes, donde la mayoría concordaron en entender la forma en que resolvió el problema el estudiante E_1; los estudiantes E_7 y E_8 resolvieron este problema (durante la implementación de actividad) de forma similar, pero detectamos que no pudieron identificar la combinación lineal buscada, pues no argumentaron, en su hoja de trabajo, algo que nos dejara evidencia de esto.

En general todos los estudiantes, durante la implementación de la actividad, hicieron trazos, implícitamente, de paralelas o perpendiculares a los vectores que conformaban la base, pero a nuestra consideración la mayoría de los estudiantes, con excepción del estudiante E_1, no tuvo una respuesta concreta de cómo encontrar la combinación lineal. En términos del marco AIC, podemos decir que los estudiantes reflejan el proceso Construcción de tal modo que los estudiantes aún no toman conciencia de su conocimiento adquirido.

Respecto a la Actividad 1.4, podemos comentar que no fue de utilidad, en el sentido de que resultó ser la misma que la Actividad 1.2, y la mayoría transcribió la misma respuesta en ambos casos. Es decir, no hubo la necesidad de comparar resultados geométricos y algebraicos.

4.3.3 *Actividad 1.5*

Recordemos que esta actividad tuvo el mismo objetivo que la Actividad 1.3, pero el problema que se abordó es más general en el sentido de que los vectores que conforman la base ya no pertenecen a los ejes coordenados e incluso no son perpendiculares entre sí.

En general todos los estudiantes abordaron este problema conforme a sus constructos que adquirieron en la Actividad 1.3 y además, aunque en esta actividad se les pidió que abordaran directamente el problema de forma geométrica, la mayoría de los estudiantes empezaron a trabajar en el problema de forma algebraica, por lo que se demoraron más tiempo, e incluso a algunos estudiantes no les dio tiempo de abordar directamente el problema de forma geométrica.

Para dar evidencia de cómo los estudiantes usan sus constructos, adquiridos en la Actividad 1.3, presentamos el análisis de los datos del estudiante E_1 obtenidos de la Actividad 1.5. Para esto vamos a apoyarnos en la Figura 4.8, que ilustra los pasos que realizó en GeoGebra dicho estudiante:

R1: Introdujo en la casilla los valores 3 y 2 para formar el vector $v = (3, 2)$ (vector rojo).

R2: Trazó una recta perpendicular al vector v_2 que pasa por v (recta verde).

R3: Trazó una recta perpendicular al vector v_1 que pasa por v (recta café).

R4: Trazó las intersecciones de las rectas café y verde con los vectores v_1 y v_2 (puntos azules).

Como puede notarse en los pasos R1 a R4, el estudiante E_1 nos proporcionó una respuesta que es exactamente como su respuesta de la Actividad 1.3 (véase los pasos T1 a T4, en el análisis de los datos de la Actividad 1.3). Esto refleja que el estudiante sigue en el proceso Construcción, ya que el estudiante no toma conciencia de su constructo adquirido, pues sólo se dedica a realizar las mismas construcciones que había realizado anteriormente y no reflexiona que los pasos R2 y R3 no corresponden a un procedimiento adecuado para dar solución al problema de la Actividad 1.5. Específicamente, las rectas que traza en estos pasos no deberían ser las perpendiculares a los vectores base, sino las paralelas a dichos vectores. Es por ello que en el paso R4 podemos darnos cuenta que los vectores (representados por los puntos azules) no forman un paralelogramo, es decir la suma de vectores no es correcta y por ende la combinación lineal no está construida correctamente.

De acuerdo al procedimiento que realizó el estudiante podemos inferir que el constructo que E_1 obtuvo en la Actividad 1.3 no era adecuado para generalizarlo y aplicarlo exactamente en la Actividad 1.5, pero el estudiante no se percata que su método sólo funciona para bases ortogonales y como la base que se presentó en la Actividad 1.5 no es ortogonal, su respuesta es incorrecta. De este modo podemos hablar de un proceso de Construcción inadecuado, ya que su método da respuesta correcta para una cierta clase de bases (las ortogonales), pero no es generalizable para cualquier base de $\mathbb{R}^2$.

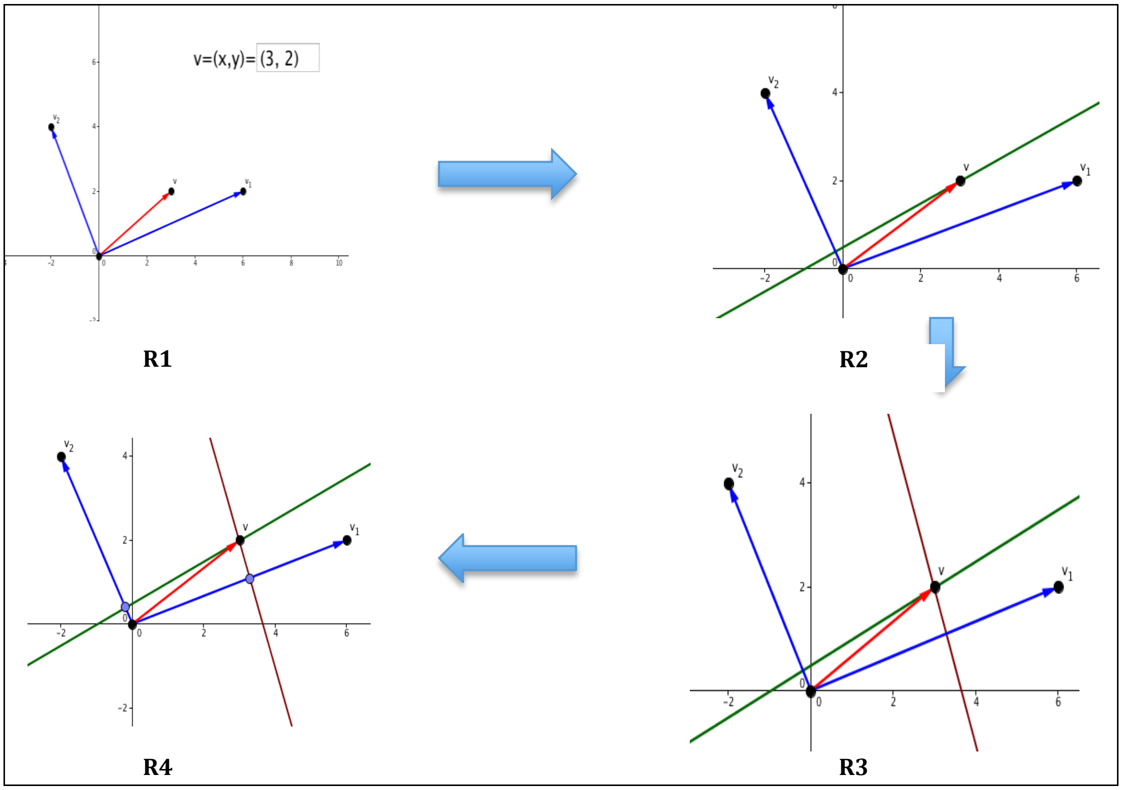


Figura 4.8. Construcciones de la Actividad 1.5 del estudiante $\boldsymbol{E_1}$

Ahora bien, Dreyfus et al. (2015) mencionan que al principio los constructos no son los suficientemente sólidos, es decir, son frágiles y flexibles. Para dar evidencia de esto mostramos el siguiente diálogo, obtenido de la discusión grupal, en donde el estudiante E_1 modifica su constructo, para poder generalizar su método a cualquier base de $\mathbb{R}^2$.

[19] I: Vamos a discutir sobre la Actividad 1.5. ¿Nos podrías explicar el procedimiento que realizaste? [El investigador le hace la pregunta al estudiante E_1, mientras proyecta su respuesta en la pantalla, véase la Figura 4.9].

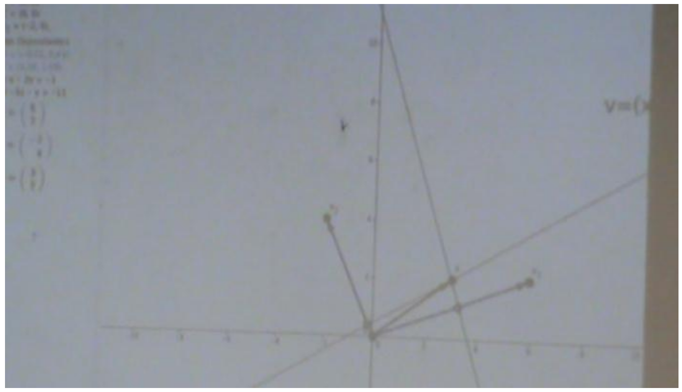


Figura 4.9: Proyección en la pantalla, de la respuesta de la Actividad 1.5 del estudiante $\boldsymbol{E_1}$

[20] E_1: Hice exactamente lo mismo que en la Actividad 1.3.

[21] E_{12}: Hizo proyecciones ortogonales por lo que no se forma un paralelogramo.

[22] E_1: Sí [algunos estudiantes se quedan pensando en voz alta, diciendo que debió usar paralelas en lugar de perpendiculares]… De hecho sí trataría de hacer lo mismo [refiriéndose a que utilizaría rectas paralelas]… porque precisamente en este caso los vectores no son perpendiculares [refiriéndose a los vectores que conforman la base].

El diálogo anterior nos da evidencia de la flexibilidad que habíamos mencionado anteriormente, es decir, sus constructos adquiridos son frágiles y moldeables, pues pueden ir evolucionando conforme se hacen reflexiones.

Por último, comentamos sobre la respuesta de la Actividad 1.5 de E_{12}, para dar otra evidencia del uso de los constructos de los estudiantes adquiridos en las actividades previas. Veamos la Figura 4.10 y analicemos los pasos que realizó dicho estudiante:

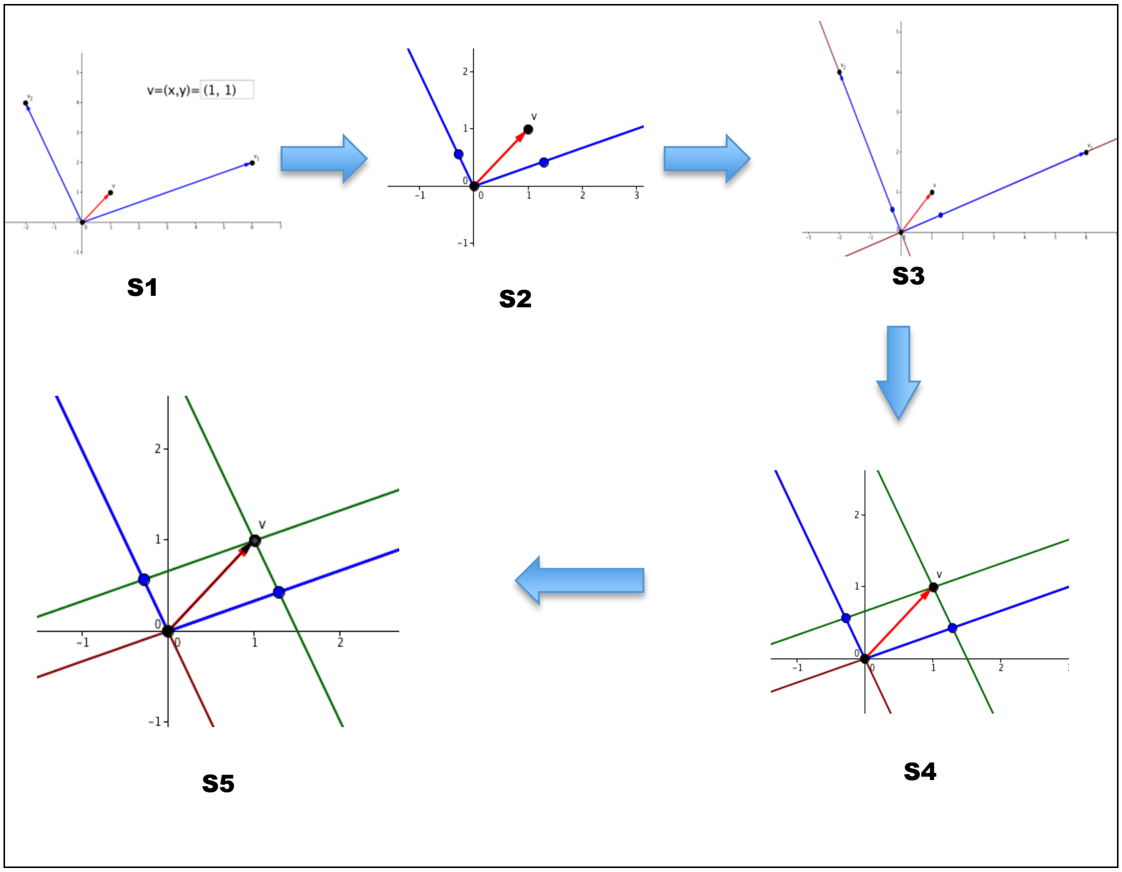


Figura 4.10. Construcciones en GeoGebra de la Actividad 1.5 del estudiante $\boldsymbol{E_{12}}$

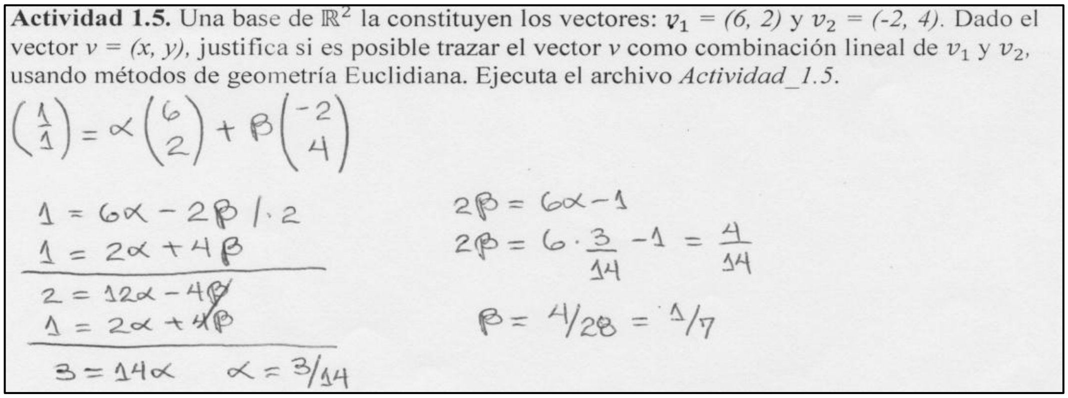
S1: Introdujo en la casilla los valores 1 y 1 para formar el vector $v = (1, 1)$ (vector rojo).

S2: Introdujo (directamente) en GeoGebra los vectores que encontró de forma algebraica, es decir, los vectores α(6, 2) y β(-2, 4) con $\alpha = \frac{3}{14}$ y $\beta = \frac{1}{7}$ (véase la Figura 4.11). Así los puntos azules son el resultado de su construcción.

S3: Graficó las rectas que son paralelas a los vectores v_1 y v_2, dando como resultado las rectas de color café.

S4: Trazó rectas paralelas que pasaran por los vectores que construyó en S2 (“los puntos azules”), dando como resultado las rectas de color verde.

S5: Trazó el punto de intersección de las rectas verdes, luego trazó el vector (“flecha”) desde el origen hacia este punto de intersección.



Actividad 1.5. Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: v_1 = *(6, 2)* y v_2 = *(-2, 4)*. Dado el vector *v* = *(x, y)*, justifica si es posible trazar el vector *v* como combinación lineal de v_1 y v_2, usando métodos de geometría Euclidiana. Ejecuta el archivo *Actividad_1.5*.

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$

$$1 = 6\alpha - 2\beta \;/\cdot 2$$
$$1 = 2\alpha + 4\beta$$
$$2 = 12\alpha - \cancel{4\beta}$$
$$1 = 2\alpha + \cancel{4\beta}$$
$$3 = 14\alpha \qquad \alpha = 3/14$$

$$2\beta = 6\alpha - 1$$
$$2\beta = 6 \cdot \frac{3}{14} - 1 = \frac{4}{14}$$
$$\beta = 4/28 = 1/7$$

Figura 4.11. Respuesta de la Actividad 1.5 del estudiante E_{12}

Si comparamos la respuesta de la Actividad 1.3 (pasos P1 a P5) del estudiante E_{12} con su respuesta de la Actividad 1.5 (pasos S1 a S5), entonces podemos verificar que el estudiante realiza las mismas construcciones en ambas respuestas. De los pasos P1 a P5 podemos deducir que el estudiante comienza con un proceso de Consolidación, aunque este proceso no es el que se esperaba, ya que se quería que los estudiantes no hicieran uso de sus constructos algebraicos previos, conforme al análisis *a priori* (proceso $+C_1$). Aquí también se refleja la necesidad de mejorar el diseño de la secuencia de actividades, para lograr los objetivos propuestos.

