CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD DISTRITO FEDERAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

DIFICULTADES RELACIONADAS CON EL CONCEPTO ISOMORFISMO DE GRUPOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Tesis que presenta

ERIKA ZUBILLAGA GUERRERO

para obtener el Grado de

MAESTRA EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directora de la Tesis: DRA. ASUMAN OKTAÇ

México, D. F., Febrero 2013

RESUMEN

El objetivo de este trabajo fue identificar y explicar las dificultades relacionadas con el entendimiento del concepto isomorfismo de grupos en estudiantes universitarios. Para ello hemos elegido un marco que describe la interacción del entendimiento del individuo en relación a un concepto matemático particular y su definición formal, a saber, la perspectiva teórica conocida como *imagen del concepto* y *definición del concepto* de Tall y Vinner (1981).

A fin de lograr el objetivo de investigación, cinco estudiantes de licenciatura en matemáticas que habían tomado el curso de Álgebra moderna I y que iniciaban el curso de Álgebra moderna II fueron seleccionados y entrevistados individualmente.

Los resultados muestran cuatro principales dificultades asociadas al concepto isomorfismo de grupos: 1) dificultad en dar una interpretación correcta a la definición formal de grupos isomorfos, 2) dificultad para demostrar formalmente que dos grupos son isomorfos, 3) dificultad en considerar más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos y 4) dificultad en considerar que un grupo pueda ser isomorfo a alguno de sus subgrupos.

Con base en nuestro análisis concluimos que los estudiantes que participaron en esta investigación han desarrollado algunas imágenes del concepto isomorfismo de grupos que son inapropiadas, aunque poseen aspectos de la definición formal, estas no son muy útiles o los conducen a conclusiones equivocadas.

Este es un primer estudio realizado bajo un contexto específico, sería importante ampliar la investigación para comparar los resultados con el tipo de dificultades presentadas por otros estudiantes, a fin de obtener información suficiente que nos permita realizar sugerencias dirigidas a mejorar la enseñanza y el aprendizaje del concepto.

ABSTRACT

The aim of this work was to identify and explain the difficulties related to the understanding of the concept of group isomorphism in university students. For this purpose we chose a framework that describes the interaction of the understanding of the individual in relation to a particular mathematical concept and its formal definition, namely, the theoretical perspective known as *concept image* and *concept definition* of Tall and Vinner (1981).

To achieve the research goal, five undergraduate students in mathematics who had taken the Modern Algebra I course and who were beginning the course in Modern Algebra II were selected and interviewed individually.

The results show four main difficulties associated with the concept of group isomorphism: 1) difficulty in giving a correct interpretation of the formal definition of isomorphic groups, 2) difficulty to formally prove that two groups are isomorphic, 3) difficulty in considering more than one isomorphism between two isomorphic groups, and 4) difficulty in considering that a group can be isomorphic to one of its subgroups.

Based on our analysis we concluded that student who participated in this research have developed some concept images of group isomorphism that are inappropriate; although they have some aspects of the formal definition, these are not very useful or lead to wrong conclusions.

This is a first study performed in a specific context; it would be important to extend the research to compare the results with the type of difficulties presented by other students, in order to obtain enough information to enable us to make suggestions aimed at bettering the teaching and learning of the concept.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología su apoyo económico para llevar a cabo mis estudios de maestría, lo que me ha permitido culminarlos satisfactoriamente.

Estudiante con número de registro 245130

Agradezco a mi asesora, Dra. Asuman Oktaç

por su guía, tiempo y apoyo brindado durante la

realización de este trabajo.

Agradezco al Dr. Jesús Romero Valencia por su disposición de escuchar

mis inquietudes académicas y por su apreciable amistad.

Así mismo agradezco a la Dra. Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

y a la Dra. Rosa María Farfán Márquez,

ambas por todo el apoyo recibido.

Agradezco a los doctores del Departamento de Matemática Educativa

Dra. Claudia Acuña

Dr. Francisco Cordero

Dr. Ricardo Cantoral

por la guía en esta etapa de formación.

Agradezco a toda mi familia

de quienes he recibido siempre lo mejor.

A los compañeros estudiantes del Departamento de Matemática Educativa

a quienes aprecio y admiro, han llegado a ser mi familia en estos últimos años.

Principalmente agradezco a Dios por permitirme vivir esta experiencia.

El buen maestro siente pasión (amor) por lo que enseña;

su evidente entusiasmo ejerce gran influencia en sus alumnos.

Sabe que si él no valora lo que enseña, tampoco lo harán ellos.

"El discípulo bien formado será como su maestro"

(Lucas 6:40)

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas en el Nivel superior, de manera particular en una carrera de licenciatura en matemáticas se caracteriza, entre otras cosas, por la presentación de los conceptos a partir de sus definiciones, por lo que se espera que los estudiantes logren entenderlos a partir de estas. Podemos observar con ello que las definiciones juegan un rol importante; no obstante, investigaciones han evidenciado que con frecuencia los estudiantes no forman nociones precisas de las definiciones y no pueden razonar a partir de estas. El Álgebra Abstracta no es la excepción.

Como resultado de esta investigación se presenta un estudio sobre algunas dificultades asociadas al concepto isomorfismo de grupos, encontradas al entrevistar a un grupo de cinco estudiantes de licenciatura en matemáticas.

Hemos tomado en cuenta como marco de referencia un conjunto de investigaciones enmarcadas dentro de la didáctica del Álgebra Abstracta. Lo anterior nos ha permitido apreciar cuatro aspectos principales con relación a esos trabajos de investigación: 1. El interés por llevar a cabo investigaciones que involucran un estudio sobre los problemas en la enseñanza y aprendizaje en el Álgebra Abstracta ha sido poco y relativamente reciente. 2. La mayoría de esas investigaciones se han llevado a cabo considerando un contexto de la enseñanza que no es la tradicional. 3. En particular, pocas investigaciones han tomado como tópico principal de estudio al concepto isomorfismo de grupos. 4. Existen pocas investigaciones cuyo objeto de estudio haya sido las dificultades que presentan los estudiantes.

Los cuatro puntos descritos en el párrafo anterior han sido algunos de los motivos que nos han impulsado a la realización del presente trabajo de investigación.

En el Capítulo 1 se exhiben los antecedentes que como conjunto constituyen un marco de referencia para esta investigación, el objetivo y las preguntas de la misma. Además, el contenido incluye elementos que consideramos justifican la presente investigación y la pertinencia de esta.

En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico que sustenta este trabajo de investigación.

En el Capítulo 3 como parte de los elementos metodológicos se describen las dos etapas por las cuales se tuvo que pasar para lograr el objetivo de investigación. En este apartado presentamos los instrumentos que fueron utilizados para obtener la información escrita de los estudiantes, lo que esperábamos obtener de ellos y los resultados que realmente se obtuvieron. También se describe a la población sujeto de estudio y algunos antecedentes académicos.

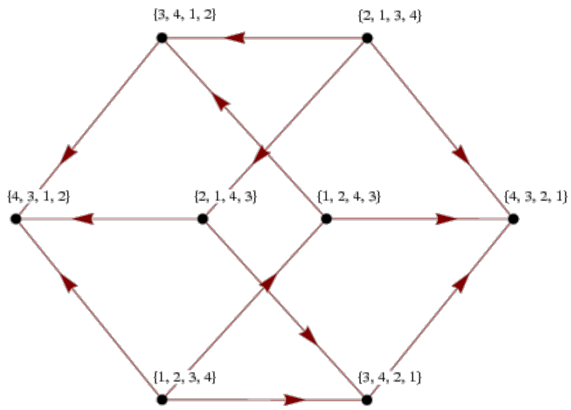
En el Capítulo 4 se presentan de forma detallada las cuatro dificultades encontradas en el análisis de las entrevistas con los estudiantes participantes.

En el Capítulo 5 se sintetizan los resultados descritos en el Capítulo 4. Además se presentan otras dificultades manifestadas por los estudiantes, que no están asociadas directamente con el concepto isomorfismo de grupos, sino más bien tienen su origen en el manejo de otros conceptos relacionados con este, pero que jugaron un papel importante al enfrentarse a tareas que involucraban el uso de ellos.

En el Anexo A se presenta el cuestionario utilizado como instrumento piloto.

En el Anexo B se presenta el cuestionario utilizado como instrumento de selección.

Finalmente, en el Anexo C se presentan las preguntas de la entrevista que fueron hechas a cada uno de los estudiantes.



CAPÍTULO 1

Sobre el problema de investigación y antecedentes

En este capítulo presentamos los principales resultados de algunas investigaciones enmarcadas dentro de la Didáctica del Álgebra Abstracta, en particular, aquellas que han involucrado al concepto Isomorfismo de grupos como objeto central de estudio. Además, en este apartado se presenta el planteamiento del problema, objetivo y preguntas de investigación.

1.1 Antecedentes

1.1.1 Resultados de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Abstracta

De acuerdo con las investigaciones, ¿qué puede decirse respecto a la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Abstracta?

> La enseñanza del álgebra abstracta es un desastre, y esto es cierto de forma casi independiente de la calidad de las clases.
>
> […] Y pensamos que hay un consenso bastante amplio sobre esto entre instructores experimentados de álgebra abstracta, y uno aún más amplio entre los estudiantes con experiencia (Leron & Dubinsky, 2005, p. 227).

El Álgebra Abstracta es el primer curso en el cual los estudiantes deben ir más allá de aprender "patrones de conducta imitativa" (Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis, 1994, p. 268) y tienen que lidiar con conceptos abstractos; dichas particularidades propician el desarrollo, por parte de los estudiantes, de una "actitud negativa hacia las matemáticas en general y un miedo a la abstracción" (Clark, DeVries, Hemenway, St. John, Tolias & Vakil, 1997, pp. 181-182), sin dejar de lado las grandes dificultades a las cuales se enfrentan.

Respecto al aprendizaje del Álgebra Abstracta existen investigaciones que se han llevado desde diferentes marcos teóricos y metodológicos. Desde el punto de vista cognitivo, las investigaciones llevadas a cabo por RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) con relación al Álgebra Abstracta y en particular sobre la Teoría de Grupos, se han desarrollado a partir de la observación de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de algunos tópicos en este dominio. Bajo el enfoque de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) se han propuesto, para algunos conceptos, *descomposiciones genéticas,* las cuales son modelos de cognición, sobre las cuales se basan estrategias de enseñanza para el aprendizaje de dichos conceptos (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996).

Dubinsky y colaboradores (1994) dan auge a una discusión relacionada con la naturaleza del conocimiento de los estudiantes referente a la Teoría de Grupos y cómo un individuo puede desarrollar un entendimiento de los conceptos: grupo, subgrupo, clase lateral, normalidad y grupo cociente, desde la perspectiva teórica APOE.

Las observaciones discutidas en dicha investigación se enfocaron en el aprendizaje de los tópicos arriba mencionados, en la naturaleza compleja de su entendimiento, el papel de los errores y las concepciones inadecuadas (misconceptions); proponiendo, finalmente algunas sugerencias pedagógicas con el fin de mejorar el éxito en el aprendizaje del Álgebra Abstracta.

De acuerdo con Dubinsky *et al*. (1994) las grandes dificultades de entendimiento en Teoría de Grupos parecen iniciar principalmente con el concepto de grupo cociente y el teorema de Lagrange, clases laterales, multiplicación de clases laterales y normalidad, razón por la cual se hizo énfasis en ellos en su investigación.

Los resultados de esta investigación evidenciaron que la manera de entender los conceptos de grupo y subgrupo por parte de los estudiantes, en una primera instancia consistió en verlos principalmente como "conjuntos de elementos discretos"; posteriormente se pasó a una etapa en la que "las operaciones así como los elementos del grupo" fueron incorporados a la definición y finalmente lograron construir un conocimiento profundo de “un grupo como objeto” donde fue posible aplicar acciones sobre este (Dubinsky *et al*., 1994, p. 273).

Una consecuencia de interpretar a un grupo en términos de sus elementos, es decir, como un conjunto, fue la presentación de una confusión respecto a isomorfismo, a saber, la idea de que la cantidad igual de elementos entre dos grupos es razón suficiente para decir que son isomorfos. Así, se pensó que “S_3 y Z_6 son isomorfos pues ambos grupos tienen seis elementos” (Dubinsky *et al*., 1994, p. 274).

Respecto a las dificultades con el tratamiento de los tópicos de clases laterales, grupo cociente y normalidad, se observó que la falta de entendimiento del concepto de normalidad impidió a los participantes pensar en las operaciones entre clases y grupos cociente en el caso no-conmutativo; mientras que otros mostraron una confusión entre ese concepto (normalidad) y la conmutatividad. Justamente, para los participantes no pareció ser clara la relación entre la propiedad de que un subgrupo sea normal y cuándo la operación de clase lateral satisface las propiedades de grupo.

El problema central de la complejidad del entendimiento del Álgebra Abstracta se debe, entre otras cosas, a que la carrera matemática temprana para muchos estudiantes consiste en aprender algoritmos para resolver problemas que además son repetitivos, teniendo ahora que enfrentarse a un inesperado cambio de estilo matemático de aprender algoritmos a entender conceptos y la complejidad general de los objetos (matemáticos) implicados en el curso (Dubinsky *et al*., 1994).

Al respecto, Clark *et al*. (1997) señalan que en la experiencia primaria con los cursos de matemáticas antes del Álgebra Abstracta, posiblemente a excepción de la geometría, los estudiantes tienen poca experiencia pensando en los conceptos que subyacen a dichas reglas, tratando con estructuras o probando teoremas, ya que la mayoría involucran la aplicación de reglas o procedimientos memorizados.

Con el objetivo de ayudar a los estudiantes, Dubinsky *et al*. (1994) proponen plantearles una contradicción desequilibrante entre una concepción y la experiencia a través del trabajo en equipo y actividades que involucren el uso de computadoras. Además ellos sugieren un diseño curricular más acorde con cómo la gente puede aprender matemáticas; dicha estrategia curricular necesitaría reemplazar la secuencia lineal tradicional.

Una continuación de esta investigación se detalla en Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics y Oktaç (1997), donde se declara que la perspectiva teórica utilizada (APOE), resulta útil para describir las construcciones mentales llevadas a cabo por los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos: clases laterales, normalidad y grupo cociente. Asimismo afirman que en los estudiantes que siguieron una estrategia de enseñanza basada en APOE, se observó una mejoría en el entendimiento de los conceptos de normalidad y clases laterales.

Por otra parte, Hazzan (1999) señala que a pesar de que los profesores son conscientes de la importancia del aprendizaje del Álgebra Abstracta, muchos de ellos han reportado dificultades por parte de los estudiantes para entender las ideas que les tratan de comunicar; pese a sus intentos por encontrar formas para ayudarlos a entender los conceptos y buscar formas relevantes para introducir los temas a los estudiantes, la verdad es que la situación parece cambiar poco.

La situación anterior, de acuerdo con la explicación de Hazzan, se debe a que los estudiantes se enfrentan por primera vez a un curso donde se les pide tratar con conceptos los cuales son introducidos abstractamente; por lo tanto, es de esperar que el nuevo estilo matemático de presentación conduzca a los estudiantes a adoptar estrategias mentales con las cuales puedan hacer frente tanto al nuevo enfoque como al nuevo tipo de objetos matemáticos.

Dubinsky (2001) hace hincapié en “la importancia del álgebra abstracta tanto dentro de las matemáticas y para aplicaciones de las matemáticas” (p. 711); por ejemplo, dos áreas importantes donde el Álgebra Abstracta es *aplicada* son la teoría de la codificación y ciencias de la computación; y en Matemáticas es de suma importancia, ya que los conceptos fundamentales tales como grupo, anillo, campo, homomorfismo, kernel, *isomorfismo*, etc., se encuentran en varios temas matemáticos.

Además, el Álgebra Abstracta, que suele ser considerada como un tratamiento abstracto de las operaciones de la aritmética, por ejemplo, sumar, restar, multiplicar, dividir, etc., es en esencia, *abstracta*. Aunque hay aspectos concretos, sin embargo, ellos no son tan importantes en la materia como lo es su naturaleza abstracta. Por lo tanto, en un curso en esta área de las matemáticas es de suma importancia el hecho de que dicha naturaleza sea confrontada y no hay otra opción para los estudiantes si es que desean tener éxito en el curso (Dubinsky, 2001).

Dubinsky puntualiza que los conceptos con los cuales frecuentemente se tienen problemas son: clases laterales de un grupo y algunas ideas relacionadas con el teorema de Lagrange, normalidad y grupos cociente. Al respecto señala que la prueba del teorema de Lagrange así como su enunciado es muy difícil para los estudiantes. Además, muchos fracasan cuando se enfrentan a ideas tales como normalidad o a la construcción e identificación de grupos cociente; un caso análogo sucede con las profundas conexiones entre homomorfismos y grupos cociente, las cuales resultan ser extrañas para muchos estudiantes.

En este apartado abrimos un paréntesis para referenciar el trabajo de Hazzan y Leron (1996), quienes investigaron las formas en que los estudiantes usan los teoremas, en particular, el teorema de Lagrange y su recíproco.

Una de las preguntas hechas a 113 estudiantes que cursaban la carrera de ciencias de la computación de una Universidad Israelí de alto rango fue la siguiente:

> Un estudiante escribió en un examen "Z_3 es un subgrupo de Z_6". En tu opinión, ¿es este un enunciado verdadero, parcialmente verdadero o falso? Por favor explica tu respuesta (Hazzan & Leron, 1996, p. 25)

Los resultados indicaron que 73 estudiantes respondieron la pregunta incorrectamente, 20 de los cuales respondieron (con algunas variaciones) la siguiente declaración:

> Z_3 es un subgrupo de Z_6 por el Teorema de Lagrange, porque $3|6$ (Hazzan & Leron, 1996, p. 25)

Los autores concluyen, entre otras cosas, que los estudiantes no sólo confunden el Teorema de Lagrange con su recíproco, sino que también usan una versión incorrecta del enunciado del recíproco. Además, la tendencia de los estudiantes a invocar dicho teorema puede ser explicado por su inseguridad y por el tipo de preguntas que se les plantean.

Cerramos el paréntesis y hacemos referencia ahora al trabajo de Siu (2001, p. 541) donde él señala que a pesar de "la utilidad del Álgebra Abstracta", éste "no es el único objeto para justificar su enseñanza". Él enfoca su investigación en dos puntos, la *relevancia* y la *abstracción.* De acuerdo con Siu, las dificultades en la enseñanza se deben a la falta de atención en estos dos puntos.

Al referirse a la relevancia no se restringe a la discusión de esta con relación a las aplicaciones, más bien se refiere a "una relevancia más amplia que incluye las experiencias previas de aprendizaje del estudiante y al pasado histórico" (Siu, 2001, p. 542).

En lo que respecta a la abstracción, Siu (2001) se refiere a esta como "el punto fuerte que le da a las matemáticas su poder, a pesar de que causa angustia en muchos" (p. 545). El autor menciona que debería verse como un reto más bien que como algo que hay que evitar. Apoyando este punto, retomamos las declaraciones de Carlson (2004, p. 296): “los estudiantes necesitan aprender a trabajar en un nivel abstracto”; y Dubinsky (2001, p. 710): “no hay que evitar la abstracción, sino que es posible y mejor ayudar a nuestros estudiantes a aprender a pensar de manera abstracta”.

1.1.2 ¿Por qué interesarnos en el aprendizaje del Álgebra Abstracta?

Hay un reconocimiento de la importancia del aprendizaje del Álgebra Abstracta, no sólo en las matemáticas avanzadas (Topología, Geometría Diferencial, etc.) sino también en otros campos como la física, la química, las ciencias de la computación, sólo por citar algunas (Hazzan, 1999). Vemos que tal como lo señala Siu (2001): “el Álgebra abstracta es útil […] sin embargo, sus aplicaciones van más allá de lo que un plan de estudios generalmente abarca” (p. 541).

En la investigación de Dubinsky *et al*. (1994) se evidenciaron dos aspectos importantes del porqué interesarse en lo que sucede con los estudiantes cuando aprenden tópicos de Álgebra Abstracta, en particular de la Teoría de grupos en el contexto estadounidense. El primero es que un gran porcentaje de ellos serán *futuros maestros de matemáticas*, lo que nos lleva a interesarnos aún más por la actitud (negativa) desarrollada por los estudiantes hacia la abstracción matemática; el segundo aspecto, no menos significativo, tiene que ver precisamente con la *abstracción*, siendo esta de suma importancia en las matemáticas, en particular en el Álgebra Abstracta.

Es conveniente añadir lo que menciona Dubinsky (2001) sobre la formación del profesor. Él señala que algunos maestros desarrollan miedo y odio por la abstracción como resultado de su curso de Álgebra Abstracta; si un profesor se ha formado con esa visión, ¿qué se puede esperar de su desempeño en clase? y ante esto, ¿qué propuestas existen al respecto?

Hasta ahora hemos visto y seguiremos observando cómo las investigaciones llevadas a cabo dentro del campo de la didáctica de Álgebra Abstracta han centrado su interés en el aprendizaje de ciertos conceptos en esta área de las matemáticas. También, algunas de esas investigaciones se han interesado en la enseñanza de esos conceptos; de esa manera, se han sugerido algunas ideas que pudieran contribuir a mejorar la enseñanza del Álgebra Abstracta.

Todo parece indicar que la comprensión de los estudiantes en esta área de las matemáticas suele ser reducida. Aunado a ello el desánimo en que se ven envueltos los estudiantes, hace que ellos se aparten de las matemáticas abstractas y en particular, del Álgebra Abstracta.

La situación planteada en el párrafo anterior ha llevado a algunos investigadores a concluir que "habría que modificar las formas de enseñanza" (Mena, 2011, p. 100). Dubinsky y Leron (1995) y Dubinsky (2001) aluden a algo semejante a lo que proponen Dubinsky, Dautermann, Leron y Zazkis (1994) y que consiste en reemplazar el método tradicional de enseñanza por aquellos métodos interactivos que involucran el uso de computadoras, siendo su principal herramienta la programación el ISETL (Interactive Set Language), así como el aprendizaje cooperativo, donde los estudiantes construyen, por ellos mismos y a través de las discusiones en equipo, conceptos matemáticos y resuelven problemas.

Clark *et al*. (1997) señalan un aspecto importante que está relacionado con el problema existente en el primer curso de Álgebra Abstracta, el cual radica en que los instructores frecuentemente no toman en cuenta la necesidad de asignar un tiempo adecuado para que los estudiantes reflexionen sobre la materia nueva. Además, ellos se cuestionan respecto a cuándo la actitud de los estudiantes hacía las matemáticas en general y el Álgebra Abstracta en particular, mejorará como resultado de un nuevo tratamiento instruccional, puesto que es claro que las actitudes de los estudiantes están influenciadas en gran medida por el éxito que ellos mismos perciben tener en el aprendizaje de los contenidos del curso.

Carlson (2004) puntualiza la necesidad de tomar en cuenta factores que puedan afectar la motivación de los estudiantes hacia las matemáticas superiores, en particular en lo que se refiere al Álgebra superior, ya que dichos factores juegan un papel importante en aprendizaje. Por ejemplo, uno que afecta motivacionalmente a los estudiantes es la percepción común de que el Álgebra Abstracta no tiene una aplicación práctica, por lo que al ofrecerse como optativa, se tiende a evitarla.

Finalmente, Carlson (2004) cita otros factores que pueden motivar a los estudiantes positivamente; éstos incluyen la belleza, poder y frecuentemente la utilidad de las matemáticas mismas. Se tienen, por ejemplo, los factores individuales, los cuales involucran: la curiosidad intelectual del estudiante, las experiencias previas de aprendizaje, la respuesta positiva al desafío, y el deseo de obtener buenas calificaciones, solo por citar algunos. El autor agrega que también es importante fijar la atención en los factores de grupo y los culturales; de igual importancia son los factores pedagógicos, los cuales pueden incluir el uso de la tecnología, aprendizaje colaborativo, etc.

1.1.3 Investigaciones en el aprendizaje de Teoría de Grupos

> El Álgebra abstracta en general, y la teoría de grupos en particular presenta un serio problema educativo (Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis, 1994, p. 268)

Las investigaciones que consideramos en este apartado dan cuenta de cómo los estudiantes aprenden ciertos conceptos específicos y las dificultades para la comprensión de dichos conceptos en la Teoría de Grupos, que surgen de la naturaleza abstracta de los objetos involucrados (Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis, 1994; Hazzan & Leron, 1996; Hazzan, 1999).

Lajoie (2001) señala que el aprendizaje de la Teoría de Grupos en los cursos de Álgebra Abstracta es a menudo débil y fragmentado. A pesar de ello, hay poca literatura de investigación en Educación Matemática que ha sido dirigida hacia la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Abstracta (Hazzan, 1999); respecto a este asunto, Lajoie (2001) considera que "el poco interés en los problemas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra abstracta puede deberse a que la cantidad de población afectada es mucho menor que la de otros dominios como el cálculo y el álgebra lineal" (p. 384).

Por otra parte, desde la perspectiva teórica de *reducción del nivel de abstracción*, Hazzan (1999) examinó el entendimiento de estudiantes universitarios con relación a conceptos específicos del Álgebra Abstracta: grupos, subgrupos, clases laterales, el Teorema de Lagrange y grupos cociente. De acuerdo con la autora, muchas respuestas y concepciones de los estudiantes pueden ser atribuidas a su tendencia por trabajar en un nivel de abstracción inferior (de manera inconsciente) que aquel en el cual los conceptos se introducen en clase; con el objetivo de hacerlos mentalmente accesibles (Hazzan, 2001; Hazzan & Zazkis, 2005).

> El proceso mental de reducción del nivel de abstracción indica que los estudiantes encuentran maneras de lidiar con los nuevos conceptos que aprenden. Hacen estos conceptos mentalmente accesibles, de esa forma, los estudiantes llegan a ser capaces de pensarlos y manejarlos cognitivamente (Hazzan, 1999, p. 75).

De acuerdo con Hazzan (1999), el tema de reducción de abstracción se basa en tres interpretaciones para los niveles de abstracción, las cuales no son independientes ni mucho menos agotan todas las interpretaciones posibles de abstracción:

> 1. Nivel de abstracción como la cualidad de relaciones entre el objeto de pensamiento y la persona pensante
> 2. Nivel de abstracción como reflexión de la dualidad proceso-objeto
> 3. Nivel de abstracción como el grado de complejidad del concepto matemático de pensamiento
>
> (Hazzan, 1999, p. 75).

En conclusión, Hazzan señala que el nivel de abstracción en el cual los conceptos de Álgebra Abstracta son usualmente presentados a los estudiantes en las clases, y la falta de tiempo para actividades que puedan ayudarles a comprender esos conceptos, pueden llevar al fracaso de los estudiantes al construir objetos mentales para las nuevas ideas y en asimilarlas con su conocimiento existente. Por lo tanto, "reducir el nivel de abstracción les permite basar su entendimiento sobre el conocimiento actual, y proceder hacia la construcción mental de conceptos matemáticos concebidos sobre un nivel superior de abstracción" (Hazzan, 1999, p. 84).

En un caso específico, desde la perspectiva de *reducción del nivel de abstracción*, Hazzan (2001) analizó los procesos mentales de estudiantes universitarios al realizar la tarea de llenar una tabla de operación para cuatro elementos (a, b, c, d) de tal manera que dicha tabla representara un grupo de orden cuatro.

La autora identificó tres formas por las cuales los estudiantes reducen el nivel de abstracción cuando construyen la tabla:

- *Retroceder a estructuras matemáticas familiares*. Algunos estudiantes tienden a creer que el único elemento en un grupo el cual es su propio inverso, es el elemento identidad del grupo, dicha creencia no les permite completar la tabla de operación.

En lugar de pensar en un grupo general, los estudiantes tienden a pensar en números (entidades matemáticas que les son familiares), los cuales son objetos matemáticos concretos para ellos.

- *Uso de procedimientos canónicos*. Los estudiantes encuentran suficiente el procedimiento canónico para llenar la tabla; algunos de ellos admiten no entender cómo o por qué su uso es apropiado para encontrar la solución. *En una tabla de operación de grupo, todos los elementos del grupo aparecen en cada renglón y en cada columna*. Eso implica que cada elemento aparece exactamente una vez en cada renglón y exactamente una vez en cada columna.

Esta situación se considera como reducción del nivel de abstracción porque los estudiantes ignoran la naturaleza matemática de los conceptos involucrados en el problema y lo resuelven meramente por aplicación de operaciones sobre esos conceptos. Así, los estudiantes pueden ejecutar algún procedimiento automáticamente, sin necesariamente entender las ideas matemáticas detrás del procedimiento o su adecuación a la solución del problema en cuestión.

- *Adoptar una perspectiva local*. Los argumentos de los estudiantes sobre grupos son reemplazados con argumentos sobre los elementos del grupo.

Se dice que los estudiantes reducen el nivel de abstracción cuando prefieren manipular mentalmente elementos en lugar de trabajar con el conjunto; es posible que esta selección se haga inconscientemente. Por ejemplo, en este caso, en lugar de argumentar que "ya que hay sólo dos grupos de orden cuatro, el grupo requerido debería ser isomorfo a alguno de esos grupos" (Hazzan, 2001, p. 170), los estudiantes prefieren manipular mentalmente elementos, por ejemplo al preguntarse sobre cuál debería ser el elemento identidad, cuál debería ser el inverso de cierto elemento o dónde colocar cierto elemento.

La autora sugiere que a partir de dichos resultados sean tomadas en cuenta las estrategias mentales que pueden llevar a cabo los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de Álgebra Abstracta, además de diseñar actividades apropiadas para ellos.

Otras investigaciones tales como la de Brown, DeVries, Dubinsky y Thomas (1997) indagan sobre el entendimiento de los estudiantes respecto las estructuras básicas del Álgebra Abstracta, en particular sobre los conceptos: operaciones binarias, grupos y subgrupos. La ya citada investigación de Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics y Oktaç (1997) se enfocó en el entendimiento de los estudiantes sobre el uso de las estructuras abstractas para construir otras estructuras, tales como clases laterales, normalidad y grupo cociente. Ambas investigaciones se realizaron desde la perspectiva teórica APOE.

Otro tópico dentro de la Teoría de Grupos que ha sido objeto de investigación es el de grupo cíclico. Lajoie y Mura (2001) evidenciaron dificultades que los estudiantes tienen con dicho concepto.

Los resultados mostraron que los estudiantes participantes tuvieron dificultades al recordar lo que es un grupo cíclico; “todos ellos asociaron dicho concepto con un ciclo o una permutación cíclica, así como la idea de volver al punto o elemento de partida” (Lajoie & Mura, 2000, p. 29).

Estas ideas de los estudiantes los condujeron a pensar, por ejemplo, que un grupo cíclico es finito, rechazando en toda instancia a un grupo cíclico infinito, y por otra parte, en caso de proponer una definición correcta de un grupo cíclico como un grupo en el cual un elemento genera a todos los demás, por "potencias" ellos se referían únicamente a las potencias positivas.

Además, la interpretación de los términos “cíclico” o “ciclo” como algo que debe volver a la identidad o al elemento inicial llevó a los estudiantes a imaginar el grupo de elementos ordenados en una secuencia circular o vinculado por algún tipo de función que mapea cada elemento con el siguiente y el último con el primero; mientras que otros estudiantes conservaron el significado cotidiano sobre la idea de ir a lo largo del ciclo repetidamente. Ante esta situación, las autoras sugieren que el origen de las dificultades observadas yace en buena parte en la tendencia de los estudiantes en relacionar el significado ordinario del adjetivo “cíclico” y el sustantivo “ciclo” con el objetivo de dar sentido al término “grupo cíclico”; podemos observar entonces una tendencia en reducir el nuevo concepto que no es familiar a otro que sí lo es.

Lajoie y Mura instan a ser conscientes de las limitaciones de los modelos intuitivos, no desacreditando su papel esencial en el proceso de aprendizaje y su utilidad como herramientas heurísticas una vez establecidas las definiciones formales, para garantizar un uso adecuado de tales herramientas.

Finalmente, referenciamos el trabajo de Findell (2002) donde se analizan las formas en que una estudiante usó las tablas de operación para apoyar su razonamiento sobre los conceptos de grupo, subgrupo, así como operaciones binarias y sus propiedades. La investigación da evidencia de cómo la estudiante basó su razonamiento muy fuertemente apoyada en los aspectos visuales de la tabla de grupo, más que en la reflexión sobre la operación binaria involucrada.

Se dice que las tablas de operación sirvieron para mediar la abstracción en el sentido de que el trabajar con una representación concreta permitió acceder a los objetos abstractos y sus propiedades. Así, una tabla de operación de grupo hace al grupo más concreto al hacer los aspectos de su forma directamente visible.

A partir de la apariencia de las tablas y del proceso de renombrar y reordenar los elementos en esas tablas, la estudiante reconoció *isomorfismos* entre varios grupos de orden cuatro, conjeturando que sólo hay dos de esos grupos (salvo isomorfismo).

Los resultados de esta investigación mostraron que las tablas de operación pueden jugar un papel metafórico importante en el pensamiento de los estudiantes sobre Teoría de Grupos debido al soporte conceptual que la metáfora puede proveer; sin embargo, el autor insta a tomar en cuenta sus limitaciones.

1.1.4 Investigaciones relacionadas con el concepto Isomorfismo de Grupos

La naturaleza misma de las matemáticas ha sido la causa de muchas dificultades, tanto para la enseñanza de los conceptos (por parte del profesor), como para su aprendizaje (por parte de los estudiantes).

El profesor de matemáticas puede diseñar sus clases considerando una secuencia de definiciones, teoremas y sus demostraciones, continuar definiendo nuevos conceptos y probando nuevos teoremas y así sucesivamente. El profesor puede asumir que de esa manera el estudiante adquiere el significado del concepto, sin embargo, estaremos de acuerdo en señalar que conocer una definición no garantiza su entendimiento. La evidencia sugiere que en la enseñanza deberían tomarse en cuenta los procesos psicológicos de adquisición del concepto y el razonamiento lógico.

Hemos visto de manera general que para el estudiante resulta complicado el tratamiento de su primer curso de Álgebra Abstracta; para la mayoría de ellos es su primer encuentro con un tratamiento axiomático de matemáticas; en particular, se ha señalado que el aprendizaje de la Teoría de Grupos presenta un problema educativo serio. El fracaso de la mayoría de los estudiantes al abordar dichos contenidos es significativo; ello ha motivado el estudio por parte de diversos investigadores, entre ellos de los del grupo RUMEC (Research in Undergraduate

Mathematics Education Comunity) liderado por Ed Dubinsky, quienes se han interesado en describir las estructuras mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) construidas por los estudiantes respecto a algunos conceptos de la Teoría de Grupos, tales como: grupos, subgrupos, clases laterales, normalidad y grupo cociente.

Dentro de la propia matemática es indiscutible la importancia del concepto *isomorfismo*, no solo en la Teoría de grupos, sino también por su relevancia en otras estructuras, tales como: anillos, campos, módulos, espacios vectoriales, entre otras. A pesar de la importancia tanto dentro como fuera de las matemáticas, existen pocas investigaciones que involucran al concepto en cuestión, y solo en algunas de ellas, las dificultades han sido objeto de estudio (Lajoie, 2001). De hecho, el interés en la investigación de las dificultades referentes al Álgebra Abstracta, en particular en la Teoría de Grupos, es relativamente reciente (Nardi, 2000).

Debido a los problemas de los estudiantes para entender el concepto de isomorfismo de grupos, Thrash y Walls (1991) sugieren una estrategia de enseñanza basada principalmente en la manipulación de tablas de grupos (de orden pequeño). Los autores afirman que trabajar en ese contexto permite a los estudiantes adquirir algunas habilidades concretas para mejorar su capacidad para trabajar y manipular grupos, ya que hay muchas cosas que los estudiantes pueden realizar mediante la utilización de tablas de Cayley.

Thrash y Walls proponen problemas y ejercicios que, según ellos, permitirán a los estudiantes comprender casi desde el principio el concepto de isomorfismo de grupos; además de facilitar el entendimiento de los conceptos de subgrupos y grupos cocientes.

Por su parte, Leron, Hazzan y Zazkis (1995) se interesaron en estudiar cómo los estudiantes universitarios en su primer curso de Álgebra Abstracta aprenden el concepto de isomorfismo de grupos. Discuten sobre la distinción entre la versión "*ingenua*" y la definición "*formal*" de isomorfismo. La primera está más relacionada con la intuición; la segunda, involucra la construcción del concepto función e isomorfismo como objeto, es decir, mucho más difícil de construir.

Haciendo énfasis en la diferencia señalada en el párrafo anterior, se tiene que, informalmente, dos grupos son isomorfos si ellos son "el mismo excepto por la notación" (Leron, Hazzan & Zazkis, 1995, p. 154). Desde esta visión, al considerar un grupo G cualquiera y renombrar sus elementos así como su operación, se obtiene una copia isomorfa del mismo grupo, el grupo G'

(correspondencia implícita) ; mientras que, la definición formal señala que: “un isomorfismo de un grupo $(G,\circ)$ a un grupo $(G',\circ')$ es una función f uno a uno de G sobre G', que satisface $f(a \circ b) = f(a) \circ' f(b)$ para todo a, b en G (función explícita). Dos grupos son isomorfos si existe un isomorfismo de uno al otro” (Leron, Hazzan & Zazkis, 1995, p. 154).

De acuerdo con Leron, Hazzan y Zazkis (1995), el significado de isomorfismo en cualquiera de las dos interpretaciones anteriores, “preserva la estructura de grupo” (p. 155), es decir conserva todas sus propiedades abstractas (su cardinalidad y su operación).

A continuación se mencionan algunas características influyentes en los resultados de la investigación a la que hemos estado haciendo referencia:

- El empleo de un método de enseñanza no tradicional que involucra el uso de computadoras (programación en ISETL) y el trabajo en equipo.
- Introducción temprana del concepto isomorfismo usando la idea intuitiva.
- Presentación final de la definición formal y discusión de su relación con la versión intuitiva.

Los resultados en la investigación de Leron, Hazzan y Zazkis evidenciaron los siguientes aspectos:

i) Para determinar cuándo dos grupos dados son isomorfos, el proceder de los estudiantes fue calcular el orden de sus elementos (order type). Tal procedimiento, aunque puede servir para mostrar que dos grupos *no* son isomorfos, el problema surge al concluir que si los elementos son del mismo orden implica que los grupos son isomorfos.

Los autores hacen referencia a algunos procesos mentales que pueden dar cuenta del fenómeno antes mencionado:

- El papel de los números naturales. Puesto que los números son un tipo de objeto matemático que sin duda los estudiantes han logrado construir; ello pudiera motivar la preferencia por aquellas propiedades de grupo que hagan referencia a un lenguaje familiar (que involucra números) y dejar de lado otras.

- La experiencia que han tenido los estudiantes con grupos de orden pequeño y que efectivamente, igual orden de los elementos de los respectivos grupos determinan isomorfismo.
- Una confusión de los estudiantes entre una proposición y su recíproco.

Al respecto, Lajoie (2000, pp. 147-148) añade que los errores cometidos por los estudiantes pueden ser explicados por el hecho de que estos "parecidos" resultan relativamente fáciles de identificar entre dos grupos porque no requieren de una particular atención sobre las estructuras. Además, ellos generalmente requieren del uso de procedimientos canónicos (Hazzan, 1999).

ii) Cuando los estudiantes llevan a cabo tareas que involucran isomorfismo y que implican la elección de una secuencia de propiedades (normalmente son elegidas aquellas que son consideradas como simples), sus elecciones dependen del "tipo" de tarea (que involucra grupos en general vs. grupos específicos) y del tipo de complejidad involucrada (sintáctica vs. de cálculo).

En la investigación, los resultados mostraron que, para las tareas que involucraban cuestiones referentes a grupos en general, por ejemplo cuando se les preguntó, ¿qué propiedades son preservadas bajo isomorfismo?, hubo preferencia por parte de los estudiantes por enlistar propiedades las cuales son sintácticamente simples, de entre ellas la conmutatividad; mientras que en las tareas que involucraban cuestiones sobre grupos específicos, hubo mayor preferencia por aquellas propiedades que requieren de cálculos simples, como el del orden de los elementos.

iii) Los estudiantes presentaron algún tipo de bloqueo o estancamiento en el tipo de tareas en que se les pedía construir un isomorfismo entre grupos específicos, lo cual es visto por los investigadores como un caso especial del fenómeno general de la necesidad por los procedimientos canónicos.

Tomando en cuenta la presencia del cuantificador existencial involucrado en la definición: *existe una función*, el fenómeno antes mencionado es comprensible y aceptable si se considera la vivencia de los estudiantes en niveles anteriores, donde han tenido mayor experiencia con procesos que involucran cálculos más que con la existencia de objetos abstractos.

iv) Se identificaron expresiones usadas por los estudiantes al tratar con los conceptos de cuantificador existencial y de función de G a G'.

Según los autores, dichas expresiones corresponden a diferentes niveles de desarrollo de concepción, mismas que muestran diversos grados de personificación y localización en su lenguaje; por ejemplo "puedo encontrar una función que manda cada elemento de G a cada elemento de G'" vs. "existe una función de G a G'".

Finalmente, Leron, Hazzan y Zazkis (1995) apoyan la idea de introducir un tópico complejo a través de su versión "ingenua", señalando que para el objeto matemático en cuestión, la relación de "ser isomorfo" es mucho más simple de formular y aprender que el "objeto de isomorfismo"; de esta manera, proponen invertir el orden que en la enseñanza frecuentemente se sigue respecto a homomorfismo, luego isomorfismo, arribando a grupos isomorfos.

Desde otra visión, Weber (2002) enfatiza la importancia de la construcción de pruebas (demostraciones) como una herramienta crucial en las matemáticas avanzadas, así mismo, señala que la mayoría de los estudiantes carecen de esta habilidad.

En particular, la investigación de Weber se enfocó en las dificultades que ocho estudiantes presentaron en la construcción de pruebas relacionadas con isomorfismo de grupos. Weber describe dos diferentes tipos de pruebas, basadas en los *dos tipos de entendimiento* que se describen más adelante: la *prueba instrumental* que se refiere a la prueba en la cual uno hace uso principalmente de definiciones y manipulaciones lógicas, y la *prueba relacional* como aquella en la cual uno hace uso de su entendimiento intuitivo de un concepto como base para construir un argumento formal.

Desde este punto de vista, en el contexto de isomorfismo de grupos, un individuo con un entendimiento instrumental de dicho concepto debería saber que dos grupos G y H son isomorfos si existe un homomorfismo biyectivo f de G a H, tener conocimiento de los teoremas básicos asociados con isomorfismo de grupos y ser capaz de aplicar esos teoremas; mientras que un individuo con un entendimiento relacional del concepto en cuestión puede reconocer que los grupos isomorfos son *esencialmente el mismo* y que uno es simplemente una re-etiqueta del otro.

Para el caso particular de probar que dos grupos son o no isomorfos, una prueba instrumental consistiría en la construcción de un homomorfismo biyectivo entre los grupos o argumentando que no hay un mapeo biyectivo entre ellos, respectivamente; por otra parte, una prueba relacional consistiría en determinar primero si los grupos en cuestión son esencialmente el mismo y posteriormente formalizar ese razonamiento intuitivo.

Los resultados de Weber evidenciaron que la mayoría de los estudiantes universitarios que participaron en dicha investigación fallaron al construir pruebas a pesar de tener un conocimiento instrumental requerido para hacerlo, evidenciándose así que poseer un entendimiento instrumental de un concepto matemático no implica que se puedan probar efectivamente enunciados sobre ese concepto.

Por otra parte, la forma de proceder de los estudiantes de doctorado que participaron en la investigación de Weber fue probar que dos grupos eran isomorfos mostrando que fuesen “el mismo” y para el caso en que no eran isomorfos, casi siempre intentaron encontrar una propiedad estructural presente en un grupo y ausente en el otro; rara vez emplearon la definición de grupos isomorfos.

El autor sugiere que para que los estudiantes construyan un mejor entendimiento relacional de isomorfismo de grupos deberían presentárseles ejemplos cuidadosamente seleccionados de grupos isomorfos y grupos no isomorfos; posteriormente, una vez que los estudiantes hayan entendido la esencia de ese concepto, posiblemente puedan generar para sí mismos una definición.

En definitiva, a pesar de reconocer el papel importante que juegan las definiciones formales en las matemáticas avanzadas; la investigación de Weber dio evidencia de cómo los estudiantes con experiencia fuerte en la lógica no pueden probar adecuadamente trabajando con las definiciones y teoremas si ellos no usan su entendimiento relacional (entendimiento intuitivo).

