CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Influencia de los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico en la construcción del concepto de función cuadrática

Tesis que presenta

Anayeli Saray Zavala Huerta

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la tesis

Dr. Antonio Rivera Figueroa

México, DF

Octubre de 2016

ÍNDICE

Resumen.……...……..……I

Abstract……..…….…....II

Presentación……..III

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Antecedentes……2

1.2. Problema de investigación……..……7

1.3. Objetivos de la investigación.…….……....9

1.4. Preguntas de investigación……...9

1.5. Justificación de la investigación…….…….…..……..10

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1. Marco conceptual AiC……..…….....…....13

2.2. Marco conceptual RME (Realistic Mathematics Education)…….18

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1. Selección y descripción de la población……23

3.2. Selección y uso de la herramienta tecnológica…….. ……...23

3.3. Estudio del concepto de función cuadrática contenido en un libro de texto……..24

3.4. Estudio del concepto de función cuadrática contenido en el programa de estudios…..28

3.5. Diseño y descripción de las actividades.…….....30

3.5.1. Análisis *a priori* de las actividades…….....……32
3.5.2. Análisis *a priori* de la actividad 3……..……...33
3.6. Implementación de las actividades y recolección de datos……..…….40

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1. Categorías de análisis…….....43
4.2. Análisis de la actividad 1….……..…….....43
4.2.1. Categorías: Reconocimiento (R) y Edificación (B)…….…….....43
4.2.2. Categorías: Construcción (C) y Consolidación (+C)…….…….…….....59
4.3. Análisis de la actividad 2….……..…….....67
4.3.1. Categorías: Reconocimiento (R) y Edificación (B)…….…….....67
4.3.2. Categorías: Construcción (C) y Consolidación (+C)…….…….…….....78
4.4. Análisis de la actividad 3.……..…….....85
4.4.1. Categorías: Reconocimiento (R) y Edificación (B)…….…….....85
4.4.2. Categorías: Construcción (C) y Consolidación (+C)…….…….…….....91
4.5. Discusión general sobre los resultados surgidos de las actividades...……..96

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

5.1. Respecto a los objetivos de investigación ……...100
5.2. Respecto a las preguntas de investigación ……..102
5.3. Consideraciones finales…….……...104

REFERENCIAS……..…….106
APÉNDICE……..108

RESUMEN GENERAL

En este documento se reporta una investigación centrada en el análisis de los procesos de abstracción que sobre el concepto de función cuadrática llevaron a cabo estudiantes de nivel básico (secundaria) mediante el trabajo, en equipo, con secuencias didácticas diseñadas en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico. Dicho estudio es de tipo cualitativo, y está apoyado en el marco teórico de Abstracción en Contexto (Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2015). Este marco permitió analizar y documentar los procesos de abstracción de los estudiantes a través de tres acciones epistémicas observables: Reconocimiento (R), Edificación (B) y Construcción (C). Para el diseño de las actividades se utilizó la teoría de la Educación Matemática Realista (RME), la cual indica que situaciones "realistas" sirven como fuente para iniciar la construcción de nuevos conceptos matemáticos.

Los resultados obtenidos muestran que el ambiente tecnológico potenció el aprendizaje del concepto de función cuadrática en los estudiantes, al promover la construcción de acciones de Reconocimiento y Edificación necesarias para la abstracción de dicho concepto que en el ambiente de lápiz-y-papel no fue posible lograr. Además, el uso del software, les permitió a los estudiantes un acceso a las diferentes representaciones de una función cuadrática y de esta manera ayudó a los estudiantes a construir el elemento principal de conocimiento y a iniciar su consolidación.

ABSTRACT

In this document an investigation is reported, focused in the analysis of the processes of abstraction that the concept of quadratic function performed entry-level students (highschool) through work in teams, with didactic sequences designed in pencil-and -paper and technology environments. This study is qualitative, and it’s based on the framework of Abstraction in Context (Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2015). This framework allowed to analyze and document students abstraction processes through three observable epistemic actions: Recognizing (R), Building-with (B) and Constructing (C). For the design of the activities the theory of Realistic Mathematics Education (RME) was used, which indicates that "realistic" situations serve as a source to begin construction of new mathematical concepts.

The results obtained show that the technological environment potentialized the learning of the concept quadratic function in students, by promoting the construction of actions of Recognizing and Building-with necessaries for the abstraction of this concept that the environment pencil-and-paper was not possible achieve. In addition, the use of software, allowed students access to different representations of a quadratic function and thus helped students build the main element of knowledge and start its consolidation.

PRESENTACIÓN

La comprensión de conceptos matemáticos suele ser complicada debido a su naturaleza abstracta. Es por eso que la problemática surgida en la enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos es un tema de gran importancia en la investigación de Educación Matemática. En particular, el concepto de función es un tema central, pero difícil en la escuela Secundaria (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon & Reed, 2012)

En esta investigación se diseñaron e implementaron secuencias de actividades (que contienen problemas de la vida "real" de los estudiantes) en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico con el objetivo de potenciar en los estudiantes la comprensión del concepto de función cuadrática. En el estudio participaron estudiantes de nivel secundaria quienes en la realización de estas actividades manifestaron las distintas acciones epistémicas del modelo RBC. Estas acciones permitieron analizar y documentar los procesos de abstracción que sobre el concepto de función cuadrática llevan a cabo los estudiantes mediante el trabajo con las tareas propuestas; así como analizar el impacto que tienes las actividades diseñadas, para potenciar la construcción del concepto de función cuadrática en estudiantes de tercer grado de nivel secundaria.

En el Capítulo 1, se presentan las diversas investigaciones, en el campo de Educación Matemática, que se han realizado entorno al aprendizaje y enseñanza del concepto de función cuadrática. El Capítulo, incluye el planteamiento del problema de investigación, los objetivos y las preguntas que guiaron esta investigación. Por último, se presenta la justificación de la misma.

En el Capítulo 2, se discuten los principios básicos del marco teórico Abstracción en Contexto (Dreyfus et al., 2015) y de la teoría de la Educación Matemática Realista (Heuvel-Panhuizen & Paul Drijvers, 2014), teorías utilizadas para el diseño y análisis de las actividades propuestas en esta investigación.

En el capítulo 3, se describe la metodología utilizada en la presente investigación. Esta descripción incluye el proceso de selección de los participantes, las características de los mismos y del software empleado en el diseño de las actividades. El capítulo contiene también una breve descripción del análisis del contenido matemático acerca de la función cuadrática en el nivel secundaria. Posteriormente, se especifican los objetivos del diseño de cada una de las actividades implementadas así como su descripción y un análisis a priori de éstas con el fin de crear la hipótesis de trabajo.

En el Capítulo 4, se expone el análisis de los datos recolectados durante la implementación de las actividades y la discusión general de los resultados obtenidos con ellas. Para el análisis de datos recabados se establecieron cuatro categorías con las cuales se identifican las acciones epistémicas que permiten el estudio del proceso de abstracción y se discuten con base en los conceptos teóricos presentados en el capítulo 2.

En el Capítulo 5, se presentan las conclusiones de la investigación, primero respecto a los objetivos planteados y después respecto a las preguntas de investigación. Se presentan las conclusiones y reflexiones finales acerca de los resultados encontrados en la investigación.

En la parte final de este trabajo se encuentran las referencias que dan sustento a esta investigación y un Apéndice con el instrumento de investigación tal como fue presentado a los estudiantes.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este Capítulo se presenta el planteamiento del problema de investigación, el cual consiste en diseñar actividades en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico con el objetivo de favorecer el aprendizaje del concepto de función cuadrática. La literatura existente en torno a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función; en particular, el de función cuadrática reporta varias dificultades y obstáculos epistemológicos relacionados con diferentes enfoques de esta noción. Algunos de los trabajos consultados; referentes al aprendizaje del concepto de función cuadrática (e.g., Koklua & Topcub, 2011) reportan el efecto que puede tener el uso de la tecnología, como herramienta de enseñanza, para superar estos obstáculos.

Otras investigaciones proponen experimentos de enseñanza, con el objetivo de que los estudiantes aprendan el concepto de función (e.g., Falcade, Laborde & Mariotti, 2007; Doorman et al., 2012). En esos trabajos, el uso de herramientas tecnológicas y el empleo de distintas representaciones de los objetos matemáticos en cuestión juegan un papel fundamental para que los estudiantes superen las dificultades que les impiden comprender el concepto de función. En esta investigación se propone un conjunto de actividades; cuyo diseño toma en cuenta los principios teóricos de la Educación Matemática Realista (RME) con el objetivo de fomentar en los estudiantes la comprensión del concepto de función cuadrática. El diseño de las actividades incluye el uso de la tecnología como mediadora del conocimiento, sin dejar de lado el ambiente de lápiz-y-papel, ya que estos dos ambientes son complementarios.

A lo largo del trabajo nos vamos a referir al concepto de función cuadrática, sin embargo, cabe señalar que el concepto de función cuadrática es amplio y se compone de diversas ideas, por ejemplo, sus diversas representaciones como lo son: la forma general ($y = ax^2 + bx + c$), la forma canónica ($y = a(x + h)^2 + k$), sus gráficas, etc., pero

también acompañan a este concepto ideas importantes que se utilizan al modelar la solución de problemas (e.g. dominio de la función cuadrática, valor máximo, valor mínimo, ceros de la función, etc.) y es en esto en lo que se centra esta investigación, cuyos resultados reportamos en este trabajo.

1.1. Antecedentes

En Educación Matemática, el concepto de función ha sido durante mucho tiempo objeto de gran número de estudios. Las primeras investigaciones centraron su atención en la problemática acerca de las distintas definiciones del concepto de función. Por ejemplo, Nicholas (1966, p. 763, citado en Niss, 2014, p. 239) comparó y contrastó tres definiciones (que él denominó "variable", "conjunto" y "regla"), que, a su juicio, generan dudas, porque no son lógicamente equivalentes. La razón por la que el concepto de función en sí ha atraído la atención masiva de varios investigadores en Educación Matemática, se debe a que tanto estudiantes como profesores en servicio tienen dificultades de aprendizaje y de enseñanza, respectivamente, con diferentes formas de concebir este concepto (ideas tomadas de Niss, 2014, p. 239). Más concretamente, los investigadores interesados en la problemática en torno a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función han centrado sus trabajos en:

i) Identificar y analizar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, respecto al concepto de función.

La interpretación de la representación gráfica de una función, ha sido una de las dificultades ampliamente documentada (e.g., Dreyfus & Eisenberg, 1983; Tall, 1991-1996; Vinner & Dreyfus, 1989, citados en Falcade et al., 2007). Datos empíricos surgidos de investigaciones sobre la problemática aquí discutida (véase Carlson, 1998) muestran que los estudiantes tienen dificultades de concebir la idea clave de la función como relación entre las variables involucradas. Por su parte, Thompson (1994, citado en Falcade et al., 2007) afirma que en los planes y programas de estudio, de ciertos países, referentes a matemáticas no priorizan el estudio de funciones como problemas de covariación.

Investigadores, como Dreyfus y Halevi (1991, p. 44) afirman que: "Una de las dificultades [de comprensión] centrales de los estudiantes, en el proceso de construcción de la imagen mental de función, es establecer la conexión entre la fórmula; la cual representa

una función algebraica y su representación gráfica". Por su parte, Dubinsky y Harel (1992, citado en Niss, 2014, p. 240) señalan que la transición de una función como "proceso" a una función como "objeto" es un grave problema de comprensión de los estudiantes. En particular, de acuerdo con Ellis y Grinstead (2008, p. 278), los estudios centrados en las funciones cuadráticas han mostrado que los estudiantes tienen dificultades para:

- Interconectar los distintos tipos de representaciones (algebraica, tabular y gráfica).
- Visualizar las gráficas como un todo.
- Entender el efecto de los coeficientes [a partir de la representación algebraica de la función cuadrática].
- Distinguir entre funciones lineales y cuadráticas [a partir de su representación geométrica, por ejemplo].

Zaskis, Liljedahl y Gadowsky (2003) documentaron las dificultades de los estudiantes al trabajar con la traslación de funciones cuadráticas [dado un sistema de referencia], a partir de sus representaciones simbólicas. Estos investigadores afirman que una traslación horizontal de la parábola puede ser inconsistente con las expectativas iniciales de los estudiantes y contraria a la intuición de la mayoría de ellos.

ii) Explicar estas dificultades en términos históricos, filosóficos y cognitivos.

En un intento por atenuar las dificultades de aprendizaje del concepto de función, por parte de los estudiantes, investigadores en Educación Matemática (e.g., Hitt, 2002) han indagado la evolución [desde el punto de vista histórico] del concepto de función, con la esperanza de esclarecer las causas de tales dificultades. Hitt (ibídem) llevó a cabo un breve recorrido [histórico] sobre la evolución del concepto de función. El trabajo de este autor, en torno al concepto de función, evidencia el proceso de cambio que sufrió la definición de tal concepto; él argumenta que ciertas dificultades de aprendizaje de las matemáticas, por parte de los estudiantes, han sido provocadas por la presentación de la disciplina en términos formales; en la que predomina la notación conjuntista. Respecto a lo comentado previamente, este autor señala:

> Podría parecer que conforme se avanza en la precisión de notaciones matemáticas se promueve la comprensión de las mismas. Sin embargo, esto no ha sido así, pues esa formalización y ese uso de notación eficiente desprovistos de la base intuitiva que dieron

origen a los conceptos matemáticos resulta [se convierten] en dificultades para aprenderlos. Tal es el caso del concepto de función. (p. 74)

Este mismo autor afirma que la experimentación en Educación Matemática, específicamente, sobre el concepto de función ha mostrado que las definiciones utilizadas durante el siglo XX no son equivalentes en cuanto al aprendizaje de dicho concepto. Los estudios desarrollados sobre la comprensión del concepto de función muestran que para la enseñanza media [básica] la definición más apropiada es la que explícitamente se refiere a la variable. En otros estudios se adoptan perspectivas históricas vinculadas con un análisis epistemológico y cognitivo (e.g., Sfard, 1991; Sierpinska, 1992, citados en Falcade et al., 2007).

iii) Proponer medios eficaces para contrarrestar las dificultades de aprendizaje y de enseñanza del concepto de función.

Para hacer frente a ciertas dificultades de aprendizaje del concepto de función, por parte de los estudiantes, se han propuesto diferentes enfoques de enseñanza. Muchos de tales enfoques han estado basados en entornos tecnológicos, con la finalidad de explorar múltiples representaciones y el control dinámico que se puede lograr con diferentes dispositivos (e.g., Confrey & Maloney, 1996; Schwartz & Yerushalmy 1992, citados en Falcade et al., 2007). Falcade et al. (2007) diseñaron e implementaron un experimento de enseñanza con el objetivo de que los estudiantes concibieran la idea de función como covariación dentro de un ambiente de Geometría Dinámica. En particular, ellos se propusieron mostrar el proceso de Mediación Semiótica que ofrecen las herramientas: arrastrar y activar trazo, de un software de Geometría Dinámica (e.g., Cabri). El experimento de enseñanza de estos investigadores se estructuró en tres partes:

1. Se introduce la noción de variación y covariación a través de la exploración de herramientas particulares en Cabri. En el trabajo experimental, estos investigadores incluyeron debates colectivos, entre los estudiantes, con el fin de formular una definición tentativa de función apoyada en la interpretación de las experiencias de los alumnos con el Software. Falcade et al. concluyeron esta parte experimental, discutiendo las nociones de rango y dominio de funciones.

2. Los estudiantes transitaban de funciones cuyas representaciones eran geométricas a representaciones numéricas y viceversa.

3. El uso de la gráfica de una función se promueve como un medio para resolver problemas.

Los resultados obtenidos en esa investigación mostraron que la internalización de las herramientas: arrastrar y activar rastro pueden contribuir a la introducción del concepto de función como covariación, y que la construcción de características globales y puntuales de la trayectoria pueden contribuir a la introducción de las nociones de dominio y de rango de cierta función.

Respecto a las investigaciones centradas en el concepto de función cuadrática, Koklua y Topcub (2011) reportaron un estudio experimental en el que analizaron el efecto de la instrucción asistida por Cabri, en torno a los conceptos erróneos de los estudiantes de nivel secundaria sobre la gráfica de funciones cuadráticas. Los resultados indicaron que la instrucción asistida por Cabri no afectó, de forma estadísticamente significativa, las ideas erróneas de los estudiantes, sin embargo, se observó que los errores en el grupo experimental (grupo que utilizó Cabri) fueron menores que los del grupo control y sus puntuaciones de rendimiento fueron más altos.

Como se mencionó en párrafos precedentes, una de las dificultades de los estudiantes, en la construcción del concepto de función cuadrática, es describir el efecto que tienen los coeficientes $a,\ b\ y\ c$ en la gráfica de la función, a partir de la forma general $y = ax^2 + bx + c$. En torno a este tipo de dificultades de los estudiantes, Edwards y Özgün-Koca (2010) mostraron, tomando como base una perspectiva histórica, cómo las tareas en matemáticas se pueden *enriquecer* con el avance de la tecnología, por ejemplo, en el estudio de la función cuadrática cuando se cambian los parámetros de la función y se estudian los efectos sobre la gráfica. Ellos proponen que se pueden emplear hojas de cálculo, las cuales facilitan la construcción de tablas de valores, para analizar el comportamiento de la gráfica de la función al variar los coeficientes.

Además, afirman que el empleo de calculadoras gráficas, para resolver problemas, permite a los estudiantes analizar diversas gráficas, simultáneamente, y establecer conexiones entre la representación algebraica y la gráfica. Sin embargo, el uso de la

calculadora gráfica puede verse limitado debido a la pequeña pantalla de la calculadora que rápidamente puede saturarse con algunas gráficas. También mencionan que con el uso de un software dinámico, como Geogebra, se puede estudiar los efectos de $a, b\ y\ c$ en la función cuadrática usando tres deslizadores por separado para esos parámetros. Mediante el uso de tales deslizadores, los estudiantes pueden enfocarse en cada parámetro de forma individual. Dado que la pantalla en una computadora es más grande que la de una calculadora gráfica, permite que sea más fácil ver la gráfica que corresponde a cada función cuadrática. Estos mismos autores reportan un estudio en el que analizaron dos videos que documentan las exploraciones de funciones cuadráticas, realizadas por estudiantes de séptimo grado utilizando la TI-Nspire.

Como se ha descrito en párrafos previos, en diversas investigaciones concernientes a las dificultades de aprendizaje y de enseñanza del concepto de función, en general, y cuadrática en particular, la mayoría de ellas se ha centrado en el aprendizaje y enseñanza del concepto de función cuando las funciones ya están dadas. La revisión de la literatura, llevada a cabo hasta el momento, muestra que hay poca investigación cuyo foco de atención sea introducir el concepto de función en contextos de la vida cotidiana. Una de las pocas investigaciones, sobre la función cuadrática, enfocada en contextos cotidianos es la de Oldknow (2009). Este autor seleccionó partes de actividades propuestas en proyectos escolares, en el Reino Unido (UK, por sus siglas en ingles), que vinculan a las matemáticas con situaciones realistas, por ejemplo, el uso de un software llamado Vidshell (Davis, 2000) que sirve para capturar datos de un videoclip de tiros libres de baloncesto y así modelar la trayectoria seguida por la pelota con funciones cuadráticas. En ese tipo de tareas, los estudiantes escogen el origen (sistema de referencia) y escalas pertinentes de las magnitudes involucradas en el problema.

Una de las investigaciones más recientes (e.g., Doorman et al., 2012) da énfasis a la importancia de relacionar características de la vida cotidiana con la enseñanza de conceptos matemáticos; en particular, el de función. En esa investigación, los autores analizaron cómo un experimento de enseñanza con herramientas informáticas puede fomentar la transición del carácter operativo [función como proceso] al estructural [función como objeto] del concepto de función. El carácter operativo de una función es percibido como una máquina de entrada-salida que procesa valores de entrada en valores de salida; mientras que el

carácter estructural se refiere a las funciones como objetos matemáticos que están representados de diferentes maneras; clasificados en diferentes tipos de función; en términos de sus propiedades, y que se someten a procesos de orden superior, tales como la diferenciación y la integración.

La noción de *Emergent Modeling* [Modelación Emergente] (heurística de diseño originada en el marco de la Educación Matemática Realista, RME) sirvió de base para el diseño de experimentos de enseñanza (e.g., Doorman et al., 2012); tal orientación significa que las actividades propuestas modelan problemas contextuales. El marco teórico en el que se basó la investigación de estos autores fue enfoque instrumental. Esta teoría se centra en el papel mediador de las herramientas (Doorman et al., 2012, p. 1248). El experimento de enseñanza de estos autores incluyó una herramienta informática llamada álgebra Arrows, un libro de texto para el estudiante con tareas diseñadas tanto en lápiz-y-papel como en computadora, una guía docente que describe las diversas actividades y sus posibles orquestaciones y, por último, una prueba escrita y otra en computadora. El experimento de enseñanza se aplicó a estudiantes de octavo grado (13-14 años de edad) en ocho lecciones de 50 minutos cada una. Dicha investigación mostró que la herramienta informática ayuda a los estudiantes a superar la dificultad de integrar propiedades operacionales y estructurales del concepto de función.

1.2. Problema de Investigación

Esta investigación está centrada en torno a la problemática surgida en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función cuadrática que, como se desprende de la revisión de la literatura, es objeto de estudio de distintas investigaciones en la actualidad. Este concepto es uno de los básicos en el estudio de las matemáticas a nivel secundaria, medio superior y superior.

En el nivel secundaria, las funciones tienen, principalmente, un carácter operativo [función como proceso] y son entendidas como una máquina de entrada-salida que procesa valores de entrada en valores de salida. En los grados superiores, las funciones tienen un carácter estructural [función como objeto] con varias propiedades (Sfard, 1991, citado en Doorman et al., 2012). Doorman et al. (2012) sostienen que la transición del carácter de función como proceso al de función como objeto es fundamental para la comprensión

conceptual de dicho concepto. Sin embargo, la comprensión de estas dos "caras " de la función es causante de diversas dificultades de aprendizaje de los estudiantes (Dubinsky & Harel, 1992, citado en Niss, 2014, p. 240).

El concepto de función cuadrática está relacionado con el concepto de variable, el cual conlleva una lista importante de obstáculos epistemológicos los cuales juegan un papel importante en la abstracción de dicho concepto. Falcade et al. (2007) mencionan que en términos generales, la noción de variable se ha investigado en una serie de estudios que muestran su complejidad y la influencia de determinados métodos de enseñanza en álgebra. Los estudiantes tienen dificultades para captar la idea multifacética de la variable y, en particular, ellos piensan que la relación funcional entre variables únicamente ocurre en términos de valores discretos. Esta dificultad de comprensión del concepto de función persiste en los últimos años de estudio de los estudiantes, en los diferentes niveles escolares, y parece estar relacionada con el hecho de que los estudiantes primero se encuentran con variables numéricas discretas (Trigeros & Ursini, 1999, p. 277, citado en Falcade et al. 2007). De manera similar a los resultados de Carlson, Trigueros y Ursini informan sobre la dificultad de identificar la variación correlacionada de dos variables. Estos autores agregan que las dificultades de identificación de las variables, también pueden constituir obstáculos en la simbolización de relaciones entre variables.

Este concepto (el de función cuadrática) llevado al contexto matemático no sólo ocasiona dificultades de aprendizaje, por parte de los estudiantes, sino también de enseñanza por parte de los profesores, pues ellos [los profesores] no siempre dominan ampliamente dicho concepto. En ocasiones, los profesores sólo trabajan con la expresión algebraica para obtener la gráfica de la función, y dejan de lado los otros registros de representación. La enseñanza de este tipo de conceptos abstractos, generalmente, es impartida de manera tradicional, iniciando con la definición; en seguida, proporcionan diferentes ejemplos que muestran a los alumnos un contenido superficial del concepto y, por último, dan listas de ejercicios con los cuales pretenden culminar el aprendizaje de dicho concepto, por parte de los estudiantes.

La enseñanza tradicional, generalmente, trata los conceptos matemáticos sin el apoyo de contextos de la vida cotidiana de los estudiantes. Ésta podría ser una de las causas de

dificultades relacionadas con la enseñanza del concepto de función cuadrática, por ejemplo, es posible darse cuenta, tomando como referencia este conjunto de dificultades, de la problemática existente en torno a la comprensión del concepto de función cuadrática. Por tal motivo, en esta investigación se diseñaron un conjunto de actividades; las cuales tienen el propósito de fomentar en los estudiantes la comprensión del concepto de función cuadrática, en particular las ideas o los elementos de las funciones cuadráticas que son importantes en la modelación, todo esto a través de la visualización, los vínculos entre los distintos registros de representación, la reflexión y el uso de la tecnología. Tomando en cuenta la problemática previamente discutida, se llevó a cabo la investigación:

Influencia de los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico en la construcción del concepto de función cuadrática

1.3. Objetivos de la investigación

General:

Analizar y documentar los procesos de abstracción que sobre el concepto de función cuadrática llevan a cabo los estudiantes de nivel secundaria mediante el trabajo, en equipo, con secuencias didácticas diseñadas en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico.

Específicos:

a) Diseñar e implementar actividades a realizar en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico cuyo propósito es promover en los estudiantes la construcción del concepto de función cuadrática.
b) Analizar y documentar el impacto que tienen las actividades diseñadas, para potenciar la construcción del concepto de función cuadrática en estudiantes de tercer grado de nivel secundaria.

1.4. Preguntas de investigación

1) ¿Qué procesos de abstracción del concepto de función cuadrática manifiestan los estudiantes durante la implementación de las actividades?
2) ¿Qué características deben tener las actividades de tal forma que fomenten en los estudiantes la construcción del concepto de función cuadrática?

3) ¿Cómo los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico influyen en la abstracción del concepto de función cuadrática por parte de los estudiantes?

Para responder estas preguntas nos apoyamos en los principios básicos de los marcos teóricos AiC y RME. Una vez hecho esto, procedimos a diseñar e implementar actividades en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico, las cuales condujeron a los estudiantes a la comprensión del concepto de función cuadrática.

1.5. Justificación de la investigación

En la investigación relacionada con el aprendizaje y la enseñanza del concepto de función cuadrática se destacan varios trabajos. La mayoría de ellos han enfocado su atención en las concepciones y las dificultades de los estudiantes respecto a la comprensión de este concepto. Para erradicar o disminuir algunas de estas dificultades, los investigadores han diseñado e implementado actividades didácticas que promueven la reflexión y la intuición de los estudiantes.

La presente investigación se caracteriza por introducir la noción de función cuadrática como covariación a través de problemas que se puedan modelar con funciones cuadráticas. La tecnología juega un papel importante como mediadora del conocimiento, y permite usar distintas representaciones en la resolución de problemas.

De acuerdo con los planes y programas de estudios (2011) de la Secretaria de Educación Pública (SEP) el planteamiento central, en cuanto a la metodología didáctica sugerida para el estudio de las matemáticas [en particular el estudio de la función cuadrática], consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados (p. 19).

Sin embargo, en la actualidad, la problemática existente en la práctica escolar se deriva, en gran parte, de la educación tradicional de los profesores, ya que en ocasiones, estos no permiten que los alumnos busquen por su cuenta la manera de resolver los problemas que se les plantean. Otro problema existente en la práctica escolar es que se suele pensar que si se pone en práctica el enfoque didáctico, consistente en plantear problemas a los alumnos para que los resuelvan con sus propios medios, discutan y analicen sus procedimientos y resultados, no alcanza el tiempo para concluir el programa;

por lo tanto, se decide continuar con el esquema tradicional en el cual el docente “da la clase”, mientras los alumnos escuchan aunque no comprendan. Aunado a esta problemática hay quienes suelen pensar que la tecnología no juega un papel central en la práctica escolar actual. Esta investigación pretende mostrar que los usos de la tecnología en la práctica escolar, así como el de lápiz-y-papel constituyen recursos fundamentales tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de conceptos matemáticos; en particular, el de función cuadrática.

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

En esta investigación se utilizan dos marcos teóricos: Abstracción en Contexto (Dreyfus et al., 2015) y Educación Matemática Realista (Heuvel-Panhuizen & Paul Drijvers, 2014). Con el marco teórico Abstracción en Contexto (*Abstraction in Context*, *AiC*) se identifican y analizan los procesos de construcción del conocimiento matemático abstracto de estudiantes de nivel básico (tercer grado de secundaria) al resolver actividades diseñadas en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico en torno al tema de funciones cuadráticas; a medida que ocurren en contextos: matemático, social y curricular.

Para el diseño de dichas actividades se utilizó la teoría de la Educación Matemática Realista (RME), la cual indica que situaciones "realistas" sirven como fuente para iniciar la construcción de nuevos conceptos matemáticos. Por lo tanto, los problemas que aquí se plantean, a los estudiantes, provienen de experiencias reales de ellos.

De forma global, en este capítulo se discute, en general, los principios básicos del marco teórico Abstracción en Contexto y de la teoría de la Educación Matemática Realista, teorías utilizadas para el diseño y análisis de las actividades propuestas en esta investigación.

2.1. Marco conceptual AiC

Comprender cómo los estudiantes construyen el conocimiento matemático abstracto es preocupación central de la investigación en Educación Matemática, en general. Abstracción en Contexto (AiC) es un marco teórico que estudia los procesos de construcción del conocimiento matemático abstracto; dicho conocimiento se produce en contextos que incluyen objetos matemáticos específicos, propuestas curriculares y sociales, así como un entorno de aprendizaje, en particular, de los estudiantes. El marco conceptual Abstracción en Contexto se produjo mediante una mezcla de la influencia de la teoría cognitivista de Freudenthal y la teoría socio-cultural de Davydov con el objetivo de crear un *puente* entre estos dos puntos de vista, y así ofrecer oportunidades para que la abstracción se produzca.

Freudenthal (1991, citado en Dreyfus et al., 2015), un eminente matemático influido por las ideas de Piaget, aportó algunas de las ideas más importantes para la Educación Matemática, en general, y para la Abstracción Matemática, en particular. Una de las aportaciones más importantes fue la idea de "matematización vertical". Este concepto se refiere al proceso en el que los estudiantes reorganizan sus conocimientos matemáticos previos, usándolos como bloques para edificar una nueva construcción abstracta. Los investigadores, en Educación Matemática, prefieren utilizar la expresión "reorganización vertical" en lugar de matematización vertical para discernir entre lo que pretende enseñar el profesor, la matematización, y lo que sucede a menudo; reorganización que produce cambios radicales; que, a veces, no coincide con lo que se pretende.

En la reorganización vertical, los constructos[1] [conocimientos] previos sirven como bloques de construcción en el proceso de construcción. A menudo, estos bloques de construcción no sólo se reorganizan, sino que también se integran y se entretejen; lo que añade una *capa de profundidad* a los conocimientos del alumno, y da una expresión compuesta a la naturaleza de las matemáticas. Las secuencias de situaciones problemáticas proporcionan oportunidades para sacar provecho de este proceso, pues crean un ciclo en el que las nuevas construcciones son usadas como bloques para la edificación de una futura [construcción] y así sucesivamente.

[1]Construcción teórica para comprender un problema determinado (DRAE). De acuerdo con Dreyfus el término constructo se refiere al resultado de la acción construcción.

Davydov (1990, citado en Dreyfus et al., 2015), uno de los seguidores más destacados de la teoría socio-cultural del desarrollo humano iniciada por Vygotsky, propuso, como resultado de su análisis de la abstracción, y de procesos dialécticos que ocurren a menudo en las interacciones entre el adulto y el estudiante, su método de "ascenso a lo concreto"; una descripción de la génesis de la abstracción. Al respecto, este autor menciona:

> [La] abstracción comienza a partir de una primera forma inicial, simple, sin desarrollar y vaga, que a menudo carece de consistencia. El desarrollo de la abstracción procede del análisis, en la etapa inicial de la abstracción, a la síntesis. Es un proceso dialéctico que termina con una forma más coherente y elaborada. No procede de lo concreto a lo abstracto, sino de una forma subdesarrollada a una forma desarrollada. (citado en Dreyfus et al., 2015, p. 187)

El puente entre estos dos puntos de vista (matematización vertical y ascenso a lo concreto) consiste en "diseños" que produzcan la abstracción. Estos diseños requieren de la elaboración de secuencias de actividades que ofrezcan a los estudiantes oportunidades para aprender nuevas ideas matemáticas. La teoría de la actividad propone un marco adecuado para considerar los procesos, fundamentalmente, cognitivos, y tiene en cuenta los contextos matemáticos, históricos, sociales y de aprendizaje; en los cuales estos procesos ocurren. Según la teoría de la actividad, los resultados de las actividades anteriores naturalmente convierten los artefactos en otros, una característica fundamental para trazar la génesis y el desarrollo de la abstracción a través de una secuencia de actividades.

El marco de la AiC adopta las opiniones de matematización vertical y ascenso a lo concreto, y se basa en ellos para dar la siguiente definición: Abstracción es la actividad de reorganizar verticalmente constructos matemáticos previamente construidos por el alumno, dentro de las matemáticas y por medios matemáticos a fin de dar lugar a una construcción nueva para el alumno (Dreyfus et al., 2015, p. 187). Las características más destacadas de los planes de estudio matemático y de los entornos del aula de aprendizaje en la que se estudia la abstracción, son los siguientes:

- Los planes de estudio se organizan en secuencias de actividades y los temas propuestos a lo largo de estas actividades con frecuencia transforman los anteriores.

De aquí que los planes de estudio expresan una intención de transformación continúa.

- El papel del contexto físico, histórico y social es fundamental para el marco AiC. El contexto histórico incluye la historia del aprendizaje previo del estudiante; el contexto físico o curricular incluye artefactos tales como computadoras y software y el contexto social se refiere a las interacciones de los alumnos con sus compañeros, maestros u otras personas (Kidron, I., 2008). En particular, el contexto social pueden variar considerablemente de acuerdo con las decisiones del profesor.
- Los estudiantes tienen la responsabilidad de generar su propio aprendizaje en un entorno que fomente la investigación; lo cual significa que tienen la responsabilidad de informar y justificar su trabajo y conclusiones a sus compañeros y a su profesor, por ejemplo, durante las discusiones de toda la clase.
- A menudo, la abstracción se da en la interacción de pequeños grupos, de dos a cuatro estudiantes.