4.3.4 *Actividad 1.6*

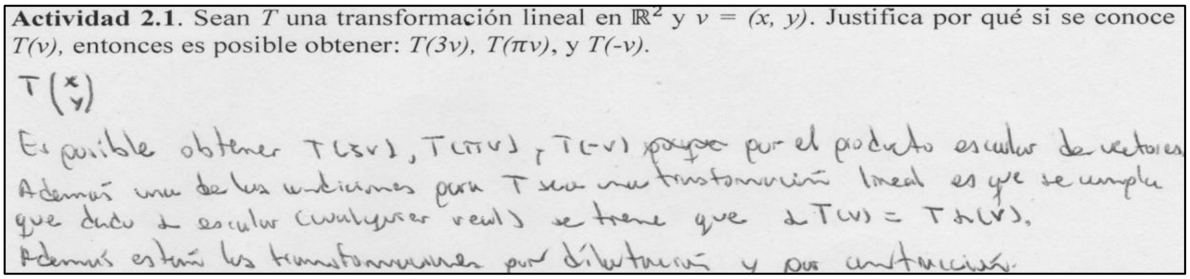
Recordemos que el objetivo de esta actividad era que los estudiantes abordaran la Actividad 1.5 de forma algebraica para que posteriormente compararan sus respuestas algebraicas con lo que se obtuvo en la parte geométrica. Desafortunadamente debido a la influencia de las Actividades 1.2 y 1.3, no se pudo lograr este objetivo ya que todos los estudiantes utilizaron el proceso inverso, es decir, primero hicieron los cálculos algebraicos y después realizaron los procesos geométricos, por lo que, no terminó siendo de utilidad esta actividad, en el sentido que se esperaba, o sea, la comparación de resultados en ambos ambientes.

4.4 Análisis de la Actividad 2

En esta sección presentamos un análisis de los datos obtenidos de todas las actividades que conforman la Actividad 2.

4.4.1 Actividad 2.1

Recordemos que esta actividad tuvo el objetivo de verificar las concepciones algebraicas de los estudiantes acerca de la propiedad de multiplicación por un escalar de una transformación lineal. La mayoría de los estudiantes dieron respuestas adecuadas a esta pregunta excepto los estudiantes E_2, E_6 y E_8. Como ejemplo de la posible respuesta que se esperaba conforme al análisis *a priori*, mostramos la del estudiante[9] E_7 (véase la Figura 4.12).



Actividad 2.1. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (x, y)$. Justifica por qué si se conoce $T(v)$, entonces es posible obtener: $T(3v)$, $T(\pi v)$, y $T(-v)$.

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Es posible obtener $T(3v)$, $T(\pi v)$, $T(-v)$ ~~porque~~ por el producto escalar de vectores
Además una de las condiciones para T sea una transformación lineal es que se cumpla
que dado α escalar cualquier real se tiene que $\alpha T(v) = T\alpha(v)$.
Además están las transformaciones por dilatación y por contracción.

Figura 4.12. Respuesta de la Actividad 2.1 del estudiante E_7

En su respuesta podemos observar que el estudiante E_7 menciona la propiedad de "producto escalar" (que es lo que se esperaba conforme el análisis *a priori*) de las transformaciones lineales, aunque con errores de escritura: $\alpha T(v) = T\alpha(v)$, en lugar de $\alpha T(v) = T(\alpha v)$. Además, el estudiante menciona funciones prototipo, específicamente, las transformaciones que él denomina "transformaciones por dilatación y por contracción" para hacer referencia a la propiedad de multiplicación por un escalar de las transformaciones lineales.

4.4.2 Actividad 2.2

Recordemos que el objetivo de esta actividad era que los estudiantes utilizaran y representaran en GeoGebra la propiedad de multiplicación por un escalar de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ con métodos de Geometría Euclidiana.

Como en esta actividad los vectores v y $T(v)$ no tenían coordenadas específicas en la hoja de trabajo, esto hizo que la mayoría de los estudiantes abordaran el problema totalmente de forma geométrica, aunque el estudiante E_1 se vio en la necesidad de obtener, con herramientas de GeoGebra, las coordenadas de v

[9] Transcripción de la respuesta del estudiante E_7: Es posible obtener $T(3v), T(\pi v), T(-v)$, por el producto escalar de vectores. Además una de las condiciones para T sea una transformación lineal es que se cumpla que dado α escalar cualquier real se tiene que $\alpha T(v) = T\alpha(v)$. Además están las transformaciones por dilatación y por contracción.

y $T(v)$ para concluir su respuesta, pero su razonamiento también involucró pensamientos geométricos.

Otra característica que tenían los objetos v y $T(v)$ en GeoGebra fue que v no estaba ligado a una transformación lineal específica, es decir, v y $T(v)$ eran vectores independientes y libres en este ambiente. Esta parte fue la que causó mayores conflictos en los estudiantes. A continuación presentamos un análisis de la respuesta del estudiante E_7 para dar evidencia de algunas de las dificultades que se presentaron. Veamos la Figura 4.13 que ilustra los pasos que siguió este estudiante en GeoGebra:

A1: Construyó un deslizador[10] (donde los números están representados como a) en GeoGebra.

A2: Construyó el vector av (vector de color negro).

A3: Construyó una circunferencia con centro en el origen y que pasa por av.

A4: Construyó el vector E (color verde) resultado de la prolongación del vector $T(v)$ y la intersección de la circunferencia.

De acuerdo con la respuesta de la Actividad 2.1 de este mismo estudiante (véase la Figura 4.12), es posible obtener $T(\alpha v)$ siempre que se conozca $T(v)$, con α un escalar real, de modo que el estudiante resuelve el problema de forma adecuada en el ambiente algebraico.

Por otro lado, los pasos A1 a A4 reflejan que el estudiante crea una estrategia para tratar de resolver el problema en el ambiente geométrico dinámico. La construcción que realizó dicho estudiante la podemos interpretar de manera siguiente: En el paso A1 construyó el deslizador para realizar una construcción dinámica, esto se ve reflejado en el paso A2 donde construye el vector av. Luego en A3 construye una circunferencia de radio la longitud de av, para después obtener el vector E (color verde) en el paso A4. Aunque el estudiante no lo dice explícitamente, conjeturamos que el estudiante pensó que el vector E es igual al vector $aT(v)$.

---

10 Un deslizador en GeoGebra está conformado por un segmento de recta y un punto sobre esta; mientras se mueve el punto sobre la recta se puede obtener diferentes números racionales, tanto positivos como negativos y el punto medio representa el cero.

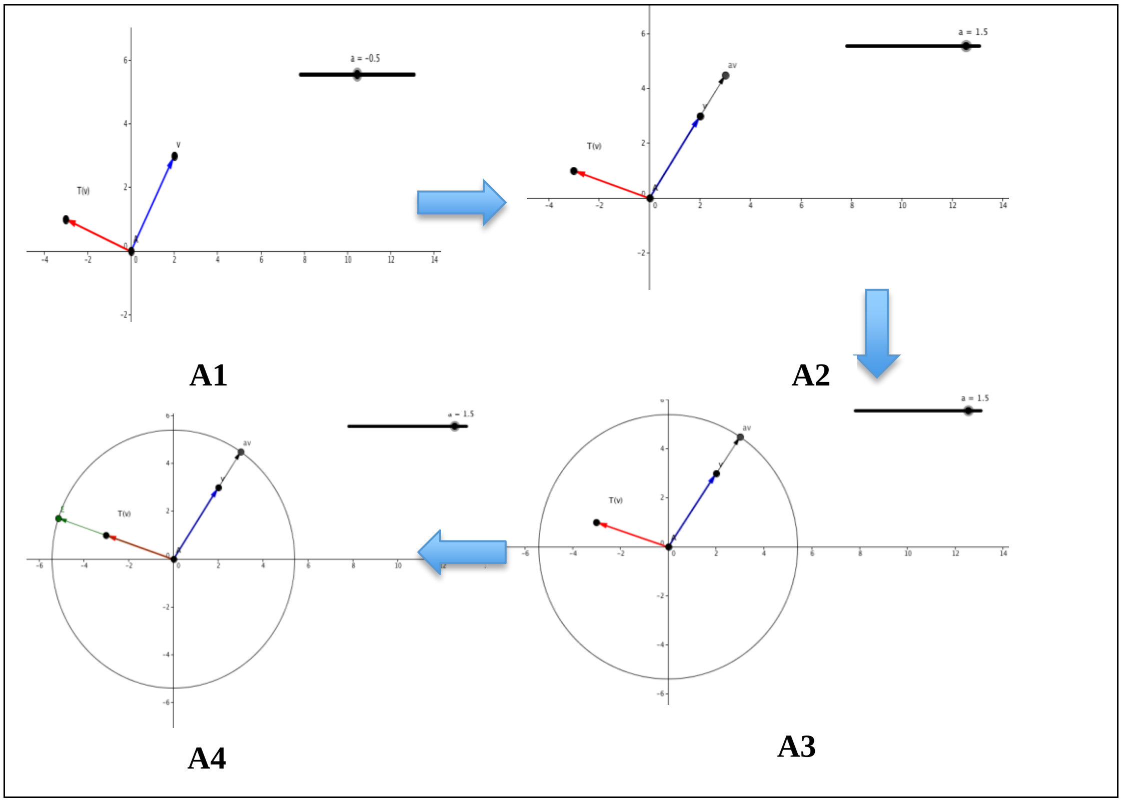
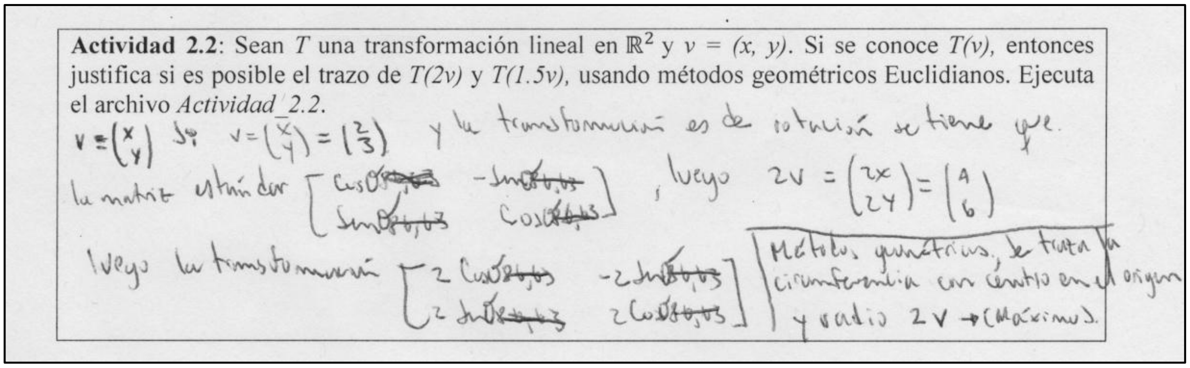


Figura 4.13. Construcciones de la Actividad 2.2 del estudiante $\boldsymbol{E_7}$

Ahora bien, pensamos que el estudiante creó la estrategia anterior, ya que se enfoca en el vector v para construir $2v$, en lugar de enfocarse en el vector $T(v)$ para construir $T(2v)$. Esto nos hace pensar que el estudiante realiza los procesos Reconocimiento, Edificando-con y Construcción, ya que al final crea una construcción que es nueva para el estudiante, pero se puede ver que aún no es consciente de su constructo adquirido ya que, en este caso, dicho constructo no sirve para dar una solución correcta al problema.

Además, el estudiante E_7 refleja en su hoja de trabajo (véase la Figura 4.14), que al principio trata de particularizar el problema, pensando que la transformación lineal es una transformación de rotación. Específicamente, se puede observar en su hoja de trabajo que el estudiante piensa en una matriz de rotación asociada a la transformación lineal y que está representada respecto a la base canónica: $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, donde θ representa el ángulo de rotación. Además, conjeturamos que el estudiante trata de realizar la operación $M2v$, para obtener el vector $T(2v)$, pero no lo logra pues escribe la matriz $\begin{bmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\cos\theta \end{bmatrix}$, y allí abandona su procedimiento.



Actividad 2.2: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (x, y)$. Si se conoce $T(v)$, entonces justifica si es posible el trazo de $T(2v)$ y $T(1.5v)$, usando métodos geométricos Euclidianos. Ejecuta el archivo *Actividad_2.2*.

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y la transformación es de rotación se tiene que la matriz estándar $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, luego $2v = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

luego la transformación $\begin{bmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\cos\theta \end{bmatrix}$

Métodos geométricos, se trata la circunferencia con centro en el origen y radio $2v$ → (Máximo).

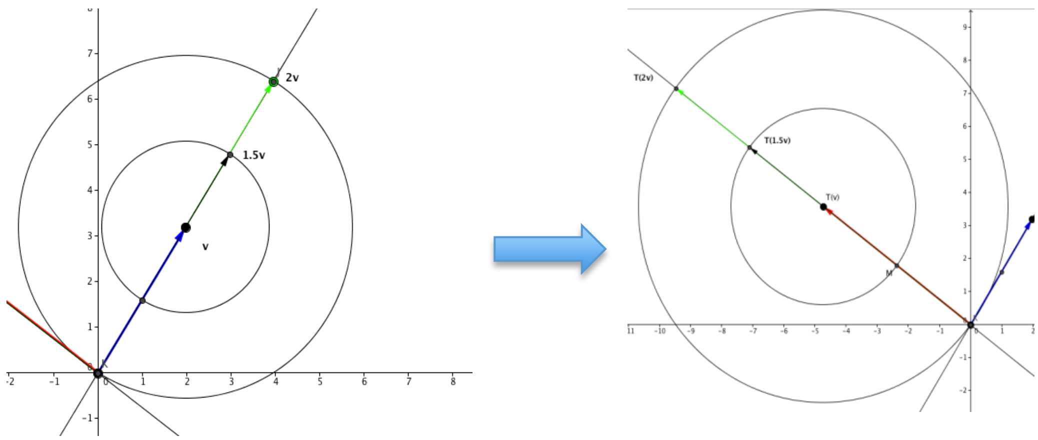
Figura 4.14. Respuesta de la Actividad 2.2 del estudiante E_7

Lo anterior es un claro ejemplo de lo que menciona Sierpinska (2000) en que los estudiantes tratan de ver a las transformaciones lineales como transformaciones prototipo (véase el Capítulo 1 de esta tesis).

En general la mayoría de los estudiantes, excepto E_2 y E_7, realizaron trazos de Geometría Euclidiana, para realizar de forma adecuada dicha construcción. Para mostrar un ejemplo consideramos la respuesta del estudiante E_6 (véase la Figura 4.15):

B1: Trazó una circunferencia de radio la longitud de v y con centro en el punto terminal de v; luego la intersección de la recta que prolonga a v con dicha circunferencia, da como resultado el vector $2v$. De la misma manera trazó una circunferencia con centro en v y que pasa por el punto medio de v; luego la intersección de la recta que prolonga a v con dicha circunferencia, da como resultado el vector $1.5v$.

B2: Realizó los mismos pasos que en B1 pero ahora se enfocó en el vector $T(v)$.



B1 **B2**

Figura 4.15. Construcciones de la Actividad 2.2 del estudiante $\boldsymbol{E_6}$

Podemos observar que el estudiante realiza el proceso Construcción en los pasos B1 y B2. Lo interesante, y es un problema que surgió también en otros estudiantes, es que primero se ve en la necesidad de hacer los trazos para obtener $2v$ y $1.5v$, y posteriormente hace los mismos trazos para obtener $T(2v)$ y $T(1.5v)$, para ello utiliza la propiedad escalar de las transformaciones lineales. En términos del marco AIC podemos decir que los estudiantes primero realizan procesos RBC para obtener el vector kv, luego vuelven a utilizar los procesos R y B para actualizar su estrategia e identificar que se tiene que construir $kT(v)$, con $k \in \{2, 1.5\}$. Puede ser que el estudiante hace estos trazos (los del paso B1) debido a que piensa que al realizar las construcciones de $2v$ y $1.5v$ obtendrá automáticamente los vectores $T(2v)$ y $T(1.5v)$, y al no obtener dichos vectores recurre a los constructos obtenidos del paso B1 para obtener los vectores $T(2v)$ y $T(1.5v)$, lo que da como resultado el paso B2. Se esperaba que los estudiantes realizaran las construcciones que realizó el estudiante E_6 en el paso B2, sin pasar por el paso B1.

4.4.3 Actividad 2.3

El objetivo de esta actividad era que los estudiantes realizaran construcciones similares a las de la Actividad 2.2, pero en esta actividad los vectores v y $T(v)$ tenían coordenadas fijas, esto con la finalidad de que los estudiantes hicieran también de forma algebraica dichas construcciones para que después compararan estos resultados con los obtenidos en sus construcciones geométricas.

Cabe mencionar que, para la mayoría de los estudiantes, el proceso de comparación no tuvo mucho sentido, posiblemente debido a que no hubo una necesidad que los hiciera comparar sus resultados, dado que el desarrollo algebraico no era complicado, ya que los vectores tenían coordenadas de números enteros. Incluso algunos estudiantes mencionaron que no entendieron cuál era el propósito de la comparación de sus datos.

En la parte geométrica la mayoría de los estudiantes utilizó sus mismos constructos obtenidos de la Actividad 2.2, por lo que para algunos estudiantes esta actividad les permitió entrar en el proceso Consolidación, en el sentido de que realizaron de forma más consciente y flexible sus construcciones.