Otra de las investigaciones pertenecientes al área de las matemáticas a la que hemos estado haciendo referencia es la de Nardi (2000). La autora identificó y exploró las dificultades de los estudiantes de matemáticas en su encuentro con la abstracción matemática. De manera particular, la autora se enfocó en el aprendizaje de los conceptos de clase lateral, orden de un elemento y el primer teorema de isomorfismo.

Los resultados presentados por Nardi dan evidencia de las siguientes dificultades:

- Dificultades conceptuales (dualidad estática y operacional) y lingüísticas (abreviación usada del término) con el orden de un elemento ($|g|$), generador ($\langle g \rangle$) y la operación del grupo.

Dichas dificultades parecen tener su origen en:

- La falta de claridad en la concepción de "orden" de un elemento.
- La dualidad resultado de la definición de $|g|$ y el teorema $|g| = |\langle g \rangle|$, ya que el orden de un elemento es un concepto que contiene tanto una característica estática de $\langle g \rangle$ (el número de sus elementos) y la información acerca del proceso de obtener esos elementos (cuántas veces es necesario tomar las potencias de g a fin de cubrir $\langle g \rangle$).
- El uso de expresiones como "veces" y "potencias de" vagamente y en ocasiones intercambiablemente para generar $\langle g \rangle$.

- Dar significado al concepto de clase lateral a partir de los usos ambivalentes de imágenes metafóricas.

Al igual que en el caso de la noción de orden de un elemento, con las clases laterales se presentó la insistencia de otorgar significado a los conceptos; dicho acto se caracterizó por una tendencia a usar imágenes de figuras geométricas regulares a fin de construir una imagen mental del nuevo concepto involucrado (clases de equivalencia como líneas rectas paralelas y cuadrados como clases laterales).

- Dificultades conceptuales con el primer teorema de isomorfismo para grupos.

Ante las dificultades presentadas en su investigación, Nardi señala que descomponer el teorema en sus elementos constituyentes es una herramienta potencialmente útil para favorecer su aprendizaje.

La autora concuerda con Leron, Hazzan y Zazkis (1995) en que "el concepto de isomorfismo es una expresión formal de muchas ideas generales acerca de similaridad y diferencia, en particular, la idea de que dos cosas diferentes pueden ser vistas como similares bajo un apropiado acto de abstracción" (p. 171); este problema tiene su origen justamente en la dificultad de los estudiantes para entender la relación que un isomorfismo de grupos define.

Una investigación que da cuenta de las dificultades de las y los estudiantes universitarios en el estudio de los conceptos de grupo, subgrupo e isomorfismo de grupos fue el trabajo llevado a cabo por Lajoie (2001)[1], donde la autora señala que existe evidencia informal de que el primer curso de Álgebra Abstracta genera un disgusto por parte de los estudiantes hacia las matemáticas

[1] El trabajo de Lajoie (2001) forma parte de una investigación más amplia, Lajoie (2000), donde se estudiaron las dificultades que tienen los estudiantes universitarios con los conceptos de grupo, subgrupo, grupo cíclico e isomorfismo de grupos.

abstractas. Al igual que los investigadores anteriormente citados, Lajoie declara que a pesar de la atención puesta a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario, ha habido poco interés hacia el Álgebra Abstracta; por lo tanto, para Lajoie es importante aprender a profundidad lo que los estudiantes encuentran difícil o poco atrayente de esta área de las matemáticas.

En su investigación doctoral, Lajoie (2000) observó que algunos estudiantes son incapaces de pensar significativamente sobre las relaciones entre conceptos y no tienen claras las definiciones. La autora detectó cinco dificultades fundamentales en los estudiantes con el tratamiento del concepto isomorfismo de grupos:

- Dificultad en considerar que los grupos isomorfos son grupos similares, la interpretación que le dan los expertos.
- Dificultad para mostrar formalmente que dos grupos son isomorfos.
- Dificultad en considerar posible más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos.
- Dificultad para ver al isomorfismo a la vez como una relación de equivalencia y como una correspondencia particular entre dos grupos isomorfos.
- Dificultad en reconocer una utilidad al concepto de isomorfismo en Álgebra.

La autora señala que, en la raíz de las dificultades relacionadas con el aprendizaje de la teoría elemental de grupos, hay ciertas componentes de las imágenes conceptuales (de los procedimientos, de las definiciones) de los estudiantes, que entran en conflicto con las definiciones formales pero que son válidas en ciertos contextos, lo cual los hace difíciles de cambiar.

Desde otra visión, Larsen (2009) investigó cómo los estudiantes pueden llegar a entender la teoría abstracta de grupos, en particular el concepto de grupo e isomorfismo, mediante la exploración de las simetrías de una figura geométrica (triángulo equilátero).

Respecto al concepto de isomorfismo, la investigación de Larsen da cuenta de las dificultades encontradas en un par de estudiantes, por una parte, respecto a las ideas intuitivas para construir un procedimiento para determinar cuándo dos grupos son *esencialmente el mismo*. Dichas dificultades están estrechamente relacionadas con los aspectos siguientes:

- Una definición limitada, por parte de las estudiantes, sobre grupos equivalentes.
- El tipo de tareas presentadas.

- Las diversas interpretaciones dadas a una misma cuestión.
- Empleo de tablas para representar a los grupos.
- El uso de un mismo conjunto de símbolos para representar a los grupos.
- Trabajar con grupos en general vs. grupos específicos (que son familiares).
- Trabajar con grupos de orden finito vs. grupos de orden infinito.

Por otra parte, se presentaron algunas dificultades en la construcción de la definición formal; por ejemplo, formular la definición de isomorfismo en términos de función biyectiva resultó natural a las estudiantes, sin embargo, la propiedad requerida de un isomorfismo, *la preservación de la operación*, no surgió fácilmente; no obstante, implícitamente hicieron uso de ella.

Recientemente, Mena (2011) llevó a cabo una investigación basada en la teoría APOE; él se interesó en el siguiente teorema de isomorfismo:

Sean G, G' *grupos y* $f : G \to G'$ *un homomorfismo de grupos de núcleo* $N(f)$ *e imagen* $\mathrm{Im}(f)$. *Entonces f induce un isomorfismo* $\overline{f}$ *de* $G/N(f)$ *a* $\mathrm{Im}(f)$, *i. e,* $G/N(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$

La esencia de la demostración del teorema está en que el isomorfismo implicado sea bien definido; sin embargo, Mena señala que probar que la función $\overline{f}$ está bien definida es, para el alumno, más difícil de abordar que demostrar que ella es un morfismo e incluso probar que es una biyección. Incluso, es común que el estudiante no vea la necesidad de probar que la función que se define naturalmente está bien definida.

La propuesta de Mena se basó en el diseño de una descomposición genética del teorema del isomorfismo, con la finalidad de apoyar la reflexión sobre su aprendizaje, también con el fin de especificar un modelo cognitivo en el cual se puedan sustentar propuestas de enseñanza.

A grandes rasgos, la *descomposición genética* del teorema del isomorfismo de grupos propuesta, pasa por la separación del teorema en dos etapas: una que se refiere a su aspecto conjuntístico (sin estructura algebraica inmersa) y otra que se ocupa del aspecto de Teoría de Grupos. Este planteamiento parte de la afirmación que para los estudiantes es más sencillo trabajar sobre la versión conjuntística de dicho teorema que en su versión que aparece en la Teoría de Grupos.

1.2 Problema de investigación

La literatura en el campo de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Abstracta es reducida en comparación con la cantidad de trabajos existentes en otras áreas de las matemáticas.

La revisión de una considerable cantidad de tal literatura nos permite constatar que, en efecto, el aprendizaje del Álgebra Abstracta da lugar a dificultades en los estudiantes, siendo estas de diversa índole. Sin embargo, tales dificultades han sido detectadas sin que en varios de esos trabajos se hayan ocupado específicamente sobre el estudio de ellas (Lajoie, 2000).

Además, destacamos el hecho de que algunas de esas investigaciones se han llevado a cabo considerando un tipo de enseñanza no tradicional, donde se ha utilizado principalmente el lenguaje de programación ISETL; sin oposición a esta propuesta, consideramos que, en nuestro caso, donde generalmente predomina el tipo de enseñanza tradicional, es indispensable hacer una exploración profunda de las dificultades en este contexto.

El primer contacto que tienen los estudiantes con el Álgebra Abstracta, también conocida como *Álgebra Moderna*, es en el Nivel Superior y consiste en el estudio de estructuras algebraicas; de manera particular, en un curso de *Álgebra Moderna I*, se pone énfasis en el estudio de los elementos de *la Teoría de Grupos*, donde precisamente se ubica el objeto matemático *isomorfismo de grupos*, tópico de interés en nuestra investigación.

Existe evidencia de que en un primer acercamiento al Álgebra Abstracta algunos estudiantes llegan a perder interés por las matemáticas e incluso desarrollan un sentimiento de temor hacia ellas. Esto quizá se deba a que los estudiantes tienen que lidiar desde el principio y de manera permanente durante todo el curso, con conceptos abstractos y con la nula percepción de una aplicación práctica, entre otras cosas.

Hemos visto, en la revisión de los trabajos, provenientes principalmente de países como Estados Unidos, Canadá e Israel, entre otros, los problemas a los que se enfrentan los estudiantes al abordar ciertos conceptos de la teoría de grupos, tales como: grupo, subgrupo, clases laterales, normalidad, grupos cociente, grupo cíclico; todos ellos indagados desde diferentes enfoques teóricos. Algunos de estos estudios dirigen su atención hacia la propuesta de métodos de enseñanza y otros más hacia el aprendizaje y el entendimiento en Álgebra Abstracta.

En este trabajo hemos querido iniciar un *estudio de las dificultades en estudiantes universitarios en relación con el entendimiento del concepto isomorfismo de grupos*.

Con dicho problema en mira, en esta investigación se pretende estudiar las dificultades presentadas por un grupo de estudiantes universitarios quienes hayan concluido un curso de Álgebra Moderna I; dicha indagación se basa principalmente en la identificación y explicación de aquellas dificultades que se presentan cuando la *imagen del concepto* de isomorfismo de grupos, que los estudiantes han desarrollado, entra en conflicto con la *definición del concepto* (Tall &Vinner, 1981).

Desde esta postura teórica se pone de manifiesto que no podemos esperar que los estudiantes aprendan un concepto con la simple presentación de su definición formal; reconociendo de esta manera que resulta primordial dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, tomar en cuenta la estructura cognoscitiva del estudiante.

Como se ha señalado antes, hemos considerado esta investigación como un primer acercamiento al estudio de dificultades de los estudiantes con el entendimiento del concepto isomorfismo de grupos en el contexto específico mencionado; los resultados reportados no tratan de generalizar que tales dificultades se presentan en todos los estudiantes y en cualquier clase de Álgebra Moderna. Tomando en cuenta las características de la población de estudiantes participantes es que podemos señalar que nuestra contribución con la detección de dichas dificultades consistiría en la aportación de elementos importantes no sólo como referencia para su mejora, sino también para pensar en diseños de estrategias de enseñanza y actividades para los estudiantes.

1.3 Objetivo y preguntas de investigación

El interés por estudiar las dificultades con el entendimiento del concepto *isomorfismo de grupos* se debe, entre otras cosas, a una experiencia como estudiante. Fue interesante observar cómo los estudiantes, en su mayoría, presentan problemas en su curso de Álgebra Abstracta (Álgebra Moderna); en particular, en la Teoría de Grupos, el concepto de *isomorfismo* se vuelve complejo.

Respecto al concepto en cuestión, algunas investigaciones como la de Leron, Hazzan y Zazkis (1995) dan cuenta de cómo los estudiantes aprenden el concepto de isomorfismo de grupos en su primer curso de Álgebra Abstracta; Thrash y Walls (1991) y Larsen (2009) sugieren estrategias de enseñanza con el objeto de ayudar a los estudiantes en el entendimiento de dicho concepto; Weber (2002) investigó las causas de las dificultades de los estudiantes en la construcción de pruebas que involucran el concepto de isomorfismo de grupos; por último, Lajoie (2000) centró su investigación en las dificultades que tienen los estudiantes con las nociones de grupo, subgrupo, isomorfismo de grupos y grupo cíclico, así como los orígenes de dichas dificultades.

Como se puede apreciar, existen pocas investigaciones que involucran el concepto de isomorfismo de grupos a nivel mundial y más aún, cuyo objeto de estudio sean las dificultades con su entendimiento. Ello ha motivado al planteamiento del siguiente **objetivo de investigación**:

Identificar y explicar las dificultades encontradas en los estudiantes universitarios con el concepto isomorfismo de grupos.

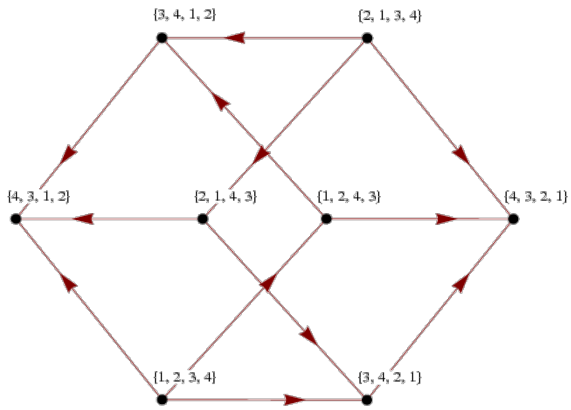
Para lograr dicho objetivo, hemos planteado la siguiente pregunta general de investigación:

¿*Cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes universitarios con el entendimiento del concepto isomorfismo de grupos*?

Para responder a esta cuestión general nos hemos apoyado de las siguientes preguntas específicas:

¿*Cuáles son las definiciones y explicaciones del concepto isomorfismo de grupos en las que se apoyan los estudiantes participantes*?

¿*Cuáles son las principales imágenes del concepto isomorfismo de grupos usadas por los estudiantes participantes ante las situaciones planteadas?*



CAPÍTULO 2

Marco teórico

Considerar la problemática del aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos y no sólo como adquisición de competencias y de habilidades, ha permitido evolucionar de estudios enfocados en los errores y las dificultades de los estudiantes hacia investigaciones centradas en el conocimiento que subyace a tales dificultades.

Las investigaciones de corte cognitivo centran su atención en los procesos relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos, donde, entre otras cosas, se reconoce que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógico-formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática.

La siguiente cita de Edwards y Ward (2008) nos permite abrir la discusión sobre la ubicación de nuestro problema de investigación y la precisión de ciertos términos mencionados hasta ahora.

> Las definiciones matemáticas son de fundamental importancia en la estructura axiomática que caracteriza a las matemáticas […] Pero las definiciones también juegan un rol en las experiencias de los estudiantes en sus cursos de matemáticas, en el sentido de que las definiciones son usadas frecuentemente como un vehículo hacia un entendimiento más robusto de un concepto dado (p. 223).

Carlson (2004) señala que una de las componentes fundamentales en el entendimiento de las matemáticas modernas es el reconocimiento de la importancia de las definiciones y la habilidad para trabajar con estas; sin embargo, se ha evidenciado que, precisamente, el entendimiento de los estudiantes en Álgebra Superior con relación a las definiciones y sus roles son generalmente imperfectos.

De manera general, también se ha evidenciado que la definición crea un problema serio en el aprendizaje de las matemáticas (Vinner, 1991; Moore, 1994; Edwards & Ward, 2008).

Un marco que describe la interacción del entendimiento del individuo sobre un concepto matemático particular y su definición formal es el acercamiento conocido como *imagen del concepto/ definición del concepto* (Tall &Vinner, 1981).

Los términos *imagen del concepto* y *definición del concepto* fueron formulados por Shlomo Vinner y discutidos ampliamente en distintos artículos (Vinner & Hershkowitz, 1980; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983; Vinner, 1991). Fueron introducidos con el fin de diferenciar los aspectos del conocimiento matemático que, por un lado, son dados por la definición matemática formal de un concepto y, por otro lado, la interpretación subjetiva que hace un individuo de un concepto, es decir, el concepto tal como se refleja en la mente del estudiante (Vinner & Hershkowitz, 1980).

Al principio, Vinner y Hershkowitz (1980) analizaron cómo los estudiantes conciben figuras geométricas simples y las relaciones entre ellas. Los dos términos antes mencionados fueron introducidos para categorizar las emergentes dificultades de los estudiantes debido a su tendencia a favorecer el aprendizaje prototípico. Los estudiantes que participaron en esta investigación se enfocaron en los ejemplos típicos y descuidaron información dada por la definición matemática.

Con los términos *imagen del concepto* y *definición concepto*, Tall y Vinner (1981) establecen una distinción "entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos" (p. 151), en otras palabras, entre los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto (matemático) en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo. A continuación profundizaremos acerca de este modelo utilizado en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

2.1 Imagen del Concepto/Definición del Concepto

Tall y Vinner (1981) establecen la *definición del concepto* como "las palabras usadas para especificar el concepto. Puede ser personal o formal, siendo esta última la que es aceptada por la comunidad matemática" (Tall y Vinner, 1981, p. 152), o como lo señalan Vinner y Hershkowitz

(1980) y Vinner (1983), es "la definición verbal que explica con precisión el concepto en una forma no circular" (Vinner y Hershkowitz, 1980, p. 177; Vinner, 1983, p. 293).

"Todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definiciones formales" (Vinner & Dreyfus, 1989, p. 356); muchas de estas definiciones son presentadas a los estudiantes en algún momento determinado.

La enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario se distingue, entre otras cosas, por un aspecto fundamental, a saber, los conceptos son presentados frecuentemente a partir de sus definiciones formales, y las propiedades de esos conceptos deben obtenerse por medio de deducciones lógicas. No obstante, el estudiante no necesariamente hace uso de la definición cuando decide si un objeto matemático es un ejemplo o un contraejemplo del concepto, sino que, en la mayoría de los casos, toma una decisión basándose en la *imagen del concepto*.

> El término imagen del concepto se usa para describir la estructura cognitiva completa que está asociada con el concepto, con inclusión de todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al mismo. Se construye a lo largo de los años, mediante experiencias de todo tipo, cambiando según el individuo madura y se encuentra con nuevos estímulos (Tall y Vinner, 1981, p. 152).

Tall y Vinner se refieren con *imagen mental* al conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en la mente de un individuo, incluyendo cualquier representación del concepto (gráfica, numérica, simbólica, etc.), si es que se cuenta con alguna.

La imagen que desarrolla el estudiante es "el resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto" (Vinner & Dreyfus, 1989, p. 356), pero el conjunto de objetos matemáticos considerados por los estudiantes a ser ejemplos del concepto no necesariamente es el mismo que el conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición; en estos casos, el comportamiento del estudiante puede diferir de lo que el profesor espera de él.

> La imagen del concepto es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto, en caso de que el concepto cuente con alguna; también puede ser una colección de impresiones y de experiencias asociadas con el nombre del concepto que pueden trasladarse en formas verbales, pero es importante recordar que esas formas verbales no fueron la primera evocación en nuestra memoria (Vinner, 1991, p. 68).

En particular, la *imagen del concepto* contiene "la definición personal de un concepto, que se refiere a la reconstrucción personal que hace el estudiante de una definición" (Tall & Vinner, 1981, p. 152), es decir, las palabras que el estudiante usa para su propia explicación; en algunos puede no existir, en otros puede ser incompleta o quizá contener palabras y frases aprendidas de modo rutinario.

En la figura 2.1 se presentan las ideas antes señaladas de los diferentes aspectos del conocimiento matemático concernientes a las nociones de *imagen del concepto* y *definición del concepto*, según Rösken y Rolka.

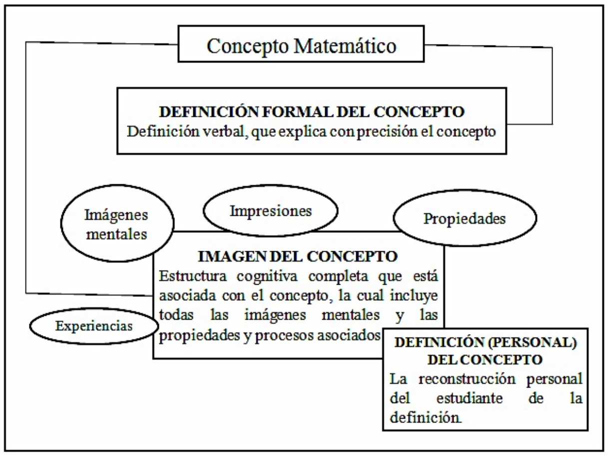


Figura 2.1. Ejemplificación de la imagen del concepto y la definición del concepto (Rösken & Rolka, 2007, p. 184).

La imagen del concepto no siempre es un todo coherente, sus partes se construyen o inhiben de manera diferente y en distintas circunstancias. De hecho, algunas de esas partes (de la imagen del concepto o de la definición del concepto) pueden incluso entrar en conflicto unas con otras; estas son conocidas como "factores de conflicto potencial" (Tall & Vinner, 1981, p. 153). La presencia de este tipo de factores no asegura la aparición de un conflicto cognitivo; realmente, si los factores de conflicto potencial son evocados en momentos diferentes, la persona puede no percatarse de alguna contradicción. Sin embargo, si ellos son evocados *simultáneamente*, dan lugar a los "factores de conflicto cognitivo" (Tall & Vinner, 1981, p. 154); es en ese momento donde la persona puede tomar consciencia de una contradicción en sus declaraciones o simplemente manifestarse por un vago sentido de inconformidad.

Finalmente, Tall y Vinner (1981) señalan otro tipo más serio de factor de conflicto potencial en la imagen del concepto que tiene que ver con "un conflicto con la definición formal del concepto, es decir, con la definición aceptada por la comunidad matemática; tales factores pueden impedir el aprendizaje de la teoría formal" (Tall y Vinner, 1981, p. 154). Un estudiante que tiene este tipo de factor de conflicto potencial en su imagen del concepto puede manifestar una seguridad de su propia interpretación de las nociones implicadas y considera a la teoría formal simplemente como inoperante y superflua.

Como investigadores no podemos tener acceso a la *imagen del concepto*, considerada como un todo, ya que no podemos esperar comprenderla en su totalidad. Sin embargo, contamos con los diversos *elementos* de la imagen del concepto activados en diversos contextos, es decir, las *imágenes del concepto evocadas* (Tall & Vinner, 1981), aunque debemos tomar en cuenta que esto no es todo lo que un individuo realmente conoce acerca de cierta noción.

2.1.1 ¿Cómo adquieren los estudiantes los conceptos?

Desde este acercamiento se asume que para adquirir un concepto se necesita formar una imagen del concepto, puesto que la definición de este no garantiza su entendimiento.

A fin de explicitar la importancia del modelo *imagen del concepto/ definición del concepto*, en los trabajos de Vinner y Hershkowitz (1980) y Vinner (1983; 1991) se hace alusión a un contraste en la formación del concepto entre los contextos técnicos y los contextos de la vida cotidiana.

Vinner (1991, pp. 67-68) explica cómo en *contextos de la vida diaria*, las imágenes del concepto juegan un rol fundamental, mientras que la definición formal no es muy relevante; esto contrario a lo que sucede en *contextos técnicos*, donde son esenciales; por ejemplo, en Matemáticas, estaremos de acuerdo en que es indispensable considerar todos los aspectos de una definición.

De acuerdo con Vinner (1991), si asumimos la existencia de dos *celdas* en nuestra estructura cognitiva, una para la definición del concepto y otra para la imagen del concepto; una celda o ambas pueden estar vacías o puede haber una interacción entre las dos aunque ellas pudieran haberse formado independientemente.

Vinner señala que un proceso similar ocurre cuando un concepto es introducido primero por medio de una definición, en este caso, la celda de la imagen del concepto está vacía, después de varios ejemplos y contraejemplos es llenada gradualmente, lo que no necesariamente refleja todos los aspectos de su definición; sin embargo, en el proceso de formación del concepto la relación entre la imagen del concepto y la definición del concepto es recíproca (Figura 2.2).

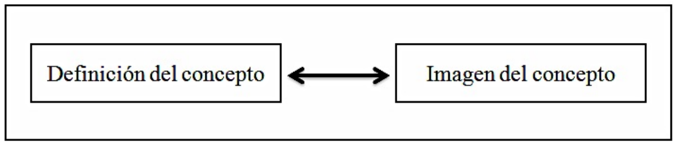


Figura 2.2. Interacción entre la imagen del concepto y la definición del concepto (Vinner, 1991, p. 70).

La Figura 2.3 ilustra lo que muchos maestros esperan que suceda, a saber, que la imagen del concepto quede determinada y controlada completamente por medio de la definición del concepto, lo que indicaría una adecuada formación del concepto en los estudiantes.

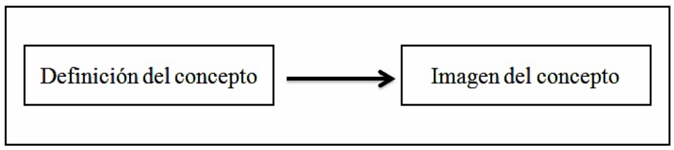


Figura 2.3. El desarrollo cognitivo de un concepto formal (Vinner, 1991, p. 71).

Aunado al proceso de formación del concepto está el proceso de su aplicación (resolución de problemas o realización de tareas). Cuando una tarea cognitiva le es presentada a un estudiante, las celdas de la imagen del concepto y de la definición del concepto se supone que son activadas.

Las siguientes figuras (2.4, 2.5 y 2.6) representan las diferentes formas en las cuales un sistema cognitivo puede funcionar. Nuevamente observaremos que los modelos implícitamente aceptados y esperados por muchos maestros no reflejan la práctica.

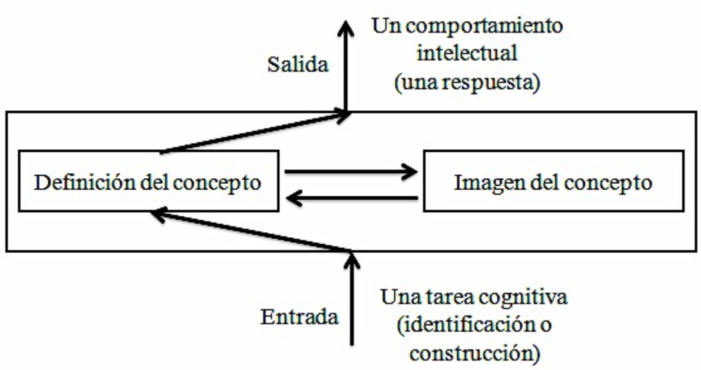


Figura 2.4. Interacción entre la definición y la imagen (Vinner, 1991, p. 71).

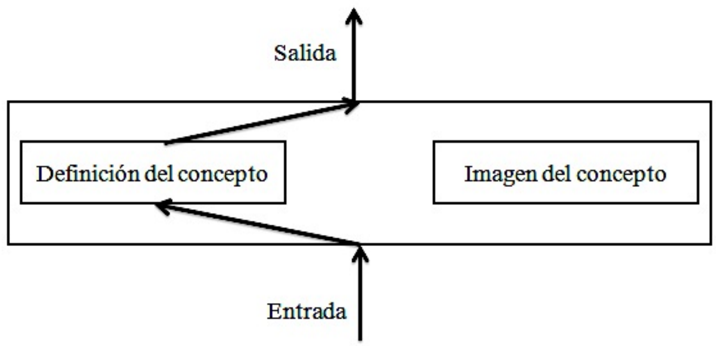


Figura 2.5. Deducción puramente formal (Vinner, 1991, p. 72).

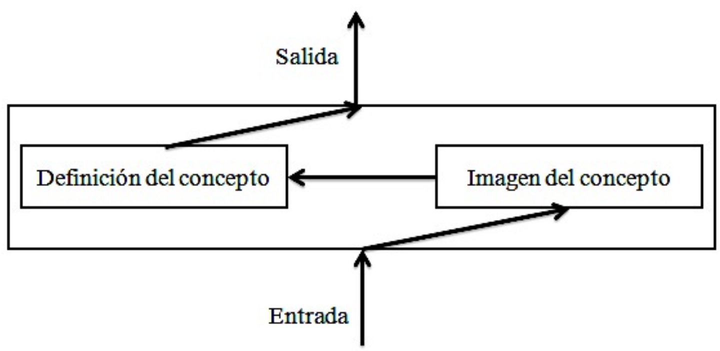


Figura 2.6. Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo (Vinner, 1991, p. 72).

Las tres figuras anteriores apuntan a un proceso *deseable*, distinto al que sucede en la práctica, esto es, se esperaría que antes de formular una solución a la tarea se consultara la definición del concepto; pero no hay manera de forzar a una estructura cognitiva para usar definiciones.

> Algunas definiciones son complicadas para tratar con ellas, no ayudan a crear imágenes del concepto en la mente de los estudiantes; además, existen definiciones que tienen sentido pero al momento en que son dados algunos ejemplos por el maestro o por el libro de texto, la imagen del concepto es formada de manera tal que para el estudiante le es suficiente para manejar el concepto, donde las definiciones previas pueden quedar inactivas o ser olvidadas. (Vinner, 1991, p. 72)

De esta manera, el modelo que se considera más adecuado, que refleja el proceso que realmente ocurre en la práctica, es el que se muestra en la siguiente figura 2.7:

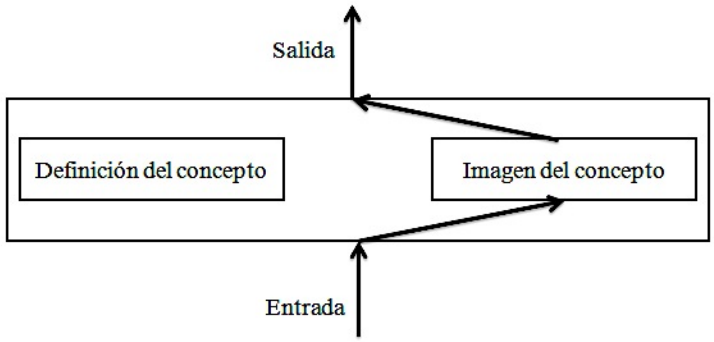


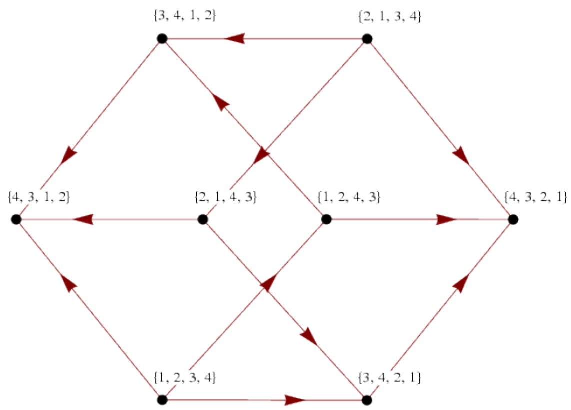
Figura 2.7. Respuesta intuitiva (Vinner, 1991, p. 73).

Lo que esta imagen muestra es que, la celda de la definición del concepto, si bien no está vacía, no es consultada durante el proceso de resolución del problema.

En definitiva, "conocer la imagen del concepto creada por los estudiantes resulta importante, ya que no sólo permite un mayor entendimiento de lo que hace actuar al estudiante como lo hace, sino también para tomar en cuenta aspectos para la enseñanza" (Vinner & Hershkowitz, 1980, p. 180).

Hemos visto que una imagen del concepto puede contener diferentes ideas, concepciones, imágenes, ejemplos, etc., y que algunos de esos elementos pueden entrar en contradicción con la teoría oficial. Tall y Vinner (1981, p. 160) señalan que ciertas partes de la imagen del concepto son más fuertes que otras, quizá aun más fuertes que la definición del concepto y por lo tanto son más resistentes, dando origen a ciertas *dificultades* importantes.

En nuestra investigación nos hemos propuesto indagar las *dificultades* que tienen los estudiantes con el entendimiento del concepto *isomorfismo de grupos* con un enfoque particular en esta perspectiva teórica.



CAPÍTULO 3

Elementos metodológicos

En este capítulo se presentan los elementos metodológicos de esta investigación. De forma detallada se discuten las etapas por las cuales se tuvo que pasar para el diseño y aplicación del instrumento de selección realizado a los estudiantes a fin de lograr nuestro objetivo inicial de investigación.

En una primera etapa se llevó a cabo la revisión de tres libros de texto de Álgebra Abstracta que constituyen la bibliografía básica del programa de estudios de la carrera de Licenciado en Matemáticas para la asignatura de *Álgebra moderna I* (obligatoria) ubicada en el quinto semestre del plan de estudios de la Facultad de Ciencias de la UNAM. La finalidad de esta revisión fue analizar hacia dónde conduce a los estudiantes el tratamiento dado al concepto isomorfismo de grupos y a qué tipo de imágenes del concepto en cuestión contribuyen. Posteriormente, se ubicó a un grupo de Licenciatura en Matemáticas de la UNAM quienes iniciaban su curso de Álgebra moderna I y se entrevistaron a cinco de esos estudiantes (voluntarios) antes de que se abordara en clase el tema de interés. El propósito de esta entrevista fue obtener información referente a la idea intuitiva que pudiera tenerse respecto a isomorfismo de grupos.

Haciendo un recuento de toda la información obtenida y de los resultados ya reportados por otras investigaciones, se diseñó y posteriormente se aplicó un primer cuestionario (cuestionario piloto) a cinco de los ocho estudiantes del grupo antes mencionado. Debido a que la cantidad de alumnos que iniciaron el curso se redujo en el transcurso del semestre, sólo uno de los estudiantes a quienes se entrevistó en un inicio participó en esta segunda ocasión. El cuestionario fue considerado como un primer acercamiento hacia la indagación de cuáles podrían ser algunas de las *imágenes del concepto* isomorfismo de grupos en estudiantes quienes tomaban su primer curso de Álgebra moderna y que habían trabajado con el tópico en cuestión.

En una segunda etapa, después del análisis del cuestionario piloto, a fin de lograr el objetivo de esta investigación, se pensó en la entrevista semi-estructurada como un instrumento de recolección de información más adecuado para profundizar en el pensamiento de los estudiantes. Así, se diseñó y aplicó un segundo cuestionario a tres grupos de Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM y a un grupo de Licenciatura en Matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, quienes ya habían tomado el curso Álgebra moderna I; obteniendo en total 36 cuestionarios. Finalmente, se eligieron diez estudiantes para llevar a cabo las entrevistas; para ello se tomaron en cuenta, principalmente, los resultados finales de este segundo cuestionario. Sin embargo, al hacerles la invitación a los estudiantes no todos aceptaron, teniendo entonces que invitar a otros y finalmente, la disponibilidad de los voluntarios jugó un papel importante.

3.1 Primera etapa: Los libros de texto, primera entrevista y cuestionario piloto

3.1.1 Los libros de texto

Los libros de texto desempeñan un papel importante para el profesor y también para los estudiantes. Para el profesor representan un recurso de suma importancia para planificar sus clases, llevarlas a cabo, así como reflexionar sobre los resultados; mientras para el estudiante influyen en gran medida en el desarrollo de las imágenes de los conceptos, en particular, en la construcción de sus definiciones personales, formadas a partir de la interpretación de las definiciones presentadas por el autor o quizá por medio de los ejemplos y los ejercicios tratados y que pueden discrepar de las definiciones formales de los conceptos.

Para los fines de nuestra investigación se llevó a cabo la revisión de tres libros de texto de Álgebra Abstracta que constituyen la bibliografía básica del programa de estudios de la carrera de Licenciado en Matemáticas para la asignatura de *Álgebra Moderna I* ubicada en el quinto semestre de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Conviene aclarar que no fue nuestra intención hacer una revisión de todos los libros de texto existentes de Álgebra abstracta, más bien, hemos seleccionado esos tres porque forman parte de la bibliografía básica o complementaria en diversos programas de estudio de *Álgebra Moderna I*, y los estudiantes, en su mayoría, tienen acceso a ellos.

En esta revisión nos enfocamos en observar y describir el tratamiento dado al tópico *isomorfismo de grupos* en los diferentes textos, incluyendo la definición presentada por los autores, los ejemplos, así como los ejercicios y problemas propuestos. La finalidad de considerar una revisión de este estilo, en general, fue analizar hacia dónde conduce a los estudiantes dicho tratamiento y a qué tipo de imágenes del concepto en cuestión contribuyen.

Ante esta situación se consideró apropiado destacar las ideas intuitivas expuestas por los autores de los libros de texto, ya que forman parte de su imagen del concepto. Al respecto, Lajoie (2000) ha señalado que “las ideas intuitivas de los expertos resultan un reto para los estudiantes, ya que se espera que las interpreten como sinónimos de la definición formal, de la misma manera que lo hacen los conocedores en el área” (p. 79).

Antes de iniciar con el análisis conviene hacer algunos señalamientos generales acerca de los libros tratados.

En los tres libros: Fraleigh (2003), Herstein (1975) y Rotman (1995) se aprecia una buena estructura en lo que respecta a su aspecto matemático, es decir, dentro de un esquema formalizado del lenguaje. Sin embargo, también se aprecia poca contemplación, en su diseño, del aspecto didáctico. Así, como plantea Mena (2011), el autor esperaría que sus lectores, entre ellos, los estudiantes, comprendieran su contenido basándose en la coherencia lógica de su presentación.

Se observó que mientras algunos autores como Herstein (1975) y Rotman (1995) prefieren avanzar rápidamente enunciando definiciones, teoremas y sus demostraciones; Fraleigh (2003), por su parte, procura avanzar paulatinamente, deteniéndose en la presentación de ejemplos y ejercicios.

Hemos visto en los libros revisados, que es *habitual* encontrarse con las definiciones de homomorfismo de grupos, de isomorfismo de grupos y de grupos isomorfos, en ese orden. Ante esta observación, conviene mencionar que con relación al tratamiento y seguimiento, que frecuentemente también se da en la enseñanza, se ha encontrado que los investigadores no siempre están de acuerdo (Leron, Hazzan & Zazkis, 1995; Lajoie, 2000).

Tomando en cuenta los aspectos señalados al inicio de este apartado, a continuación se presentan los elementos extraídos de la revisión de dichos textos.

Topics in Algebra de Herstein

Para el tópico que nos interesa, *isomorfismo de grupos*, Herstein aborda algunos temas que han de anteceder a este, por ejemplo, el de grupo, posteriormente subgrupo, clases laterales, subgrupo normal, grupos cociente y homomorfismos; sobre este último nos referiremos en la siguiente definición:

> DEFINICIÓN: Una aplicación ϕ de un grupo G en un grupo $\overline{G}$ se dice que es un *homomorfismo* si para cualesquiera $a,b \in G$ siempre se tiene $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ (Herstein, 1975, p. 55).

La idea a la cual hace alusión el autor con la definición anterior tiene que ver con la *aplicación* de un sistema algebraico a un sistema análogo que *preserva la estructura*.

Después de presentar algunos ejemplos y lemas referentes a homomorfismos se llegan a las siguientes definiciones:

> DEFINICIÓN: Un homomorfismo ϕ de G en $\overline{G}$ se dice que es un *isomorfismo* si ϕ es uno a uno (Herstein, 1975, p. 58).

En otro libro de Herstein (1976), encontramos que ante esta última definición se hace el señalamiento que “en la actualidad es frecuente llamar a tal homomorfismo, monomorfismo, reservando el término isomorfismo para los homomorfismos que son, a la vez, inyectivo y suprayectivo” (Herstein, 1976, p. 64).

> DEFINICIÓN: Dos grupos G , G^* se dice que son *isomorfos* si hay un isomorfismo de G *sobre* G^*. En este caso escribimos $G \approx G^*$ (Herstein, 1976, p. 58).

A continuación se propone al lector verificar los siguientes hechos:

1) $G \approx G$.

2) $G \approx G^*$ implica $G^* \approx G$.

3) $G \approx G^*$, $G^* \approx G^{**}$ implica $G \approx G^{**}$.

A saber, la relación $\approx$ de isomorfismo es una relación de equivalencia en cualquier conjunto de grupos.

La idea intuitiva expuesta por el autor de este texto con relación a grupos isomorfos e isomorfismo la encontramos plasmadas de la siguiente manera:

> Cuando dos grupos son isomorfos, entonces, en cierto sentido, son iguales. Difieren en que sus elementos se denominan en forma distinta. El isomorfismo nos da la clase de esta diferencia de denominación, y con ella, conociendo un determinado cálculo en un grupo, podemos efectuar el cálculo análogo en el otro. El isomorfismo es como un diccionario que nos permite traducir una frase de un idioma a una frase, de igual significación, en otro idioma […] puede ser de poco interés saber que dos grupos son isomorfos, y ser realmente interesante el propio isomorfismo. Así siempre que probemos que dos grupos son isomorfos, intentaremos exhibir una aplicación precisa que produzca este isomorfismo (Herstein, 1975, p. 58)

El estudiante pudiera interpretar las anteriores palabras de diversas maneras. El experto sabe perfectamente que los grupos isomorfos son estructuralmente iguales (independientemente de la naturaleza de sus elementos y de cómo puedan estar definidas sus operaciones); el estudiante, por su parte, pudiera no enlazar la idea expuesta por el autor con la definición formal de grupos isomorfos.

Observamos un interés por parte del autor de que se exhiba un isomorfismo cuando se pruebe que dos grupos son isomorfos; al hallar un isomorfismo entre dos grupos se esperaría que el estudiante concluyera que los grupos son "en cierto sentido, iguales", que "se comportan de la misma manera", en otras palabras, que son isomorfos.

Herstein (1975) no proporciona ejemplos en el tratamiento del tópico; más adelante propone una serie de problemas con las siguientes características:

- Dada la aplicación, probar que dicha aplicación es un isomorfismo, por ejemplo:

  * 2. Sea G un grupo cualquiera y g un elemento fijo de G. Definamos $\phi : G \to G$ por $\phi(x) = gxg^{-1}$. Pruébese que ϕ es un isomorfismo de G sobre G (p. 64).

* 3. Sea G un grupo abeliano finito de orden $\circ(G)$ y supongamos que el entero n es primo relativo con $\circ(G)$. Pruébese que todo $g \in G$ puede escribirse como $g = x^n$ con $x \in G$ (*Sugerencia*: Considérese la aplicación $\phi : G \to G$ definida por $\phi(y) = y^n$, y pruébese que esta aplicación es un isomorfismo de G sobre G) (p. 64).

- Probar que dos grupos son isomorfos, por ejemplo:

* 7. Sea V el conjunto de todos los números reales, y para a, b reales, con $a \neq 0$, definimos $\tau_{ab} : V \to V$ por $\tau_{ab}(x) = ax + b$. Sea $G = \{\tau_{ab} | a, b \text{ sean reales y } a \neq 0\}$ y sea $N = \{\tau_{1b} \in G\}$. Pruébese que N es un subgrupo normal de G y que $G/N \approx$ grupo multiplicativo de los números reales distintos de cero (p. 65).

* 11. Si G es un grupo no abeliano de orden 6, pruébese que $G \approx S_3$ (p. 65).

* 15. Sea G el grupo de los números complejos no nulos bajo la multiplicación y sea N el conjunto de los números complejos de valor absoluto 1 (esto es, $a + bi \in N$ si $a^2 + b^2 = 1$). Demuestre que G/N es isomorfo al grupo de todos los números reales bajo la multiplicación (p. 65).

- Demostrar que dos grupos son isomorfos exhibiendo explícitamente un isomorfismo entre ellos, por ejemplo:

* #16. Sea G el grupo de todos los números complejos no nulos bajo la multiplicación y sea $\overline{G}$ el grupo de todas las matrices 2×2 con entradas reales de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, donde ambos a y b no son 0, bajo la multiplicación de matrices. Demuestre que G y $\overline{G}$ son isomorfos exhibiendo un isomorfismo de G sobre $\overline{G}$ (p. 65).

Dentro de este compendio de problemas no son considerados aquellos donde el estudiante tenga que enfrentarse a los casos en que los grupos no sean isomorfos. Además, el tratamiento de tablas de Cayley no es considerado por el autor.

An Introduction to the *Theory of Groups* de Rotman

El texto de Rotman es interesante; él parte del tratamiento de los tópicos siguientes: permutaciones, ciclos, semigrupos, grupos, en ese orden, arribando al tema de homomorfismos donde se puede ubicar *isomorfismo*, el tema que nos ocupa.