Dreyfus et al. (2015) plantean que la génesis de la abstracción pasa a través de un proceso de tres etapas, que incluye la necesidad de una nueva construcción, la aparición de la nueva construcción, y la consolidación de esa construcción. La naturaleza de la primera etapa está bien explicada por Cedrón y Monaghan (2009, citado en Dreyfus et. al, 2015) cuando se trata de la necesidad que motiva a los estudiantes a participar en la abstracción; una necesidad que surge de un diseño adecuado y de una vaguedad inicial para el alumno. He aquí lo que señalan estos dos autores sobre la necesidad de aprender nuevos conocimientos:

> La necesidad de los alumnos de nuevo conocimiento es inherente al diseño de tareas, pero esta necesidad es una etapa importante del proceso de abstracción y debe preceder al proceso de construcción, la reorganización vertical de las construcciones existentes con anterioridad. Esta necesidad de una nueva construcción permite el enlace entre el conocimiento del pasado y la futura construcción. Sin el análisis Devydoviano, esta necesidad, la cual debe proceder al proceso de construcción, podría ser vista ingenuamente y mecánicamente, pero con el análisis dialéctico de Davydov la abstracción procede de una primera forma inicial no refinada hacia una construcción final coherente en una relación de doble vía entre lo concreto y lo abstracto –el alumno necesita el conocimiento para dar sentido a una situación–. En el momento en que

> un alumno se da cuenta de la necesidad de una nueva construcción, él ya tiene una forma vaga inicial del constructo futuro como resultado de los conocimientos previos. Al darse cuenta de la necesidad de la nueva construcción, el alumno entra en una segunda etapa en la que él o ella está listo para construir con [apoyado en] su conocimiento previo con el fin de desarrollar la forma inicial a una consistente y elaborada forma superior, el nuevo constructo, que proporciona una explicación científica de la realidad. (Cedrón & Monaghan, 2009, pp. 86-87, citado en Dreyfus et al., 2015)

Un componente central del marco AiC es un modelo teórico-metodológico, según el cual la aparición de una nueva construcción se describe y analiza por medio de tres acciones epistémicas observables: Reconocimiento (R), Edificación (B) y Construcción (C). El Reconocimiento lleva al alumno a darse cuenta de que una construcción específica del conocimiento anterior es relevante en la situación en cuestión. Edificación comprende el uso y la combinación de constructos reconocidos con el fin de lograr un objetivo localizado, como la realización de una estrategia, una justificación o la solución de un problema.

El modelo sugiere la Construcción como la acción epistémica central de la abstracción matemática. Construir consiste en el montaje y la integración de las construcciones anteriores por matematización vertical para producir un nuevo constructo. Se refiere a la primera vez que la nueva construcción se expresa o utiliza por el alumno. Esta definición de construir no implica que el alumno ha adquirido la nueva construcción de una vez y para siempre. El alumno ni siquiera puede estar plenamente consciente de la nueva construcción, y el constructo del aprendiz es a menudo frágil y dependiente del contexto.

La etapa de consolidación es un proceso interminable a través del cual los estudiantes toman conciencia de su construcción. El uso de la construcción se hace más inmediata y evidente por sí misma, la confianza del estudiante en el uso de la construcción aumenta, y él o ella muestran cada vez más flexibilidad en el uso de la construcción (Dreyfus & Tsamir, 2004, citado en Dreyfus, et. al., 2015). La consolidación de un constructo es probable que se produzca cada vez que un constructo surgido de una actividad está en la acción Edificación de actividades futuras. He ahí que la consolidación conecta procesos de

construcciones sucesivas y está estrechamente relacionada con el diseño de secuencias de actividades.

En los procesos de abstracción, las acciones epistémicas están *anidadas*. Cada grupo de acciones depende de las otras dos; y éstas a su vez son los bloques de construcción de las primeras. Dadas estas características, se ha llamado al modelo de las acciones epistémicas anidadas dinámicamente, modelo de abstracción en el contexto, más sencillamente el modelo RBC, o modelo RBC + C con el segundo C para remarcar el papel importante de la consolidación. El modelo RBC es el objetivo teórico y micro analítico, a través del cual se observa y analiza la dinámica de la abstracción en su contexto.

Como se mencionó en párrafos precedentes, el marco AiC considera que los contextos, como la interacción, influyen fuertemente en el proceso de abstracción de los estudiantes. Hershkowitz et al. (2007, citado en Kidron, I., 2008) mencionan que los conocimientos en común [conocimientos compartidos], de un grupo de estudiantes, emergen de los conocimientos individuales de los estudiantes, a través de la interacción. Y como tal, permiten al grupo continuar con la construcción de nuevos conocimientos. Para el marco AiC, los procesos cognitivos e interactivos de construcción del conocimiento son analizados en paralelo e investigados como un solo proceso.

Como resultado de la teoría, previamente discutida, se puede conjeturar que la definición de abstracción proporcionada por el marco conceptual de la AiC; está basada en los siguientes cinco principios epistemológicos y socio-culturales:

1. La abstracción es una actividad (en el sentido de la teoría de la actividad), una cadena de acciones llevada a cabo por un individuo o un grupo y conducido por un motivo especifico a un contexto.
2. El contexto es una construcción personal y social que incluye la historia personal y social del estudiante y el profesor, las concepciones, los artefactos y la interacción social.
3. La abstracción requiere pensamiento teórico, en el sentido de Davydov; también puede incluir elementos del pensamiento empírico.
4. Un proceso de abstracción inicia desde una entidad inicial abstracta sin refinar hasta una estructura nueva.

5. La nueva estructura se crea a través de la reorganización de las identidades abstractas y mediante el establecimiento de nuevos enlaces internos dentro de las entidades iniciales y enlaces externos entre ellos. (Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. & Dreyfus, T., 2001, p. 202)

2.2. Marco conceptual RME (Realistic Mathematics Education)

La Educación Matemática Realista (RME) es una teoría de instrucciones; específica del dominio de las matemáticas, que se ha desarrollado en los Países Bajos (e.g., Holanda). Una característica principal de la RME es que las situaciones "realistas" tienen un lugar destacado en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Estas situaciones sirven para iniciar el desarrollo de conceptos matemáticos. Aunque las situaciones "realistas" en el sentido de las situaciones "mundo real" son importantes en la RME, aquí la palabra "realista" tiene una connotación más amplia; significa: "todo lo que la alumno pueda imaginar". Por lo tanto, en la RME, los problemas que se presentan a los estudiantes pueden venir de la vida real [cotidiana], desde el mundo de la fantasía de los cuentos de hadas o del mundo formal de las matemáticas, siempre y cuando los problemas sean una experiencia real en la mente del estudiante.

El marco de la RME se originó por la fundación de las Wiskobas (proyecto de matemáticas en escuelas primarias) en 1968, iniciado por Edu Wijdeveld y Fred Goffre, y no mucho después se unió Adri Treffers. Freudenthal (1983), un fuerte defensor de la modernización de la Educación Matemática, introdujo el método de la “fenomenología didáctica”, al describir los conceptos matemáticos, las estructuras y las ideas en su relación con los fenómenos por los cuales fueron creados. Este autor llegó a las reflexiones teóricas sobre la construcción de los objetos matemáticos mentales, y de esta manera contribuyó al desarrollo de la teoría RME.

Freudenthal decía que los estudiantes deben ser participantes activos en el proceso educativo en lugar de ser receptores de las matemáticas ya hechas. Este autor consideraba a las matemáticas como una actividad humana. Por lo tanto, según él, las matemáticas no deben ser aprendidas como un sistema cerrado, sino más bien como una actividad de matematizar la realidad y si es posible, incluso la de matematizar las matemáticas.

Más tarde, Freudenthal y Treffers distinguieron la matematización horizontal de la vertical. La matematización horizontal es aquella en la que los estudiantes utilizan

herramientas matemáticas para organizar y resolver problemas situados en la vida real. Se trata de pasar del mundo de la vida real al mundo de los símbolos. Matematización vertical se trata de moverse del mundo de los símbolos al mundo real. Las dos formas de matematización están estrechamente relacionadas y son consideradas de igual valor.

La RME implica una serie de principios básicos en la enseñanza de las matemáticas. La mayoría de estos principios pedagógicos básicos fueron articulados originalmente por Treffers (1978), pero se reformularon en los últimos años, incluso por el propio Treffers. En total se pueden distinguir seis principios (Heuvel-Panhuizen & Paul Drijvers, 2014):

1. El principio de la actividad: significa que en la RME los estudiantes son tratados como participantes activos en el proceso de aprendizaje. También hace hincapié en que las matemáticas se aprenden mejor "haciendo matemáticas", que se refleja con fuerza en la interpretación de Freudental de las matemáticas como una actividad humana, así como la idea de Freudental y Treffers de matematización.

2. El principio de la realidad: en primer lugar, este principio expresa la importancia de que los estudiantes apliquen las matemáticas a la solución de un problema de la vida real. En segundo lugar, significa que los problemas en matemáticas deben partir de situaciones problemáticas significativas para los estudiantes. En lugar de comenzar con abstracciones de enseñanza o definiciones que se aplicarán más tarde, en RME la enseñanza comienza con problemas ricos en contextos.

3. El principio del nivel: subraya que el aprendizaje de las matemáticas significa que los estudiantes pasan varios niveles de comprensión: desde soluciones relacionadas con el contexto informal, a través de la creación de varios niveles de acceso directo y de esquematizaciones, a la adquisición de una idea de cómo se relacionan los conceptos y estrategias.

4. El principio del entrelazamiento: significa que los dominios de contenidos matemáticos, tales como: números, geometría, medición y manejo de datos no se consideran como capítulos del plan de estudio aislados, sino como capítulos

integrados. En los problemas, los estudiantes pueden utilizar diferentes herramientas y conocimientos matemáticos.

5. El principio de la interactividad: para la RME significa que el aprendizaje de las matemáticas no es sólo una actividad individual, sino también social. Por lo tanto, la RME favorece las discusiones de toda la clase y el trabajo en equipo, que ofrecen a los estudiantes oportunidades para compartir sus estrategias e intervenciones con los demás. De esta manera, los estudiantes pueden obtener ideas para mejorar sus estrategias. Por otra parte, la interacción evoca la reflexión; que permite a los estudiantes alcanzar un mayor nivel de comprensión.

6. El principio de la guía: implica que en la RME el profesor debe tener un papel proactivo y los programas educativos deberán contener escenarios que funcionen como una *palanca* para llegar a los cambios en la comprensión [aprendizaje] de los estudiantes.

Con el tiempo, una serie de teorías de instrucciones locales y secuencias de enseñanza paradigmáticas centradas en temas matemáticos específicos se han ido desarrollando. Por ejemplo, Drijvers (2003, citado en Heuvel-Panhuizen & Paul Drijvers, 2014) se ha enfocado en la tecnología digital, y en la comprensión de conceptos y operaciones algebraicas. La base para llegar a estas teorías de instrucciones locales fue formada por la investigación de diseño, elaborada por Gravemeijer (1994). Libros como "Funciones en contexto" (Hitt, 2002) toman en cuenta las nuevas tendencias sobre cómo debe ser abordada [en el aula] la construcción de los conceptos matemáticos, tomando en cuenta contextos específicos. La aparición en el medio de textos (e.g., Hitt, 2002), en los cuales se plantean problemas matemáticos de la vida real –relacionados con funciones en contexto– conllevan, de manera natural, al uso de diferentes representaciones de las funciones.

La Teoría de la Educación Matemática Realista es usada en esta investigación para diseñar las actividades aquí propuestas. Dichas actividades comienzan con un problema de la "vida real" de los estudiantes y conforme se avanza en ellas, se trabajan los principios básicos de la RME. Las acciones epistémicas, consideradas en el marco RBC, son empleadas en esta investigación para estudiar la abstracción por parte de los estudiantes del

concepto de funciones cuadráticas. A través de la identificación y el análisis de estas acciones de los estudiantes al resolver, en equipo, las secuencias didácticas diseñadas en los dos ambientes propuestos, se logran dar evidencias de sus procesos de abstracción. Estos dos marcos conceptuales ayudaron a responder las peguntas de investigación (véase capítulo 1 de esta tesis) y a proveer de evidencias que permitieron potenciar la comprensión del concepto de funciones cuadráticas.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología utilizada en la presente investigación. Esta descripción incluye el proceso de selección de los participantes, las características de los mismos y del software empleado en el diseño de las actividades. El capítulo contiene también una breve descripción del análisis del contenido matemático acerca de la función cuadrática en el nivel básico (tercer grado de secundaria). Para llevar a cabo este análisis, se tomó un libro, utilizado por el profesor de matemáticas para la enseñanza de dicho concepto. Además, se revisó y discutió el contenido, del programa de estudios, relacionado con el concepto de función cuadrática.

Posteriormente, se especifican los objetivos del diseño de cada una de las actividades implementadas así como su descripción y un análisis a priori de éstas con el fin de crear la hipótesis de trabajo. Al final de este capítulo, se describe el proceso de implementación de las actividades y del acopio de datos, así como los instrumentos utilizados en la misma.

3.1. Selección y descripción de la población

La investigación se realizó en una escuela secundaria privada de la ciudad de San Luis Potosí, con un equipo de cuatro estudiantes de tercer año; quienes habían estudiado el concepto de función cuadrática durante algunos cursos previos a la toma de datos. Los cuatro estudiantes fueron escogidos por el investigador, quien de acuerdo con su criterio eligió a los estudiantes que mostraron mayor desempeño en las dos primeras actividades de la investigación, aplicadas a un grupo de 16 estudiantes de tercer grado de educación secundaria. Además, los cuatro estudiantes estuvieron dispuestos a trabajar en equipo y a participar en el estudio. El equipo de cuatro estudiantes estaba conformado por tres mujeres y un hombre. Las edades de los participantes oscilaban entre los 14 y 15 años. Sin embargo, la edad y el género de los estudiantes no fueron considerados en la selección de los participantes en esta investigación.

Los cuatro estudiantes elegidos estaban cursando el tercer bimestre de la materia de matemáticas 3, por lo que el concepto de función cuadrática había sido estudiado. Ninguno de los alumnos tenía experiencia en el manejo del software de geometría dinámica (Geogebra), el cual se utilizó en la parte con tecnología de las secuencias de actividades. Por tal motivo, se instruyó a los participantes en el uso básico sólo de las herramientas necesarias para el desarrollo de las actividades en Geogebra, para que pudieran usarlas en las preguntas propuestas en cada una de las actividades diseñadas.

3.2. Selección y uso de la herramienta tecnológica

La evolución constante de las herramientas tecnológicas ha influido notablemente no sólo en el avance de la matemática misma, sino también en la forma de aprender esta disciplina. Una característica relevante, relacionada con el aprendizaje, es que, mediante el uso de algunas herramientas tecnológicas, los estudiantes tienen la oportunidad de construir representaciones de los problemas que se desean resolver, lo cual les permite identificar relaciones o establecer conjeturas. Asimismo, pueden visualizar el comportamiento de ciertos parámetros (segmentos, rectas, figuras, etc.) como resultado de modificar algunos de estos y mantener fijos otros y determinar el camino o huella que dejan ciertos puntos o segmentos al mover alguna parte de una configuración geométrica (Santos, 2010, p. 88).

El diseño de las actividades incluyó el uso del ambiente tecnológico. El software seleccionado como herramienta tecnológica en el diseño de las actividades fue Geogebra, por ser un programa dinámico diseñado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Además, es un software libre y con acceso a diferentes representaciones de los objetos, de fácil uso, sencillo, amigable y potente con el que se pueden diseñar fácilmente construcciones geométricas y analíticas. Para apoyar el desarrollo de las actividades se crearon, en Geogebra, escenarios didácticos que representaban el problema matemático a resolver. Dicho software fue instalado en tabletas, dado que los alumnos participantes tenían acceso a ellas. La utilización de Geogebra en tabletas permitió al alumno manipular, transformar, validar e investigar las propiedades de las funciones cuadráticas. Además de favorecer la adquisición de conceptos matemáticos, el trabajo en tabletas incrementa el gusto e interés de los estudiantes por las matemáticas.

3.3. Estudio del concepto de función cuadrática contenido en un libro de texto

En esta sección, se discute el análisis del contenido matemático de un libro de texto utilizado por el profesor de matemáticas, para la enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática en tercero de secundaria. Este análisis tiene como objetivo explorar la forma en que los autores de este libro abordan el concepto de función cuadrática y, a su vez, la forma en que los estudiantes aprenden este concepto al apoyarse en el libro.

El libro de texto fue escrito por el sistema UNO internacional junto con el Grupo Santillana. Es un libro basado en el sistema educativo por competencias. Este libro es el que la mayoría de los profesores toman como base para impartir el curso de Matemáticas 3; curso en el que se enseña el tema de funciones cuadráticas. Además, es el libro que emplearon los estudiantes que participaron en este estudio.

El libro es estudiado en cinco bimestres; en el primero, se estudian los temas: “Ecuaciones no lineales” y “Tablas y expresiones de variación cuadrática”. El objetivo de estudiar ecuaciones no lineales es resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas. Para estudiar este tema, los autores, proponen iniciar con un problema de la vida real [cotidiana] de los estudiantes, y plantear una serie de preguntas que lleven al alumno a obtener la ecuación cuadrática que modela la situación (problema), para después resolverla por ensayo

y error. En relación con las soluciones de una ecuación cuadrática, los autores de este libro mencionan que:

> Cuando elevamos un número al cuadrado, el resultado siempre es un número positivo, independientemente de su signo. De este modo, si tenemos dos números simétricos (7 y -7, por ejemplo), al elevarlos al cuadrado obtenemos el mismo resultado (49). Es por eso que una **ecuación donde la variable** [sic] **está elevada al cuadrado** [negritas en el original] puede tener **dos soluciones** [negritas en el original], una negativa y una positiva. (p. 10)

Durante las actividades, propuestas por los autores de este libro de texto, constantemente, planean preguntas, como: ¿Cuál es la diferencia entre ecuaciones cuadráticas y lineales? Estos mismos autores explican que:

> Las ecuaciones pueden clasificarse según los exponentes de sus variables [sic]. Si el mayor exponente al que está elevada la variable es dos, se trata de una ecuación de **segundo grado** [negritas en el original], a la que también se le llama **ecuación cuadrática** [negritas en el original].
>
> En general las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones distintas, pero en ocasiones solamente tienen una solución. Por ejemplo, la ecuación $(x-4)^2=0$ tiene como única solución $x=4$. En estos casos se considera que la ecuación tiene dos soluciones, pero que consisten en el mismo número, se dice que la solución tiene **multiplicidad 2** [negritas en el original]. (p. 12)

Por último, se pretende que los alumnos escriban una situación problemática, que pueda representarse mediante una ecuación dada. De esta manera, al estudiar el tema de ecuaciones no lineales, el alumno pasa del mundo de la vida real al mundo de los símbolos y viceversa.

En el tema Tablas y expresiones algebraicas de variación cuadrática se pretende estudiar la representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas. Para abordar este tema, los autores proponen analizar problemas contextuales que contienen tablas de relaciones de variación cuadrática; para ello, plantean preguntas que hacen reflexionar al alumno acerca de: variación, máximos y mínimos, función cuadrática que modela la situación, etc. En esta sección del libro, los autores definen función cuadrática como:

> En la expresión algebraica que representa la situación anterior, la variable independiente (x) se encuentra elevada al cuadrado. Decimos que estas expresiones algebraicas son de variación cuadrática y les llamamos **funciones cuadráticas** [negritas en el original].
>
> Una función cuadrática puede tener la forma $y = x^2 + c$, donde c puede ser una constante positiva, negativa o cero. […] también puede tener la forma $y = ax^2 + c$ donde a es una constante distinta de cero y c puede ser cualquier número. […] Las funciones cuadráticas también pueden ser de la forma $y = ax^2 + bx$ con a y b constantes. La expresión general para la función cuadrática es $y = ax^2 + bx + c$. (pp. 74-75)

También, se solicita a los alumnos elaborar una tabla de valores que represente a una función dada y que incluya valores consecutivos de x. Por último, los autores de este libro intentan hacer reflexionar al alumno, que en una función cuadrática siempre se obtienen valores negativos y positivos.

En el segundo bimestre se discute el tema "Factorización". Se retoma el uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones, pero ahora dichas ecuaciones se resuelven usando la factorización. Los autores mencionan que:

> La factorización es una herramienta muy útil en la solución de ecuaciones cuadráticas. Una **ecuación igualada a cero** [negritas en el original] puede factorizarse para igualar a cero cada factor por separado y encontrar el valor o los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación. Es importante recordar que las soluciones a una ecuación no siempre resuelven el problema que ésta modela, pues a veces el valor no satisface las condiciones del problema. (p. 136)

En el tercer bimestre se estudian temas relacionados con funciones cuadráticas, como: "Aplicación de funciones", "La fórmula general", "Graficas de funciones" y "Gráficas y expresiones algebraicas". Al estudiar el tema Aplicación de funciones, los autores del libro, pretenden que los alumnos reconozcan en diferentes situaciones y contextos de la Física, la Biología, la Economía, y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representen la regla que modela esta variación mediante una tabla de valores, o bien, una expresión algebraica. Durante la secuencia de actividades propuestas por ellos, se plantean preguntas, como: ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente?, ¿Cómo varía la variable dependiente cuando la variable independiente cambia?, etc. Sin embargo, son pocos los problemas, que aquí se proponen;

que involucran funciones cuadráticas, dado que la mayoría son modelados con funciones lineales.

El propósito de estudiar el tema: "La fórmula general" es que los alumnos utilicen ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones (problemas) y resolverlas, usando esta fórmula. En un principio, los autores proponen un problema contextual y piden al alumno encontrar la ecuación cuadrática que modela la situación, y después resolverla por el método que ellos ya conocen (factorización o ensayo y error), sin embargo, se proponen problemas difíciles de resolver usando el método de factorización, por lo que, los autores explican el procedimiento para obtener una fórmula general que permita resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática.

Al respecto, los autores afirman que: la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (donde $a \neq 0$ es el coeficiente del término cuadrático, b el coeficiente del término lineal y c el término constante) se utiliza para resolver ecuaciones cuadráticas y se llama fórmula general. Este nombre se debe a que funciona para resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, independientemente de que éstas tengan dos soluciones, una solución o ninguna. Tampoco importa si sus coeficientes son negativos o positivos, enteros o fraccionarios, o incluso el cero (excepto a).

Después de introducir la fórmula general, los autores proponen diferentes ejercicios que consisten en encontrar la solución de una ecuación cuadrática dada, por la fórmula general o resolver un problema contextual que implica encontrar la ecuación cuadrática que modela la situación y resolverla por la fórmula general. Además, los autores añaden que:

> En la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, el valor que se encuentra dentro de la raíz, que se calcula como $b^2 - 4ac$, se llama **discriminante** [negritas en el original]. El valor del discriminante puede ser un número positivo, uno negativo o cero. De dicho valor depende el número de soluciones de la ecuación, que pueden ser dos, una [doble] o ninguna. (p. 32)

Por último, los autores proponen una actividad en donde se presentan las soluciones de una ecuación cuadrática igualada a cero como los valores de x donde se interseca la gráfica de la función cuadrática (parábola) con el eje x. En el tema Gráficas de funciones, los alumnos aprenden a interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no

lineales para modelar diversas situaciones (problemas). En esta secuencia de actividades, los autores proponen un problema contextual el cual se modela con una tabla de valores o una ecuación algebraica. Dicha tabla o ecuación es representada en una gráfica, y después es analizada; para ello, los autores plantean ciertas preguntas que llevan al alumno a apropiarse de conceptos como: dominio, rango, máximo, mínimo, intervalos crecientes y decrecientes, función negativa y positiva.

El último tema del libro relacionado con funciones cuadráticas, es Gráficas y expresiones algebraicas de curvas, en el cual se pretende establecer la relación que existe entre la forma y la posición de la curva de funciones no lineales y los valores de las literales de las expresiones algebraicas que definen a estas funciones. Para enseñar dicho tema, los autores proponen que los alumnos grafiquen funciones de la forma: $y = ax^2$, y observen que:

> Las gráficas de las funciones de la forma $\boldsymbol{y = ax^2}$ [negritas en el original] son parábolas verticales, cuyo vértice está en el origen, es decir, en el punto $(0,0)$. Si el coeficiente a es positivo, la parábola abre hacia arriba; por el contrario, si es negativo, la parábola abre hacia abajo.
>
> Cuanto más grande sea el valor de a (sin su signo), más cerrada será la parábola. Cuanto más reducido sea el valor de a (sin su signo), más abierta será la parábola. (p. 96)

Además, los alumnos deben graficar funciones de la forma $y = ax^2 + b$, y observar que las gráficas de este tipo de funciones son parábolas verticales; cuyo vértice está en el punto $(0, b)$. Si el valor de b es positivo, el vértice se localiza por arriba del eje x. Si el valor de b es negativo, el vértice se encuentra por debajo del eje x. Por último, se pide a los alumnos que grafiquen funciones de las formas: $y = a(x + c)^2$ y $y = a\,(x + c)^2 + d$, con la finalidad de que observen lo pasa con las gráficas de las funciones al variar los coeficientes $a, c\ y\ d$. Como complemento de estas actividades, los autores, piden a los alumnos que unan ciertas expresiones algebraicas con la gráfica que mejor las represente.

3.4. Estudio del concepto de función cuadrática contenido en el programa de estudios

En esta sección se revisa y discute el contenido matemático y didáctico, relacionado con funciones cuadráticas, del programa de estudios oficial, diseñado por la SEP, para organizar el aprendizaje de los alumnos de nivel básico (secundaria). El programa de estudios, de

tercer grado, está dividido en cinco bloques (Bloque I, II, III, IV, y V) que deberán ser estudiados durante un año. Cada bloque se organiza para su estudio en tres niveles de desglose. El primero corresponde a los ejes, el segundo a los temas y el tercero a los contenidos. Para secundaria se consideran tres ejes, que son: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida; y Manejo de la información.

De cada uno de los ejes se desprenden varios temas y para cada uno hay una secuencia de contenidos que van de menor a mayor dificultad. Los temas son grandes ideas matemáticas cuyo estudio requiere un desglose más fino (los contenidos), y varios grados o incluso niveles de escolaridad. En el caso de la educación secundaria se consideran nueve temas, y la mayoría inicia desde la educación primaria. Dichos temas son: Números y sistemas de numeración, Problemas aditivos, Problemas multiplicativos, Patrones y ecuaciones, Figuras y cuerpos, Medida, Proporcionalidad y funciones, Nociones de probabilidad, y Análisis y representación de datos. Los contenidos son aspectos muy concretos que se desprenden de los temas, cuyo estudio requiere de entre dos y cinco sesiones de clase.

En los Bloques I, II, III y V se propone el estudio de funciones cuadráticas en los temas: Patrones y ecuaciones, y Proporcionalidad y funciones, de los ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico, y Manejo de la información. En el Bloque I, para estudiar el tema Patrones y ecuaciones, el programa de estudios, propone resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas. Para estudiar el tema Proporcionalidad y funciones, el programa de estudios pretende que los alumnos representen de manera tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Al inicio del Bloque II, en el tema Patrones y ecuaciones, el programa de estudios plantea que los alumnos deberán usar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando factorización. En el Bloque III, para este mismo tema, se propone que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general. Además al final de este Bloque, para estudiar el tema Proporcionalidad

y Funciones, el programa de estudios propone que los alumnos lean y construyan gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Por último, en el Bloque V, en el tema Patrones y ecuaciones, los alumnos resuelven problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones y se les pide, diseñen un problema a partir de una ecuación dada. En el tema proporcionalidad y funciones, los alumnos analizan situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Se puede observar que en los cinco bloques que comprende el programa de estudios de tercer grado, los contenidos se organizan de tal manera que los alumnos vayan accediendo a ideas y recursos matemáticos cada vez más complejos. Por ejemplo, en el tema Patrones y ecuaciones, conforme se avanza en los bloques, la manera de resolver las ecuaciones cuadráticas, que modelan ciertas situaciones problemáticas, es diferente, ya que en el primer bloque se resuelven utilizando procedimientos personales, en el segundo bloque usando el método de factorización y en el tercer bloque con la fórmula general. Por último en el quinto bloque se proponen problemas que pueden resolverse por cualquiera de los métodos ya mencionados.

Al estudiar el tema Proporcionalidad y funciones, se espera que el alumno analice información contenida en una tabla, en una relación algebraica o en una gráfica de variación cuadrática, sin embargo, no se propone un contenido en donde se analicen estas tres representaciones (de variación cuadrática) de manera conjunta. Además no se menciona, de manera explícita, el estudio de nociones matemáticas como: máximo, mínimo, función creciente, función decreciente, etc. por lo que el aprendizaje de estos conceptos podría no manifestarse.

3.5. Diseño y descripción de las Actividades

En la presente investigación se diseñaron e implementaron secuencias de actividades en los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico cuyo propósito es promover en los estudiantes la construcción del concepto de función cuadrática. El diseño de estas secuencias se realizó siguiendo los principios teóricos del marco descrito en el capítulo anterior, Abstracción en

Contexto (AiC), el cual plantea que el diseño de las actividades debe ofrecer oportunidades para que la abstracción se produzca. Según Dreyfus et. al. (2015) el diseño de actividades tiene la intención de crear una jerarquía didáctica dirigida a la reorganización vertical del conocimiento de los estudiantes.

Se diseñaron en total tres Actividades: (1) Terreno de Área máxima, (2) Cuadrado inscrito en otro cuadrado de área mínima y (3) Ancho del borde de un mantel (véase Apéndice). Las secuencias están estructuradas jerárquicamente de tal manera que cada actividad introduce nuevos conceptos que se desea construyan los estudiantes, los cuales evolucionan a partir de la actividades anteriores.

Como se mencionó en párrafos precedentes, la secuencia de actividades tiene como objetivo principal promover en los estudiantes la construcción del concepto de función cuadrática para ello los alumnos deberán encontrar la función cuadrática que modela la situación (expresión algebraica) y relacionar nociones de variación, dominio, gráfica, punto máximo, punto mínimo (vértices) de la gráfica de la función (parábola) y raíces de una función cuadrática. Las actividades se conformaron en cuatro partes de trabajo.

- Parte de trabajo con lápiz-y-papel: esta parte tiene como objetivo que los alumnos se familiaricen con el problema y reconozcan conceptos matemáticos vistos anteriormente, que puedan utilizar en la solución del problema.
- Parte del trabajo con material concreto: el objetivo principal de esta parte es que los alumnos comparen los resultados obtenidos en la parte de trabajo con lápiz-y-papel con los obtenidos en la práctica, usando el material concreto, de modo que comprendan mejor el problema a tratar. Esta parte del trabajo solo se añadió en la Actividad 1.
- Parte del trabajo con tecnología así como con lápiz-y-papel (1): para contestar esta parte del trabajo se diseñaron en el software Geogebra tres escenarios, uno para cada Actividad. Dichos escenarios representaban un modelo dinámico del problema a tratar. El objetivo principal de esta parte del trabajo fue ofrecer a los estudiantes más recursos para potenciar su aprendizaje, a través de un mayor y fácil acceso a las diferentes representaciones (tabular y gráfica) de una función cuadrática. En esta parte, también se buscó que los estudiantes, haciendo uso de los escenarios

diseñados, profundizaran en la comprensión de conceptos vinculados con las actividades como: variación, dominio, gráfica, punto máximo, punto mínimo y raíces de una función cuadrática.

- Parte del trabajo con tecnología así como con lápiz-y-papel (2): en esta parte del trabajo se pretende que los alumnos utilicen el registro de representación algebraica para encontrar la función cuadrática que modela la situación. Además se les pide grafiquen la función cuadrática y encuentren la solución al problema de manera gráfica. Otro de los objetivos de esta parte es que los alumnos comparen y analicen los resultados obtenidos en las otras partes del trabajo (anteriores a ésta) con los resultados conseguidos en esta parte.

Estas Actividades, en general contienen tareas que permiten identificar en qué momento los alumnos construyen el concepto de función cuadrática, a partir de la reorganización de acciones epistémicas como Reconocimiento y Edificación manifestadas en la resolución de estas tres actividades.

3.5.1. Análisis *a priori* de las Actividades.

En esta sección se intenta prever y analizar las posibles trayectorias de aprendizaje de los estudiantes, cuando ellos responden a las preguntas planteadas en cada una de las actividades. De acuerdo con el modelo Teórico AiC, el objetivo del análisis *a priori* es identificar esos elementos del conocimiento destinados para el diseño [de las actividades] teniendo como hipótesis de trabajo, que las nuevas construcciones emergen cuando los estudiantes realizan tareas que están en estrecha correspondencia con los elementos de conocimiento identificados. Dreyfus et. al. (2015) menciona que el análisis a priori sirve como una hipótesis de trabajo que puede ser posteriormente confirmada o modificada por el micro-análisis de los datos. Estos autores mencionan que la pregunta más relevante en el análisis a priori es: ¿Qué conocimiento es útil o incluso necesario para hacer frente a la tarea y para completarla con la satisfacción del profesor o del diseñador?

Las secuencias de actividades fueron diseñadas para estudiantes de tercero de secundaria, cuya anterior experiencia de aprendizaje no incluyo tareas en las que estudiaran a las funciones cuadráticas como covariación, además los estudiantes no tenían conocimientos sobre los conceptos de: dominio, rango, punto máximo, punto mínimo de

una función cuadrática, por lo que, con el diseño de estas actividades se pretende que los alumnos construyan nociones sobre estos conceptos matemáticos y las relacionen. Además, los puntos donde la función se anula fueron vistos, por los estudiantes, como las soluciones a una ecuación cuadrática, obtenidas por diferentes métodos (factorización y fórmula general) y no como los puntos de intersección de la gráfica de la función cuadrática (parábola) con el eje de las abscisas.

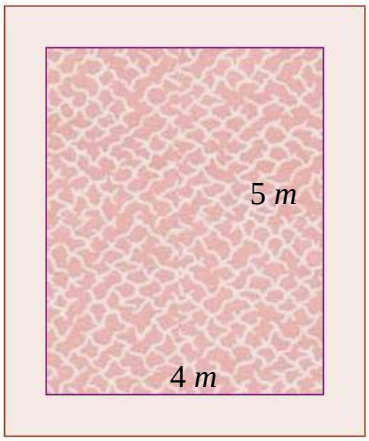
3.5.2. Análisis *a priori* de la Actividad 3.

Contenido: Utilizando funciones cuadráticas, calcular el ancho del borde de un mantel.

Objetivo: Ser capaz de encontrar la función cuadrática que modela la situación y relacionar nociones de variación, dominio, gráfica (parábola) y raíces de una función cuadrática.