Para dar evidencia de cómo los estudiantes utilizan sus constructos obtenidos de la Actividad 2.2 seguimos con el análisis de la producción del estudiante E_6. Veamos la Figura 4.16 que refleja las construcciones que realizó:

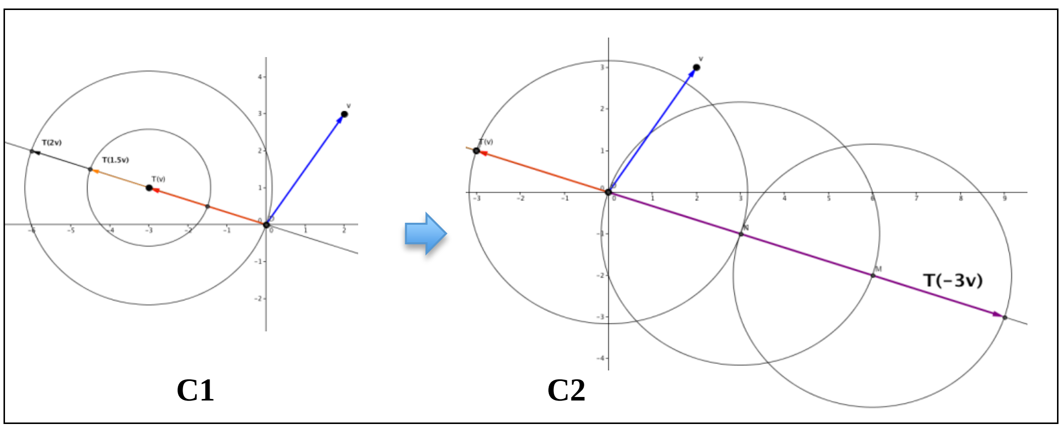


Figura 4.16. Construcciones de la Actividad 2.3 del estudiante $\boldsymbol{E_6}$

C1: Realizó los mismos pasos que en B1 (pasos de su respuesta de la Actividad 2.2).

C2: Construyó tres circunferencias de radio la longitud de $T(v)$, con centros como se muestra en la figura 4.16, para obtener el vector $T(-3v)$ (vector de color morado).

Si comparamos la respuesta de la Actividad 2.2 (pasos B1 a B2) del estudiante E_6 con la respuesta de la Actividad 2.3 (pasos C1 a C2), podemos identificar que el alumno se hace más consciente de sus construcciones en el paso

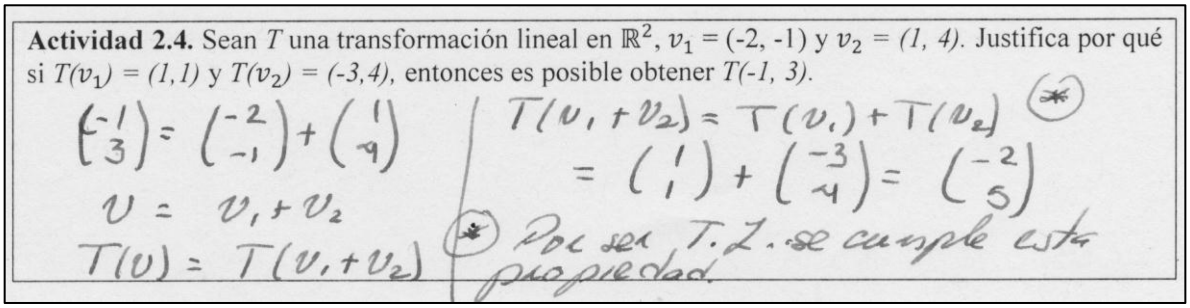
C1, pues aquí, en efecto, ya realiza directamente las construcciones con el vector $T(v)$, y omite las construcciones con el vector v, es decir, ya no hace las construcciones que hizo en B1. Además, en el paso C1 vuelve a hacer una nueva construcción para obtener el vector $T(-3v)$; esto confirma que el alumno entra en un proceso de Consolidación.

Para finalizar el análisis de esta actividad, por un lado, reportamos que cuatro estudiantes construyeron el vector $T(3v)$ en lugar del vector $T(-3v)$; aquí consideramos que el problema fue con el signo negativo. Pero lo curioso fue que aunque hicieron bien sus cálculos algebraicos, no compararon de forma adecuada estos resultados con sus resultados geométricos (verificando las coordenadas de los vectores); esto nos confirma que, en efecto, algunos estudiantes no reflexionaron al comparar sus resultados geométricos con los algebraicos. Por otro lado, en esta actividad la mayoría de los estudiantes llegaron a un proceso de Consolidación, algo que no esperábamos conforme el análisis *a priori*. Por otro lado nos percatamos que las construcciones euclidianas en ocasiones distrajeron la atención de los estudiantes, y esto causó que la propiedad de multiplicación por un escalar de una transformación lineal no se explorara adecuadamente.

4.4.4 Actividad 2.4

Esta actividad tuvo la finalidad de que los estudiantes identificaran cómo podrían hacer uso de la propiedad de la suma de una transformación lineal para resolver un problema en específico.

En esta actividad se propusieron los vectores $T(v_1) = (1,1)\ y\ T(v_2) = (-3,4)$, donde es posible identificar que $v = (-1,3) = v_1 + v_2$. Como se quería conocer $T(-1,3)$, entonces bastaba con calcular $T(v_1 + v_2)$ haciendo uso de la propiedad de la suma de las transformaciones lineales, ya que se conocía las imágenes de los vectores v_1 y v_2. Este proceso fue realizado por la mayoría de los estudiantes; específicamente, identificaron de forma inmediata que $v = (-1,3) = v_1 + v_2$. Como ejemplo de esto veamos la respuesta del estudiante E_9 (Figura 4.17).



Actividad 2.4. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (-2, -1)$ y $v_2 = (1, 4)$. Justifica por qué si $T(v_1) = (1,1)$ y $T(v_2) = (-3,4)$, entonces es posible obtener $T(-1, 3)$.

$\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$v = v_1 + v_2$

$T(v) = T(v_1 + v_2)$

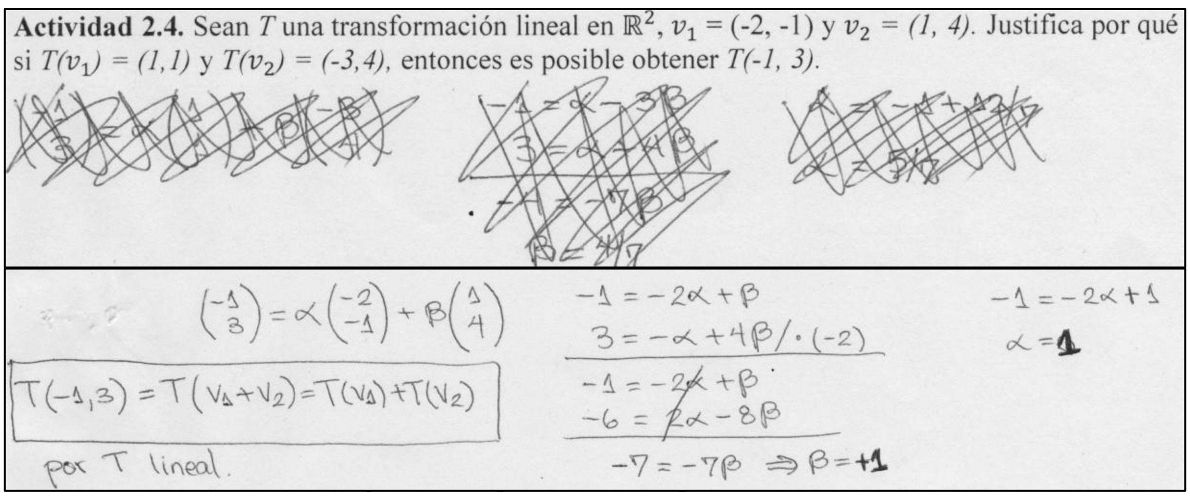
$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ (*)

$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

(*) Por ser T.L. se cumple esta propiedad.

Figura 4.17. Respuesta de la Actividad 2.4 del estudiante E_9

Algunos estudiantes atacaron este problema de forma más general, es decir; vieron el problema como un problema de extensión lineal, sin darse cuenta de forma inmediata que $v = (-1,3) = v_1 + v_2$, sino más bien plantearon la ecuación $v = (-1,3) = \alpha v_1 + \beta v_2$, y llegaron a que $\alpha = \beta = 1$. Para ver un ejemplo de esto veamos la respuesta del estudiante E_{12} que se muestra en la Figura 4.18.



Actividad 2.4. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (-2, -1)$ y $v_2 = (1, 4)$. Justifica por qué si $T(v_1) = (1,1)$ y $T(v_2) = (-3,4)$, entonces es posible obtener $T(-1, 3)$.

$\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$-1 = -2\alpha + \beta$

$3 = -\alpha + 4\beta / \cdot(-2)$

$-1 = -2\alpha + \beta$

$-6 = 2\alpha - 8\beta$

$-7 = -7\beta \Rightarrow \beta = +1$

$-1 = -2\alpha + 1$

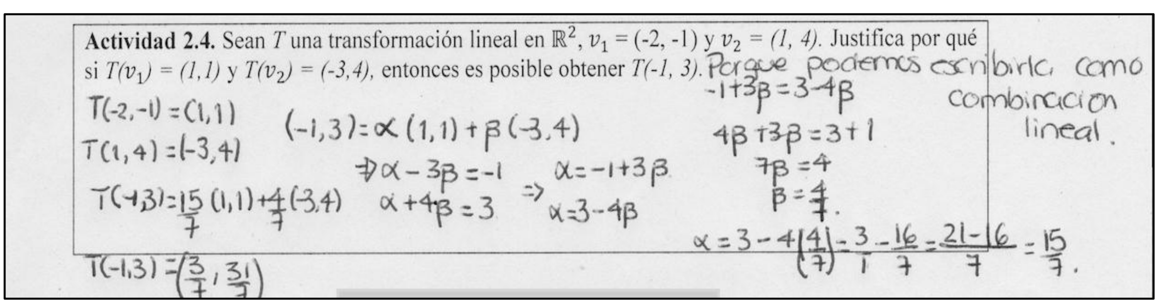
$\alpha = 1$

$\boxed{T(-1,3) = T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2)}$

por T lineal.

Figura 4.18. Respuesta de la Actividad 2.4 del estudiante E_{12}

Por último presentamos la respuesta del estudiante E_8 que trata de abordar el problema, como lo hizo el estudiante E_{12}, pero con ciertos errores como se puede observar en la Figura 4.19.



Actividad 2.4. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (-2, -1)$ y $v_2 = (1, 4)$. Justifica por qué si $T(v_1) = (1,1)$ y $T(v_2) = (-3,4)$, entonces es posible obtener $T(-1, 3)$. Porque podemos escribirlo como combinación lineal.

$T(-2,-1) = (1,1)$

$T(1,4) = (-3,4)$

$(-1,3) = \alpha(1,1) + \beta(-3,4)$

$\Rightarrow \alpha - 3\beta = -1 \Rightarrow \alpha = -1 + 3\beta$

$\alpha + 4\beta = 3 \qquad \alpha = 3 - 4\beta$

$-1 + 3\beta = 3 - 4\beta$

$4\beta + 3\beta = 3 + 1$

$7\beta = 4$

$\beta = \frac{4}{7}$

$\alpha = 3 - 4\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{3}{1} - \frac{16}{7} = \frac{21-16}{7} = \frac{15}{7}$

$T(-1,3) = \frac{15}{7}(1,1) + \frac{4}{7}(-3,4)$

$T(-1,3) = \left(\frac{3}{7}, \frac{31}{7}\right)$

Figura 4.19. Respuesta de la Actividad 2.4 del estudiante E_8

El estudiante E_8 en lugar de plantear la ecuación $v = \alpha v_1 + \beta v_2$, plantea la ecuación $v = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$ con los vectores específicos dados– aunque tal vez su intención era plantear la primera ecuación. Trabajando con la ecuación $v = (-1, 3) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) \ = \alpha(1, 1) + \beta(-3,1)$, obtiene valores de α y β , distintos de 1. Presentamos el siguiente diálogo obtenido de la discusión global, que nos permite seguir con el análisis de la respuesta de este estudiante:

[23] I: ¿Podrías explicarnos tu respuesta? [refiriéndose al estudiante E_8 …quien pasa y transcribe la respuesta que obtuvo en su hoja de trabajo].

[24] E_8: Creo que aquí hice algo raro porque los valores α y β me salieron valores raros [en este punto el estudiante ya sabía que α y β tenían el valor de 1, pero no estaba consciente de cuál fue su error].

[25] E_{12}: A mí me pasó lo mismo y tuve que tachar, es que realmente no son $T(v_1)$ y $T(v_2)$, en la combinación lineal, sino más bien $v_1 \ y \ v_2$ (dirigiéndose a E_8).

En la parte [24] del diálogo podemos observar que el estudiante E_8 todavía no se hace consciente del error, luego en [25] el estudiante E_{12} confirma que él había cometido el mismo error en principio; reflexionó y borró esos cálculos (véase la Figura 4.18) de $v = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$, para plantear $v = \alpha v_1 + \beta v_2$.

El hecho anterior se nos hace interesante ya que esta forma de pensar podría ser algún patrón que algunos estudiantes pueden manifestar al resolver el problema de extensión lineal en el ambiente simbólico. Conjeturamos que el problema podría estar en que los alumnos confunden al vector $v_1 = (-2, 1)$ con el vector $T(-2, 1)$ y al vector $v_2 = (1, 4)$ con el vector $T(1, 4)$, en la ecuación $v = \alpha v_1 + \beta v_2$. Esto da como resultado que los estudiantes trabajen con los vectores imagen en lugar de los vectores originales. Esta confusión pensamos que puede ser debido a que los estudiantes piensan en la ecuación $v = \alpha v_1 + \beta v_2$, sin plasmarla en el ambiente de lápiz-y-papel, por lo que confunden la nomenclatura $T(v_k)$ con v_k, con $k \in \{1, 2\}$ al momento de realizar los cálculos. Por otro lado posiblemente obtener números fraccionarios como coeficientes les hace verificar su solución.

4.4.5 Actividad 2.5

En esta actividad se pretendía que los estudiantes representaran la propiedad de la suma de las transformaciones lineales en GeoGebra. Debido a los resultados de la discusión grupal que se había hecho anteriormente acerca de la Actividad 1, se rediseñó la actividad de tal forma que se ocultaron los ejes coordenados y los vectores fueron dejados libres en GeoGebra, como se muestra en la Figura 4.20.

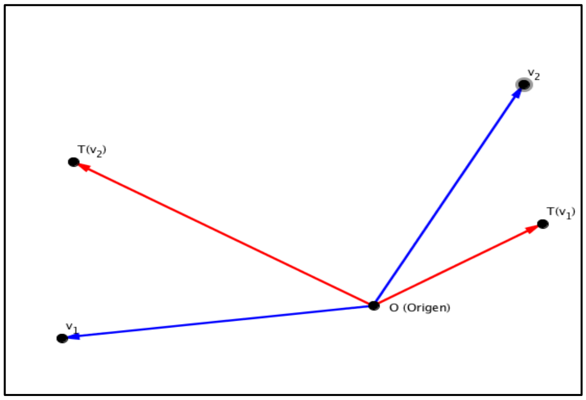


Figura 4.20. Actividad 2.5

En esta actividad todos los estudiantes excepto E_9 (quien realizó una construcción diferente) y E_2 (quien no contestó), realizaron construcciones con apoyo de rectas paralelas a los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$ para formar un paralelogramo tal y como se esperaba en el análisis *a priori*. Este resultado, conjeturamos, se presentó de esta manera, debido a que la mayoría de los estudiantes durante la discusión grupal reflexionó acerca de las construcciones de la Actividad 1, y las ocupó para contestar la Actividad 2.5. Veamos la respuesta del estudiante E_{10} con apoyo de la Figura 4.21 que refleja los siguientes pasos:

D1: Trazó una recta paralela al vector $T(v_2)$ y que pasa por $T(v_1)$.

D2: Trazó una recta paralela al vector $T(v_1)$ y que pasa por $T(v_2)$.

D3: Trazó el vector $\mathrm{T}\,(v_1 + v_2)$, resultado de la intersección de las rectas construidas en los pasos anteriores.