En el apartado de *homomorfismos*, el autor, exhibe, entre otras cosas, los siguientes dos ejemplos de grupos: El grupo G cuyos elementos son los números 1 y -1, con la operación multiplicación y el grupo H como el grupo aditivo Z_2. En seguida muestra las dos tablas de multiplicación correspondientes a los grupos mencionados:

G	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

H	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$
$[1]$	$[1]$	$[0]$

(Rotman, 1995, p. 16)

Las observaciones extraídas por el autor al comparar las anteriores dos tablas de grupos se remiten a la apreciación de que; por una parte, G y H son grupos distintos, y por otro lado, que no hay diferencia significativa entre ellos; lo anterior llega a ser más preciso con la siguiente definición:

> **Definición.** Sean $(G,*)$ y $(H,\circ)$ grupos. Una función $f:G\to H$ es un *homomorfismo* si, para todo $a,b\in G$,
>
> $$f(a*b)=f(a)\circ f(b).$$
>
> Un *isomorfismo* es un homomorfismo que también es una biyección. Decimos que G es isomorfo a H, denotado por $G\cong H$, si existe un isomorfismo $f:G\to H$ (Rotman, 1995, p. 16).

Los grupos de dos elementos G y H, cuyas tablas de multiplicación fueron dadas anteriormente, son isomorfas: definiendo $f:G\to H$ por $f(1)=[0]$ y $f(-1)=[1]$.

El autor explica lo siguiente: dado que $f:G\to H$ es un isomorfismo, y siendo $a_1,a_2,...,a_n$ una lista de los elementos de G que no se repiten, como f es una biyección, todos los elementos de H aparecen exactamente una vez en la lista $f(a_1), f(a_2),..., f(a_n)$, con la cual se puede formar una tabla de multiplicación para H.

La idea intuitiva sobre isomorfismo y grupos isomorfos expuesta por Rotman es muy parecida a la propuesta por Herstein (1975); basándose en las observaciones hechas en las tablas de los grupos G y H vistas anteriormente, señala:

> Que f sea un homomorfismo, es decir, $f(a_i * a_j) = f(a_i) \circ f(a_j)$, significa que si se superpone la tabla de multiplicación de G sobre la de H, entonces las tablas "coinciden". En ese sentido, los grupos isomorfos G y H tienen las "mismas" tablas de multiplicación. Informalmente, uno se refiere a G y H como esencialmente el mismo, la única distinción es que G está escrito en Inglés y H está escrito en Francés; un isomorfismo f es un diccionario que traduce uno al otro (Rotman, 1995, p. 17).

El autor se refiere a los grupos isomorfos como *esencialmente el mismo*, la única distinción entre ellos sería el idioma en el que están escritos; comparando de esta manera al isomorfismo con un diccionario que traduce uno al otro.

Si observamos el uso dado por los expertos al término *isomorfismo*, éste denota la correspondencia que es posible establecer entre dos grupos similares, que los hace, precisamente, ser isomorfos. Así, para un experto, el isomorfismo es visto a la vez como una correspondencia particular entre dos grupos isomorfos, así como una relación de equivalencia sobre los grupos, de donde se esperaría una interpretación igual por parte de los estudiantes.

A continuación presentamos las características del tipo de ejercicios propuestos por Rotman (1995), incluyendo ejemplos para cada categoría.

- Demostrar que dos grupos son isomorfos, por ejemplo:

  * 1.48. Si G denota el grupo multiplicativo de todas las raíces n-ésimas complejas de la unidad (ver ejercicio 1.35.), entonces $G \cong Z_n$ (p. 19).

  Ejercicio 1.35. Sea n un entero positivo y sea G el grupo multiplicativo de todas las raíces n-ésimas complejas de la unidad; es decir, G consiste de todos los números complejos de la forma $e^{2\Pi ik/n}$, donde $k \in Z$. ¿Cuál es la identidad de G? Si $a \in G$, ¿Cuál es su inverso? ¿Cuántos elementos tiene G? (p. 15)

  * 1.52. (*ii*). Sea G el grupo aditivo de $Z[x]$ (todos los polinomios con coeficientes enteros) y sea H el grupo multiplicativo de todos los números racionales positivos. Prueba que $G \cong H$. (Sugerencia. Usa el Teorema Fundamental de la Aritmética.) (p. 19).

- Dada la aplicación, probar que dicha aplicación es un isomorfismo, por ejemplo:

* 1.39. Sea $f: X \to Y$ una biyección entre los conjuntos X e Y. Demuestra que $\alpha \mapsto f \circ \alpha \circ f^{-1}$ es un isomorfismo $S_X \to S_Y$. (p. 18).

* 1.47. Si a es un elemento fijo de un grupo G, definimos $\gamma_a : G \to G$ por $\gamma_a(x): a * x * a^{-1}$ (γ_a se llama ***conjugación*** por a).

(i) Prueba que γ_a es un isomorfismo (p. 18).

- Construir una tabla de Cayley:

  * 1.38. (*i*). Escribir una tabla de multiplicación para S_3 (p. 18).

- Al igual que Herstein (1975), también se pide demostrar que la relación de *isomorfismo* es una relación reflexiva, simétrica y transitiva entre grupos:

  * 1.43. (*iii*). Si $\mathcal{C}$ es una clase de grupos, muestra que la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$ (p. 18).

- Ejercicios que pueden ser útiles para romper con algunas ideas erróneas de los estudiantes, por ejemplo:

  * 1.40. Los grupos isomorfos tienen el mismo número de elementos. Prueba que el recíproco *es falso* mostrando que Z_4 no es isomorfo al 4-grupo ***V*** definido en el Ejercicio 1.36 (p. 18).

  Ejercicio 1.36. Prueba que las siguientes cuatro permutaciones forman un grupo ***V*** (llamado el **4-grupo**): $1; (1\ 2)(3\ 4); (1\ 3)(2\ 4); (1\ 4)(2\ 3)$ (p. 15).

El siguiente ejercicio conduce a la reflexión de que "es posible considerar más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos" (Lajoie, 2000, pp. 167-169), lo cual resulta ser difícil de concebir para algunos estudiantes, de acuerdo con la investigación de Lajoie (2000).

* 1.49. Describir todos los homomorfismos de Z_{12} en sí mismo. ¿Cuáles de esos son isomorfismos? (p. 19).

A First Course In Abstract Algebra de Fraleigh

En su parte introductoria, el autor señala que para muchos estudiantes, el Álgebra abstracta es su primera experiencia ampliada a un tratamiento axiomático de las matemáticas; dicho aspecto es tomado en cuenta en la manera de abordar el contenido del libro.

Fraleigh inicia el texto abordando algunos temas preliminares como conjuntos y relaciones. En la Parte I titulada Grupos y Subgrupos, en la sección 1, se introduce un breve tratamiento de los números complejos. En la sección 2 referente a operaciones binarias, se define cuándo una operación binaria en un conjunto dado es asociativa y cuándo es conmutativa y finalmente, cómo para un conjunto finito, se puede hacer uso de una tabla para definir una operación binaria.

Las Estructuras Binarias Isomorfas se ubican en la sección 3. Una ***estructura algebraica binaria*** $\langle S,*\rangle$ se define como un conjunto S junto con una operación binaria $*$ en S.

Previo a enunciar una definición formal de isomorfismo, el autor introduce a partir del contexto de las tablas de Cayley la idea intuitiva del concepto, a fin de precisar lo que significa que dos estructuras algebraicas binarias sean consideradas como *estructuralmente iguales*.

Al comparar las siguientes tablas

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Tabla 3.1

$*'$	#	$	&
#	&	#	$
$	#	$	&
&	$	&	#

Tabla 3.2

$*''$	x	y	z
x	x	y	z
y	y	z	x
z	z	x	y

Tabla 3.3

$*''$	y	x	z
y	z	y	x
x	y	x	z
z	x	z	y

Tabla 3.4

$\bar{*}$	a	b	c
a	b	b	b
b	b	b	b
c	b	b	b

Tabla 3.5

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

Tabla 3.6

(Fraleigh, 2003, p. 29)

Fraleigh señala que al reemplazar en la Tabla 3.1 en todos los casos a por $\#$, b por \$ y c por $\&$, usando la correspondencia uno a uno

$$a \leftrightarrow \# \qquad b \leftrightarrow \$ \qquad c \leftrightarrow \&$$

justo se obtendría la tabla 3.2; la diferencia entre ellas está sólo en los símbolos (o nombres) que denotan a los elementos y los símbolos $*$ y $*'$ para las operaciones.

Ahora, al reescribir la tabla 3.3 cambiando el orden x, y, z por y, x, z se obtendría la tabla 3.4 (aquí no se estableció alguna correspondencia uno a uno; sólo se enlistaron los mismos elementos en un orden diferente). Al reemplazar en la tabla 3.1 en todos los casos a por y, b por x y c por z, usando la correspondencia uno a uno

$$a \leftrightarrow y \qquad b \leftrightarrow x \qquad c \leftrightarrow z$$

justo se obtendría la tabla 3.4. Por lo tanto puede decirse que las tablas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 son *estructuralmente iguales*. *Las cuatro tablas difieren únicamente en los nombres (o símbolos) para sus elementos y el orden en que dichos elementos están enlistados como* "*encabezados*" *en las tablas*.

Por el contrario, podemos observar que la tabla 3.5 con la operación binaria $\bar{*}$ y la tabla 3.6 con la operación binaria $\hat{*}$ sobre el conjunto $S = \{a, b, c\}$ son *estructuralmente diferentes* entre sí, así como de la tabla 3.1; por ejemplo en esta última, cada elemento aparece tres veces mientras que en la tabla 3.5 aparece únicamente el elemento b. En la tabla 3.6, $s \hat{*} s$ (diagonal), para todo $s \in S$ se obtiene el mismo valor c, mientras que en la tabla 3.1 se obtienen tres valores diferentes (diagonal).

Por lo tanto, de las tablas 3.1 a 3.6 se observan sólo tres operaciones binarias estructuralmente diferentes en un conjunto de tres elementos, siempre que pasemos por alto los nombres de los elementos y el orden en el cual ellos aparezcan como *encabezados* en las tablas.

Siguiendo la idea del párrafo anterior, Fraleigh (2003, pp. 28-29) señala que:

> dicha situación es parecida a los niños en Francia y en Alemania quienes están aprendiendo la operación binaria de adición en el conjunto Z^+. Los niños tienen diferentes nombres (un, deux, trois,…versus ein, zwei, drei…) para los números, pero están aprendiendo la misma estructura binaria. En este caso, están usando también los mismos símbolos para los números, por lo que sus tablas de adición parecerían la misma si enlistaran los números en el mismo orden.

A continuación, el autor hace referencia al estudio de diferentes tipos de estructuras que las operaciones binarias pueden proveer en los conjuntos que tienen el *mismo número de elementos*:

> Al considerar a dos estructuras binarias $\langle S,*\rangle$ y $\langle S',*'\rangle$ como *estructuralmente iguales*, se tendrá una correspondencia uno a uno entre los elementos x de S y los elementos x' de S' tal que
>
> Si $x \leftrightarrow x'$ y $y \leftrightarrow y'$, entonces $x * y \leftrightarrow x' *' y'$ .... (1)
>
> La correspondencia uno a uno existe si los conjuntos S y S' tienen el mismo número de elementos, esto es, existe una función ϕ uno a uno que mapea S *sobre* S'. Ahora bien, considerando para dicha función ϕ la ecuación $\phi(x) = x'$, tomando en cuenta la pareja uno a uno $x \leftrightarrow x'$; en términos de ϕ, la correspondencia $\leftrightarrow$ final en (1), la cual afirma que la estructura algebraica en S' es la misma que en S, puede ser expresada como
>
> $$\phi(x * y) = \phi(x) *' \phi(y) \qquad (2)$$
>
> La función (2) que muestra que dos sistemas algebraicos son estructuralmente iguales, es conocida como un *isomorfismo* (Fraleigh, 2003, p. 29).

En seguida el autor presenta la siguiente definición formal:

> **Definición 3.7.** Sean $\langle S,*\rangle$ y $\langle S',*'\rangle$ estructuras algebraicas binarias. Un **isomorfismo de** S con S' es una función uno a uno ϕ que mapea S sobre S' tal que
>
> $$\underbrace{\phi(x * y) = \phi(x) *' \phi(y)}_{\text{propiedad de homomorfismo}} \ \text{para todo } x, y \in S.$$
>
> Si tal mapeo ϕ existe, entonces S y S' son **estructuras binarias isomorfas**, las cuales denotaremos por $S \simeq S'$ (Fraleigh, 2003, pp. 29-30).

A continuación, el autor profundiza en el tema a fin de discutir sobre cómo determinar cuándo dos estructuras binarias son isomorfas y cuándo no lo son:

¿Cómo demostrar que dos estructuras binarias son isomorfas?

Fraleigh muestra cómo proceder de la **Definición 3.7** para demostrar que dos estructuras binarias $\langle S,*\rangle$ y $\langle S',*'\rangle$ son isomorfas.

> **Paso 1.** *Definir la función* ϕ *que da el isomorfismo de* S *con* S'. Esto significa que tenemos que describir, de alguna manera, $\phi(s)$ que debe ser definido para todo $s \in S$.
>
> **Paso 2.** *Demostrar que* ϕ *es una función uno a uno*. Suponer que $\phi(x) = \phi(y)$ en S' y deducir de esto que $x = y$ en S.

Paso 3. *Demostrar que ϕ es sobre S'*. Suponer que $s' \in S'$ es dado y demostrar que existe $s \in S$ tal que $\phi(s) = s'$.

Paso 4. *Demostrar que $\phi(x * y) = \phi(x) *' \phi(y)$ para todo $x, y \in S$*. Esto es solo cuestión de cálculo. Calcular ambos lados de la ecuación y ver cuándo ellos son el mismo.

(Fraleigh, 2003, pp. 30-31).

El autor proporciona dos ejemplos:

Ejemplo 3.8. Demostrar que la estructura binaria $\langle \Re . + \rangle$ con la operación usual suma es isomorfa a la estructura $\langle \Re^+ , \cdot \rangle$ donde $\cdot$ es la multiplicación usual.

Paso 1. Hay que convertir de alguna manera la operación de suma a multiplicación. Recordando que $a^{b+c} = (a^b)(a^c)$, la suma de exponentes corresponde a la multiplicación de dos cantidades. De esta manera tratamos de definir $\phi : \Re \to \Re^+$ por $\phi(x) = e^x$ para $x \in \Re$. Note que $e^x > 0$ para toda $x \in \Re$, en efecto, $\phi(x) \in \Re^+$.

Paso 2. Si $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $e^x = e^y$. Tomando el logaritmo natural, vemos que $x = y$, así ϕ es uno a uno.

Paso 3. Si $r \in \Re^+$, entonces $\ln(r) \in \Re$ y $\phi(\ln r) = e^{\ln r} = r$. Así ϕ es sobre $\Re^+$.

Paso 4. Para $x, y \in \Re$, se tiene $\phi(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \phi(x) \cdot \phi(y)$ Así vemos que ϕ es un isomorfismo.

Ejemplo 3.9. (Es un ejemplo de una estructura binaria que es isomorfa a una estructura que consiste de un subconjunto propio bajo la operación "inducida", en contraste con el ejemplo 3.8 donde las operaciones son totalmente diferentes)**.**

Sea $2Z = \{2n \mid n \in Z\}$, así que $2Z$ es el conjunto de todos los enteros pares, positivos, negativos y el cero. Se afirma que $\langle Z, + \rangle$ es isomorfo a $\langle 2Z, + \rangle$, donde + es la suma usual.

Paso 1. La función $\phi : Z \to 2Z$ a tratar es dada por $\phi(n) = 2n$ para $n \in Z$.

Paso 2. Si $\phi(m) = \phi(n)$, entonces $2m = 2n$ así $m = n$. Por lo tanto ϕ es uno a uno.

Paso 3. Si $n \in 2Z$, entonces n es par, entonces $n = 2m$ para $m = n/2 \in Z$. Por lo tanto $\phi(m) = 2(n/2) = n$, así que ϕ es sobre $2Z$.

Paso 4. Sean $n, m \in Z$. La ecuación $\phi(m + n) = 2(m + n) = 2m + 2n = \phi(m) + \phi(n)$. Por lo tanto hemos demostrado que ϕ es un isomorfismo.

(Fraleigh, 2003, pp. 30-31).

Y, ¿cómo saber cuándo no lo son?

> Que dos estructuras binarias $\langle S,*\rangle$ y $\langle S',*'\rangle$ no sean isomorfas significa que no hay una función ϕ de S sobre S' con la propiedad $\phi(x*y)=\phi(x)*'\phi(y)$ para toda $x,y\in S$ (Fraleigh, 2003, p. 31).

El autor señala que en general, resulta poco factible tratar toda función posible uno a uno que mapee S sobre S' y comprobar si tiene esta propiedad; sin embargo en el caso cuando *no hay* tales funciones, que ocurre precisamente cuando S y S' *no tienen la misma cardinalidad*, se puede usar este hecho para demostrar que no son isomorfas. Sírvase para ello observar el siguiente ejemplo:

> ***Ejemplo 3.10.*** Las estructuras binarias $\langle Q,+\rangle$ y $\langle \Re,+\rangle$ no son isomorfas porque Q tiene cardinalidad $\aleph_0$ mientras que $|\Re|\neq\aleph_0$. Así que no basta con decir que Q es un subconjunto propio de $\Re$ (como en el Ejemplo 3.9) (Fraleigh, 2003, p. 31).

Notemos que este es uno de los casos en los que si ambos conjuntos no tienen la misma cardinalidad ocurre que no son isomorfos, pero puede haber conjuntos con la misma cardinalidad sin que estos sean isomorfos (ver ejemplo 3.11).

A continuación, el autor destaca el rol que juega una *propiedad estructural* de una estructura binaria, la cual debe ser compartida por toda estructura isomorfa. Esta no se refiere a los nombres o algunas otras características no estructurales de los elementos; tampoco tiene que ver con el *nombre* de la operación binaria. Como vimos anteriormente, *el número de elementos en un conjunto S es una propiedad estructural de $\langle S,*\rangle$*.

En seguida, el autor expresa:

> En el caso en que no hay un mapeo uno a uno de S sobre S', por lo general demostraremos que $\langle S,*\rangle$ no es isomorfo a $\langle S',*'\rangle$ (si este es el caso), al demostrar que uno tiene alguna propiedad estructural que el otro no posee.

> ***Ejemplo 3.11.*** Los conjuntos Z y Z^+ ambos tienen cardinalidad $\aleph_0$, y hay muchas funciones que mapean Z sobre Z^+. Sin embargo, las estructuras binarias $\langle Z,\cdot\rangle$ y $\langle Z^+,\cdot\rangle$, donde $\cdot$ es la operación usual multiplicación, no son isomorfas. En $\langle Z,\cdot\rangle$ hay dos elementos

x tales que $x \cdot x = x$, a saber, 0 y 1. Sin embargo, en $\langle Z^+, \cdot \rangle$ hay un solo elemento 1 (Fraleigh, 2003, p. 32).

En seguida, Fraleigh enlista algunos ejemplos de posibles propiedades estructurales y propiedades no estructurales de una estructura binaria $\langle S, * \rangle$.

Posibles propiedades estructurales	*Posibles propiedades NO estructurales*
1. El conjunto tiene 4 elementos.	a. El número 4 es un elemento.
2. La operación es conmutativa.	b. La operación es llamada “suma”.
3. $x * x = x$ para toda $x \in S$.	c. Los elementos de S son matrices.
4. La ecuación $a * x = b$ tiene una solución x en S para todo $a, b \in S$.	d. S es un subconjunto de C.

(Fraleigh, 2003, p. 32).

Además, el autor declara que un buen entendimiento de la noción de estructuras binarias isomorfas debería evidenciar que tener un elemento identidad para $*$ es una propiedad estructural de una estructura $\langle S, * \rangle$. Posteriormente anuncia el siguiente teorema:

Teorema 3.14. Supóngase que $\langle S, * \rangle$ tiene un elemento identidad e para $*$. Si $\phi : S \to S'$ es un isomorfismo de $\langle S, * \rangle$ con $\langle S', *' \rangle$, entonces $\phi(e)$ es un elemento identidad para la operación binaria $*'$ en S' (Fraleigh, 2003, p. 33).

Fraleigh finaliza esta sección con tres ejemplos más que muestran por medio de *propiedades estructurales* que ciertas estructuras binarias no son isomorfas.

Ejemplo 3.15. Demostramos que las estructuras binarias $\langle Q, + \rangle$ y $\langle Z, + \rangle$ bajo la suma usual no son isomorfas. (Ambos Q y Z tienen cardinalidad $\aleph_0$, por lo que hay varias funciones uno a uno que mapean Q sobre Z.) La ecuación $x + x = c$ tiene una solución x para todo $c \in Q$, pero no es el caso en Z. Por ejemplo, la ecuación $x + x = 3$ no tiene solución en Z.

Ejemplo 3.16. Las estructuras binarias $\langle C, \cdot \rangle$ y $\langle \Re, \cdot \rangle$ bajo la multiplicación usual no son isomorfas. (Se puede demostrar que C y $\Re$ tienen la misma cardinalidad.) La ecuación $x + x = c$ tiene una solución x para todo $c \in C$, pero $x + x = -1$ no tiene solución en $\Re$.

Ejemplo 3.17. La estructura binaria $\langle M_2(\Re), \cdot \rangle$ de matrices 2×2 con entradas reales con la operación usual multiplicación de matriz, no es isomorfa a $\langle \Re, \cdot \rangle$ con la multiplicación de

> número habitual. (Puede demostrarse que ambos conjuntos tienen cardinalidad $|\Re|$.) La multiplicación de números es conmutativa, pero la multiplicación de matrices no.
>
> (Fraleigh, 2003, p. 33).

Los ejercicios, problemas así como los ejemplos que presentan los autores, conducen a los estudiantes hacia la búsqueda de una función "adecuada" entre grupos, es decir, aquella función que además de ser biyectiva, preserve la estructura de ellos.

Como observamos en Fraleigh (2003, pp. 30-31), cuando se pretende demostrar que dos estructuras binarias dadas, en particular, dos grupos, son isomorfos, bastaría con seguir los cuatro pasos que él explica detalladamente, a saber:

> 1) definir la función ϕ que da el isomorfismo de un grupo S con S',
>
> 2) demostrar que ϕ es una función uno a uno,
>
> 3) demostrar que ϕ es sobre S' y 4) demostrar que $\phi(x*y)=\phi(x)*'\phi(y)$ para todo $x,y\in S$;

en otras palabras, exhibiendo un homomorfismo biyectivo, para lo cual pudiera suceder que "una mala interpretación del cuantificador existencial […] conduzca a los estudiantes a exhibir una función entre dos grupos y que, después de mostrar que no se trata de un isomorfismo, se concluya que los dos grupos no son isomorfos" (Lajoie, 2000, p. 80).

Por otra parte, para el estudiante pudiera resultar más fácil demostrar que dos grupos no son isomorfos, ya que su proceder sería la búsqueda de alguna propiedad algebraica que un grupo posea y el otro no, más para ello es importante saber cuáles son "invariantes" y cuáles no.

Los tipos de ejercicios propuestos por el autor son los siguientes:

- Demostrar que dos estructuras binarias son isomorfas, por ejemplo:

> * 33. Sea H el subconjunto de $M_2(\Re)$ que consiste de todas las matrices de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ para $a,b\in\Re$. El Ejercicio 23 de la Sección 2 muestra que H es cerrado bajo la suma de matrices y la multiplicación de matrices.
>
> **a.** Demuestra que $\langle C,+\rangle$ es isomorfo a $\langle H,+\rangle$.
>
> **b.** Demuestra que $\langle C,\cdot\rangle$ es isomorfo a $\langle H,\cdot\rangle$ (p. 36).

- Dada la aplicación, probar que dicha aplicación es un isomorfismo, por ejemplo:

En los ejercicios del 2 al 10, determine cuándo el mapeo ϕ dado es un isomorfismo de la primera estructura binaria con la segunda. Si no es un isomorfismo, ¿por qué no?

* 2. $\langle Z,+\rangle$ con $\langle Z,+\rangle$ donde $\phi(n)=-n$ para $n \in Z$ (p. 34).

* 5. $\langle Q,+\rangle$ con $\langle Q,+\rangle$ donde $\phi(x)=x/2$ para $x \in Q$ (p. 34).

* 8. $\langle M_2(\Re),\cdot\rangle$ con $\langle \Re,\cdot\rangle$ donde $\phi(A)$ es el determinante de la matriz A (p. 34).

En los ejercicios del 11 al 15, sea F el conjunto de todas las funciones f que mapean $\Re$ en $\Re$ con derivadas de todos los órdenes. Sigue las instrucciones de los ejercicios 2 al 10.

*11. $\langle F,+\rangle$ con $\langle F,+\rangle$ donde $\phi(f)=f'$, la derivada de f (p. 34).

*15. $\langle F,\cdot\rangle$ con $\langle F,\cdot\rangle$ donde $\phi(f)(x)=x\cdot f(x)$ (p. 34).

- Al igual que los anteriores autores, también se pide demostrar que la relación de ser isomorfo es una relación reflexiva, simétrica y transitiva:

* 28. Prueba que la relación $\simeq$ de ser isomorfo, descrita en la Definición 3.7, es una relación de equivalencia en cualquier conjunto de estructuras binarias. Puede citar simplemente los resultados que se le pidió probar en los anteriores dos ejercicios en los lugares apropiados en su prueba (p. 36).

- Ejercicios que pueden ser útiles para romper con algunas ideas erróneas de los estudiantes, por ejemplo:

* 1. ¿Qué tres cosas se deben comprobar para determinar cuándo una función $\phi : S \to S'$ es un isomorfismo de una estructura binaria $\langle S,*\rangle$ con $\langle S',*'\rangle$? (p. 34).

*En los ejercicios 21 y 22, corregir la definición del término en cursiva sin hacer referencia al texto, si necesita corrección, de modo que esté en una forma aceptable para su publicación.

21. Una función $\phi : S \to S'$ es un *isomorfismo* si y sólo si $\phi(a*b)=\phi(a)*'\phi(b)$ (p. 35).

En la sección 4 de la parte I se ubica el tema de Grupos. En particular, los Grupos son ciertos tipos de estructuras binarias, por lo que, la **Definición 3.7** también les pertenece.

A partir de la construcción de tablas de Cayley de uno, dos y tres elementos (los conjuntos: $\{e\},\{e,a\},\{e,a,b\}$ con la operación binaria $*$), respectivamente, el autor muestra la manera de manipular dichas tablas para que estas tengan estructura de grupo.

Si llamamos G al grupo de tres elementos al cual se hace referencia en el párrafo anterior y si se tuviera una tabla de otro grupo G' también con tres elementos, si enlistáramos sus elementos de la misma manera que el grupo $(G,*)=\{e,a,b\}$, y los renombráramos, la tabla resultante para G' debería ser la misma que la que se obtuvo para G.

> Este cambio de nombre da un isomorfismo del grupo G' con el grupo G [...] todos los grupos con un sólo elemento son isomorfos, todos los grupos con sólo dos elementos son isomorfos, y todos los grupos con sólo tres elementos son isomorfos (Fraleigh, 2003, p. 45).

Finalmente, el autor señala que la frase *salvo isomorfismo* es usada para expresar la anterior identificación usando la relación de equivalencia $\simeq$. De esa manera se puede decir que: *Hay un grupo de tres elementos, salvo isomorfismo*.

"El isomorfismo de grupos es tanto una función particular entre dos grupos isomorfos como una relación de equivalencia sobre los grupos" (Lajoie, 2000, p. 81). El tratamiento de este tópico en las obras revisadas indica que es así como lo ven los expertos; quienes dejan como ejercicio demostrar que la relación de isomorfismo es de equivalencia; este es enunciado más o menos de la siguiente manera:

Sea X un conjunto de grupos, si para $G,H \in X$ definimos $G \sim H$ si y sólo si G es isomorfo a H, entonces "$\sim$" es una relación de equivalencia en X.

Es bien sabido que una de las tareas importantes en matemáticas es clasificar objetos según sus propiedades, en este caso, clasificar grupos en clases de isomorfismo. Aquí el término "isomorfismo" es utilizado para "denotar que dos grupos son isomorfos"; en otras palabras, se puede hablar de isomorfismo entre dos grupos "sin necesariamente referirse a una aplicación particular entre los dos" (Lajoie, 2000, p. 81).

La idea anterior nos lleva a tener que trabajar con un *grupo abstracto*. "Un grupo abstracto está determinado por la ley de multiplicación de sus elementos, independientemente de su naturaleza, de modo que grupos concretos distintos pero isomorfos se pueden considerar como modelos del mismo grupo abstracto" (Aleksandrov *et al*., 1973).

La investigación de Lajoie (2000, pp. 170-177) da evidencia de cómo los estudiantes no llegan a establecer una conexión entre estas dos ideas.

Los tipos de ejercicios que propone Fraleigh (2003) para este apartado se muestran a continuación:

- Demostrar que dos grupos son isomorfos, por ejemplo:

  * 10. Sea n un entero positivo y sea $nZ = \{nm \mid m \in Z\}$.

  a. Demuestra que $\langle nZ,+\rangle$ es un grupo.

  b. Demuestra que $\langle nZ,+\rangle \simeq \langle Z,+\rangle$ (p. 45).

  * 40. Sea $\langle G,\cdot\rangle$ un grupo. Considere la operación binaria $*$ en el conjunto G definida por $a*b = b\cdot a$ para $a,b \in G$. Demuestra que $\langle G,*\rangle$ es en realidad isomorfo a $\langle G,\cdot\rangle$. (Sugerencia: Considera el mapeo ϕ con $\phi(a) = a'$ para $a \in G$.) (p. 49).

- Dada una aplicación entre dos grupos, probar que dicha aplicación es un isomorfismo, por ejemplo:

  * 41. Sea G un grupo sea g un elemento fijo de G. Demuestra que el mapeo $i_g(x) = gxg'$ para $x \in G$, es un isomorfismo de G con sí mismo (p. 49).

- Demostrar que dos grupos no son isomorfos:

  * 9. Demuestra que el grupo $\langle U,\cdot\rangle$ no es isomorfo ya sea a $\langle \Re,+\rangle$ o $\langle \Re^*,\cdot\rangle$. (Los tres grupos tienen cardinalidad $|\Re|$.) (p. 45).

- Ejercicios que pueden ser útiles para romper con algunas ideas erróneas de los estudiantes, por ejemplo:

  * 20. Este ejercicio demuestra que hay dos estructuras de grupo no isomorfas en un conjunto de 4 elementos.

  Sea el conjunto $\{e,a,b,c\}$, con elemento identidad e para la operación del grupo. La tabla de grupo tendría que empezar de la manera mostrada en la Tabla 4.22. El cuadrado marcado por el signo de interrogación no puede ser llenado con la letra a. Debe ser llenado ya sea con el elemento identidad e, o con un elemento distinto de e y a. En este último caso, no se pierde generalidad al suponer que este elemento sea b. Si este cuadrado se llena con e, la tabla puede completarse de dos maneras para dar un grupo. Encuentra esas dos tablas. (Una vez más, no es necesario comprobar la ley asociativa.) De las tres tablas que tienes ahora, dos son grupos isomorfos. Determina cuáles son esas dos tablas, y da la función uno a uno sobre el cambio de nombre el cual es un isomorfismo.

  a. ¿Todos los grupos de 4 elementos son conmutativos?

  b. ¿Qué tabla da un grupo isomorfo al grupo U_4 ($U_n = \{z \in C \mid z^n = 1\}$, las raíces n-ésimas de la unidad) si sabemos que la operación binaria definida por la tabla es asociativa?

c. Demostrar que el grupo dado por una de las otras tablas (de las que resultan al llenarse la Tabla 4.22) es estructuralmente el mismo que el grupo en el Ejercicio 14 (el grupo de todas las matrices diagonales $n \times n$ con todas las entradas en la diagonal 1 o -1 bajo la multiplicación de matrices), para un valor particular de n, si sabemos que la operación binaria definida por esa tabla es también asociativa.

Tabla 4.22

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	?		
b	b			
c	c			

(Fraleigh, 2003, pp. 46-47)

* 25. Marque cada uno de los siguientes si es verdadero o falso.

_____ **b.** Cualesquiera dos grupos de tres elementos son isomorfos (p. 47).

3.1.2 Primera entrevista

Se entrevistaron a cinco estudiantes (voluntarios) de Licenciatura del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM quienes iniciaban el curso de Álgebra Moderna I (materia obligatoria), ubicada en el quinto semestre de la carrera.

El propósito de la entrevista fue obtener información referente a la idea intuitiva que algunos estudiantes pueden tener respecto a Isomorfismo de grupos; era de nuestro interés que dicho tópico no hubiese sido abordado en clase cuando se llevó a cabo la entrevista. No obstante, el profesor responsable del curso, durante sus clases, previo a presentar una definición formal, había hecho mención de una idea "vaga" de este y de algunos ejemplos de grupos isomorfos.

Cuatro estudiantes cursaban exclusivamente la carrera de Matemáticas, y otro estudiante también cursaba la carrera de Ciencias de la computación en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

A continuación se presentan extractos de las entrevistas con los estudiantes. Durante la entrevista, con la excepción de E5 se discutió con los participantes sobre dos grupos que les eran familiares, a saber, Z_4 y el 4-grupo de Klein (*V*). Durante la entrevista debido a un error de la entrevistadora se mencionó que dichos grupos eran isomorfos (aunque esto no es cierto) y como lo veremos a continuación, cada uno de los estudiantes lo aceptó. Sin embargo no hay evidencia de que esto haya afectado los resultados de la entrevista ya que se pretendía obtener explicaciones en cuanto a "qué hace que dos grupos sean isomorfos".

Entrevista con E1[2]

> **E:** En la clase el profesor ha mencionado algunos ejemplos de grupos que son isomorfos, por ejemplo el grupo Z_4 y el 4-grupo de Klein, ¿anteriormente has oído o visto en clase dicho concepto?
>
> **E1:** Lo he visto como función, o sea una función es, por ejemplo en las transformaciones en geometría analítica, […] las rotaciones y las reflexiones pertenecen a ese grupo, ¿no?, a los isomorfismos, que es como parecido, es lo mismo, como que conserva propiedades y eso como que te permite trabajar ahí, y precisamente también lo vi en lineal, también con funciones […] definiendo funciones lineales, ya si es inyectiva pues es monomorfismo, si es suprayectiva es epimorfismo y es biyectiva es isomorfismo, ¿no? [...]. Y en Álgebra cuando lo menciona el profe, así, es isomorfo, es así como que parecido, ¿no? [...].
>
> **E:** ¿Podrías platicarme respecto a tu curso de Álgebra Lineal cuando vieron el tema de transformaciones lineales y se habló de isomorfismo?
>
> **E1:** Vimos lo que era una función isomorfa o cuál es grupo isomorfo o así.
>
> **E:** Ah, bien.
>
> **E1:** Si, así como que me dijeran, así mira no aplicado a funciones o algo así, sino que algo general, no específico, para funciones o transformaciones, ¿no?, isomorfo es esto y tú ves como lo aplicas, ¿no? En algo específico.
>
> **E:** Respecto al ejemplo mencionado al principio; el grupo Z_4 y el 4-grupo de Klein son isomorfos, ¿cómo lo entendiste?
>
> **E1:** Ah, pues Z_4, tienen los mismos elementos, ¿no?, 0, 1, 2 y 3 y a, b, c y el neutro.
>
> **E:** Entonces entiendes que son isomorfos por esa característica, ¿por la misma cantidad de elementos?

[2] Ya que se entrevistaron a cinco estudiantes, "E1" representa en este caso al primer estudiante entrevistado y así para los demás; mientras que "E" representa a la entrevistadora.

> **E1:** ¿Por elementos?, no, es que también tengo la idea de que es por las operaciones que puedas hacer en los grupos, entonces por eso es isomorfo, no sé, como que comparten propiedades, esa es mi idea, o sea, hay propiedades, pero esas propiedades vienen de las operaciones que se hacen en esos grupos […] por ejemplo Z_4 y el 4-grupo de Klein son cuatro elementos y cuatro elementos, como que digamos que son isomorfos porque tienen como que el mismo número de elementos, pero no son los mismos elementos, ¡eso está claro!, ¿no? Pero yo siento que cómo se opera en Z_4 y a las operaciones que tenemos en el grupo 4 de Klein pues son las mismas, entonces como que esa es una propiedad, no debe importar tanto qué clase de elementos sean, sino que puedas aplicar esa propiedad, o sea que puedan cumplirla.

OBSERVACIONES:

E1 no parece estar en desacuerdo con la afirmación "Z_4 es isomorfo a V", pero tampoco se le pidió averiguarlo; recordemos que esto no era de interés por ahora, puesto que E1, así como la mayoría de los demás participantes no contaban hasta este momento con los elementos para hacerlo.

La caracterización que forma parte de la concepción de E1 sobre isomorfismo la vemos plasmada en su comentario al referirse a este como *parecido, es lo mismo, como que conserva propiedades y te permite trabajar ahí*.

Para E1, no es importante *el tipo de elementos que componen los grupos*, en este caso, $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ y $V = \{e, a, b, c\}$; más bien, E1 señala que los grupos isomorfos *comparten propiedades* (por ejemplo, misma cantidad de elementos) y que estas *vienen de las operaciones* (que son las mismas, en la forma en que se opera en ambos grupos). La falta de precisión en sus argumentos nos hace pensar que cuenta con una idea poco clara del papel que desempeña la operación.

Los comentarios sugieren que, para E1, la cantidad de elementos es importante y lo vemos explicitado en tres ocasiones cuando reitera las siguientes expresiones como argumentos: *tienen los mismos elementos*, Z_4 *y el 4-grupo de Klein son cuatro elementos y cuatro elementos* y *tienen mismo número de elementos*. Para E1, la cantidad de elementos es una propiedad necesaria pero no suficiente ya que hace el señalamiento de que *las operaciones que puedes hacer en los grupos* también forman un tipo de *propiedad* determinante; sin embargo, como ya hemos señalado, se puede apreciar que hasta este momento no tiene claro en qué consiste.

Entrevista con E2

> **E:** En clases pasadas el profesor ha mencionado algunos ejemplos de grupos isomorfos, por ejemplo, el grupo Z_4 y el 4-grupo de Klein, ¿has visto en clases anteriores dicho concepto?
>
> **E2:** Sí conocía la definición de isomorfismo, pero la verdad no la recordaba, lo que sí recuerdo es, isomorfo es que tiene la misma forma o una forma parecida […] que Z_4 y el 4-grupo de Klein son isomorfos, pues, es de imaginarse que iban a serlo.
>
> **E:** Entonces, ¿cuál es tu idea respecto a isomorfismo?
>
> **E2:** Mmm, pues mi idea de isomorfismo de grupos es que, así como funciona tu operación en un grupo, es muy similar cómo funciona en el otro.
>
> **E:** Bien, entonces no son isomorfos sólo por tener la misma cantidad de elementos.
>
> **E2:** No necesariamente, de hecho pueden tener más elementos, pero pues a fin de cuentas si tienes un elemento más, por ejemplo en este caso, este, tendría que ser generado por alguno de los del grupo.

OBSERVACIONES:

En el caso de E2, que Z_4 y V sean isomorfos es algo muy evidente, apoyándose de la concepción de que *isomorfo* significa que *tiene la misma forma o una forma parecida.*

Vemos que también E2 menciona algo referente a las operaciones de los grupos; de hecho, para E2, isomorfismo está asociado a *un funcionamiento similar de la operación en cada uno de los grupos*; sin embargo, con ello no podemos asegurar que él tenga claro en qué consiste este funcionamiento de la operación.

Algo interesante en el comentario de E2 cuando se le pregunta implícitamente si la cantidad igual de elementos en los grupos es razón suficiente para decir que ellos son isomorfos, fue mencionar que dos grupos isomorfos pueden no tener la misma cantidad de elementos, ya que *si uno de los grupos tuviera un elemento más, este sería generado por algún elemento del grupo*. Esto tiene que ver con la concepción de que el elemento generado lleva de alguna manera las mismas características de los elementos generadores, lo que probablemente para el estudiante no cambia la "similitud" entre los dos grupos isomorfos.

Entrevista con E3

E: Recordarás que en la clase el profesor ha mencionado ejemplos de grupos isomorfos.

E3: Sí.

E: Y cuando el profesor lo mencionó, ¿con qué idea te quedaste con respecto a isomorfismo de grupos?

E3: No sé, como una función entre grupos, es como que mi idea principal, podría decir biyectiva pero no podría decir bien todavía.

E. En particular, el grupo Z_4 y el 4-grupo de Klein ¿por qué crees que son isomorfos?

E3: Algo así como si fueran similares, bueno yo tengo como que la idea de similaridad, en teoría de conjuntos, entre dos conjuntos ordenados, algo así que bajo las operaciones de uno se preservan en el otro.

E. Ah, muy bien.

E3: Es como que la idea que tengo, ahorita que estoy llevando Teoría de conjuntos, los estoy relacionando; es así como una similaridad. Entonces tienes que cuando son similares tienes una función inyectiva de una en otra, biyectiva, de hecho […]. Es la idea que tengo, una función que manda los elementos de uno y que se va a preservar como que la operación que tienes en el otro grupo.

OBSERVACIONES:

Hasta el momento E3 es el único estudiante que se refiere a isomorfismo como *una función* (*posiblemente*) *biyectiva y que se va a preservar la operación que tienes en el otro grupo*.

Cuando se le solicita su opinión de por qué "Z_4 y V son isomorfos", E3 hace alusión a que son *similares*, agregando que *bajo las operaciones de uno se preservan en el otro*. A pesar de que E3 tiene una idea de grupos isomorfos muy cercana a la definición oficial, no podemos asegurar que la esté entendiendo a plenitud.

Entrevista con E4

E: Bien, durante la clase se han dado ejemplos de grupos que son isomorfos […] ¿antes ya habías escuchado hablar de isomorfismo?

E4: Bueno, la he visto bajo contexto, por ejemplo en la clase de Álgebra Lineal, en la clase de Cálculo, la clase de Teoría de los dominios, he visto la definición de isomorfismo que se aplican a varios objetos matemáticos.

E: Y, ¿respecto a Álgebra Moderna?

E4: Aquí en la clase […] aún no nos la ha mencionado, ha dado algunos ejemplos […]

E: Pero, ¿qué idea tienes a partir de los ejemplos que ha dado?

E4: Pues que, bajo ciertas reglas son equivalentes, tanto puedan ser en forma como en las funciones que se puedan definir en el objeto, en este caso, grupos, es la idea que tengo aquí en la clase de Álgebra.

E: Equivalencia.

E4: Bueno, más que equivalentes, que se puedan poner en correspondencia, que tienen la misma forma en cuanto a las propiedades que tienen, no sé si me doy a explicar […]. Tú mencionaste a Z_4 y el 4-grupo de Klein, ¿no? […]

E: Así es.

E4: ¿Qué imagino entonces? [...] mmm […]. En este caso pueden ser grupos que tienen el mismo número de elementos y que podemos establecer relaciones entre sus subgrupos, por ejemplo, algo así.

OBSERVACIONES:

E4 es el estudiante que cursa dos carreras, Matemáticas y Ciencias de la computación, es en esta última que tuvo la oportunidad de ver en sus clases el concepto de isomorfismo, aplicado a otros objetos matemáticos, como él lo señala.

Cuando se le pregunta específicamente por su clase de Álgebra Moderna, E4 señala que los grupos isomorfos *bajo ciertas reglas son equivalentes*. Aunque no especifica cuáles son esas reglas, destaca aspectos importantes relacionados con el término *equivalentes*, a saber, que *tienen la misma forma*, refiriéndose con esta frase a la estructura de los conjuntos, pues más adelante lo asocia con *las propiedades* que tienen los grupos. Por otra parte, también menciona algo relacionado con *las funciones que se puedan definir en el objeto* (grupos); muy posiblemente el estudiante pudiera estar pensando en el isomorfismo como aquello que hace a los grupos ser "el mismo excepto por el nombre de los elementos", de ser esta su idea, hasta este momento no parece tenerla muy clara.

Vemos cómo E4 también hace alusión principalmente a una propiedad vista de los grupos Z_4 y el 4-grupo de Klein mencionada por los otros participantes, *el mismo número de elementos*; además de señalar que es posible *establecer relaciones entre sus subgrupos*, sin ejemplificar.