Roberto tejió un mantel de forma rectangular que mide 4 m de largo por 5 m de ancho. Él tiene 10 m^2 de tela para crear un borde alrededor del mantel (véase la figura). ¿Qué tan ancho debe ser el borde para usar toda la tela? (El borde debe tener el mismo ancho en los cuatro lados). (Adaptado de:

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L2_T1_text_final_es.html).



Parte I. Actividad con lápiz-y-papel

1. ¿Cómo calculas el perímetro de un rectángulo cualquiera? Justifica tu respuesta.

a) Sumando la longitud de sus lados. b) $2a + 2b$, donde a es la longitud de la altura (ancho) y b la longitud de la base (largo). Para contestar esta pregunta, los alumnos tendrán que recordar la manera de cómo calcular el perímetro de un rectángulo cualquiera, ya sea empleando la fórmula pertinente, o bien, de manera verbal.

La intención principal de esta pregunta es que los alumnos reconozcan que el perímetro de un rectángulo es el contorno de una figura y que recuerden cómo calcularlo.

2. ¿Cómo calculas el área de un rectángulo cualquiera? Justifica tu respuesta.

a) Multiplicando la longitud de la base (largo) por la longitud de la altura (ancho).
b) $A = b * a$, donde b es la longitud de la base (largo) y a es la longitud de la altura (ancho).

Para contestar esta pregunta, los alumnos deberán recordar la manera de cómo calcular el área de un rectángulo cualquiera, ya sea con una fórmula matemática o de manera verbal.

El objetivo principal de esta pregunta es que los alumnos reconozcan el concepto matemático de área de un rectángulo, como la superficie contenida en la figura y que recuerden cómo calcular dicha magnitud.

3. Calcula el área y el perímetro del mantel rectangular que mide 4 *m*de largo por 5 *m* de ancho. Justifica tu respuesta.

El área del mantel rectangular es de 20 m^2 y el perímetro es de 18 m.

Para resolver esta tarea, los alumnos deberán tener conocimientos acerca del perímetro y del área de un rectángulo; por lo que recurrirán a las preguntas 1 y 2 precedentes.

4. ¿Qué significa que Roberto tenga 10 metros cuadrados de tela para crear un borde alrededor del mantel? Justifica tu respuesta.

Significa que Roberto tiene un pedazo de tela cuya superficie (área) es de 10 m^2.

Parte II: Actividad con tecnología así como con lápiz-y-papel

5. Explora el modelo dinámico "Actividad 3" y explica por qué este modelo funciona como una representación del problema.

Se pretende que el alumno observe y analice que al mover el punto en el deslizador el ancho del borde cambia, por lo que se quiere, encontrar la medida del ancho del borde de tal manera que el área del borde sean 10 m^2.

6. Explora el modelo dinámico "Actividad 3" y coloca en el recuadro una ☑ a las longitudes que varían al cambiar el ancho del borde y una ☒ a las longitudes que permanecen constantes.

☐ Largo del mantel.

☐ Ancho del mantel.

☐ Área en metros cuadrados del mantel.

☐ Largo del mantel con borde.

☐ Ancho del mantel con borde.

☐ Área del mantel con borde.

☐ Área del borde.

El alumno deberá mover el punto, en el deslizador, perteneciente al ancho del borde y observar qué magnitudes varían y cuáles no.

El objetivo principal de esta tarea es que al explorar el modelo dinámico, los alumnos observen qué magnitudes son dependientes (y cuales no lo son) del movimiento del punto, en el deslizador, perteneciente al ancho del borde.

7. Explorando el modelo dinámico, ¿qué valores puede tomar el ancho del borde? Justifica tu respuesta.

En el modelo dinámico el ancho del borde puede variar de 0 *m* (sin ser cero porque si fuera cero no habría borde) a 3 *m*. Aunque en realidad el ancho del borde podría ser una magnitud mayor que 3 *m*.

El objetivo principal de esta pregunta es que los alumnos observen que la longitud del ancho del borde puede ser un número mayor que cero (sin ser cero). Dicha tarea servirá para introducir la noción de dominio de una función.

8. Utiliza el modelo dinámico y completa la siguiente Tabla con los valores solicitados.

Ancho del borde	Largo del mantel con borde	Ancho del mantel con borde	Área del mantel con borde	Área del borde

El objetivo principal de esta tarea es que, al explorar el modelo dinámico, los alumnos escojan diferentes magnitudes para el ancho del borde, y completen la tabla de valores solicitada.

9. Dado el ancho del borde ¿cómo obtienes el largo del mantel con borde? Justifica tu respuesta.

Para obtener el largo del mantel con borde, los alumnos deberán sumar: el doble de la magnitud del ancho del borde más 4 m.

10. Dado el ancho del borde ¿cómo obtienes el ancho del mantel con borde? Justifica tu respuesta.

Para obtener el ancho del mantel con borde los alumnos deberán sumar: el doble de la magnitud del ancho del borde más 5 m.

11. Dado el ancho del borde ¿cómo obtienes el área del mantel con borde? Justifica tu respuesta.

Para obtener el área del mantel con borde los alumnos deberán multiplicar: el largo del mantel con el borde por el ancho del mantel con el borde.

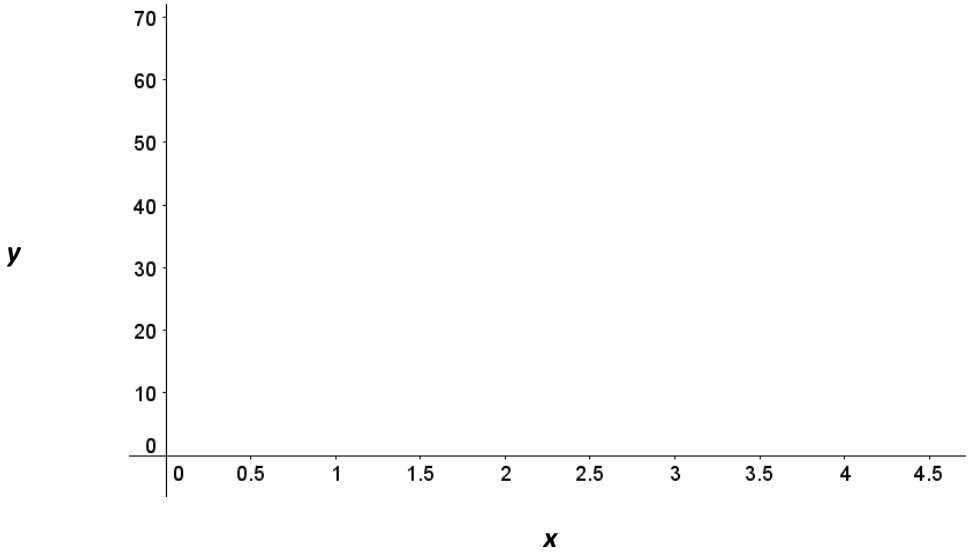
12. Dado el ancho del borde ¿cómo obtienes el área del borde? Justifica tu respuesta.

Para obtener el área del borde los alumnos deberán restar: el área del mantel ya con el borde menos 20 m^2 (área del mantel).

13. Con base en los datos de la Tabla de valores precedente ¿cuál es la magnitud del ancho del borde correspondiente a los 10 m^2 del área del borde? Justifica tu respuesta.

Con esta pregunta se pretende que los alumnos encuentren el ancho del borde (0.5 m) de tal manera que se utilicen los 10 m^2 de tela asignados al borde del mantel. Para contestar esta pregunta correctamente los alumnos tendrán que haber escrito en la Tabla de valores la magnitud del ancho del borde igual a 0.5 m y haber realizado todas las operaciones correctamente.

14. Con los datos de la Tabla de valores precedente, grafica los puntos que tengan como coordenada *x* (ancho del borde) y como coordenada *y* (área del borde).



Para resolver esta actividad, los alumnos tendrán que hacer uso de sus conocimientos previos acerca de cómo graficar puntos en un plano cartesiano.

Se pretende que los alumnos grafiquen puntos pertenecientes a una parábola cóncava hacia arriba. A diferencia de las dos primeras actividades, en esta tarea no es fácil observar que la gráfica es una parábola dado que para magnitudes positivas del ancho del borde, la función "área del borde" es creciente.

15. Observa el punto P en el modelo dinámico. ¿A qué longitud corresponde la coordenada *x* de ese punto? ¿A qué longitud corresponde la coordenada *y* del mismo punto? Justifica tu respuesta.

El objetivo de esta tarea es que los alumnos reconozcan que la coordenada *x* del punto P corresponde a la longitud del ancho del borde y que la coordenada *y* corresponde al área del borde. Este hecho se puede observar al mover el punto en el deslizador.

16. Activa el "rastro" del punto P y mueve el punto en el deslizador. Explica todo lo referente a la gráfica generada por este punto.

Se pretende que los alumnos observen y analicen distintas relaciones, como:

a) La gráfica generada por el punto P es un conjunto de puntos con coordenadas

x, la longitud del ancho del borde y con coordenadas *y*, el área del borde.

b) La gráfica muestra la variación del área del borde al cambiar la longitud del ancho del borde. Específicamente, muestra que al incrementar el ancho del borde el área del borde se incrementa.
c) La gráfica muestra que el área del borde es igual a 10 m^2 cuando el ancho del borde es igual a 0.5 m.
d) La gráfica continua es parte de una parábola cóncava hacia arriba.
e) La longitud del ancho del borde es una magnitud mayor que cero, es decir, que el dominio de la función área es el intervalo abierto de 0 a infinito.
f) El área del borde es una magnitud mayor que cero, es decir, que el rango de la función área es el intervalo abierto de 0 a infinito.

17. Explica las semejanzas y diferencias de la gráfica generada por el punto P y la obtenida en la pregunta 14.

Con esta tarea se pretende que los alumnos observen que la gráfica generada por el punto P es continua, mientras que la otra (pregunta 14) es discreta, ya que los puntos de la gráfica de la pregunta 14 son únicamente aquellos que se encuentran en la Tabla de valores precedente.

18. ¿Qué relación existe entre la longitud del ancho del borde y su área? Justifica tu respuesta.

Para contestar esta pregunta los alumnos deben observar que cuando cambia la longitud del ancho del borde cambia su área; además, se puede observar que conforme incrementa el ancho del borde, el área del borde también lo hace.

19. Observa la gráfica generada por el punto P (al mover el punto en el deslizador) ¿Qué tan ancho debe ser el borde para usar los 10 m^2 de tela? ¿Coinciden estas respuestas con lo justificado en la pregunta 13? Justifica tu respuesta.

El ancho del borde deberá ser de 0.5 *m* para que Roberto use toda la tela asignada para el borde.

El objetivo de estas preguntas es que los alumnos comparen la respuesta obtenida en la pregunta 13 con la respuesta de esta pregunta, y que comenten qué método es mejor y por qué.

Parte III: Actividad con tecnología así como con lápiz-y-papel

20. Asígnale una letra al ancho del borde y escribe una expresión algebraica para el largo del mantel con borde. Justifica tu respuesta.

Para que los alumnos resuelvan esta tarea tendrán que recurrir a sus conocimientos

previos acerca del significado de expresiones algebraicas.

El objetivo principal de esta tarea es que los alumnos asignen un letra del abecedario (la que quieran) para la longitud del ancho del borde y escriban la relación $4+2x$, donde x es la longitud del ancho del borde.

21. Utilizando la misma letra, de la pregunta precedente, para el ancho del borde, escribe una expresión algébrica para el ancho del mantel con borde. Justifica tu respuesta.

Para que los alumnos resuelvan esta tarea tendrán que recurrir a sus conocimientos previos acerca del significado de expresiones algebraicas.

El objetivo principal de esta tarea es que los alumnos escriban la relación $5+2x$, donde x es la longitud del ancho del borde.

22. Con las expresiones para el largo y ancho del mantel con borde, en términos de la misma letra escogida, escribe una expresión algebraica para el área del mantel con borde. Justifica tu respuesta.

Para que los alumnos resuelvan esta tarea, tendrán que recurrir a sus conocimientos previos acerca del cálculo del área de un rectángulo.

El objetivo de esta tarea es que los alumnos escriban la expresión:

$$A = (5 + 2x)(4 + 2x) = 20 + 18\,x + 4x^2$$

23. Escribe una expresión algebraica para el área del borde del mantel en términos de la misma letra escogida. ¿Qué necesitas hacerle a la expresión algebraica obtenida en la pregunta 22 para obtener la expresión algebraica que representa el área del borde del mantel? Justifica tu respuesta.

Para obtener la expresión algebraica que representa el área del borde del mantel, es necesario restarle el área del mantel al área del mantel con el borde, es decir:

$$A_B = (4x^2 + 18x + 20) - (20) = 4x^2 + 18x$$

24. Grafica, usando Geogebra, la expresión que obtuviste en la pregunta 23.

Se pretende que los alumnos ingresen en “entrada”, la expresión algebraica que obtuvieron en la pregunta 23, con el objetivo de observar la gráfica de la función área del borde.

25. Conociendo que Roberto tiene 10 metros cuadrados para crear el borde del mantel, encuentra gráficamente la solución al problema. Justifica tu respuesta.

Dado que la gráfica de la pregunta 24 pertenece a la función Área, y ésta es igual a 10 metros cuadrados cuando el ancho del borde es igual a -5 y a 0.5; es claro que el ancho del borde no puede ser -5 porque en tal caso no habría borde. Por lo tanto, el ancho del borde deberá ser de 0.5 *m* para poder usar toda la tela.

26. Qué información te proporcionan los puntos con coordenadas negativas de la gráfica, correspondiente al área del borde, bosquejada por Geogebra? ¿Tiene sentido hablar de ellos? Justifica tu respuesta.

En esta pregunta se pretende que los alumnos analicen que los puntos con coordenadas negativas en la gráfica correspondiente a la expresión algebraica significan áreas del borde negativas y longitudes del borde negativas; por lo que, hablar de estos puntos no tiene sentido en el contexto de este problema.

27. Podrías encontrar gráficamente la solución al problema, pero de una forma distinta de la anterior ¿cómo lo harías? Justifica tu respuesta.

Graficando la expresión algebraica: $$A_B = 4x^2 + 18x - 10$$ Y encontrando las raíces de dicha función, las cuales son -5 y 0.5.

3.6. Implementación de las Actividades y recolección de datos

La implementación de las actividades y la toma de datos se llevaron a cabo dentro de las instalaciones de la escuela secundaria en la que están inscritos los estudiantes. Los 16 alumnos de tercer grado de educación secundaria fueron colocados en un salón con las herramientas necesarias para resolver las diversas tareas contenidas en las actividades diseñadas para la investigación. Se implementaron tres actividades. La primera parte de las actividades 1 y 2 fueron resueltas de manera individual y el resto en equipos mixtos de cuatro estudiantes; con el fin de enriquecer el análisis y la reflexión de las actividades, mediante el debate y la discusión de sus ideas. Mediante esta forma de trabajo, con los alumnos, se pretendía consolidar la justificación de sus respuestas. Para la selección de los equipos, se le pidió apoyo a la profesora del área de matemáticas. La profesora seleccionó

alumnos de nivel regular y alto en el desempeño de las matemáticas, para que conformaran los equipos. La Actividad 3 se implementó sólo a los cuatro alumnos que mostraron mayor desempeño en el trabajo con las actividades 1 y 2. El periodo de duración de las tres actividades fue de: seis sesiones de 90 minutos cada una, aproximadamente, de acuerdo con la disponibilidad de horarios de los estudiantes.

Para la recolección de datos, se utilizaron hojas de trabajo, las cuales contenían las respuestas por escrito de los estudiantes así como las grabaciones y los vídeos tomados durante la implementación de las actividades. En ese periodo, el investigador estuvo observando la resolución de cada una de éstas e interactuando con los estudiantes con la intención de que reflexionaran cuando alguna de sus respuestas no era clara o acertada.

Al inicio de la implementación de las dos primeras actividades, el investigador entregó a cada alumno la primera parte de las actividades para que fueran resueltas de manera individual, y para contestar las partes restantes, los alumnos, conformaron equipos; además, se les entregó una tableta con la que interactuaron durante toda la sesión. En la actividad 3, los alumnos trabajaron en equipo, con la ayuda de la herramienta tecnológica.

Al llevar acabo las actividades, se pidió a los alumnos que usaran tinta negra, para evitar que pudieran borrar sus respuestas o cualquier anotación, además de pedirles no rayar ni tachar cualquier resultado; sólo encerrar en un círculo la respuesta incorrecta y volver a escribir su nueva respuesta. Durante la implementación de las actividades, siempre se buscó que los alumnos se sintieran en un ambiente de confianza para expresar cualquier duda o idea. En el siguiente capítulo de esta tesis se expone el análisis y discusión de los datos recopilados así como los resultados obtenidos en la investigación.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo, se analizan los datos y se discuten los resultados obtenidos durante la implementación de las actividades, en torno a la comprensión del concepto de función cuadrática. Los datos analizados surgieron del trabajo de cuatro estudiantes (a quienes se nombran como A, B, C y D), quienes participaron en esta investigación y cuyas acciones permitieron observar los procesos de abstracción referentes al concepto de función cuadrática.

Cabe señalar que en las actividades 1 y 2, los cuatro estudiantes trabajaron en diferentes equipos, con diferentes compañeros y en la actividad 3 trabajaron de manera conjunta. Por lo que, en las dos primeras actividades se analizó el trabajo de los cuatro estudiantes de manera individual y en la actividad 3 se analizó el trabajo en equipo. Para el análisis de datos se seleccionaron: a) las respuestas de los estudiantes cuando resolvieron las secuencias de actividades y b) los extractos de los episodios registrados en video-grabaciones ocurridos durante las discusiones de los equipos de estudiantes al resolver las tareas propuestas en las actividades.

En el análisis de datos se utilizan como categorías las acciones epistémicas observables del modelo *RBC+C*, las cuales de acuerdo con Dreyfus et. al. (2015) describen y analizan los procesos por los que las nuevas construcciones de los alumnos surgen como reorganizaciones verticales de construcciones anteriores en el contexto actual, así como el uso que los alumnos dan a estas nuevas construcciones. Por lo tanto, las categorías de análisis son: Reconocimiento, Edificación, Construcción y Consolidación. Las cuales permitieron analizar y documentar los procesos de abstracción que sobre el concepto de función cuadrática llevan a cabo los estudiantes, así como el inicio de su consolidación.

4.1. Categorías de análisis

En la siguiente tabla aparecen las categorías de análisis así como su descripción.

Categoría	Descripción
Reconocimiento (R)	Lleva al alumno a darse cuenta de que una construcción específica del conocimiento anterior es relevante en la situación en cuestión.
Edificación (B)	Comprende el uso y combinación de constructos reconocidos, con el fin de lograr un objetivo localizado, tales como la realización de una estrategia, una justificación o la solución de un problema.
Construcción (C)	Acción epistémica central de la abstracción matemática. Consiste en el montaje y la integración de las construcciones anteriores por reorganización vertical para producir un nuevo constructo. Se refiere a la primera vez que la nueva construcción es utilizada por el alumno.
Consolidación (+C)	Es un proceso sin fin a través del cual los estudiantes toman conciencia de su construcción, y el uso de la construcción se hace más inmediato y evidente por sí mismo.

4.2. Análisis de la Actividad 1

4.2.1. Categorías: Reconocimiento (R) y Edificación (B).

Durante la implementación de las tareas de la actividad 1, los estudiantes mostraron evidencia de las primeras acciones de Reconocimiento y Edificación. En la parte I de esta actividad, se les pidió a los estudiantes escribir cómo dividirían un alambre de *50 m* de manera que formaran un rectángulo cualquiera. Los estudiantes A y B propusieron dividir el alambre en cuatro partes, dos de *15 m* y dos de *10 m*, por lo que, se observa que estos estudiantes mostraron acciones de Reconocimiento, al identificar que una figura rectangular tiene cuatro lados, dos de longitud a y dos de longitud b con $a \neq b$ y al idetificar que la suma de las longitudes de estos cuatro lados es igual a 50 m. Aunque existen diferentes

rectángulos que cumplen la condición de que la suma de sus lados es igual a 50 m, estos estudiantes se limitaron a mostrar solo un rectángulo que cumpliera con esta condición. En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran las respuestas de los estudiantes A y B.

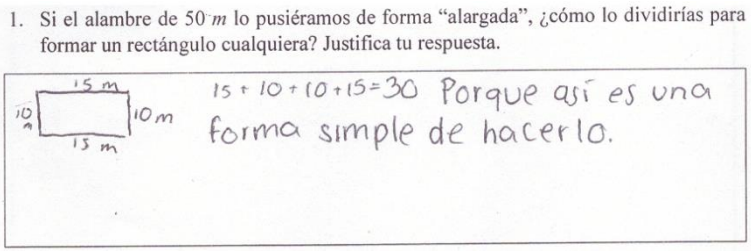


Figura 4.1. Justificación del estudiante A, de cómo dividir un alambre de 50 m en un rectángulo cualquiera, Parte I.

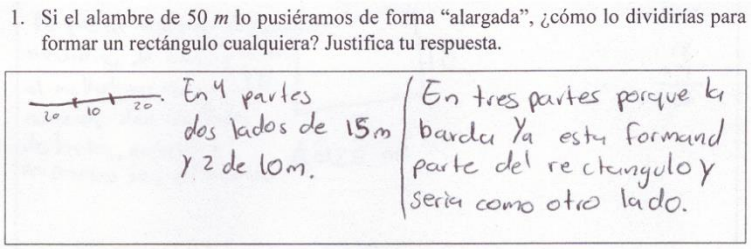


Figura 4.2. Justificación del estudiante B, de cómo dividir un alambre de 50 m en un rectángulo cualquiera, Parte I.

En la figura 4.3 se muestra la respuesta dada por el estudiante C. Se puede ver que este estudiante reconoció que existen diferentes rectángulos, con diferentes medidas, que cumplen la condición de que la suma de las longitudes de sus lados es igual a $50\,m$, sin embargo, no hay evidencia explicita de que el estudiante haya reconocido una de las características principales de los lados de una figura rectangular (dos de longitud a y dos de longitud b con $a \neq b$).

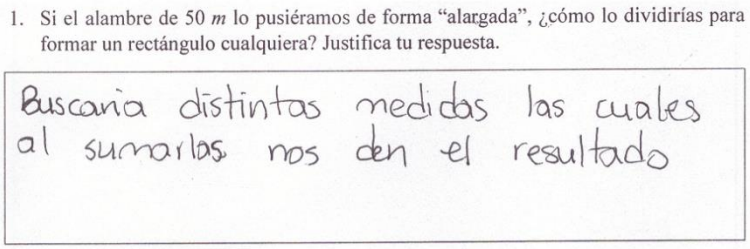
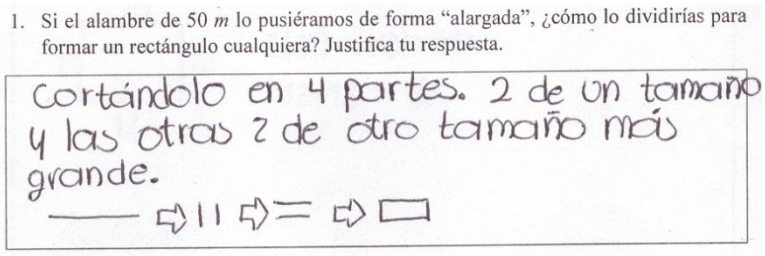


Figura 4.3. Justificación del estudiante C, de cómo dividir un alambre de 50 m en un rectángulo cualquiera, Parte I.

Por último, el estudiante D manifestó acciones de Reconocimiento de una de las características principales de los lados de una figura rectangular al responder que: "cortaría

el alambre en cuatro partes, dos de un tamaño y las otras dos de otro tamaño más grande". Además, en su respuesta (véase la figura 4.4) se observa que el estudiante dibujó el alambre de manera alargada, y después lo convirtió en cuatro pedazos (como lo especifica en su respuesta) y de esta forma construyó el rectángulo. Por lo que, además de reconocer una de las característica de los lados de una figura rectangular, reconoció el constructo de Perímetro. En general, todos los estudiantes reconocieron el constructo de Perímetro y tres de los cuatro estudiantes reconocieron una de las características principales de los lados de una figura rectangular (dos de longitud a y dos de longitud b con $a \neq b$).


1. Si el alambre de 50 m lo pusiéramos de forma "alargada", ¿cómo lo dividirías para formar un rectángulo cualquiera? Justifica tu respuesta.

Cortándolo en 4 partes. 2 de un tamaño y las otras 2 de otro tamaño más grande.

Figura 4.4. Justificación del estudiante D, de cómo dividir un alambre de 50 m en un rectángulo cualquiera, Parte I.

En las siguientes dos preguntas de la Parte I, se les pidió a los estudiantes que explicaran cómo calculan el perímetro y el área de un rectángulo cualquiera y que justificaran sus respuestas. Los cuatro estudiantes manifestaron acciones de Reconocimiento y Edificación referentes al área y perímetro de una figura rectangular. En la figura 4.5 se puede ver la respuesta dada por el estudiante A. Este estudiante reconoció que el perímetro de una figura rectangular es el contorno de ésta y que se obtiene sumando las longitudes de sus cuatro lados. Además reconoció que el área de un rectángulo es la superficie que éste ocupa, el cual se obtiene multiplicando la base por la altura. Él registra su razonamiento con notación algebraica [acciones de Edificación].

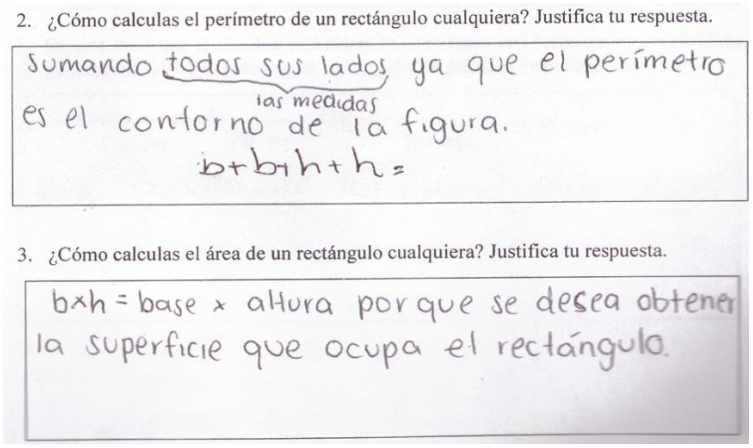


Figura 4.5. Justificación del estudiante A, de cómo calcular el perímetro y el área de una figura rectangular, Parte I.

Los estudiantes B, C y D plasmaron en sus respuestas, sus conocimientos previos acerca de cómo obtener el perímetro y el área de una figura rectangular [acciones de Reconocimiento] (véanse las figuras 4.6, 4.7 y 4.8) y justificaron su razonamiento con notación algebraica [acciones de Edificación]. Estas acciones por parte de los estudiantes dan evidencia de acciones de Reconocimiento y Edificación de los constructos de área y perímetro de una figura rectangular. En la figura 4.6 se puede ver que el estudiante B relacionó el área de una figura rectangular con la cantidad de cuadrados, de 1×1, que se encuentran dentro de esta figura [acciones de Edificación].

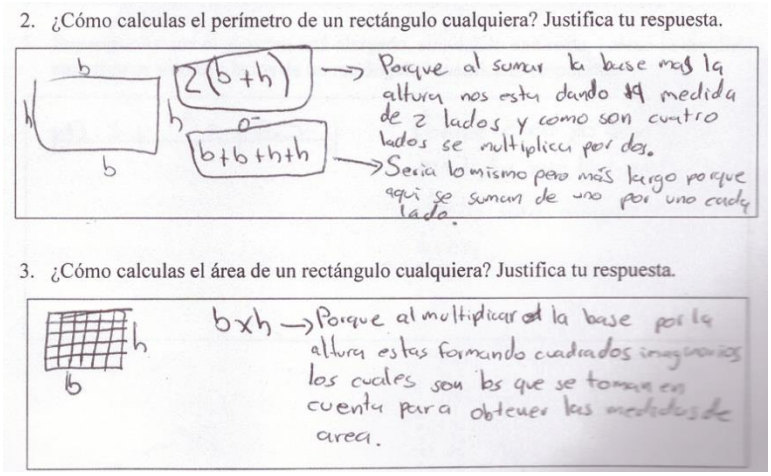


Figura 4.6. Justificación del estudiante B, de cómo calcular el perímetro y el área de una figura rectangular, Parte I.

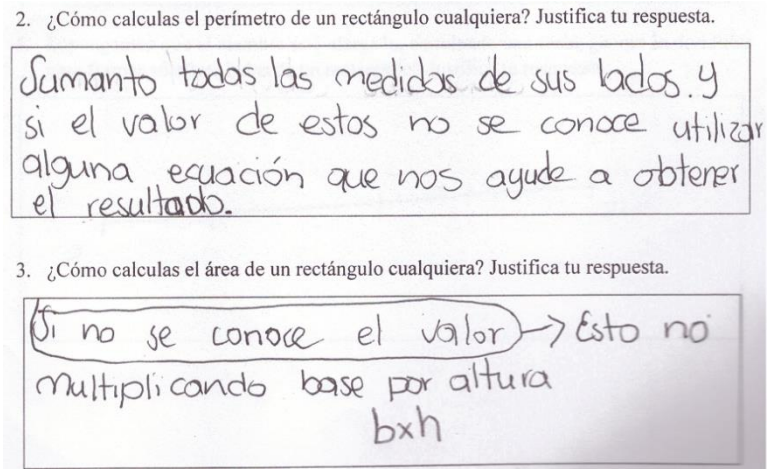


Figura 4.7. Justificación del estudiante C, de cómo calcular el perímetro y el área de una figura rectangular, Parte I.

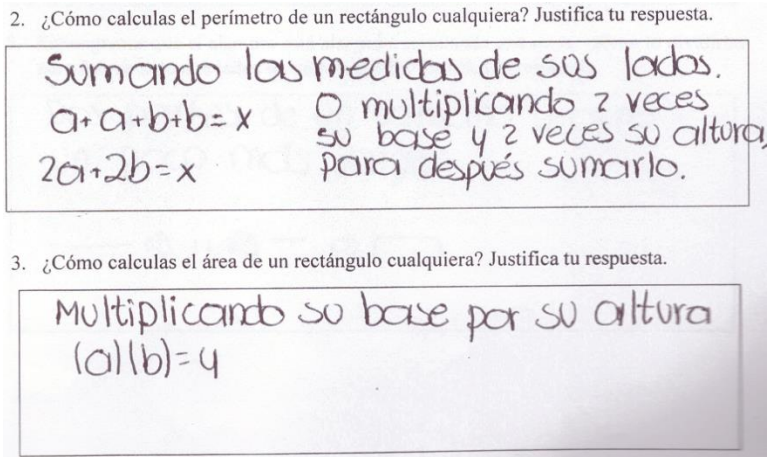


Figura 4.8. Justificación del estudiante D, de cómo calcular el perímetro y el área de una figura rectangular, Parte I.

En la pregunta 4 de la parte I de esta actividad, se les pidió a los estudiantes que dibujaran tres terrenos rectangulares distintos que tuvieran 50 m de perímetro, que explicaran como son las áreas de estos rectángulos y que justificaran sus respuestas. En esta tarea los cuatro estudiantes dibujaron tres terrenos rectangulares que cumplieran la condición y calcularon el área de cada uno de estos, reconociendo que existen rectángulos con el mismo perímetro pero con diferente área [acciones de Reconocimiento]. En la figura 4.9 se puede ver que el estudiante B justificó, el por qué las áreas son distintas [acciones de Edificación].

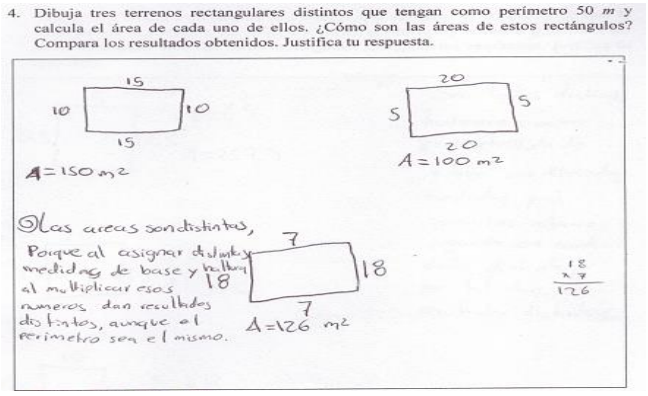


Figura 4.9. Justificación del estudiante B, del por qué las áreas de estos rectángulos son distintas, parte I.

En la última pregunta de la parte I, los cuatro estudiantes dibujaron tres terrenos rectangulares distintos que cumplieran la condición de que la suma de tres de sus lados fuera igual a *50 m* y calcularon sus áreas y perímetros, reconociendo que las áreas son distintas y los perímetros también [acciones de Reconocimiento]. Solo el estudiante B da evidencias de acciones de Edificación al justificar el por qué los perímetros y las áreas son distintos (véase la figura 4.10).

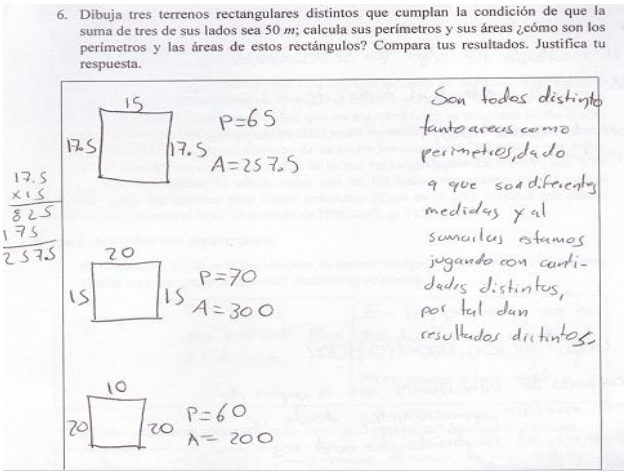


Figura 4.10. Justificación del estudiante B, del por qué las áreas y los perímetros de estos rectángulos son distintos, parte I.