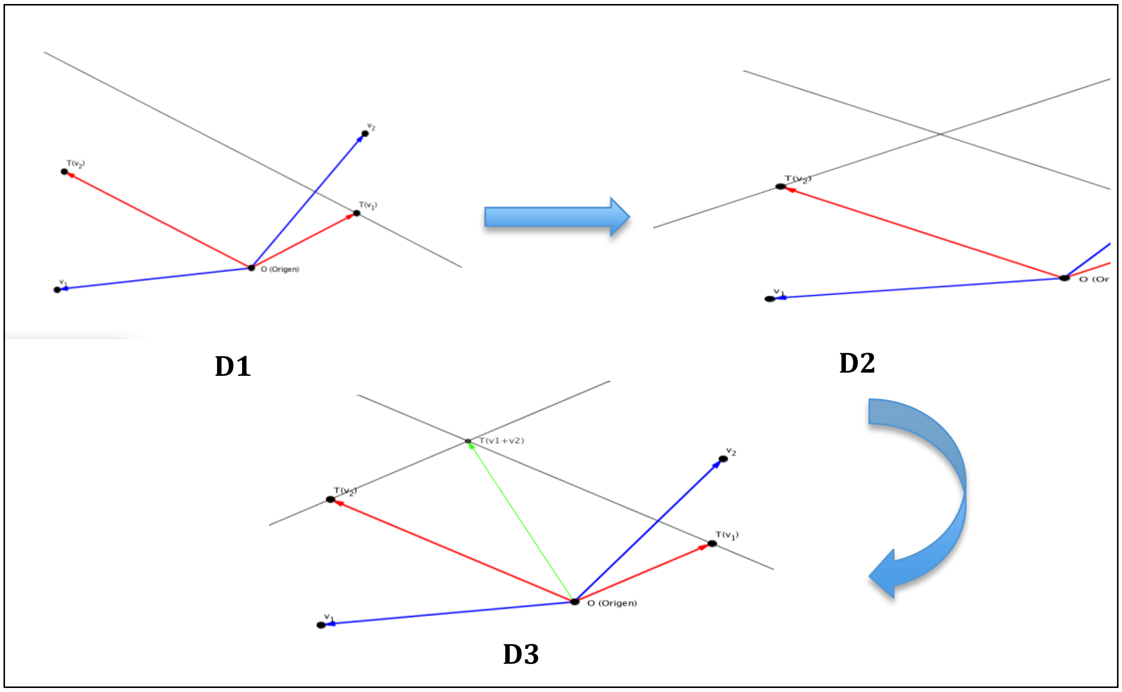


Figura 4.21. Construcciones de la Actividad 2.5 del estudiante E_{10}

Podemos observar de los pasos D1 a D3 que el estudiante E_{10} utiliza los constructos que obtuvo de las actividades 1.3 y 1.5; específicamente, se guía en el trazo de paralelas a los vectores base y en la regla del paralelogramo, por lo que el estudiante realiza un proceso Reconocimiento para identificar estos constructos y utiliza un proceso Edificando-con para realizar la estrategia que siguió en los pasos D1 a D3.

Cabe recalcar que los pasos D1 a D3 no reflejan un nuevo proceso Construcción, debido a que no reflejan construcciones que en ese instante fueran totalmente nuevas para el estudiante. Mencionamos que los procesos Reconocimiento y Edificando-con, que utilizó de los pasos D1 a D3, están dentro de la evolución del proceso Consolidación, resultado de la Actividad 1. Como mencionan Dreyfus et al. (2015), la etapa de Consolidación es un proceso sin fin en el que pueden surgir, más procesos de abstracción.

4.4.6 Actividad 2.6

En esta actividad se pretendía que los estudiantes hicieran lo mismo que realizaron en la Actividad 2.5, con la excepción de que los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$ tenían coordenadas específicas; esto tenía la finalidad de que los estudiantes utilizaran procesos tanto algebraicos como geométricos para después comparar sus resultados en ambos ambientes. Sin embargo nuevamente la reflexión no se dio como se esperaba; de hecho podría decirse que los estudiantes no se vieron en la necesidad de comparar sus resultados. Pensamos que esto se debió a que los alumnos estaban tan seguros de sus construcciones que ni siquiera surgió un motivo de comparación de sus resultados algebraicos y geométricos.

Asimismo, todos los estudiantes resolvieron de forma correcta la parte algebraica; en la parte geométrica realizaron exactamente sus mismas construcciones que habían hecho en la Actividad 2.5, por lo que esta Actividad no fue de gran ayuda para los fines de la investigación.

4.5 Análisis de la Actividad 3

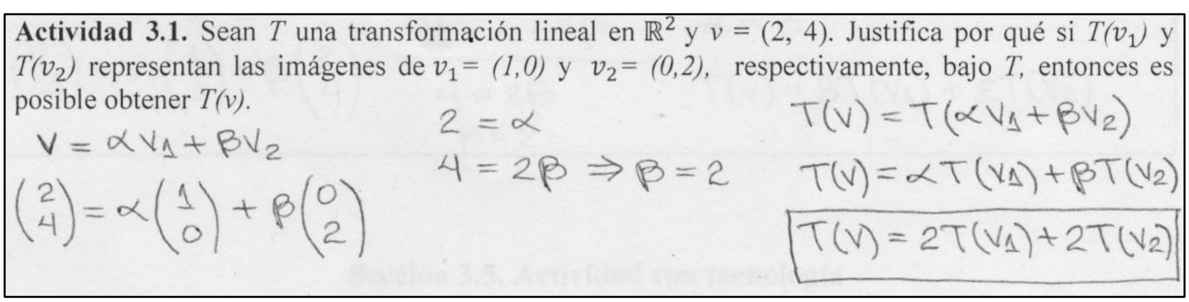
En esta sección ofrecemos un análisis de las producciones de los estudiantes, obtenidos de todas las actividades que conforman la Actividad 3.

4.5.1 Actividades 3.1 a 3.4

Estas actividades tenían el objetivo que los alumnos resolvieran un problema específico de extensión lineal en $\mathbb{R}^2$, con herramientas puramente algebraicas.

Recordemos que de la Actividad 2.4 surgió una discusión– en la que se reflexionó acerca de cómo algunos estudiantes resolvieron dicha actividad considerando el problema como el de extensión lineal. Lo anterior, pensamos que influyó a que todos los alumnos, excepto el estudiante E_4, contestaran de forma similar, como se consideró en el análisis *a priori*.

A continuación damos un ejemplo como evidencia de lo anterior. Para ello veamos la Figura 4.22 que muestra la respuesta del estudiante E_9 de la Actividad 3.1.



Actividad 3.1. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y v = (2, 4). Justifica por qué si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,2)$, respectivamente, bajo T, entonces es posible obtener $T(v)$.

$V = \alpha V_1 + \beta V_2$

$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$2 = \alpha$

$4 = 2\beta \Rightarrow \beta = 2$

$T(V) = T(\alpha V_1 + \beta V_2)$

$T(V) = \alpha T(V_1) + \beta T(V_2)$

$\boxed{T(V) = 2T(V_1) + 2T(V_2)}$

Figura 4.22. Respuesta de la Actividad 3.1 del estudiante E_9

4.5.2 Actividad 3.2

En esta actividad los estudiantes tenían que resolver un problema específico de extensión lineal pero en el ambiente de GeoGebra; la finalidad era que utilizaran exclusivamente métodos geométricos Euclidianos.

Los datos obtenidos en esta actividad reflejan que los alumnos son más conscientes de sus constructos adquiridos en las Actividades 1 y 2, pero no abordan el problema totalmente de forma geométrica como se pretendía conforme al análisis *a priori*. Específicamente, los alumnos no se ven en la necesidad de dejar sus recursos algebraicos, a pesar de que en las discusiones grupales que se hicieron de las Actividades 1 y 2, se había llegado a un acuerdo, de cuál era el objetivo principal de abordar el problema utilizando únicamente recursos geométricos Euclidianos.

Actividad 3.2. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (4, 8)$. Si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de $v_1 = (2,0)$ y $v_2 = (0,4)$, respectivamente, bajo T, entonces justifica si es posible el trazo de $T(v)$ usando métodos geométricos Euclidianos. Ejecuta el archivo *Actividad_3.2.*

$(4,8) = \alpha(2,0) + \beta(0,4) = (2\alpha, 4\beta)$ entonces

$4 = 2\alpha$
$8 = 4\beta$ entonces $\alpha = 2$ $\beta = 2$

$\beta = 2$

y además $T(4,8) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$

$T(4,8) = 2T(v_1) + 2T(v_2)$

Figura 4.23. Respuesta de la Actividad 3.2 del estudiante E_1

En la Figura 4.23 se puede ver la respuesta del estudiante E_1 a la Actividad 3.2. Podemos observar que el estudiante E_1 escribe v como combinación lineal de v_1 y v_2, para llegar a $T(v) = 2T(v_1) + 2T(v_2)$. Todos los pasos que hizo en esta parte fueron algebraicos y para continuar con la construcción geométrica empieza con la hipótesis de que $T(v) = 2T(v_1) + 2T(v_2)$, y se dedica a construir dicho vector de la siguiente manera (véase la Figura 4.24):

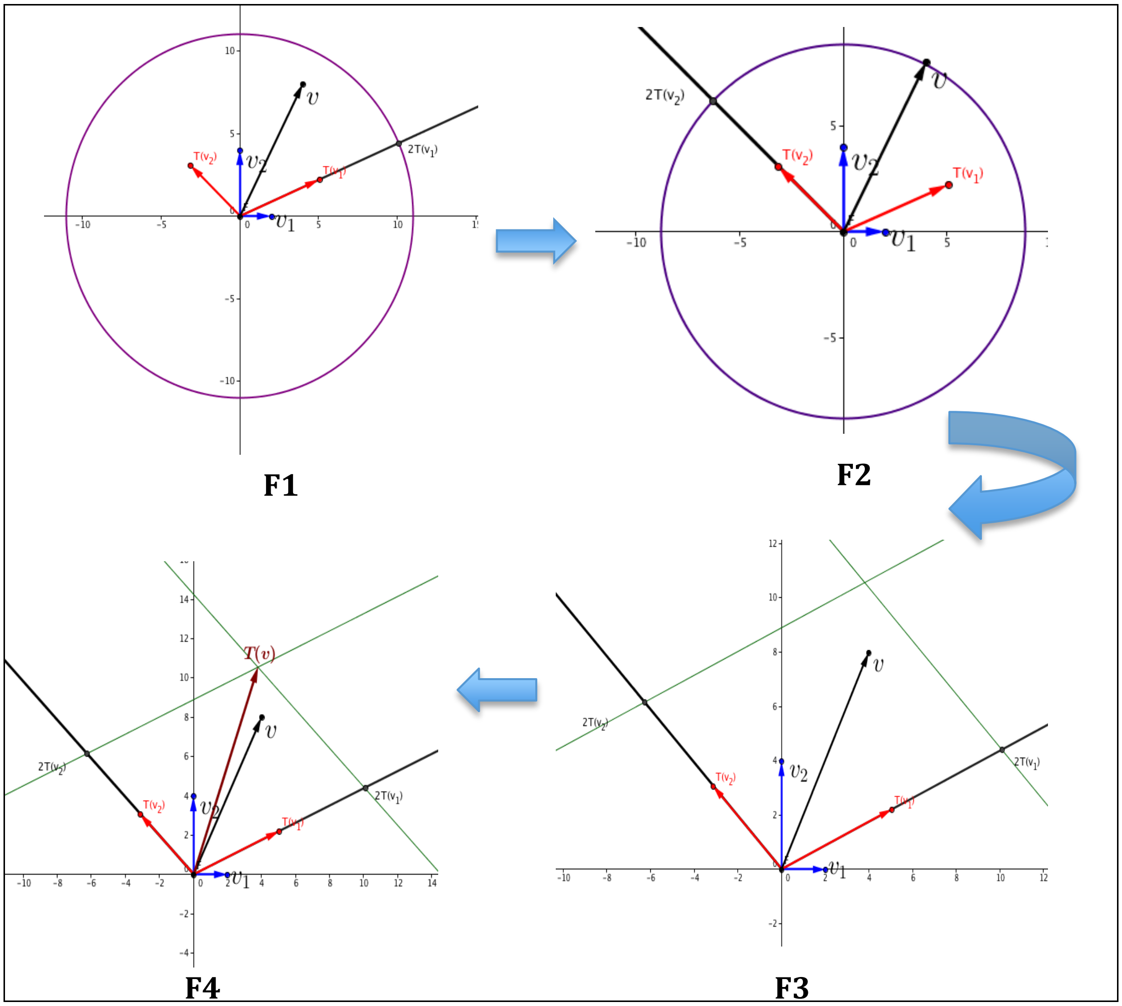


Figura 4.24. Construcciones de la Actividad 3.3 del estudiante E_1

F1: Construyó una circunferencia de radio $2T(v_1)$ con centro en el origen y también una semirrecta que prolonga al vector $T(v_1)$. Intersectó la circunferencia con la semirrecta para obtener el vector $2T(v_1)$.

F2: Realizó pasos similares a F1 para obtener el vector $2T(v_2)$.

F3: Construyó paralelas a los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$ como se muestra en la figura (rectas verdes).

F4: Construyó la intersección de las rectas de color verde para obtener T(v).

Podemos observar que en los pasos F1 y F2 el estudiante utiliza sus constructos obtenidos de las actividades 2.2 y 2.3, por lo que el estudiante continúa en el proceso Consolidación que surgió en la Actividad 2.3. En los pasos F3 y F4 el estudiante utiliza sus constructos obtenidos de las Actividades 2.5 y 2.6, de modo que sigue en el proceso Consolidación que surgió en la Actividad 2.5.

Cabe mencionar que en nuestro análisis *a priori*, se esperaba que el alumno hiciera como primer paso, la construcción de la Actividad 1, para poder solucionar este problema de forma totalmente geométrica, es decir; se esperaba que trazara v como combinación lineal de v_1 y v_2 en GeoGebra; sin embargo esta construcción la hizo de forma algebraica como puede verse en la Figura 4.23.

La construcción del estudiante E_1 es una muestra de cómo resolvieron los demás estudiantes (excepto[11] por E_4), o al menos de forma similar, el problema de extensión lineal en GeoGebra. Consideramos que los estudiantes no hicieron el trazo de v como combinación lineal de v_1 y v_2, debido a alguno de los siguientes dos factores:

1: La influencia al resolver el problema primeramente en la forma algebraica (Actividad 3.1).

2: La facilidad de las cuentas algebraicas debido a que los datos proporcionaban cuentas sencillas.

4.5.3 Actividad 3.3

En esta Actividad se pretendía que los alumnos, con los datos de la Actividad 3.2, les dieran coordenadas específicas a los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$, para resolver el problema de forma algebraica y comparar sus resultados en los ambientes geométricos y algebraicos.

Los datos de los estudiantes, obtenidos de esta actividad, reflejan que para la mayoría de los estudiantes sigue sin tener significado el proceso de comparación, ya que las producciones en sus hojas de trabajo no coinciden con los de su archivo de GeoGebra, las coordenadas de los vectores $T(v_1)$ y $T(v_2)$ no coincidían en ambos ambientes, por lo que se puede deducir que no hacen tal comparación de sus datos.

Sin embargo, consideramos que esta actividad propició más el entendimiento de la comparación de resultados, ya que hubo cuatro estudiantes que verificaron sus resultados. Esta mejora fue debido a que la actividad obligaba más a la

[11] El estudiante E_4 hizo trazos similares, pero trazó sólo la combinación lineal $v = 2v_1 + 2v_1$, confundiendo esta con el trazo de $T(v) = 2T(v_1) + 2T(v_1)$.

comparación, ya que en la Actividad 3.2 se hacía el trazo de forma geométrica, luego en la Actividad 3.3 se tuvo que asignar valores específicos a $T(v_1)$ y $T(v_2)$ en la construcción que se había realizado previamente y posteriormente se trataba de hacer los cálculos algebraicos para comparar las coordenadas de $T(v)$ en ambos ambientes.

Cabe mencionar que el obstáculo en la comparación podría parcialmente ser debido a la dificultad de los cambios de representación, y que es aquí donde el profesor tiene que jugar un papel crucial para poder guiar de forma adecuada estas actividades.

4.5.4 Actividades 3.4, 3.5 y 3.6

Las actividades 3.1, 3.2 y 3.3 fueron similares a las actividades 3.4, 3.5 y 3.6, respectivamente, la diferencia era que los vectores de la base ya no pertenecían a los ejes coordenados.

Respecto a la Actividad 3.4, aquellos estudiantes que resolvieron este problema lo hicieron con el mismo mecanismo que realizaron al resolver la Actividad 3.1, y el hecho de que los vectores en la Actividad 3.4 no estuvieran en los ejes coordenados sólo propició a que los estudiantes realizaran más cálculos aritméticos que en la Actividad 3.1.

Respecto a la Actividad 3.5, los datos obtenidos reflejan que los estudiantes utilizaron la misma estrategia que emplearon en la Actividad 3.3; de hecho podría decirse que el hecho de que los elementos de la base ya no pertenecían a los ejes coordenados no afectó el desarrollo de esta actividad. Esto último fue debido a que nuevamente no trazaron v como combinación lineal de v_1 y v_2; hicieron los cálculos (que fueron relativamente sencillos) para llegar a que $T(v) = T(v_1) + 2T(v_2)$, y usaron esta hipótesis para construir este último vector en GeoGebra. Por lo expuesto deducimos que esta actividad sirvió para seguir consolidando su método para resolver el problema de extensión lineal en $\mathbb{R}^2$ en un ambiente de Geometría Dinámica, aunque no se logró que desarrollaran la estrategia que se pretendía.

Respecto a la Actividad 3.6, el hecho de que los vectores no estuvieran en los ejes coordenados fue irrelevante pues sucedieron hechos similares a las de la Actividad 3.3.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En el presente capítulo basándonos en el análisis de datos que se realizó en el capítulo anterior, comentamos acerca del cumplimiento de nuestros objetivos de investigación así como las respuestas a nuestras preguntas de investigación, mismas que formulamos al final del Capítulo 2 y que guiaron el presente estudio. Asimismo, comparamos nuestro análisis *a priori* (presentado en el Capítulo 3), con lo que realmente sucedió conforme a nuestro análisis de los datos (presentado en el Capítulo 4). Finalmente planteamos algunas propuestas didácticas que pueden ser reproducidas en un contexto educativo para abordar el problema de extensión lineal en un ambiente de Geometría Dinámica.