Entrevista con E5

> **E5:** Empecé estudiando matemáticas y estoy en el proceso de terminar mis materias, había abandonado la carrera prácticamente, incluso, ahora por cuestiones laborales […] por eso estoy de regreso, ya no estaba muy interesado.
>
> **E:** Aquí en la clase se han dado ejemplos de grupos que son isomorfos, ¿anteriormente habías visto una definición formal?
>
> **E5:** Antes, no. Es la primera vez que llevo esta materia […]. Pues así una idea muy intuitiva es que tienen la misma forma, que tienen propiedades y características comunes, viéndolo como, que no lo es, pero si lo fuera, una función, es biyectiva, ¿no? Lo que sucede en uno sucede en el otro, bueno una idea informal, intuitiva, sería eso, que tienen propiedades y características en común; que a final de cuentas no importa la forma, terminan siendo uno contenido en el otro.
>
> **E:** ¿A qué te refieres cuando dices uno contenido en el otro?
>
> **E5:** Que hay una equivalencia; lo estaría entendiendo como equivalencia entre los grupos.

OBSERVACIONES:

E5, por su parte, comparte la idea intuitiva de que los grupos isomorfos *tienen la misma forma*, que *comparten propiedades y características* y que *no importa la forma de los grupos*. Aquí vemos cómo E5 está usando la expresión "forma" en dos sentidos diferentes. En la primera parte de la oración probablemente se refiere a la estructura de los conjuntos, y en la segunda a los símbolos que se usan para denotar sus elementos.

E5 asocia también al isomorfismo con una *función biyectiva*, aunque parece no estar muy seguro acerca de esto.

OBSERVACIONES GENERALES:

Recordemos que esta entrevista fue hecha antes de ver la definición formal de isomorfismo de grupos. No podemos saber exactamente cómo estas ideas intuitivas, de permanecer, podrían influir en el aprendizaje del concepto en cuestión. Sin embargo, consideramos importante identificarlas para saber con qué concepciones previas los estudiantes empiezan a abordar el tema, así como cuáles y de qué manera pueden modificarse a lo largo de su aprendizaje.

Hay que tomar en cuenta que la mayoría de los estudiantes ya contaban con algunas ideas del concepto isomorfismo de grupos, formadas quizá a partir de los comentarios de su profesor del curso. Posiblemente algunos de los participantes hubiesen consultado por su propia iniciativa la definición formal en los libros de texto o bien, debido a haber trabajado algo de isomorfismo en otras materias, no aplicado precisamente a grupos sino a otros objetos matemáticos, como lo expresaron en sus comentarios.

Los estudiantes mencionaron que existen "propiedades" que comparten los grupos isomorfos, de ellas la más destacada de entre sus comentarios: "misma cantidad de elementos", reconocida por ellos como una propiedad necesaria pero no suficiente para determinar si dos grupos son isomorfos, sin embargo, esta pareció ser, si no la única, la propiedad a la que más se recurrió hasta este momento.

También se hizo mención explícita de que los grupos isomorfos preservan las operaciones (E3) y de un reconocimiento de la importancia de estas (E1 y E2); sin embargo, a pesar de que pudiera considerarse que las operaciones forman un tipo de propiedad, todavía no se entiende en qué consisten. Más bien, observamos claramente que la idea intuitiva desarrollada por los estudiantes los conduce hacia la búsqueda de "parecidos" en el sentido literal de la palabra, más estrictamente relacionados con los elementos de los grupos.

3.1.3 Cuestionario piloto - análisis a priori

Con el propósito de obtener un primer acercamiento hacia la indagación de cuáles podrían ser algunas de las concepciones respecto a isomorfismo de grupos que pudieran tener estudiantes quienes tomaban su primer curso de Álgebra Moderna y que habían trabajado con el concepto en cuestión, fue que se pensó en la aplicación de este primer cuestionario.

El cuestionario consistió de cuatro preguntas y fue aplicado a un grupo de cinco estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, quienes estaban por concluir su curso de *Álgebra Moderna I*, donde uno de ellos también participó en la primera entrevista.

Para el diseño de este cuestionario se tomaron en cuenta aspectos que aportaron la revisión de los libros de texto; los resultados de algunas investigaciones llevadas a cabo dentro de la didáctica del Álgebra Abstracta, en particular, aquellos que han involucrado al concepto *isomorfismo de grupos*; así como la información obtenida de la primera entrevista.

A continuación presentamos el diseño del instrumento donde exponemos la intención de cada una de las preguntas que lo componen:

Pregunta 1. ¿Qué significa que dos grupos G y G' sean isomorfos? Explica ampliamente.

Pregunta 2. ¿Qué significa que dos grupos G y G^* NO sean isomorfos? Explica ampliamente.

Mediante el planteamiento de estas preguntas lo que se pretendía era explorar el entendimiento de los estudiantes respecto a los grupos isomorfos, donde se esperaría que usaran elementos del concepto *isomorfismo*. De este último concepto, se ha evidenciado que "existe dificultad en ver al isomorfismo a la vez como una relación de equivalencia sobre los grupos y como una correspondencia particular entre dos grupos isomorfos" (Lajoie, 2000, pp. 170-177).

La investigación de Lajoie (2000) también da evidencia de que la preservación de las operaciones no es percibida en la definición formal de grupos isomorfos, razón por la que no llega a ser una preocupación para los estudiantes cuando tratan de usar dicha definición.

En nuestro caso, se espera que los estudiantes basen sus respuestas considerando aspectos como:

- La definición formal (considerada en clase o tomada de algún libro).
- Ejemplos particulares de grupos isomorfos como argumento para sus explicaciones.
- El cumplimiento de algunas propiedades que preserven o no dichos grupos; por ejemplo, que ambos grupos tengan la misma cantidad de elementos o no, el hecho de que ambos grupos sean cíclicos o no, etc.

Se ha considerado importante plantear la pregunta 2, puesto que no suele hacerse énfasis en "no-ejemplos" en clase, es por eso que nos parece interesante conocer la apreciación que se tiene por parte de los estudiantes.

También, pudiera suceder que una interpretación incorrecta del cuantificador existencial involucrado en la definición formal de grupos isomorfos conduzca a los estudiantes a conclusiones equivocadas al momento de determinar si dos grupos son o no isomorfos.

El texto de Fraleigh (2003) formó parte de la bibliografía sugerida para el curso a los estudiantes participantes. Como se mostró en la sección 3.1.1, el autor presenta un apartado de cómo demostrar que dos estructuras algebraicas binarias no son isomorfas y hace usos de los elementos que se espera que los estudiantes consideren para apoyar su respuesta a la pregunta 2.

Pregunta 3. ¿Qué significa que una propiedad sea preservada bajo isomorfismo? Explica ampliamente.

De alguna manera, los estudiantes entrevistados (primera entrevista) hicieron alusión a ciertas propiedades que se conservan bajo isomorfismo o en palabras de los estudiantes: *propiedades que comparten* los grupos isomorfos; nos interesa averiguar si los estudiantes saben por qué sucede esto ya que no nos interesa sólo tener un listado de ellas, aunque se espera que los estudiantes mencionen algunas de esas propiedades (invariantes), por ejemplo, el orden, ser abeliano, ser cíclico de orden dado, etc.

Ejercicio 4. Observa la siguiente tabla del grupo G y da un ejemplo de otro grupo G' que sea isomorfo a G. Justifica tu respuesta.

$*$	q	r	s	t
q	q	r	s	t
r	r	q	t	s
s	s	t	q	r
t	t	s	r	q

Thrash y Walls (1991) señalan que la manipulación de las tablas de multiplicación de grupos es una estrategia enriquecedora para el desarrollo del entendimiento del concepto isomorfismo de grupos.

A los estudiantes participantes se les presentaron durante el curso ejemplos de algunos grupos finitos y sus respectivas tablas, tales como Z_2, Z_3, Z_4, el 4-grupo de Klein y S_3, por citar algunos. No obstante, cuando se presentó el tema de isomorfismo de grupos no se hizo referencia a algún ejemplo con el uso de tablas. Por lo tanto, resultó interesante analizar el razonamiento de los estudiantes en este contexto.

Además, en investigaciones como las de Findell (2002), Lajoie (2000), Larsen (2009), Leron, Hazzan y Zazkis (1995) y Weber (2002) se hizo uso de las tablas de Cayley obteniéndose de ello resultados interesantes sobre el tipo de razonamiento empleado por los estudiantes, así mismo, sobre las dificultades que surgen al trabajar con ellas.

Hemos elegido la tabla que representa al 4-grupo de Klein (V), que se esperaría que los estudiantes identificaran, ya que dicha tabla les fue presentada en clase. Basándonos en los resultados de la primera entrevista, donde los estudiantes aceptaron sin cuestionar que Z_4 y V eran isomorfos, ya que ambos grupos poseen cuatro elementos; queremos ver si con un razonamiento bajo este contexto se obtienen resultados diferentes. Además, es una actividad que se presta bastante para la exploración de las propiedades de los grupos.

También existe la posibilidad que los estudiantes no puedan contestar esta cuestión.

3.1.4 Resultados del cuestionario piloto

Pregunta 1. ¿Qué significa que dos grupos G y G' sean isomorfos? Explica ampliamente.

Los cinco estudiantes[3] respondieron esta cuestión, revelando los siguientes aspectos principales:

Tres estudiantes hicieron explícita su idea sobre la *existencia* de una *función* (*aplicación*) *biyectiva* entre los dos grupos, pero sólo dos de ellos dicen algo más referente a la *estructura* de los grupos isomorfos con relación a dicha función. Presentamos las siguientes respuestas de Armando, José y Fernando para mostrar lo anterior.

Armando considera que:

> El que dos grupos sean isomorfos significa que existe una función biyectiva de uno al otro que preserve la misma estructura de grupo.

En concordancia con lo que continúa explicando este estudiante, en su respuesta podemos apreciar que su interpretación de *que preserve la misma estructura de grupo* se basa en la consideración del comportamiento de los elementos de los grupos (isomorfos) con relación a sus respectivas operaciones, asociado a los *tres axiomas de grupo*, como lo veremos en seguida:

> Que sus elementos estén en correspondencia respecto a la estructura de grupo, es decir, que el neutro en G opere de la misma forma que el neutro en G', lo mismo con el inverso, la asociatividad sea fielmente correspondida en uno y otro.

José, por su parte, responde esta pregunta haciendo referencia a la definición formal, de hecho, muy parecida a la proporcionada en clase:

> Se dice que $G \simeq G'$ si existe una aplicación $\phi : G \to G'$ que cumple con: i) ϕ es homomorfismo, i. e, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$; ii) ϕ es monomorfismo, i. e, ϕ es inyectivo; y iii) ϕ es epimorfismo, i. e, ϕ es suprayectivo.

José añade que los grupos isomorfos son *estructuralmente iguales*:

> Sí son idénticos salvo por el nombre de los elementos y las operaciones.

[3] Los nombres de los estudiantes fueron cambiados.

Se puede entender esta idea más claramente al analizar sus respuestas a las otras cuestiones, donde podemos observar cómo José considera que los grupos isomorfos son grupos que tienen el mismo número de elementos, que los órdenes de sus elementos son iguales, que ambos son abelianos o no, en general, que poseen las mismas propiedades.

Fernando también hace alusión a la existencia de una función biyectiva entre los grupos, sin embargo, como veremos a continuación, muestra imprecisión en su explicación:

> Que G y G' sean isomorfos significa que existe una función biyectiva entre ellos, que dado un grupo G exista un monomorfismo con G' además que sea un epimorfismo y exista un homomorfismo entre ellos.

Por otra parte, la respuesta de Ana nos induce a pensar que no percibe o no toma en cuenta al cuantificador existencial involucrado en la definición formal de grupos isomorfos; respuesta considerada como imprecisa al igual que Fernando, originada quizá por un intento de reproducir lo que memorizaron de la definición o al tratar de formular su propia definición:

> Significa que es homomorfismo inyectivo y suprayectivo.

Finalmente, la noción de similaridad aparece plasmada explícitamente en la respuesta de Hugo; al referirse a los grupos isomorfos como se muestra a continuación:

> Que son similares y se comportan de la misma forma aunque no sean iguales.

Aquí muy probablemente el estudiante se está refiriendo con la expresión *forma* a la estructura de los conjuntos, tratando de señalar, al igual que José, que sus propiedades se conservan de tal manera que en lo que sí son iguales es en su comportamiento.

Hugo hace referencia en todo momento a los espacios vectoriales, tanto en sus ejemplos como en las explicaciones que proporciona. Así, para esta cuestión apoya su respuesta proponiendo a $\Re^2$ y C como ejemplo de estructuras isomorfas, sin describir un isomorfismo entre las dos.

De las respuestas de los estudiantes podemos apreciar cómo la mayoría hace referencia a los grupos isomorfos y de manera particular al isomorfismo como homomorfismo biyectivo. Si bien algunos de los estudiantes señalan que los grupos isomorfos son estructuralmente iguales, no parecen asociar esta idea con la propiedad de homomorfismo. Para los estudiantes, la *preservación de la estructura* es una expresión conocida pues frecuentemente aparece en los libros de texto y también suele ser usada por los profesores, pero observamos aquí que los estudiantes le atribuyen un significado diferente a aquel que los expertos manejan.

Veremos más adelante cómo la concepción de grupos isomorfos como grupos similares (el caso de Hugo) cuando no es relacionada con la preservación de las operaciones, sólo lleva a la observación de propiedades parciales de los grupos, tales como el número de elementos.

Pregunta 2. ¿Qué significa que dos grupos G y G^* NO sean isomorfos? Explica ampliamente.

La respuesta de Ana a esta pregunta nos induce a pensar que si bien la estudiante pudiera estar considerando que dos grupos son isomorfos en tanto que exista un homomorfismo biyectivo, por su respuesta a la pregunta 1; podemos observar cómo ahora en su interpretación de grupos *no* isomorfos no hace referencia a la propiedad de homomorfismo, sino sólo al hecho de que no exista una biyección entre los grupos:

> Que no hay una biyección entre esos 2 grupos.

Por otra parte, Armando provee una respuesta la cual pudiera significar que para el estudiante en caso de agotar todas sus posibilidades por construir un isomorfismo, pudiera concluir con ello que los grupos no son isomorfos.

> Que no se pueda hallar una correspondencia (función) de uno a otro que preserve la estructura de grupo, en el mismo sentido que el inciso 1.

En la respuesta de José observamos claramente lo que señalábamos anteriormente, acerca del significado atribuido por este estudiante con relación a que dos grupos sean *estructuralmente iguales*.

> G no es isomorfo a G^* si no existe $\phi : G \to G^*$ homomorfismo inyectivo y suprayectivo.
>
> En otras palabras quiere decir que G y G^* no son estructuralmente iguales, i. e, G o G^* no tiene alguna propiedad que el otro sí.

Observamos también cómo el problema de probar la "no existencia" es trasladado a la búsqueda de una propiedad que un grupo posee y el otro no.

Las respuestas de Fernando y Hugo nos recuerdan a un ejercicio antes mencionado en la revisión de los textos, más específicamente, el ejercicio 1 propuesto por Fraleigh (2003, p. 34) donde se solicitan las tres cosas que deben verificarse para determinar cuándo una función ϕ es un isomorfismo de una primera estructura binaria con la segunda; no obstante, si una función particular no resultara ser isomorfismo al fallar alguna de esas tres condiciones, ¿garantiza ello que los grupos no son isomorfos?¿depende de la función (aplicación) que se dé?

Presentamos a continuación la respuesta dada por Fernando y hemos omitido la de Hugo ya que fue similar:

> Que no sean isomorfos significa que no cumplen alguna de las tres
>
> i) monomorfismo
>
> ii) epimorfismo
>
> iii) homomorfismo

Pregunta 3. ¿Qué significa que una propiedad sea preservada bajo isomorfismo? Explica ampliamente.

Para esta pregunta los estudiantes proveen respuestas breves. Por ejemplo, se encontraron en su mayoría del estilo: *si un grupo posee cierta propiedad, también la poseerá algún grupo que sea isomorfo a este*. Sirva para ejemplificar lo dicho anteriormente las respuestas de Armando, José y Fernando:

> Si un grupo cumple una propiedad, también será válida en otro grupo que sea isomorfo a él, independientemente que sus elementos sean distintos.

La respuesta de Armando muestra que está pensando en un tipo de equivalencia, pero no está claro qué entiende por ‘propiedad’:

> La propiedad incluso puede denotarse de manera distinta en el otro grupo pero es equivalente al del grupo original.

Más adelante cuando responde a la pregunta 4, al intentar proponer un grupo isomorfo a G, es evidente que el estudiante tampoco tiene claro algunas propiedades invariantes bajo isomorfismo, al contestar:

> No sé si cíclico se preserve bajo isomorfismo pero en su caso el otro grupo tendría que no ser cíclico.

La respuesta de José indica que está pensando en que los grupos isomorfos tienen las mismas propiedades, como se muestra en seguida:

> Significa que la propiedad que tiene un grupo G la tiene el grupo G' al que es isomorfo.

Además, como veremos en su respuesta a la pregunta 4, esta idea la utiliza al hacer la comparación entre los dos grupos, es decir, identifica el elemento identidad en G y en G', observa que cada elemento es su propio inverso, que ambos grupos son abelianos, calcula el orden de los elementos para cada uno de los grupos G y G'; estableciendo de esta manera que dichos grupos poseen las mismas propiedades.

En la siguiente respuesta de Fernando observamos más claramente cómo él hace énfasis en los elementos de los grupos:

> Que la propiedad que se cumple entre los elementos del grupo G, también se cumple entre los elementos del grupo G'.

Finalmente, las respuestas de Ana y Hugo revelan los siguientes aspectos:

En el caso de Ana, como hemos visto a lo largo del análisis, sus respuestas han sido imprecisas, para esta cuestión ocurrió exactamente lo mismo.

> Que las operaciones que tenga un grupo se puedan realizar en el otro grupo de donde es el isomorfismo.

No podemos saber con exactitud lo que la estudiante quiso expresar con sus palabras ya que como puede observarse, no es muy claro. Pudiera interpretarse que ella está pensando en dos grupos isomorfos, al utilizar la expresión *de donde es el isomorfismo*, donde estos grupos se llamasen, por ejemplo, $(G,*)$ y $(H,*')$. Ahora bien, los cálculos que se lleguen a realizar en G bajo $*$, cuando se refiere a *las operaciones que tenga un grupo*, estaremos de acuerdo en que no necesariamente serán las mismas en H bajo $*'$, al decir que *se puedan realizar en el otro grupo*, como lo plantea Ana. Sin embargo puede estar refiriéndose a la preservación de resultados de las operaciones entre los elementos correspondientes bajo el isomorfismo.

Finalmente, Hugo responde a esta cuestión argumentando lo siguiente:

> Que la propiedad se comporta igual en ambos lugares sin importar que sean diferentes.

El comportamiento *igual* al cual alude Hugo en su anterior respuesta se ve reflejado en el ejemplo que propone; ya que considera que $\Re^2$ y $\Re^3$ son estructuras isomorfas, basando su argumento en que en ambos la suma vectorial conmuta (*la propiedad se comporta igual*).

Ejercicio 4. Observa la siguiente tabla del grupo G y da un ejemplo de otro grupo G' que sea isomorfo a G. Justifica tu respuesta.

$*$	q	r	s	t
q	q	r	s	t
r	r	q	t	s
s	s	t	q	r
t	t	s	r	q

Hugo propuso como ejemplo a Z_3; creemos que el estudiante en realidad se estaba refiriendo a Z_4 ya que en su explicación señala que tienen el mismo número de elementos al referirse a *misma dimensión*:

> Z_3 ya que es abeliano misma dimensión y se puede establecer una f biyectiva entre G y Z_3.

Podemos observar cómo el estudiante toma en cuenta principalmente propiedades que comparten ambos grupos, como el número de elementos y el que sean abelianos, para proponer su ejemplo. También hace hincapié en que es posible establecer una f biyectiva entre ambos grupos, aunque no proporciona alguna, tampoco menciona algo relacionado con las operaciones de los grupos.

En el caso de Fernando, él propuso la siguiente tabla de G':

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Observamos una tabla de cuatro elementos de la cual podemos deducir que el estudiante, después de identificar al elemento identidad de G, (q), centró su atención en: $q^{-1}=q$, $r^{-1}=r$, $s^{-1}=s$ y $t^{-1}=t$; que cada elemento es su propio inverso, proponiendo la siguiente biyección:

$$
\begin{aligned}
&\phi : * \to + \\
&\phi(q)=0 \; ; \; \phi^{-1}(0)=q \\
&\phi(r)=1 \; ; \; \phi^{-1}(1)=r \\
&\phi(s)=2 \; ; \; \phi^{-1}(2)=s \\
&\phi(t)=3 \; ; \; \phi^{-1}(3)=t
\end{aligned}
$$

En su ejemplo, no está claro si el estudiante está considerando al grupo Z_4 bajo la operación $+_4$ (suma módulo 4); donde puede notarse que hace el arreglo necesario para el cumplimiento de que cada elemento sea su propio inverso. Obviamente Z_4 no cumple con las operaciones indicadas y el estudiante no usó otros símbolos, pero da evidencia de comprender que siendo ϕ isomorfismo, ϕ^{-1} existe.

Dos estudiantes (Armando y Ana) no lograron proponer algún ejemplo de grupo isomorfo a G; sin embargo, ellos identificaron algunas propiedades que debería cumplir dicho grupo. Por ejemplo, Ana menciona que:

> Para poder construir otro grupo isomorfo necesito que sea de 4 elementos ya que G es de orden 4 que cumpla las mismas propiedades que se hace con G.

Y Armando:

> a) Podemos ver que el grupo no es cíclico.
> b) Viendo que el neutro es q y cualquier elemento es su inverso.
>
> Sólo basta encontrar un grupo de orden 4 que cumpla b) y que cumpla una propiedad preservada bajo isomorfismo.

En las respuestas de Ana y Armando, se puede observar cómo los estudiantes no tienen una idea clara sobre cuáles son aquellas propiedades que permanecen invariantes bajo isomorfismo, aunque, quizá sin saberlo, hacen mención de algunas de ellas; por ejemplo, el número de elementos del grupo y la ciclicidad, respectivamente. En el caso de Ana se aprecia que hace referencia a propiedades que debe cumplir el grupo isomorfo a G, pero no dice cuáles son esas propiedades. Algo similar, aunque no exactamente lo mismo, se puede decir de Armando, por lo que menciona en b); podemos interpretar que al referirse a *cualquier elemento es su inverso*, está haciendo alusión a la observación de que cada elemento es su propio inverso. De la manera en que concluye su respuesta, si bien el estudiante tiene claro que el grupo buscado G' para ser isomorfo a G debe tener el mismo orden, parece desconocer qué propiedad algebraica es la que preserva, no puede ser cualquiera, y tampoco tiene que ser única.

Finalmente, José propone correctamente al grupo $Z_2 \times Z_2$

$+$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

A esta tabla agrega que:

Se puede dar el isomorfismo $\phi : G \to G'$ definido por

$$g \mapsto \phi(g) = \begin{cases} (0,0) \text{ si } g = q \\ (0,1) \text{ si } g = r \\ (1,0) \text{ si } g = s \\ (1,1) \text{ si } g = t \end{cases} \quad \Rightarrow G \simeq G'$$

La respuesta de José es apoyada con la verificación del cumplimiento de algunas propiedades para asegurarse de que ambos G y G' las poseen:

	G	G'
Id	q	$(0,0)$
Inverso	El mismo	El mismo
Abelianos	✓	✓
Orden 1	q	$(0,0)$
Orden 2	r, s, t	$(0,1), (1,0), (1,1)$

Podemos observar que los estudiantes, en caso de establecer una biyección o decir que es posible hacerlo, no dicen algo con relación a la preservación de las operaciones; parece haber mayor concentración en el cumplimiento de propiedades entre dos grupos presumibles a ser isomorfos. En otros casos pareciera que la condición determinante para decidir que dos grupos son isomorfos es el número de elementos.

3.2 Segunda etapa: Instrumento de selección y entrevista

3.2.1 Segundo cuestionario (de selección) - análisis a priori

El instrumento se diseñó considerando el enfoque teórico *Imagen del concepto*/*Definición del concepto* (Tall &Vinner, 1981) con el objetivo de proveer información sobre las imágenes del concepto isomorfismo de grupos que los estudiantes han desarrollado, la cual incluye sus definiciones personales. Además, para este diseño se tomaron en cuenta los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario piloto.

Con el permiso de las y los profesores titulares, el cuestionario fue aplicado a tres grupos de Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM y a un grupo de Licenciatura en Matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, quienes ya habían tomado un curso de Álgebra Moderna I e iniciaban su curso de Álgebra Moderna II; obteniéndose un total de 36 cuestionarios contestados. La información arrojada por este segundo cuestionario fungió como criterio de selección de los estudiantes que participarían en la entrevista.

A continuación presentamos el diseño del instrumento donde exponemos la intención de cada una de las preguntas que lo componen:

1. Las afirmaciones que se presentan a continuación fueron hechas por estudiantes que habían tomado un curso de Álgebra moderna. Para cada una, señala si estás de acuerdo, en desacuerdo o parcialmente de acuerdo. Explica por qué.

i) Que dos grupos sean isomorfos significa que bajo ciertas reglas son equivalentes.

ii) Dos grupos son isomorfos si existe una función biyectiva de uno al otro que preserve la misma estructura de grupo.

iii) Dos grupos isomorfos son simplemente grupos del mismo orden.

iv) Que dos grupos sean isomorfos significa que son similares.

La redacción del enunciado principal se inspiró en la lectura de otros trabajos tales como los de Hazzan y Leron (1996) y Lajoie (2000). Además se extrajeron fragmentos de respuestas obtenidas desde el inicio de la investigación, por ejemplo, (i) se extrajo de la entrevista con E4 (remítase a la sección 3.1.2) tomada debido al interesante planteamiento que hace el estudiante. En su explicación E4 no dice cuáles son *esas reglas*, pero lo que sí es claro es que lo que le permite catalogar de *equivalentes* a los grupos isomorfos está muy estrechamente ligado con ellas. E4 relaciona la palabra equivalentes con *tener la misma forma*, refiriéndose con ello a las propiedades que comparten los grupos, pero también en su explicación hace referencia a las *funciones* que se puedan definir en los grupos. Nótese que en su explicación él no dice *una única función* sino *las funciones*; pudiéndose interpretar que el isomorfismo es aquello que hace a los grupos ser *el mismo excepto por el nombre de los elementos* y que no existe un único isomorfismo.

El extracto del inciso (ii) fue tomado del mismo estudiante como respuesta a la pregunta 1 del cuestionario piloto y como podemos observar es más cercana a la definición oficial, razón por la que pudiera ser aceptada en su mayoría por los estudiantes. Además, será interesante averiguar qué interpretación dan los estudiantes a la expresión *que preserve la (misma) estructura de grupo*, ya que como vimos en los resultados del cuestionario piloto, suelen dárseles distintas interpretaciones.

Respecto al inciso (iii), pudimos observar en los resultados de otras investigaciones, como la de Lajoie (2000), Dubinsky et al. (1994), así como los resultados de la primera entrevista y el cuestionario piloto; que algunos estudiantes basan sus argumentos en algunas propiedades, principalmente, el orden del grupo. Así, suele pensarse que Z_4 y V (4-grupo de Klein) son isomorfos ya que ambos grupos tienen orden cuatro; incluso Lajoie (2000) evidenció que algunos estudiantes suelen pensar que es "la única condición para que dos grupos sean isomorfos" (pp. 135-136).

Finalmente, con relación al inciso (iv), hemos visto que Leron, Hazzan y Zazkis (1995) señalan que la relación de *ser isomorfo*, en su versión *ingenua*, es intuitiva y no requiere del concepto función para entenderse, siendo mucho más simple que el objeto de isomorfismo (como homomorfismo biyectivo). Por su parte, Lajoie (2000) afirma que "aunque pudiera parecer fácil entender que *dos grupos isomorfos son grupos similares o idénticos*, tendría que dársele toda la idea y el sentido que se le atribuye a esta" (p. 82). Ese sentido al que se refiere la autora tiene que ver con el isomorfismo como una *relación de equivalencia*, que "incluye, en particular, la concepción de isomorfismo como objeto" (p. 82).

En nuestro caso, en el cuestionario piloto, Hugo señala que los grupos isomorfos son grupos *similares*; sin embargo, con esta idea en mente el estudiante sólo se concentró en la observación de propiedades parciales de los grupos, de entre ellas, el orden del grupo; así, la preservación de las operaciones puede no ser percibida a través de esta idea.

En general, lo que se pretende es que los estudiantes a partir de afirmaciones provenientes de terceras personas, expresen sus ideas relacionadas con isomorfismo de grupos. De esta forma pretendemos obtener información sobre sus concepciones y comprender mejor sus dificultades con este objeto matemático.

Pregunta 2. Para ti, ¿qué significa que dos grupos sean isomorfos?

Es una pregunta abierta que también se planteó en el cuestionario piloto, el interés particular fue examinar las definiciones y explicaciones de los estudiantes respecto a grupos isomorfos e inherentemente la de isomorfismo de grupo.

Pregunta 3. ¿Cómo explicarías a un estudiante que toma su primer curso de Álgebra moderna lo que significa que dos grupos NO sean isomorfos? Cita al menos un ejemplo con el que apoyarías tu explicación.

Con esta pregunta se espera que se revele información de los estudiantes con relación a grupos NO isomorfos. A diferencia de la pregunta 2 del cuestionario piloto, aquí se solicita una explicación del estudiante a otro quien inicia un curso de Álgebra Moderna.

La cuestión 3 invita a los estudiantes a exponer sus definiciones personales o ideas relacionadas con los conceptos involucrados. Ya en los resultados del cuestionario piloto se mostraron algunas concepciones de estudiantes que en ese momento se encontraban en su primer curso de Álgebra Moderna y que sin duda muestran algunos problemas ante esta pregunta. Se espera que surjan algunas dificultades con relación a la interpretación del cuantificador existencial involucrado en la definición de grupos isomorfos.

4. Observa la siguiente tabla del grupo *G* y da un ejemplo de otro grupo *G´* que sea isomorfo a *G*. Justifica tu respuesta.

$*$	q	r	s	t
q	s	t	q	r
r	t	s	r	q
s	q	r	s	t
t	r	q	t	s

Este ejercicio se retoma del cuestionario piloto, la diferencia es que ahora los elementos no están colocados de la manera usual en que suele encontrarse en los libros de texto, o como comúnmente se presenta en clase. Podemos observar que el elemento identidad no aparece colocado al principio y así para los otros elementos.

De los resultados del cuestionario piloto se pudo apreciar que para algunos estudiantes esta tarea no resulta ser muy sencilla; pudimos observar que su proceder para este ejercicio suele consistir en explorar las propiedades del grupo G y de esa manera proponer un grupo G' que también cumpla con ellas. Además, como argumento de que ambos son isomorfos, los estudiantes suelen considerar suficiente establecer una biyección entre los dos.

5. Supón que se tienen dos grupos G y G^*. Para cada una de las afirmaciones siguientes, indica si es Verdadera o Falsa. Justifica tu respuesta.

i) G **es isomorfo a** G^* **si ambos son conmutativos.**

ii) G **y** G^* **son isomorfos si sus elementos y sus operaciones son idénticamente iguales.**

iii) Si G **y** G^* **no tienen el mismo orden, entonces no son isomorfos.**

iv) Si G es un subgrupo de G^*, G^* es isomorfo a G.

Mediante estos cuatro incisos se pueden explorar algunas ideas particulares de los estudiantes respecto a grupos isomorfos. A continuación mostramos algunos resultados que se han obtenido anteriormente con relación a estos:

Para el inciso (i), sabemos que si se tienen dos grupos G y G^* isomorfos, si G es conmutativo entonces G^* también lo es, pero que dos grupos sean conmutativos no implica que sean isomorfos. En la revisión de la literatura se ha encontrado que algunos estudiantes suelen hacer deducciones de este tipo.

Respecto al inciso (ii), Lajoie (2000) dio evidencia de que algunos estudiantes consideran que "los grupos isomorfos están provistos necesariamente de la misma ley de composición (en sentido estricto) y/o que sus elementos son necesariamente de la misma naturaleza" (Lajoie, 2000, p. 135, pp. 142-145, p. 148). Por otro lado, la manera como está escrito el inciso acepta una respuesta afirmativa. Igual que en el inciso anterior, los argumentos del estudiante nos darán elementos para identificar su concepción.

Con relación al inciso (iii), Lajoie (2000) evidenció que algunos estudiantes no saben si los grupos isomorfos tienen necesariamente el mismo número de elementos o por qué debería ser así. En nuestro caso, en la *primera entrevista*, E2 señala que los grupos isomorfos no tienen necesariamente la misma cantidad de elementos; mientras que otros, sobre la base de esta propiedad es que determinan si dos grupos lo son o no.

Finalmente, respecto al inciso (iv), Lajoie (2000, pp. 196-203) detectó dificultad por parte de los estudiantes participantes en considerar que un grupo infinito dado pueda ser isomorfo a uno de sus subgrupos. Todo parece indicar que la idea en mente de que un grupo es comúnmente más grande que sus subgrupos siembra la duda al tratar con "el isomorfismo en el contexto de grupos infinitos", todo esto a pesar de lograr definir un homomorfismo biyectivo entre ellos. Aquí como respuesta correcta se esperaría que se considere no hay suficiente información para concluir.

6. Da un ejemplo de grupos isomorfos. Argumenta tu respuesta.

Tomando en cuenta lo que señalan Vinner y Dreyfus (1989, p. 356) con relación a que la imagen que desarrolla el estudiante es "el resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto", se consideró importante examinar los ejemplos (al menos uno) que pudieran proveer.

3.2.2. Resultados del cuestionario de selección

A continuación presentamos cada una de las preguntas, junto con las respuestas obtenidas y su análisis.

1. Las afirmaciones que se presentan a continuación fueron hechas por estudiantes que habían tomado un curso de Álgebra moderna. Para cada una señala si estás de acuerdo, en desacuerdo o parcialmente de acuerdo. Explica por qué.

i) Que dos grupos sean isomorfos significa que bajo ciertas reglas son equivalentes.

De acuerdo	Desacuerdo	Parcialmente de acuerdo	Otra	No contestó
13	5	14	3	1

De acuerdo con las respuestas dadas por estos estudiantes, los grupos isomorfos pueden ser considerados como *grupos equivalentes* debido a que bajo isomorfismo (homomorfismo biyectivo) se *preserva la estructura*/*respetan las operaciones* (tómese en cuenta las interpretaciones dadas a dichas expresiones por los estudiantes), no siendo determinante la manera en que los elementos sean denotados. Otros más dicen que los grupos isomorfos son esencialmente el mismo porque independientemente de los objetos con los que se estén trabajando, comparten las mismas propiedades.

Por otra parte se pudo apreciar que las ideas que se tienen sobre grupos isomorfos llevan a algunos de los estudiantes a sentirse satisfechos con establecer una biyección entre los grupos. También fue común la idea de que los grupos isomorfos poseen las mismas propiedades, por ejemplo, tener la misma cardinalidad, ser abelianos, ser cíclicos, etc. Sin duda el papel de las operaciones aquí es importante; sin embargo, no es utilizada, en la mayoría de los casos, para verificar que la función conserve las operaciones, es decir, la propiedad de morfismo. A continuación se presentan de manera más detallada los resultados obtenidos para esta pregunta:

- De los 13 estudiantes que dicen estar de acuerdo con este enunciado, tres de ellos no justifican su respuesta.

Los argumentos dados por los otros 10 estudiantes revelan los siguientes aspectos principales referentes a sus definiciones personales o ideas relacionadas con los conceptos de isomorfismo y grupos isomorfos:

- *Isomorfismo*

- Cinco estudiantes se refieren al isomorfismo como homomorfismo (morfismo) biyectivo; todos ellos lo asocian con una función biyectiva que preserva/respeta estructura o bien que respeta operaciones, relacionando esto último con la propiedad de homomorfismo. Por lo menos uno de ellos lo hace explícito en su respuesta (véase extracto **(1)**) y en el caso de los otros esta idea se pudo apreciar al analizar sus respuestas a las otras cuestiones. Sirva para mostrar lo dicho anteriormente, los siguientes tres extractos que forman parte de esta clasificación:

(1). Sean $(G,+)$ $\wedge$ $(G',*)$ dos grupos isomorfos es decir $\exists$ f $G \to G'$ $\ni$ f es biyectiva $\wedge$ $\ni$ f preserve la estructura del grupo es decir $f(x+y)=f(x)*f(y)$ $\forall x,y \in G$ $\wedge$ f^{-1} debe cumplir lo mismo $\ni$ $f \circ f^{-1} = I_{G'}$ $\wedge$ $f^{-1} \circ f = I_G$, por como es la definición de isomorfismo de grupos yo digo que dos grupos son equivalentes si son isomorfos.
(2). $G \xrightarrow{\varphi} G'$ $\quad$ G, G' grupos φ morfismo grupos φ inyectiva y supra. (biyectiva)   Estoy de acuerdo pues φ preserva la estructura de grupo sin importarnos los elementos del grupo.
(3). De acuerdo. Son equivalentes algebraicamente puesto que se conserva la estructura algebraica bajo un isomorfismo (función que es un homomorfismo y es biyectiva).

- Un estudiante dice del isomorfismo que este preserva la estructura de los conjuntos o que respeta las operaciones definidas en los conjuntos:

(4). De acuerdo: Es que el isomorfismo preserva la estructura de tus conjuntos y con estructura me refiero a lo importante desde un cierto punto de vista, que en este caso es el algebraico de grupos. De hecho se podría decir que si son isomorfos son “el mismo tipo con diferente atuendo”.

Al analizar sus posteriores respuestas, por ejemplo, la dada en 1 (iii) se puede apreciar que se refiere con ello a cómo se comportan los conjuntos bajo sus respectivas operaciones; por lo tanto, los conjuntos preservan la estructura algebraica. Para el caso en que los grupos son isomorfos, por ejemplo, si uno es abeliano entonces el otro también será abeliano:

> **(5)**. Desacuerdo ya que si tomamos al grupo $|\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}| = 8$, no es abeliano y en cambio Z_8 es abeliano y tiene el mismo orden pero debido a que uno es abeliano y otro no, no pueden ser isomorfos.

- Un estudiante se refiere al isomorfismo como *la regla* que hace a los grupos isomorfos, equivalentes, sin que explique qué está entendiendo por este último término:

> **(6)**. Cierto. Que dos grupos sean isomorfos es que tengan su estructura algebraica similar. Y la regla que las hace equivalentes es el isomorfismo que existe entre ellos.

- *Grupos isomorfos*

- Dos estudiantes proporcionaron definiciones similares a la definición oficial de grupos isomorfos; para ilustrar esto véanse nuevamente los extractos **(1)** y **(2)** ubicados al inicio de este análisis.
- Dos estudiantes, uno de los cuales se refiere al isomorfismo como *la regla* que hace equivalentes a los grupos isomorfos, dicen de estos últimos que tienen misma/similar estructura (algebraica). Del estudiante al cual se está haciendo énfasis, se pudo apreciar que él asocia esta expresión con cómo está definido el conjunto con su operación, razón por la que en su respuesta a 1 (ii) dice que la estructura es *similar* y *no la misma*, como a continuación se muestra:

> **(7)**. Cierto, parcialmente. El isomorfismo si es una función biyectiva que preserva la estructura de grupos. Pero no es la misma, sino una parecida.
>
> Ejemplo $\Re$ y $\Re^{\rangle 0} = \{t \in \Re | t \rangle 0\}$. Son isomorfos bajo el isomorfismo $h : \Re \to \Re^{\rangle 0}$, $h(t) = e^t$. Pero $\Re$ y $\Re^{\rangle 0}$ no tienen la misma estructura algebraica.

- Dos estudiantes, uno de los cuales señala que *el isomorfismo preserva la estructura de los conjuntos*, dicen de los grupos isomorfos que son en esencia el/lo mismo. Sirva para mostrar lo dicho en este párrafo, la siguiente respuesta dada por uno de los estudiantes:

(8). Si de acuerdo. Un isomorfismo entre grupos nos dice que son prácticamente lo mismo (se operan igual tienen las mismas propiedades solo cambian los objetos con los que se están trabajando).

- Un estudiante indica que dados dos grupos, estos se pueden relacionar y aunado a ello, implícitamente, que no hay una única manera de hacerlo:

(9). Cierto. Podemos proponer dos grupos ya sea G y H y mediante homomorfismos relacionarlos

- Cinco estudiantes dicen estar en desacuerdo argumentando que las expresiones “ciertas reglas” y/o “equivalentes” son ambiguas. A continuación se muestran dos extractos que forman parte de esta clasificación:

(10). No estoy de acuerdo, no está clara la palabra “equivalencia” y mucho menos “ciertas reglas”.
(11). No. Es muy ambiguo “ciertas reglas”.

- De los 14 estudiantes que dicen estar parcialmente de acuerdo con este enunciado, uno de ellos no justifica su respuesta y cinco estudiantes se limitan a decir que las expresiones “ciertas reglas” y/o “equivalentes” no les dicen mucho, por ejemplo:

(12). Estoy parcialmente de acuerdo, esta definición no nos dice nada, faltaría especificar bajo que reglas.
(13). Parcialmente de acuerdo, pues el término equivalente no es precisado

- Los argumentos dados por otros ocho estudiantes revelan los siguientes aspectos principales referentes a las definiciones personales o ideas relacionadas con los conceptos de isomorfismo y grupos isomorfos:

- *Isomorfismo*

  - Un estudiante da una definición similar a la definición oficial de isomorfismo entre dos grupos. Al comparar esta definición con su respuesta a la pregunta 2, podemos decir que muy probablemente aquí se equivocó en la notación de su definición de homomorfismo, ya que si se tienen dos grupos $(G,\cdot)$ y $(G',*)$, una función $f:G\to G'$ se llama homomorfismo si $f(a\cdot b)=f(a)*f(b), \forall a,b\in G$.

> **(14).** Parcialmente de acuerdo, pues no se menciona que reglas es necesario mencionar, que un isomorfismo que va de $\phi:G\to G'$ preserva la estructura, es decir si $(G,\cdot)$ y $(G',*)$ son grupos $\boxed{\forall a,b\in G \ \ \phi(a\cdot b)=\phi(a')*\phi(b')}$, donde ϕ es una biyección entonces de cierta forma puedes trabajar en uno de esos grupos y sabes lo que sucede en el otro.

  - Un estudiante solamente indica que el isomorfismo preserva la estructura, sin explicar a qué se refiriere con ello:

> **(15).** Parcialmente de acuerdo, ya que el isomorfismo preserva de cierta manera la estructura.

  - La respuesta de un estudiante no es muy clara, pero refleja que se refiere a la ambigüedad en el enunciado.

> **(16).** No estoy totalmente de acuerdo pues la respuesta sería muy ambigua para alguien que no hubiese tomado Álgebra moderna o estudiado matemáticas, sin embargo reflejaría un poco la esencia de la idea de isomorfismo si cambiamos “ciertas reglas” por “ciertas consideraciones o condiciones”.

- *Grupos isomorfos*

  - Dos estudiantes señalan que la(s) estructura(s) algebraica(s) de los grupos isomorfos es/son equivalente(s). Al analizar la información extraída del cuestionario se pudo apreciar que muy probablemente se están refiriendo al comportamiento del conjunto bajo su operación, así, por ejemplo, dados dos grupos isomorfos, la(s) estructura(s) algebraica(s) es/son equivalente(s) ya que la operación en ambos grupos es conmutativa. Lo anterior se puede deducir al observar sus respectivas respuestas a la pregunta 3. A continuación mostramos dos extractos de uno de los estudiantes ante esta cuestión y la correspondiente a la pregunta 3 para visualizar lo dicho en este párrafo:

(17). Parcialmente de acuerdo. Son equivalentes en cuanto a su estructura algebraica.
(18). Que dos grupos no sean isomorfos significa que existe una propiedad algebraica que se cumple en uno pero no en otro. Ejemplo. Para S_3 y $Z/6Z$. S_3 es no conmutativo y $Z/6Z$ es conmutativo. Esta propiedad sólo depende de su operación como grupos, es decir, de su estructura algebraica.

- Un estudiante relaciona el término "equivalentes" con el hecho de que los grupos isomorfos tienen el mismo número de elementos:

(19). Parcialmente de acuerdo, ya que de cierta manera la equivalencia hace que sean del mismo orden

- Un estudiante señala que los grupos isomorfos están relacionados entre sí, puesto que comparten propiedades, por ejemplo, ambos poseen la misma cardinalidad entre otras.