En la parte II de la actividad 1 se les asigno a los estudiantes un material con el cual debían formar distintos rectángulos que cumplieran la condición de que la suma de tres de sus lados fuera *50 cm* (simulando los *50 m*), además calcular sus perímetros y sus áreas, y comparar lo escrito antes de usar el material concreto con lo observado al trabajar con él. En los siguientes párrafos se muestran distintos episodios que sucedieron mientras los

estudiantes del equipo conformado por el estudiante A resolvían la parte II. En esta parte del trabajo con material concreto, no solo se observaron acciones de Reconocimiento y Edificación, sino que, se puede ver como los estudiantes Consolidaron sus conocimientos previos. En el episodio que se muestra a continuación, se utilizan los códigos A, A1, A2 y A3 para referirse a los estudiantes que intervienen en la conversación.

[1] A: Podemos formar un rectángulo que tenga 20 *cm* de base y 10 *cm* de altura, porque si sumamos veinte más veinte más diez es igual a cincuenta [*comienza a formar un rectángulo con la regla, el estambre y las tachuelas]*.

[2] A: Mmmmj, creo que me quedo chueco. [*Extrae una escuadra de su mochila y la coloca de manera que el ángulo recto forme los vértices del rectángulo*].

[3] A: Ya está, ahora ustedes formen otro.

[4] A1: Puede ser un rectángulo de 15 de base y 20 de altura [*comienza a formarlo, utilizando la regla y la escuadra*].

[5] A2. También podemos hacer uno de 40 *cm* y 5 *cm*.

[6] A1: [*Forma el rectángulo de 40 cm de base y 5 cm de altura*].

[7] A: Has uno de 22.5 *cm* de base por 5 *cm* de altura.

[8] A1: [*Forma el rectángulo de 22.5 cm de base y 5 cm de altura*].

[9] A1: Ya con esos, ¿no?, porque creo que se pueden formar muchos.

[10] A: Ahora hay que calcular los perímetros y las áreas de los rectángulos.

[11] A2: [*Calcula el perímetro y el área de los rectángulos, escribiendo en el mesabanco las operaciones*].

[12] A2: El perímetro de éste [*señala el primer rectángulo*] es 60 cm y el área 200 cm^2, el perímetro del segundo es 60 cm y el área de 300 cm^2, el del tercero es 90 cm y 200 cm^2 y el último 55 cm y 112.5 cm^2.

[13] A1: Ya tenemos el de mayor área, es el de 300 cm^2[*señala el segundo rectángulo*].

[14] A: Pero… [*se queda pensando un instante y hace cuentas en su cabeza*] si hiciéramos más rectángulos, por ejemplo, el de base 12 y altura 26, el área seria 312 cm^2.

[15] A1: Entonces es ese el de mayor área.

[16] A: No estoy seguro [*se queda pensando un rato*].

[17] A: Pues creo que sí.

En los enunciados del [1] al [8], los estudiantes A, A1 y A2 reconocieron que un rectángulo tiene dos lados de longitud a y dos de longitd b con $a \neq b$ [acciones de Reconocimiento]. Además, en el enunciado [2] el estudiante A reconoció que los ángulos de una figura rectangular son ángulos rectos [acciones de Reconocimiento] y utilizó la escuadra para formar los vértices de los rectángulos [acciones de Edificación]. Esta última característica de los rectángulos también es reconocida por el estudiante A1 en el enunciado [4]. En el enunciado [9] el estudiante A1 observó que pueden formarse "muchos" rectángulos que cumplan la condición de que la suma de tres de sus lados sea igual a *50 cm* [acciones de Reconocimiento]. Del [10] al [12] los estudiantes A y A2 mostraron acciones de Reconocimiento y Edificación al calcular los perímetros y las áreas de todos los rectángulos formados, de esta forma consolidaron sus conocimientos acerca de estos dos constructos. En el enunciado [13] se muestra que el estudiante A1 identificó la solución al problema principal (rectángulo de mayor área) [acciones de Edificación]. Sin embargo, en [14] se puede notar que el estudiante A1 definió incorrectamente el rectángulo de mayor área, este acto ocasionó acciones de Edificación erróneas por parte de este estudiante. En el mismo enunciado ([14]) se observa que el alumno A se dio cuenta de que el rectángulo de 300 cm^2de área, no es el rectángulo de mayor área y justificó su respuesta mostrando otro rectángulo con mayor área [acciones de Edificación]. Por último, en los enunciados del [15] al [17] se puede notar la necesidad, que manifiestan los estudiantes, de crear un nuevo constructo que les ayude a visualizar todos los rectángulos que cumplen la condición de que la suma de tres de sus lados sea igual a *50 cm* para así encontrar el rectángulo de mayor área que cumpla esta condición. Según Dreyfus et. al. (2015), la necesidad de nuevos conocimientos es una etapa importante del proceso de abstracción y debe preceder al proceso de Construcción. Además, la necesidad de una nueva construcción permite el enlace entre los conocimientos previos y la futura construcción. En general en esta tarea, las discusiones entre los alumnos A, A1 y A2 fueron numerosas, sin embargo el alumno A3 se limitó a aprobar las respuestas dadas por sus compañeros.

Del mismo modo que, el equipo del estúdiate A, los otros tres equipos de estudiantes que participaron en la resolución de las secuencias de actividades, manifestaron acciones de Reconocimiento de una de las característica principales de los lados de una figura rectangular, dos de longitud a y dos de longitud b con $a \neq b$, al formar estas figuras con las medidas propuestas. También mostraron acciones de Reconocimiento y Edificación de los constructos de perímetro y área de una figura rectangular, por lo que, consolidaron estos conocimientos previos. Sin embargo, ninguno de estos tres equipos mostró acciones de Reconocimiento y Edificación de la característica de ángulos rectos de una figura rectangular. Tampoco identificaron el rectángulo de área máxima y mucho menos mostraron la necesidad de crear un nuevo constructo que les ayude a visualizar todos los rectángulos que cumplen la condición de que la suma de tres de sus lados es igual a $50\ cm$.

En la parte III de esta Actividad los estudiantes exploraron, en Geogebra, un modelo dinámico que representaba el problema a tratar. Todos los equipos de estudiantes reconocieron que el segmento $\overline{AB}$ representaba los 50 m de alambre, que el segmento $\overline{AB}$ está dividido en tres partes que formaban los tres lados del terreno rectangular y que al mover el punto C sobre el segmento $\overline{AB}$, se obtenían todos los terrenos rectangulares que cumplen la condición de que la suma de las longitudes de tres de sus lados es igual a 50 m. A continuación se muestra un extracto de un episodio referente a lo previamente comentado, que sucedió mientras los estudiantes del equipo conformado por el estudiante B exploraban el modelo dinámico. Se utilizan los códigos B, B1, B2 y B3 para referirse a los estudiantes que intervienen en la conversación.

[18] B1: Este segmento mide 50 m [*señala el segmento AB*], por lo tanto, representa el alambre antes de ser doblado.

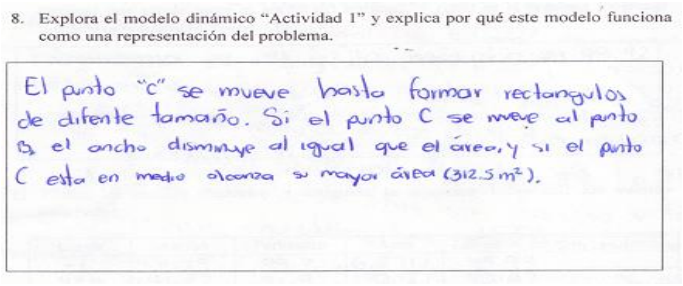
[19] B: Ese alambre se divide en tres y forman los tres lados del terreno [*mueve el punto C y añade la palabra siempre*].

[20] B2: Mmmj [*asiste con la cabeza*].

[21] B3: También se puede ver que al mover el punto C se forman terrenos de diferentes tamaños.

[22] B2: Si muevo el punto C hacia el punto B el ancho disminuye.

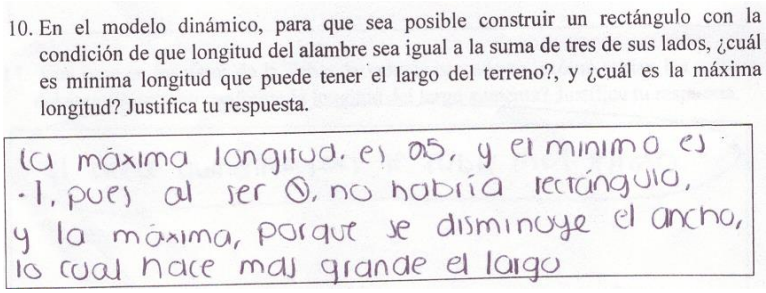
El equipo conformado por el estudiante A, además de reconocer lo previamente mencionado, identificó el terreno rectangular de mayor área (solución al problema principal) que se forma en el modelo dinámico, al concluir que este rectángulo se forma cuando el punto C se encuentra a la mitad del segmento $\overline{AB}$ [acciones de Edificación] (véase la figura 4.11). El estudiante A, al contrastar su justificación con el modelo dinámico mostrado en el programa [acciones Edificación], detectó que había un error en su percepción inicial del rectángulo de área máxima (rectángulo de área 312 m^2), puesto que en el modelo dinámico se observaba que el rectángulo de área máxima era el de 312.5 m^2.


8. Explora el modelo dinámico "Actividad 1" y explica por qué este modelo funciona como una representación del problema.

El punto "C" se mueve hasta formar rectangulos de difente tamaño. Si el punto C se meve al punto B, el ancho disminuye al igual que el área, y si el punto C esta en medio alcanza su mayor área (312.5 m^2).

Figura 4.11. Observaciones del equipo conformado por el estudiante A, al explorar el modelo dinámico, parte III.

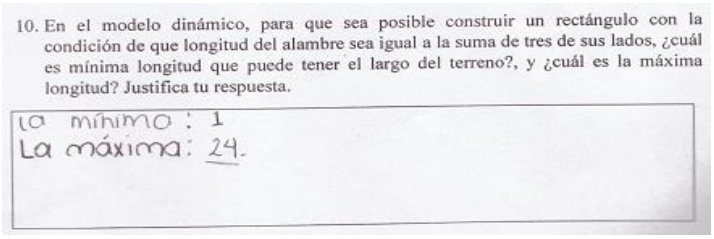
En la pregunta 9 de la parte III de esta actividad los estudiantes, de todos los equipos, reconocieron las magnitudes que variaban y las que permanecían constantes, al mover el punto C sobre el segmento $\overline{AB}$ pero ninguno de ellos justificó su respuesta. En la pregunta 10 se les pidió a los alumnos identificar cual era la mínima y la máxima longitud que podía tener el largo del terreno para que fuese posible construir un rectángulo con la condición de que la longitud del alambre fuera igual a la suma de tres de sus lados. Los equipos conformados por los estudiantes A y B identificaron que la mínima longitud era de 0.1 y la máxima de 25 [acciones de Reconocimiento] sin embargo, solo el equipo del estudiante B justificó su respuesta (véase la figura 4.12). En esta respuesta se puede observar que los estudiantes se dieron cuenta de que la longitud del largo del terreno no podría ser cero, pues al ser cero no habría rectángulo [acciones de Edificación] no obstante los estudiantes no observaron que la longitud del largo del terreno tampoco podía ser 25, dado que en este caso no se formaría un rectángulo [acciones de Edificación erróneas], pero si un número muy cercano al 25.


10. En el modelo dinámico, para que sea posible construir un rectángulo con la condición de que longitud del alambre sea igual a la suma de tres de sus lados, ¿cuál es mínima longitud que puede tener el largo del terreno?, y ¿cuál es la máxima longitud? Justifica tu respuesta.

la máxima longitud es 25, y el mínimo es -1, pues al ser 0, no habría rectángulo, y la máxima, porque se disminuye el ancho, lo cual hace más grande el largo

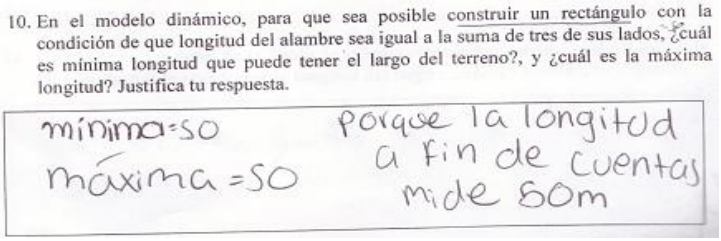
Figura 4.12. Justificación del equipo conformado por el estudiante B, de la máxima y mínima longitud del largo del terreno, parte III.

Los equipos conformados por los estudiantes C y D no mostraron acciones de Reconocimiento ni Edificación del constructo de mínima y máxima longitud del largo del terreno, dado que sus respuestas fueron incorrectas (véanse las figuras 4.13 y 4.14).


10. En el modelo dinámico, para que sea posible construir un rectángulo con la condición de que longitud del alambre sea igual a la suma de tres de sus lados, ¿cuál es mínima longitud que puede tener el largo del terreno?, y ¿cuál es la máxima longitud? Justifica tu respuesta.

la mínimo : 1
La máxima: 24.

Figura 4.13. Justificación del equipo conformado por el estudiante C, de la máxima y mínima longitud del largo del terreno, parte III.

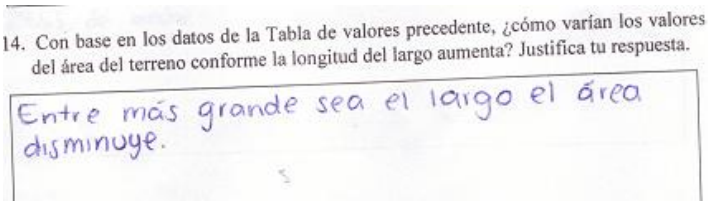

10. En el modelo dinámico, para que sea posible construir un rectángulo con la condición de que longitud del alambre sea igual a la suma de tres de sus lados, ¿cuál es mínima longitud que puede tener el largo del terreno?, y ¿cuál es la máxima longitud? Justifica tu respuesta.

mínima=50 porque la longitud
máxima=50 a fin de cuentas
mide 50m

Figura 4.14. Justificación del equipo conformado por el estudiante D, de la máxima y mínima longitud del largo del terreno, parte III.

Después de explorar el modelo dinámico, se les pidió a los estudiantes que llenaran una tabla con los valores solicitados (largo, ancho, perímetro, área y largo + largo_1 + ancho), que observaran como variaban los valores del área del terreno conforme la longitud del largo aumentaba y que encontraran el terreno rectangular de mayor área (solución al problema principal). El equipo conformado por el estudiante A dio valores de 0.1 a 25 a la longitud del largo del terreno y completó la tabla con los valores solicitados. Para llenar la última columna estos estudiantes sumaron las longitudes largo + largo_1 +

ancho sin darse cuenta de que esta medida siempre correspondía a los *50 m* [acciones de Reconocimiento erróneas]. En su respuesta afirmaron que conforme la longitud del largo aumenta, el área del terreno disminuye (véase la figura 4.15), este hecho lo observaron al mover el punto C desde el punto medio del segmento *AB* al punto B, por lo que, las acciones de Reconocimiento del constructo de variación fueron erróneas por parte de estos estudiantes. Por último, mostraron acciones de Edificación al identificar correctamente el terreno de área máxima (solución al problema principal). Recuérdese que este equipo detectó cuál era el terreno de área máxima desde un principio, al explorar el modelo dinámico.


14. Con base en los datos de la Tabla de valores precedente, ¿cómo varían los valores del área del terreno conforme la longitud del largo aumenta? Justifica tu respuesta.

Entre más grande sea el largo el área disminuye.

Figura 4.15. Justificación del equipo conformado por el estudiante A, de la variación del área conforme aumenta la longitud del largo del terreno, Parte III.

Los equipos conformados por los estudiantes B y D dieron valores, elegidos al azar, a la longitud del largo del terreno y completaron la tabla con los valores solicitados. Al igual que el equipo anterior, estos equipos no mostraron acciones de Reconocimiento del constructo "largo + largo_1 + ancho" y definieron incorrectamente la variación del área del terreno, el equipo del estudiante B, al afirmar que el área aumenta conforme la longitud del largo aumenta y el equipo del estudiante D al afirmar que el área disminuye, debido a la pérdida de su ancho. Este acto ocasiona, acciones de Reconocimiento erróneas y en consecuencia las acciones Edificación son incorrectas, al justificar sus respuestas (véanse las figuras 4.16 y 4.17). Sin embargo, el equipo del estudiante B mostró acciones de Edificación, al identificar correctamente la solución al problema principal (terreno de 312.5 m^2). En cambio, el equipo del estudiante D obtuvo, de los datos de la tabla, que el área máxima era de 310.242 m^2 [acciones de Edificación erróneas].

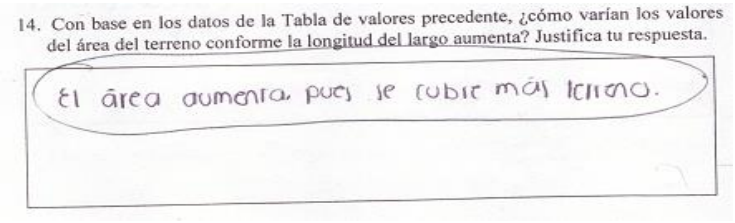


Figura 4.16. Justificación del equipo conformado por el estudiante B, de la variación del área conforme aumenta la longitud del largo del terreno, Parte III.

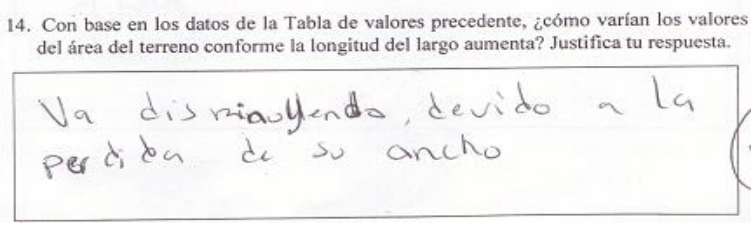


Figura 4.17. Justificación del equipo conformado por el estudiante D, de la variación del área conforme aumenta la longitud del largo del terreno, Parte III.

A diferencia de los otros equipos, el equipo conformado por el estudiante C, asignó valores consecutivos a la longitud del largo del terreno y completó la tabla con los datos solicitados. En el siguiente episodio se observa que este equipo mostró acciones de Reconocimiento y Edificación del constructo $\text{largo} + \text{largo}_1 + \text{ancho}$ al darse cuenta que el resultado de esta suma, siempre, es de 50 m y al justificarlo (enunciado [28]), se usan los códigos C, C1, C2 y C3 para referirse a los estudiantes que intervienen en esta conversación, y el código I para referirse al investigador.

[23] I: ¿Cómo obtuvieron los datos de la última columna?

[24] C1: sumando los valores $\text{largo} + \text{largo}_1 + \text{ancho}$.

[25] I: ¿Cómo obtienes el valor del largo_1?

[26] C1: Mmmj [*el estudiante se queda pensando*].

[27] C: No [*Mueve la cabeza, señalando que no está de acuerdo con los argumentos dados por su compañero*]

[28] C: Nos dimos cuenta por los datos del problema, que dice que a la hora de sumar tres de sus lados tiene que dar 50, sumamos los dos largos más el ancho nos da 50, siempre nos va a dar 50.

En el episodio que se muestra a continuación, se observa que este equipo manifestó acciones de Reconocimiento y Edificación del constructo de variación del área del terreno.

[29] C: [*Señala con su dedo los valores del largo y del área del terreno contenidos en la tabla*].

[30] C: Si aumenta el largo, el área aumenta y también disminuye.

[31] C1: ¿Cómo que aumenta y disminuye?

[32] C: Si, fíjate, en 3 es 133.33, en 6, 226.81, es decir aumenta, hasta 12 que es 312.06 y después disminuye, en 15 que es 299.84.

[33] C3: Ósea que varían proporcionales.

[34] C: [*Mueve la cabeza, señalando que no está de acuerdo con los argumentos dados por su compañero*]

[35] C: No son proporcionales.

En los enunciados [29] y [30] el estudiante C mostró acciones de Reconocimiento de la variación del área del terreno conforme aumenta la longitud del largo del terreno. En los enunciados [31] y [32] justificó su respuesta al mostrarle a su compañero el rango de valores, del largo del terreno, en el que el área aumenta y el rango en el que el área disminuye. Lo que da evidencia de que, mientras el alumno C manifestó acciones de Edificación, el alumno C1 mostró acciones de Reconocimiento. Por un lado, en el enunciado [33] se observa que el estudiante C3 mostró acciones de Reconocimiento erróneas del constructo de proporcionalidad, por otro lado, en los enunciados [34] y [35] el estudiante C realizó acciones de Reconocimiento de este constructo, pero no justificó su respuesta por lo que no logró realizar acciones de Edificación. Por último, este equipo obtuvo, que el terreno de área máxima es aquel que tiene de largo 12 m y de área 312.06 m^2[acciones Edificación erróneas]. En los dos episodios anteriores, los estudiantes C, C1 y C2 mantienen discusiones que les llevan a Reconocer y Edificar diferentes constructos, sin embargo, el estudiante C3 se limita a observar a sus compañeros sin mostrar evidencias de que interactúa con ellos.

En la siguiente pregunta se les pidió a los estudiantes utilizar los datos de la tabla de valores precedente para graficar los puntos que tuvieran como coordenada x (longitud del

largo del terreno) y como coordenada y (área del terreno) y explicar cómo era la gráfica formada por estos puntos. Los estudiantes del equipo conformado por el estudiante A hicieron uso de sus conocimientos previos acerca de cómo graficar puntos en un plano cartesiano [acciones de Reconocimiento], sin embargo no dan evidencia de Reconocer la gráfica que forman estos puntos (véase la figura 4.18). En cambio los equipos conformados por los estudiantes B y C manifestaron acciones de Reconocimiento y Edificación de los dos constructos en cuestión [graficar puntos en un plano cartesiano y gráfica formada por estos puntos]. Ellos graficaron algunos puntos con coordenadas x (longitud del largo del terreno) y con coordenadas y (área del terreno) [acción de Reconocimiento]. El equipo del estudiante B menciono que "los puntos van subiendo y bajando porque es una parábola" [acciones de Reconocimiento y Edificación]. El equipo del estudiante C indicó que la gráfica formada por estos puntos es una parábola y dibujó una representación de ésta (véanse las figuras 4.19 y 4.20).

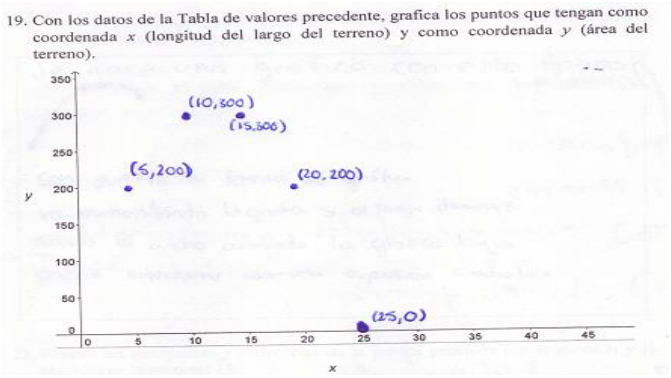


Figura 4.18. Gráfica formada por los puntos con coordenada x (longitud del largo del terreno) y con coordenada y (área del terreno) hecha por los estudiantes del equipo conformado por A, parte III.

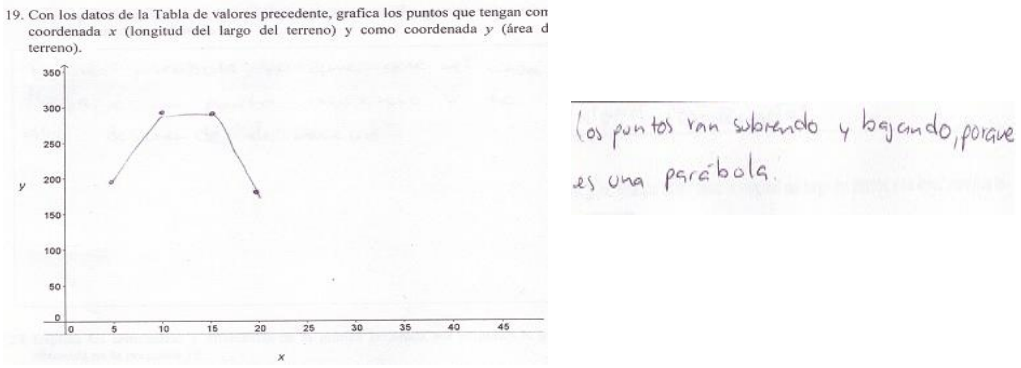


Figura 4.19. Gráfica formada por los puntos con coordenada x (longitud del largo del terreno) y con coordenada y (área del terreno) hecha por los estudiantes del equipo conformado por B, parte III.

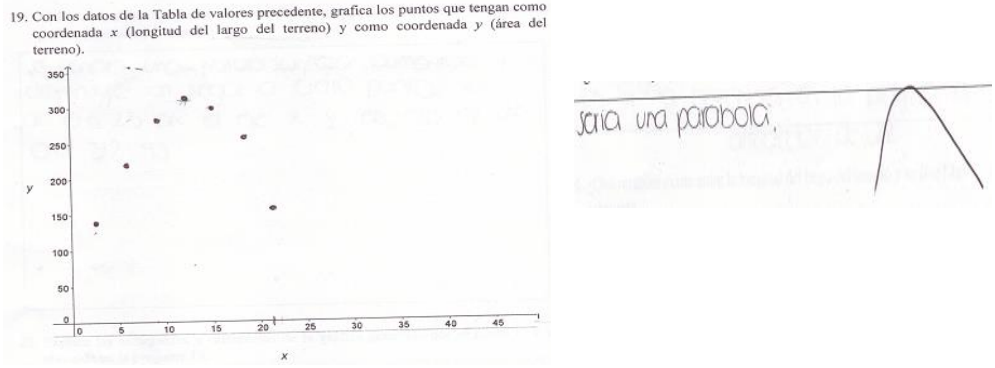


Figura 4.20. Gráfica formada por los puntos con coordenada x (longitud del largo del terreno) y con coordenada y (área del terreno) hecha por los estudiantes del equipo conformado por C, parte III.

Por último, en la figura 4.21 se observa que el equipo conformado por el estudiante D no logró graficar los puntos con coordenadas x (longitud del largo del terreno) y con coordenadas y (área del terreno), en cambio ellos graficaron otros puntos con otras coordenadas, en consecuencia no reconocieron la gráfica formada por estos puntos, lo cual da evidencia de que este equipo no manifestó acciones de Reconocimiento y Edificación de los dos constructos en cuestión.

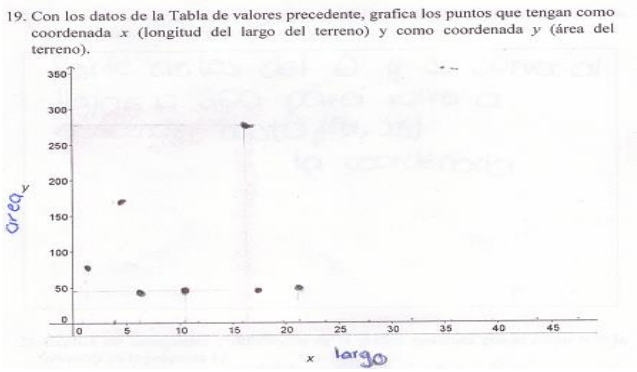


Figura 4.21. Gráfica formada por los puntos con coordenada x (longitud del largo del terreno) y con coordenada y (área del terreno) hecha por los estudiantes del equipo conformado por D, parte III.

En la siguiente Tabla se enlistan los constructos previos más importantes que fueron Reconocidos y Edificados, por los estudiantes, en las tareas de la actividad 1 vistas hasta este momento. Los equipos se nombraron A, B, C o D según el estudiante que los conformaba.

Constructo previo	Equipos que mostraron acciones de Reconocimiento	Equipos que mostraron acciones de Edificación
Característica de los lados de una figura rectangular (dos de longitud a y dos de longitud b con $a \neq b$)	A, B, C y D	A, B, C y D
Perímetro y área de una figura rectangular	A, B, C y D	A, B , C y D
Existencia de rectángulos con el mismo perímetro pero diferente área	A, B, C y D	B
Los rectángulos que cumplen la condición de que la suma de tres de sus lados es igual a 50 m tienen perímetros y áreas distintas.	A, B, C y D	B
Característica de los ángulos rectos de un rectángulo	A	A
Máxima y mínima longitud que puede tener el largo del terreno (dominio de la función)	A y B	B
Valor del "$largo + largo_1 + ancho$"	C	C
Variación cuadrática del área del terreno	C	C
Terreno de área máxima (solución al problema)	A y B	A y B
Graficar puntos en un plano cartesiano	A, B y C	B y C
Gráfica formada por los puntos (parábola)	B y C	B y C

4.2.2. Categorías: Construcción (C) y Consolidación (+C).

Para determinar cuándo un estudiante manifiesta acciones de Construcción, es indispensable contar con una definición operacional de la construcción, puesto que ésta proporciona los criterios específicos para determinar el momento en que los estudiantes producen nuevos constructos. A continuación, se da la definición operacional del elemento general de conocimiento (nuevo constructo) a crear con esta secuencia de actividades:

Análisis de las representaciones: gráfica y algebraica de una función cuadrática como herramienta para construir el constructo de función cuadrática (*CFC*).

Para rastrear el proceso de construcción del constructo de función cuadrática (*CFC*) es necesario centrarse en dos elementos constitutivos: Representación Gráfica (*RG*) y Representación Algebraica (*RA*). En la Actividad 1 se dice que los estudiantes han construido el elemento *RG* cuando por sus palabras o acciones relacionan los constructos previos de dominio (*D*), variación (*V*), gráfica de la función (parábola) (*G*) y punto máximo (vértice) de la gráfica de la función (*M*). Del mismo modo se dice que los estudiantes han construido el elemento *RA*, si son capaces de encontrar la ecuación cuadrática que modela la situación utilizando conocimientos anteriores.

A partir de la pregunta 21, los estudiantes mostraron acciones de Construcción, al montar e integrar sus construcciones previas por reorganización vertical para producir un nuevo constructo (*CFC*). Los estudiantes relacionaron los constructos de D, V, G y M para construir *RG* y encontraron la ecuación cuadrática que modela la situación en cuestión (Construcción de *RA*). De esta forma, descubrieron nuevas posibilidades de interpretación de los constructos estudiados en las tareas previas. En las últimas preguntas los estudiantes mostraron haber usado el nuevo constructo (*CFC*), por lo que, los estudiantes iniciaron el proceso de consolidación de este constructo.

Con la finalidad de construir el elemento *RG*, se les pidió a los estudiantes que observaran y analizaran el punto N en el modelo dinámico y que explicaran todo lo referente a la gráfica generada por el punto N al mover el punto C. En el episodio descrito del [36] al [48] se muestran las ideas relevantes del dialogo que los estudiantes del equipo conformado por el estudiante A entablaron al relacionar los constructos anteriores con la gráfica generada por el punto N. Se usan los códigos A, A1, A2 y A3 para referirse a los estudiantes que intervienen en esta conversación, y el código I para referirse al investigador.

[36] A1: ¿Cómo se llama esta curva? [*Señala con el dedo la curva que forma el punto N al mover el punto C*].

[37] A: Parábola, pero no es una gráfica continua, solo son puntos de una parábola.

[38] I: ¿Qué más observan?

[39] A2: Que conforme el largo aumenta, el área aumenta pero llega un momento en el que el área es la máxima y después el área disminuye.

[40] I: ¿Podrían decirme las coordenadas del punto N cuando el área es la máxima?

[41] A: Si, la coordenada x es 12.5 y la coordenada y es 312.5, por lo tanto, el terreno de área máxima es el que tiene de largo 12.5 y de área 312.5.

[42] I: ¿Alguien observa algo más?

[43] A: Pues podría utilizarse una ecuación cuadrática para representarla.

[44] I: ¿Por qué?

[45] A: Porque primero aumenta y llega a un punto máximo y luego disminuye, es decir no se mantiene proporcional, además la forma de la gráfica no es una recta.

[46] I: Observen la gráfica ¿Podrían decirme el rango de valores que puede tomar el largo del terreno, y el rango de valores que puede tomar el área del terreno?

[47] A1: Mmmmmmj, el largo de 0 a 25, no?... Y el área de 0 a 312.5, creo [*Todos los estudiantes se quedan pensando*].

En los enunciados [36] y [37], los estudiantes, observaron que la gráfica formada por el punto N al mover el punto C era una parábola. En [38] y [39] identificaron la relación que existe entre la longitud del largo del terreno y su área (variación cuadrática). En [40] y [41] mencionaron las coordenadas del punto máximo (vértice) de la gráfica de la función y relacionaron este punto con la solución al problema. Del enunciado [42] al [45] el estudiante A reconoció que la gráfica generada por el punto N al mover el punto C puede ser representada por una ecuación cuadrática [acciones de Reconocimiento] y justificó su razonamiento [acciones de Edificación]. En los enunciados [46] y [47] se observa que los estudiantes integraron sus conocimientos previos acerca del rango de valores que puede tomar el largo del terreno (dominio de una función), aunque no mencionaron que el largo del terreno no puede medir 0 ni 25 m. Además reconocieron el rango de valores que puede tomar el área del terreno (rango de una función). En general, se observa que los estudiantes de este equipo integraron los constructos de D, V, G y M. Por lo que se puede concluir que estos estudiantes mostraron acciones de Construcción del elemento *RG*.

En el siguiente episodio se muestra como los estudiantes del equipo conformado por el estudiante B manifestaron acciones de Construcción del elemento *RG* al relacionar los constructos de variación, gráfica de la función (parábola), punto máximo (vértice) y dominio de una función cuadrática. Se usan los códigos B, B1, B2 y B3 para referirse a los estudiantes que intervienen en esta conversación, y el código I para referirse al investigador.

[48] I: ¿A qué longitudes del terreno corresponden las coordenadas del punto N?

[49] B2: x al largo y y al área del terreno. Este punto nos va a graficar el largo con el área.

[50] I: ¿Qué gráfica genera el punto N al mover el punto C?

[51] B3: Lineal.

[52] B1: No, es parabólica ¿o parábola? [*Se queda pensando*].

[53] I: ¿Que más observan?

[54] B: Que el área aumenta y luego disminuye, bueno el área llega a un punto máximo y luego desciende.

[55] I: ¿Cuáles son las coordenadas del punto N cuando el área es la máxima?

[56] B2: 12,5 y 312.5.