5.1 Respecto a los objetivos de la investigación

Recordemos que nuestro objetivo general de investigación fue el siguiente: identificar los procesos de abstracción que estudiantes de maestría en Matemática Educativa reflejan al realizar construcciones geométricas para solucionar el problema de extensión lineal representado en un ambiente de Geometría Dinámica. Además, para tener una herramienta y un soporte que nos permitiera lograr el objetivo anterior, formulamos el siguiente objetivo particular: diseñar e implementar una secuencia de actividades que permita a los estudiantes realizar construcciones geométricas que influencien una solución geométrica al problema de extensión lineal en un ambiente de Geometría Dinámica.

Para lograr los objetivos descritos anteriormente, diseñamos e implementamos una secuencia de actividades a estudiantes de maestría en Matemática Educativa, quienes cursaban la materia de Álgebra y Geometría en una Institución de la Ciudad de México. Para la elaboración y el análisis de dicha secuencia nos basamos en los principios del marco teórico metodológico Abstracción en Contexto de Dreyfus et al. (2015). Esta teoría cuenta con una metodología que nos permite identificar acciones epistémicas o procesos de abstracción, que son los siguientes: Reconocimiento, Edificando-con, Construcción y Consolidación. En el Capítulo 4 dimos evidencia de cómo los estudiantes durante la implementación de nuestras actividades reflejaron los procesos de abstracción, mencionados anteriormente, y además nuestras actividades fueron diseñadas de tal manera que en las dos primeras actividades los estudiantes pudieran realizar construcciones geométricas, que en cierta manera propiciaran a una solución geométrica del problema de extensión lineal representado en GeoGebra.

Aunque la mayoría de los estudiantes, con ayuda de las dos primeras actividades, enfrentó de manera adecuada el problema de extensión lineal, no podemos asegurar que los estudiantes obtuvieron los conocimientos necesarios para poder construir una solución geométrica (abstracta) a dicho problema. Para ser más puntuales vamos a discutir los siguientes puntos:

1) <u>La elección de utilizar GeoGebra y métodos de Geometría Euclidiana.</u> Recordemos que los estudiantes que participaron en nuestro estudio contaban con conocimientos previos del Álgebra Lineal; por ello nuestra secuencia de actividades tuvo la intención de que los estudiantes ampliaran sus conocimientos (extendiendo sus representaciones algebraicas a representaciones geométricas) respecto a ciertos conceptos del Álgebra Lineal. Puntualmente, tomamos la elección de enfocarnos en el problema de extensión lineal representado en GeoGebra. Para ello nuestra secuencia didáctica involucró construcciones geométricas que propiciaron una solución geométrica a dicho problema. Dichas construcciones se indicaron que se realizaran con ayuda de trazos derivados de la Geometría Euclidiana; cabe aclarar que nuestro grupo de estudiantes contaba con conocimientos previos de construcciones geométricas Euclidianas representadas en GeoGebra, de manera que al principio pensamos que sería una buena herramienta para que los estudiantes abordaran (de la mayor forma posible) dicho problema en un ambiente geométrico para poder dar una solución geométrica a dicho problema. Sin embargo la restricción de utilizar únicamente dichos trazos derivados de la Geometría Euclidiana, puede ocasionar que los trazos geométricos se vuelvan complicados y que los estudiantes pierdan de vista el significado de los conceptos del Álgebra Lineal (hablaremos puntualmente de esto en el siguiente punto).

En nuestro estudio tratamos de evitar que los estudiantes se enfrentaran a trazos difíciles de regla-y-compás y es por eso que el problema perdió generalidad, en el sentido de que las construcciones que realizaron los estudiantes en GeoGebra, no resultaron ser dinámicas y esto limitó el potencial del significado de las construcciones para los estudiantes.

Sin embargo, en la discusión grupal de la Actividad 1 (véase el análisis de las actividades 1.3 y 1.4 del Capítulo 4 de esta tesis) mostramos un evento en donde los estudiantes abordaron, pensando de forma geométrica, un problema que involucraba la representación del concepto de combinación lineal en un ambiente geométrico. Específicamente, en la pantalla de GeoGebra teníamos disponible un punto O que representaba al origen y los vectores v, v_1 y v_2 (variables en GeoGebra), y se quería construir $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. En este evento los alumnos invocaron automáticamente el uso de herramientas geométricas derivadas de la Geometría Euclidiana para realizar dicha construcción. Por lo que esto nos dio evidencia que las construcciones geométricas pueden ser una buena herramienta para abordar conceptos (pensándolos en un ambiente geométrico) del Álgebra Lineal.

2) Diseño de la secuencia. Nuestra secuencia didáctica tuvo carencias, pues por ejemplo, en las actividades finales de la secuencia se esperaba que los estudiantes resolvieran los problemas de extensión lineal pensándolos, de la mayor forma posible, en un ambiente geométrico con ayuda de trazos de la Geometría Euclidiana, y aunque la mayoría de los estudiantes resolvió dichos problemas de forma correcta (influenciada por actividades previas), ningún estudiante se deslindó de sus pensamientos aritmético-algebraicos; pensamos que esto se debió a que los problemas estaban planteados con algunos vectores fijos, lo que causó que los estudiantes recurrieran a operaciones aritmético-algebraicas como apoyo principal para después trasladar estos conocimientos al ambiente geométrico dinámico.

Para explicitar lo anteriormente dicho consideremos la Actividad 3.2 de nuestra secuencia de actividades:

Sean *T* una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y v = (4, 8). Si *T*(v_1) y *T*(v_2) representan las imágenes de v_1 = *(2,0)* y v_2 = *(0,4)*, respectivamente, bajo *T*, entonces justifica si es posible el trazo de *T(v)* usando métodos geométricos Euclidianos. Ejecuta el archivo *Actividad_3.2.*

Como se puede observar, el problema planteado no es general, en el sentido de que los vectores v, v_1 y v_2, son fijos. Esto tenía la finalidad de que el problema se resolviera utilizando propiedades "básicas" de la Geometría Euclidiana, no perdiendo de vista los conceptos del Álgebra Lineal que estén involucrados; al construir en GeoGebra el vector v como combinación lineal de v_1 y v_2 (véase la solución *a priori* incluida en el Capítulo 4), se puede visualizar fácilmente en la pantalla de GeoGebra que $v = 2v_1 + 2v_2$ y así el trazo de $T(v) = 2T(v_1) + 2T(v_2)$ se reduce a construir los vectores $2T(v_1)$ y $2T(v_2)$, y luego construir la suma de estos vectores.

Lo anterior nos hace preguntarnos: ¿si la actividad se diseñara de tal forma que todos los vectores dados fueran variables en GeoGebra, entonces los estudiantes podrían resolver dicho problema utilizando exclusivamente métodos de Geometría Euclidiana; a continuación ofrecemos un análisis de esta situación.

Los estudiantes necesitan tener conocimientos sólidos en Geometría Euclidiana para que no se pierda de vista los conceptos del Álgebra Lineal que se involucran en dicho problema, pues puede suceder que los trazos no sean tan simples de construir. Por ejemplo, al querer representar a un vector v (variable en GeoGebra) como combinación lineal de dos vectores v_1 y v_2 (no paralelos y variables en GeoGebra), el estudiante podría construir exclusivamente con trazos geométricos euclidianos dicha combinación lineal, de la siguiente manera: se trazan rectas paralelas a los vectores v_1 y v_2 y que pasen por el vector v y se buscan ciertas intersecciones para obtener los vectores $\lambda_1 v_1$ y $\lambda_2 v_2$ en GeoGebra, que cumplen que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ (similar al análisis *a priori* de la Actividad 1.3). Pero la dificultad puede surgir al construir el vector $T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$, pues el estudiante tendría que encontrar, primero, la representación geométrica de los números reales λ_1 y λ_2, y estas construcciones no son tan sencillas de realizarlas utilizando Geometría Euclidiana, pues requiere interpretar dichos números reales como la construcción de división de segmentos. Por ejemplo, si queremos obtener

λ_1 tendríamos que dividir la longitud del vector $\lambda_1 v_1$ entre la longitud del vector v_1 y determinar el signo de λ_1 dependiendo de si $\lambda_1 v_1$ tiene orientación positiva o negativa. Por último, el estudiante tiene que construir los vectores $\lambda_1 T(v_1)$ y $\lambda_2 T(v_2)$, lo cual vuelve a ser una construcción que utilizando sólo Geometría Euclidiana no es tan sencilla, pues por ejemplo, para obtener el vector $\lambda_1 T(v_1)$ tiene que multiplicar un segmento de longitud el valor absoluto de λ_1 por la longitud del vector $T(v_1)$ y determinar la dirección según el signo de λ_1.

Como se pudo observar anteriormente, al tratar de construir $T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$, esta queda condicionada a los signos de λ_1 y λ_2. Es decir, para construir dinámicamente a $T(v)$, tenemos que considerar los cuatro casos posibles: $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_2 \geq 0$; $\lambda_1 \leq 0$ y $\lambda_2 \geq 0$; $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_2 \leq 0$; $\lambda_1 \leq 0$ y $\lambda_2 \leq 0$ (véase las Figuras 5.1 a 5.4), plo que el dinamismo de $T(v)$ depende de los cuatro posibles casos. O sea, T se puede extender parcialmente según los cuatro casos anteriores.

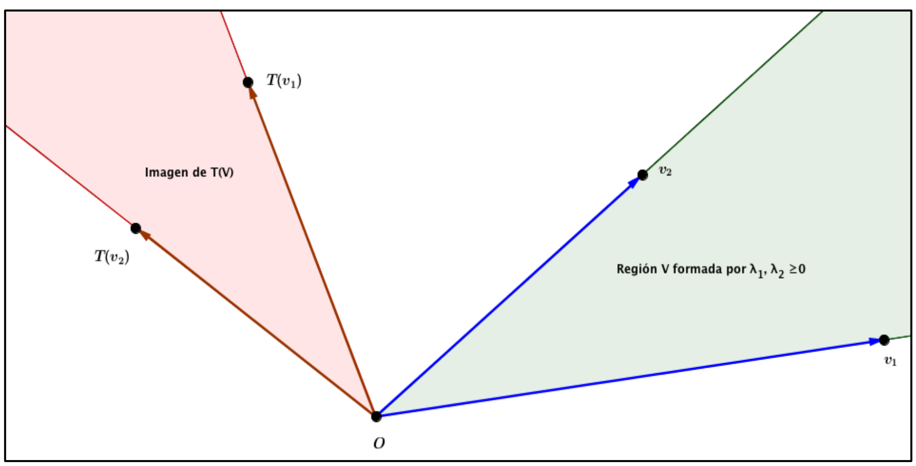


Figura 5.1. Caso cuando $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_2 \geq 0$

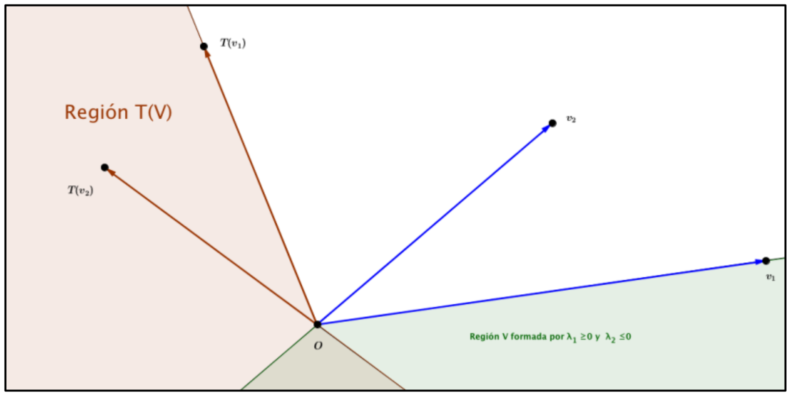


Figura 5.2. Caso cuando $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_2 \leq 0$

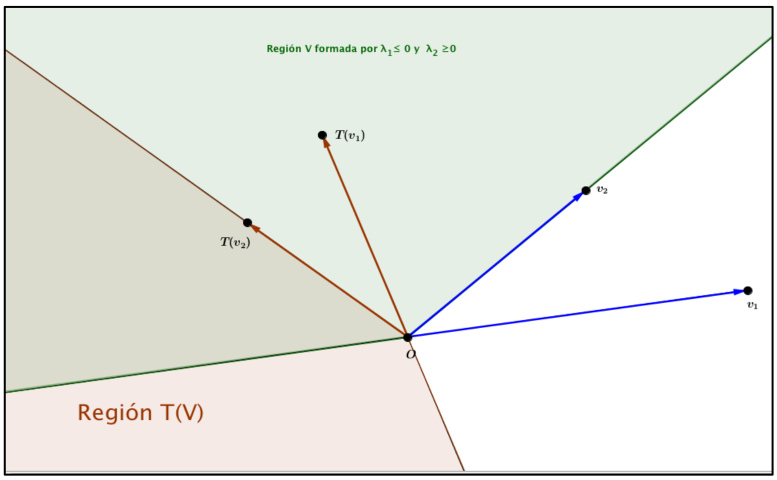


Figura 5.3. Caso cuando $\lambda_1 \leq 0$ y $\lambda_2 \geq 0$

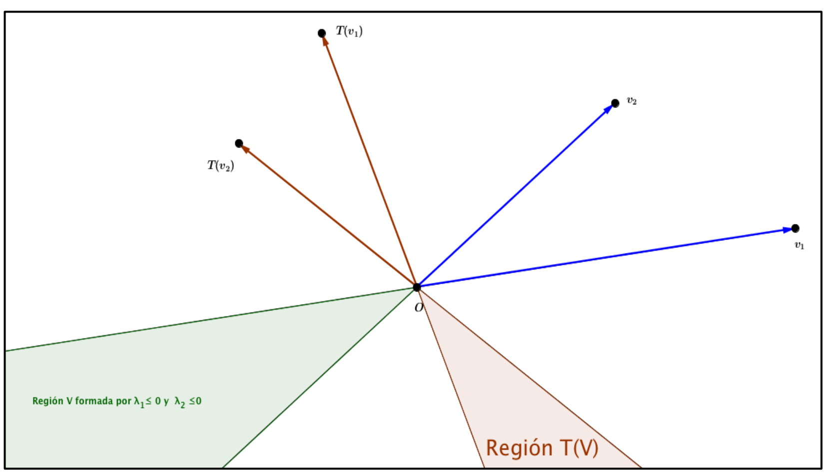


Figura 5.4. Caso cuando $\lambda_1 \leq 0$ y $\lambda_2 \leq 0$

Para ejemplificar lo anterior, vamos a mostrar cómo obtener la imagen de T, conforme a los datos de la figura 5.1, es decir, vamos a extender linealmente (parcialmente) y geométricamente a T, para obtener $T(V)$, donde $V = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \,|\lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$.

Solución:

P1. Construir la combinación lineal $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ (véase la Figura 5.5), para obtener los vectores $\lambda_1 v_1$ y $\lambda_2 v_2$.

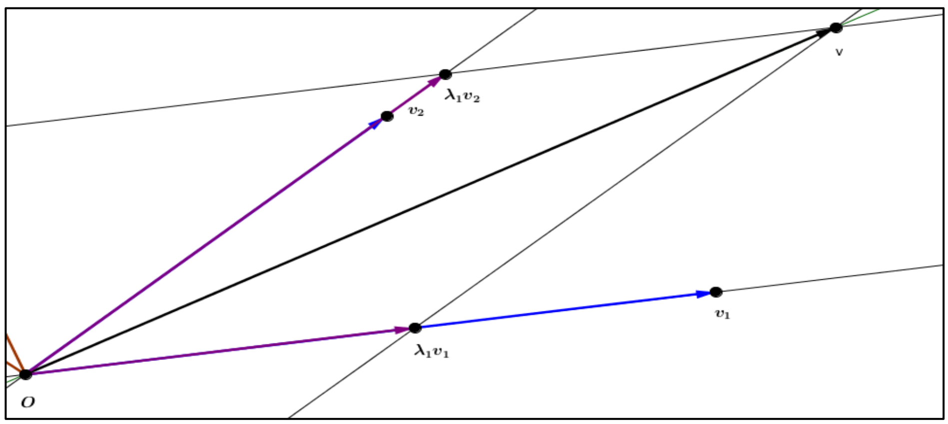


Figura 5.5. Construcción de la combinación lineal

P2. Obtener los escalares λ_1 y λ_2, para ello tenemos que hacer las siguientes divisiones de segmentos (o longitudes de vectores): $\frac{\|\lambda_k v_k\|}{\|v_k\|}$, con $k \in \{1,2\}$. Este paso se puede hacer geométricamente o utilizando propiedades del Software GeoGebra. Podemos encontrar los escalares λ_k, con métodos de la geometría euclidiana, por ejemplo para obtener λ_1 hacemos lo siguiente: si nos guiamos en la Figura 5.6, entonces trazamos una recta que pase por el vector unitario U (recta negra); luego trazamos una recta que pase por v_1 y por U (recta verde); después trazamos una recta paralela a la recta verde y que pase por $\lambda_1 v_1$ (recta punteada de color verde), finalmente obtenemos el punto (denotado como $|\lambda_1|$) resultado de la intersección de la recta punteada verde con la recta negra. Por el teorema de Tales el segmento $O|\lambda_1|$ tiene longitud $|\lambda_1|$. Este paso también se puede realizar en GeoGebra. Por ejemplo para facilitar las construcciones, con la función "Distancia o Longitud", podemos obtener $\| \lambda_k v_k \|$ y $\| v_k \|$, y luego dividirlos para obtener λ_k (en este caso se escogen positivos, ya que $\lambda_k v_k$ tiene orientación positiva), con $k \in \{1,2\}$.