(20). Parcialmente de acuerdo; puesto que un isomorfismo no implica en sí que los grupos sean equivalentes, más bien indica que podemos relacionarlos de manera muy particular por cumplir propiedades casi semejantes.

- Un estudiante se concentra en dar significado a las expresiones "ciertas reglas y "equivalentes", a fin de dar sentido al enunciado. Todo parece indicar que al referirse a *una función con ciertas propiedades*, está haciendo alusión al isomorfismo como una "función especial". Más adelante en su respuesta a la pregunta 2 (obsérvese el extracto **(94)**) hace mención de la *preservación de las propiedades*, es decir, que los grupos isomorfos comparten propiedades, como el orden de los elementos, la conmutatividad, etc. Así, cuando dice "preservación de una estructura" pudiera estarse refiriendo a lo mismo al utilizar tales expresiones:

(21). Estoy parcialmente de acuerdo, porque no sé que quiera decir con que sean equivalentes, pero si se refiere a la preservación de una estructura tal vez si esté de acuerdo, y eso de bajo ciertas reglas, lo veo como si se refiriera a una función con ciertas propiedades.

> **(22)**. Estoy parcialmente de acuerdo pues puede que por "similares" quiera decir que se preserva la estructura de los grupos bajo cierta función.

- Las respuestas de tres estudiantes se clasificaron dentro de la casilla titulada "otra" ya que no indican estar de acuerdo, en desacuerdo o parcialmente de acuerdo con la afirmación. Tales respuestas proporcionaron la siguiente información relacionada con sus ideas respecto a isomorfismo y grupos isomorfos:
  - Un estudiante da evidencia de ver al isomorfismo posiblemente como una relación de equivalencia:

> **(23)**. Es redundante, se define la equivalencia de 2 grupos G,F, de forma que $G \sim F \iff \exists\ \varphi : G \rightarrow F\ \ \varphi$ isomorfismo.

  - La respuesta de un estudiante muestra que para él pudiera ser suficiente con establecer una biyección entre los grupos, ya que no dice algo con relación a las operaciones. Esta idea se pudo apreciar aún más al observar sus respuestas a 4 y 6 (remítase a **(124)** y **(194)**); ya que él da ejemplos de grupos cuyo orden es igual, en este caso cuatro, donde implícitamente ese parece ser su único argumento:

> **(24)**. Que dos grupos sean isomorfos quiere decir que existe una transformación isomorfa i.e que es biyectiva por eso podría decirse que esta es la regla y si se puede trabajar en cualesquiera de los dos por ello son en esencia equivalentes.

  - Finalmente, la respuesta dada por un estudiante da evidencia de que para él es importante verificar que se preserve la estructura. Esta idea es apoyada por el análisis de las respuestas posteriores de dicho estudiante, en particular en la 1 (iii) y 4 (véase **(49)** y **(131)**), donde se puede apreciar que él está entendiendo por ello que ambos grupos compartan las mismas propiedades, por ejemplo, si uno es cíclico, el otro también lo es y así:

> **(25)**. De manera informal podría interpretarse así. Considerando que dichas reglas son de preservación estructural.

- Un estudiante no proporcionó respuesta alguna.

ii) Dos grupos son isomorfos si existe una función biyectiva de uno al otro que preserve la misma estructura de grupo.

De acuerdo	Desacuerdo	Parcialmente de acuerdo	Otra	No contestó
31	1	4	-	-

De las respuestas de los estudiantes se pudo apreciar que la mayoría de ellos considera este enunciado como verdadero argumentando que es por definición de *isomorfismo*/*grupos isomorfos*; mientras que uno de ellos dice que esta no es la definición *más elemental*.

Además, se pudo observar tanto en las respuestas dadas a 1 (i) y en esta, que la interpretación que se dio a la frase *preserva la* (*misma*) *estructura de grupo*, fue por lo menos de tres tipos distintos, a saber, 1) con la propiedad de homomorfismo, 2) las propiedades que se preservan bajo isomorfismo y 3) cómo se comportan los conjuntos subyacentes bajo su operación. Con relación a 3), explican que puede haber propiedades que no compartan los grupos aunque sean isomorfos, por eso puede decirse que no es la *misma* estructura. En otros casos los estudiantes no explican a qué se refieren cuando utilizan esa expresión o dicen desconocer lo que significa *estructura*.

- De los 31 estudiantes que dicen estar de acuerdo con este enunciado, seis de ellos no justifican su respuesta. De las respuestas de los 25 estudiantes restantes se obtuvo la siguiente información:

22 estudiantes dicen estar de acuerdo con este enunciado, argumentando que es por definición. Al realizar esta clasificación se han tomado en cuenta aspectos interesantes que se han destacado en las respuestas de los estudiantes. Veremos cómo ellos parecen referirse indistintamente a la definición de isomorfismo como a la de grupos isomorfos:

  - Seis estudiantes dicen explícitamente que esta es la definición de isomorfismo de grupos:

(26). De acuerdo, es la definición de isomorfismo de grupos.
(27). Si de acuerdo. Es la definición de un isomorfismo, es que exista una función biyectiva que respete las operaciones es decir la estructura.

- 16 estudiantes dicen explícitamente que es la definición de grupos isomorfos:

(28). Si estoy de acuerdo; pues G, G' son isomorfos si existe $\varphi : G \to G'$ (biyectiva) tal que $\varphi(g_1 *_1 g_2) = \varphi(g_1) *_2 \varphi(g_2)$
(29). Totalmente de acuerdo pues la existencia de la función biyectiva que preserva la misma estructura hace que no podamos distinguir entre el grupo dado.
(30). De acuerdo. La definición es clara, sin embargo falta indicar qué significa que una función preserve estructura de grupo.

- Dos estudiantes dicen estar de acuerdo destacando la condición de la preservación de la estructura, donde uno de ellos no deja claro a qué se está refiriendo al utilizar dicha expresión **(31)**, mientras que el otro lo asocia con la propiedad de homomorfismo **(32)**:

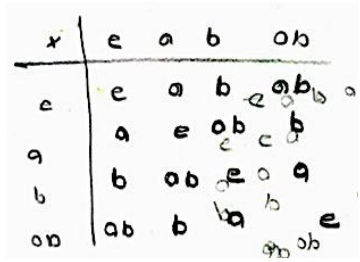
(31). De acuerdo, las estructuras deben preservarse.
(32). De acuerdo, por eso se pide homomorfismo para preservar estructura.

- El comentario de un estudiante induce a pensar que el establecer una biyección entre los grupos pudiera ser suficiente, al no mencionar algo con relación a las operaciones:

(33). Cierto. Al momento de establecer un isomorfismo lo que nos interesa es establecer una biyección entre ambos grupos, es decir, inyectividad y suprayectividad, cabe resaltar que esto se puede lograr mediante los teoremas de isomorfismos aplicando un cociente a un subgrupo normal y aplicando otro homomorfismo al grupo que se desea y verificar que se cumpla la inyectividad y suprayectividad y claro que el diagrama conmute.

En la respuesta al ejercicio 4 el mismo estudiante propone (correctamente) al grupo de Klein, que es isomorfo a G. Podemos apreciar en su argumento que se basa en el orden de los grupos, que en ambos es 4; y también en lo que nombra como "propiedades" que se cumplen, la inyectividad y suprayectividad. Aquí posiblemente el estudiante pudiera estar pensando que dado que ambos grupos son del mismo orden entonces puede establecerse una función biyectiva entre ellos; sin embargo, la propiedad de la preservación de las operaciones no es mencionada.

(34). Propongamos el grupo de Klein tal que e, a, b, ab dar a $a^2 = e$ y b^2



x	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Dado que poseen la misma cardinalidad y cumplen las mismas propiedades que son la inyectividad y la suprayectividad. Son isomorfos.

- El argumento de un estudiante cuya resolución es en desacuerdo con el enunciado planteado se basó en su descontento por el empleo del término “estructura”:

(35). En desacuerdo. Hasta el uso de la frase “función biyectiva” pero, ¿en matemáticas qué significa estructura?

Cinco estudiantes dicen estar parcialmente de acuerdo con este enunciado. Para dos de ellos, las razones que los llevan a esta consideración es debido a la interpretación dada a la expresión “preserva la misma estructura de grupo”. A continuación se muestran las respuestas de dos de ellos y en **(7)** podrá ubicar la respuesta de otro de los estudiantes:

(36). Parcialmente ya que nos falta homomorfismo.

(37). Parcialmente de acuerdo pues si $f : A \to B$ con A, B grupos tales que f es isomorfismo algunas propiedades de A son ciertas para B.

- Un estudiante dice que el enunciado presentado no es la definición “más elemental” de grupos isomorfos:

(38). Parcialmente de acuerdo. Razón: Es una condición suficiente para que se tenga un isomorfismo, más no es la definición “elemental”.

iii) Dos grupos son isomorfos si son grupos del mismo orden.

De acuerdo	Desacuerdo	Parcialmente de acuerdo	Otra	No contestó
7	23	1	4	1

La mayoría de los estudiantes participantes estuvo en desacuerdo con este enunciado y el argumento base fue el no considerar el orden del grupo como la única condición para decidir si dos grupos son isomorfos. Entre los contraejemplos utilizados destacan aquellos cuyo orden es igual y sin embargo uno es cíclico y el otro no; uno es conmutativo y el otro no.

Entre quienes dijeron estar de acuerdo con este enunciado, destacaron la importancia del orden de los grupos sólo para decir que si es distinto entonces no podría establecerse una biyección entre ellos. También se obtuvieron respuestas dadas por dos estudiantes quienes podrían estar considerando que el orden del grupo es la única condición para decidir si dos grupos son isomorfos (véase **(43)** y **(44)**).

Por otra parte, un estudiante duda que para el caso de los grupos infinitos esto se cumpla y otro más propuso un ejemplo de un par de grupos cuyo orden es distinto y, según él, son isomorfos. Más detalles sobre los resultados obtenidos de los estudiantes que estuvieron de acuerdo con este enunciado se muestran en seguida:

- De los siete estudiantes que dicen estar de acuerdo, uno de ellos no justifica su respuesta.
  - Dos estudiantes argumentan sobre la importancia de que los grupos deban tener el mismo orden para poder establecer una biyección, donde además veremos cómo uno de ellos hace la observación de que si existe un isomorfismo, este no es único **(39)**:

(39). De acuerdo. Ya que si dos grupos tienen el mismo orden entonces tenemos que tienen la misma cardinalidad y podemos definir entre ellos una función biyectiva, entonces sabemos que existe al menos una función que preserva la estructura de ambos.
(40). De acuerdo, deben de tener el mismo orden, sino no sería posible establecer la biyección.

  - Los grupos isomorfos tienen el mismo orden, pero igual orden no implica que los grupos sean isomorfos. La explicación que proveen dos estudiantes se basa en considerar como hipótesis que los grupos son isomorfos, razón por la que dicen estar de acuerdo con este enunciado:

(41). De acuerdo, el orden es invariante bajo isomorfismo.
(42). De acuerdo. Debido a que si G y H son grupos tal que $G \cong H \Rightarrow$ existe una biyección entre ellos, lo cual implica que el orden de ambos grupos es el mismo.

- Dos estudiantes basan sus respuestas en sus conocimientos de Álgebra Lineal. Bajo isomorfismo se preserva la cardinalidad de dos grupos. Sin embargo, igual cardinalidad, no implica que dos grupos sean isomorfos. En el ejemplo que propone el estudiante, como se puede ver en el extracto **(44)**, el argumento se basa en la propiedad de ser abelianos y no solo en el orden.

(43). De acuerdo. No recuerdo bien la definición de orden, pero recordando términos del álgebra lineal, dos espacios vectoriales son isomorfos si tienen la misma dimensión.
(44). Cierto. Cabe destacar que esta afirmación es un sí y sólo sí y es uno de los teoremas más importantes que el álgebra que no sólo está presente en grupos sino en espacios vectoriales. Un ejemplo es S_3 el cual es isomorfo a un grupo no abeliano de orden 6. Dado que la cardinalidad de S_n es $n!$ y donde S_n es un grupo no abeliano.

- De los 23 estudiantes que dicen estar en desacuerdo, tres de ellos no justifican su respuesta.
  - La idea común encontrada en 17 de los 20 estudiantes restantes se basa en el argumento de que para los grupos que no son isomorfos, también sucede que pueden tener el mismo orden, por lo que no puede considerarse como suficiente para decidir si los grupos son isomorfos; véanse por ejemplo los siguientes dos extractos:

(45). Desacuerdo. Existen funciones biyectivas entre conjuntos no isomorfos. Como existe una función biyectiva entre los grupos tienen que tener el mismo orden.
(46). No, ejemplo $\lvert A_5 \rvert = \frac{5!}{2} = \left\lvert {}_{\frac{5!}{2}}Z \right\rvert$ pero no son isomorfos

  - Seis estudiantes proponen grupos que tienen igual cardinalidad pero uno abeliano y el otro no para mostrar que no son isomorfos. Dentro de esta clasificación ubicamos el ejemplo de un estudiante quien por su respuesta al ejercicio 4, utiliza el argumento de que Z_4 es abeliano y el 4-grupo de Klein no lo es:

(47). En desacuerdo. Los grupos D^8 y el grupo de los cuaternios tienen el mismo orden que es 8 pero no son isomorfos. $(S_3,\circ)$, $(Z/6Z,+)$ son del mismo orden pero no son

isomorfos pues $(S_3,\circ)$ es no conmutativo y $(Z/6Z,+)$ sí lo es.
(48). Desacuerdo: Razón: Grupo de Klein y Z_4 no son isomorfos.

- Como contra-ejemplo cuatro estudiantes proponen grupos que tienen igual cardinalidad pero uno es cíclico y el otro no:

(49). No, pues no necesariamente tendrían la misma estructura algebraica, por ejemplo, se puede tener dos grupos finitos del mismo orden y uno ser cíclico y otro no. Por ejemplo: $\|Z/6Z\| = 6 = \|S_3\|$, $\|Z/6Z\|$ es cíclico y $\|S_3\|$ no, más sí es finitamente generado.
(50). Falso $Z_{2\times 2}$ no es isomorfo a Z_4 y son del mismo orden. Que sean del mismo orden, no implica que la función preserve la "estructura" de la cual se habló en i)

- Tres estudiantes señalan que no es suficiente con que exista una función biyectiva sino que es necesario que esta respete las operaciones/preserve estructura. Al analizar a detalle las posteriores respuestas de los estudiantes observamos que uno de ellos se refiere con esta idea a la propiedad de homomorfismo **(51)**, mientras que los otros dos parecen asociarlo con las propiedades que comparten los grupos isomorfos, por ejemplo, que ambos grupos sean conmutativos, que sus elementos tengan el mismo orden, etc.:

(51). Desacuerdo, aunque es una consecuencia de que dos grupos sean isomorfos, no es suficiente para asegurar que se preserve la estructura.
(52). No. Pues que un grupo tenga el mismo orden que otro solo significa que hay una función biyectiva entre ellos pero no necesariamente esa función respeta las operaciones.
(53). Desacuerdo, dependería básicamente de los conjuntos que se tienen ya que existen conjuntos que son de orden igual más su estructura es disjunta completamente.

* Un estudiante argumenta que dos grupos pueden ser isomorfos aunque el orden sea distinto. Se puede observar en el ejemplo que propone que está pensando en una biyección más que en un isomorfismo.

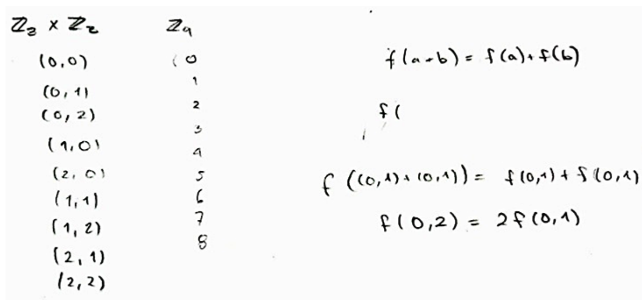
(54). Este enunciado es falso pues $Z \cong Z_n$ con $n \in N$ bajo la suma $\wedge$ el orden de Z es distinto al orden de Z_n donde la f que va de $Z \to Z_n$ a cada $x \in Z$ lo mandaría a su residuo […] se divide entre n , si $x \geq n$ $\wedge$ sino le asocia ese mismo valor.

* Otro estudiante menciona que en el caso de grupos infinitos el enunciado puede ser falso.

(55). En desacuerdo porque me parece que se puede demostrar para grupos finitos pero no para cuando son infinitos pero no lo tengo muy claro.

* Un estudiante propone dos grupos cuyo orden es el mismo, sin embargo no justifica por qué no son isomorfos.

(56). Desacuerdo ya que



- Un estudiante dice estar parcialmente de acuerdo; sólo menciona establecer una biyección y no dice algo relacionado con las operaciones **(57).** A pesar de que en su respuesta a la pregunta 2 (véase el extracto **(100)**) dice de la función f que debe ser biyectiva y respetar operaciones, en su respuesta a la pregunta 3 (extracto **(58)**) sólo habla del caso en que entre los grupos no pueda existir esa f, esto es, cuando los conjuntos no tienen la misma cardinalidad:

(57). Parcialmente de acuerdo porque habría que encontrar una biyección.
(58). Teniendo en cuenta el concepto de orden de un grupo; le diría que pensara qué grupo parece tener más elementos que el otro y así quedaría una idea de por qué no pueden ser isomorfos.

- Cuatro estudiantes se clasificaron dentro de la casilla titulada "otra" ya que no señalan estar de acuerdo, en desacuerdo o parcialmente de acuerdo con el enunciado. Sin embargo, dichas respuestas nos proveen la siguiente información:
  - Tres estudiantes hacen alusión a que es importante verificar que se respeten las operaciones o que se preserve la estructura:

(59). No necesariamente, tienen que respetar las operaciones o estructura del grupo.
(60). No sé, porque si tiene el mismo orden hay una biyección pero quién sabe si respete la estructura.

- Un estudiante provee un ejemplo de dos supuestos grupos (uno de ellos no lo es), donde la intención fue mostrar que basarse en el orden no es suficiente para determinar que dos grupos sean isomorfos. Su observación a este enunciado está en el empleo del término "orden", mostrando el caso de "un campo con característica cero" (no existe un entero positivo más pequeño "p" para el cual se cumpla que $\underbrace{1+1+1+...+1}_{p-veces}$ sea igual a cero, para algún entero positivo p):

(61). No necesariamente, tomemos a $(G,+)$ y a $(G,\circ)$

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

no siempre podemos definir orden por ejemplo en un campo con característica 0.

- Un estudiante no proporcionó respuesta alguna.

iv) Que dos grupos sean isomorfos significa que son similares.

De acuerdo	Desacuerdo	Parcialmente de acuerdo	Otra	No contestó
7	11	14	3	1

Se pudo apreciar que la mayoría de los estudiantes no utilizan el término similares para referirse a los grupos isomorfos, al contrario, dicen de éste que es ambiguo. Más bien, es empleado para señalar *ciertos parecidos* entre los grupos isomorfos o para indicar que *ciertos parecidos* no son suficientes para determinar que dos grupos sean isomorfos o no.

Así, quienes consideran a los grupos isomorfos como similares o idénticos lo asocian con cómo se comportan los conjuntos bajo sus respectivas operaciones y “no suele dársele toda la idea y el sentido que se le atribuye a esta”, que tiene que ver con el isomorfismo como una *relación de equivalencia*, que “incluye, en particular, la concepción de isomorfismo como objeto” (Lajoie, 2000, p.82). Más detalles sobre los resultados obtenidos se muestran en seguida:

- De los siete estudiantes que dicen estar de acuerdo, uno de ellos no justifica su respuesta. En las respuestas dadas por los seis estudiantes restantes se puede apreciar cómo se buscan ciertos “parecidos” entre los grupos para dar sentido al término “similares”:
  - Dos estudiantes relacionan el término “similares” con la estructura de grupo/que se respeta estructura:

(62). Sí. Al menos bajo la estructura de grupo.
(63). Sí, ya que si son isomorfos $\exists$ f función $\ni$ es biyectiva y respeta estructura.

  - Dos estudiantes lo relacionan con las propiedades que comparten los grupos isomorfos:

(64). De acuerdo. Por la explicación de la primer respuesta. Aunque por similares me refiero a propiedades que se cumplen.
(65). Sí, aunque similares en el aspecto de cómo se comportan bajo las operaciones.

  - Un estudiante lo relaciona con la biyección:

(66). De acuerdo, en cierta forma la biyección te permite ir de uno en otro

  - Un estudiante como respuesta a la pregunta 1 i), indica que “por como es la definición de isomorfismo de grupos, dos grupos son equivalentes si son isomorfos” (remítase a **(1)**); en este caso, el estudiante relaciona el término “similares” con “equivalentes”, considerando como verdadero este enunciado:

(67). Si por similares entiendo que sean equivalentes es verdadero este enunciado.

- 11 estudiantes dicen estar en desacuerdo con este enunciado, siete de los cuales señalan que "similares" es un término ambiguo; de estos, uno trata de relacionar el término tomando en cuenta el cómo están definidos los conjuntos con sus respectivas operaciones **(69)**:

(68). Desacuerdo, está muy ambigua la palabra similar.
(69). Desacuerdo, similares es un término ambiguo, por ejemplo si tuviéramos dos grupos uno numerable y el otro no numerable, pero con operaciones idénticas.

- Un estudiante indica que esta es una definición imprecisa de isomorfismo:

(70). Estoy en desacuerdo, esta es una definición muy vaga de isomorfismo.

- Un estudiante relaciona la palabra "similares" con la biyección:

(71). Desacuerdo, ya que la semejanza no basta para que la correspondencia sea biunívoca.

- Otros dos estudiantes no proveen suficiente información con sus respuestas respecto a la razón.

(72). En desacuerdo. Puede existir una definición matemática de la palabra similar en teoría de grupos que nada tiene que ver con que sean dos grupos isomorfos
(73). Falso: No es necesario que sean similares siendo isomorfos

- 14 estudiantes dicen estar parcialmente de acuerdo con este enunciado; de tales respuestas se extrajo la siguiente información:
  - Dos estudiantes dicen que el término "similares" es ambiguo y no dicen más:

(74). Parcialmente de acuerdo, pues el término "similares" aunque da una idea heurística del concepto, tiende a ser ambiguo.

  - Cuatro estudiantes relacionan el término similar con la estructura, señalando que los grupos isomorfos son grupos similares ya que se preserva la estructura o que son similares en la estructura (algebraica). Analizando las respuestas al cuestionario completo, vemos que de los cuatro estudiantes, uno de ellos se refiere a la propiedad de homomorfismo (el autor del extracto **(75)**) y los demás a las "propiedades" como la conmutatividad, etc.:

(75). Parcialmente de acuerdo. Ya que son similares en la estructura, pero no significa que tengan los mismos elementos.
(76). Parcialmente de acuerdo. Razón: nuevamente hay ambigüedad, sí son similares puesto que tienen la misma estructura, pero en elementos pueden ser diferentes.

- Contrario a los cuatro estudiantes anteriores, otros dos señalan que la similaridad no garantiza el que se preserve la estructura:

(77). Parcialmente de acuerdo. Pues la similitud no implica necesariamente una equivalencia estructural.
(78). Parcialmente de acuerdo, más bien es que si G y H son isomorfos es que tienen la misma estructura de grupo por ejemplo el neutro de G va a dar al neutro de H, etc.

- Dos estudiantes señalan que "ciertos parecidos" entre dos grupos no son suficientes para determinar que sean isomorfos:

(79). Parcialmente. Por ejemplo yo considero que Q y $\Re$ son similares como grupos aditivos (¡su operación es la misma!) pero claramente no son isomorfos. O también Q^* y $\Re^*$.
(80). Parcialmente ya que hay isomorfismos entre distintos espacios (diferentes objetos)

- Dos estudiantes intrínsecamente relacionan el término "similares" con el hecho de que los grupos isomorfos son el mismo/indistintos:

(81). Parcialmente de acuerdo, más bien que bajo las operaciones los conjuntos son indistintos, indistinguibles, irreconocibles.
(82). Parcialmente de acuerdo; podemos decir que son el mismo grupo sólo que los elementos cambian de nombre.

- Dos estudiantes asocian el término "similares" con los elementos de la definición de grupos isomorfos:

(83). Parcialmente de acuerdo. Porque existe una función que relaciona a sus elementos y que preserva la estructura pero la naturaleza de sus elementos puede ser muy distinta.

(84). Parcialmente, el hecho de que dos grupos tengan la misma cardinalidad y que por tanto exista una función biyectiva entre ellos ya hablaría de cierta similitud, ya con las propiedades de morfismo (respetar cierta estructura) ya hablaría de equivalencia.

- Las respuestas dadas por tres estudiantes se clasificaron en la casilla titulada "otra", ya que no indican estar de acuerdo, desacuerdo o parcialmente de acuerdo. Estos tres estudiantes sólo dijeron que la palabra "similares" era ambigua o que no tenían una definición para ella:

(85). No sé que sea similares así que no podría contestar
(86). No recuerdo lo que significa similar

- Un estudiante no dio respuesta alguna.

2. Para ti, ¿qué significa que dos grupos sean isomorfos?

Ante esta cuestión se obtuvieron las siguientes definiciones personales o ideas relacionadas con los conceptos de grupos isomorfos e isomorfismo:

- *Los grupos isomorfos son esencialmente el mismo grupo/se comportan igual, sólo cambia la manera en que se denotan los elementos y las operaciones*. Seis estudiantes hacen alusión a ideas como estas, de los cuales, dos dicen algo interesante con relación a las operaciones, ya que parecen tener en cuenta que estas tienen que funcionar igual para ambos conjuntos y no simplemente que estén definidas de manera diferente:

(87). Un grupo es isomorfo a otro si es el "mismo" grupo pero diferentes nombres.
(88). Tratando de evitar los tecnicismos de teoría de grupos lo más que se pueda, podría decirse de las siguientes maneras: Dos estructuras de estas (grupos) son isomorfas cuando a excepción de los nombres o denotaciones de los elementos y las operaciones las dos estructuras se comportan de la misma manera, en el sentido de operación de sus elementos, algo así como que al colorear a los elementos del primero y su operación como las del segundo ya no hay diferencia con el segundo, esto en cuanto a cantidad de elementos y comportamiento. Sin embargo entre los compañeros y colegas la ii) de la pregunta 1 es la más usual, y esta adoptaría.

- *Los grupos isomorfos tienen la misma/similar estructura algebraica/su estructura es equivalente*. Cuatro estudiantes hacen alusión a una idea como estas, dos de los cuales también dicen de la cardinalidad, que esta debe ser la misma en ambos grupos. Aquí cabe destacar que la expresión “tienen la misma/similar estructura algebraica”, es interpretada de manera distinta; dos de dichos estudiantes la asocian con *la propiedad de homomorfismo*, entre ellos el autor del extracto **(89)**, mientras que los otros dos estudiantes se refieren a particularidades de los grupos, tales como ser abelianos, como es el caso del autor del extracto **(90)**:

(89). Que tengan la misma estructura algebraica y que tengan el mismo orden.
(90). El significado de que dos grupos son isomorfos es que su estructura construida con las operaciones es equivalente. Es decir, no importa cómo sean sus elementos, visto como estructuras son equivalentes.

- *El isomorfismo es único*. Al utilizar la expresión “dicha relación es única”, un estudiante da evidencia de que pudiera tener una idea de este tipo, sin embargo, valdría la pena averiguar a profundidad si en realidad esta es su idea o se está refiriendo a otra cosa:

(91). Que dos grupos sean isomorfos $(G \text{ y } G')$, significa que hay un elemento en G' que se comporta como otro elemento de G. Dicha relación es única.

- *Dados dos grupos isomorfos $(G,*)$ y $(G',*')$, si en G se cumple alguna propiedad (invariante), entonces G' también la cumple*. Tres estudiantes se refieren a una idea como esta, uno de los cuales destaca una “utilidad” del isomorfismo:

(92). El poder estudiar propiedades de grupos que son invariantes bajo morfismos biyectivos. i.e, si en G se cumple cierta propiedad $\Rightarrow$ en G' también se cumplirá $(\varphi : G \to G')$
(93). Que A y B son isomorfos quiere decir que se puede trabajar o extraer cierta información de alguno de ellos de tal manera que para el otro sea verdadera. La ventaja es que hay grupos muy muy bien estudiados que resultan ser isomorfos a otros digamos “complicados” y que resulta más fácil trabajar con ellos de manera “indirecta”
(94). Que tengan el mismo orden y que bajo cierta función con un grupo se obtenga el otro, preservando todas las propiedades del mismo

- *Dos grupos $(G,*)$ y $(G',*')$ son isomorfos si existe $\varphi : G \to G'$ biyectiva, tal que $\varphi(a*b)=\varphi(a)*'\varphi(b) \quad \forall a,b\in G$*. 18 estudiantes proporcionan una definición de grupos isomorfos similar a la definición oficial:

(95). Sean $(G,+)$ y (F,Δ) dos grupos; decimos que F y G son isomorfos (notación $F\cong G$) si existe una función $h:G\to F$ que es isomorfismo; es decir, h es biyectiva y cumple $h(g_1+g_2)=h(g_1)\Delta h(g_2) \ \forall g_1,g_2\in G$.
(96). Dos grupos son isomorfos si existe f ; tal que f es un homomorfismo biyectivo
(97). Para mí, que dos grupos sean isomorfos significa (intuitivamente), que podemos obtener un grupo a partir del otro, tan solo, al intercambiar sus elementos (mediante un homomorfismo entre ellos).
(98). Que existe un isomorfismo entre ellos.

También, dentro de esta clasificación se ubicaron cinco respuestas, donde valdría la pena indagar más a fondo respecto a la definición de homomorfismo de grupos y su notación, ya que pudiera pensarse que las operaciones de ambos grupos deban ser estrictamente las mismas, o bien las operaciones no se toman en cuenta:

(99). Dos grupos son isomorfos si $\exists$ una biyección entre ambos, es decir, un homomorfismo que sea inyectivo y suprayectivo.
(100). Cuando puedo formar una biyección f entre 2 grupos, donde $f(e_G)=e_H$ y $f(a+b)=f(a)+f(b)$ (notación aditiva).
(101). Significa que existe un isomorfismo y esto no es otra cosa que una función que preserva estructura y que es biyectiva $G\to G'$ donde G , G' son grupos. $\varphi(a+\lambda b)=\varphi(a)+\lambda\varphi(b)$. En el caso que se pueda abusar de la notación de la operación del grupo.

- Otros dos estudiantes utilizan la expresión *que preserve*/*respete las operaciones*; uno de ellos no proporciona alguna aclaración **(102)** y del otro estudiante **(103)**, podemos observar en su respuesta a la Pregunta 3 que la expresión "respeta las operaciones" la asocia con el hecho de que estas últimas en ambos grupos sean conmutativas (véase **(107)**).

(102). Que exista una biyección que respete la operación binaria de cada conjunto.
(103). Dos grupos son isomorfos si puedes describir a los dos de la misma manera, es decir, se comportan igual, la definición es que hay una biyección que <u>respeta las operaciones</u>, así que puedes describirlos sin especificar quienes son.

- Dos estudiantes utilizan la expresión *que preserve la estructura de grupo*, mencionando también que la función o correspondencia debe ser biyectiva:

(104). Dos grupos son isomorfos si existe una función $\varphi : G \rightarrow H$ tal que φ preserve la estructura de grupo, para esto φ debe ser biyectiva.
(105). Dos grupos son isomorfos si existe una correspondencia biyectiva, que además preserva la estructura de grupo.

3. ¿Cómo explicarías a un estudiante que toma su primer curso de Álgebra moderna lo que significa que dos grupos NO sean isomorfos? Cita al menos un ejemplo con el que apoyarías tu explicación.

Entre los principales argumentos utilizados por los estudiantes ante esta cuestión, se encuentran los siguientes:

- *Dos grupos no son isomorfos si uno posee una propiedad (algebraica) que el otro no*. En las respuestas dadas por nueve estudiantes se pueden vislumbrar, a través de sus ejemplos, principalmente tres propiedades estructurales, a saber, la conmutatividad, el orden del grupo y el orden de los elementos. Uno de los estudiantes sugiere dos grupos donde en uno la operación sea la adición y en el otro la multiplicación:

(106). Que dos grupos no sean isomorfos significa que existe una propiedad algebraica que se cumple en uno pero no en otro. Ejemplo. Para S_3 y $Z/6Z$. S_3 es no conmutativo y $Z/6Z$ es conmutativo. Esta propiedad sólo depende de su operación como grupos, es decir, de su estructura algebraica.
(107). Dos grupos no son isomorfos si uno se comporta distinto al otro por ejemplo Z no es isomorfo a las matrices con el producto ya que la operación multiplicación de matrices no conmuta y las operaciones de los enteros sí.
(108). Que exista un isomorfismo el cual nos preserve el orden bajo la operación del grupo, por ejemplo, $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \not\cong 4\mathbb{Z}$
(109). Dos grupos NO son isomorfos hablando coloquialmente si no se comportan de la misma manera, es decir, si alguno de ellos goza de propiedades (en general algebraicas) que el otro no tenga. Consideraría como ejemplo algún grupo aditivo y otro multiplicativo.

- *Dos grupos no son isomorfos si no existe una función biyectiva/no es posible establecer una biyección entre ellos*. Los argumentos dados por siete estudiantes, algunos de los cuales se hacen acompañar del ejemplo solicitado, se basan, principalmente, en las respectivas cardinalidades de los conjuntos subyacentes, centrándose exclusivamente en el caso en que estas son distintas y por lo tanto no puede existir una función biyectiva entre los grupos o no es posible establecerse una biyección:

(110). "Dos grupos no son isomorfos si no se puede encontrar una función biyectiva entre ellos". Ejemplo: $(\Re,+)$ y $(Z/nZ,+)$ no son isomorfos.
(111). Dos grupos NO son isomorfos si no existe una función biyectiva $\varphi: G \to H$, en principio si sabemos $\lvert G\rvert \neq \lvert H\rvert$ entonces $G \ncong H$. . Realmente no estoy segura de ahora poder dar una explicación más intuitiva.
(112). Para empezar tiene que haber una biyección por lo que un ejemplo sería $\Re$ y N.

- *Dos grupos no son isomorfos si sus estructuras son distintas/no se preserva la estructura (algebraica)*. Las respuestas dadas por seis estudiantes hacen referencia a que dados dos grupos, si estos no son isomorfos, entonces no se cumple que se "preserva la estructura" o que "sus estructuras son distintas"; donde a cada una de las anteriores dos expresiones suelen interpretarse de forma diferente:

(113). Un grupo G no es isomorfo a otro si tienen una diferente estructura, y la manera de operarse no se respeta i.e, se operan de manera diferente. Z_n y Z no son isomorfos ya que no son biyectables además de que $a*a*a*\ldots \neq 0 \;\; \forall a \in Z$ y $\underbrace{a*\ldots*a}_{n} = 0 \;\; \forall a \in Z$.
(114). Dos grupos no son isomorfos si su estructura, construida con una operación es diferente. Z_4 es un grupo conmutativo, mientras que el grupo de Klein no lo es.
(115). Cuando no poseen la misma estructura algebraica, es decir cuando es distinto $\boxed{\gamma(a+b) \neq \gamma(a)+\gamma(b)}$ donde γ es una función, $a,b \in A$ donde A es un grupo.

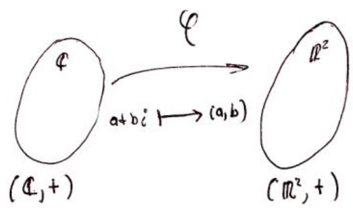
- *Dos grupos no son isomorfos si no se cumple al menos una de las dos condiciones siguientes*: *i*) *biyectividad u ii*) *homomorfismo*. Por lo menos dos estudiantes hacen el señalamiento de que al fallar al menos una de tales condiciones, los grupos no serán isomorfos; resultará de interés averiguar si para estos estudiantes el que dos grupos sean o no isomorfos dependa de la función que se dé:

(116). Que falla al menos una de las condiciones para que sea isomorfo. Z_2 no es isomorfo a Z_3 no puede haber una biyección.
(117). Si al establecer los homomorfismos entre ellos no se cumple la existencia de la inyectividad y suprayectividad.
(118). Dependiendo que tan bien haya llevado sus cursos previos al de Álgebra moderna sería el ejemplo. Sin embargo podríamos poner distintos tipos de ejemplos en el que se resalte una de las partes de la definición que no funciona o no se cumplan en el ejemplo. Para la parte de la biyección, ejemplo con grupos de simetría con diferentes elementos, el triángulo, el cuadrado, o incluso figuras con volumen, o $(Z,+)$ y $(\Re,+)$ y viendo que no hay tal biyección. Para la parte del comportamiento de la operación, un ejemplo de algo conmutativo con otro que no, las matrices y $(\Re,+)$ o algo así.

- *Dos grupos no son isomorfos si no existe una función biyectiva entre ellos tal que preserve la estructura de grupo*/*que preserve las operaciones*. Por lo menos nueve estudiantes hacen referencia a una expresión de este tipo; de entre ellos hay quienes mencionan que *no existe función tal que sea biyectiva o que respete las operaciones*; donde la interpretación a esta última condición no es asociada directamente con la propiedad de homomorfismo:

(119). Para explicar eso daría dos grupos en los cuales no pueda existir una función biyectiva entre ellos ∋ preserve la estructura entre grupos, el ejemplo sería $(G,+)=(Z,+)$ $\wedge$ $(G',\cdot)=(Q,\cdot)$, tanto Z como Q son grupos bajo su operación respectiva, pero al definir $f:Z \to Q \ni x \in Z \to f(x)=x\cdot x = x^2 \in Q$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_4$ Claramente $f(x+y)=(x+y)\cdot(x+y)=x^2+2xy+y \in Q$, con $x,y \in Z$ $\wedge$ $f(x), f(y)=(x\cdot x)(y\cdot y)=x^2y^2$ $\wedge$ son distintos. Además los inversos aditivos de Z son distintos a los inversos multiplicativos de Q.
(120). Si dada cualquier función biyectiva entre los grupos (si es que existe) no existiera ninguna que respete las operaciones. <u>Ejemplo</u> . . . i) Tienen el mismo número de elementos $\Rightarrow$ sí existe una función biyectiva. En Z_4 hay un elemento de orden 4 y en $Z_2 \times Z_2$ no hay ningún elemento de orden 4 $\Rightarrow$ cualquier función no respeta las operaciones. $\therefore$ No son isomorfos.
(121). Que no exista f función ∋ sea biyectiva o homomorfismo. $\mathbb{Z}_5 \not\cong \mathbb{Z}_3$ porque no existe f biyectiva entre ellos ya que $\lvert Z_5 \rvert = 5$, $\lvert Z_3 \rvert = 3$

- Dos estudiantes proporcionaron respuestas cuya información fue poco clara o que se percibieron contradicciones en ellas. Por ejemplo un estudiante indica que $(C,+)$ no es isomorfo a $(\Re^2,+)$ y cuando se le solicita un ejemplo de grupos isomorfos propone el mismo:

<table>
<tr>
<td>(122).

</td>
<td>(123). Haría que quedaran muy claros los términos: grupo, función, biyectividad y explicar con ejemplos muy literales cuando no se cumpla la definición de isomorfismo. Con ejemplos literales me refiero a dibujos, objetos, colecciones, etc.</td>
</tr>
</table>

Como se pudo apreciar, se presentaron situaciones en las que uno de los supuestos grupos que se propusieron no lo eran realmente, por lo que resultará de interés considerar ello para averiguar si pudiera haber algún tipo de dificultad en dichos estudiantes con el concepto de *grupo*.

4. Observa la siguiente tabla del grupo G y da un ejemplo de otro grupo G' que sea isomorfo a G. Justifica tu respuesta.

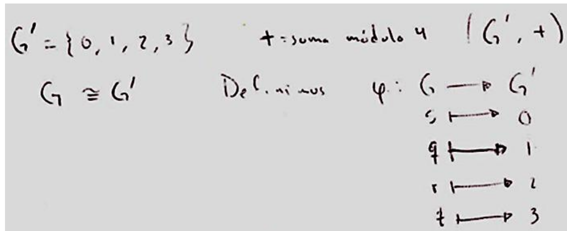
$*$	q	r	s	t
q	s	t	q	r
r	t	s	r	q
s	q	r	s	t
t	r	q	t	s

- Nueve estudiantes no proporcionaron respuesta alguna.
- Cuatro estudiantes proponen al grupo $(Z_4,+_4)$. Entre sus estrategias utilizadas se encuentran las siguientes:
  - La cardinalidad:

(124). Z_4

- La cardinalidad, identificar al elemento identidad y establecer una biyección entre los dos grupos:

(125).



$G' = \{0,1,2,3\}$ $+$ = suma módulo 4 $(G', +)$

$G \cong G'$ Definimos $\varphi : G \to G'$

$s \mapsto 0$

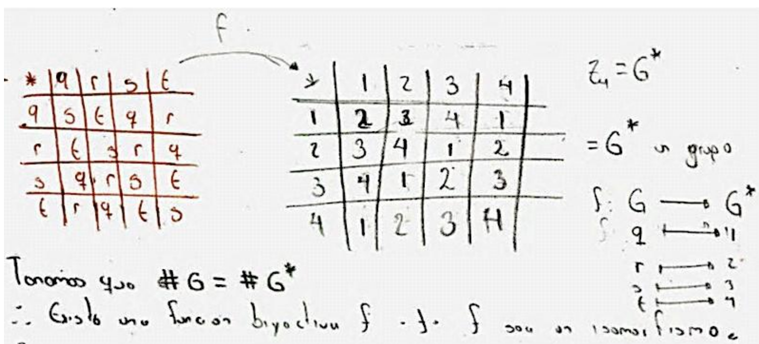
$q \mapsto 1$

$r \mapsto 2$

$t \mapsto 3$

- La cardinalidad y establecer una biyección entre los dos grupos (problemas al definir a los elementos de Z_4):

(126).



f

*	q	r	s	t
q	s	t	q	r
r	t	s	r	q
s	q	r	s	t
t	r	q	t	s

*	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	H

$Z_4 = G^*$

$= G^*$ un grupo

$f : G \to G^*$

$q \mapsto 1$

$r \mapsto 2$

$s \mapsto 3$

$t \mapsto 4$

Tenemos que $\# G = \# G^*$

$\therefore$ Existe una función biyectiva f t.q. f sea un isomorfismo

- Señalar que solamente existen dos grupos de orden 4 y la conmutatividad:

(127). Z_4. Solamente existen dos grupos de orden 4. El grupo de Klein y Z_4. El grupo que se da es conmutativo y el grupo de Klein no lo es, luego el grupo es Z_4.

- Un estudiante propone un conjunto de cuatro permutaciones de grado seis. Observamos que no es subgrupo de S_6, pues no es cerrado bajo la operación composición:

(128). El subgrupo $\{\sigma_I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ permutaciones donde σ_I es la identidad, $\sigma_1 : (b,a,c,d,e,f)$, $\sigma_2 : (a,b,d,c,e,f)$, $\sigma_3 : (a,b,c,d,f,e)$

- Cuatro estudiantes no dan un ejemplo específico, sin embargo, dos de ellos reconocen que solamente existen dos grupos de orden cuatro, pero no saben a cuál de ellos es isomorfo G:

(129). Recuerdo que los únicos grupos de orden 4 son Z_4 y $Z_2 \times Z_2$ así que alguno de estos dos grupos es isomorfo.
(130). No recuerdo bien si es a Z_4 o el grupo V_4 de Klein.

  - Un estudiante, a partir de la tabla del grupo G, identifica al elemento identidad "s", observa que cada elemento es su propio inverso, que G es abeliano, el grupo es de orden cuatro y no es cíclico; entonces para el estudiante, algún grupo isomorfo a G debe poseer las mismas propiedades:

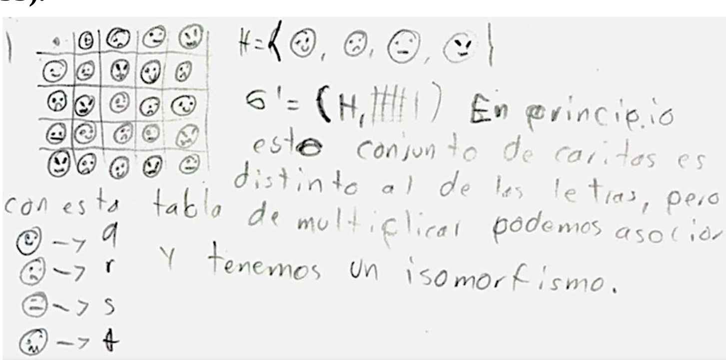
(131). Nótese que "s" es la identidad de G. Además $\forall a \in G$ se tiene que $a = a^{-1}$. También G es abeliano. Demos otro grupo abeliano, cuyos elementos coincidan con su inversa y que conste de 4 elementos pero no cíclico.