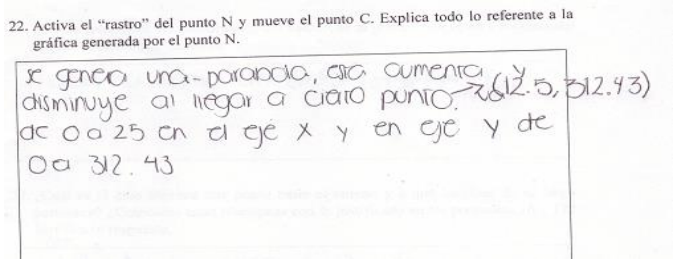
[57] I: Observen la gráfica ¿Podrían decirme el rango de valores que puede tomar el largo del terreno, y el rango de valores que puede tomar el área del terreno?

[58] B: El largo va de 0 a 25, bueno ya habíamos visto que 0 no puede ser y el área va de 0 a 312.5 que es la máxima área del terreno.

En los enunciados [48] y [49] se observa que el alumno B2 reconoció las dos coordenadas del punto N. En los enunciados del [50] al [52] los estudiantes de este equipo indicaron que la gráfica que forma el punto N al mover el punto C es una parábola, sin embargo, no saben si se llama parábola o parabólica. En el enunciado [51] el estudiante B3 no reconoció el constructo de parábola, al confundir la gráfica generada por el punto N con una gráfica lineal. En [53] y [54] el estudiante B identificó la relación que existe entre la longitud del largo del terreno y el área de éste (variación cuadrática), en los enunciados [55] y [56] identificaron el punto máximo de la gráfica y en [57] y [58] recordaron haber visto

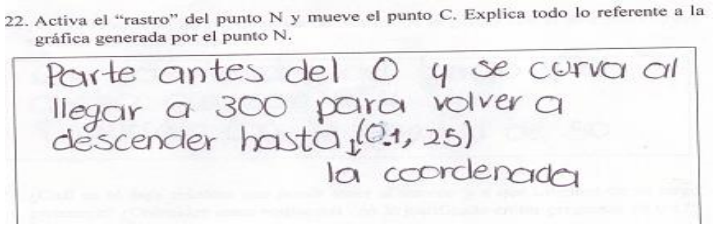
que la longitud del largo del terreno variaba de 0 (sin ser cero) a 25 m. Por lo tanto, se puede concluir que este equipo mostró acciones de Construcción al montar e integrar construcciones previas por reorganización vertical para construir el elemento *RG*. En los dos episodios anteriores, las intervenciones del investigador provocaron que los estudiantes retomaran la reflexión sobre la relación que existe entre los constructos previos (V, G, D y M) y la gráfica generada por el punto N al mover el punto C.

En la figura 4.22 se observa como el equipo conformado por el estudiante C mostró acciones de Construcción del elemento *RG*. Estos estudiantes reconocieron las coordenadas del punto N, y relacionaron sus conocimientos previos (V, G, D y M) para describir la gráfica generada por el punto N. En cambio, el equipo conformado por el estudiante D, no pudo relacionar los constructos D, G, V y M para construir *RG*, por lo tanto, ellos terminaron esta tarea sin mostrar acciones de construcción del elemento *RG* y en consecuencia del constructo *CFC* (véase la figura 4.23).


22. Activa el "rastro" del punto N y mueve el punto C. Explica todo lo referente a la gráfica generada por el punto N.

se genera una parabola, esta aumenta y disminuye al llegar a cierto punto. (12.5, 312.43)
de 0 a 25 en el eje x y en eje y de 0 a 312.43

Figura 4.22. Observaciones del equipo conformado por el estudiante C, de la gráfica generada por el punto N, parte III.


22. Activa el "rastro" del punto N y mueve el punto C. Explica todo lo referente a la gráfica generada por el punto N.

Parte antes del 0 y se curva al llegar a 300 para volver a descender hasta (0.1, 25) la coordenada

Figura 4.23. Observaciones del equipo conformado por el estudiante D, de la gráfica generada por el punto N, parte III.

En la parte IV de la actividad 1 se les pidió a los estudiantes obtener la ecuación cuadrática que modelaba la situación a resolver, para ello, se realizó una serie de preguntas que llevarían a los estudiantes a reconocerla. En la figura 4.24 se puede observar que, el equipo conformado por el estudiante A, reconoció la relación algebraica que existe entre el largo, el ancho y la suma de tres lados del terreno; despejó de la ecuación anterior una de

las incógnitas para obtener una variable dependiente y otra independiente [acción de Edificación]; y escribió una expresión algebraica mediante la cual se puede calcular el área del terreno [acción de Construcción del elemento *RA*].

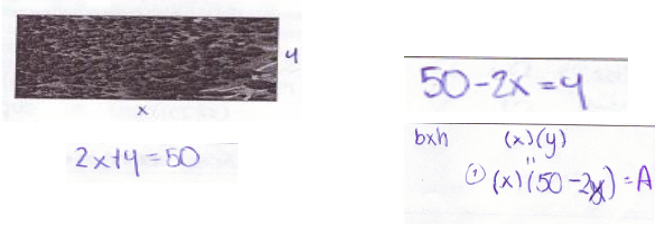


Figura 4.24. Procedimiento del equipo conformado por el estudiante A para obtener la expresión algebraica mediante la cual se pueda calcular el área del terreno, parte IV.

El equipo conformado por el estudiante B no mostró acciones de Construcción del elemento *RA* ya que no encontraron la expresión algebraica mediante la cual se pueda calcular el área del terreno, en la figura 4.25 se puede ver que estos estudiantes Reconocieron dos ecuaciones que representaban la relación que existe entre los dos lados del terreno y la suma de tres lados de éste. En la primera ecuación $(2x + y = 50), x$ es el largo del terreno y y el ancho, en la segunda ecuación $(2y + x = 50,)\ x$ es el ancho del terreno y y el largo. Después de escribir las ecuaciones, los estudiantes que conforman este equipo, despejaron, de manera incorrecta, la incógnita x de la segunda ecuacion, lo cual muestra acciones de Edificación erróneas por parte de los estudiantes. Además sustituyeron el valor de la incógnita x en la primera ecuación, por lo tanto, en la pregunta 40, en la cual se les pedía escribir una expresión algebraica mediante la cual pudieran calcular el área del terreno, no lograron mostrar acciones de Construcción. A manera de conjetura, se infiere que los estudiantes manifiestan haber aprendido, de manera mecánica, procedimientos para encontrar los valores de las incógnitas.

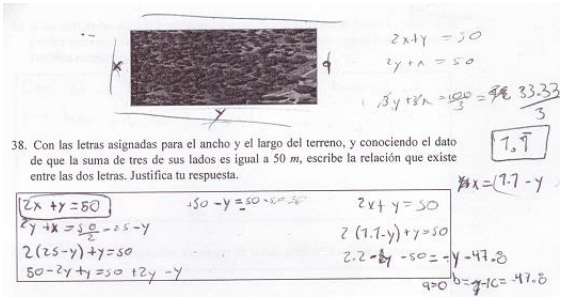
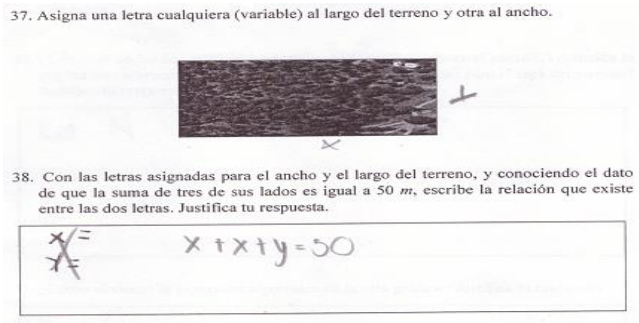


Figura 4.25. Procedimiento, del equipo conformado por el estudiante B, para obtener la expresión algebraica mediante la cual se pueda calcular el área del terreno, parte IV.

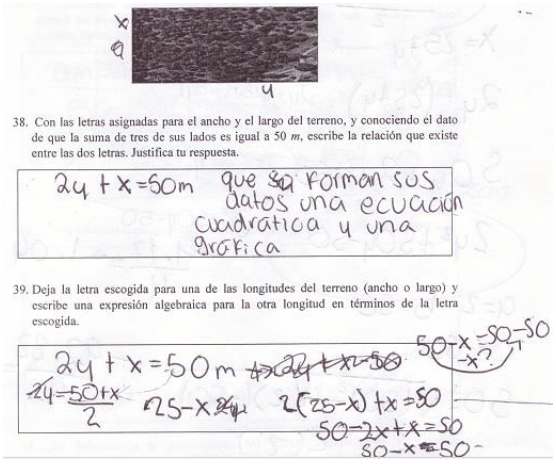
En la figura 4.26 se muestra como los estudiantes del equipo conformado por el estudiante C solo manifestaron acciones de Reconocimiento de la relación algebraica que existe entre el largo, el ancho y la suma de tres lados del terreno, pero no fueron capaces de encontrar la expresión algebraica mediante la cual pudieran calcular el área del terreno, por lo que, no mostraron acciones de Construcción del elemento *RA*. Por último, el equipo conformado por el estudiante D manifestó acciones de Reconocimiento de la relación algebraica entre los lados del rectángulo y la suma de tres de ellos, escribiendo $2x + y = 50$. Los estudiantes de este equipo despejaron la variable y de dicha ecuacion de manera incorrecta [acciones de Edificación erróneas] y sustituyeron la variable y en la misma ecuación, por lo tanto, este equipo tampoco manifestó acciones de Construcción del elemento *RA* (véase la figura 4.27).


37. Asigna una letra cualquiera (variable) al largo del terreno y otra al ancho.

38. Con las letras asignadas para el ancho y el largo del terreno, y conociendo el dato de que la suma de tres de sus lados es igual a 50 *m*, escribe la relación que existe entre las dos letras. Justifica tu respuesta.

x + x + y = 50

Figura 4.26. Procedimiento, del equipo conformado por el estudiante C, para obtener la expresión algebraica mediante la cual se pueda calcular el área del terreno, parte IV.


38. Con las letras asignadas para el ancho y el largo del terreno, y conociendo el dato de que la suma de tres de sus lados es igual a 50 *m*, escribe la relación que existe entre las dos letras. Justifica tu respuesta.

2y + x = 50m que se forman sus datos una ecuación cuadratica y una grafica

39. Deja la letra escogida para una de las longitudes del terreno (ancho o largo) y escribe una expresión algebraica para la otra longitud en términos de la letra escogida.

2y + x = 50m

Figura 4.27. Procedimiento, del equipo conformado por el estudiante D, para obtener la expresión algebraica mediante la cual se pueda calcular el área del terreno, parte IV.

Después de analizar las respuestas, a las tareas de la parte IV de la Actividad 1, de cada uno de los equipos, se puede concluir que, el único equipo que mostro acciones de

Construcción del elemento *RA* fue el equipo conformado por el estudiante A. De acuerdo con el análisis de los datos de esta actividad, se infiere que a través del montaje y la integración por reorganización vertical de las diferentes acciones de Reconocimiento y Edificación surgidas en las tareas anteriores, el equipo del estudiante A fue capaz de construir los elementos *RG* y *RA*, y en consecuencia el constructo *CFC*, elemento general de conocimiento de esta secuencia de actividades.

En las últimas cuatro preguntas de esta Actividad se les pidió a los estudiantes que graficaran en el programa (Geogebra) la expresión algebraica que obtuvieron para el área del terreno, y que explicaran por qué esta gráfica coincidía con la gráfica generada por el punto N al mover el punto C, además de mencionar algunas semejanzas y diferencias entre estas dos gráficas. El equipo conformado por el estudiante A fue el único que contesto esta parte de la actividad, ellos mostraron como relacionaron los constructos *RG y RA* para Consolidar el nuevo constructo *CFC*. En la figura 4.28 se muestran las respuestas de los estudiantes de este equipo a las últimas cuatro preguntas, en ellas se observa que los estudiantes reconocen que la gráfica generada por la expresión algebraica coincide con la gráfica del punto N ya que, en los dos casos la variable independiente x es la longitud del largo del terreno y la variable dependiente y es el área del terreno [acciones de Edificación del nuevo constructo], además, reconocen que la gráfica generada por la expresión algebraica tiene puntos negativos que significan longitudes del largo del terreno negativas y áreas negativas y que dichas magnitudes no tienen sentido en el contexto del problema.

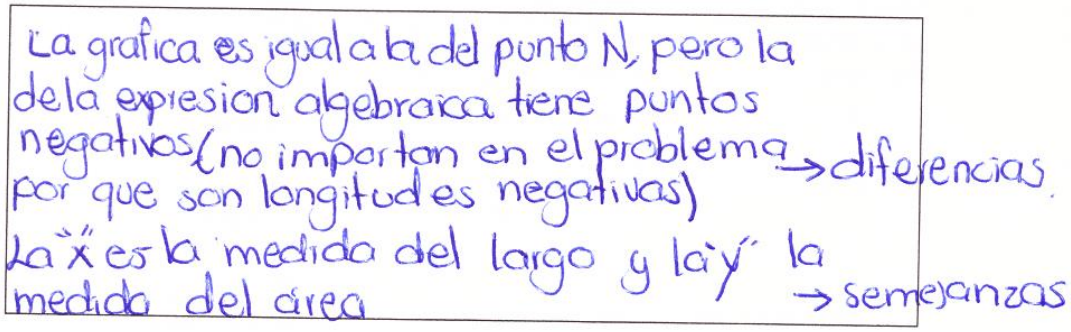


Figura 4.28. Justificación, del equipo conformado por el estudiante A, del porque la gráfica de la expresión algebraica coincide con la gráfica generada por el punto N, parte IV.

4.3. Análisis de la Actividad 2

4.3.1. Categorías: Reconocimiento (R) y Edificación (B).

En las primeras dos partes de la actividad 2 se manifestaron las principales acciones de Reconocimiento y Edificación, por parte de los estudiantes. En la pregunta 1 de la parte I se les pidió a los estudiantes que escribieran tres propiedades importantes de los cuadrados. Los estudiantes A, C y D mostraron acciones de Reconocimiento al escribir que, los cuadrados tienen cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales de 90°. El estudiante D añadió que los cuadrados son figuras simétricas, es decir, que al doblar la figura por el eje de simetría, las dos partes resultantes coinciden [acciones de Reconocimiento]. Por último, el estudiante B manifestó acciones de Reconocimiento diferentes a las de sus compañeros (véase la figura 4.29). Él mencionó que solo existe un cuadrado, tal que, su área es igual a su perímetro (cuadrado de 4×4) [acciones de Reconocimiento]. Identificó que en una figura cuadrada, la raíz cuadrada del área es igual a la medida de uno de sus lados [acciones de Reconocimiento]. Además, reconoció que el área del cuadrado multiplicada por cuatro entre la medida de uno de sus lados es igual al perímetro del cuadrado. Este tipo de acciones [Reconocimientos] van más allá de recordar características propias de los cuadrados, ya que, para realizarlas se necesita conocer y manipular ciertos constructos, como el de perímetro y el de área de una figura cuadrada [acciones de Edificación].

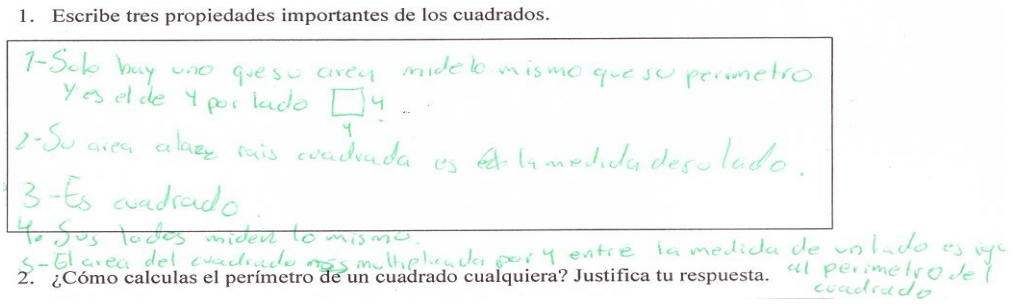


Figura 4.29. Propiedades de los cuadrados, reconocidas por el estudiante B, parte I.

En la pregunta 2 de la parte I, los estudiantes escribieron el procedimiento que realizan para calcular el perímetro de un cuadrado y el área del mismo. Por un lado, los estudiantes A, B, C y D reconocieron que el perímetro de una figura cuadrada se calcula sumando las medidas de sus cuatro lados o, lo que es lo mismo, multiplicando la longitud de uno de sus lados por cuatro. El estudiante C fue el único estudiante que utilizó el registro

algebraico para justificar su respuesta [acciones de Edificación]. Por otro lado, los cuatro estudiantes reconocieron que el área de un cuadrado se calcula multiplicando la longitud de uno de los lados por ella misma, además el estudiante A añadió que este procedimiento es igual a elevar al cuadrado la medida de uno de los lados [acciones de Reconocimiento]. Los estudiantes C y D justificaron sus respuestas utilizando el registro algebraico [acciones de Edificación]. Por último, el estudiante B relacionó el área de una figura cuadrada con la cantidad de cuadrados, de 1×1, que se encuentran dentro de esta figura [acciones de Edificación] (véase la figura 4.30).

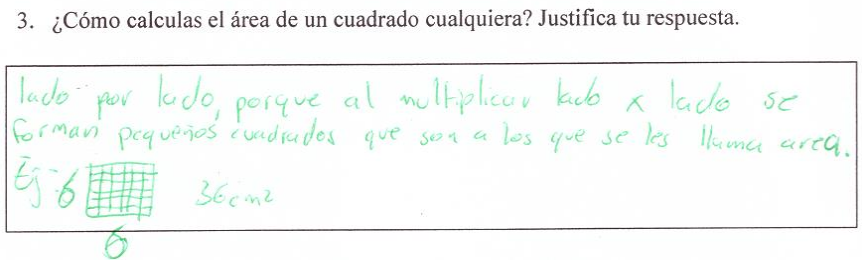


Figura 4.30. Justificación del estudiante B, de cómo calcular el área de un cuadrado, parte I.

En la siguiente pregunta se les pidió a los estudiantes que dibujaran tres o más cuadrados (distintos) inscritos en el cuadrado dado ABCD y calcularan sus perímetros y áreas. En los siguientes párrafos se muestran distintos episodios que sucedieron mientras el investigador cuestionaba al estudiante A acerca de sus procedimientos. Se usa el código A para referirse al estudiante que interviene en esta conversación, y el código I para referirse al investigador.

[59] I: ¿Cómo le hiciste para formar los cuadrados inscritos en el cuadrado ABCD?

[60] A: Bueno, primero forme el cuadrado que tiene sus vértices en los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD y después rote el cuadrado para obtener más cuadrados.

[61] I: ¿Y cómo son las áreas y los perímetros de estos cuadrados inscritos?

[62] A: Pues, como solo los rote, tienen las mismas medidas, entonces los cuadrados son iguales, ósea, que tienen el mismo perímetro y la misma área, Mmmmmmj, creo [*se queda pensando un rato*].

[63] A: No es cierto, porque me piden el de menor perímetro, entonces… [*Mide los lados de los cuadrados y calcula sus áreas*]

[64] A: Los perímetros y las áreas cambian, por la distancia que los diferencia.

En los enunciados del [59] al [62] el estudiante A indica que es posible dibujar varios cuadrados inscritos en el cuadrado ABCD, sin embargo, afirma que todos estos cuadrados inscritos en el cuadrado dado son iguales, por lo tanto, también lo son sus áreas y sus perímetros [acciones de Reconocimiento erróneas] y justifica su respuesta (enunciado [62]) de manera incorrecta lo que lo lleva a realizar acciones de Edificación erróneas. En cambio en [63] y [64] se puede notar que el estudiante A rectificó su respuesta dada en el enunciado [62] al darse cuenta de que los perímetros de los cuadrados inscritos son distintos y las áreas también [acciones de Reconocimiento] y justifico su respuesta [acciones de Edificación].

En el siguiente episodio, el estudiante B identificó que se pueden dibujar infinitos cuadrados inscritos en el cuadrado ABCD [acciones de Reconocimiento] y mostró la estrategia que siguió para dibujarlos [acciones de Edificación], sin embargo, este estudiante solo dibujo tres de ellos y reconoció que las áreas y los perímetros de estos cuadrados son distintos. Visualizó y comprobó que entre más cerca estén los vértices (del cuadrado inscrito) de los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD, el cuadrado inscrito que se forma, con estos vértices, es más chico, es decir, de menor área. Además, afirmó que el cuadrado inscrito en el cuadrado ABCD de menor área es aquel que tiene como vértices los puntos medios de los lados del cuadrado original (ABCD) [acciones de Edificación]. He aquí un extracto del episodio que justifica lo comentado en líneas precedentes. Se utiliza el código B para referirse al estudiante que interviene en la conversación y el código I para referirse al investigador.

[65] I: ¿Cómo le hiciste para formar los cuadrados inscritos en el cuadrado ABCD?

[66] B: Como son cuadrados inscritos, entonces sus vértices deben estar en los lados del cuadrado ABCD. Puse un vértice a "x" distancia de A y el otro vértice a x distancia de B [*señala las distancias* x] y asi sucesivamente hasta formar los cuatro vértices del cuadrado inscrito.

[67] I: ¿Cuántos cuadrados inscritos formaste?

[68] B: Tres, con medidas de x distintas.

[69] I: ¿Cuántos cuadrados inscritos se pueden formar?

[70] B: Bueno, se pueden formar un número infinito de cuadrados por que x puede ser cualquier medida, con decimales y más.

[71] I: ¿Cómo son las áreas y los perímetros de estos cuadrados?

[72] B: Pues, me di cuenta que entre más cerca del centro [*señala el punto medio de uno de los lados del cuadrado ABCD*] estén los vértices, más chico será el cuadrado inscrito y entre más lejos, va a ser más grande. Por lo tanto, el más pequeño, o de menor área, es el que los vértices están en el centro, o a $x = 2.5$.

En la respuesta dada, por el estudiante C, a la pregunta 4 se puede notar que este estudiante logró dibujar tres cuadrados inscritos en el cuadrado ABCD, para ello, primero dividió en dos partes iguales los lados del cuadrado original y colocó los vértices del cuadrado inscrito en los puntos medios de los lados, después dividió en dos los segmentos que van del vértice (A, B, C o D) a un punto medio y unió los vértices correspondientes [acciones de Reconocimiento y Edificación]. Sin embargo, no pudo dibujar más cuadrados, por lo que concluyó que solo se pueden dibujar tres cuadrados inscritos en el cuadrado ABCD [acciones de Reconocimiento erróneas] (véase la figura 4.31). Además, este estudiante no manifestó, de manera explícita, haber reconocido que las áreas y los perímetros de los cuadrados inscritos en ABCD son distintos. Por último, el estudiante D solo dibujó un cuadrado inscrito, por lo que no logró realizar acciones de Reconocimiento y Edificación de que existen diferentes cuadrados inscritos con diferentes perímetros y diferentes áreas.

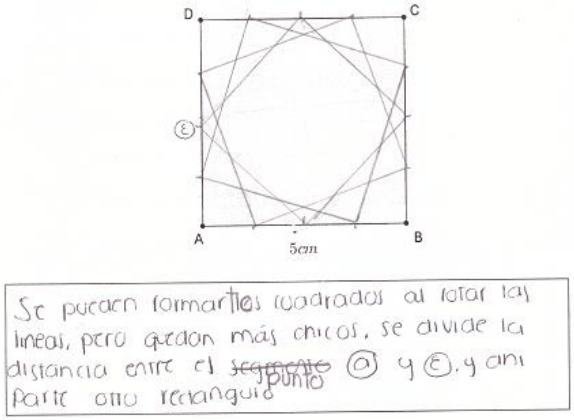
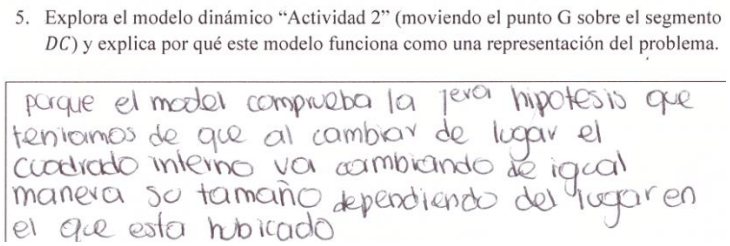


Figura 4.31. Procedimiento del estudiante C para trazar distintos cuadrados inscritos en el cuadrado ABCD, parte I.

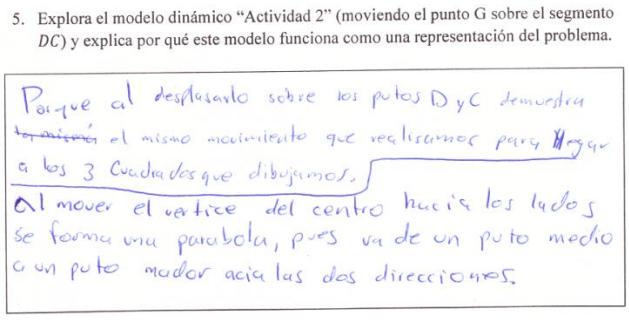
En la parte II de la actividad 2, los estudiantes exploraron el modelo dinámico realizado en Geogebra y explicaron porque este modelo funciona como una representación del problema. El equipo conformado por el estudiante A explicó en su respuesta (véase la figura 4.32) que al mover el punto G sobre el segmento DC los cuadrados inscritos van cambiando y de igual manera su tamaño, por lo que se observa que, estos estudiantes manifestaron acciones de Reconocimiento de la cantidad de cuadrados inscritos que se pueden formar. Sin embargo, este equipo no da evidencia explicita de haber observado cómo son las áreas y los perímetros de dichos cuadrados.


5. Explora el modelo dinámico "Actividad 2" (moviendo el punto G sobre el segmento DC) y explica por qué este modelo funciona como una representación del problema.

porque el model comprueba la 1era hipotesis que teniamos de que al cambiar de lugar el cuadrado interno va cambiando de igual manera su tamaño dependiendo del lugar en el que esta hubicado

Figura 4.32. Justificación del equipo conformado por A, del porqué el modelo dinámico funciona como una representación del problema, parte II.

Los estudiantes del equipo conformado por el estudiante B manifestaron acciones de Reconocimiento y Edificación al explorar el modelo dinámico de la actividad 2. En la figura 4.33 se puede ver que estos estudiantes reconocieron que al mover el punto G sobre el segmento DC se obtienen diferentes cuadrados inscritos, además, reconocieron el constructo de parábola al observar que al mover el punto G, del punto medio del segmento DC a los vértices D y C el área del cuadrado inscrito aumenta, sin embargo, se observa que este constructo aún no está bien cimentado por los estudiantes.

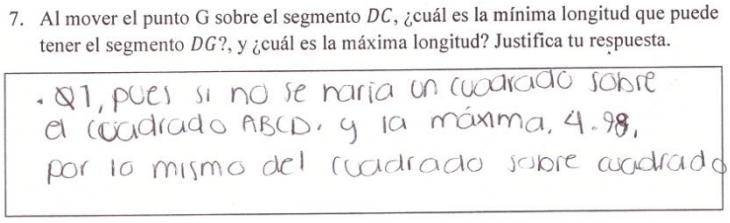

5. Explora el modelo dinámico "Actividad 2" (moviendo el punto G sobre el segmento DC) y explica por qué este modelo funciona como una representación del problema.

Porque al desplazarlo sobre los putos D y C demuestra ~~lo mismo~~ el mismo movimiento que realizamos para llegar a los 3 Cuadrados que dibujamos.
Al mover el vertice del centro hacia los lados se forma una parabola, pues va de un puto medio a un puto mador acia las dos direcciones.

Figura 4.33. Justificación del equipo conformado por B, del porqué el modelo dinámico funciona como una representación del problema, parte II.

El equipo conformado por el estudiante C mostró evidencias de haber reconocido que al mover el punto G sobre el segmento DC se obtienen diferentes cuadrados inscritos, con diferentes tamaños [acciones de Reconocimiento]. Y que el cuadrado inscrito de área mínima es aquel que se forma cuando el punto G (vértice del cuadrado inscrito) está a la mitad del segmento DC (lado del cuadrado original). Por último, el equipo conformado por el estudiante D da evidencia solo de haber reconocido que al mover el punto G se obtienen todos los cuadrados inscritos en el cuadrado ABCD. Gracias a la tecnología los equipos conformados por los estudiantes C y D lograron acciones de Reconocimiento y Edificación de la existencia de infinitos cuadrados inscritos en el cuadrado original que en el ambiente de lápiz-y-papel no pudieron reconocer.

En la pregunta seis de la parte II de esta Actividad los cuatro equipos de estudiantes reconocieron qué magnitudes variaban y cuáles permanecían constantes al mover el punto G sobre el segmento DC, en el modelo dinámico. En la siguiente pregunta se les pidió a los estudiantes mover el punto G sobre el segmento DC y observar cuál era la mínima y máxima longitud que podía tener el segmento DG. Los equipos conformados por lo estudiantes A y C reconocieron que la mínima longitud que podía tener el segmento DG era de 0.01 cm y la máxima longitud de 4.99 cm y justificaron sus respuestas [acciones de Edificación] al decir que, en el caso de que la longitud del segmento DG fuera de 0 o 5 centímetros el cuadrado inscrito coincidiría con el cuadrado original (ABCD) (véase la figura 4.34).


7. Al mover el punto G sobre el segmento DC, ¿cuál es la mínima longitud que puede tener el segmento DG?, y ¿cuál es la máxima longitud? Justifica tu respuesta.

• 0.1, pues si no se haría un cuadrado sobre el cuadrado ABCD. y la máxima, 4.98, por lo mismo del cuadrado sobre cuadrado

Figura 4.34. Justificación del equipo conformado por C, de la mínima y máxima longitud del segmento DG, parte II.

En cambio, los otros dos equipos (conformados por los estudiantes B y D) reconocieron que la mínima longitud que podía tener el segmento DG era 0 cm y la máxima longitud 5 cm [acciones de Reconocimiento], ya que, cuando la longitud del segemto DG es cero o cinco, el cuadrado inscrito es igual al cuadrado ABCD [acciones de Edificación] (véase la figura 4.35). A pesar de que las respuestas que dieron los cuatro

equipos fueron diferentes se puede notar que todos los estudiantes manifestaron acciones de Reconocimiento y Edificación de la máxima y mínima longitud del segmento DG.

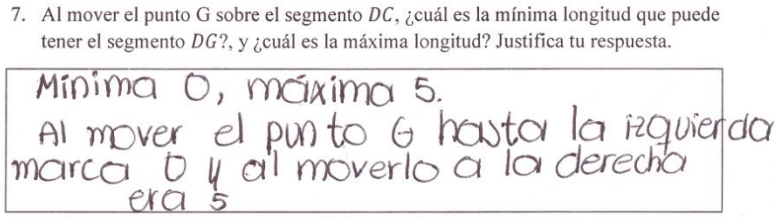


Figura 4.35. Justificación del equipo conformado por D, de la mínima y máxima longitud del segmento DG, parte II.

En las siguientes preguntas de la parte II de esta actividad los estudiantes utilizaron el modelo dinámico, creado en Geogebra, para completar una tabla con los valores solicitados (longitud del segmento DG, longitud del segmento GC, longitud del segmento HG y área del cuadrado inscrito). Además se les pidió explicar cómo variaban los valores del área del cuadrado inscrito (EFGH) conforme la longitud del segmento DG aumentaba y encontrar el cuadrado inscrito en ABCD de menor área. El equipo conformado por el estudiante B manifestó acciones de Reconocimiento y Edificación de la variación del área del cuadrado inscrito conforme la longitud del segmento DG aumentaba y mostró evidencia de haber encontrado el cuadrado inscrito en el cuadrado ABCD, de menor área. A continuación, se muestran distintos extractos de episodios que sucedieron mientras los estudiantes del equipo conformado por B resolvían la tarea. Se utilizan los códigos B, B1, B2 y B3 para referirse a los estudiantes que intervienen en la conversación y el código I para referirse al investigador.

[73] B1: ¿Cómo varían los valores del área del cuadrado inscrito (EFGH) conforme la longitud del segmento DG aumenta?

[74] B: Pues cuando la longitud del segmento DG es 1.3 el área es 15.2, en 1.5 el área es 14.4, en 2 es 13, en 2.5 es 12.5, en 3 es 13, pues se ve que va bajando y luego subiendo.

[75] B1: Si, cuando la longitud de DG es de 0 a 2.5 el área del cuadrado inscrito disminuye y luego de 2.5 a 5 el área sube.

[76] B3: Entonces el cuadrado inscrito de menor área es el que se forma cuando la longitud DG es 2.5 o lo que es lo mismo, cuando el punto G está a la mitad del segmento DC.

[77] I: ¿Cuál es la menor área que puede tener el cuadrado inscrito? Y ¿Cuánto mide el lado del cuadrado inscrito cuando el área es la menor?

[78] B3: Ammmmmj [*Observa por unos momentos la tabla de valores*].

[79] B: El área menor es de 12.5 y el lado del cuadrado inscrito mide 3.54 aproximadamente.

En los enunciados del [73] al [75] los estudiantes B y B1 reconocieron la variación cuadrática que presenta el área del cuadrado inscrito al incrementar la longitud del segmento DG. En [74] y [75] estos estudiantes justificaron sus respuestas [acciones de Edificación]. En [75] se puede ver que el estudiante B1 mencionó el rango de valores, de la longitud del segmento DG, donde el área del cuadrado inscrito decrece y el rango donde el área crece. En [76] el estudiante B3 reconoció cuánto debe medir el segmento DG o donde debe colocarse el punto G, para que se forme el cuadrado inscrito de menor área. Del [77] al [79] los estudiantes identificaron el cuadrado inscrito de menor área, mencionaron cuánto miden sus lados y cuál es su área (solución al problema principal) [acciones de Edificación].

Los estudiantes del equipo conformado por C, dieron valores de 0.02 a 3.5 a la longitud del segmento DG y llenaron correctamente la tabla de valores, sin embargo ellos no fueron capaces de identificar la variación cuadrática que presenta el área del cuadrado inscrito al mover el punto G sobre el segmento DC (véase la figura 4.36) por lo que este equipo no manifestó acciones de Reconocimiento y Edificación de la variación cuadrática del área. Sin embargo, estos estudiantes lograron identificar el cuadrado inscrito de área mínima al escribir en sus respuestas que dicho cuadrado es aquel que tiene 3.54 cm de lado y 12.5 cm^2 de área [acciones de Edificación].