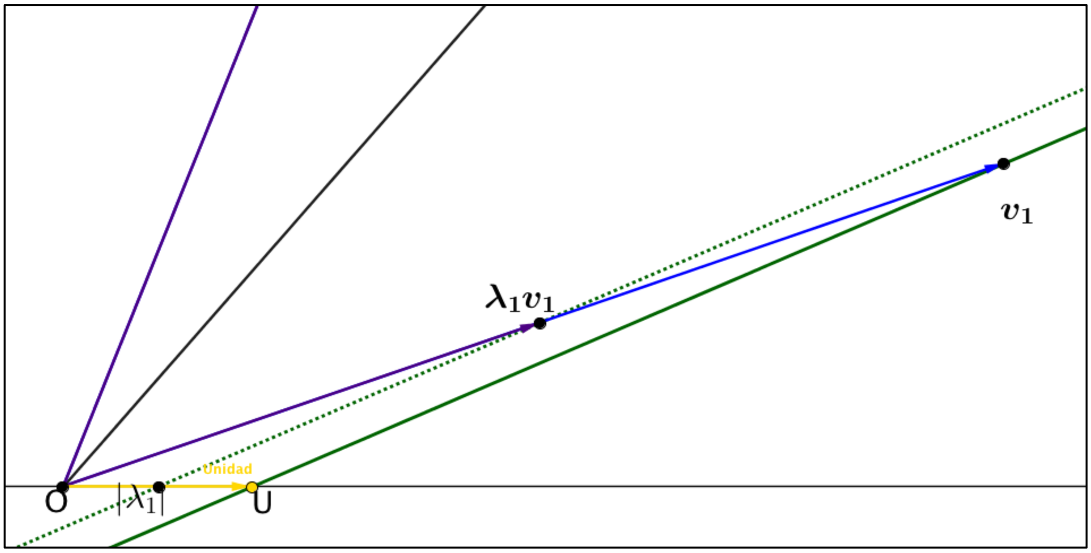


Figura 5.6. Construcción de un segmento de longitud $|\lambda_1|$

P3. Construir $T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$ de la siguiente manera: se trazan $\lambda_k T(v_k)$, con $k \in \{1,2\}$. Estos vectores se pueden construir geométricamente de manera similar al método mostrado en la Figura 5.6. Luego se trazan rectas paralelas a los vectores $\lambda_k T(v_k)$, con $k \in \{1,2\}$ para obtener $T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$ (véase la Figura 5.7). El vector $T(v)$ es dinámico en GeoGebra y representa la imagen $T(V)$, donde $V = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \,|\lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$. Asimismo este paso se puede hacer fácilmente con funciones de GeoGebra, por ejemplo, si ingresamos en la barra de comandos de GeoGebra llamada "Entrada:" lo siguiente: $\lambda_k * T(v_k)$, entonces se generan los vectores $\lambda_k T(v_k)$, $k \in \{1,2\}$.

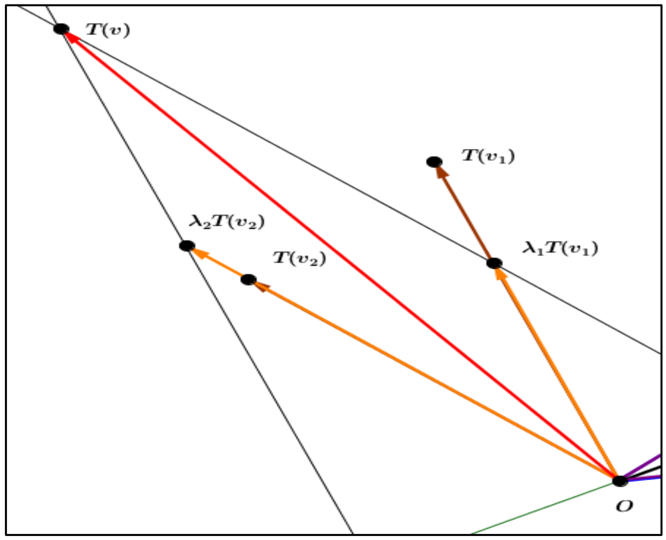


Figura 5.7. Construcción de $T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$

3) El conocimiento construido por los estudiantes. En el análisis de nuestros datos pudimos observar que todos los estudiantes, para abordar los problemas en GeoGebra que involucraban representaciones de combinaciones lineales, primero recurrieron al ambiente de lápiz-y-papel para después trasladar sus resultados al ambiente de GeoGebra; incluso la mayoría de los estudiantes realizó trazos (a veces correctos) pero sin una reflexión profunda del significado de estas representaciones, esto se observó cuando se realizó la discusión de dichas actividades. También en dicha discusión se reformuló el problema de la representación de una combinación lineal, de tal manera que los estudiantes se vieran involucrados en la necesidad de pensar geométricamente y así invocar el uso de recursos geométricos Euclidianos para resolver dicho problema; con esto los estudiantes reflexionaron y comprendieron cuál era la finalidad de utilizar dichos recursos geométricos en dichas actividades.

De este modo la mayoría de los estudiantes realizaron los constructos previstos (derivados de la Actividad 1 y de la discusión) de una manera más adecuada, pues en la Actividad 2, cuando se enfrentaron a representar la propiedad de la suma de una transformación lineal en GeoGebra, todos los estudiantes (excepto E_2 que no contestó) hicieron uso de dichos constructos, para contestar de forma geométrica (sin utilizar operaciones algebraicas o aritméticas) las actividades involucradas.

Respecto a las actividades con tecnología que involucraron la propiedad de la multiplicación por un escalar, todos los estudiantes (excepto E_1 y E_2) realizaron construcciones geométricas para solucionar de forma adecuada los problemas, aunque cuatro de esos estudiantes representaron el vector $T(-3v)$ como $T(3v)$, por lo que surgió un problema con la orientación de los vectores. Por otra parte, las soluciones siempre vinieron influenciadas por sus conocimientos algebraicos, pues los problemas fueron específicos, ya que en las actividades no se involucró el problema general de construir $T(kv)$, con $k \in \mathbb{R}$. Debido a esto no surgió una necesidad fuerte en los estudiantes para pensar geométricamente dichos problemas.

Respecto al problema de extensión lineal en GeoGebra todos los estudiantes resolvieron al menos un problema de extensión lineal (de los dos planteados) con ayuda de sus constructos previos adquiridos, es decir, para solucionar el problema de extensión lineal realizaron la coordinación de construcciones geométricas similares a las que hicieron en las actividades 1 y 2. De esto podemos asegurar que todos los estudiantes resolvieron problemas particulares de extensión lineal, pero no generales conforme habíamos comentado en el punto 2) de este capítulo. De este modo el orden de nuestra secuencia didáctica tuvo resultados positivos, pues condujo a que todos los estudiantes obtuvieran una solución a por lo menos un problema (específico) de extensión lineal.

5.2 Respecto a las preguntas de investigación

Una de las dos preguntas de investigación que guiaron el presente trabajo fue la siguiente: ¿Los estudiantes que han adquirido los conocimientos necesarios para realizar construcciones geométricas relacionadas con combinaciones lineales y las propiedades que definen a una transformación lineal, de qué manera hacen uso de dichos conocimientos cuando trabajan para dar una solución geométrica al problema de extensión lineal?

Para responder esta pregunta de investigación primero queremos comentar sobre el significado del problema de Extensión Lineal y el aprendizaje de los estudiantes en nuestra investigación. El problema general nos dice que dada una transformación lineal $T: V \rightarrow W$, donde V y W son espacios vectoriales, esta transformación queda determinada si se conocen los vectores de una base de cardinalidad finita de V y las imágenes de dichos vectores bajo T. Este hecho en un ambiente de Geometría dinámica puede interpretarse de la siguiente manera: Si tenemos representado (en el ambiente dinámico) dos vectores no colineales y sus imágenes bajo alguna transformación lineal T de estos vectores, entonces para cualquier vector v, es posible obtener el vector $T(v)$. La demostración algebraica[12] de dicho teorema nos aporta un método para encontrar la imagen bajo T de cualquier vector; este método se puede trasladar al ambiente de Geometría Dinámica (véase el análisis *a priori* de la Actividad 3.2), para el cual se necesitan las siguientes construcciones:

a) la combinación lineal de un vector v en términos de vectores no colineales;
b) la representación de las propiedades de la multiplicación por un escalar y de la suma de que definen una transformación lineal; y
c) la coordinación de los dos constructos anteriores para obtener el vector $T(v)$.

De acuerdo al análisis de nuestros datos, podemos deducir que la mayoría de los estudiantes al principio tuvo problemas al tratar de representar la construcción a) en GeoGebra (véase el análisis de la Actividad 1). Pues ellos no entendieron la finalidad de esa representación y además, el hecho de que los vectores en la Actividad fueran fijos, hizo que los estudiantes recurrieran a sus recursos aritmético-algebraicos y a la representación de la suma de vectores (conforme a la regla del paralelogramo), para simplemente trasladar estos conocimientos al ambiente geométrico.

[12] Si $B = \{v_1, \dots v_n\}$ es una base de V, entonces $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$, para algunos $\lambda_k \in \mathbb{R}$, con $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Como T es lineal, se tiene que $T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \cdots + \lambda_n T(v_n)$. Además, por hipótesis conocemos cada $T(v_k)$ con $k \in \{1,2,\dots,n\}$, de manera que $T(v)$ queda determinada.

Posteriormente cuando se entró a la discusión de esta actividad, presentamos el mismo problema –que involucraba la construcción a)– en una forma más abstracta; dicha discusión nos dio evidencia que las actividades no estaban bien diseñadas. Por ejemplo, en dicha discusión el estudiante E_1 nos proporcionó una respuesta adecuada a dicho problema (pensó en la construcción de la combinación lineal considerando sólo trazos geométricos) y aclaró que cuando se enfrentó por primera vez con este problema (presentado en la Actividad 1.3), pensó resolverlo de forma geométrica, pero debido a que los vectores estaban fijos, se vio en la necesidad de usar sus conocimientos aritmético-algebraicos.

Respecto a la construcción b), gracias a la discusión de la Actividad 1, hicimos un re-diseño a la Actividad 2. Por ejemplo en la Actividad 2.2 se mostraban los vectores v y $T(v)$ variables en GeoGebra, por lo que para que los estudiantes construyeran el vector $T(kv)$ estaban más obligados a realizar construcciones con regla-y-compás, aunque k tomaba valores sencillos (para que el problema fuera más general hubiera sido interesante que k fuera la longitud de un segmento arbitrario y se considerara el caso cuando k es negativo). Otro hecho importante que surgió en esta actividad fue que algunos estudiantes querían tratar a la transformación T como una transformación prototipo; por ejemplo el estudiante E_7 trató de resolver el problema pensando a T como una rotación (véase el análisis de la Actividad 2.2). Cabe mencionar que el dinamismo de GeoGebra no se aprovechó en esta actividad debido a que v y $T(v)$ eran independientes, es decir, no estaban ligados a una transformación lineal específica en GeoGebra.

En las Actividades donde se involucró la propiedad de la suma de una transformación lineal, vimos un avance significativo en el aprendizaje de los estudiantes ya que estas actividades nos dieron evidencia de cómo ellos usaron sus constructos que adquirieron en la Actividad 1. Por ejemplo, el Estudiante E_{10} para realizar la construcción de la Actividad 2.5 se enfocó en realizar trazos geométricos sin invocar operaciones algebraicas (véase el análisis de la Actividad 2.5); este hecho nos confirma que en efecto cuando los vectores son variables en GeoGebra es más probable que surja en los estudiantes la necesidad de utilizar exclusivamente recursos geométricos.

La construcción c) fue planteada en problemas de la Actividad 3. De acuerdo con nuestro análisis de los datos, los estudiantes coordinaron sus constructos adquiridos por las actividades 1 y 2, pero como comentamos en 1) el problema de extensión lineal no estaba planteado de forma general, de modo que no podemos asegurar que los estudiantes hayan adquirido esta construcción de una forma abstracta, pues los estudiantes nuevamente invocaron sus recursos aritmético-algebraicos como apoyo primario para la construcción geométrica de la combinación lineal. Respecto al dinamismo en esta actividad, tampoco se aprovechó ya que la imagen $T(v)$ no quedaba construida de forma dinámica debido a que el vector v fue fijo.

De acuerdo a lo anterior, la respuesta a nuestra pregunta de investigación queda abierta, ya que no podemos afirmar que los alumnos hayan adquirido los conocimientos necesarios para comprender la representación y solución del problema de extensión lineal en el ambiente de Geometría Dinámica, sin embargo, consideramos que cuando los alumnos entienden (al menos de forma algorítmica) cómo lograr las construcciones a) y b) entonces la construcción de c) se vuelve influenciada por las construcciones a) y b). Sería interesante modificar nuestra Secuencia didáctica para tratar de lograr una mayor abstracción, según la siguiente propuesta:

- En la Actividad 1 (referente a la parte exclusiva de tecnología) tomar como variables los vectores v, v_1 y v_2.
- En la Actividad 2 (referente a la parte exclusiva de tecnología) tomar como variables a los vectores v y $T(v)$ y que T esté definida como una transformación lineal específica en GeoGebra, donde el movimiento en GeoGebra de $T(v)$ dependa del movimiento en GeoGebra de v; además, para representar la propiedad $T(kv) = kT(v)$, es preferible que k sea un número arbitrario, por ejemplo, podría interpretarse el valor absoluto de k como la longitud de un segmento dado. Respecto a la actividad referente a

la propiedad de la suma de una transformación lineal, se puede tener en la pantalla del software visible sólo los vectores siguientes: $v, T(v), v_1$ y v_2, donde $T(v)$ está construida de manera dinámica en el software, y solicitar a los estudiantes que encuentren el vector $T(v_1 + v_2)$.

- En la Actividad 3 (referente a la parte exclusiva de tecnología) tomar a v variable en GeoGebra y a v_1, v_2, $T(v_1)$ y $T(v_2)$ fijos en GeoGebra, o si alguno de estos varía, hacerles notar a los estudiantes que cada que cambia de posición alguno de los vectores, se obtiene una transformación lineal distinta.
- Por último, para aumentar la abstracción es posible que en la pantalla de GeoGebra sólo tengamos a la vista un punto O que representa el origen y ocultemos los ejes coordenados y además, para poder construir de forma geométrica $T(kv)$ y trabajar el problema de extensión lineal, tenemos que representar en GeoGebra nuestro vector unitario, es decir, de una unidad de longitud. De esta manera conjeturamos que los estudiantes se verán más forzados a dejar sus recursos algebraicos para optar por otros recursos que les proporcione el software de GeoGebra; una opción de ellas es la Geometría Euclidiana.

Ahora bien, respecto a nuestra segunda pregunta de investigación, ¿Qué procesos de abstracción reflejan los estudiantes al abordar actividades relacionadas con el problema de extensión lineal en un ambiente de Geometría Dinámica?, primero es importante mencionar que como vimos anteriormente, el diseño de nuestra secuencia didáctica no propició un ambiente completo de Geometría Dinámica y eso frenó la abstracción de las representaciones geométricas. Sin embargo, nuestra Secuencia didáctica propició un ambiente geométrico y durante la implementación de nuestra secuencia observamos que algunos estudiantes mostraron los procesos de abstracción: Reconocimiento, Edificando-con, Construcción y Consolidación, esto mientras se enfrentaban a situaciones de representación de conceptos del Álgebra Lineal que eran nuevas para ellos. De acuerdo al análisis de los datos (véase el Capítulo 4 de esta tesis), en el siguiente diagrama (Figura 5.8) se muestra la producción de los procesos de abstracción de los estudiantes durante la implementación de las actividades.

- En la Actividad 1.3 se les indicó a los estudiantes que representararan en GeoGebra un vector como combinación lineal de elementos de una base del espacio vectorial. Los estudiantes al constestar (de forma válida) esta actividad, reflejaron los procesos Reconocimiento (R1), Edificando-con (B1) y Construcción (C1).
- En la Actividad 1.5 se les indicó a los estudiantes lo mismo que en la Actividad 1.3, excepto que las bases del espacio vectorial eran diferentes, por lo que aquellos alumnos que lograron solucionar (de forma válida) dichas actividades, aplicaron su constructo obtenido de C1 para responder la Actividad 1.5, de modo que en este punto dichos alumnos reflejaron un proceso Consolidación (+C1).