  - Un estudiante propone como un posible ejemplo a las transposiciones, sin ser preciso:

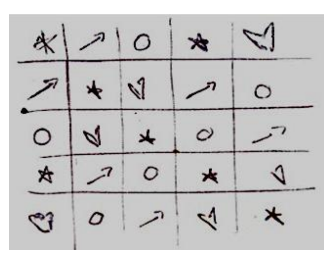
(132). Recuerdo varios grupos que coinciden en una o dos características pero no en todas, por ejemplo las transposiciones cumplen que $(ab)^2 = (ab)(ab) = e$ pero de la cardinalidad no estoy seguro que cumplan.

- Ocho estudiantes consideran que el isomorfismo pudiera consistir en un cambio de nombre de los elementos y de la operación; de esa manera es posible obtener uno a partir del otro:

(133).



(134).



- Siete estudiantes proponen a los grupos $Z_2 \times Z_2$ o $Z/2Z \times Z/2Z$, utilizando los siguientes argumentos:
    - Los únicos grupos de orden cuatro son $Z_2 \times Z_2$ o $Z/2Z \times Z/2Z$, y Z_4 o $Z/4Z$, basándose en el orden de los elementos:

(135). s es la identidad, $|q| = 2$, $|r| = 2$, $|t| = 2$

Es un grupo de 4 elementos, es abeliano, yo propondría a $Z/2Z \times Z/2Z = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ que en clase vimos que los únicos grupos de orden 4 son el que mencioné y $Z/4Z$ ya todos los demás son isomorfos a estos. $Z/4Z$ no es isomorfo a G pues el orden de 3, por ejemplo, es 4, y sin embargo G no tiene elementos de orden 4.

(136). $Z_2 \times Z_2$

+	(1,0)	(0,1)	(0,0)	(1,1)
(1,0)	(0,0)	(1,1)	(1,0)	(0,1)
(0,1)	(1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)
(0,0)	(1,0)	(0,1)	(0,0)	(1,1)
(1,1)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(0,0

$\boxed{q = (1,0) \quad r = (0,1) \quad s = (0,0) \quad t = (1,1).}$

es biyectiva y respeta las operaciones.

- Establecer una biyección entre los dos grupos y verificar o decir que se preservan las operaciones:

(137). Notemos que $s \cdot x = x$ $\quad s$ es el neutro y que $x \cdot x = s \Rightarrow$ cada elemento es su propio inverso. Entonces recordando el ejemplo anterior $G \approx Z_2 \times Z_2$.

$$\boxed{\begin{array}{ll} s \to \bar{0} & r \to (\bar{1},\bar{0}) \\ q \to (\bar{0},\bar{1}) & t \to (\bar{1},\bar{1}) \end{array}}$$

Se puede comprobar que se respetan las operaciones.

Como podemos observar en las respuestas de los estudiantes, surgieron dos formas de hacer corresponder a los elementos de ambos grupos, mismos que satisfacen la preservación de la estructura:

1. $\begin{array}{l} s \to (0,0) \\ t \to (1,1) \\ \boxed{\begin{array}{l} q \to (1,0) \\ r \to (0,1) \end{array}} \end{array}$

2. $\begin{array}{l} s \to (0,0) \\ t \to (1,1) \\ \boxed{\begin{array}{l} q \to (0,1) \\ r \to (1,0) \end{array}} \end{array}$

- Un estudiante propone al 4-grupo de Klein. Los argumentos de este estudiante se basan en la observación de propiedades que comparten ambos grupos, como la cardinalidad. Parece que para el estudiante, es suficiente con que la función candidata a ser un isomorfismo sea biyectiva (véase **(105)**).
- Dos estudiantes proponen al subgrupo $(G',\bullet)$ de $GL(2,\Re)$, donde $G'=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ con la multiplicación de matrices, haciendo corresponder a cada matriz de G' con cada elemento de G; pero sólo uno de ellos menciona, sin verificar, que las operaciones son preservadas. Los dos argumentan que a partir de las tablas se puede ver que son la misma:

(138). En $M_{2\times 2}(\Re)$ sea $G'=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ se verifica que G' es grupo con la multiplicación. En base a la tabla se puede decir que s es la identidad en G, así sea $f:G\to G'$ dada por $f(s)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $f(r)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $f(q)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ De esta manera se verifica que f resulta ser biyectiva por construcción y más aún, la tabla de operaciones resultante con esta operación sería la misma que de G, por base f preserva las operaciones en los grupos, i.e, $f(i*j)=f(i)\cdot f(j)\ \forall i,j\in\{q,r,s,t\}$
(139). $G'=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ pues claramente es conmutativo y $\forall a\in G'$, $a^2=1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ y pues si haces las cuentas las tablas de multiplicación de G y G' son las mismas.

5. Supongamos que se tienen dos grupos G y G^*. Para cada una de las afirmaciones siguientes, indica si es Verdadera o Falsa. Justifica tu respuesta.

i) G es isomorfo a G^* si ambos son conmutativos.

Verdadera	Falsa	Otra	No contestó
1	31	2	2

- Un estudiante dijo que esta afirmación era verdadera basando su argumento en que la conmutatividad es una propiedad invariante bajo isomorfismo:

(140). $G \cong G'$ si ambos son conmutativos. Verdadero. Pues ser conmutativo es una propiedad que se preserva

- De los 31 estudiantes que señalan que este enunciado es falso, tres de ellos no justifican su respuesta; de los 28 restantes, sus argumentaciones se basaron en diferentes elementos:
  - 16 estudiantes mediante su explicación y ejemplo, señalan que pueden haber grupos que son conmutativos pero de cardinalidades distintas:

(141). $(G,\cdot)$ y $(G^*,\cdot)$. No pues puede ser que tengan distintos elementos.
(142). Falso $(Z,+)\ \not\cong\ (\Re,+)$, ambos son conmutativos pero no podemos dar una biyección entre ellos $\lvert Z\rvert < \lvert\Re\rvert$.
(143). Z_4 y $\{\bar{0}\}$ son ambos abelianos y por iv) $\mathbb{Z}_4 \not\cong \{\bar{0}\}$.
(144). Falso porque Z es abeliano y Z_p (p primo) es abeliano y no son isomorfos

  - Seis estudiantes mediante su explicación y ejemplo, señalan que puede haber grupos que son conmutativos y de cardinalidades iguales, sin ser isomorfos.

(145). Falso $(Z,+)$ y $(Q,+)$ no son isomorfos, y ambos son conmutativos.
(146). Falso $G = Z_4$ y $G' = Z_2 \times Z_2$ ambos son conmutativos; pero $G \not\cong G'$
(147). El primer enunciado es falso pues sea $(G,+)=(Z,+)\ \wedge\ (Q,\cdot)$, son grupos conmutativos pero no son isomorfos viendo el ejemplo que di en el 3)
(148). Falso, $(C,+)$, $(\Re,\cdot)$. Ambos conmutan pero no son isomorfos. $\varphi(i) = ¿?$, por ejemplo.

  - Un estudiante proporcionó un ejemplo de grupos donde uno era conmutativo y el otro no, y señaló que los grupos son isomorfos, sin intentar construir el 'isomorfismo':

(149).

(5)

(i) G es isomorfo a G^* si ambos son conmutativos

FALSO

Considere

$(M_{n\times n}(F), \cdot)$ (las matrices cuadradas con el producto usual de matrices)

$M_{n\times n}(F)$ no es conmutativo

$(F^{n^2}, +)$ (Los vectores fila de n^2 entradas, con la suma usual)

F^{2n} es conmutativo

$(M_{n\times n}(F), \cdot) \simeq (F^{n^2}, +)$

- Dos estudiantes señalan que hay grupos donde ambos no son conmutativos y a pesar de ellos son isomorfos:

(150). Falso. S_3 y un grupo no abeliano de orden 6. Son isomorfos pero ninguno de los dos es conmutativo
(151). Falso si G no es conmutativo $\Rightarrow$ G' tampoco debería serlo si son isomorfos

- Dos estudiantes señalan que no basta con que los grupos sean conmutativos para decir que sean isomorfos:

(152). Falso, G y G^* no tienen que ser conmutativos
(153). Falso. Tienen que tener el mismo orden para que “tal vez” puedan ser isomorfos, aquí no basta con que los 2 sean conmutativos

- Un estudiante indica que depende de la estructura del grupo:

(154). Falso; depende de la estructura del primero.

- Respecto a los dos estudiantes que no dicen si es verdadero o falso el enunciado, sus respuestas señalan que para ellos no es suficiente que los grupos sean conmutativos para ser isomorfos:

(155). No, no necesariamente podemos tomarnos a los siguientes grupos. Sea $G =$ Grupo Diédrico y a G^* como Z_p con p primo $\Rightarrow$ $\# G \neq \# G^*$ esto es igual sí y sólo sí el número de polino es primo, pero no siempre pasa.	**(156).** Desde luego, no es suficiente para garantizar el isomorfismo entre ellos.

- Dos estudiantes no proporcionaron respuesta alguna.

ii) G **y** G^* **son isomorfos si sus elementos y sus operaciones son idénticamente iguales.**

Verdadera	Falsa	Otra	No contestó
24	10	2	-

- De los 24 estudiantes que califican este enunciado como verdadero, cuatro de ellos no justifican su respuesta.
  - 13 estudiantes señalan que se trata del mismo grupo; siete de ellos proponen al isomorfismo como la identidad:

(157). Verdadero. Si $G = G^*$ porque tienen los mismos elementos y la operación binaria está definida, pues claramente son isomorfos
(158). Verdadero. La biyección resulta ser $f : G \to G'$ dada por $f(x) = x \ \ \forall x \in G'$. Dado que tienen la misma operación y elementos, esta resulta ser biyectiva y preserva operaciones
(159). $G = G^*$ Verdadero. Podemos dar un isomorfismo y creo que en tal caso se llama Automorfismo.
(160). Si sus elementos y las operaciones son idénticas estamos hablando del mismo grupo, y se puede decir que un grupo es isomorfo a sí mismo.

  - Un estudiante indica que este enunciado es verdadero ya que como los grupos son el mismo entonces poseen las mismas propiedades:

(161). Verdadero, pues de eso, o más bien en eso se basan las propiedades de un grupo en sus elementos y su operación, si son idénticos en dos grupos, entonces tendrán las mismas propiedades.

- Cinco estudiantes aceptan este enunciado como verdadero ya que satisfaría que existe una función biyectiva y citan la propiedad de homomorfismo/conservación de estructura:

(162). Sí ya que por tener elementos iguales es $\exists \; f$ biyectiva y respeta estructura por hipótesis.
(163). Sí, refleja la idea de la biyección y la de homomorfismo.
(164). Verdadero. Puesto que si tienen los mismos elementos, tiene el mismo orden y sus operaciones son las mismas se conserva la estructura.

- Un estudiante provee una respuesta confusa:

(165). Verdadero, si en principio las funciones son idénticas y están definidas en conjuntos idénticos, podemos dar una función morfismo de grupos entre ellos.

- De los 10 estudiantes que dicen que este enunciado es falso, dos no justifican su respuesta.
  - Ocho estudiantes argumentan que los conjuntos y/u operaciones no necesariamente tienen que ser iguales:

(166). Falso. Aunque es una sentencia particularmente cierta no es necesario que se cumpla esto, es muy restrictivo.
(167). Falso. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{15}$. $x \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \rightarrow x = (a,b)$ $a \in \mathbb{Z}_3$, $b \in \mathbb{Z}_5$ $y \in \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow y = r$ donde r es el residuo de dividir entre 15.
(168). Falso. El isomorfismo de $(\Re,\cdot)$ a $(\Re^{+},+)$ dada por $x \mapsto e^{x}$, es un isomorfismo de un grupo multiplicativo a un grupo aditivo.
169). Falso. Las permutaciones pares e impares son isomorfas debido a que cada una tiene orden $\frac{n!}{2}$ pero sus elementos no son iguales debido a que la permutación par manda 1 y la permutación impar a -1

- De los dos estudiantes que no dicen concretamente si este enunciado es verdadero o falso, sus respuestas dejan ver que no están de acuerdo con él. Sus argumentos se basan en señalar que no es una condición suficiente.

(170). G y G^{*} no tienen que tener las mismas operaciones

iii) Si G y G^* no tienen el mismo orden, entonces no son isomorfos.

Verdadera	Falsa	Otra	No contestó
32	2	1	1

- De los 32 estudiantes que dicen que tal enunciado es verdadero, seis no justifican su respuesta.
    - 18 estudiantes aceptan este enunciado como verdadero argumentando que si los grupos no tienen el mismo número de elementos no puede existir una función biyectiva o no podría establecerse una biyección entre los dos grupos.

(171). Verdadero, no puede haber una biyección si el orden de G y G^* son distintos
(172). Cierto. Si dos conjuntos no tienen mismo cardinal, nunca existirá una función biyectiva. Entonces menos un isomorfismo.
(173). Verdadero. Al menos para grupos finitos esto es cierto pues no será posible construir una función biyectiva

- Un estudiante contesta pensando en condiciones necesarias y suficientes para que dos grupos sean isomorfos:

(174). Verdadero, es necesario, pero no suficiente que tengan mismo orden

- Siete estudiantes dicen que es una consecuencia de que los grupos sean isomorfos.

(175). Cierto; si $G \cong G' \Rightarrow \|G\| = \|G'\|$ pues el isomorfismo es una biyección.
(176). Verdadero, ya que de ser isomorfos existiría un isomorfismo, que es, en particular un biyección.

- Dos estudiantes indican que este enunciado es falso; uno de los cuales no justifica su respuesta y el otro hace referencia al ejemplo propuesto en 1 (iii) (véase **(54)**) donde se indica que los grupos son isomorfos y sus cardinalidades son distintas:

(177). Este es falso pues por el 1) iii) dije que $Z \cong Z_n$ $\wedge$ sus órdenes son distintos pero si son isomorfos con la $(+)$

- La respuesta de un estudiante se clasificó dentro de la casilla “otra” puesto que no está claro si considera verdadero o falso al enunciado. Este estudiante duda ante la posibilidad de que para grupos infinitos llegue a cumplirse:

(178). Si son finitos no ¿pero infinitos?

iv) Si G es un subgrupo de G^*, G^* es isomorfo a G.

Verdadera	Falsa	Otra	No contestó
1	25	7	3

- Un estudiante dijo que este enunciado era verdadero sin justificar su respuesta.
- De los 25 estudiantes que dicen que este enunciado es falso, tres de ellos no justifican su respuesta. De los restantes 22 estudiantes, se obtuvo la siguiente información:
  - El argumento de 18 estudiantes se basó en afirmar que puede suceder que ambos tengan distinta cardinalidad, seis de los cuales proponen como ejemplo al subgrupo trivial de un grupo arbitrario:

(179). No, ya que el orden es distinto
(180). Falso, $Q \leq \Re$ pero no hay una función biyectiva por las cardinalidades
(181). Falso. $(N,+)$ es subgrupo de $(\Re,+)$ pero <u>no</u> son isomorfos
(182). Falso. $\{\bar{0}\} \leq G \;\; \forall G$ grupo. Si $G \neq \{\bar{0}\} \Rightarrow \left\|\{\bar{0}\}\right\| < \|G\| \;\; \therefore$ no se pueden biyectar.
(183). Falso. Si G es subgrupo propio, no puede existir ϕ que biyecta G con G^*

  - Un estudiante indica que el único caso en que es posible es cuando los grupos son el mismo:

(184). Falso. Que sea subgrupo no significa que exista una función biyectiva que preserve operaciones. Esto es cierto, en general, solo si $G = G^*$

  - Dos estudiantes señalan que no es posible tomar un subgrupo al azar, es decir, que no siempre sucede:

(185). Falso. No se puede tomar un grupo al azar para establecer un isomorfismo requiere que cumpla determinadas propiedades

- Un estudiante a pesar de indicar que este enunciado es falso, muestra inseguridad:

(186). Falso. Lo creo pero estoy un poco inseguro yo lo probaría

- De los siete estudiantes que no dijeron si este enunciado era verdadero o falso, se obtuvo la siguiente información:
  - Tres estudiantes indican que para el caso de que los grupos sean infinitos, puede cumplirse:

(187). Ningún subgrupo propio de un grupo finito puede ser isomorfo, pero si el orden del grupo es infinito sí se puede dar el caso de ser isomorfo

  - Un estudiante considera que la cardinalidad es importante, ya que si es distinta, entonces no es posible:

(188). No siempre, el número de elementos lo echa a perder.

  - Un estudiante da un ejemplo donde se cumple:

(189). Depende. Ejemplo $2Z \cong Z$.

  - Un estudiante señala que pudiera no cumplirse alguna propiedad, por ejemplo, el orden de los elementos.

(190). Si G es un subgrupo de G^* no siempre G^* es isomorfo a G . Si tomamos G^* un grupo de orden 4 y un elemento en G^* tal que $\circ(a) \neq 4$ entonces $\circ(a)$ es 1 o 2 y $\langle a \rangle < G$. $\therefore$ G^* no es isomorfo a $\langle a \rangle = G$

  - Un estudiante parece confundido con el enunciado.

(191). No sé que responder; pues un subgrupo preserva las operaciones del grupo que lo contiene pero no recuerdo lo del orden.

- Tres estudiantes no proporcionaron respuesta alguna.

6. Da un ejemplo de grupos isomorfos. Argumenta tu respuesta.

- Cuatro estudiantes no proporcionaron respuesta alguna.
- Tres estudiantes propusieron $Z_4 \cong Z_2 \times Z_2$ o $Z/4Z \cong Z/2Z \times Z/2Z$, cuyo argumento se basó principalmente en señalar que es posible establecer una biyección entre los grupos:

(192).

$$Z_4 \cong Z_2 \times Z_2$$

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow (0,0) \\ 1 &\longrightarrow (1,0) \\ 2 &\longrightarrow (0,1) \\ 3 &\longrightarrow (1,1) \end{aligned}$$

(193). $Z/4Z$ es isomorfo a $Z/2Z \times Z/2Z$ pues es posible construir una biyección con sus operaciones usuales y sus módulos

(194). $Z_2 \times Z_2 \cong Z_4$

- Un estudiante propuso $D_6 \cong S_3$, parece ser que implícitamente este estudiante está considerando que ambos grupos son del mismo orden al indicar que es posible asociar cada permutación a la simetría del triángulo que le corresponda:

(195). D_6 y S_3 son isomorfos. D_6 es el grupo de transformaciones de un triángulo y S_3 el grupo simétrico en tres letras, por ejemplo el grupo de transformaciones de $\{1,2,3\}$. El isomorfismo se puede ver numerando los vértices del triángulo.

La transformación del triángulo que le corresponde es la transformación de $\{1,2,3\}$ es dependiendo de qué vértice se mande a qué vértice.

- Un estudiante propuso $(Q,+) \cong (\Re,+)$, dado por $f(x) = x$; obsérvese que Q y $\Re$ poseen distinta cardinalidad:

(196). Q y $\Re$ son isomorfos como grupos pues $f: G' \to G$ $f(x) = x$ es isomorfismo y $f(x+y) = x+y = f(x)+f(y)$ $f(1) = 1$ $\therefore$ es isomorfismo de grupos

- También hubo cuatro respuestas donde ambos o al menos uno de los supuestos grupos propuestos, no lo eran realmente, por ejemplo:

(197). $(\Re,\cdot) \wedge (\Re^{+},\cdot)$, basta tomar $f(x) = e^{x}$
(198). $N \cong Z^{+}$, con N y Z^{+} son grupos con la suma usual $f: n \to n$ Por construcción f es inyectiva y como $\lvert N\rvert = \lvert Z^{+}\rvert \Rightarrow f$ es suprayectiva. $f(n+m) = n+m = f(n)+f(m)$ $\therefore f$ es <u>isomorfismo</u>.
$(N,+) \cong (2N,+)$ **(199)**. $\varphi: N \to 2N$ $2N = \{2n : n \in N\}$ $n \mapsto 2n$

- La idea de un estudiante fue proponer el ejemplo $\mathcal{L}(V,W) \cong Mat_{m\times n}$, donde $\mathcal{L}(V,W) = \{T: V \to W \mid T \text{ es lineal}\}$, V y W espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente sobre el cuerpo F.

(200). Ejemplo de grupo isomorfo: El grupo de las transformaciones lineales en un espacio vectorial de dimensión n con el grupo de matrices asociadas a la dicha transformación lineal anterior.

- Un estudiante propuso $Z \cong nZ$:

(201). $\phi: nZ \to Z$ $(nZ,+)$ $\phi(na) \to n$

- Dos estudiantes propusieron $(C,+) \cong (\Re^{2},\bar{+})$:

(202). Sea $(C,+)$ un grupo y $(\Re^2,\bar{+})$ donde C son los complejos $\wedge$ la suma usual; donde $\Re^2$ es el $\Re\times\Re$ con la suma usual de vectores.
defino $f: C\to\Re^2 \ni \forall z\in C$ es decir $z=a+ib\xrightarrow{f}(a,b)$
$\Rightarrow f(z+w)$ con $z\in C \wedge w\in C$ $(w=c+di)$ es igual a $=(a+c,d+b)$
$\wedge\ f(z)+f(w)=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
$\Rightarrow f(z+w)=f(z)+f(w)$ esto es un homomorfismo.
Por cómo es construida f se ve claro que es inyectiva pues sean $z,w\in C\ni z=a+bi\wedge w=c+di$ si $f(z)=f(w)\Rightarrow(a,b)=(c,d)\Rightarrow a=c\wedge b=d$
$\Rightarrow z=w$
$\wedge\ f$ también es sobreyectiva por cómo es construida f pues a todo punto C le asocia un punto en $\Re^2$ $\wedge$ lo llena.
$\therefore\ f$ es biyectiva $\Rightarrow\exists\ f^{-1}\ni\ f\circ f^{-1}=Id_C\ \wedge\ f^{-1}\circ f=Id_{\Re^2}$.
$\therefore\ \Re^2\cong C$

- Tres estudiantes propusieron $(Z,+)\cong(2Z,+)$:

(203). Z y $2Z$. Tiene la misma cardinalidad.
$1\mapsto 2$
$x\mapsto 2x$ el cual respeta las operaciones $\therefore$ son isomorfos.

- Dos estudiantes propusieron a $Z_n\times Z_m\cong Z_{nm}$ o $Z/nZ\times Z/mZ\cong Z/nmZ$, donde n,m son primos relativos:

(204). $Z_{nm}\cong Z_n\times Z_m$ si n,m son primos relativos. La prueba usa el teorema chino del residuo el cual habla de solución a sistemas de congruencias con la condición de que n,m sean primos relativos

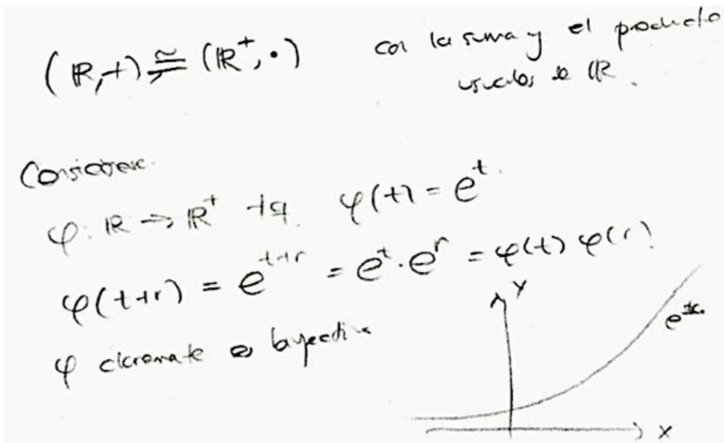
- Cinco estudiantes propusieron como ejemplo a los grupos $Z_3\times Z_2\cong Z_6$ o $Z/3Z\times Z/2Z\cong Z/6Z$:

(205). $Z_6\cong Z_3\times Z_2$ Ambos con la suma. Un teorema nos dice que como $(3,2)=1\Rightarrow$ los grupos son isomorfos

- Un estudiante propuso $G \cong G$ dado por $f(x) = x$:

> **(206)**. Sea G un grupo. Notemos que $G \cong G$ bajo el isomorfismo $G \cong G$
> $$\begin{aligned} id : G &\to G \\ x &\to id(x) = x \end{aligned}.$$ Es evidente que es un isomorfismo.

- Un estudiante propuso $(\Re,+) \cong (\Re^{+},\cdot)$, dado por $f(t) = e^{t}$:

> **(207)**.
>
> 
>

- Un estudiante propuso $(Q^{-\{0\}},\cdot) \cong (P(Z),+)$:

> **(208)**. $(Q^{-\{0\}},\cdot) \cong (P(Z),+)$ Q con el producto, polinomios con coeficientes enteros.
> $\{a + b\sqrt{s},\ a,b \in Z\}$ con la suma es isomorfo a los enteros Gaussianos con la suma.

- Un estudiante propuso $(U_n,\cdot) \cong (Z_n,+_n)$; donde $U_n = \{z \in C \mid z^n = 1\}$:

> **(209)**. Un ejemplo muy ilustrativo y geométrico es el de Z/nZ y las n-ésimas raíces de la unidad W_k con $0 \le k < n$

- Cuatro estudiantes dieron algún ejemplo con $(Z_2, +_2)$:

(210) Las raíces de $x^2 - 1$ $\quad R(x^2-1) = \{\pm 1, \cdot\}$ este es isomorfo a $(Z_2, +)$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

por $\rightsquigarrow$

·	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

(211)

	a	b
a	a	b
b	b	a

Es isomorfo a Z_2 basta hacer $\phi(a) = 0$, $\phi(b) = 1$ y es fácil verificar que las operaciones cumplen lo que deben cumplir

(212) Z_2 y S_2 ya que $|Z_2| = 2$ y $|S_2| = 2$ y los grupos de orden p primo sólo son Z_p

- Un estudiante implícitamente parece reconocer que solamente existen dos grupos de orden seis salvo isomorfismo y como ejemplo, en general, indica que S_3 es isomorfo a cualquier grupo de orden seis no abeliano:

(213). S_3 y grupo no abeliano de orden 6. Poseen la misma cardinalidad

3.2.3 Selección de los participantes

La selección de los y las participantes se basó, como ya se mencionó al inicio de este capítulo, en los resultados obtenidos de los 36 cuestionarios aplicados, los cuales se presentaron en la sección 3.2.2. Para esta selección se tomaron en cuenta aspectos sobresalientes de sus respuestas, centrándonos, por ejemplo, en los procedimientos utilizados y sus definiciones dadas, también surgió curiosidad por averiguar por qué no se contestaron algunas preguntas o no se dio alguna justificación.

En un inicio se seleccionaron 10 estudiantes y se les visitó en sus instituciones correspondientes, algunos aceptaron la invitación inmediatamente y se programó la fecha para la entrevista; sin embargo, otros quedaron en confirmar su participación vía e-mail, sin que eso llegara a hacerse. Se les reiteró la invitación por el mismo medio sin recibir respuesta nuevamente, razón por la que tuvo que recurrirse a la invitación de otros estudiantes. Es por ello que al inicio de este capítulo se aclaró que la disponibilidad de los voluntarios jugó un papel en los resultados que se reportan en esta investigación.

Finalmente, se contó con la participación de cinco estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, dos de la Facultad de Ciencias de la UNAM (Alejandro y Diana) y tres estudiantes de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN (Miguel, Víctor y Rodolfo[4]).

3.2.4 Diseño del instrumento de entrevista

A fin de lograr el objetivo de investigación se pensó en la entrevista semi-estructurada como un instrumento de recolección de información más adecuado para profundizar en el pensamiento de los estudiantes que aquel que nos puede ofrecer únicamente el cuestionario escrito.

Nos estamos refiriendo con una entrevista semi-estructurada a que el instrumento de entrevista se diseña previamente como una guía y contiene las preguntas que se harán a cada entrevistado, pero que dependiendo de las respuestas y reacciones de ellos se pueden hacer otras preguntas y éstas pueden ser diferentes para cada individuo.

Específicamente, los objetivos de la entrevista fueron los siguientes:

- Indagar y conocer a fondo las imágenes que han desarrollado los estudiantes participantes respecto al concepto isomorfismo de grupos; lo anterior permitirá observar cómo tales imágenes influyen en su entendimiento cuando se enfrentan a situaciones que involucran dicho concepto.
- Identificar e interpretar las dificultades presentadas, bajo el enfoque de Tall y Vinner (1981), que manifiesten los estudiantes en sus argumentaciones.

Las entrevistas se llevaron a cabo en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, las cuales fueron audio-grabadas, contando con las condiciones necesarias para realizarlas.

En seguida ofrecemos una explicación general del tipo de preguntas utilizadas para explorar las dificultades presentadas por los participantes con relación al concepto isomorfismo de grupos.

[4] Todos los nombres fueron cambiados.

Las preguntas empleadas para la entrevista tuvieron su inspiración en las utilizadas en la investigación de Lajoie (2000), a fin de indagar las concepciones de los estudiantes con relación a la noción de isomorfismo de grupos, las cuales forman parte de su imagen de dicho concepto y nos permiten dar explicación a las dificultades presentadas cuando trabajan con este. Así, consideramos que a partir del análisis de tales concepciones podremos entender e interpretar sus respuestas a los ejercicios propuestos y en general las dificultades presentadas a lo largo de la entrevista.

Con estas ideas en mente, a fin de obtener un panorama más amplio y poder tener más elementos para interpretar respuestas posteriores, la entrevista se inició con la aclaración a los resultados obtenidos de cada uno de los estudiantes al cuestionario. Otro tipo de preguntas fueron planteadas con la finalidad de invitar al participante a la reformulación personal de las definiciones matemáticas involucradas, más bien que solicitar la definición formal. Lo anterior tuvo la finalidad de obtener respuestas que nos aportaran información sobre las concepciones de los estudiantes y no solo la recitación de una definición la cual pudo haberse aprendido de modo mecánico. En seguida presentamos dos ejemplos de tales preguntas:

¿*Cómo explicarías Isomorfismo de grupos a un estudiante quien toma su primer curso de Álgebra Moderna*?

¿*Cómo procedes a encontrar un isomorfismo*?

También se tomaron en cuenta aquellas preguntas que invitaban a la persona entrevistada a aportar más que sus definiciones personales, por ejemplo, consejos que darían a un estudiante ante alguna situación, los comentarios sobre respuestas dadas por terceras personas y la solicitud de ejemplos específicos que les darían a otros estudiantes para ayudarlos a entender los conceptos en cuestión y la explicación del porqué de su elección. Este tipo de preguntas nos permitirían observar una variedad de exposición de ideas sobre los conceptos involucrados, las cuales se espera que aporten información sobre sus concepciones y con ello se pretende entender las dificultades que se presenten.

El siguiente extracto (en negrita) que se te presenta a continuación fue la respuesta dada por un estudiante ante la siguiente pregunta: ¿*Por qué no hay isomorfismo entre los grupos* (A,Δ) *y* $(B,\circ)$?, *donde* $A=\{f,g,h,i\}$ y $B=\{j,k,l,m\}$. Explica tu respuesta.

Δ	f	g	h	i
f	h	i	f	g
g	i	h	g	f
h	f	g	h	i
i	g	f	i	h

$\circ$	j	k	l	m
j	k	m	j	l
k	m	l	k	j
l	j	k	l	m
m	l	j	m	k

“***Definiendo la función*** $\varphi : A \to B$ ***tal que*** $f \mapsto j, g \mapsto k, h \mapsto l, i \mapsto m$ **.** ***Observamos que*** $\varphi(f \Delta i) = \varphi(g) = k$ ***no es igual a*** $\varphi(f) \circ \varphi(i) = j \circ m = l$ ***. Así que no hay isomorfismo entre A y B*”.**

- *¿Cuál es tu opinión al respecto?*

  ¿Estás de acuerdo o en desacuerdo?

  ¿Por qué?

  - *Si estás en desacuerdo:*

  ¿Cómo procederías para demostrar que no hay isomorfismo entre esos dos grupos?

También se les presentaban a los estudiantes algunos problemas, los cuales tenían el propósito de observar con mayor precisión su razonamiento y por tanto, el tipo de dificultades que se presentaran ante su resolución. Se trataban de problemas que no son muy comunes a los vistos en clase o de los que puedan presentarse en los libros de texto:

A continuación se te presentan dos tablas de operación de grupos:

$G = \{h, i, j, k, l, m\}$, *con la operación* $*$ *y* $G' = \{s, t, u, v, w, x\}$, *con la operación* $\circ$

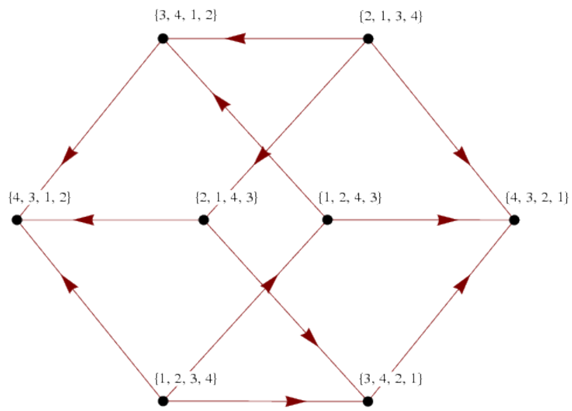
$*$	h	i	j	k	l	m
h	m	j	i	l	k	h
i	l	m	k	j	h	i
j	k	h	l	i	m	j
k	j	l	h	m	i	k
l	i	k	m	h	j	l
m	h	i	j	k	l	m

$\circ$	s	t	u	v	w	x
s	v	x	w	s	u	t
t	u	v	s	t	x	w
u	t	w	x	u	s	v
v	s	t	u	v	w	x
w	x	u	t	w	v	s
x	w	s	v	x	t	u

- *¿Los grupos anteriores son isomorfos?*
  Si la respuesta es afirmativa
  ¿Cómo sabes que son isomorfos?
  ¿Hay otra manera de saberlo con certeza?
  Si la respuesta es afirmativa
  ¿Hay alguna que te parezca más convincente?
  Si la respuesta es afirmativa
  ¿Cuál? ¿Por qué?
- *¿Cuál podría ser un isomorfismo entre ellos?*
  Si propone alguno
  ¿Cómo sabes que es un isomorfismo?
  ¿Podría haber otro?
  ¿Cómo lo sabes?
  Si no
  ¿Cómo lo sabes?

Cabe mencionar que el empleo de tablas para indagar sobre el razonamiento de los estudiantes, ya fue empleado desde el cuestionario piloto, el cual tuvo su primera inspiración en la lectura de Leron, Hazzan y Zazkis (1995) y posteriormente Lajoie (2000).

En capítulo 4 se presenta el instrumento de entrevista completo así como su descripción.



CAPÍTULO 4

Análisis de las entrevistas y resultados

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados obtenidos de la entrevista realizada a cinco estudiantes de Licenciatura en Matemáticas; todos ellos ya habiendo cursado Álgebra Moderna I y al momento de la entrevista cursaban Álgebra Moderna II. Tres de ellos, Miguel, Rodolfo y Víctor son estudiantes de la escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN; los otros dos, Alejandro y Diana son estudiantes de la Facultad de Matemáticas de la UNAM.

A continuación presentamos el instrumento de entrevista empelado y su descripción:

Las preguntas ***1*** *al* ***6*** *son las mismas que constituían el cuestionario de selección* (*segundo cuestionario*). *El emplearlas nuevamente para la entrevista tenía la finalidad de profundizar más en la información obtenida de las respuestas de los cinco estudiantes en el cuestionario, aclarar algunos de los términos utilizados, los ejemplos, entre otras cosas*.

1. Las afirmaciones que se presentan a continuación fueron hechas por estudiantes que habían tomado un curso de Álgebra moderna. Para cada una, señala si estás de acuerdo, en desacuerdo o parcialmente de acuerdo. Explica por qué.

***i*)** Que dos grupos sean isomorfos significa que bajo ciertas reglas son equivalentes.

***ii*)** Dos grupos son isomorfos si existe una función biyectiva de uno al otro que preserve la misma estructura de grupo.

***iii*)** Dos grupos isomorfos son simplemente grupos del mismo orden.

***iv*)** Que dos grupos sean isomorfos significa que son similares.

2. Para ti, ¿qué significa que dos grupos sean isomorfos?

3. ¿Cómo explicarías a un estudiante que toma su primer curso de Álgebra moderna lo que significa que dos grupos NO sean isomorfos? Cita al menos un ejemplo con el que apoyarías tu explicación.

4. Observa la siguiente tabla del grupo *G* y da un ejemplo de otro grupo *G´* que sea isomorfo a *G*. Justifica tu respuesta.

$*$	q	r	s	t
q	s	t	q	r
r	t	s	r	q
s	q	r	s	t
t	r	q	t	s

5. Supón que se tienen dos grupos G y G^*. Para cada una de las afirmaciones siguientes, indica si es Verdadera o Falsa. Justifica tu respuesta.

***i*)** *G* es isomorfo a G^* si ambos son conmutativos.

***ii*)** *G* y G^* son isomorfos si sus elementos y sus operaciones son idénticamente iguales.

***iii*)** Si *G* y G^* no tienen el mismo orden, entonces no son isomorfos.

***iv*)** Si *G* es un subgrupo de G^*, G^* es isomorfo a *G*.

6. Da un ejemplo de grupos isomorfos. Argumenta tu respuesta.

*La intención de emplear el tipo de preguntas que solicitan la explicación o algunos consejos a un(a) amigo(a) o compañero(a) estudiante sobre algún tópico particular, tiene la finalidad de aportar información relacionada con las definiciones personales o reconstrucciones de las mismas y no la simple definición formal, la cual pudiera haber sido aprendida de manera mecánica; tal es el caso de las preguntas **7**, **8** y **9***. Su diseño se basa en las preguntas empleadas por Leron, Hazzan y Zazkis (1995) y Lajoie (2000) en sus respectivas investigaciones.

7. ¿Cómo explicarías grupos isomorfos a un estudiante quien toma su primer curso de Álgebra Moderna?

8. Si tuvieras que dar algunos consejos a un(a) amigo(a) a fin de determinar si dos grupos son o no isomorfos, ¿cuáles serían esos consejos?

9. ¿Cómo explicarías isomorfismo de grupos a un estudiante quien toma su primer curso de Álgebra Moderna?

- ¿Cómo procedes para construir un isomorfismo?
- ¿El isomorfismo es único?

*Otro tipo de preguntas solicitaba la opinión del estudiante con relación a una idea expuesta por una tercera persona, con el fin de obtener a partir de estas una variedad de concepciones relacionadas con las nociones involucradas; las preguntas **10** y **11** son de este tipo. Fue de interés preguntar del caso en que no hay isomorfismo ya que no suele ser común y valdría la pena averiguar cuál es el proceder del estudiante ante esa situación. El caso particular de* $(\Re,+)$ *y* $(Q,+)$ *(pregunta **11**) fue manifestado por un estudiante cuando se le solicitó un ejemplo de grupos isomorfos en el cuestionario, interesa saber el porqué de esa respuesta y en general obtener información de los cinco estudiantes participantes respecto a la interpretación del cuantificador existencial involucrado en la definición formal de grupos isomorfos y si ello pudiera ser causa de alguna dificultad para los estudiantes; también, pudiera resultar que, como evidenció Lajoie (2000) algunos de los estudiantes no sean capaces de determinar si dos grupos son o no isomorfos cuando la función (aplicación) no les es dada.*

10. El siguiente extracto (en negrita) que se te presenta a continuación fue la respuesta dada por un estudiante ante la siguiente pregunta: *¿Por qué no hay isomorfismo entre los grupos* (A,Δ) *y* $(B,\circ)$*?, donde* $A=\{f,g,h,i\}$ y $B=\{j,k,l,m\}$. Explica tu respuesta.

Δ	f	g	h	i
f	h	i	f	g
g	i	h	g	f
h	f	g	h	i
i	g	f	i	h

$\circ$	j	k	l	m
j	k	m	j	l
k	m	l	k	j
l	j	k	l	m
m	l	j	m	k

"***Definiendo la función*** $\varphi : A \to B$ ***tal que*** $f \mapsto j, g \mapsto k, h \mapsto l, i \mapsto m$ ***. Observamos que*** $\varphi(f \Delta i) = \varphi(g) = k$ ***no es igual a*** $\varphi(f) \circ \varphi(i) = j \circ m = l$***. Así que no hay isomorfismo entre A y B***".

- ¿Cuál es tu opinión al respecto?
  ¿Estás de acuerdo o en desacuerdo?
  ¿Por qué?
  - Si estás en desacuerdo:

  ¿Cómo procederías para demostrar que no hay isomorfismo entre esos dos grupos?

11. El siguiente extracto (en negrita) que se te presenta a continuación es la opinión que tiene un estudiante respecto a los grupos $(\Re, +)$ y $(Q, +)$:

"***Los grupos*** $(\Re, +)$ ***y*** $(Q, +)$ ***no siempre son isomorfos. Hay que decir que depende de la aplicación (función) que se dé***".

- ¿Estás de acuerdo?, ¿en desacuerdo? o ¿parcialmente de acuerdo? Argumenta tu respuesta.

*El tipo de ejercicios propuestos a los estudiantes eran en dos contextos, los grupos (finitos) presentados a partir de sus tablas de operación (**ejercicio 12**) y en otro posiblemente más conocido y trabajado por ellos (**ejercicio 13**). Referente a las preguntas que constituyen el ejercicio 12, como ya se comentó en la sección 3.2.4, su diseño se basó en las investigaciones de Leron, Hazzan y Zazkis (1995) y Lajoie (2000). Por otra parte, la idea para la elaboración de las preguntas que constituyen el ejercicio 13 fue tomada de Lajoie (2000), por la particularidad de los conjuntos* A_1 *y* A_4*, donde al primero quizá sea rechazado a ser grupo por considerar que no posee elemento identidad usual; mientras que el segundo no lo es, pues no es cerrado. Además resultará interesante el conocer la opinión de los estudiantes respecto a que pueda existir más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos.*

12. A continuación se te presentan dos tablas de operación de grupos:

$G = \{h, i, j, k, l, m\}$, con la operación $*$ y $G' = \{s, t, u, v, w, x\}$, con la operación $\circ$

$*$	h	i	j	k	l	m
h	m	j	i	l	k	h
i	l	m	k	j	h	i
j	k	h	l	i	m	j
k	j	l	h	m	i	k
l	i	k	m	h	j	l
m	h	i	j	k	l	m

$\circ$	s	t	u	v	w	x
s	v	x	w	s	u	t
t	u	v	s	t	x	w
u	t	w	x	u	s	v
v	s	t	u	v	w	x
w	x	u	t	w	v	s
x	w	s	v	x	t	u

- ¿Los grupos anteriores son isomorfos?
  Si la respuesta es afirmativa
  ¿Cómo sabes que son isomorfos?
  ¿Hay otra manera de saberlo con certeza?
  Si la respuesta es afirmativa
  ¿Hay alguna que te parezca más convincente?
  Si la respuesta es afirmativa
  ¿Cuál? ¿Por qué?
- ¿Cuál podría ser un isomorfismo entre ellos?
  Si propone alguno
  ¿Cómo sabes que es un isomorfismo?
  ¿Podría haber otro?
  ¿Cómo lo sabes?
  Si no
  ¿Cómo lo sabes?

13. A continuación se te presentan cinco conjuntos con sus respectivas operaciones, ¿cuáles de entre ellos son grupos isomorfos?

$A_1 =$ El conjunto $\{[2],[4],[6],[8]\} \subset Z_{10}$, con la multiplicación módulo 10.

$A_2 = \{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\} \subset S_4$, con la composición de permutaciones.

$A_3 = \{1, i, -1, -i\}$, con la multiplicación.

$A_4 =$ El conjunto constituido de las tres reflexiones de un triángulo equilátero y de la identidad, con la composición de transformaciones.

$A_5 = \{[1],[2],[3],[4]\} = Z_5^*$, con la multiplicación módulo 5.