11. Utiliza el modelo dinámico y completa la siguiente Tabla de valores, de acuerdo con lo solicitado.

Longitud del segmento DG	Longitud del segmento GC	Longitud del segmento HG (lado del cuadrado EFGH)	Área del cuadrado inscrito (EFGH)
.02	4.98	4.98	24.801
.5	4.5	4.53	20.5
1	4	4.12	17
1.6	3.4	3.6	14.12
2	3	3.61	13
2.5	2.5	3.54	12.5
3.5	1.5	3.81	14.5

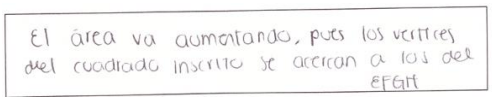


Figura 4.36. Justificación del equipo conformado por C de la variación del área del cuadrado inscrito conforme aumenta la longitud del segmento DG, parte II.

El equipo conformado por el estudiante A dio valores de 0.0008 a 2.5 a la longitud del segmento DG y completó la tabla de valores de manera correcta, pero, estos estudiantes no lograron reconocer la variación cuadrática de los valores del área del cuadrado inscrito conforme la longitud del segmento DG aumentaba, esto sucedió por que los estudiantes no dieron los valores necesarios y suficientes para darse cuenta de ello. No obstante, los estudiantes de este equipo encontraron el cuadrado inscrito de menor área (solución al problema principal) [acciones de Edificación], ellos escribieron que el cuadrado inscrito de menor área se forma cuando el segmento DG es de 2.5 cm y el área de este cuadrado es de 12.5 cm^2. Por último, el equipo conformado por el estudiante D no manifestó acciones de Reconocimiento y Edificación de la variación cuadrática del área del cuadrado inscrito, ni del cuadrado inscrito de área mínima. Ellos mencionaron que el cuadrado de área mínima se forma cuando el segmento DG vale cero centímetros ya que conforme aumentaba la longitud del segmento DG, los valores del área del cuadrado inscrito aumentan de forma cuadrática [acciones de Reconocimiento y Edificación erróneas] (véase la figura 4.37).

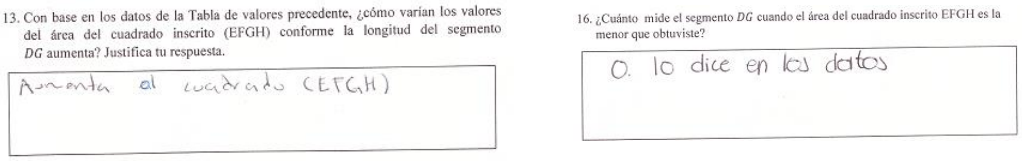


Figura 4.37. Justificación del equipo conformado por D de la variación del área del cuadrado inscrito conforme aumenta la longitud del segmento DG, parte II

Después de analizar la tabla de valores y contestar las preguntas requeridas, se les pidió a los estudiantes utilizar la tabla de valores para graficar los puntos que tuvieran como coordenada x (magnitud del segemnto DG) y como coordenada y (área del cuadrado inscrito EFGH) y examinar la gráfica formada por estos puntos. El equipo conformado por el estudiante B graficó de manera correcta los puntos solicitados en esta tarea [acciones de Reconocimiento]. Además afirmaron que la gráfica que se forma con dichos puntos es una parábola [acciones de Reconocimiento] y justificaron su respuesta [acciones de Edificación] (véase la figura 4.38).

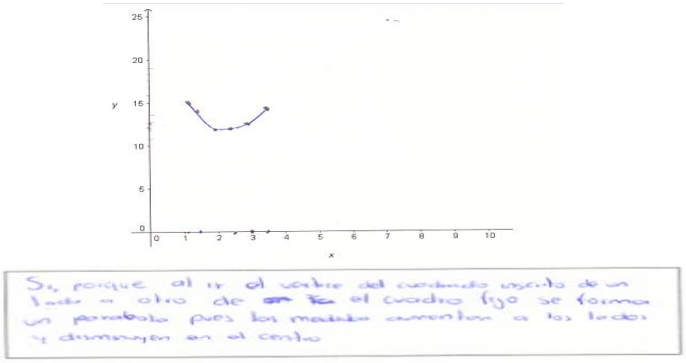


Figura 4.38. Gráfica formada por los puntos con coordenada x (longitud del segmento DG) y con coordenada y (área del cuadrado inscrito) hecha por los estudiantes del equipo conformado por B, parte II.

Del mismo modo que el equipo anterior, el equipo conformado por el estudiante C logró graficar los puntos con coordenadas x (magnitud del segmento DG) y con coordenada y (área del cuadrado inscrito), y reconocieron que dicha grafica era una parábola, sin embargo, ellos justificaron su respuesta diciendo que el área del cuadrado inscrito aumenta al aumentar la longitud del segmento DG [acciones de Edificación erróneas] (véase la figura 4.39).

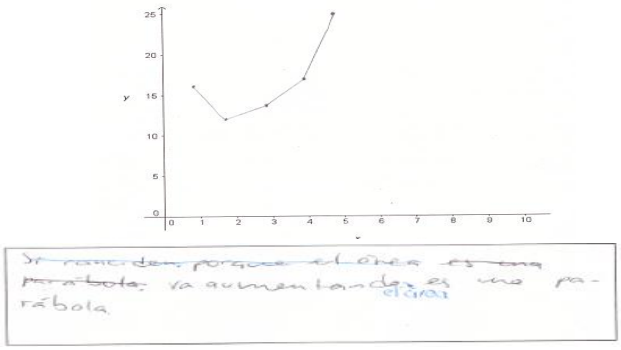


Figura 4.39. Gráfica formada por los puntos con coordenada x (longitud del segmento DG) y con coordenada y (área del cuadrado inscrito) hecha por los estudiantes del equipo conformado por C, parte II.

Recuérdese que el equipo conformado por el estudiante A dio valores de 0.008 a 2.5 a la longitud del segmento DG y completo la columna "área del cuadrado inscrito" con los valores adecuados. Es por eso que, los estudiantes de este equipo solo graficaron los puntos correspondientes a estas coordenadas y en su respuesta solo se logra ver la parte decreciente de la parábola, por lo tanto, este equipo no logró reconocer la gráfica que forman dichos puntos. Por último, el equipo conformado por el estudiante D no logró graficar de manera correcta los puntos con coordenada x (longitud del segmento DG) y con coordenada y (área

del cuadrado inscrito) y por lo tanto, no reconocieron la gráfica formada por dichos puntos [acciones de Reconocimiento y Edificación].

En la siguiente Tabla se enlistan los constructos previos más importantes que fueron Reconocidos y Edificados, por los estudiantes, en las tareas de la actividad 2 vistas hasta este momento. Los equipos se nombraron A, B, C o D según el estudiante que los conformaba.

Constructo previo	Equipos que mostraron acciones de Reconocimiento	Equipos que mostraron acciones de Edificación
Característica de los lados y ángulos de una figura cuadrangular.	A, C y D	A, C y D
Simetría de un cuadrado	D	
Raíz cuadrada del área es igual a la medida de uno de sus lados. El área del cuadrado multiplicada por cuatro entre la medida de uno de sus lados es igual al perímetro del cuadrado	B	B
Perímetro y área de un cuadrado	A, B, C y D	A, B , C y D
Existencia de infinitos cuadrados inscritos en el cuadrado original ABCD	A, B, C y D	A, B, C y D
Los cuadrados inscritos en el cuadrado original tienen perímetros y áreas distintas.	A, B y C	A, B y C
Cuadrado inscrito de menor área (solución al problema)	A, B y C	A, B y C
Máxima y mínima longitud que puede tener el segmento DG (dominio de la función)	A, B, C y D	A, B. C y D
Variación cuadrática del área del cuadrado inscrito	B	B
Graficar puntos en un plano cartesiano	A, B y C	A, B y C
Gráfica formada por los puntos (parábola)	B y C	B

4.3.2. Categorías: Construcción (C) y Consolidación (+C).

Como se mencionó anteriormente, para rastrear el proceso de construcción del constructo de función cuadrática (*CFC*) es necesario centrarse en dos elementos constitutivos: Representación Gráfica (*RG*) y Representación Algebraica (*RA*). En la actividad 2 se dice que los estudiantes han construido el elemento *RG* cuando por sus palabras o acciones relacionan los constructos previos de: dominio (*D*), variación (*V*), gráfica de la función (parábola) (*G*) y punto mínimo (vértice) de la gráfica de la función (*m*). Del mismo modo se dice que los estudiantes han construido el elemento *RA*, si son capaces de encontrar la ecuación cuadrática que modela la situación utilizando conocimientos anteriores.

A partir de la pregunta 20 de la parte II de esta actividad los estudiantes manifestaron acciones de Construcción de los elementos *RG* y *RA* al montar e integrar construcciones anteriores por reorganización vertical. De la pregunta 20 a la 27 los estudiantes analizaron la gráfica bosquejada por el punto P, al mover el punto G sobre el segmento DC, en el modelo dinámico, esto con la finalidad de construir el elemento *RG*. El siguiente episodio muestra el dialogo entablado por los estudiantes del equipo conformado por el estudiante A, al contestar estas preguntas, en él se observa que estos estudiantes manifestaron acciones de Construcción del elemento *RG* al relacionar los constructos *D, V, G* y *m*. Se usan los códigos A, A1, A2 y A3 para referirse a los estudiantes que intervienen en la conversación y el código I para referirse al investigador.

[80] I: ¿A qué magnitud corresponde la coordenada x del punto P?, ¿y a que magnitud corresponde la coordenada y?

[81] A: x corresponde a la longitud de DG y y al área del cuadrado inscrito.

[82] I: ¿Qué me pueden explicar sobre la gráfica trazada por el punto P al mover el punto G?

[83] A3: Pues el punto P grafica la variación que existe entre el segmento DG y el área del cuadradito, por ejemplo, primero disminuye y luego aumenta.

[84] A: Si, cuando la longitud del segmento DG esta entre 0 y 2.5 cm, el área disminuye y cuando esta entre 2.5 y 5 el área aumenta.

[85] A1: Es parábola, ¿no?

[86] A: Si, además tiene un punto mínimo, que es el *(2.5, 12.5).*

[87] I: ¿Cómo relacionan las coordenadas del punto mínimo de la gráfica con el área mínima del cuadrado inscrito?

[88] A: Ammmmj pues, 2.5 es la distancia que hay de punto G al punto D y 12.5 es el área mínima que se obtuvo del cuadrado EFGH.

[89] I: ¿Me pueden decir algo más de la gráfica?

[90] A2: La parábola no toca al eje x, en el eje x va de 0 a 5 y en el y de 12.5 a 25.

[91] A: Aaaa, pues sí, claro, pues el segmento DG puede ser de 0 a 5 y el área de 12.5 a 25.

En los enunciados [80] y [81] el estudiante A reconoció las magnitudes a las que corresponden las coordenadas x y y del punto P en el modelo dinámico. Del [82] al [84] se puede notar que los estudiantes A3 y A identificaron la variación cuadrática que existe entre el segmento DG y el área del cuadrado inscrito, esto, al responder que el área disminuye y luego aumenta [acciones de Reconocimiento y Edificación]. Además, en [84] el estudiante A reconoció el rango de valores del segmento DG donde el área decrece y donde el área crece. En [85] y [86] los estudiantes A1 y A mencionaron que la gráfica bosquejada por el punto P a mover el punto G, en el modelo dinámico, es una parábola [acciones de Reconocimiento]. Del [86] al [88] el estudiante A mostró acciones de Reconocimiento y Edificación del constructo de punto mínimo (vértice de la parábola), este estudiante reconoció que el punto *(2.5, 12.5)* es el punto mínimo de la gráfica y explicó la relación que existe entre las coordenadas del punto mínimo y el área mínima del cuadrado inscrito [acciones de Edificación]. Del [89] al [91] los estudiantes A y A2 identificaron el rango de valores que pueden tomar las coordenadas x y y (longitud del segmento DG y área del cuadrado inscrito respectivamente) [acciones de Reconocimiento] y justificaron su respuesta [acciones de Edificación]. Con este dialogo se prueba que los estudiantes del equipo conformado por A construyeron el elemento *RG* al relacionar los constructos de: dominio (*D*), variación (*V*), gráfica de la función (*G*) y punto mínimo de la gráfica (*m*).

En la figura 4.40 se puede observar que los estudiantes del equipo conformado por el estudiante B construyeron el elemento *RG* al asociar los constructos estudiados en las tareas anteriores a ésta (*D, V, G,* y *m*). Ellos reconocieron las magnitudes a las que corresponden las coordenadas x y y del punto P, mencionaron que al mover el punto G sobre el segmento

DC, en el modelo dinámico, el punto P forma una parábola que va de 12.5 a 25 sobre el eje de las ordenadas y de 0 a 5 sobre el eje de las abscisas [acciones de Reconocimiento]. Además identificaron que la variación de área del cuadrado inscrito respecto a la variación del segmento DG es cuadrática, al mencionar que el área aumenta cuando el punto G está cerca de los puntos D o C, y disminuye cuando está en el centro del segmento DC [acciones de Reconocimiento y Edificación]. Por último, reconocieron y justificaron [acciones de Reconocimiento y Edificación] que las coordenadas del punto más bajo (vértice) de la gráfica bosquejada por el punto P al mover el punto G es *(2.5, 12.5)* y que 12.5 es el área mínima del cuadrado inscrito y 2.5 la distancia que existe entre el punto G y el punto D cuando el área del cuadrado es la menor posible. También identificaron que los lados del cuadrado inscrito EFGH miden 3.54 *cm* cuando el área de éste es mínima (solución al problema principal) [acciones de Edificación].

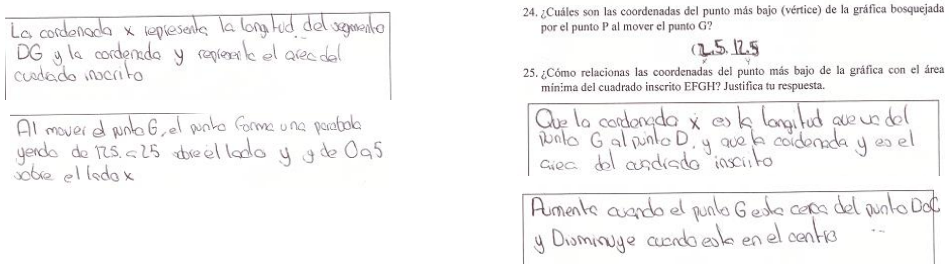


Figura 4.40. Observaciones del equipo conformado por el estudiante B, de la gráfica bosquejada por el punto P, parte II.

Los estudiantes del equipo conformado por el estudiante C reorganizaron sus construcciones previas y formaron bloques de edificación para la construcción del elemento *RG* (acciones de tercera categoría). El siguiente extracto de la entrevista evidencia las conjeturas más relevantes de los estudiantes al asociar *D, V, G* y *m*. Se usan los códigos C, C1, C2 y C3 para referirse a los estudiantes que intervienen en la conversación y el código I para referirse al investigador.

[92] I: ¿A qué magnitud corresponde la coordenada x del punto P?, ¿y a que magnitud corresponde la coordenada y del mismo punto?

[93] C1: x es la longitud del segmento DG y y es el área de EFGH.

[94] I: ¿Qué pueden decirme de la gráfica trazada por el punto P?

[95] C: El rastro del punto P forma una parábola cunado movemos el punto G en el segmento DC.

[96] C3: Creo que también se puede ver que mientras más cerca este G de la mitad del segmento DC el área disminuye y entre más lejos este, el área aumenta.

[97] C: En un punto el área es mínima, bueno específicamente en *(2.5, 12.5).*

[98] I: ¿Podrían decirme cuales son los valores que puede tomar la coordenada x y cuales la coordenada y, por qué?

[99] C: Mmmmmj la coordenada x puede tomar de 0 a 5 por que es la longitud de DG y la coordenada y de 12.5 a 25 porque es el área del cuadrado interno y la mínima área del cuadrado inscrito es 12.5 y la máxima 25 que sería el cuadrado original.

En los enunciados [92] y [93] el estudiante C1 identificó las magnitudes a las que corresponden las coordenadas del punto P [acciones de Reconocimiento]. En [94] y [95] este estudiante reconoció que la gráfica generada por el punto P al mover el punto G es una parábola y en [96] el estudiante C3 explicó la variación cuadrática que existe entre el área del cuadrado inscrito y la longitud del segmento DG [acciones de Edificación]. En [97] el estudiante C identificó el punto mínimo (vértice de la gráfica), además en [99] explicó que 12.5 es la menor área que puede tener el cuadrado inscrito. Por último, en [98] y [99] el estudiante C mostró acciones de Reconocimiento y Edificación al identificar que la coordenada x puede tomar valores de 0 a 5 (dominio de la función) y la coordenada y de 12.5 a 25 (rango de la función) y al justificar su respuesta. De este modo el equipo conformado por C construyó el elemento *RG*.

A diferencia de los tres equipos anteriores, el equipo conformado por el estudiante D no pudo realizar acciones de Construcción del elemento *RG*, al no reorganizar todos los elementos construidos anteriormente. En la figura 4.41 se puede ver que estos estudiantes solo reconocieron que la gráfica bosquejada por el punto P al mover el punto G es una parábola, sin embargo, no identificaron la relación (variación) que existe entre el área del cuadrado inscrito y la longitud del segmento DG, el punto mínimo y mucho menos el rango de valores que pude tomar la coordenada x del punto P (longitud del segmento DG).

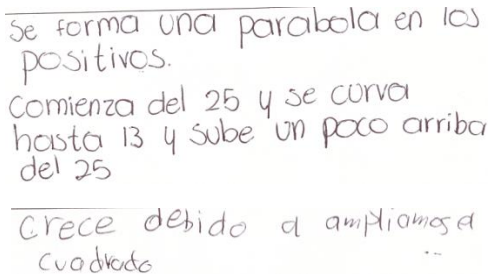


Figura 4.41. Observaciones del equipo conformado por el estudiante D, de la gráfica trazada por el punto P al mover el punto G, parte II.

Con la finalidad de construir el elemento *RA*, se propuso la parte III de la actividad 2 que consistía en contestar una serie de preguntas que llevarían al estudiante a encontrar la ecuación cuadrática que modelaba la situación principal. El siguiente episodio muestra las acciones realizadas por el equipo conformado por el estudiante B. Se usan los códigos B, B1, B2 y B3 para referirse a los estudiantes que intervienen en la conversación y el código I para referirse al investigador.

[100] I: ¿Qué relación existe entre el segmento DG y GC?

[101] B: Pues, cuando DG es mayor, GC es menor y viceversa.

[102] I: ¿Cuál es la relación algebraica que existe entre el segmento DG y GC?

[103] B: Si llamamos x a DG y y a GC, entonces$x + y = 5$, porque cada lado mide 5.

[104] I: [*Retoma la pregunta 30 de la parte III de la Actividad*]

[105] B: Si sumas x mas y te da 5, si a 5 le restas el valor de la variablete da como resultado la medida de la otra variable, por eso escribimos $5 - x = y$.

[106] I: Escriban una expresión algebraica mediante la cual puedan calcular el área del cuadrado inscrito (EFGH).

Del enunciado [100] al [103] el estudiante B reconoció la relación algebraica que existe entre los segmentos DG y GC. En [104] y [105] el mismo estudiante fue capaz de despejar, de manera correcta, la incógnita y de la relación algebraica obtenida [acciones de Edificación]. En este dialogo, es posible observar que los demás estudiantes (B1, B2 y B3) se limitaron a aprobar las respuestas dadas por el estudiante B. En el siguiente episodio se muestra como los estudiantes que conformaban dicho equipo discutieron diferentes

procedimientos para encontrar la expresión algebraica, mediante la cual pudieran calcular el área del cuadrado inscrito.

[107] B: Miren, $GC = 5 - DG$ o $y = 5 - x$ y como $DH = GC$, entonces $DH = 5 - DG$ ósea, $DH = 5 - x$, si?

[108] B1: No, ¿cómo?

[109] B: Si, mira, al rotar el cuadrado,GC es igual a DH, seria una proporcionalidad en cada lado.

[110] B2: Ahora para sacar el área del cuadrado inscrito ¿cómo le hacemos?

[111] B3: Seria, HG es el lado del cuadrado inscrito, entonces seria lado por lado, osea, HG por HG. Ammmmj ¿pero cómo sacamos HG? [*Se queda pensando*]

[112] B1: Ya se, hay que sacar el área de estos triangulitos [*señala los cuatro triángulos rectángulos que se forman en la figura]* y restárselos al área del cuadrado grande.

[113] B: ¿Cómo sacamos el área de los triángulos?

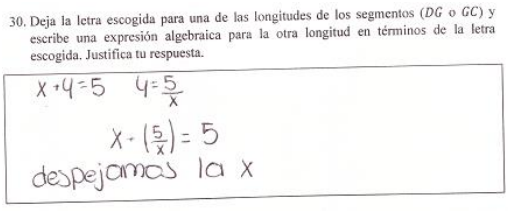
[114] B1: Seria DG por DH entre dos, que es la base por la altura entre dos, y eso lo multiplicamos por cuatro para que sean los cuatro triángulos y se lo restamos a 25.

[115] B: Aaaa ya! entonces con las letras escogidas seria: $A = 25 - \left[\frac{(x)(5-x)}{2} \times 4\right]$.

En el enunciado [107], el estudiante B reconoció que los segmentos DH y GC son iguales por lo tanto el segmento $DH = 5 - x$ [acciones de Reconocimiento]. En [109] el estudiante B justificó su respuesta al explicarle a su compañero (B1) cómo obtuvo que DH es igual a GC, por lo tanto, el estudiante B realizó acciones de Edificación mientras el estudiante B1 manifestó acciones de Reconocimiento. En el enunciado [111] el estudiante B3 propuso una manera para obtener el área del cuadrado inscrito, sin embargo, no le fue posible avanzar con su idea, ya que no mostro acciones de Reconocimiento de la relación algebraica que relaciona HG (lado del cuadrado inscrito) con el segmento DG. En [112] el estudiante B1 identificó una estrategia para encontrar el área del cuadrado inscrito [acciones de Edificación] que consistía en restar el área de los triángulos rectángulos que se forman en la figura al área del cuadrado ABCD. En [113] y [114] los estudiantes B y B1 manifestaron acciones de Reconocimiento y Edificación, al reconocer y justificar el

procedimiento que siguieron para obtener el área de los triángulos rectángulos que se forman. Por último, en [115] el estudiante B encontró la ecuación cuadrática que modela la situación inicial, es decir, la ecuación cuadrática que representa el área del cuadrado inscrito [acciones de Construcción del elemento *RA*]. De esta manera se puede observar cómo los estudiantes del equipo conformado por B reorganizaron sus acciones de Reconocimiento y Edificación para Construir el elemento *RA*.

En cambio, los estudiantes de los otros tres equipos no lograron construir el elemento principal de esta tarea (elemento *RA*) ya que no fueron capaces de encontrar la ecuación cuadrática mediante la cual se pueda calcular el área del cuadrado inscrito. Los equipos conformados por los estudiantes A, C y D reconocieron la relación que existe entre los segmentos DG y GC, es decir, escribieron: $DG + GC = 5$. El equipo conformado por D además de reconocer la relación anterior intentó despejar la incógnita $y = GC$, pero lo hicieron de manera incorrecta [acciones de Edificación erróneas] (véasela figura 4.42). De esta manera se concluye que el equipo conformado por el estudiante B fue el único que construyó los elementos *RA* y *RG*, por lo tanto, construyeron el nuevo conocimiento matemático abstracto: Análisis de las representaciones gráfica y algebraica de una función cuadrática como herramienta para construir el constructo de función cuadrática (*CFC*).


30. Deja la letra escogida para una de las longitudes de los segmentos (DG o GC) y escribe una expresión algebraica para la otra longitud en términos de la letra escogida. Justifica tu respuesta.

$x+4=5 \quad 4=\frac{5}{x}$

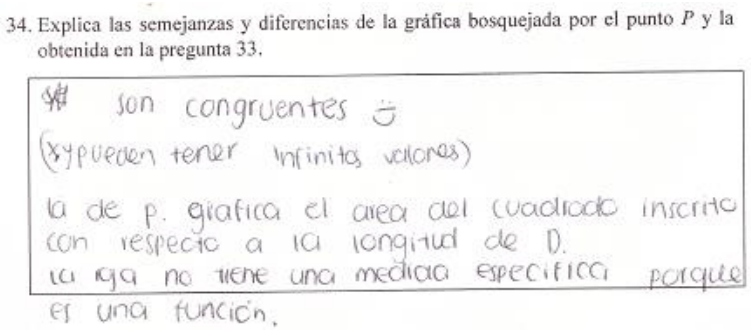
$x-(\frac{5}{x})=5$

despejamos la x

Figura 4.42. Despeje de la variable y, hecho por el equipo conformado por el estudiante D, de la ecuación $x + y = 5$, parte III.

En esta secuencia de actividades diremos que el proceso de Consolidación del constructo principal de conocimiento (constructo *CFC*) inicia cuando los estudiantes relacionan los elementos *RA y RG* construidos anteriormente. En las últimas dos preguntas de esta actividad se les pidió a los estudiantes que graficaran en el programa (Geogebra) la expresión algebraica que obtuvieron para el área del cuadrado inscrito EFGH, y que explicaran por qué esta gráfica coincidía con la gráfica generada por el punto P al mover el punto G, además de mencionar algunas semejanzas y diferencias entre estas dos gráficas. El

equipo conformado por el estudiante B fue el único que contesto esta parte de la actividad, ellos mostraron como relacionaron los constructos *RG y RA* para Consolidar el nuevo constructo *CFC*. En la figura 4.43 se muestran las respuestas, de los estudiantes de este equipo, a las últimas dos preguntas, en ellas se observa que los estudiantes Reconocieron que la gráfica generada por la expresión algebraica es congruente con la gráfica generada por el punto P, pero no explicaron el porqué, es decir, no mostraron acciones de Edificación de esta congruencia. Además, reconocieron que, en la gráfica generada por la expresión algebraica la variable x puede tomar infinitos valores, en cambio, en la gráfica generada por el punto P al mover el punto G , la variable x solo toma valores de 0 a 5, ya que en este caso la variable x representa la longitud del segmento DG. Del mismo modo reconocieron que en la gráfica generada por la expresión algebraica, la variable y puede tomar infinitos valores, (de 12.5 a infinito) en cambio, en la gráfica generada por el punto P al mover el punto G, la variable y solo toma valores de 12.5 a 25 ya que, esta variable, representa el área que puede tener el cuadrado inscrito.


34. Explica las semejanzas y diferencias de la gráfica bosquejada por el punto *P* y la obtenida en la pregunta 33.

son congruentes ☺
(x y pueden tener infinitos valores)
la de p. grafica el area del cuadrado inscrito con respecto a la longitud de D.
la otra no tiene una medida especifica porque es una función.

Figura 4.43. Explicación de los estudiantes del equipo conformado por B, del por qué la gráfica bosquejada por el punto P coincide con la gráfica generada por la expresión algebraica, parte III.

4.4. Análisis de la Actividad 3

4.4.1. Categorías: Reconocimiento (R) y Edificación (B).

En las partes I y II de la actividad 3 se observaron las primeras acciones epistémicas de Reconocimiento y Edificación de constructos previos como: área y perímetro de una figura rectangular, máxima y mínima longitud del ancho del borde, puntos en un plano cartesiano, etc. En las preguntas 1 y 2, de esta actividad, se les pidió a los estudiantes que explicaran el procedimiento que realizan para calcular el perímetro y el área de una figura rectangular. El

equipo de estudiantes (A, B, C y D) mostro acciones de Reconocimiento y Edificación de los constructos de área y perímetro de un rectángulo. Ellos reconocieron que el perímetro de un rectángulo se calcula sumando las longitudes de todos sus lados y el área de un rectángulo, multiplicando la longitud de su base por la longitud de su altura. En la figura 4.44 se puede ver la justificación dada, por los estudiantes, de esta misma tarea, en la cual utilizan el registro algebraico de los dos constructos en cuestión, para probar cómo se calculan, el área y el perímetro, de un figura rectangular. En ambas respuestas los estudiantes añadieron que dichos constructos (perímetro y área de una figura rectangular) fueron enseñados y aprendidos en un nivel, de educación, anterior al que se encontraban en esos momentos.

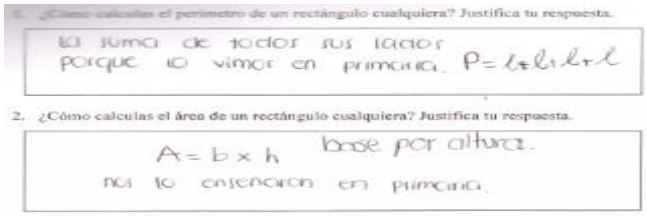


Figura 4.44. Justificación del equipo principal, de cómo calcular el perímetro y el área de una figura rectangular, Parte I.

En la pregunta 3 los estudiantes calcularon el área y el perímetro de un mantel rectangular que medía $4m$ de largo por $5m$ de ancho, dando evidencia de acciones de Edificación de los constructos de área y perímetro de una figura rectangular, pues utilizaron los procedimientos, explicados en las dos preguntas precedentes, para lograr un objetivo localizado, como lo es, la solución de un problema (véase la figura 4.45). En esta respuesta se puede ver que el equipo de estudiantes reconoció de manera correcta las unidades de medida correspondientes al área y al perímetro de una figura, ya que en su respuesta indicaron, que en este caso, el área del rectángulo se mide en metros cuadrados y el perímetro, en metros [acciones de Reconocimiento].

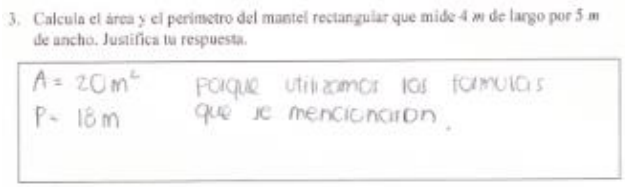


Figura 4.45. Justificación, del equipo principal, del área y el perímetro del mantel rectangular, parte I.

En los siguientes párrafos se encuentran distintos episodios que sucedieron mientras los estudiantes del equipo principal resolvían la pregunta cuatro de la parte I. En esta pregunta, se les pidió a los estudiantes que explicaran, que significaba, que Roberto tuviera 10 metros cuadrados de tela para crear un borde al rededor del mantel, y justificaran su respuesta. En esta parte del trabajo con lápiz-y-papel, no sólo se observaron acciones de Reconocimiento, sino también de Edificación. De aquí en adelante se usaran los códigos A, B, C y D para referirse a los estudiantes que interviene en la conversación y el código I para referirse al investigador.

[116] C: Significa que va a utilizar $10\ m$ para crear el borde.

[117] D: Pero de todos modos no le alcanza, porque el perímetro es $18\ m$.

[118] B: No, mira, el tienen una tela que son 10 m^2 y esos $10\ m^2$ los va a fraccionar para crear el borde.

[119] D: Aaa, ok, ósea, cortarlos y pegarlos.

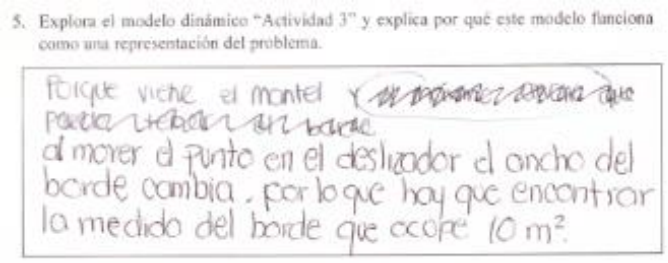
[120] A: Entonces vamos a dividir una tela de 10 m^2 en partes, para formar el borde, pero no sabemos cómo lo vamos a dividir para tomar toda la tela, ¿si?

[121] C: Así es.

En el enunciado [116] se puede notar que el estudiante C se equivocó, al mencionar 10 m de tela en lugar de 10 m^2, esto ocasionó que su compañero (estudiante D) se confundiera (véase el enunciado [117]). Sin embargo, en el enunciado [118] el estudiante B explicó a todos sus compañeros el significado de tener $10\ m^2$ de tela para formar el borde de un mantel [acciones de Reconocimiento]. Del [119] al [121] se observa que los cuatro estudiantes reconocieron dicho constructo. Mientras los estudiantes B, A y C reconocieron el constructo, el estudiante B manifestó acciones de Edificación, al explicarles a sus compañeros.

En la pregunta cinco (parte II de esta actividad) se les pidió a los estudiantes que exploraran el modelo dinámico "Actividad 3" y explican porque ese modelo dinámico funcionaba como una representación del problema. Los estudiantes del equipo principal observaron que, el rectángulo de $4m$ de base y $5m$ de altura representaba el mantel rectangular que tejió Roberto [acciones de Reconocimiento] y observaron y analizaron que

al mover el punto en el deslizador, el ancho del borde cambiaba, por lo que requerían, encontrar la medida del ancho del borde de tal manera que el área del borde fuera 10 m^2 [acciones de Reconocimiento y Edificación] (véase la figura 4.46). De esta forma, se puede ver, que los estudiantes de este equipo comprendieron de forma correcta el problema a tratar, sin embargo, evidenciaron en sus respuestas y diálogos, que encontrar la medida del ancho del borde de tal manera que se use toda la tela (10 m^2), no era algo fácil de hacer. Por lo tanto, los estudiantes manifestaron la necesidad de un nuevo constructo que los ayudara a encontrar la solución al problema original.


5. Explora el modelo dinámico "Actividad 3" y explica por qué este modelo funciona como una representación del problema.

Porque viene el mantel y [illegible] para [illegible] el borde
al mover el punto en el deslizador el ancho del borde cambia, por lo que hay que encontrar la medida del borde que ocupe 10 m².

Figura 4.46. Observaciones del equipo principal, al explorar el modelo dinámico, parte II.

Cuando los estudiantes exploraron el modelo dinámico "Actividad 3" en Geogebra, realizaron acciones de Reconocimiento de las longitudes que variaban y de las que permanecían constantes al cambiar el ancho del bode. En la pregunta 7, se les pidió explorar el modelo dinámico y analizar qué valores puede tomar el ancho del borde. En el siguiente episodio, los cuatro estudiantes discutieron el rango de valores que puede tener el ancho del bode y mostraron acciones de Reconocimiento y Edificación de la mínima y máxima longitud del ancho del borde.

[122] B: Pues según el modelo, de 0 a 3.