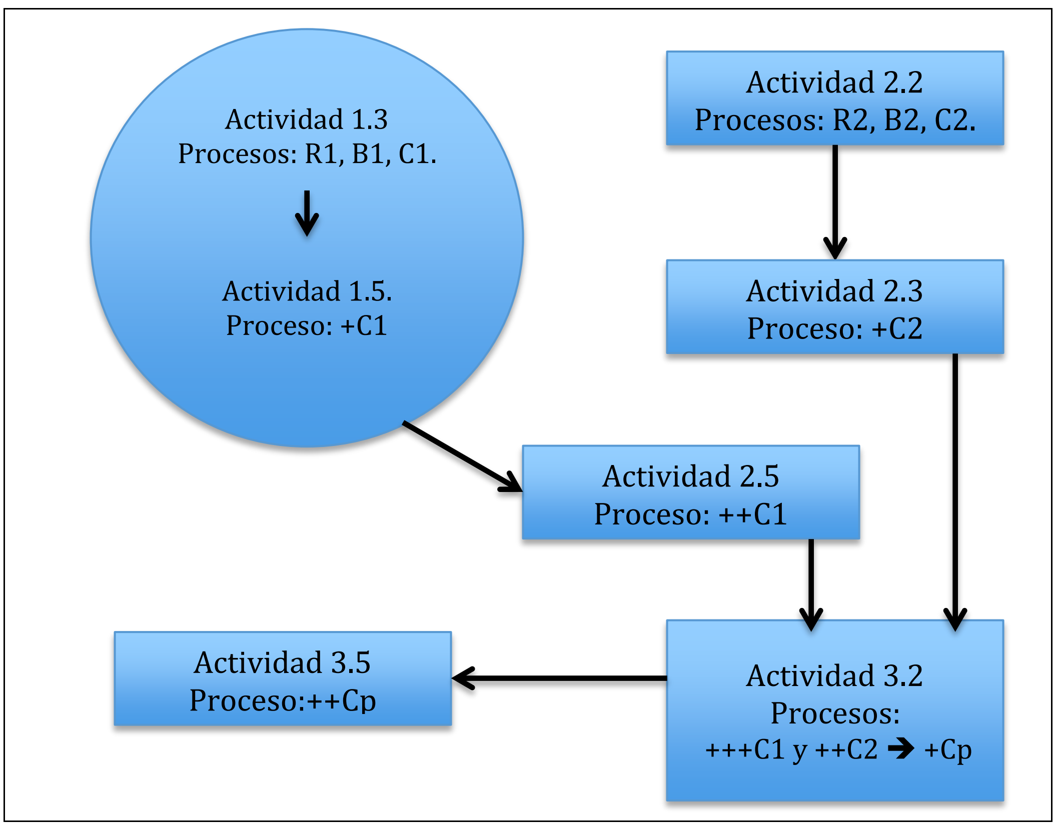


Figura 5.8. Producciones de los procesos de los estudiantes conforme al análisis de los datos

- En la Actividad 2.2 se les indicó de manera indirecta a los estudiantes que representaran (en GeoGebra) la propiedad de multiplicación por un escalar de una transformación lineal, de manera que los estudiantes al constestar (de forma válida) esta actividad reflejaron los procesos: Reconocimiento (R2), Edificando-con (B2) y Construcción (C2).
- En la Actividad 2.3 se les indicó a los estudiantes lo mismo que en la Actividad 2.2, excepto por las coordenadas de los vectores v y $T(v)$, que se daban específicas (para más detalle véase el análisis de los datos del Capítulo 4 de esta tesis). En esta actividad los estudiantes utilizaron el constructo adquirido por el proceso C2 por lo que los estudiantes reflejaron un nuevo proceso Consolidación (+C2).
- En la Actividad 2.5 se les indicó de manera indirecta a los estudiantes que representaran (en GeoGebra) la propiedad de la suma de una transformación lineal. En esta actividad aquellos estudiantes que crearon un constructo producto del proceso +C1, utilizaron conocimientos derivados de dicho constructo para constestar de forma adecuada la Actividad 2.5, de modo que los estudiantes siguieron con la evolución del proceso consolidación +C1, esta evolución la denotamos como ++C1.
- En la Actividad 3.2 se les indicó a los estudiantes que resolvieran un problema de extensión lineal específico. Para resolver dicho problema los estudiantes recurrieron a sus constructos derivados de los procesos de Consolidación ++C1 y +C2 dando como resultado los procesos +++C1 y ++C2 . Consideramos que la coordinación de estos dos últimos procesos produce un nuevo proceso Consolidación +Cp.
- En la Actividad 3.5 se les indicó a los estudiantes lo mismo que en la Actividad 3.2, excepto que las bases del espacio vectorial eran diferentes. En este punto aquellos alumnos que lograron el constructo derivado del proceso +Cp, reflejaron la evolución de dicho proceso, esta evolución la denotamos como ++Cp. De acuerdo a lo anterior podemos afirmar que los estudiantes al coordinar ciertos procesos obtuvieron las soluciones a los problemas de extensión lineal planteados.

Ahora bien, mostramos la comparación de los procesos de abstracción que se esperaban (al abordar la Actividad 3) conforme el análisis *a priori* y los procesos manifestados según el análisis de los datos. Esta información queda resumida en el diagrama que se muestra en la Figura 5.9.

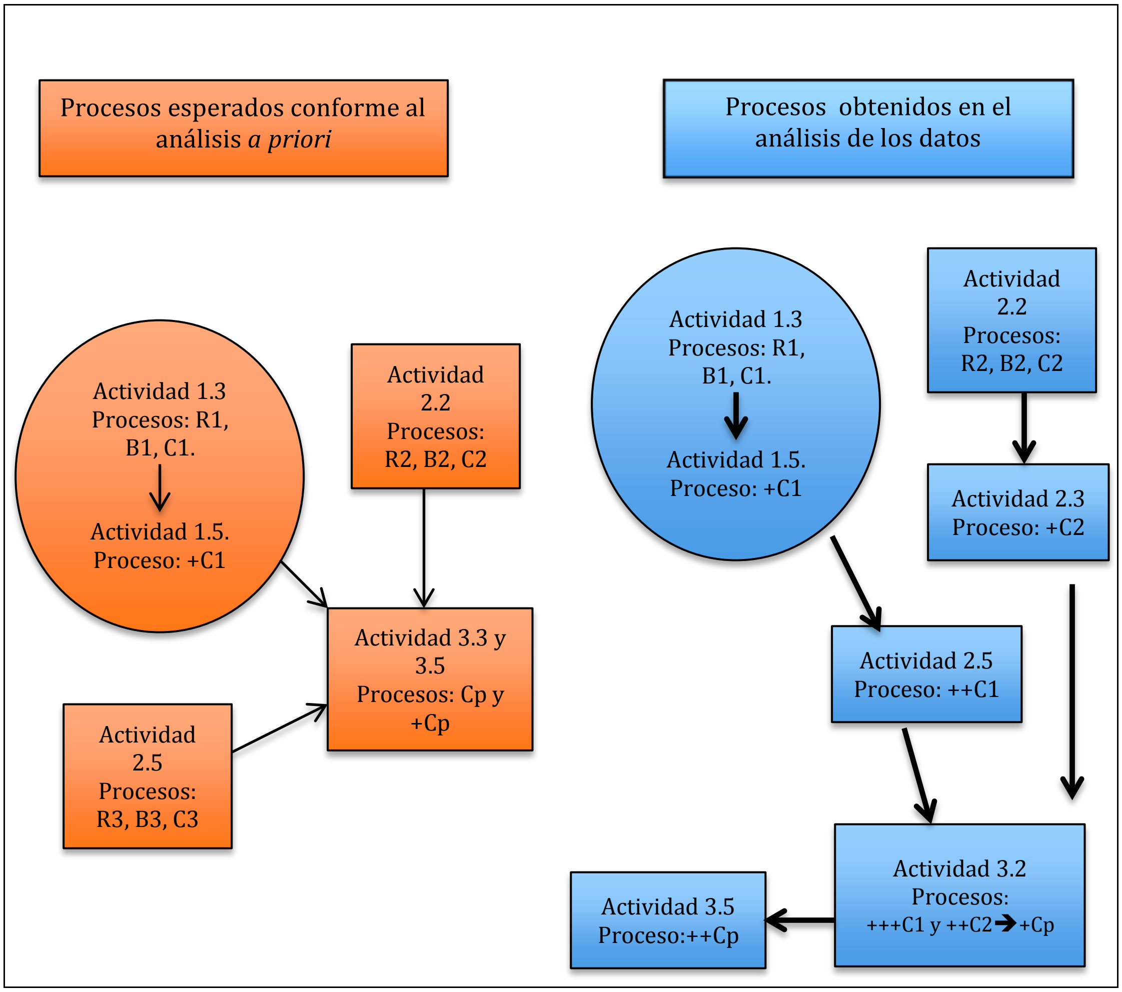


Figura 5.9. Comparación de los procesos de abstracción conforme el análisis *a priori* y el análisis de los datos

Se puede observar en la Figura 5.9 que los procesos que esperábamos en el análisis *a priori* se aproximan (pero no fueron iguales) a los que realmente se manifestaron en el análisis de los datos, excepto por la Actividad 2.5 en la que se esperaba que surgiera un nuevo constructo derivado de C3, pero no fue así, pues en realidad en la Actividad 2.5 surgió la evolución del proceso de consolidación +C1 denotado como ++C1. Asimismo, no se esperaba que en la Actividad 2.3 surgiera el proceso +C2.

5.3 Sugerencias didácticas

Antes de hacer propuestas didácticas vamos a discutir la siguiente pregunta: ¿Qué ventajas ofrece para los estudiantes el plantear y solucionar problemas de extensión lineal en un ambiente de Geometría Dinámica? Consideramos que plantear y solucionar el problema de extensión lineal en dicho ambiente puede ser de mucha ayuda para los estudiantes, ya que posteriormente ellos pueden experimentar con propiedades importantes que conservan las transformaciones lineales.

Vamos a mencionar algunos ejemplos de lo anterior, pero antes es importante comentar que como exhibimos en 2) si restringimos que los estudiantes utilicen únicamente propiedades de la Geometría Euclidiana se puede correr el riesgo que para construir la transformación lineal se requiera considerar cuatro casos (veanse las Figuras 5.1 a 5.4). Este problema se puede solucionar si consideramos herramientas de Geogebra que no necesariamente son derivadas de la Geometría Euclidiana. Especificamente, para encontrar los valores λ_1 y λ_2 de la combinación lineal $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, podemos hacer lo siguiente: Dividimos la primera coordenada del vector $\lambda_k v_k$ con la primera coordenada del vector v_k – en realidad se tienen que escoger las coordenadas que sean distintas de cero, por ejemplo si las primeras coordenadas de v_k y $\lambda_k v_k$ son cero, entonces elegimos las segundas coordenadas, respectivamente, de cada vector–, así obtenemos directamente λ_k (recordemos que si utilizábamos un método geométrico el signo de λ_k quedaba determinado por la dirección del vector $\lambda_k v_k$), con $k \in \{1,2\}$. Luego podemos escribir $\lambda_k * T(v_k)$ en la “entrada:” de GeoGebra y generar los vectores $\lambda_k T(v_k)$, para finalmente construir $T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$. Este vector es dinámico y representa los cuatro casos mostrados de la Figura 5.1 a 5.4, por lo que la transformación queda totalmente extendida, es decir se genera toda la imagen de la transformación.

Una vez logrado lo anterior el estudiante puede hacer experimentos e incluso conjeturas, por ejemplo, si se le pide que dada una recta L, encuentre su imagen bajo esa transformación lineal que construyó, es posible que conjeture que la imagen vuelve a hacer una recta. Más aún, una vez que el estudiante sospeche que la imagen de una recta L vuelve a hacer una recta L, se le puede solicitar que muestre en GeoGebra que su imagen vuelve a hacer una recta. La respuesta de este hecho es similar a la solución general del problema de extensión lineal, sólo que para comenzar la construcción, primero se tiene que poner la restricción que el vector v varíe únicamente en la recta L dada. Otra pregunta importante que se le puede hacer al estudiante, es por ejemplo, ¿cuando me acerco al vector 0, hacia dónde tienden las imágenes de los vectores bajo la transformación lineal?

También es importante hacerles notar a los estudiantes que en el problema de extensión lineal, la transformación lineal queda determinada por los vectores $v_1, v_2, T(v_1)$ y $T(v_2)$, en el siguiente sentido: si se cambia la posición de esos vectores, en la pantalla del ambiente de Geometría Dinámica, entonces se genera una nueva transformación lineal.

Recordemos que nuestra secuencia didáctica fue planteada para alumnos que estaban familiarizados con conceptos de Geometría Euclidiana y con el Software GeoGebra. Comentamos acerca de los problemas que pueden surgir si se pone la restricción que los alumnos utilicen únicamente trazos derivados de regla-y-compás. Para evitar dichos problemas se puede hacer un diseño en el que los estudiantes puedan realizar construcciones de forma accesible, por ejemplo, haciendo uso de la función casillas en GeoGebra; se puede programar actividades en las que los estudiantes puedan ingresar datos en dichas casillas y se realicen automáticamente operaciones como: la multiplicación de un escalar por un vector; la obtención de una coordenada (x o y, distinta de cero) de un vector; y la división de números escalares. Esto tendría la finalidad de facilitar dichas construcciones y para que el estudiante se enfoque en los conceptos del Álgebra Lineal y no en trazos complicados de regla-y-compás.

Consideramos que diseños que articulan diferentes áreas de matemáticas pueden ayudar a consolidar procesos desarrollados en las áreas particulares así como a establecer conexiones que lleven a una mejor comprensión de las matemáticas y su naturaleza.

REFERENCIAS

Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (Soviet studies in mathematics education, Vol. 2; J. Kilpatrick (Ed.), trans: Teller, J.). Reston: National Council of Teachers of Mathematics. (Original work published 1972).

Dorier, J-L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (1997). L'algèbre linéaire: l'obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J-L. Dorier (Ed.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 105-147). Grenoble, France: La Pensée Sauvage Editions.

Dorier, J., Robert, A., Robinet, J & Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 85-124), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (s.f.). Processes of abstraction in context: the nested epistemic actions model. Recuperado de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.379.4416&rep=rep1&type=pdf

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: theory as methodological tool and methodological tool as theory. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmed (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 185- 217). Netherlands: Springer.

Dreyfus, T., Hillel, J. & Sierpinska, A. (1998). Cabri-based Linear Algebra: transformations. Artículo presentado en CERME-1 (*First Conference on European Research in Mathematics Education, Osnabrück*). Recuperado de http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g2-dreyfus-et-al.pdf.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*.

Dordrecht: Kluwer.

Giest, H. (2005). Zum Verhältnis von Konstruktivismus und Tätigkeitsansatz in der Pädagogik [On the relationship between constructivism and activity theory in education]. En F. Radis, M.-L. Braunsteiner, & K. Klement (Eds.), *Badener VorDrucke* [Baden preprints] (Schriftenreihe zur Bildungsforschung – Band 3, pp. 43–64). Baden: Kompetenzzentrum für Forschung und Entwicklung.

Haddad, M. (1999). Difficulties in the learning and teaching of linear algebra. A personal experience. Tesis de maestría, Concordia University, Montreal, Canadá.

Hershkowitz, R., Hadas, N., Dreyfus, T. & Schwarz, B. B. (2007). Processes of abstraction, from the diversity of individuals' constructing of knowledge to a group's 'shared knowledge'. *Mathematical Education Research Journal*, 19, 41–68.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191–207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J., Sierpinska, A. & Dreyfus, T. (1998). Investigating linear transformations with Cabri. *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Tertiary Mathematics*, Samos, Greece.

Kidron, I., & Monaghan, J. (2009). Commentary on the chapters on the construction of knowledge. In B. B. Schwarz, T. Dreyfus, & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 81–90). London: Routledge.

Kú, D., Trigueros, M. & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.

Kú, D., Oktaç, A. & Trigueros, M. (2011). Spanning set and span: An analysis of the mental constructions of undergraduate students. En S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle & M. Oehrtman (Eds.) *Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 176 – 186). Oregon.

Molina, G. & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112-2124.

Ramírez-Sandoval, O., Romero-Félix, C. F. & Oktaç, A. (2014). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de transformaciones lineales en el plano. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 225-250.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (1), 89-112.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15 (2), 199-232.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dortrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktaç, A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra (Research Report). Montreal, Canadá: Concordia University.

Uicab, R. & Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en* *matemática Educativa*, 9(3), 459-490.

Vigotsky, L. S. (1987). *The collected works of L. S. Vigotsky* (Vol. 1, Problems of General Psichology. Including the volume Thinking and Speech). New York & London: Plenum Press.

APÉNDICE

Secuencia de actividades

Actividades

Indicaciones: en las siguientes actividades, resueltas usando tecnología, debes:

a) ejecutar cada archivo de GeoGebra con el nombre correspondiente de cada Actividad, siempre y cuando en esta se indique que debes hacerlo;
b) asignar valores x, y, correspondientes al vector $v = (x, y)$
c) utilizar exclusivamente métodos de Geometría Euclidiana, es decir, construcciones con regla-y-compás.