- ¿Cómo sabes que son isomorfos?
  ¿Cuál podría ser un isomorfismo entre ellos?
  ¿Cómo sabes que es un isomorfismo?
  ¿Podría haber otro?
  ¿Cómo lo sabes?

Finalmente, un último ejercicio, también tomado de Lajoie (2000), resultó de interés al analizar las respuestas de los estudiantes a la pregunta 5 iv) del cuestionario de selección, donde la mayoría de los estudiantes indican que es falso que un grupo pueda ser isomorfo a alguno de sus subgrupos; para abordar este asunto se considera el caso del grupo cíclico infinito, esperando obtener quizá una respuesta diferente. Aunque también la idea de que un subgrupo de un grupo es menor (en cuanto a cardinalidad), pudiera impedir a los estudiantes tratar de analizar el caso a profundidad.

14. A continuación se te presenta el siguiente grupo: $G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in Z\}$

- ¿Puede G tener un subgrupo al cual sea isomorfo? Argumenta tu respuesta.

  Si sí

- ¿Cuál podría ser un isomorfismo entre ellos?
  ¿Cómo sabes que es un isomorfismo?

  Si no

- ¿Cómo lo sabes?

(Implícitamente, ¿un grupo puede ser isomorfo a alguno de sus subgrupos?, ¿Siempre?, ¿Nunca?, ¿Tal vez?)

Las entrevistas se llevaron a cabo en condiciones favorables en la Biblioteca central del CINVESTAV-IPN. Para un mejor análisis de cada una de las entrevistas, estas fueron audio-grabadas y transcritas. En este capítulo presentamos únicamente las principales dificultades que fueron encontradas en los estudiantes participantes en esta investigación, mismas que están asociadas con el entendimiento del concepto isomorfismo de grupos.

4.1 Algunas dificultades asociadas con el concepto isomorfismo de grupos

4.1.1 Dificultad en dar una interpretación correcta a la definición formal de grupos isomorfos

Para Diana, "dos grupos que son isomorfos tienen que cumplir ciertas propiedades en común". Esta concepción que posee la estudiante involucra la idea de la existencia de una (única) función biyectiva de un grupo al otro, única porque los elementos correspondientes a cada uno de los grupos se deben comportar igual (bajo su operación). Las propiedades a las que se refiere están relacionadas con los "parecidos" que ella observa entre los elementos, mismos que le permiten establecer una relación biunívoca entre ellos (el isomorfismo). La interpretación dada a la expresión "que se preserve la misma estructura de grupo" la asocia con esas "propiedades que comparten" los grupos que son isomorfos, de entre ellas, *el orden del grupo*, que considera suficiente para concluir que dos grupos son isomorfos.

> **E:** […] para ti, ¿qué significa que dos grupos sean isomorfos? […].
>
> **D:** Sí, bueno, que entre los grupos exista una función biyectiva y ¿lineal?, no creo que ahí vaya, y que asocie a los mismos relacionándolos con propiedades comunes que existan entre ellos […].

Cuando se discute sobre el enunciado 5. (i) del cuestionario donde se planteaba que un grupo G es isomorfo a otro grupo G' si ambos son conmutativos, tanto Diana como Miguel dicen que el enunciado es falso; si bien ambos pudieran estar considerando que si dos grupos son conmutativos no es condición suficiente para que sean isomorfos, es de interés observar los argumentos que cada uno utiliza. Diana dice que dados dos grupos, ambos conmutativos, "uno de ellos puede tener elemento identidad y el otro no necesariamente", por lo tanto no serían isomorfos; mientras que Miguel dice que lo que él haría para probar la falsedad de ese enunciado sería "tomar un grupo no conmutativo y hacerlo isomorfo a uno que sí es conmutativo".

La idea predominante que tiene Miguel sobre los grupos isomorfos es que ellos "poseen la misma estructura algebraica bajo cierta función"; de esta manera los grupos isomorfos son para él, grupos "equivalentes". Cabe hacer énfasis en cómo utiliza la expresión "poseen la misma estructura algebraica", la cual es de dos formas distintas; la primera está relacionada con la propiedad de homomorfismo (aunque no se refiere a ella con ese nombre) al reconocerla como una condición (regla) que debe cumplir dicha función. (La segunda se explicará más adelante.)

> **M:** Pues que sea [...] que nuestra equivalencia sea f una función que va de un conjunto A a un conjunto B, nos tomamos dos elementos de A, entonces ya definimos que $f(a+b)=f(a)+f(b)$ y la multiplicación, sea $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$ y es lo que siempre buscamos para ver si dos grupos son isomorfos.

La respuesta anterior surgió después de cuestionarle respecto a cómo explicaría isomorfismo de grupos a un estudiante quien toma su primer curso de Álgebra Moderna, ya que como se mostró en el extracto anterior, en un principio Miguel se refería a dos operaciones para que la función sea un isomorfismo cumpliéndose las siguientes reglas:

$$i)\, f(a+b)=f(a)+f(b)$$
$$ii)\, f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$$

Además, esta idea se hace mucho más evidente cuando es analizada su respuesta dada en 1. (ii) en el cuestionario cuyo enunciado dice que dos grupos son isomorfos si existe una función biyectiva de uno al otro que preserve la misma estructura de grupo.

> **M:** Ajá, sí, porque la función es biyectiva, es decir, inyectiva y sobre; además esta función preserva la misma estructura algebraica de ambos grupos, que es esto que te digo, es lo mismo sumar un grupo con los elementos y ya cuando le aplicas la función es lo mismo, y ya, cuando le aplicamos f pues ya estamos obteniendo un grupo.

Observando cómo finaliza su respuesta en el extracto anterior, podemos apreciar la otra manera con la que Miguel se refiere al isomorfismo de grupos: que estos *poseen (preservan) la misma estructura algebraica*, pero pensando en la estructura del grupo en términos de cumplimiento de los axiomas de grupo.

E: […] ¿qué significa que se preserve la misma estructura de grupo?

M: Que la suma y la multiplicación sea cerrada y que el grupo, es lo que hace que un conjunto sea grupo, que cumpla con las condiciones para ser grupo.

E: ¿Cuáles son las condiciones?

M: Que sea cerrado, que haya el elemento neutro, el inverso, para mí eso significa que se preserve la estructura de grupo.

Cuando se le solicita un ejemplo a partir del cual explique su afirmación de "que dos grupos isomorfos son similares en la estructura algebraica" que poseen, Miguel no es capaz de construirlo, mostrando dificultades con la comprensión de conceptos relacionados con el de grupos isomorfos.

E: Y para ti, ¿en que serían similares los grupos isomorfos?

M: En la estructura algebraica son similares porque es lo mismo sumar aquí que acá, bajo la función. Además, las mismas operaciones que podemos hacer en un grupo, bajo la función podemos seguir teniendo las mismas, podemos seguir operando de la misma manera y también se cumple en el otro grupo.

E: ¿Cuál sería un ejemplo de lo que estás diciendo?

M: Mmm, a ver, el 0, -1, 1 (construye una tabla cuyos encabezados son esos tres elementos) con el producto, creo que sí funciona siempre; creo que hay un teorema, no sé si sea cierto, que algún grupo de cardinalidad p, lo puedes hacer isomorfo a Z_p, para algún p.

E: Y ese, ¿es grupo?, ¿cómo estás operando?

M: No sé; con la multiplicación normal en $\Re$.

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Pero creo que no, porque tendría que estar uno de cada uno en cada línea y aquí hay puros ceros (se refiere a la segunda columna y a la segunda fila en su tabla).

E: Y, ¿por qué tendría que ser uno en cada línea?

M: Ah, no sé muy bien (hace la propuesta de otra tabla donde el operador es $+$):

$+$	-1	0	1
-1	0	-1	0
0			
1			

¡Ah, tampoco me da!

E: Pero, ¿es la suma usual?, entonces $(-1)+(-1)$ […].

M: Sería 0, ¿y éste por qué?, no, no se puede con la suma, me salgo, no es cerrado, no, olvidémoslo, me quedo acá.

En resumen, Miguel asocia la noción de isomorfismo de grupos con preservar la estructura de grupo bajo cierta función, pero no está claro qué papel juega la función.

Víctor, por su parte, dice de los grupos isomorfos que "son iguales respecto a sus propiedades algebraicas".

V: Si tienen la misma estructura algebraica […] bueno si no tienen ninguna propiedad algebraica que los distinga; son isomorfos si no tienen ninguna propiedad que dependa de la operación que los hace grupo. Entonces, algebraicamente, respecto a sus cualidades algebraicas, serían igual […].

La concepción que posee el estudiante lo lleva hacia la exploración de propiedades que le permitan, en primer lugar, determinar cuándo dos grupos NO son isomorfos a partir de encontrar alguna contradicción, es decir, que alguno de los grupos posea una propiedad (algebraica) y el otro no; sin hacer mención alguna sobre la preservación de las operaciones.

Además, durante la discusión de los cuatro enunciados de 5 y de 1. (iii), Víctor opina que no son condiciones suficientes para garantizar que dos grupos sean isomorfos, por ejemplo, que ambos sean conmutativos, que tengan el mismo orden. Sin embargo, el argumento más utilizado por él para construir un isomorfismo entre dos grupos y por lo tanto concluir que son isomorfos se basó en el cálculo del orden de los elementos, haciendo corresponder a los elementos cuyo orden era igual; al respecto, Leron, Hazzan y Zazkis (1995) dan cuenta de cómo los estudiantes participantes en su investigación proceden de esa manera. El breve extracto que se presenta a continuación es parte de la respuesta dada por Víctor durante la entrevista con relación al ejercicio 12.

V: […] voy a intentar como que la correspondencia […] vamos a ver, deben haber elementos de orden finito, entonces intento ver cuántos elementos de orden finito tiene este y ver cuántos elementos de orden finito tiene este y ya ahí intento hacerlos corresponder, por ejemplo, bueno, aquí ya sé que el elemento identidad es, vamos a ponerle (G,m) y (G',v), […] vamos a ver el h de qué orden es, entonces $h*h$ me da m, entonces es de orden dos:

$$|h|=2$$
$$|i|=2$$
$$|k|=2$$

[…] el orden es propiedad algebraica, entonces de ahí ya sospecho más que sí son y pues intento renombrarlos, a ver si los puedo hacer corresponder […] pues la identidad juega un papel algebraico importante; aparte si hubiera un isomorfismo pues preserva la identidad, aquí era la identidad $m \mapsto v$. Después los elementos de orden tres que son dos […]

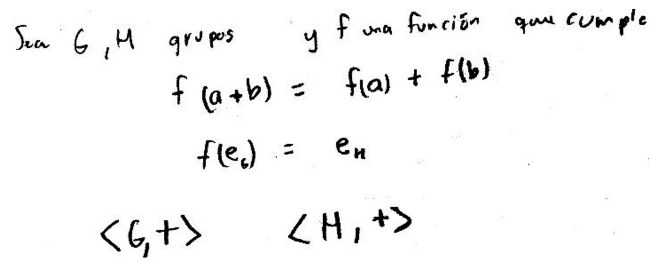
$$h \mapsto t$$
$$i \mapsto w$$
$$j \mapsto x$$
$$k \mapsto s$$
$$l \mapsto u$$
$$m \mapsto v$$

En resumen, Víctor asocia la noción de isomorfismo de grupos como algo que hace iguales a los grupos que son isomorfos, lo que preserva sus cualidades algebraicas. No menciona explícitamente la preservación de las operaciones.

Para Alejandro dos grupos son isomorfos "si existe una función biyectiva que además es un morfismo (abre la operación)". De acuerdo con el estudiante, los isomorfismos preservan la misma estructura de grupo, es decir, "todas las características del grupo", por ejemplo, el elemento identidad, el orden del grupo, los subgrupos, etc. Con esta idea, si dos grupos son isomorfos entonces bajo la función van a poseer características comunes.

E: […] para ti, ¿qué significa que dos grupos sean isomorfos?

A: […] cuando yo puedo formar una biyección entre dos grupos, que cumple dos condiciones; que la función manda al elemento neutro en un elemento neutro al otro grupo y que cumple esta característica, la función, digamos que abre la operación, esto es en una notación aditiva.



E: ¿Te refieres a la propiedad de morfismo?

A: Sí, porque puede ser una biyección pero necesita ser un morfismo también, ¿no?; porque si no fuera morfismo, entonces no se puede hacer el isomorfismo; entonces, que fuera un morfismo y que fuera una biyección ese morfismo […].

Para Alejandro los grupos isomorfos son *similares*, por ejemplo, en "el orden" y en "los subgrupos" que tienen; sin embargo, concluir a partir del orden de los grupos o que sean conmutativos no es válido; en particular, utiliza como contraejemplo a los grupos $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ y $Z_2 \oplus Z_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ ya que ambos son de orden cuatro (además conmutativos) y no son isomorfos. El estudiante señala que la diferencia que hay entre dos grupos isomorfos es "la manera de nombrar a los elementos"; aunque al principio duda si se puede decir lo mismo de las operaciones, concluye finalmente que estas también pueden ser distintas.

Cuando se discute respecto al ejercicio 4 del cuestionario, donde es solicitado un ejemplo de un grupo G' isomorfo al grupo G dado a partir de su tabla de operación, es interesante el proceder del estudiante: él inicia con la observación de las *características* de G, donde de antemano ya se sabe que G es grupo. Posteriormente identifica s como elemento identidad de G, ya que como él mismo dice, "deja fijos a los otros elementos al operarse con este". Sin embargo parece considerar posible que un grupo pueda tener más de un elemento neutro, ya que al observar la tabla dice, "podemos ver si tiene más neutros pero yo digo que no, por ejemplo; no, no tiene más neutros porque si no, aquí habría una q repetida".

En la resolución de este ejercicio inicia explorando el comportamiento de los elementos al operarse consigo mismos, observando que cada elemento es su propio inverso. Como no logra concluir algo basándose en sus observaciones, se le proporciona su respuesta del cuestionario donde dijo que "los únicos grupos de orden 4 son Z_4 y $Z_2 \oplus Z_2$". Dudando de esa respuesta dice que él estaba pensando en proponer a $(Z_4, \cdot_4)$, pero que no veía cómo pudieran ser isomorfos.

Cabe aclarar que $(Z_4, \cdot_4)$ no es grupo. Finalmente propone $G' = Z_2 \oplus Z_2$, ya que observa que en dicho grupo también se cumple que cada elemento es su propio inverso, identifica al elemento identidad de G'; en seguida procede a construir correspondencia entre los elementos. Bajo f manda el neutro de G en el neutro de G' y para los tres elementos restantes no parece haber alguna manera en particular para la correspondencia, debido posiblemente a lo que él había observado, que todos cumplían que eran sus propios inversos.

$$\left.\begin{array}{l} s = tt \\ s = rr \\ s = qq \end{array}\right\}$$

$$t = st = rq$$

$$(0,1)+(0,1)=(0,0)$$
$$(1,0)+(1,0)=(0,0)$$
$$(1,1)+(1,1)=(0,0)$$

$$\begin{cases} f(a) = s \\ f(b) = q \\ f(c) = t \\ f(d) = r \end{cases}$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{\underset{a}{\overset{s}{(0,0)}}, \underset{b}{\overset{q}{(0,1)}}, \underset{c}{\overset{t}{(1,0)}}, \underset{d}{\overset{r}{(1,1)}}\}$$

Alejandro ahora procede a verificar que f sea morfismo; lo hace únicamente para un caso, tomando un par de elementos diciendo que es posible verificar que para los demás también se cumple. El último paso que realiza es determinar que f es efectivamente biyectiva, en concordancia con la idea que él tiene de grupos isomorfos.

> **A:** […] Ahora, hay que ver que cumpla todas estas cosas, que f de quién, de a más b es igual a $f(a)$ más $f(b)$:
>
> $$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
> $$= q = s + q$$
> $$= f(a) + f(b)$$
>
> […] bueno, habría que ver con todos los casos posibles, ¿no?; o sea, yo lo daría así porque son poquitos elementos pero ya en un grupo más grande pues ya está difícil porque tendrías que ver todos los casos […] y luego habría que ver que es inyectiva y que es suprayectiva.
>
> **E:** Y, ¿sí cumple con ello?
>
> **A:** Que es suprayectiva, sí, porque lo definimos uno a uno y que es inyectiva pues también porque el único que puede ir al cero es el cero.

Para Alejandro, dos grupos son isomorfos si existe un homomorfismo biyectivo entre ellos. Él es uno de los estudiantes junto con Rodolfo (de él hablaremos más adelante), quienes se refieren a los grupos isomorfos de esta manera. En cuanto a Alejandro pudimos observar que para el caso de grupos finitos y en el contexto de tablas de operación, en particular los grupos $(G,*)$ y $G' = Z_2 \oplus Z_2$ (ejercicio 4), es capaz de construir sin mayor dificultad un isomorfismo entre ellos. Sin embargo, en el ejercicio 12 donde se presentaban dos grupos de orden 6 (véase la sección 4.1.2) también dados a partir de sus tablas de operación, el estudiante presenta dificultades para determinar si los grupos en cuestión son o no isomorfos.

El origen de la dificultad si bien no está en desconocer el "procedimiento" para averiguar si dos grupos son o no isomorfos, sí pudiera deberse a la idea intuitiva que tiene de ellos. Si recordamos, Alejandro dice de los grupos isomorfos que "preservan todas las características de grupo". En este caso él recurre al cálculo del orden de los elementos, ya que si $(G,*)$ y $(G',\circ)$ (ejercicio 12) son isomorfos tendrían la misma cantidad de elementos de un orden dado, lo cual le permitiría hacerlos corresponder como lo hizo en el ejercicio 4, y estar en condiciones de construir un isomorfismo. Para el caso del ejercicio 12 al observar que hay más de una manera de hacer corresponder los elementos no puede continuar y no logra concluir algo con relación a $(G,*)$ y $(G',\circ)$.

En resumen, Alejandro se refiere a isomorfismo de grupos como una función biyectiva que además es un morfismo. Sin embargo, aun conociendo la definición el estudiante presentó dificultades al utilizarla cuando le fue solicitado demostrar si dos grupos eran o no isomorfos y también al proponer sus propios ejemplos.

Finalmente, la concepción que tiene Rodolfo respecto a los grupos isomorfos es que ellos son "estructuras iguales" o "son similares estructuralmente", que "poseen las mismas propiedades (estructurales)", como el ser abelianos, cíclicos, etc. Rodolfo también se refiere a los grupos isomorfos como "iguales salvo el nombre de los elementos y salvo las operaciones"; así, la única diferencia entre dos grupos isomorfos es la manera en que son nombrados.

> **R:** […] formalmente pues se dice que dos grupos son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos, es decir, una función biyectiva tal que o que es un homomorfismo biyectivo, que se le llama isomorfismo, así es la definición, así formal […] Esta definición, por supuesto, se dedujo a partir de estar checando cómo se comportaban estos grupos y entonces a partir de aquí, gracias a esas ideas de que son iguales, te digo, salvo que este se llama aquí a y este

> aquí b, entonces a partir de ahí […] primero se vio como que estos son iguales y a partir de ahí […] no hay otra manera de expresar que sean iguales, salvo los elementos, ¿cómo lo dices?, pues mediante mapeos, mediante funciones.

Otras expresiones utilizadas por Rodolfo al hablar de los grupos isomorfos fueron las siguientes: “son estructuralmente una misma entidad”, “son idénticos salvo que se llaman diferente”, “uno es idénticamente el otro salvo los nombres de los elementos y salvo las operaciones”, “son estructuras iguales”, “son copias, lo que los cambia es la manera de nombrarlos” y si dos grupos son isomorfos “podemos obtener un grupo a partir del otro tan solo al intercambiar sus elementos vía el isomorfismo”.

Además, cuando se analiza el enunciado 5. (i) del cuestionario, el estudiante expresa que no hay condiciones (haciendo referencia a las propiedades estructurales) a partir de las cuales se pueda concluir que dos grupos sean isomorfos, por ejemplo, que ambos sean conmutativos, que sean cíclicos, de un orden dado, etc. (“su tipo de estructura”). Al igual que Alejandro, Rodolfo cita la definición formal, por ejemplo en el enunciado 1. (ii) del cuestionario dice que esa es la definición que es “enseñada”, que “dos grupos son isomorfos si existe una función biyectiva de uno al otro que preserve la misma estructura de grupo (propiedad de homomorfismo)”.

> **R:** No hay, la definición solamente […] no he visto en algún libro que diga que G sea isomorfo a G^* si cumple tal propiedad, la definición es la rigurosa […] que exista la biyección y que sea un homomorfismo de grupos y ya, no hay que sea conmutativo […] que tenga el mismo orden, le puedes poner muchísimas hipótesis y claramente siempre vas a encontrar un ejemplo […] aunque tú le pongas todas las propiedades, que sea cíclico, que sea finito, eso te diría, ¡ah, como que sí!, como que a partir de ahí decir ese “como que sí”, pero ese “como que sí” no te garantiza que en efecto sean, más, salvo que encuentres la biyección.

La idea de que los grupos isomorfos son “iguales”, “idénticos”, no parece ser tan clara para el estudiante en el caso en que los grupos son de cardinalidad infinita; ahí no parece ser tan visible el hecho de que “se pueda obtener un grupo a partir del otro tan solo al intercambiar sus elementos”, como lo fue en el caso de los grupos de orden finito. Rodolfo destaca tres pasos a seguir a partir de la definición formal para averiguar si dos grupos son isomorfos, expuestos de manera parecida a los que enuncia Fraleigh (2003, pp. 30-31), de los cuales se hablará en la siguiente sección 4.1.2.

En resumen, Rodolfo se refiere a isomorfismo de grupos como una función biyectiva que preserva estructura de grupo, es decir, que $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$. Sin embargo, aun conociendo la definición presentó, al igual que Alejandro, dificultades al utilizarla cuando le fue solicitado demostrar si dos grupos eran o no isomorfos y también al plantear sus propios ejemplos.

Comentarios

La imagen formada por algunos de los estudiantes les impide dar una interpretación correcta a la definición de grupos isomorfos. Por ejemplo, Diana dice de estos que tienen que cumplir ciertas propiedades comunes, es decir, que "los elementos deben comportarse igual (bajo su operación)", por lo tanto, debe existir una única manera de relacionarlos. Además, con esta concepción la estudiante en ningún momento ve necesario verificar la preservación de las operaciones; como se mostró en el análisis de esta sección, ella se concentra en establecer relaciones exclusivamente entre los elementos de los grupos.

La interpretación dada a la expresión con la que suele referirse a los grupos isomorfos, "preservan la misma estructura algebraica" es utilizada de manera distinta por los estudiantes en esta investigación. Por ejemplo, Miguel hace uso de ella para referirse simultáneamente a la propiedad de homomorfismo y a los axiomas de grupo; Diana la asocia con las propiedades comunes que comparten los elementos cuando dos grupos son isomorfos, Alejandro se refiere a las propiedades (algebraicas) que comparten los grupos isomorfos.

La imagen desarrollada por Víctor con relación a los grupos isomorfos como "iguales respecto a sus propiedades algebraicas" no requiere de la exploración de la definición formal de grupos isomorfos. Por ejemplo, en los ejercicios que involucran grupos de orden finito en el contexto de tablas de operación, el estudiante se concentra precisamente en explorar las propiedades de los grupos, principalmente para encontrar una contradicción entre ellos y concluir que no son isomorfos mediante el cumplimiento de una de ellas en un grupo y en el otro no. Si bien tanto Víctor como los demás estudiantes reconocen que no hay manera de determinar que dos grupos son isomorfos a partir de saber, por ejemplo, que los grupos tengan el mismo orden, o que sean conmutativos, podemos observar el procedimiento empleado por Víctor para construir un isomorfismo entre $(G,*)$ y $(G',\circ)$ en el ejercicio 12 (p. 114), donde a partir del orden de los elementos (propiedad algebraica) puede construir una correspondencia biunívoca (un isomorfismo) y concluir que los grupos son isomorfos, sin averiguar la propiedad del morfismo.

Vinner y Dreyfus (1989, p. 356) señalan que la imagen que desarrolla el estudiante es “el resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto”. En el caso de los estudiantes que entrevistamos, observamos que la mayoría presentaron dificultades para proponer y justificar por qué los grupos que proponían eran ejemplos de grupos isomorfos o grupos no isomorfos.

4.1.2 Dificultad para demostrar formalmente que dos grupos son isomorfos

Como se describió en la sección 4.1.1, la imagen desarrollada por Diana con relación a los grupos isomorfos está asociada con la existencia de una única función biyectiva de un grupo al otro. Para Diana, los grupos isomorfos “comparten propiedades comunes”, que a su vez se relaciona con los elementos “parecidos” que ella observa entre los grupos isomorfos.

Cuando se le pregunta sobre los consejos que daría a un(a) amigo(a) para determinar si dos grupos son o no isomorfos, Diana dice que es importante observar primero si los grupos tienen la misma cardinalidad, ya que de no ser así, no serían isomorfos; y posteriormente, construir la función biyectiva de un grupo al otro, el isomorfismo.

> **D:** Checar primero que la función es biyectiva, mmm, y la cardinalidad, yo creo que es importante la cardinalidad.

En el ejercicio 12 donde se presentaban dos grupos de orden 6 dados a partir de sus tablas de operación, como una primera respuesta, basándose en el comportamiento de los elementos, Diana dice que los grupos G y G' no son isomorfos. Podemos observar cómo ella implícitamente piensa en la correspondencia biunívoca “elemento a elemento” según su posición en las tablas.

> **D:** […] pero mira, aquí en esta v y en esta m, perdón, acá, ahí como que ya se rompe ese isomorfismo que queremos ver.

$*$	h	i	j	k	l	m
h	m	j	i	l	k	h
i	l	m	k	j	h	i
j	k	h	l	i	m	j
k	j	l	h	m	i	k
l	i	k	m	h	j	l
m	h	i	j	k	l	m

$\circ$	s	t	u	v	w	x
s	v	x	w	s	u	t
t	u	v	s	t	x	w
u	t	w	x	u	s	v
v	s	t	u	v	w	x
w	x	u	t	w	v	s
x	w	s	v	x	t	u

Posteriormente la estudiante corrige y dice que sí son isomorfos, apoyada de la idea de que los grupos isomorfos tienen el mismo número de elementos y que en realidad, la correspondencia no es "elemento a elemento", sino más bien tendría que construirse basándose en las "relaciones" que hay entre los elementos bajo su operación.

> **D:** […] ¡Ah, espérate!, es que estoy pensando otra cosa, no me había dado cuenta de eso, ¿o sí? A ver, ¡no, estoy mal!, si son isomorfos porque tienen la misma cardinalidad, son conjuntos isomorfos.
>
> **D:** A ver […] no pueden ir término a término porque no se cumple precisamente lo que yo te decía de las propiedades estas que te he estado mencionando; no tienen que ir elemento a elemento […].

A continuación se muestra el procedimiento empleado por Diana a fin de construir la correspondencia biunívoca entre los elementos de ambos grupos, centrándose más en la búsqueda de "parecidos" entre ellos, sin llegar a construir, en realidad, un isomorfismo.

> **D:** […] la relación que existe aquí, ¡mira!, éste, h compuesto con él mismo, me manda a m que es el elemento 6, $h*i$ me manda a l, que es el segundo, o sea, quiero hacer como la asociación de término a término, pero con esa relación acá abajo […] lo que quiero ver es que "s compuesto o bueno, bolita, con algo" (refiriéndose al operador arbitrario $\circ$ de G') me mande al último, o sea, así como lo está haciendo aquí (se refiere a $h*h$ que lo manda al sexto elemento ubicado en $G=\{h,i,j,k,l,m\}$, es decir, al elemento m), o sea, aquí s con éste, que me manda al último, o sea, así sí podría hacer la asociación del isomorfismo que yo digo que hay:

$$
\begin{array}{lcl}
\sigma : G \to G' & & \\
h*h \to m & , & s\circ w \to x \\
h*i \to l & , & s\circ x \to w \\
h*j \to k & , & s\circ s \to v \\
\ldots & & \ldots.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
G=\left\{\overset{1}{h},\overset{2}{i},\overset{3}{j},\overset{4}{k},\overset{5}{l},\overset{6}{m},\right\} \\[2ex]
G'=\left\{\overset{\bar{1}}{s},\overset{\bar{2}}{t},\overset{\bar{3}}{u},\overset{\bar{4}}{v},\overset{\bar{5}}{w},\overset{\bar{6}}{x}\right\}
\end{array}
$$

[…] Dada la operación $*$ en G manda el elemento $1 \to 6,\ 2 \to 5,\ 3 \to 4, \ldots$ y el isomorfismo con G' se relaciona con la operación $\circ$ al mandar al elemento $\bar{1} \to \bar{6},\ \bar{2} \to \bar{5}, \ldots$ (como en el anterior).

Dada la operación * en G manda el elemento 1 – 6, 2 – 5, 3 – 4, - - -
y el isomorfismo con G'' se relaciona con la operación ∘ al
mandar el elemento $\bar{1} - \bar{6}$, $\bar{2} - \bar{5}$. --- (como en el anterior)

Nuevamente, en el ejercicio 13 donde se le presentan a la estudiante cinco conjuntos con sus respectivas operaciones y se le pregunta cuáles de entre ellos son grupos isomorfos, Diana concluye que todos son grupos y además que todos son isomorfos entre sí, ya que tienen la misma cardinalidad. Además, es interesante observar cómo procede a construir lo que ella considera como “un isomorfismo” para ciertos pares de esos grupos, respectivamente; es interesante por las “relaciones” que ella parece apreciar entre los elementos de esos conjuntos y que le permiten construir esa “función biunívoca” requerida.

E: Bien, entonces ¿cuáles de entre ellos son isomorfos?

D: Pues todos son isomorfos entre todos porque tienen la misma cardinalidad, para empezar; por ejemplo, un isomorfismo entre A_3 y A_5 sería como el que te decía hace un rato, elemento a elemento tal cual están ordenados en las tablas, ahí sí.

$A_3 = \{1, i, -1, -i\}$, con la multiplicación.

*	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	1

$A_5 = \{[1], [2], [3], [4]\} = Z_5^{\,*}$, con la multiplicación módulo 5.

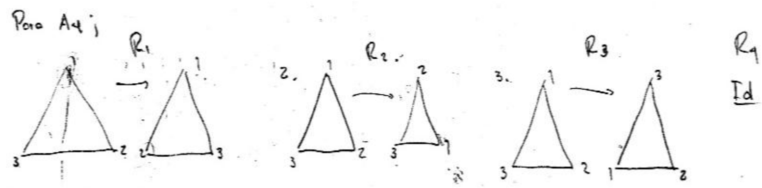
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	6

[…] Si consideráramos ahora a A_3 con A_4 el isomorfismo sería, a ver […] es el que manda a cada elemento de A_3 con su respectiva reflexión; ésta, por ejemplo, que es la que me está dejando los fijos, la mandaría con la que me manda el triangulito al mismo triangulito; ésta, la que me manda, ya sea a ésta o ésta, cualquiera […] a ver, es la que manda cada elemento con la respectiva reflexión, es decir, la identidad en A_3 manda a la identidad en A_4; y […] ésta, por ejemplo, ¿cómo llamarla?, la que me manda a su negativo o a su contrario con, sí, la operación en A_3 que da el elemento negativo, mandarlo con la reflexión en […] la reflexión, ésta, o sea que me lo cambia al otro lado, con la reflexión, ¿cómo le pongo?, las nombraré como R_1, R_2, R_3, R_4 […]

$A_3 = \{1, i, -1, -i\}$, con la multiplicación.

$A_4 =$ El conjunto constituido de las tres reflexiones de un triángulo equilátero y de la identidad, con la composición de transformaciones.

*	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	1



E: ¿Cómo sabes que es un isomorfismo?

D: Pues estoy tratando de poner, ¡mira!, por ejemplo, ésta, que le asocié al 1, bueno, el $i \cdot 1$ me lo deja fijo con éste, ¿no?; y las otras las estoy asociando como la cosa que cambia, ¿no?, como el vértice que me está cambiando, o sea, lo estoy asociando como con un elemento de esos, ajá. También, A_1 es isomorfo con A_5 y A_3, igual de la misma forma como te digo, término a término.

[…] En el caso de A_3 con el A_2, pues primero, a los que me los deja como la identidad con el 1 al i, a los que me cambia, el primero con el último, que es éste.

Isomorfismo entre:
A_3 con A_2 ;

$1 \longrightarrow (1)$
$i \longrightarrow (14)(23)$
$-1 \longrightarrow (12)(34)$
$-i \longrightarrow (13)(24)$

[…] En esa asociación, el i es el que me cambia primero y último, uno y cuatro, ajá, que es éste, uno-cuatro con dos-tres, ajá; después -1 es el que me cambia el uno por el dos; y el otro es el que me cambia el uno por el tres. Ahí estoy asociando a cada elemento del renglón como cada elemento de, también de la columna que tengo aquí:

*	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	1

> […] bueno; en este caso, éste lo asocio con el que me los deja igual (se refiere al 1); al uno, dos, tres, cuatro; el que mueve al primero y al último que es uno y cuatro, entonces que me deja como cuatro, dos, tres, uno, ajá, es éste (se refiere a i); y a éste, al que me cambia al uno y al dos (se refiere a -1); y éste, pues no estoy muy segura pero fue el que me quedó ahí (se refiere a $-i$).
>
> **E:** Entonces los vas relacionando elemento a elemento, como dices, tomando en cuenta su comportamiento.
>
> **D:** Sí, busco una relación entre ellos.

La concepción de Víctor respecto a los grupos isomorfos como grupos "iguales con relación a sus propiedades algebraicas", es decir, que "no tengan ninguna propiedad algebraica que los distinga", lo llevan precisamente a la exploración y análisis de éstas, buscando principalmente entre los grupos alguna propiedad que cumpla uno de ellos y el otro no, para demostrar que no son isomorfos, preferentemente más que demostrar que lo son; notamos esto claramente cuando se le solicitan algunos consejos que daría a un(a) amigo(a) a fin de determinar si dos grupos son o no isomorfos.

> **V:** Pues, primero intentar ver si no son, ¿no?, o sea, encontrar alguna propiedad algebraica que se pueda sospechar que son distintos, ¿no?, y ya, si ve que en todas coincide, pues intentar, o sea, pues como ya hizo muchos ejemplos, intentar dar el isomorfismo.

En el ejercicio 13 Víctor concluye erróneamente que dos conjuntos A_1 y A_2 no son grupos. Del primero dice que no posee elemento identidad, ya que $[1]$ no está y del segundo realiza de manera incorrecta un cálculo por el cual dice que no es conmutativo; agrega que además no posee inversos. De A_4 concluye correctamente que no es grupo y de A_3 y A_5 que sí lo son.

Para averiguar si A_3 y A_5 son isomorfos o no, Víctor procede a calcular el orden de los elementos de ambos grupos; identifica que para cada uno hay dos elementos de orden 4, uno de orden 2 y uno de orden 1 y que como ambos son conmutativos, concluyendo que son isomorfos.

> **V:** […] vamos a ver los órdenes de los elementos, que es lo más fácil que se puede averiguar, con la multiplicación, $|-1| = 2$, porque la identidad aquí es 1 […] a ver este tiene orden cuatro (calcula el orden de todos los elementos en ambos grupos) […] este tiene dos elementos de orden 4, uno de orden 2 y uno de orden 1, que es la identidad y este igual y como ambos son conmutativos, aparte son grupos finitos conmutativos y tienen el mismo número de elementos del mismo orden, pues ya podría decir que son isomorfos porque hay

un teorema que dice eso, pero también podría, yo creo que también podría dar la correspondencia haciendo corresponder, pues los de orden dos, los de orden 3.

Cuando se le pregunta al estudiante que cómo podría estar seguro de que A_3 y A_5 son isomorfos, Víctor inicia construyendo las tablas de operación de esos grupos y hace la correspondencia de los elementos de A_3 con los elementos de A_5 tomando en cuenta el orden de cada uno de ellos; observa que las tablas coinciden y concluye que son isomorfos.

V: […] de hecho no afectaría en la tabla (construye las tablas de ambos grupos):

$*$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

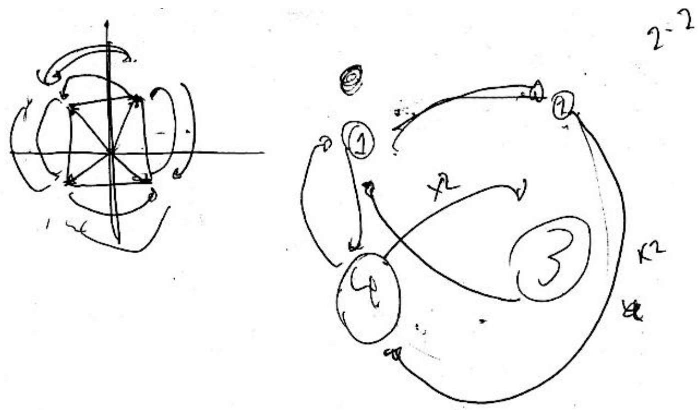
$$\bar{1} \to 1$$
$$\bar{4} \to -1$$
$$\bar{2} \to i$$
$$\bar{3} \to -i$$

$*$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

[…] vemos que coinciden las tablas.

A propósito se le pregunta a Víctor si pudiera haber otra manera de saber si son isomorfos, él recurre a representaciones gráficas de ambos grupos con el fin de buscar relaciones entre ellos.

> **E:** ¿Puede haber otra manera de saber si son isomorfos?
>
> **V:** Pues es que estas son las raíces, entonces las podríamos ver, son cuatro, entonces es un cuadrado, como las raíces, este, con la multiplicación, como en el plano complejo; sí, estas son como rotaciones; es que las dos se pueden ver así, ¿no?, estas se ven más naturalmente, como este es el i y ya sabemos que la multiplicación compleja; bueno, pues si ya tienes este, lo rotas 90° con el i o con el otro, que es el $-i$, que es igual; y el -1 sería la reflexión, así; y estas pues , igual, se podría ver así […] podemos hacer un grafo, igual, damos los elementos $1,2,3,4$, y del 1 podemos pasar al 2 […] Si las representamos con un grafo podemos ver que igual más o menos coinciden; por ejemplo, que del 2, podemos pasar a cualquier otra, pero de esta que tiene orden 1 sólo podemos pasar de la del 4 a la del 1 y al revés, entonces por ahí también se puede ver, por los órdenes, pues.



Para Miguel dos grupos son isomorfos si hay una función (regla de correspondencia) no necesariamente biyectiva tal que bajo la regla (condición) “ $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$”, se puede decir que los grupos isomorfos tienen (preservan) la misma estructura algebraica.

Además, para Miguel dos grupos pueden ser o no isomorfos “dependiendo de la función que uno proponga”; si ella no es un isomorfismo entonces se puede concluir que no son isomorfos bajo esa función, pero también uno puede proponer otra que sea un isomorfismo y entonces se puede decir que los grupos son isomorfos bajo esa función.

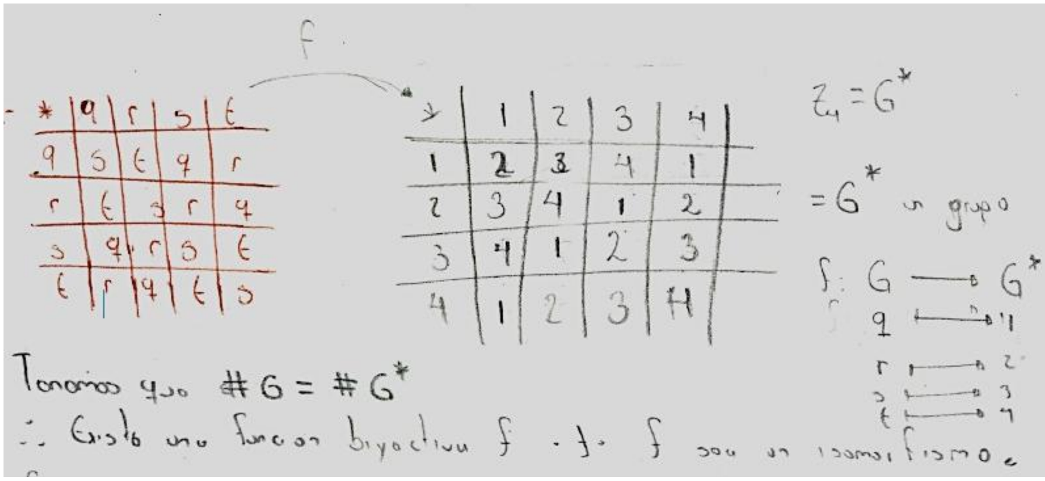
> **E:** […] ¿Qué consejos darías a un(a) amigo(a) a fin de determinar si dos grupos son o no isomorfos?
>
> **M:** El truco está en la función que uno dé, porque puede cumplir con la condición o no […] Se me ocurre como ejemplo que te agarras así como un grupo y a esa función la das como

> constante, entonces a cada $f(a)$ lo mandas a un b único, y acá tienes otro grupo y tienes su elemento b, entonces va a ser:
>
> $$f(a_i)=b$$
>
> Entonces ya al sumar, no importa a quién me tome, puede ser:
>
> $$f(a_1+a_2)=b$$
>
> […] porque a_1+a_2 tiene que estar en nuestro conjunto por ser grupo. Estoy suponiendo que hallas un grupo, eso suponiendo que $A=\{a_1,...,a_n\}$, y lo hago bajo una cierta operación $(A,*)$ […] y tengo otro grupo $(B,\circ)$, entonces doy una función, la defino así $f(a_i)=b \quad \forall b\in B$, $\forall i\in 1,..,n$, entonces $f(a_1*a_2)=b$, luego $f(a_1)*f(a_2)=2b$, entonces $f(a_1*a_2)\neq f(a_1)*f(a_2)$, la función que propuse no es isomorfismo, entonces puedo decir que no son bajo esta función f, pero igual puedo construir otra que sí, por ejemplo, $\Re^2\cong C$. La función, no me acuerdo bien como va, pero sí es isomorfo con la suma y el producto usuales y entonces yo puedo decirle que estos no son isomorfos bajo la función, doy otra función y veo que sí son y ya después le digo, pero con esta función vas a ver que sí son isomorfismos. Para mí sería un buen ejemplo, porque también les diría que si tengo una función que no los hace isomorfos, este, no necesariamente los grupos son isomorfos […].

Con esta misma idea Miguel también intuye que los grupos $(\Re,+)$ y $(Q,+)$ pudieran ser isomorfos bajo una cierta función.

> **E:** […], me gustaría mostrarte un pequeño extracto y quisiera tu opinión respecto a él: *Los grupos* $(\Re,+)$ y $(Q,+)$ *no siempre son isomorfos. Hay que decir que depende de la función que se dé.*
>
> **M:** Estoy de acuerdo, yo creo que sí, porque para empezar, como conjuntos, este tiene más elementos que este, porque este tiene la cardinalidad de $\aleph_0$ y este tiene la cardinalidad del continuo y creo que es $\aleph_1$; pues yo creo que van a ser isomorfos cuando te agarras a Q como subconjunto de $\Re$, porque imagínate todos los elementos de $\Re$, por ejemplo los irracionales, ¿a dónde los mandarías?, o no sé dónde se mandarían, es que sí depende de la aplicación; aunque yo creo, bueno no sé, es que es muy confuso porque como conjuntos no se puede construir una función biyectiva, ¿se puede o no se puede? No pues sí, hay que dar la función, a lo mejor a alguien se le ocurre una función muy bonita y ya.

Cuando trabaja con grupos de orden finito, tal es el caso de los ejercicios 4 y 12, por ejemplo, del primero corrige diciendo que él propuso a Z_4 por ser un grupo de orden 4 igual que $G=\{q,r,s,t\}$, por lo que es posible construir una función biyectiva entre ellos, sin embargo no es suficiente ya que tendría que verificarse que dicha función cumple con la propiedad de isomorfismo, algo que no tenía presente cuando contestó el cuestionario.



M: Bueno, creo que puse eso, como estuve de acuerdo con la 3, que decía que dos grupos son isomorfos si son del mismo orden entonces dije que Z_4 o a mí se me ocurrió en ese momento que Z_4 como tiene, también es de orden cuatro y como este grupo es de orden cuatro, podían ser isomorfos, pero, como ya lo dije hace un momento que, puedo hacer existir la función biyectiva, pero no que, bueno no la función necesariamente va a cumplir con la propiedad de isomorfismo, por eso fue que di Z_4, es que estuve de acuerdo con la 3, pero ahorita ya vi que no.