[123] A: No puede ser cero, tendría que ser algo como 0.01, porque si fuera cero no habría borde.

[124] B: Aaa bueno, sí.

[125] D: Pero, el ancho del borde podría ser más que tres, ¿no?

[126] C: En el modelo dinámico solo viene hasta tres.

En el enunciado [122] el estudiante B reconoció que el ancho del borde puede tomar valores de 0 a 3 en el modelo dinámico, sin embargo, en el enunciado [123] y [125] los estudiantes A y D se dieron cuenta de dos cosas: 1) que la longitud del ancho del borde no puede ser cero, porque si lo fuera no habría borde y 2) de que en realidad el ancho del borde podría ser una magnitud mayor a 3 *m*. Este tipo de acciones dan evidencia de acciones de Reconocimiento y Edificación del rango de valores que puede tener el ancho del borde.

Después de explorar el modelo dinámico se les pidió a los estudiantes que llenaran una tabla con los valores solicitados (ancho del borde, largo del mantel con borde, ancho del mantel con borde, área del mantel con borde y área del borde) y que explicaran cómo obtuvieron cada uno de los valores. En la figura 4.47 se puede ver que los estudiantes de este equipo asignaron valores de 0 a 3 a los valores del ancho del borde y llenaron la tabla de manera correcta [acciones de Reconocimiento]. Para obtener los valores de la segunda columna, los alumnos, explicaron que sumaron el doble de la medida del ancho del borde con el largo del mantel [acciones de Edificación], de igual forma, para obtener los valores de la tercera columna sumaron el doble de la medida del ancho del borde con el ancho del mantel [acciones de Edificación]. Para obtener el área del mantel con borde (cuarta columna) los estudiantes del equipo multiplicaron el largo del mantel con borde (datos de la segunda columna) por el ancho del mantel con borde (datos de la tercera columna) [acciones de Edificación] y por último, para obtener el área del borde, ellos restaron el área del mantel (20 m^2) al área del mantel con borde, es decir, a los valores de la cuarta columna le restaron 20 m^2.

8. Utiliza el modelo dinámico y completa la siguiente Tabla con los valores solicitados.

Ancho del borde	Largo del mantel con borde	Ancho del mantel con borde	Área del mantel con borde	Área del borde
0	4	5	20	0
0.51	5.02	6.02	30.22	10.22
1	6	7	42	22
1.25	6.5	15	48.75	28.75
2	8	9	72	52
2.60	9.2	10.2	93.84	73.84
3	10	11	110	90

Figura 4.47. Tabla realizada por los estudiantes del equipo principal, parte II.

Después de llenar la tabla, los alumnos encontraron la magnitud del ancho del borde correspondiente a los 10 m^2 del área del borde, ellos señalaron que la longitud del ancho del borde debería ser 0.5 m para ocupar los 10 m^2 de tela que se tenían (solución al

problema principal) de esta manera los estudiantes manifestaron acciones de Edificación al contestar esta tarea. El siguiente dialogo muestra un extracto del trabajo de los estudiantes que justifica lo previamente afirmado.

[127] D: [Lee la pregunta 13 de la actividad 3].

[128] A: Todos se pasaron.

[129] B: Pues, entonces, esta antes del 0.51.

[130] A: A ver con 0.5 [comienza a hacer cálculos].

[131] A: Es 0.5, porque con 0.5 el área es 10 m^2, cerrado.

[132] C: No es cierto, da menos de 10 m^2.

[133] B: A ver, de largo total seria 0.5+0.5+4, que es igual a 5, de ancho total seria 6, luego seis por cinco es treinta, menos veinte, igual a 10m^2.

[134] C: Ok.

En los enunciados del [127] al [129] se puede ver que los estudiantes A y B reconocieron que en los datos de la tabla no se encontraba el valor de 10 m^2 del área del borde, por lo tanto, buscaron un valor del ancho del borde, que correspondiera a los 10 m^2 (como se puede ver en los enunciados [130] y [131]). En [130] los estudiantes reconocieron que el valor del ancho del borde correspondiente a los 10 m^2 del área del borde, era 0.5, sin embargo en [132] se observa que el estudiante C no logró hacer este reconocimiento, por lo que, en [133] el estúdiate B comenzó a explicarle (al estudiante C) el procedimiento que siguieron para llagar a tal resultado [acciones de Edificación].

Después de llenar la tabla de valores, se les solicitó a los estudiantes que graficaran los puntos que tuvieran como coordenada x (ancho del borde) y como coordenada y (área del borde) y que examinar la gráfica formada por estos puntos. El equipo principal graficó de manera correcta los puntos con las coordenadas correspondientes (véase la figura 4.48) [acciones de Reconocimiento] y explicó, que la gráfica formada por dichos puntos no era una recta, sino, la parte creciente de una parábola [acciones de Reconocimiento]. En su respuesta (véase la figura 4.48) los estudiantes, justificaron que la gráfica de los puntos sería una parábola si se graficaran los puntos con coordenadas x negativas, sin embargo, en

el contexto del problema las coordenadas de x, negativas, representan longitudes del ancho del borde negativas, por lo que, estos puntos, no existen en el problema [acciones de Edificación].

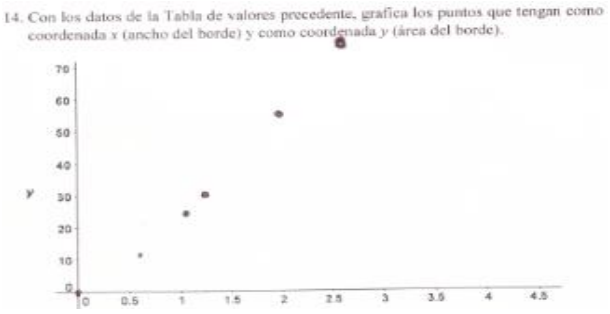


Figura 4.48. Gráfica formada por los puntos con coordenada x (ancho del borde) y con coordenada y (área del borde) hecha por los estudiantes del equipo principal, parte II.

En la siguiente Tabla se enlistan los constructos previos más importantes que fueron Reconocidos y Edificados, por los estudiantes del equipo principal, en las tareas de la Actividad 3 vistas hasta este momento.

Constructo previo
Área y perímetro de una figura rectangular
Unidades de medida del área y perímetro de una figura
Mínima y máxima longitud del ancho del borde (dominio de la función)
Ancho del borde correspondiente a los 10 m^2 del área del borde (solución al problema)
Graficar puntos en un plano cartesiano
Gráfica formada por los puntos (parábola)

4.4.2. Categorías: Construcción (C) y Consolidación (+C).

En la actividad 3 se dice que los estudiantes han construido el elemento *RG* cuando por sus palabras o acciones relacionan los constructos previos de: dominio (*D*), variación (*V*), gráfica de la función (parábola) (*G*) y punto solución (P). Del mismo modo se dice que los estudiantes han construido el elemento *RA*, si son capaces de encontrar la ecuación cuadrática que modela la situación y las raíces de dicha ecuación (R), esto utilizando conocimientos anteriores.

De la pregunta 15 a la 19, de la parte II, de la actividad 3, se les pidió a los estudiantes que observaran y analizaran el rastro del punto P al mover el deslizador y que

explicaran todo lo referente a la gráfica generada por este punto. En el siguiente episodio los estudiantes discutieron esta parte de la actividad.

[135] A: Es igualita a la gráfica que hicimos en la pregunta 14.

[136] C: Entonces, la coordenada x del punto P es el ancho del borde y la coordenada y es el área del borde.

[137] A: Solo que en la gráfica generada por el punto P hay más puntos que en la que dibujamos en la pregunta 14.

[138] I: ¿Qué más observan?

[139] B: Que la gráfica no es una recta, sino una parte de una parábola, porque, mire, si dibujáramos los puntos con coordenadas x negativas nos diera una parábola, pero no existen para las medidas del rectángulo.

[140] I: ¿Entonces que valores puede tomar la coordenada x del punto P?

[141] B: Pues, de 0 a infinito, porque es el ancho del borde.

[142] I: ¿Cómo varía el área del borde conforme cambia la longitud del ancho del borde?

[143] D: Conforme el ancho cambia, su área también, si aumenta el ancho aumenta el área y si disminuye el ancho disminuye el área.

[144] I: Observando la gráfica ¿Qué tan ancho debe ser el borde para usar los 10 m^2 de tela?

[145] D: De 0.5 [Señala el punto con coordenada x, 0.5, y con coordenada y , 10]

En el enunciado [135] el estudiante A se dio cuenta de que la gráfica generada por el punto P coincide con la gráfica bosquejada en la pregunta 14 [acciones de Reconocimiento]. En [137] este mismo estudiante explicó las semejanzas y diferencias entre ambas gráficas, realizando acciones de Edificación. En el enunciado [136] el estudiante C reconoció y justifico que la coordenada x del punto P es la longitud del ancho del borde y que la coordenada y pertenece a la magnitud del área del borde, de esta forma realizó acciones de Reconocimiento y Edificación de las coordenadas del punto P. En los enunciados [138] y [139] el estudiante B reconoció que la gráfica generada por el punto P al mover el deslizador es una parábola, y justificó su respuesta [acciones de Edificación]. En los enunciados [140] y [141] el estudiante B identificó que el rango de valores que

puede tomar la coordenada x del punto P es de cero a infinito [acciones de Reconocimiento] y justificó su respuesta diciendo que dicha coordenada pertenecía a la longitud del ancho del terreno [acciones de Edificación]. En los enunciados [142] y [143] el estudiante D explicó la variación del área del terreno conforme aumenta la longitud del ancho del terreno [acciones de Reconocimiento y Edificación], dicha variación corresponde solo a la parte creciente de la gráfica generada por el punto P al mover el deslizador. Por último, en los enunciados [144] y [145] el estudiante D señaló, con el dedo, el punto $(0.5, 10)$ e identificó que, para que el área del borde sea de 10 m^2 el ancho del borde deberá ser de 0.5 m (solución al problema) [acciones de Edificación]. Con este análisis se concluye que los estudiantes del equipo principal construyeron el elemento *RG* al reorganizar los constructos previos de: variación (V), gráfica de la función (G), dominio de la función (D) y el punto solución (P).

En la parte III, de la Actividad 3, se les pidió los estudiantes contestar una serie de preguntas (4 preguntas) que los llevarían a encontrar la ecuación cuadrática que modela la situación en cuestión, es decir, una expresión algebraica para el área del borde del mantel en términos de una sola letra. Los estudiantes del equipo principal asignaron una letra al ancho del borde (letra x) y escribieron una expresión algebraica para el largo del mantel con borde y otra para el ancho del mantel con borde [acciones de Reconocimiento], además, justificaron su respuesta [acciones de Edificación]. Después, utilizaron las expresiones, encontradas anteriormente, para el largo y el ancho del mantel con borde, y escribieron una expresión algebraica para el área del mantel con borde, justificando su procedimiento [acciones de Reconocimiento y Edificación]. Por último, escribieron una expresión algebraica para el área del borde del mantel en términos de una misma letra (x) [acciones de Reconocimiento] y explicaron que, necesitaban restarle el área del mantel (20 m^2) a la expresión algebraica obtenida en la pregunta precedente para obtener la expresión algebraica que representa el área del borde del mantel [acciones de Edificación] (véase la figura 4.49).

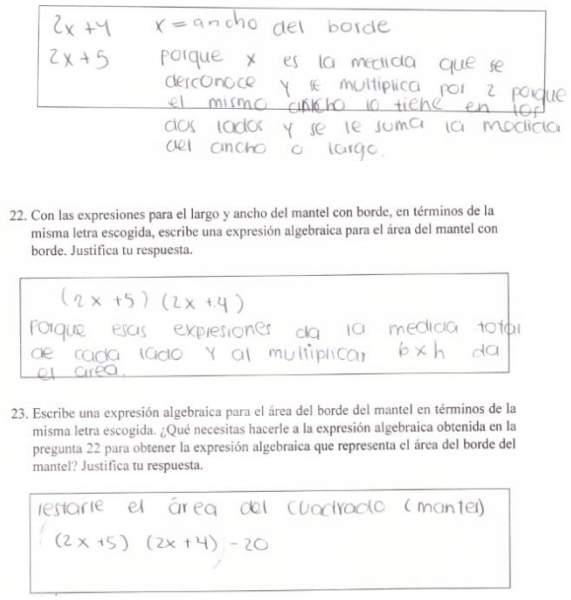


Figura 4.49. Procedimiento y justificación, del equipo principal, de la expresión algebraica para el área del borde del mantel, parte III.

En la siguiente pregunta se les pidió a los estudiantes que, utilizando la expresión algebraica para el área del borde del mantel, encontraran la solución al problema, es decir, el ancho del borde necesario para utilizar toda la tela (10 m^2). En la figura 4.50 se observa que los estudiantes reconocieron la ecuación cuadrática que modela la situación principal [acciones de Reconocimiento], que desarrollaron el producto de binomios e igualaron a cero la ecuación cuadrática. En la respuesta, de estos estudiantes, se puede ver que utilizaron el procedimiento de "fórmula general" para encontrar las raíces de la ecuación [acciones de Edificación]. Los estudiantes del equipo principal encerraron la respuesta correcta y justificaron su razonamiento [acciones de Reconocimiento y Edificación]. Dichas acciones mostraron evidencia explicita de que los estudiantes, de este quipo, han construido el elemento *RA*, al encontrar la ecuación cuadrática que modela la situación y las raíces de dicha ecuación. El trabajo de los estudiantes a lo largo de esta tarea, los llevó a mostrar la acción de Construcción del elemento general de conocimiento *CFC* al construir los elementos constitutivos *RG y RA*. Esta nueva acción surgió cuando los estudiantes reorganizaron e integraron los constructos estudiados durante las primeras partes de la actividad 3.

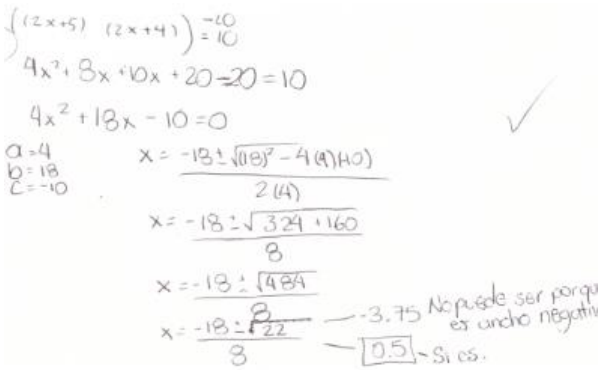


Figura 4.50. Procedimiento, del equipo principal, para encontrar la solución al problema de manera algebraica, parte III.

En la siguiente tarea de esta actividad, se les pidió a los estudiantes que graficaran en Geogebra la expresión algebraica que obtuvieron para el área del borde del mantel, que mencionar algunas semejanzas y diferencias entre la gráfica generada por el punto P al mover el deslizador y la gráfica generada por la expresión algebraica, además, de encontrar gráficamente la solución al problema. Los cuatro estudiantes reconocieron que la gráfica generada por el punto P es una parte de la gráfica generada por la expresión algebraica, dado que, la gráfica generada por la expresión algebraica va de menos infinito a infinito, en el eje x, y la grafica generada por el punto P, de 0 a 3. En el eje y, la gráfica generada por la expresión algebraica abarca todos los números reales, sin embargo, en la gráfica generada por el punto P solo va de 0 a 90. También añadieron que los puntos con coordenadas negativas, de la gráfica correspondiente al área del borde (bosquejada en Geogebra), no tienen sentido en el contexto del problema, ya que no existen longitudes negativas. Por último, mencionaron, en su respuesta, que la solución al problema se encuentra en la intersección de las gráficas: $y = 10$ y $x = 0.5$ (véase la figura 4.51). Respecto a los resultados obtenidos en esta Actividad, se puede decir que, al relacionar los constructos *RG* y *RA*, los estudiantes, mostraron acciones que conforman ahora el inicio de la Consolidación del elemento *CFC*.

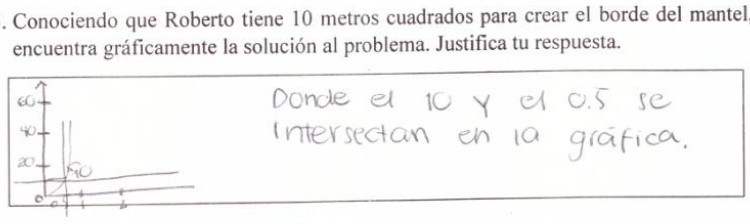


Figura 4.51. Justificación del equipo principal, de la representación gráfica de la solución al problema, parte III.

4.5. Discusión general sobre los resultados surgidos de las Actividades

Los resultados surgidos de las actividades realizadas, por los equipos de estudiantes, evidencian el proceso de construcción de nuevo conocimiento matemático abstracto (Análisis de las representaciones: gráfica y algebraica de una función cuadrática como herramienta para construir el constructo de función cuadrática) y de su consolidación, a través de la manifestación de las tres acciones epistémicas observables del Modelo *RBC* (Dreyfus, 2015). Específicamente en las primaras dos partes de las actividades de la secuencia didáctica implementada, se observan pruebas contundentes de acciones de Reconocimiento y Edificación y en las ultimas partes de Construcción y de Consolidación del nuevo constructo.

Durante el desarrollo de la actividad 1, se observaron acciones de las cuatro categorías diferentes: Reconocimiento, Edificación, Construcción y Consolidación, por parte de los estudiantes. En la parte I de esta Actividad y en las primeras tareas de la parte II se manifestaron, de igual forma, acciones de las categorías de Reconocimiento y de Edificación, estas manifestaciones, se debieron a que los estudiantes, no solo identificaron constructos necesarios para realizar las tareas requeridas, sino que además relacionaron e integraron esos constructos para resolver, adecuadamente, cada terea y justificar sus respuestas.

En la parte II y parte III de la actividad 1, los estudiantes, realizaron acciones de Construcción de elemento general *CFC*, al mostrar acciones de Construcción de sus dos elementos constitutivos, *RG* y *RA*. Cabe resaltar que, en esta actividad, los estudiantes construyeron el elemento *RG* cuando por sus palabras o acciones relacionaron los constructos previos de dominio (*D*), variación (*V*), gráfica de la función (parábola) (*G*) y punto máximo (vértice) de la gráfica de la función (*M*). Del mismo modo, los estudiantes construyeron el elemento *RA*, al ser capaces de encontrar la ecuación cuadrática que modelaba la situación utilizando conocimientos anteriores. Por último, en la parte III de esta actividad los estudiantes manifestaron acciones de la categoría de Consolidación al relacionar los nuevos constructos de *RG* y *RA*.

De forma similar, a la actividad 1. En las actividades 2 y 3, los estudiantes desarrollaron acciones de las categorías de Reconocimiento, Edificación, Construcción y

Consolidación. En la actividad, 2 los estudiantes construyeron el elemento *RG* cuando por sus palabras o acciones relacionaron los constructos previos de dominio (*D*), variación (*V*), gráfica de la función (parábola) (*G*) y punto mínimo (vértice) de la gráfica de la función (*m*). Del mismo modo, los estudiantes construyeron el elemento *RA*, al ser capaces de encontrar la ecuación cuadrática que modelaba la situación utilizando conocimientos anteriores. Por último, en la actividad 3, los estudiantes construyeron el elemento *RG* cuando por sus palabras o acciones relacionaron los constructos previos de: dominio (*D*), variación (*V*), gráfica de la función (parábola) (*G*) y punto solución (P). Del mismo modo se dice que los estudiantes construyeron el elemento *RA*, al ser capaces de encontrar la ecuación cuadrática que modela la situación y las raíces de dicha ecuación, esto utilizando conocimientos anteriores.

De esta forma, los estudiantes reorganizaron las diferentes acciones de Reconocimiento y Edificación surgidas, en las tres actividades para construir y consolidar el nuevo constructo *CFC*. Esta evidencia secuenciada permitió observar el proceso de abstracción que hicieron los estudiantes sobre el concepto de función cuadrática, mediante el análisis de las acciones epistémicas del modelo *RBC*.

El análisis de datos, surgido en esta investigación, también muestra características importantes del papel jugado por el contexto social en la construcción del proceso de abstracción de los estudiantes. La interacción social entre los equipos promovió en ellos la construcción de su proceso de abstracción, principalmente el flujo de conocimientos de los estudiantes A, B, C y D ayudó a sus compañeros a producir acciones de las diferentes categorías, a través del intercambio de preguntas y discusiones. Esta interacción de los estudiantes, durante la implementación de las actividades, les permitió crear bases comunes de conocimiento compartido para el grupo de estudiantes, que utilizaron y pudieron seguir utilizando para ejecutar acciones de Construcción. En general, el estudio mostró como el conocimiento compartido es construido del conocimiento individual.

Los artefactos, como computadoras y software es otro componente del contexto, que en esta investigación tuvo un papel crucial en la construcción del conocimiento de los estudiantes. Por ejemplo, tras el análisis de los modelos dinámicos, de las tres actividades, los estudiantes, lograron visualizar el problema y realizar acciones de las categorías de

Reconocimiento y Edificación de la solución, que en el ambiente de lápiz y papel no pudieron reconocer. Así mismo, a través del uso y el análisis de las gráficas generadas, en Geogebra, por los puntos P, en las actividades 2 y 3, y por el punto N, en la actividad 1, los estudiantes lograron Construir el elemento *RG*. El uso del Software, les permitió a los estudiantes un acceso a las diferentes representaciones de una función cuadrática y de esta manera ayudó a los estudiantes a construir el elemento principal de conocimiento, *CFC* y a iniciar su consolidación.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este capítulo, se exponen las conclusiones de la presente investigación, las cuales son el resultado del análisis y la discusión de datos recolectados. En primer lugar, se consideran los objetivos de investigación y, en segundo lugar, se retoman las preguntas de investigación que guiaron este estudio.

El objetivo general de la investigación se cumplió de manera satisfactoria, pues a través del estudio y la identificación de las acciones epistémicas del modelo RBC, manifestadas por los estudiantes, durante la resolución de la secuencia didáctica diseñada en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico, fue posible observar el proceso de abstracción que sobre el concepto de función cuadrática llevaron a cabo dichos estudiantes.

El uso del ambiente tecnológico potenció el aprendizaje del concepto de función cuadrática en los estudiantes, al promover la construcción de acciones de Reconocimiento y Edificación necesarias para la abstracción de dicho concepto que en el ambiente de lápiz-y-papel no fue posible lograr. Además, el uso del software, les permitió a los estudiantes un acceso a las diferentes representaciones de una función cuadrática y de esta manera ayudó a los estudiantes a construir el elemento principal de conocimiento (*CFC*) y a iniciar su consolidación.

Al final del capítulo, se plantean algunas consideraciones finales, derivadas de la presente investigación. En las cuales se remarca la importancia de la acción mediadora del profesor o investigador y del uso adecuado de la tecnología para lograr aprendizajes en las matemáticas.

5.1. Respecto a los objetivos de investigación

Esta investigación tuvo como objetivo general: analizar y documentar los procesos de abstracción que sobre el concepto de función cuadrática llevan a cabo los estudiantes de nivel básico (secundaria) mediante el trabajo, en equipo, con secuencias didácticas diseñadas en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico.

De acuerdo con Dreyfus (2015), el proceso de abstracción consiste típicamente en la reorganización de construcciones matemáticas anteriores, dentro de las matemáticas y por medios matemáticos, mediante la cual los estudiantes producen nuevas construcciones abstractas. En esta investigación, fue posible observar el logro de los estudiantes referente al proceso de abstracción del concepto de función cuadrática, a través del estudio y la identificación de sus acciones epistémicas (RBC) manifestadas durante la resolución de las secuencias didácticas.

Para lograr el objetivo general de esta investigación, se propusieron como objetivos específicos:

a) Diseñar e implementar actividades a realizar en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico cuyo propósito es promover en los estudiantes la construcción del concepto de función cuadrática.

El análisis de datos y la discusión de resultados presentados en el capítulo precedente permiten afirmar que el diseño y la implementación de las tres actividades promovió, en gran medida, la abstracción del concepto de función cuadrática por parte de los estudiantes. Ya que en la resolución de estas actividades, los estudiantes manifestaron las tres acciones epistémicas del modelo *RBC*, y además culminaron con acciones de Consolidación del concepto de función cuadrática.

Mediante la resolución de las primeras dos partes (parte I y II) de las tres actividades los estudiantes mostraron acciones de las categorías de Reconocimiento y Edificación de constructos previos como: área y perímetro de una figura (rectangular y cuadrangular), puntos en un plano cartesiano, gráfica formada por dichos puntos, etc. En la resolución de las tareas de las partes II, III y IV de estas actividades, los estudiantes manifestaron acciones de la categoría de Construcción de los dos elementos constitutivos, *RG* y *RA*, que

son necesarios para rastrear el proceso de Construcción del concepto de función cuadrática (*CFC).* En general, se puede decir que la resolución de las partes en las que estaba compuesta cada una de las actividades promovió la reorganización de construcciones matemáticas anteriores, para producir nuevas construcciones abstractas.

b) Analizar y documentar el impacto que tienen las actividades diseñadas, para potenciar la construcción del concepto de función cuadrática en estudiantes de tercer grado de nivel secundaria.

Los resultados obtenidos en las partes de trabajo con lápiz-y-papel y con tecnología, analizadas en el capítulo precedente, permiten observar que, en términos generales, el uso del ambiente tecnológico promovió en los estudiantes la abstracción del concepto de función cuadrática, ya que, gracias a la tecnología los estudiantes lograron realizar acciones de las categorías de Reconocimiento y Edificación necesarias para la Construcción de dicho concepto, que en el ambiente de lápiz y papel no fue posible lograr. Con el uso adecuado de la tecnología los estudiantes lograron visualizar diferentes constructos, que habían identificado de manera errónea en el ambiente de lápiz-y-papel o que simplemente no pudieron reconocer en este ambiente. El uso del software, les permitió a los estudiantes un acceso a las diferentes representaciones de una función cuadrática y de esta manera ayudó a los estudiantes a construir el elemento principal de conocimiento (*CFC*) y a iniciar su consolidación.

La ventajas que tuvo para los estudiantes trabajar con el software concuerda con lo declarado por Santos (2010) quien afirma que una característica relevante, relacionada con el aprendizaje, es que, mediante el uso de algunas herramientas tecnológicas, los estudiantes tienen la oportunidad de construir representaciones de los problemas que se desean resolver, lo cual les permite identificar relaciones o establecer conjeturas. Asimismo, pueden visualizar el comportamiento de ciertos parámetros (segmentos, rectas, figuras, etc.) como resultado de modificar algunos de estos y mantener fijos otros y determinar el camino o huella que dejan ciertos puntos o segmentos al mover alguna parte de una configuración geométrica

Es pertinente destacar que además de favorecer la adquisición de conceptos matemáticos, el trabajo con tecnología (Tabletas), ofrece ciertas ventajas, como incrementar el gusto e interés de los estudiantes por las matemáticas.

5.2. Respecto las preguntas de Investigación

A continuación se da respuesta a las preguntas de investigación que guiaron al presente trabajo, con base en el análisis expuesto en el capítulo precedente.

1) ¿Qué procesos de abstracción del concepto de función cuadrática manifiestan los estudiantes durante la implementación de las Actividades?

Los estudiantes manifestaron acciones correspondientes a las cuatro categorías del modelo RBC+C (Reconocimiento, Edificación, Construcción y Consolidación) pertenecientes al marco teórico AiC. Dichas categorías permitieron analizar el proceso de abstracción, que sobre el concepto de función cuadrática llevaron a cabo los estudiantes de tercer grado de nivel secundaria. En las dos primeras partes de las tres Actividades (parte I y II), los estudiantes manifestaron acciones de las categorías de Reconocimiento y Edificación, estas manifestaciones, se debieron a que los estudiantes, no solo identificaron constructos necesarios para realizar las tareas requeridas, sino que además relacionaron e integraron esos constructos para resolver, adecuadamente, cada terea y justificar sus respuestas. En las últimas partes de las tres actividades (parte II, III y IV) los estudiantes integraron y relacionaron todas sus acciones de Reconocimiento y Edificación manifestadas al resolver cada una de las partes previas a éstas, dando como resultado acciones de Construcción de los elementos *RG* y *RA* y como consecuencia del constructo *CFC*. Una vez construidos los elementos *RG* y *RA*, los estudiantes utilizaron estos dos constructos para contestar las últimas tareas y así mostrar acciones de Consolidación.

2) ¿Qué características deben tener las Actividades de tal forma que fomenten en los estudiantes la construcción del concepto de función cuadrática?

Se observó en el análisis de datos, del capítulo precedente que una de las características que deben tener las actividades de la secuencia didáctica, para fomentar en los estudiantes el montaje y la integración de las construcciones previas para producir nuevos conocimientos (acciones de Construcción del elemento *CFC*) es que, las tareas

incluyan diferentes representaciones de una función cuadrática (tabular, gráfica y algebraica). En las tres actividades, los estudiantes trabajaron primero en el ambiente de lápiz-y-papel la representación tabular de una función cuadrática y analizaron diferentes constructos como: variación, dominio, gráfica, punto máximo, punto mínimo y punto solución. En seguida, trabajaron en el ambiente tecnológico la representación gráfica, en donde, relacionaron los constructos antes mencionados y construyeron el elemento *RG*. Por último, se les pidió a los estudiantes encontrar la ecuación cuadrática que modelaba la situación original (representación algebraica) y graficarla en el software utilizado.

Otra característica importante de las actividades, fue pedirles a los estudiantes que compararan y contrastaran los resultados obtenidos en los ambientes de lápiz-y-papel (representación tabular y algébrica) y tecnológico (representación gráfica). La realización de estas tareas promovió en los estudiantes la visualización de constructos (e.g. variación, dominio, gráfica, etc.) y los motivo a construir nuevos razonamientos para justificar o generalizar los resultados obtenidos en las partes de trabajo con lápiz-y-papel y con tecnología de cada actividad. Estas tareas permitieron a los estudiantes construir o completar acciones de Reconocimiento y Edificación que en un solo ambiente no fue posible lograr, las cuales formaron parte del conjunto de acciones necesarias para la producción de las acciones de Construcción.

3) ¿Cómo los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico influyen en la abstracción del concepto de función cuadrática por parte de los estudiantes?

El análisis de los datos y la discusión de resultados expuestos en el capítulo precedente, de cada una de las actividades, permite afirmar que cuando los estudiantes trabajaron el problema inicial con lápiz-y-papel (parte I), el trabajo en este ambiente les proporcionó poca información para encontrar la solución al problema original. En cambio, al utilizar el Software los estudiantes adquirieron recursos de apoyo que les permitieron encontrar la solución, además de construir las representaciones tabular y gráfica de una función cuadrática. Por ejemplo, durante la Actividad 1, en la parte de trabajo con lápiz-y-papel (parte I) los estudiantes no reconocieron la cantidad de rectángulos que cumplen la condición de que la suma de tres de sus lados es igual a 50 m. Sin embargo, a través del modelo dinámico diseñado para esta actividad los estudiantes fueron capaces de Reconocer

la cantidad de rectángulos que cumplen dicha condición y de encontrar, de entre estos, el de mayor área.

Además de ayudar a encontrar la solución al problema original, el ambiente tecnológico permitió interaccionar con la gráfica de una función cuadrática, y manipularla para explorar a detalle sus características. Por ejemplo, en las tres Actividades propuestas, los estudiantes explicaron todo lo referente a las gráficas generadas por los puntos P o N (según la actividad). Este análisis, por parte de los estudiantes, los llevo a la Construcción del elemento *RG* (elemento central para rastrear el proceso de Construcción del constructo *CFC*).

Como resultado de la interacción con el Software, los estudiantes no solo validaron sus conjeturas propuestas en el ambiente de lápiz y papel, sino que también formularon nuevas en torno a las propiedades y características de una función cuadrática. En la parte III de la actividad 1, se les pidió a los estudiantes llenar una tabla con los valores solicitados y analizar la variación del área del terreno conforme aumenta su largo. En esta tarea, la mayoría de los estudiantes no logro reconocer la variación cuadrática del área del terreno. En cambio, en la siguiente tarea, que implicaba el uso del Software, los estudiantes reconocieron y justificaron [acciones de Reconocimiento y Edificación] la variación cuadrática que presentaba el área del terreno al aumentar la longitud de su largo.

Se puede afirmar que el uso de la tecnología potenció el aprendizaje del concepto de función cuadrática en los estudiantes. Sin embargo, a pesar de la gran influencia de este ambiente el uso de lápiz-y-papel fue crucial, pues estos dos ambientes [el dinámico y el estático] se complementan en el proceso de abstracción de los conceptos matemáticos.

5.3. Consideraciones finales

De acuerdo con los resultados reportados en el capítulo anterior, las herramientas tecnológicas introdujeron diferentes ventajas, respecto a las del ambiente de lápiz-y-papel al promover en los estudiantes las acciones de Construcción del concepto de función cuadrática. Sin embargo, es importante considerar que el uso eficaz de la tecnología en las clases de matemáticas depende de las acciones del profesor y del uso adecuado de esta herramienta; ya que la tecnología por sí misma no transmite el conocimiento a los

estudiantes. Los alcances que proporcione el ambiente tecnológico dependen del buen o mal uso que se le dé a esta herramienta.

Durante la resolución de las actividades con tecnología, el profesor o investigador debe promover la reflexión de los estudiantes cuando llevan a cabo sus construcciones y ayudar a los estudiantes a conectar correctamente sus ideas para fomentar en ellos la reorganización de sus acciones y la producción de acciones de Construcción. Además, debe dar instrucciones explicitas de la utilización de la herramienta tecnológica. En conclusión es posible afirmar que el uso de la tecnológica no garantiza un exitoso proceso de abstracción. Se requiere de la acción mediadora del profesor y el uso adecuado de la tecnología para lograr aprendizajes de las matemáticas.

REFERENCIAS

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 114-162.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 10, 1243-1267.

Dreyfus, T. & Halevi, T. (1991). Quad Fun: A case study of pupil computer interaction. *Jurnal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 10(2), 43-48.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: theory as methodological tool and methodological tool as theory. In *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 185-217). Springer Netherlands.

Edwards, T. G. & Özgün-Koca, A. (2010). Studying the Quadratic Function From a to c: An Historical Perspective. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 15(8), 458-465.

Ellis, A. M. & Grinstead, P. (2008). Hidden lessons: How a focus on slope-like properties of quadratic functions encouraged unexpected generalizations. *The Journal of Mathematical Behavio*, 27, 277–296.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educ Stud Math*, 66, 317–333. doi: 10.1007/s10649-006-9072-y

Hershkowitz, R. Schwarz, B. B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 195-222.