Actividad 1. Representaciones geométricas y algebraicas de vectores como combinación lineal de elementos de una base de $\mathbb{R}^2$

Nombre:____ Fecha: ______

Sección 1.1. Actividades con lápiz-y-papel

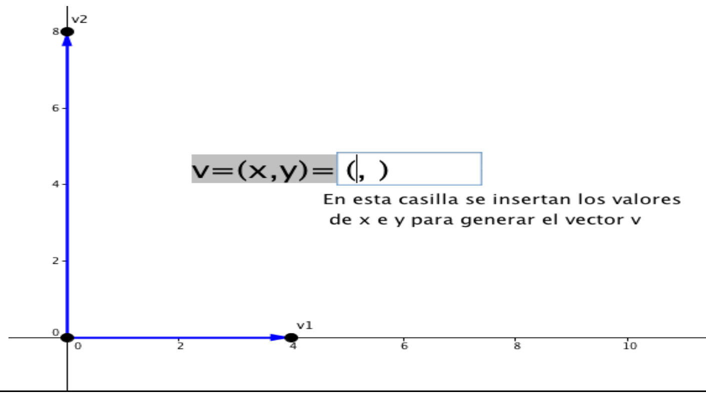
Actividad 1.1. Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: $v_1 = (0, 8)$ y $v_2 = (4, 0)$. Justifica por qué v_1 y v_2 son linealmente independientes. "No basta decir porque son elementos de la base".

Actividad 1.2. Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: $v_1 = (0, 8)$ y $v_2 = (4, 0)$. Justifica por qué es posible escribir el vector $v = (x, y)$ como combinación lineal de v_1 y v_2.

Sección 1.2. Actividad con tecnología

Actividad 1.3. Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: v_1 = *(0, 8)* y v_2 = *(4, 0)*. Dado el vector *v = (x, y)*, justifica si es posible trazar el vector *v* como combinación lineal de v_1 y v_2, usando métodos de Geometría Euclidiana. Ejecuta el archivo *Actividad_1.3*.

Imagen y explicación del Archivo en GeoGebra:

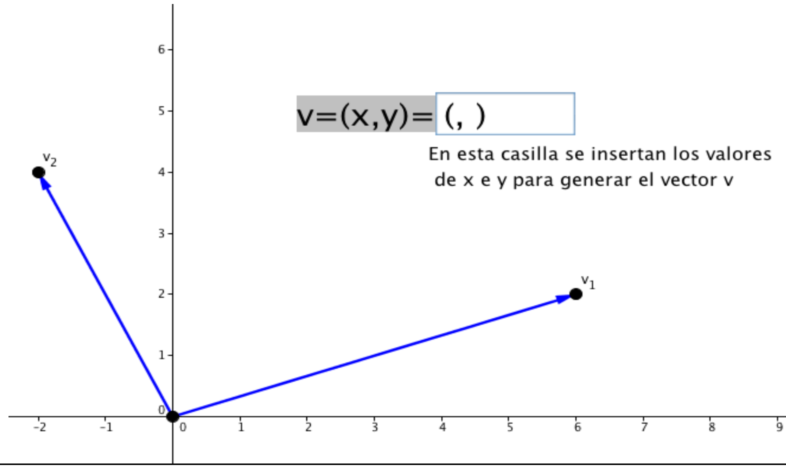


Sección 1.3. Actividades con lápiz-y-papel y tecnología

Actividad 1.4. Con los mismos datos de la Actividad 1.3, escribe de forma algebraica el vector *v* como combinación lineal de v_1 y v_2. Compara tus resultados con los que obtuviste en la Actividad 1.3. Si tus resultados no coinciden ¿qué puedes hacer para ajustarlos?

Actividad 1.5. Una base de $\mathbb{R}^2$ la constituyen los vectores: v_1 = *(6, 2)* y v_2 = *(-2, 4)*. Dado el vector *v* = *(x, y)*, justifica si es posible trazar el vector *v* como combinación lineal de v_1 y v_2, usando métodos de Geometría Euclidiana. Ejecuta el archivo *Actividad_1.5*.

Imagen y explicación del Archivo en GeoGebra:



Actividad 1.6. Con los mismos datos de la Actividad 1.5, escribe de forma algebraica el vector *v* como combinación lineal de v_1 y v_2. Compara tus resultados con los que obtuviste en la Actividad 1.5.

Actividad 2. Propiedades de transformaciones lineales

Nombre:____Fecha:_______

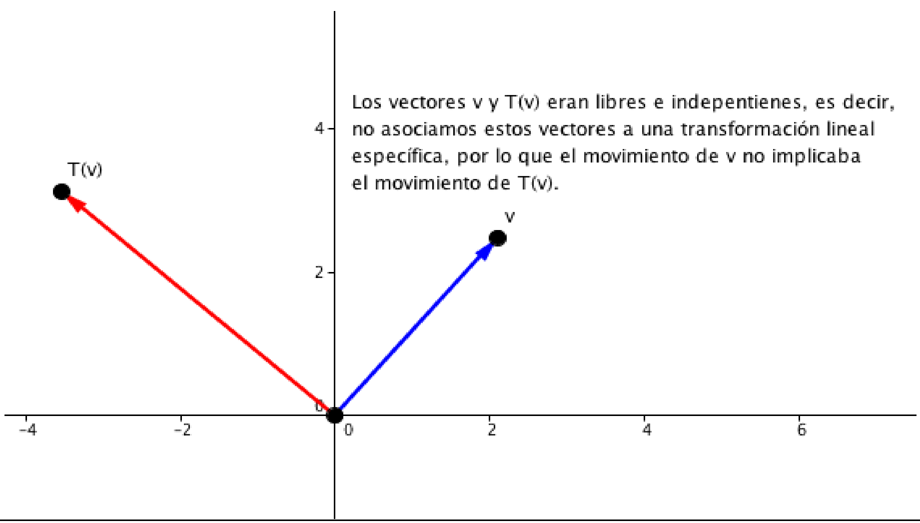
Sección 2.1. Actividad con lápiz-y-papel

Actividad 2.1. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (x, y)$. Justifica por qué si se conoce $T(v)$, entonces es posible obtener: $T(3v)$, $T(\pi v)$, y $T(-v)$.

Sección 2.2. Actividad con tecnología

Actividad 2.2: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (x, y)$. Si se conoce $T(v)$, entonces justifica si es posible el trazo de $T(2v)$ y $T(1.5v)$, usando métodos geométricos Euclidianos. Ejecuta el archivo *Actividad_2.2*.

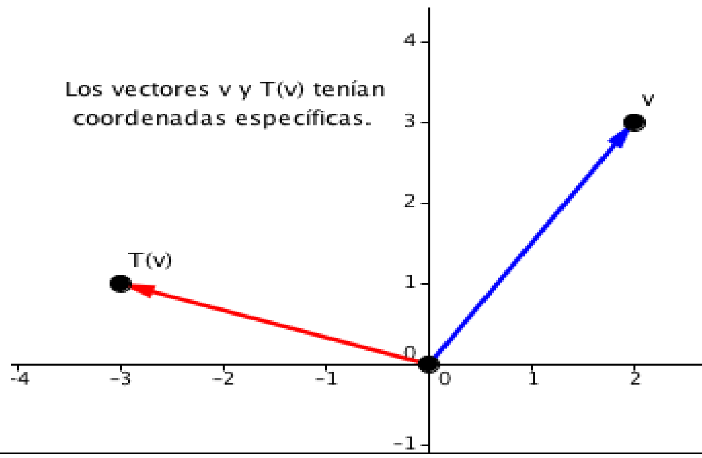
Imagen y explicación del Archivo en GeoGebra:



Sección 2.3. Actividad con lápiz-y-papel y tecnología

Actividad 2.3: Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (2, 3)$, de tal forma que $T(v) = (-3, 1)$. Obtén $T(2v)$, $T(1.5v)$ y $T(-3v)$ de forma algebraica y geométrica, usando GeoGebra. (Ejecuta el archivo: Actividad_2.3.) Compara tus resultados con los obtenidos usando lápiz-y-papel; ajústalos si es necesario.

Imagen y explicación del Archivo en GeoGebra:



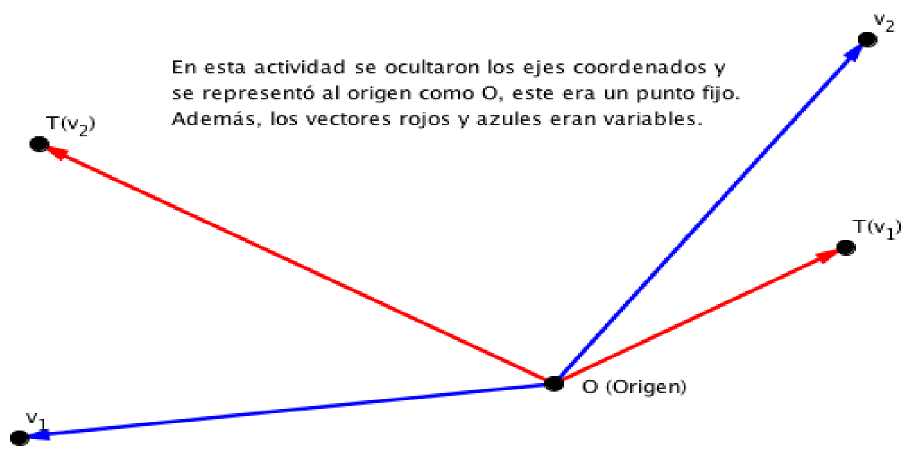
Sección 2.4. Actividad con lápiz-y-papel

Actividad 2.4. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (-2, -1)$ y $v_2 = (1, 4)$. Justifica por qué si $T(v_1) = (1,1)$ y $T(v_2) = (-3,4)$, entonces es posible obtener $T(-1, 3)$.

Sección 2.5. Actividad con tecnología

Actividad 2.5 Ejecuta el archivo *Actividad_2.5*. Si T es una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ de tal forma que $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan, respectivamente, bajo T las imágenes de v_1 y v_2, entonces es posible obtener $T(v_1 + v_2)$, usando métodos geométricos Euclidianos. Apóyate en GeoGebra y justifica tu respuesta.

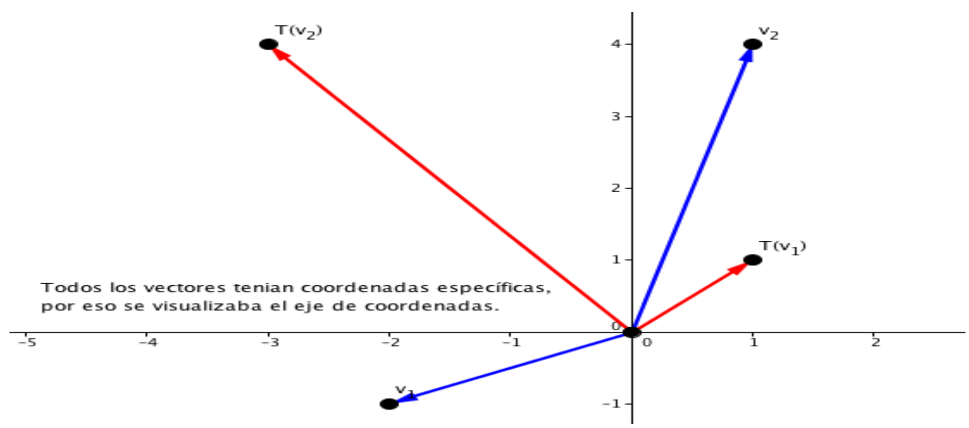
Imagen y explicación del Archivo en GeoGebra:



Sección 2.6. Actividad con lápiz-y-papel y tecnología

Actividad 2.6 Con los mismos datos de la Actividad 2.4. Obtén $T(-1,3)$ de forma algebraica y geométrica, usando GeoGebra. (Ejecuta el archivo: *Actividad_2.6*.) Compara tus resultados con los obtenidos usando lápiz-y-papel; ajústalos si es necesario.

Imagen y explicación del Archivo en GeoGebra:



Actividad 3. Extensión de transformaciones lineales

Nombre:____ Fecha: ___________

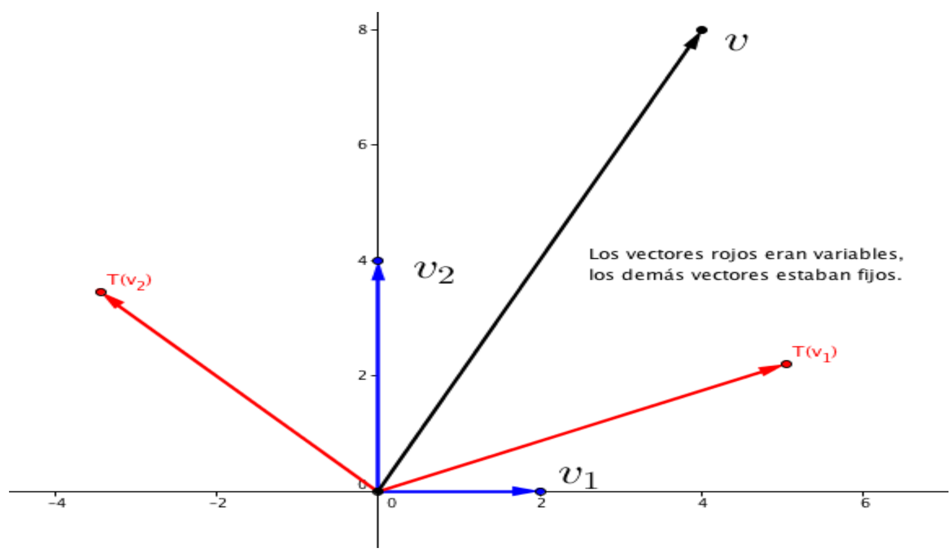
Sección 3.1 Actividad con lápiz-y-papel

Actividad 3.1. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y v = (2, 4). Justifica por qué si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,2)$, respectivamente, bajo T, entonces es posible obtener $T(v)$.

Sección 3.2 Actividad con tecnología

Actividad 3.2. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y v = (4, 8). Si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de $v_1 = (2,0)$ y $v_2 = (0,4)$, respectivamente, bajo T, entonces justifica si es posible el trazo de $T(v)$ usando métodos geométricos Euclidianos. Ejecuta el archivo *Actividad_3.2*.

Imagen y explicación del Archivo en GeoGebra:



Sección 3.3. Actividad con lápiz-y-papel y tecnología

Actividad 3.3. Con los mismos datos de la Actividad 3.2 y obteniendo dos valores exactos y fijos de $T(v_1)$ y $T(v_2)$ en GeoGebra, escribe de forma algebraica a $T(v)$. Compara tus resultados y ajústalos, si es necesario, con los obtenidos en la Actividad 3.2.

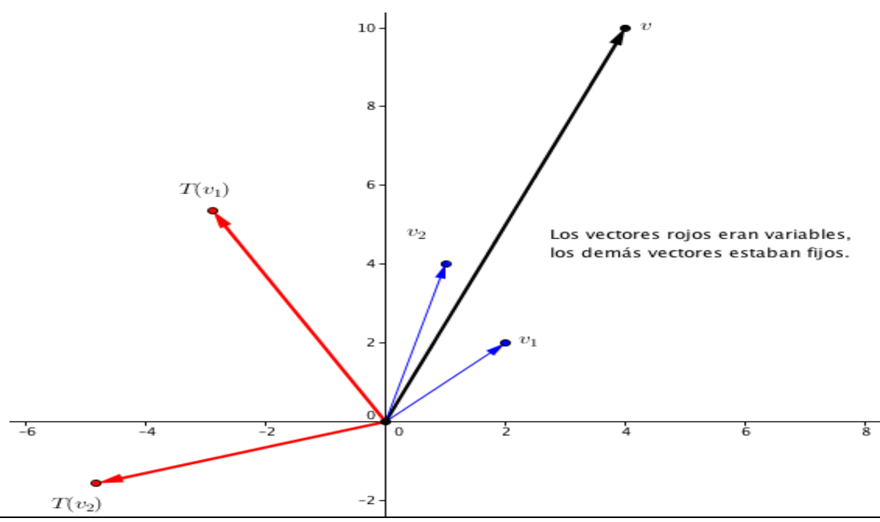
Sección 3.4. Actividad con lápiz-y-papel

Actividad 3.4. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (7, 11)$. Justifica por qué si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (2, 4)$, respectivamente, bajo T, entonces es posible obtener $T(v)$.

Sección 3.5. Actividad con tecnología

Actividad 3.5. Sean T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ y $v = (4, 10)$. Si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ representan las imágenes de $v_1 = (2, 2)$ y $v_2 = (1, 4)$, respectivamente, bajo T, entonces justifica si es posible el trazo de $T(v)$ usando métodos geométricos Euclidianos. Ejecuta el archivo *Actividad_3.5*

Imagen y explicación del Archivo en GeoGebra:



Sección 3.6. Actividad con lápiz-y-papel y tecnología

Actividad 3.6. Con los mismos datos de la Actividad 3.5 y obteniendo dos valores exactos y fijos de $T(v_1)$ y $T(v_2)$ en GeoGebra, escribe de forma algebraica a *T(v)*. Compara y ajusta, de ser necesario, tus resultados con los obtenidos en la Actividad 3.5.