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. México, D.F., Pearson educación.

Kidron, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit precept by means of instrumented schemes: the complementary role of three different frameworks. *Educ Stud Math*, 69, 197–216. doi: 10.1007/s10649-008-9132-6

Koklua, O. & Topcu, A. (2011). Effect of Cabri-assisted instruction on secondary school students' misconceptions about graphs of quadratic functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(8), 999–1011.

Niss, M. A. (2014). Functions Learning and Teaching. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 238*-241). London, UK: Springer.

Oldknow, A. (2009). Their world, our world bridging the divide. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 28, 180-195. doi:10.1093/teamat/hrp02

Santos, M. (2010). *La función cuadrática. Enfoque de resolución de problemas.* México, D.F., México: Trillas.

Secretaria de Educación Pública (2011).*Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. México, D. F.

Sistema UNO internacional. (2015). *Matemáticas 3*. México: Santillana.

Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolve through schooling? In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference of PME,* vol. 4 (pp. 273–280). Haifa, Israel: Israel Institute of Technology.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2014).Realistic Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 521*-525). London, UK: Springer.

Zazkis, R., Liljedahl, P. & Gadowsky, K. (2003). Conceptions of function translation: obstacles, intuitions, and rerouting. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 437–450. doi:10.1016/j.jmathb.2003.09.003

APÉNDICE

Instrumento de Investigación

Nombre: _____ Fecha: _____

Actividad 1: Terreno de Área máxima

Situación-problema: Un granjero le dijo a su hijo que utilizara 50 metros de alambre para cercar un terreno de forma rectangular, y que el espacio encerrado por ese rectángulo lo utilizara para construirse una casa. El hijo, que no era tonto (*sic*), se preguntó si con los 50 metros de alambre se podrían conseguir diferentes tipos de terrenos rectangulares y así escoger el de mayor área. En los terrenos de su padre había un lado, del terreno que debía cercar, que colindaba con una construcción en la que había una barda. Lo primero que se le ocurrió al hijo fue utilizar la barda como uno de los lados del rectángulo; así podría aprovechar parte del alambre para cubrir más área. ¿Cuál es el área máxima que puede obtener de esta manera el hijo? (Adaptado de Hitt, 2002, p. 112).

Parte I. Actividad con lápiz-y-papel

1. Si el alambre de 50 *m* lo pusiéramos de forma "alargada", ¿cómo lo dividirías para formar un rectángulo cualquiera? Justifica tu respuesta.

2. ¿Cómo calculas el perímetro de un rectángulo cualquiera? Justifica tu respuesta.

3. ¿Cómo calculas el área de un rectángulo cualquiera? Justifica tu respuesta.

4. Dibuja tres terrenos rectangulares distintos que tengan como perímetro 50 *m* y calcula el área de cada uno de ellos. ¿Cómo son las áreas de estos rectángulos? Compara los resultados obtenidos. Justifica tu respuesta.

5. Supongamos que el alambre está alargado, simulando una recta, ¿cómo lo dividirías para formar sólo tres lados de un rectángulo? Justifica tu respuesta.

6. Dibuja tres terrenos rectangulares distintos que cumplan la condición de que la suma de tres de sus lados sea 50 *m*; calcula sus perímetros y sus áreas ¿cómo son los perímetros y las áreas de estos rectángulos? Compara tus resultados. Justifica tu respuesta.

Parte II: Actividad con material concreto

7. Ahora contesta las mismas preguntas utilizando el material asignado para resolverla Actividad. Compara lo escrito antes de usar el material concreto con lo observado al trabajar con él. Si hubiera diferencias entre lo que contestaste antes y después, coméntalas con tu profesor (a).

Parte III: Actividad con tecnología así como con papel-y-lápiz

8. Explora el modelo dinámico "Actividad 1" y explica por qué este modelo funciona como una representación del problema.

9. Al mover el punto C sobre el segmento $\overline{AB}$, ¿qué magnitudes en el terreno varían y cuáles permanecen constantes? Coloca una ☑ en el cuadro si la magnitud varía y una ☒ si ésta permanece constante.

   ☐ El largo del terreno

   ☐ El ancho del terreno

   ☐ El área del terreno

   ☐ Longitud del segmento $\overline{\text{largo} + \text{largo}_1 + \text{ancho}}$

   ☐ El perímetro del terreno

10. En el modelo dinámico, para que sea posible construir un rectángulo con la condición de que longitud del alambre sea igual a la suma de tres de sus lados, ¿cuál es mínima longitud que puede tener el largo del terreno?, y ¿cuál es la máxima longitud? Justifica tu respuesta.

11. Tomando en cuenta las condiciones de la pregunta precedente ¿cuál es la mínima longitud que puede tener el ancho del terreno?, y ¿cuál es la máxima longitud? Justifica tu respuesta.

12. Utiliza el modelo dinámico y completa la siguiente Tabla con los valores solicitados.

Largo	Ancho	Perímetro	Área	$\overline{Largo + Largo_1 + Ancho}$

13. Con base en los datos de la Tabla de valores precedente, ¿cómo varían los valores del ancho del terreno conforme la longitud del largo aumenta? Justifica tu respuesta.

14. Con base en los datos de la Tabla de valores precedente, ¿cómo varían los valores del área del terreno conforme la longitud del largo aumenta? Justifica tu respuesta.

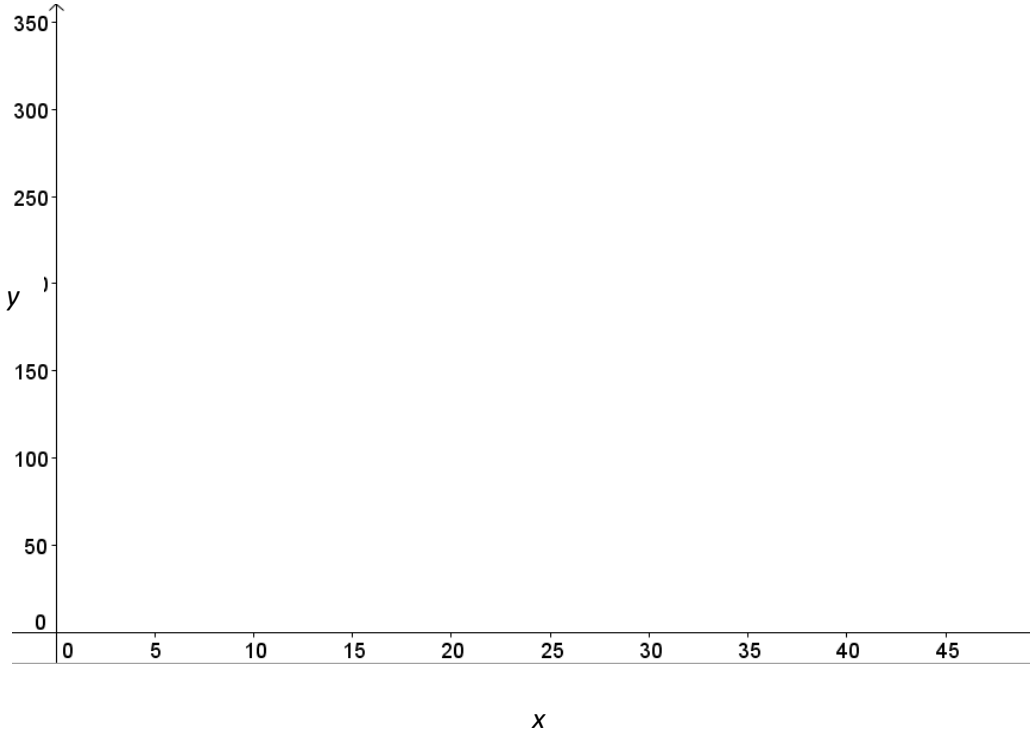
15. Con base en los datos de la Tabla de valores precedente, ¿cómo varían los valores del área del terreno conforme la longitud del ancho aumenta? Justifica tu respuesta.

16. Con base en los datos de la Tabla de valores precedente ¿cuál es la mayor área que obtuviste?

17. ¿Cuáles son las dimensiones del largo del terreno, cuando el área es la mayor que obtuviste?

18. ¿Cuáles son las dimensiones del ancho del terreno, cuando el área es la mayor que obtuviste?

19. Con los datos de la Tabla de valores precedente, grafica los puntos que tengan como coordenada *x* (longitud del largo del terreno) y como coordenada *y* (área del terreno).



20. Con base en lo observado en la pregunta 14, ¿cómo esperarías que fuera la gráfica de los puntos que tienen como coordenada *x* (longitud del largo del terreno) y como coordenada *y* (área del terreno)? Justifica tu respuesta ¿Coincide esta gráfica con la gráfica de la pregunta 19?

21. Observa el punto N en el modelo dinámico. ¿A qué longitud del terreno corresponde la coordenada *x* de ese punto? ¿A qué longitud del terreno corresponde la coordenada *y* del mismo punto? Justifica tu respuesta.

22. Activa el “rastro” del punto N y mueve el punto C. Explica todo lo referente a la gráfica generada por el punto N.

23. Explica las semejanzas y diferencias de la gráfica generada por el punto N y la obtenida en la pregunta 19.

24. ¿Qué relación existe entre la longitud del largo del terreno y su área? Justifica tu respuesta.

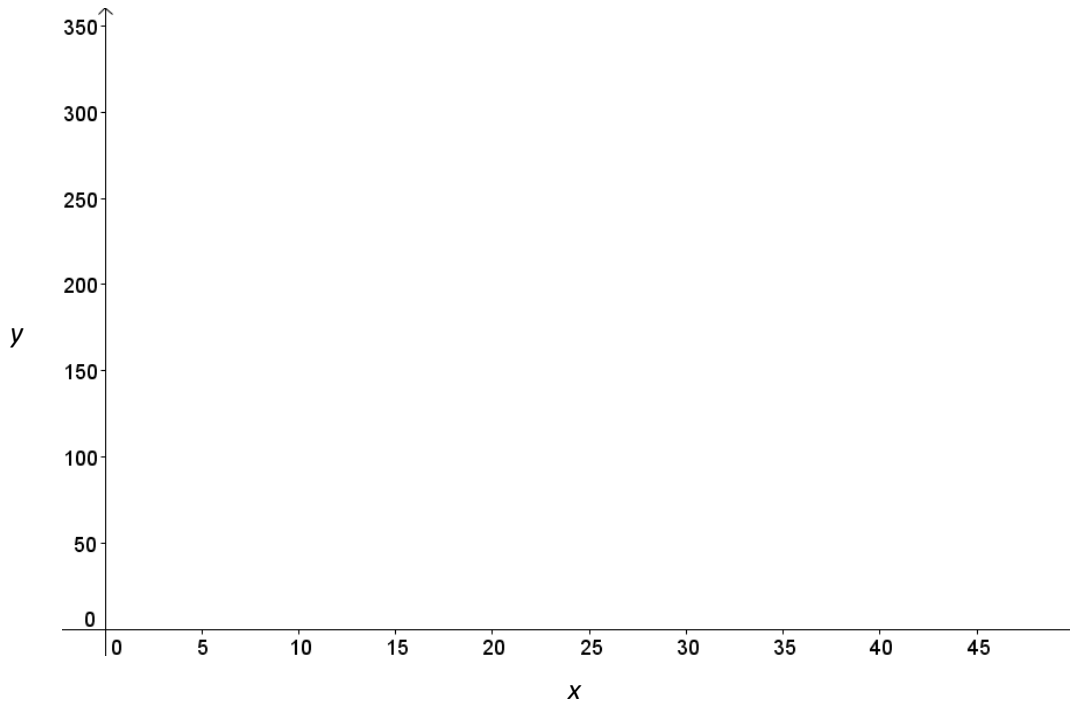
25. ¿Cuáles son las coordenadas del punto más alto (vértice) de la gráfica bosquejada por el punto N al mover el punto C?

(_____ , _____)

26. ¿Cómo relacionas las coordenadas del vértice de la gráfica con el área máxima del terreno? Justifica tu respuesta.

27. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el terreno y a qué longitud de su largo pertenece? ¿Coinciden estas respuestas con lo justificado en las preguntas 16 y 17? Justifica tu respuesta.

28. Con los datos de la Tabla de valores precedente, grafica los puntos que tengan como coordenada *x* (longitud del ancho del terreno) y como coordenada *y* (área del terreno).



29. Con base en lo observado en la pregunta 15, ¿cómo esperarías que fuera la gráfica de los puntos que tienen como coordenada *x* (longitud del ancho del terreno) y como coordenada *y* (área del terreno)? Justifica tu respuesta ¿Coincide esta gráfica con la gráfica de la pregunta 28?

30. Observa el punto O en el modelo dinámico. ¿A qué longitud del terreno corresponde la coordenada *x* de ese punto? ¿A qué longitud del terreno corresponde la coordenada *y* del mismo punto? Justifica tu respuesta.

31. Activa el "rastro" del punto O y mueve el punto C. Explica todo lo referente a la gráfica generada por el punto O.

32. Explica las semejanzas y diferencias de la gráfica generada por el punto O y la obtenida en la pregunta 28.

33. ¿Qué relación existe entre la longitud del ancho del terreno y su área? Justifica tu respuesta.

34. ¿Cuáles son las coordenadas del punto más alto (vértice) de la gráfica bosquejada por el punto O al mover el punto C?

(_____ , _____)

35. ¿Cómo relacionas las coordenadas del vértice de la gráfica con el área máxima del terreno? Justifica tu respuesta.

36. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el terreno y a qué longitud de su ancho pertenece? ¿Coinciden estas respuestas con lo justificado en las preguntas 16 y 18? Justifica tu respuesta.

Parte IV: Actividad con tecnología así como con papel-y-lápiz

37. Asigna una letra cualquiera (variable) al largo del terreno y otra al ancho.

38. Con las letras asignadas para el ancho y el largo del terreno, y conociendo el dato de que la suma de tres de sus lados es igual a 50 *m*, escribe la relación que existe entre las dos letras. Justifica tu respuesta.

39. Deja la letra escogida para una de las longitudes del terreno (ancho o largo) y escribe una expresión algebraica para la otra longitud en términos de la letra escogida.

40. Con las expresiones para el largo y el ancho del terreno en términos de la misma letra escogida, escribe una expresión algebraica mediante la cual se pueda calcular el área del terreno. Justifica tu respuesta.

41. Bosqueja la gráfica de la expresión que obtuviste para el área del terreno usando Geogebra.

42. ¿Con cuál de las dos gráficas (generadas por N u O al mover el punto C) coincide la gráfica que representa la expresión algebraica que obtuviste para el área del terreno? Justifica tu respuesta.

43. ¿Cómo obtienes la expresión algebraica de la otra gráfica? Justifica tu respuesta.

44. ¿Qué información te proporcionan los puntos negativos de las gráficas, correspondientes a las áreas del terreno, bosquejadas por Geogebra? Justifica tu respuesta.

Nombre: _____ Fecha: _____

Actividad 2: Cuadrado inscrito en otro cuadrado de área mínima

Situación-problema: Dado un cuadrado ABCD de lado $5\ cm$. Entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, ¿cuánto miden los lados del cuadrado de área mínima? (Adaptado de Apóstol, 2006, p. 237).

Nota: Los cuadrados inscritos en el cuadrado dado son todos aquellos cuadrados que cumplen la condición de que cada uno de sus vértices está sobre los lados del cuadrado dado.

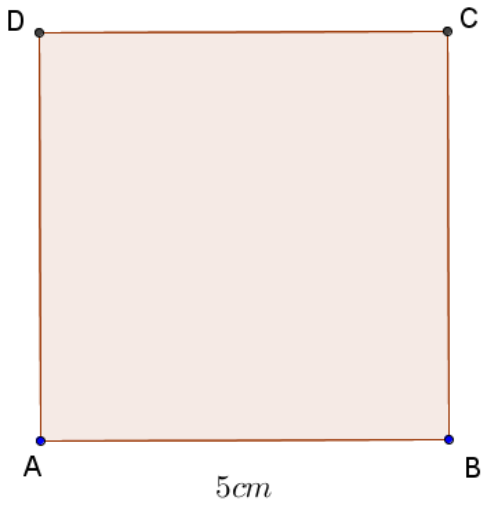
Parte I. Actividad con lápiz-y-papel

1. Escribe tres propiedades importantes de los cuadrados.

2. ¿Cómo calculas el perímetro de un cuadrado cualquiera? Justifica tu respuesta.

3. ¿Cómo calculas el área de un cuadrado cualquiera? Justifica tu respuesta.

4. Utilizando uno o varios artefactos de tu juego de geometría (escuadra, regla, compás y transportador), traza tres cuadrados (distintos) inscritos en el cuadrado ABCD (para entender el concepto de cuadrado inscrito, lee con atención la Nota que se te proporciona al inicio de esta Actividad) y calcula sus perímetros y sus áreas. Compra tus resultados con los de tus compañeros.



Parte II: Actividad con tecnología así como con papel-y-lápiz

5. Explora el modelo dinámico "Actividad 2" (moviendo el punto G sobre el segmento $\overline{DC}$) y explica por qué este modelo funciona como una representación del problema.

6. Al mover el punto G sobre el segmento $\overline{DC}$, ¿qué magnitudes varían, y cuáles permanecen constantes? Coloca una ☑ en el cuadro si la magnitud varía y una ☒ si ésta permanece constante.

   ☐ El segmento $\overline{DC}$ (lado del cuadrado ABCD).

   ☐ El segmento $\overline{DG}$.

   ☐ El segmento $\overline{GC}$.

   ☐ El segmento $\overline{HG}$ (lado del cuadrado inscrito).

   ☐ El área del cuadrado ABCD.

   ☐ El área del cuadrado EFGH (área del cuadrado inscrito).

7. Al mover el punto G sobre el segmento $\overline{DC}$, ¿cuál es la mínima longitud que puede tener el segmento $\overline{DG}$?, y ¿cuál es la máxima longitud? Justifica tu respuesta.

8. Cuando la longitud del segmento $\overline{DG}$ es la menor posible ¿cuánto miden los lados del cuadrado inscrito EFGH? Justifica tu respuesta.

9. Cuando la longitud del segmento $\overline{DG}$ es la mayor posible ¿cuánto miden los lados del cuadrado inscrito (EFGH)? Justifica tu respuesta.

10. Explorando el modelo dinámico (moviendo G sobre el segmento $\overline{DC}$). ¿Cuál es el cuadrado inscrito de mayor área? Justifica tu respuesta.

11. Utiliza el modelo dinámico y completa la siguiente Tabla de valores, de acuerdo con lo solicitado.

Longitud del segmento $\overline{DG}$	Longitud del segmento $\overline{GC}$	Longitud del segmento $\overline{HG}$ (lado del cuadrado EFGH)	Área del cuadrado inscrito (EFGH)

12. Con base en los datos de la Tabla de valores precedente, ¿cómo varían los valores de la longitud del segmento $\overline{GC}$conforme la longitud del segmento $\overline{DG}$ aumenta? Justifica tu respuesta.

13. Con base en los datos de la Tabla de valores precedente, ¿cómo varían los valores del área del cuadrado inscrito (EFGH) conforme la longitud del segmento $\overline{DG}$aumenta? Justifica tu respuesta.

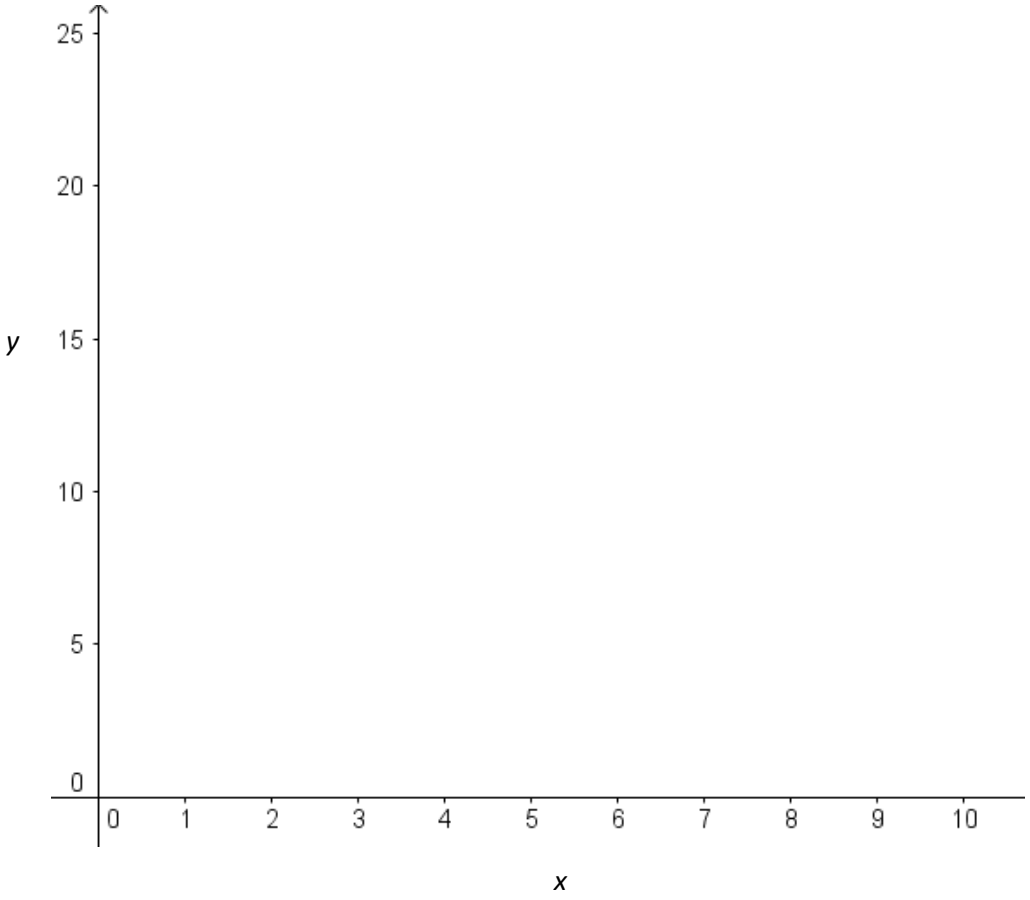
14. Con base en los datos de la Tabla de valores previa, ¿cuál es la menor área del cuadrado inscrito EFGH que obtuviste?

15. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{HG}$ (lado del cuadrado EFGH) cuando el área del cuadrado inscrito EFGH es la menor que obtuviste?

16. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{DG}$ cuando el área del cuadrado inscrito EFGH es la menor que obtuviste?

17. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{GC}$ cuando el área del cuadrado inscrito EFGH es la menor que obtuviste?

18. Con los datos de la Tabla de valores precedente, grafica los puntos que tengan como coordenada *x* (magnitud del segmento $\overline{DG}$) y como coordenada *y* (área del cuadrado inscrito EFGH).



19. Con base en lo observado en la pregunta 13, ¿cómo esperarías que fuera la gráfica de los puntos que tienen como coordenada *x* (longitud de segmento $\overline{DG}$) y como coordenada *y* (área del cuadrado inscrito)? Justifica tu respuesta ¿Coincide esta gráfica con la gráfica de la pregunta 18?

20. Observa el punto P en el modelo dinámico. ¿A qué magnitud corresponde la coordenada *x* de ese punto? ¿A qué magnitud corresponde la coordenada *y* del mismo punto? Justifica tu respuesta.

21. Activa el "rastro" del punto P y mueve el punto G sobre el segmento $\overline{DC}$. Explica todo lo referente a la gráfica trazada por el punto P.

22. Explica las semejanzas y diferencias de la gráfica bosquejada por el punto P y la obtenida en la pregunta 18.

23. Qué relación existe entre la magnitud del segmento $\overline{DG}$ y el área del cuadrado inscrito EFGH? Justifica tu respuesta.

24. ¿Cuáles son las coordenadas del punto más bajo (vértice) de la gráfica bosquejada por el punto P al mover el punto G?

(____ , ____)

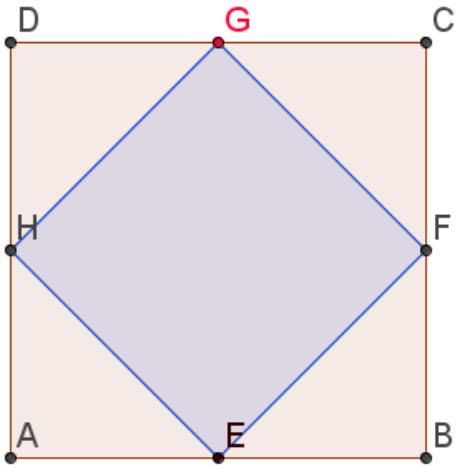
25. ¿Cómo relacionas las coordenadas del punto más bajo de la gráfica con el área mínima del cuadrado inscrito EFGH? Justifica tu respuesta.

26. ¿Cuál es el área mínima que puede tener el cuadrado inscrito EFGH y a qué magnitud de segmento $\overline{DG}$ pertenece? ¿Coinciden estas respuestas con lo justificado en las preguntas 14 y 16? Justifica tu respuesta.

27. ¿Cuánto miden los lados del cuadrado inscrito EFGH, cuando éste es de área mínima? Justifica tu respuesta.

Parte III: Actividad con tecnología así como con papel-y-lápiz

28. Asigna una letra cualquiera (variable) al segmento $\overline{DG}$ y otra al segmento $\overline{GC}$.



29. Con las letras asignadas al segmento $\overline{DG}$ y al segmento $\overline{GC}$, y sabiendo que el segmento $\overline{DC}$ (lado del cuadrado ABCD) mide 5 *cm*, escribe la relación que existe entre las dos letras. Justifica tu respuesta.

30. Deja la letra escogida para una de las longitudes de los segmentos ($\overline{DG}$ o $\overline{GC}$) y escribe una expresión algebraica para la otra longitud en términos de la letra escogida. Justifica tu respuesta.

31. Activa la casilla longitud HD ¿cómo son las longitudes de los segmentos $\overline{GC}$ y $\overline{HD}$? Escribe una expresión algebraica para la longitud $\overline{HD}$. Justifica tu respuesta.

32. Con las expresiones algebraicas para el segmento $\overline{DG}$ y para el segmento $\overline{HD}$, en términos de la misma letra escogida, escribe una expresión algebraica mediante la cual se pueda calcular el área del cuadrado inscrito (GFEH). Justifica tu respuesta.

33. Bosqueja la gráfica de la expresión que obtuviste para el área del cuadrado inscrito EFGH, usando Geogebra.

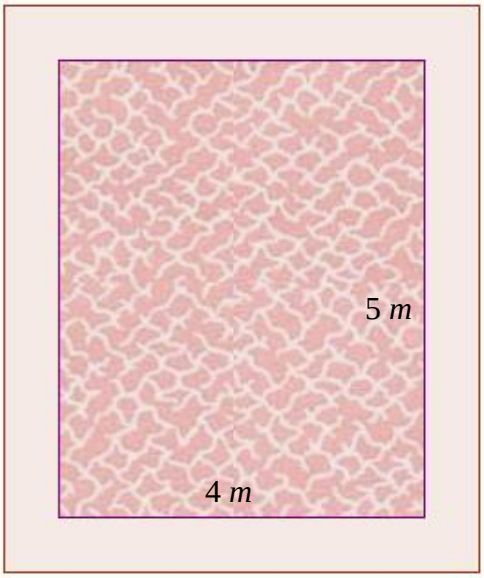
34. Explica las semejanzas y diferencias de la gráfica bosquejada por el punto P y la obtenida en la pregunta 33.

Nombre: _____ Fecha: _____

Actividad 3: Ancho del borde de un mantel

Roberto tejió un mantel de forma rectangular que mide 4 *m* de largo por 5 *m* de ancho. Él tiene 10 m^2 de tela para crear un borde alrededor del mantel (véase la figura). ¿Qué tan ancho debe ser el borde para usar toda la tela? (El borde debe tener el mismo ancho en los cuatro lados). (Adaptado de:

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L2_T1_text_final_es.html).



Parte I. Actividad con lápiz-y-papel

1. ¿Cómo calculas el perímetro de un rectángulo cualquiera? Justifica tu respuesta.

2. ¿Cómo calculas el área de un rectángulo cualquiera? Justifica tu respuesta.

3. Calcula el área y el perímetro del mantel rectangular que mide 4 *m*de largo por 5 *m* de ancho. Justifica tu respuesta.

4. ¿Qué significa que Roberto tenga 10 metros cuadrados de tela para crear un borde alrededor del mantel? Justifica tu respuesta.

Parte II: Actividad con tecnología así como con papel-y-lápiz

5. Explora el modelo dinámico "Actividad 3" y explica por qué este modelo funciona como una representación del problema.

6. Explora el modelo dinámico "Actividad 3" y coloca en el recuadro una ☑ a las longitudes que varían al cambiar el ancho del borde y una ☒ a las longitudes que permanecen constantes.

☐ go del mantel.

☐ Ancho del mantel.

☐ Área en metros cuadrados del mantel.

☐ Largo del mantel con borde.

☐ Ancho del mantel con borde.

☐ Área del mantel con borde.

☐ Área del borde.

7. Explorando el modelo dinámico, ¿qué valores puede tomar el ancho del borde? Justifica tu respuesta.

8. Utiliza el modelo dinámico y completa la siguiente Tabla con los valores solicitados.

Ancho del borde	Largo del mantel con borde	Ancho del mantel con borde	Área del mantel con borde	Área del borde

9. Dado el ancho del borde ¿cómo obtienes el largo del mantel con borde? Justifica tu respuesta.

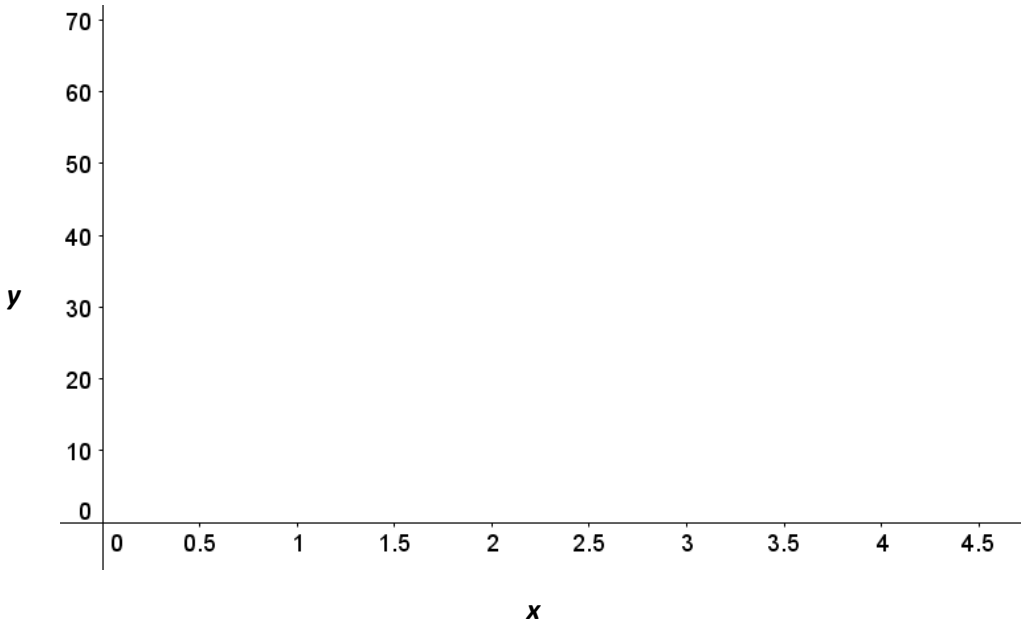
10. Dado el ancho del borde ¿cómo obtienes el ancho del mantel con borde? Justifica tu respuesta.

11. Dado el ancho del borde ¿cómo obtienes el área del mantel con borde? Justifica tu respuesta.

12. Dado el ancho del borde ¿cómo obtienes el área del borde? Justifica tu respuesta.

13. Con base en los datos de la Tabla de valores precedente ¿cuál es la magnitud del ancho del borde correspondiente a los 10 m^2 del área del borde? Justifica tu respuesta.

14. Con los datos de la Tabla de valores precedente, grafica los puntos que tengan como coordenada *x* (ancho del borde) y como coordenada *y* (área del borde).



15. Observa el punto P en el modelo dinámico. ¿A qué longitud corresponde la coordenada *x* de ese punto? ¿A qué longitud corresponde la coordenada *y* del mismo punto? Justifica tu respuesta.

16. Activa el "rastro" del punto P y mueve el punto en el deslizador. Explica todo lo referente a la gráfica generada por este punto.

17. Explica las semejanzas y diferencias de la gráfica generada por el punto P y la obtenida en la pregunta 14.

18. ¿Qué relación existe entre la longitud del ancho del borde y su área? Justifica tu respuesta.

19. Observa la gráfica generada por el punto P (al mover el punto en el deslizador) ¿Qué tan ancho debe ser el borde para usar los $10\ m^2$ de tela? ¿Coinciden estas respuestas con lo justificado en la pregunta 13? Justifica tu respuesta.

Parte III: Actividad con tecnología así como con papel-y-lápiz

20. Asígnale una letra al ancho del borde y escribe una expresión algebraica para el largo del mantel con borde. Justifica tu respuesta.

21. Utilizando la misma letra, de la pregunta precedente, para el ancho del borde, escribe una expresión algébrica para el ancho del mantel con borde. Justifica tu respuesta.

22. Con las expresiones para el largo y ancho del mantel con borde, en términos de la misma letra escogida, escribe una expresión algebraica para el área del mantel con borde. Justifica tu respuesta.

23. Escribe una expresión algebraica para el área del borde del mantel en términos de la misma letra escogida. ¿Qué necesitas hacerle a la expresión algebraica obtenida en la pregunta 22 para obtener la expresión algebraica que representa el área del borde del mantel? Justifica tu respuesta.

24. Grafica, usando Geogebra, la expresión que obtuviste en la pregunta 23.

25. Conociendo que Roberto tiene 10 metros cuadrados para crear el borde del mantel, encuentra gráficamente la solución al problema. Justifica tu respuesta.

26. Qué información te proporcionan los puntos con coordenadas negativas de la gráfica, correspondiente al área del borde, bosquejada por Geogebra? ¿Tiene sentido hablar de ellos? Justifica tu respuesta.

27. Podrías encontrar gráficamente la solución al problema, pero de una forma distinta de la anterior ¿cómo lo harías? Justifica tu respuesta.