Cuando se le pide que proponga un grupo isomorfo a G rápidamente da como respuesta $G' = G$, bajo la función identidad, presentando dificultades cuando se le pide que proponga un grupo $G' \neq G$, diciendo explícitamente que no tiene idea de cuál podría ser y termina por hacer una copia de G nombrando a los elementos de otra manera. Para asegurarse de que G y el grupo que propuso son isomorfos, hace para un caso la comprobación de "la condición" de que la función f que propuso es un isomorfismo.

M: […] ¡Ah bueno!, lo que puedo hacer es copiarlos, ¿no?; entonces por ejemplo puedo hacer que $a = q$, de cada elemento, puedo hacer $r = b, s = c, t = d$; y ya tengo dos grupos, ¿no?, con un poco de trampa creo que ya los tengo.

E: Y, ¿en qué consiste tu isomorfismo?

M: ¿Cómo?, ¿por el cual son isomorfos?, ¡ah!, es que:

$$f\begin{cases} f(q)=a \\ f(r)=b \\ f(s)=c \\ f(t)=d \end{cases}$$

> **E:** Entonces tu isomorfismo, en esencia consistió en [...].
>
> **M:** En cambiar las letras, pero éste es uno distinto y éste otro es distinto, pero sí fue una copia con distintas letras donde $a \neq q, r \neq b, s \neq c, t \neq d$, todos son distintos, entonces ya mi isomorfismo sería éste, este sería igual a la f .
>
> **E:** Y, ¿cómo sabes que ellos son isomorfos?
>
> **M:** Pues por ejemplo si me agarro $q * r$, sería t , ¿no?; vamos a ver si sale:
>
> $f(q * r) = f(t) = d$
>
> […] pero también sabemos, entonces:
>
> $f(q) \circ f(r) = a + b = d$
>
> […] pero aquí lo estoy haciendo para un caso particular que es q y r , ¿no?, entonces necesitaría agarrarme todos los posibles casos de cuatro elementos, para ver que para cada dos se cumple, porque acá nada más estoy diciendo que se cumple si sumo q y r , pero quién sabe si sumo s y t me salga lo mismo.

Sin embargo, como veremos en la sección 4.1.4, Miguel también tiene la idea de que la función (el isomorfismo), para el caso en que un grupo es isomorfo a alguno de sus subgrupos, debe ser sobreyectiva y no necesariamente biyectiva. En conclusión se puede decir que la concepción que tiene Miguel sobre grupos isomorfos le lleva a considerar dos posibilidades para la función isomorfismo, que sea biyectiva o sobreyectiva, en este último caso para justificar que un grupo puede ser isomorfo a alguno de sus subgrupos.

Para el ejercicio 12 Miguel observa el comportamiento de los elementos al operarse consigo mismos, construyendo una función biyectiva entre los dos grupos. Para asegurarse que dicha función es un isomorfismo realiza varios cálculos para averiguar si dicha función cumple con “la condición” requerida, que $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$; estos cálculos los efectúa para algunas combinaciones, sin concluir por el largo proceso que requiere, aun así con los que realiza le basta para determinar que los grupos son isomorfos.

> **M:** […] Más bien empecé a ver cómo se comportaban cuando los operaba con ellos mismos y nada más me daban dos resultados, ya los separé y empecé a notar, este, la semejanza que tenían ambos y así definí mi función.

$$\begin{array}{ll} h*h=m & s\circ s=v \\ i*i=m & t\circ t=v \\ k*k=m & v\circ v=v \\ m*m=m & w\circ w=v \\ l*l=j & u\circ u=x \\ j*j=l & x\circ x=u \end{array}$$

[Estas fueron las observaciones hechas por el estudiante de cómo se comportaban los elementos al operarse consigo mismos y en seguida se muestra cómo definió la función]

$$\begin{array}{l} f(m)=v \\ f(j)=u \\ f(l)=x \\ f(h)=s \\ f(i)=t \\ f(k)=w \end{array}$$

[…] pero todavía no he checado si es isomorfismo. […]

E: Y, ¿cómo sabes que es un isomorfismo?

M: Pues por construcción, la función ya es inyectiva y sobre, nada más falta ver que cuando opero los elementos de acá cumple con la propiedad de sumar este acá, es igual que sumar bajo la función acá, pero lo tengo que checar, ¡va a ser mucho!, no pues habrían muchos casos, ni modo, hay que probarlo bien:

$$\begin{array}{l} f(m*m)=f(m)=v=f(m)\circ f(m)=v \\ f(j*j)=f(l)=x=f(j)\circ f(j)=u\circ u=x \\ f(l*l)=f(j)=u=f(l)\circ f(l)=x\circ x=u \\ f(h*h)=f(m)=v=f(h)\circ f(h)=s\circ s=v \\ f(i*i)=f(m)=v=f(i)\circ f(i)=t\circ t=v \\ f(k*k)=f(m)=v=f(k)\circ f(k)=w\circ w=v \end{array}$$

[…] ¿ya con esto me crees o me sigo? Yo creo que puede haber otra manera de demostrarlo porque tienes que hacer como, ¿cuántas combinaciones hay entre ellos? Yo creo que sí hay otra manera más eficaz de hacerlo, pero no sé cómo, ya ni modo, lo voy a hacer todo; ¡ah, ya no salió!

E: A ver, ¿es $f(h*i)$?

M: Ajá, porque $h*i=l$ y $f(l)=x$ y $f(h)=s, f(i)=t, s\circ t=u$, pero si lo hago al revés, $s\circ t=x$, (aquí se está refiriendo a operar en la tabla de G'); entonces aquí, ¿cómo lo cambio?, lo construí mal entonces (se refiere al isomorfismo que propone), y si es así, ya salió (hace modificación al isomorfismo que propuso):

$$f(m)=v$$
$$f(j)=u$$
$$f(l)=x$$
$$f(h)=t$$
$$f(i)=s$$
$$f(k)=w$$

[…]

$$\begin{aligned}
f(h*i)&=f(l)=x=f(h)\circ f(i)=t\circ s=x\\
f(h*j)&=f(k)=w=f(h)\circ f(j)=t\circ u=w\\
f(h*k)&=f(j)=u=f(h)\circ f(k)=t\circ w=u\\
f(h*l)&=f(i)=s=f(h)\circ f(l)=t\circ x=s
\end{aligned}$$

[…] yo creo que sí es isomorfismo; pues mi intuición me dice que sí, pero debo demostrarlo:

$$\begin{aligned}
f(i*h)&=f(j)=u=f(i)\circ f(h)=s\circ t=u\\
f(i*j)&=f(h)=t=f(i)\circ f(j)=s\circ u=t\\
f(i*k)&=f(l)=x=f(i)\circ f(k)=s\circ w=x\\
f(i*l)&=f(k)=w=f(i)\circ f(l)=s\circ x=w
\end{aligned}$$

[…]

$$\begin{aligned}
f(j*h)&=f(i)=s=f(j)\circ f(h)=u\circ t=s\\
f(j*i)&=f(k)=w=f(j)\circ f(i)=u\circ s=w\\
f(j*k)&=f(h)=t=f(j)\circ f(k)=u\circ w=t\\
f(j*l)&=f(m)=v=f(j)\circ f(l)=u\circ x=v
\end{aligned}$$

[…] ya, yo creo que sí es éste.

En la resolución de ambos ejercicios podemos observar procedimientos similares; Miguel no explora a profundidad las propiedades de los grupos con los que está trabajando, en ocasiones parece que realiza los cálculos solo de manera mecánica. Sin embargo aplica la definición de isomorfismo para averiguar que la función que propone cumpla con las condiciones.

Por su parte, Rodolfo al resolver el ejercicio 12, cuando se le pregunta por la manera de asegurarse de que los grupos involucrados (finitos) en este ejercicio son isomorfos, habla de “pasos” que él sigue para verificarlo. Rodolfo parte de la idea de hacer “la correspondencia” entre los dos conjuntos y asegurarse de que efectivamente se trata de una “biyección”, pero además dice que tendría que averiguar si tales grupos “tienen la misma estructura”. Como casi todos los estudiantes participantes, Rodolfo inicia identificando al elemento identidad de cada grupo y a partir de ahí propone lo que él llama, “una primera asignación”; para los otros elementos se basó, principalmente, en el comportamiento de estos al operarse consigo mismo. Así, el estudiante confirma su idea de que “dos grupos sean isomorfos es que uno se obtiene a partir del otro tan solo con un cambio de elementos”.

> **R:** ¡Son isomorfos!, lo que hice fue, primero encontrar la identidad en cada una de ellas, como ya hemos visto, como te dije, esencialmente es eso, que dos grupos sean isomorfos es que uno se obtiene, uno a partir del otro tan solo con un cambio de elementos. Aquí la identidad se llama m y aquí la identidad se llama v; después, lo que hice fue obtener propiedades de idempotencia, es decir, que un elemento por un elemento me dé la identidad. […] Aquí estamos como tentados a decir que este elemento sería el elemento h, en esa asignación […] eso no es suficiente, hay que encontrar una biyección, desde luego, la biyección puede haber muchas […] pero tenemos que encontrar la que nos transforme este grupo en este, en este otro […] entonces, después dije: el $i*i$ también da la identidad y entonces observé que $t*t$, también da la identidad, entonces también es idempotente, entonces también podríamos estar tentados a decir eso; fue cuando agarramos el j y aquí fue cuando dije: el $j*j$ no me da la identidad, pero ya conozco h, h es precisamente s y entonces $j*h$ me da k, aquí los puse, y fue así, como ya tenía tres, entonces el j era el x, este lo obtuve pues así. Ahora sí que al tanteo, eh, a prueba y error de ver qué elementos, su multiplicación aquí, bueno su operación aquí, coincide cuando tú lo operas con este, con los de acá […] estos dos últimos ya los obtuve así, por reducción, nada más quedaban dos, lo que observé, qué número me da la identidad […]. $k*k$ me da la identidad y entonces dije, pues $w*w$ me da la identidad y ya, nada más me quedaba este, entonces esta es la biyección, podemos darla así, así la podemos dar, la función que vaya de este conjunto del G al G':
>
> $$\begin{aligned}&\varphi : G \to G'\\ &\varphi(m) = v\\ &\varphi(h) = s\\ &\varphi(i) = t\\ &\varphi(j) = x\\ &\varphi(l) = u\\ &\varphi(k) = w\end{aligned}$$
>
> Entonces ésta es dada por construcción, ésta función es inyectiva, biyectiva y además preserva la estructura, es un isomorfismo, se puede demostrar, o sea, aquí habrá que hacerlo por casos, que será muy latoso, por ejemplo, agarrarnos este $h*h$, además recordemos que debe ser un homomorfismo, es decir, que debe de cumplir que
> $\varphi(a*b) = \varphi(a)\circ\varphi(b), a,b \in G$, por ejemplo, vamos a agarrarnos dos arbitrarios a h y l:

$\varphi(h * l) = \varphi(k) = w$
$\varphi(h) \circ \varphi(l) = s \circ u = w$
Y así se tiene que hacer para todos los casos.

E: Entonces, ¿esta es la manera en que te asegurarías de que los grupos son isomorfos?

R: Sí, ajá, agarrar primero la asignación, que es jugar, y ya después por construcción, tienes que verificar que para cada uno de ellos, esta propiedad, esto pasa para cada $a, b \in G$, nada más agarras pares e irlos multiplicando, pares, pares; esto lo hice para un par, pero tenemos que hacer para todas las combinaciones posibles de dos elementos. Aquí, por ejemplo, si nada más preserva la estructura de grupo pues no es suficiente pues nada más sería un homomorfismo de grupos, pero ya cuando además hay una relación biunívoca entre los elementos ya podemos decir que son idénticamente, salvo el nombre de la operación y de los elementos.

La enumeración de los "pasos" que Rodolfo dice seguir para averiguar si dos grupos son isomorfos la vemos claramente en el siguiente extracto, cuando se le preguntó cómo procede para encontrar un isomorfismo cuando los grupos son de orden infinito.

R: Para ver que sean, primero hay que dar la función, eso es de cajón, dar una función que relacione G con G'. ¿Cómo?, eso sí depende mucho de, hay funciones que son naturales, como por ejemplo la de Z con $2Z$, […], el primer paso es dar la función; no es como aquí, que por ejemplo, tenemos que encontrar el patrón (cuando se trabaja con las tablas), por ejemplo, el h, como aquí lo hice, no es tanto la función, sino aquí ya la asignación directa y ya después dar la función. Aquí si no se puede hacer esto, porque asignarle un, con conjuntos infinitos no podemos porque la lista, por ejemplo, aquí numerable, puede ser como los Reales que sean no numerables. Pero entonces lo primero que procedemos es dar la función, la que se te ocurra […] tienes que jugar y jugar y ya después que ya des la función, ver que preserva esto, que preserva estructura de grupo y ya tienes el segundo paso y el tercer paso es verificar si es una biyección entre, de conjuntos, de G y G', y ya así podrías concluir […].

Cuando se discute sobre el enunciado, *G y G' son isomorfos si sus elementos y sus operaciones son idénticas,* para apoyar la veracidad de este, Rodolfo se apoya con un ejemplo: propone a los grupos $(Z,+)$ y $(Q,+)$, bajo la función $f(a) = \frac{a}{1}$ la cual no es una biyección. A pesar de que ambos conjuntos subyacentes tienen la misma cardinalidad y por lo tanto es posible establecer una función biyectiva entre ellos, $(Z,+)$ es un grupo cíclico, ambos 1 y -1 son generadores, mientras que $(Q,+)$ no lo es, por lo que tales grupos en realidad no son isomorfos.

R: […] Lo más claro es Z y Q, Z está inyectado en Q y podemos pensar precisamente a un entero como un racional, sus operaciones sin idénticas, sin embargo no sé si son isomorfos estos dos.

E: Ok, entonces sería cuestión de ver, ¿no?; o sea si hay posibilidad de que suceda; ¿podrías intentar verificar eso?

R: ¿Dar el isomorfismo?; sí, o sea puedes dar la canónica, desde luego, de que a cada Z, digamos a, le asignes un $\frac{a}{1}$, desde luego, este, claramente es una función biyectiva y por supuesto también se ve fácilmente que es; sí, se ve fácilmente que, damos $\varphi(a+b)=\frac{a+b}{1}=\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\varphi(a)+\varphi(b)$, lo que pasa que aquí estamos trabajando con enteros y aquí ya son, aquí ya son precisamente, clases de equivalencia, los racionales son clases de equivalencia; pero se puede pensar a un racional como un entero vía biyección, desde luego; pero no son entidades iguales, Q son precisamente clases de equivalencia […].

En cuanto a Alejandro, él manifiesta en varias ocasiones que le resulta complicado demostrar si dos grupos son o no son isomorfos. Respecto a este último caso, resulta dificultoso para él demostrar que $(\Re,+)$ y $(Q,+)$ no son isomorfos, aunque él dice efectivamente que no lo son.

E: ¿Por qué no son isomorfos?

A: Porque dado esta cosa que yo di, pues no cumple, es que el uno si lo manda al uno, pero por ejemplo, como lo mandé de los Reales en los Racionales, voy a tomar un Real y a la hora de, por ejemplo, este es un Real, ¿no?, no lo podía mandar aquí porque pues estos son los Racionales, entonces esto no concuerda, porque la $\sqrt{2}$ no está aquí.

E: ¿Qué opinas de la siguiente afirmación?: *Los grupos* $(\Re,+)$ *y* $(Q,+)$ *no siempre son isomorfos. Hay que decir que depende de la función que se dé*.

A: No, yo creo que no.

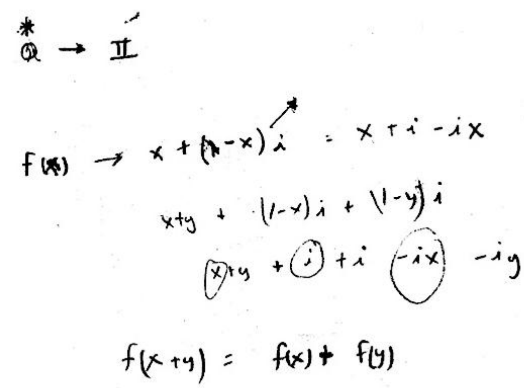
E: ¿Por qué?

A: Por la forma de los elementos, se quieren enviar de los Reales a los Racionales […] aquí siempre voy a poder encontrar un Irracional, un raíz de algo, $\sqrt{2}$, que no va a estar así como que bien acomodado aquí, no va a estar bien definido aquí. Si lo hago de los Racionales a los Reales, tampoco, porque no va a ser suprayectivo, no voy a poder mandar de los Racionales, x en los Racionales a los Reales, x lo mando […] a $\sqrt{x}$; ah, pues como que; o sea, sí, si estos no son isomorfos es porque no hay ningún isomorfismo de aquí para acá ni de acá para acá, pero como que aquí no se ve tan, aquí sí se ve más difícil dar el isomorfismo, aquí dices: como que no, no lo vas a encontrar. Pero si lo intentas encontrar por aquí, pues igual y si se puede, pero a la hora de probar inyectividad o algo así, pues vas a ver que no es inyectivo; o sea, aquí lo que fallaba era la suprayectividad, ¿sí?; no, no, lo que fallaba aquí era la inyectividad y aquí también, no, pues quién sabe, no sé, no sé qué pueda fallar, si es inyectivo o que sea suprayectivo […] no sé, la verdad, lo que sí puedo decirte es que dos grupos no son isomorfos si cualquier morfismo no es inyectivo o no es suprayectivo; pero, ¿cómo demostrar que Q y $\Re$ no son isomorfos? Mi maestra me diría, según yo: dame cualquier morfismo y te demuestro que falla la inyectividad o la suprayectividad; y le diría: no, pues sí te creo, eres mi

> maestra; creo que mi respuesta también sería esa: dame un morfismo y vas a ver que no cumple alguna de las dos condiciones.

Cuando se le pregunta si dos grupos isomorfos deben tener las mismas operaciones, él responde dudosamente diciendo que no. Además utiliza como ejemplo a $(Q,+)$ y $(I,+)$, los Racionales y los Irracionales bajo la suma como grupos isomorfos; sin embargo, los conjuntos subyacentes no poseen la misma cardinalidad y la segunda estructura no es un grupo.

> **A:** […] ¿Dos grupos deben tener la misma operación? No, yo digo que no, pero no sé, la verdad, eh, yo pienso que no, no sé, podemos intentar dar un ejemplo, a ver, ¿qué grupo? Se me ocurre Z, o los Reales, o bueno, los Racionales los mando, ¿a dónde?, ¿a dónde los puedo mandar?, ¿a los irracionales?:



> […] Sí es un morfismo, aquí demostramos que $f(x+y)=f(x)+f(y)$, pero aquí la operación sí es la misma, no sé cómo explicarlo, porque en sí, la suma en los Racionales pues es diferente a la suma en los Irracionales, ¿no? Digamos que estas, esta suma sí se entiende aquí, pero esta suma no se entiende aquí; entonces como que no son las mismas operaciones realmente o, ¿sí?

Comentarios

Algunos de los estudiantes participantes proceden a demostrar que dos grupos son isomorfos haciendo corresponder de manera biunívoca los elementos de un primer grupo con los elementos del otro grupo (grupos finitos), tomando en cuenta los "parecidos" que logran observar entre ellos. En el caso de Diana, la idea que ha desarrollado con relación a los grupos isomorfos y, en particular, sobre isomorfismo de grupos corresponde a grupos entre los cuales existe una función biyectiva que los relaciona con propiedades comunes, es decir, entre las relaciones que se pueden establecer entre los elementos de los grupos; esta idea la lleva, entre otras cosas, a no tomar en cuenta la "preservación de las operaciones". También pudiera suceder que el origen de dicha dificultad pudiera estar asociada con la incorrecta interpretación de un enunciado y su recíproco, en particular, ‘los grupos isomorfos tienen el mismo orden, entonces los grupos del mismo orden son isomorfos’. Mientras que el procedimiento de Víctor se basa en la exploración de las propiedades (algebraicas), de tal manera que estas le permitan determinar, primero, si dos grupos no son isomorfos, es decir, cuando uno de ellos cumpla alguna propiedad (algebraica) y el otro no; en caso contrario, se basa en dichas propiedades (principalmente el orden de los elementos) para construir una correspondencia biunívoca (un isomorfismo) entre los elementos.

Por otra parte, también se pudo apreciar cómo Miguel considera que dos grupos pueden ser isomorfos o no, dependiendo de la función que uno proponga. Por ejemplo, cuando se le pregunta cómo explicaría que dos grupos NO son isomorfos, dice que lo que él haría sería “tomar dos grupos y dar la función que no sea isomorfismo”.

4.1.3 Dificultad en considerar más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos

Diana es la única estudiante quien rechaza la posibilidad de que pueda existir más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos. La imagen que posee Diana sobre isomorfismo es la de una “función biyectiva que relaciona a los grupos isomorfos con propiedades comunes”, la cual debe ser única, ya que “un elemento (en un grupo) se debe comportar igual que otro (en el otro grupo)”, es decir, si dos grupos son isomorfos, en cuanto a sus elementos, se trata de encontrar el “análogo” en el otro grupo. El breve extracto que se presenta en seguida fue su respuesta surgida en la discusión del ejercicio 13, donde ella concluye que los cinco conjuntos con sus respectivas operaciones son grupos isomorfos:

> **D:** Mmm, a ver espérame, no, pues sí es único, ¿no?, pues porque los estoy relacionando mediante la única función biyectiva que debe de haber ahí, en este caso, en cómo se comportan. Como ya mencioné, de esa manera los relaciono y esa relación es única, no puede ser de otra manera.

Puede apreciarse cómo la estudiante dirige su atención en todo momento a los elementos del grupo; los argumentos que utiliza para la construcción del isomorfismo están basados en estos, en buscar alguna relación entre ellos para poder hacer la correspondencia biunívoca. Para ello, Diana trata de encontrar *parecidos* entre los elementos, indicándole estos cuál tendría que ser esa correspondencia requerida, tal vez por ello considera que no puede haber otra manera de establecer dicha correspondencia.

En el caso de Miguel, solo se le preguntó su opinión respecto a la posibilidad de que pudiera haber más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos. Él contestó en un principio que él considera que el isomorfismo es único, cambiando posteriormente su respuesta diciendo que como no puede estar seguro de que sea único, entonces posiblemente exista más de uno, que mediante el proponer funciones uno podría llegar a la conclusión de que no es único; o también pudiera demostrarse lo contrario, diciendo que lo que él haría para demostrar que el isomorfismo es único sería suponer que existe otro y tal vez llegar a la contradicción de que se trata del mismo.

En tres ocasiones se le pregunta a Rodolfo sobre la posibilidad de la existencia de más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos; él hace referencia a la definición de grupos isomorfos, al respecto, el estudiante dice no descartar la posibilidad de que pueda ser posible ello. Rodolfo se refiere a los casos en que los grupos sean de orden finito e infinito; respecto al primero, considera que la manera de relacionarlos probablemente sería única. Cuando se le pregunta en el ejercicio 12, si puede construir otro isomorfismo entre G y G', dice que no es posible ya que aunque puede haber más funciones biyectivas de uno al otro, lo que fallaría sería en que no se cumpliría la propiedad de homomorfismo; su idea es que en el caso de los grupos finitos, la función parece estar “impuesta”, por lo que no podría ser posible que exista otra.

> **R:** ¡No creo, eh!, ¡aquí no!, no, o sea, aquí nada más es la única función y aquí es donde da pie a decir que es única, esta función porque no va a haber otra, o sea, va a haber más funciones biyectivas, claro, pero que cumpla esto, no, no, este, parecería que la función dada, esta función es única y tiene que serlo porque, en este caso, en grupos de orden finito, este, no sé si, este, no estoy del todo seguro, pero aquí como que pareciera que la función está impuesta, ¿no?, que la función es ésta, no hay otra.
>
> […]
>
> **R:** ¡Ah, sí!, bueno, esa sí debe estar impuesta, el m tiene que ser v, y aquí ya le podrías cambiar, ¿no?:

$$\begin{aligned}&\varphi(m)=v\\&\varphi(j)=t\\&\varphi(i)=u\\&\ldots\end{aligned}$$

> […] y por supuesto, no vas a verificar esto y si agarras otra, otra función y no vas a verificar esto, aunque habría que hacerlo, ¿no? Habría que agarrar estas funciones y ver que por ejemplo, agarramos otra función, otra asignación y ver que no va a cumplir esto, van a existir dos elementos que, de tal manera que esto va a ser diferente y entonces ya no preservaría la estructura, entonces no, es única.

Mientras que en el segundo caso (grupos infinitos), dice que aunque no es tan sencillo establecer las relaciones entre los elementos de los grupos, sí es posible realizarse y tal como en el caso de los grupos de orden finito, se tendría que verificar que se preserve la estructura de grupo; esta última idea la utiliza como argumento cuando se le pregunta respecto a los grupos $(\Re,+)$ y $(\Re^{+},\cdot)$. El estudiante dice que es posible encontrar biyecciones entre esos dos grupos, pero tendría que averiguarse cuáles cumplen con la propiedad de homomorfismo; nuevamente hace referencia a la definición de grupos isomorfos, diciendo que como ahí no dice que sea única, entonces probablemente exista más de una.

> **E:** Tomando este último ejemplo, ¿existirá otro isomorfismo entre esos dos grupos?
>
> **R:** Yo digo que sí, aquí sí como que nos da, mmm, aquí como que se ve un poquito más como que sí podemos encontrar funciones, ¿no?, que vayan, bueno, en este caso, por ejemplo, ¿de dónde fuimos nosotros?, de $\Re$, desde luego hay funciones que van de $\Re$ a $\Re^{+}$; la pregunta es si preservan la estructura de grupo […] de que puedes encontrar biyecciones, las hay, pero de que puedas encontrar una que preserve la estructura de grupo sería más para pensarse, ¿no? […].
>
> **E:** O sea, ¿tú no rechazarías la posibilidad?
>
> **R:** No, no, de hecho si tomamos la definición, pero no dice "único", de hecho los matemáticos, si es único, si existe una única función tal que; entonces a partir de ahí yo podría decir que entonces sí hay más.

Rodolfo no construye otro isomorfismo entre los grupos $(\Re,+)$ y $(\Re^{+},\cdot)$; él argumenta que en definitiva el que exista más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos no es muy relevante, ya que lo que realmente interesa es que exista "uno", pues eso es suficiente para garantizar que los grupos son isomorfos.

> **R:** […] al menos con que exista, ya, si es única ya no es tan importante porque lo que queremos es que exista una, si es única; digo, nunca he visto un libro que diga que sea única, no dice, porque si lo fuera, debería de ahí decir, existe una única función tal que pasa esto, pero no lo dice, entonces como que sería un, ¡quién sabe!, eh; creo que los matemáticos no le dan mucha importancia a que si es única, simplemente le dan importancia a que exista una y ya, si es dos o tres no va a afectar el desarrollo porque lo único que quieres es establecer que sean isomorfos, o sea, si existe otra, me imagino, o ¡quién sabe!, pero si existe otra pues a los

grupos no le importa qué función agarres, ellos son isomorfos, esencialmente por lo que dije, que son iguales, salvo que sus elementos se llaman diferente.

Víctor, en un principio duda un poco ante la pregunta de que si el isomorfismo es único, diciendo en un principio que sí; podemos observar esto cuando se discute sobre el ejemplo que él propuso: D_6 y S_3.

V: Ajá, pues en este caso no vería yo otro; a lo mejor podríamos hacer corresponder estos diferentes, o sea, en lugar de ponerle aquí el 1, 2 y el 3, que este, o sea, permutar estos y entonces pues ya de entrada ahí tendríamos otra correspondencia pero salvo otra permutación, entonces igual sería como uno pero salvo, pues más permutaciones, ¿no?, o sea, ahí porque yo los quise nombrar así, ¿no?, o sea se pueden nombrar de otra forma y eso nos daría pauta a otro isomorfismo, pero no tiene, no es como que otro, sino que es el mismo.

Posteriormente, en el ejercicio 13, una vez que él ha concluido que A_3 y A_5 son grupos isomorfos y es capaz de construir un isomorfismo entre ellos, cuando se le pregunta que si puede construir otro, Víctor procede considerando el orden de los elementos. Su argumento se basa en que *como hay dos elementos del mismo orden*, *entonces se tienen dos posibilidades*, o sea, *dos maneras de hacer corresponder a los elementos*; construye las tablas y verifica que estas coinciden, concluyendo de esa manera que es posible la existencia de más de un isomorfismo:

V: Sí, [...] hay dos, uno que, o sea, como tengo dos elecciones para mandar, tengo dos elementos de orden 4, entonces pues, en el mejor de los casos cualquiera me podría dar, o sea, mandar este a este o este a este, entonces tendría un isomorfismo para este y ya no me quedaría más que mandar, no me queda otra opción, mandar este a este y en otro caso sería mandar este a este (se refiere a los elementos i y $-i$).

Primera relación que propuso	Segunda relación que propuso
$\bar{1} \to 1$	$\bar{1} \to 1$
$\bar{4} \to -1$	$\bar{4} \to -1$
$\boxed{\bar{2} \to i}$	$\boxed{\bar{2} \to -i}$
$\boxed{\bar{3} \to -i}$	$\boxed{\bar{3} \to i}$

Alejandro, por su parte, cuando se le pregunta con relación a los grupos $(Z,+)$ y $(2Z,+)$, si puede haber otro isomorfismo entre ellos, aparte del que ya ha propuesto $f(x)=2x$, casi inmediatamente responde que $f(x)=-2x$ es otro isomorfismo y que por lo tanto no es único.

A: [...] Creo que no es el único, por ejemplo puedo elegir a $-2x$ y ese ya es otro diferente.

Comentarios

La solicitud de la construcción de otro isomorfismo o la pregunta sobre la existencia de más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos para algunos estudiantes resultó poco usual, por ejemplo, algunos de ellos dijeron que en clase o en los libros de texto nunca se hace mención de ello. En el caso de Diana, su imagen formada sobre los grupos isomorfos no le permitió considerar esa posibilidad; caso contrario con los otros cuatro estudiantes, donde algunos de ellos recurren a la definición oficial de grupos isomorfos, manifestando incertidumbre respecto a cómo saberlo con certeza. También se observó que siguen siendo determinantes las relaciones que pudieran establecer los estudiantes entre los elementos de los grupos (por ejemplo, con el orden de los elementos) sobre todo para el caso finito, lo que les permite decidir si es posible la existencia o no de otro isomorfismo. Las dificultades que presentan algunos de los estudiantes no parecen tener origen en una interpretación equivocada del cuantificador existencial involucrado en la definición de grupos isomorfos.

4.1.4 Dificultad en considerar que un grupo pueda ser isomorfo a alguno de sus subgrupos

Como resultado de la discusión del enunciado 5. (iv) y del ejercicio 14, se evidenció que para algunos de los estudiantes participantes a primera instancia resulta complicado considerar que un grupo pueda ser isomorfo a alguno de sus subgrupos.

En la entrevista con Diana, ella considera posible la validez del enunciado “*si* G *es un subgrupo de* G^*, G^* *es isomorfo a* G”, utilizando un argumento erróneo. Además, al observar a detalle cómo finaliza su respuesta en el extracto anterior, la estudiante parece tener la idea de que un subgrupo es menor en cuanto a cardinalidad, que el grupo.

> **D:** Creo que sí, aquí te puse que no sabía qué responder, pero creo que eso es el Primer Teorema de Isomorfismo de Grupos, ¿no?, en el que restringes de un espacio a un subgrupo, a ver, no; <u>tienes tu espacio</u> y haces <u>el campo cociente que es un subgrupo</u> y que lo asocias o <u>es isomorfo al grupo grande</u>, no me acuerdo pero ese creo que sí.

Por otra parte, cuando se le presenta el ejercicio 14, la estudiante evidencia de manera más clara su idea de que un grupo siempre es mayor en cuanto a cardinalidad que alguno de sus subgrupos, concluyendo de manera incorrecta que G no puede tener un subgrupo isomorfo a este.

> **E:** […] Se te presenta el siguiente grupo: $G = \langle a \rangle = \{a^n | n \in Z\}$, la pregunta es, *¿puede G tener un subgrupo al cual sea isomorfo*?
>
> **D:** Es el grupo cíclico, mmm, pues sí, al que me asocia ahora a cada uno de los elementos, más bien a los múltiplos del a. A ver, si por ejemplo yo pongo al G generado por el 5, entonces yo tendría que son los enteros 5, 25 y así, entonces me hago el isomorfismo con un A que sea el conjunto de todos los z tal que z sea de la forma 5^n, con n en los Naturales, entonces pues éstos serían el 0,5; ¡ah, no!, pero aquí entonces tendría a 10 y a 15, entonces ya no me sale lo que quería hacer; sí, lo que quiero hacer es encontrar el isomorfismo más fácil […] el que me relaciona al elemento término con el que estoy haciendo la potencia, con el entero, perdón, con el natural con el que estoy multiplicando, ¿no?
>
> **E:** ¿Entonces cuál sería ese subgrupo?
>
> **D:** El subgrupo, mmm, pues el que se está dando, un subgrupo, ¡pero el grupo sería más grande! […].
>
> **D:** […] ya sea que pueda tener menos cardinalidad que el conjunto que estoy considerando, el grande y entonces, pues como te decía, que deberían tener la misma cardinalidad, entonces no podría encontrar ahí un isomorfismo; pero si hablamos de un grupo ¿cómo cuál?, un grupo grande como los, como, no sé, los múltiplos de dos, por ejemplo, entonces si me agarro un subconjunto de aquí que también tenga una cardinalidad, vamos a decir, no finita, o no, a ver, no […] no, más bien yo creo que no, no porque deberían tener la misma cardinalidad y en este caso el subgrupo sería más pequeño que el grupo grande.

El análisis de la respuesta de Víctor con relación al enunciado 5. (iv) también da evidencia de que al igual que Diana, piensa que un grupo es habitualmente más grande que sus subgrupos, razón por la que considera que de ser válido este enunciado, resultaría "contra intuitivo".

> **V:** Yo puse que no, que era falso, aunque no estoy tan seguro, en este momento no se me ocurre algún caso en el que sí pase eso, se me haría un buen ejemplo porque sería como contra intuitivo.
>
> **E:** ¿Por qué dices eso?
>
> **V:** Pues, porque ya bastaría encontrarlo, o sea, ya lo primero que yo haría para encontrar, este, que un grupo es isomorfo a otro, por eso, no sé, se me haría como que muy, muy buena herramienta para encontrar isomorfismos, ¿no?, o sea, ya en lugar de agarrar todo el grupo te agarras uno más chiquito y ya […].

A diferencia de Diana, esta idea que también manifiesta Víctor no mostró ser la razón por la cual el estudiante respondiera equivocadamente al ejercicio 14, donde identifica al grupo involucrado como el cíclico generado por a, el cual podría tratarse del cíclico infinito o el cíclico de orden p (finito), donde el primero es isomorfo a Z y el segundo a Z_p; según Víctor, estos dos grupos no tienen algún subgrupo al cual puedan ser isomorfos. Obsérvese el argumento utilizado por el estudiante para justificar que Z no posee algún subgrupo no trivial isomorfo a él. Víctor no está considerando, por ejemplo, el conjunto nZ de todos los múltiplos de n que es un subgrupo de Z bajo la suma.

> **E:** […] finalmente se te presenta el grupo $G = \langle a \rangle = \{a^n | n \in Z\}$, la cuestión es, *¿puede* G *tener un subgrupo al cual sea isomorfo*?
>
> **V:** Es que como es cíclico, este lo genera (se refiere al elemento a), este, bueno, aquí habrían dos casos, que fuera infinito o que fuera finito; si fuera infinito pues sería isomorfo a Z y si fuera finito sería isomorfo a algún Z_p porque ya así están caracterizados los cíclicos, ¿no?, entonces, este, si fuera aquí, ese caso (se refiere al caso finito), pues, si tuviera un subgrupo no trivial pues, este, o sea, no puede tener un subgrupo no trivial porque por Lagrange sabemos que dividiría al número que es primo, entonces, bueno, empezaríamos buscando los divisores de este, pero pues solo tiene este y este (se refiere a 1 y p), y este nos genera al grupo generado por la identidad, bueno el grupo que sólo contiene a la identidad y si tiene orden p, pues nos genera todo, entonces, porque si tomamos un elemento que no sea la identidad pues va a generar, entonces ya sería este, sería exactamente este, pues en ese caso no podría tener subgrupos que fueran, o sea, subgrupos propios que fueran isomorfos; y en este caso (el caso infinito), pues sabemos que lo genera a y su inverso y entonces tampoco, bueno, aquí ya no es por Lagrange pero como que tampoco, bueno, sabemos que sólo estos dos lo generan, bueno, ya si lo vemos isomorfo a Z pues sería -1 y el 1, entonces por eso no podrían tener subgrupos no triviales que fueran isomorfos.

En el caso de Rodolfo, acertadamente dice del enunciado 5. (iv) que el ser subgrupo no es una condición para que dos grupos sean isomorfos. El enunciado en general es falso; no obstante, en los argumentos de los estudiantes cabe destacar la mayoría en primera instancia se limitan a pensar en el caso en que el orden de los grupos es finito, donde todo subgrupo propio no puede ser isomorfo al grupo debido a la cardinalidad; sin embargo, esto no necesariamente sucede en el caso en que los grupos son de orden infinito. Aquí Rodolfo se vale de un ejemplo erróneo de este último caso, tomando a $(Z,+)$ como subgrupo de $(Q,+)$, de los cuales dice que son isomorfos; pero al analizar el caso de $(Q,+)$ como subgrupo de $(\Re,+)$, que no son isomorfos, concluye que el enunciado en general es falso, mostrando con este último par de grupos un contraejemplo.

> **R:** […] no es suficiente que G sea un subgrupo para que G sea isomorfo, para demostrarlo hay que dar precisamente un contraejemplo […].

E: […] si tú dices que es falso, ¿siempre?

R: No, quién sabe, a lo mejor podemos hallar condiciones necesarias y suficientes para que un subgrupo sea isomorfo […] Un subgrupo propio no […] porque no tienen la misma cardinalidad. No, de hecho podemos decir que el único subgrupo que es isomorfo a G es G mismo, pero no hay otro porque si existiera, si $\exists H < G \ni H \cong G \Rightarrow |H| = |G|_{\#}$ porque H es propio. No siempre, no, en los infinitos no, porque en los infinitos toda parte propia tiene la misma cardinalidad […]

R: Si son finitos no, y además es propio; pero si son infinitos no necesariamente, como te digo, este, ahí no podemos decir categóricamente que no porque, aquí está el ejemplo, considerando a Z como subgrupo de Q; pero por supuesto podemos considerar a Q como subgrupo de $\Re$, pero ahí se amula la cosa, ¿no?, porque Q es un subgrupo de $\Re$ con la suma y este, no son isomorfos […]

R: No, aquí ya está el ejemplo, no, no se vale ni para finitos ni para infinitos […].

Como ejemplo particular se le propone a $(Z,+)$ y $(2Z,+)$ para el cual es capaz de construir un isomorfismo entre ellos, y que los grupos en cuestión son isomorfos; con todo, un poco desconcertado Rodolfo parece manifestar la idea de que el conjunto "más grande" es también el más numeroso tal y como lo veremos en la parte final del siguiente extracto.

R: $(Z,+)$ […]

R: […] $(2Z,+)$, la cardinalidad es la misma, la biyección es clara; ah pues habría que demostrarlo:

$$\varphi : n \rightarrow 2n$$
$$\varphi(n+m) = 2(n+m) = 2n + 2m = \varphi(n) + \varphi(m)$$

Entonces aquí ya tienes el ejemplo que no siempre, que <u>no siempre un subgrupo</u>, […] <u>va a ser isomorfo al más grande</u> […].

Cuando se discute con Alejandro sobre su respuesta al enunciado 5. (iv), donde el estudiante había expresado que en el caso de los grupos finitos, ningún subgrupo propio es isomorfo al grupo, pero que en el caso de los grupos infinitos sí podría suceder, el estudiante duda de esta última afirmación diciendo que no sabe si efectivamente es verdadera. Ante el estancamiento que mostró el estudiante se le propone, al igual que a Rodolfo, los grupos $(Z,+)$ y $(2Z,+)$. Alejandro es capaz de construir un isomorfismo entre ellos; es así como el estudiante a partir de este ejemplo llega a considerar que un grupo puede ser isomorfo a alguno de sus subgrupos.

A: Yo puse que ningún subgrupo de un grupo finito puede ser isomorfo, bueno, ningún subgrupo propio, ¿por qué?, pues usando el inciso anterior, ¿no?, por el orden; pero si el orden del grupo es infinito sí se puede dar el caso de ser isomorfo, ¿por qué puse eso?

E: ¿Pudieras dar un ejemplo para ese último caso?

A: No, creo que, no sé por qué escribí eso; digamos que lo borraría porque no sé de lo que estoy hablando realmente, no sé si sea cierto o no es cierto; ¿tú crees que sea cierto?

E: Me gustaría que trataras de averiguarlo por ti mismo.

A: Es que no sé.

E: ¿Qué opinas de los grupos Z y $2Z$? , ambos con la suma.

A: Bueno aquí […] es inyectiva, el único que manda al cero es el cero, ah, ni siquiera he visto si es morfismo […] y entonces sí, es un morfismo, es inyectivo y, ¿es suprayectivo?, sí, también; porque cualquier elemento de aquí, de $2Z$ puedes verlo como 2 por algún elemento de Z y eso es lo que querías, que eso fuera, que f de cada elemento te lo llevara a 2 por eso.

$f(0) \to 0$

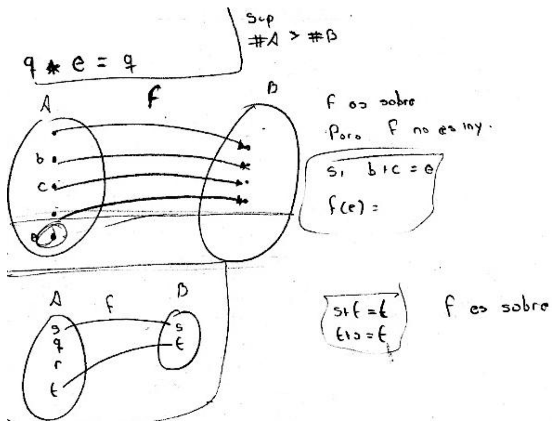
$f(x+y) = 2(x+y) = 2x+2y = f(x)+f(y)$

$f(x)=2x$ inyect

A: […] son isomorfos y […] el orden del grupo es infinito. Aquí sucedió que este es subgrupo de este y resultó ser isomorfo […] entonces retiro lo dicho hace un rato y no lo quitaría como dije.

A diferencia de los estudiantes anteriores, Miguel dice del enunciado 5. (iv) que es verdadero, ya que un subgrupo "cumple con las condiciones de grupo", razón suficiente para considerar que sean isomorfos. En el caso de los grupos de orden finito, el estudiante implícitamente piensa que un grupo puede ser isomorfo a alguno de sus subgrupos (propios), por lo tanto, la función que preserva estructura no necesariamente tiene que ser biyectiva sino sobreyectiva; mientras que, para el caso de los grupos de orden infinito, considera que cuando el subgrupo tiene cardinalidad finita, entonces podrían ser isomorfos. En este caso observamos que Miguel interpreta el "preservar la estructura", como ambas estructuras siendo grupos; así, no está claro qué papel juega la función isomorfismo.

M: […] porque cuando eso es subgrupo, pues cumple con las condiciones de grupo, con la operación de G, por ejemplo, a ver, este es un subgrupo de este porque está cerrado (refiriéndose al grupo G de cuatro elementos, $A=\{q,r,s,t\}$, representado por medio de su tabla en el ejercicio 4, toma al subgrupo (propio) al cual llama $B=\{s,t\}$) […] Entonces tengo una función, no necesariamente inyectiva sobre el conjunto A, porque no es inyectiva pero sí es sobre, pero ahí ya estoy definiendo mi isomorfismo, ¿no? […] entonces con esto, para que sea isomorfismo sólo debemos pedir que f sea sobre y no necesariamente inyectiva la función, que todos los elementos de acá de nuestro conjunto dominio, del codominio, perdón, tengan alguien que les pegue del dominio y si este conjunto dado es cerrado, entonces se va a cumplir.



E: Y, ¿qué puede decirse respecto a los grupos infinitos, pudiera suceder que un grupo pueda ser isomorfo a alguno de sus subgrupos?

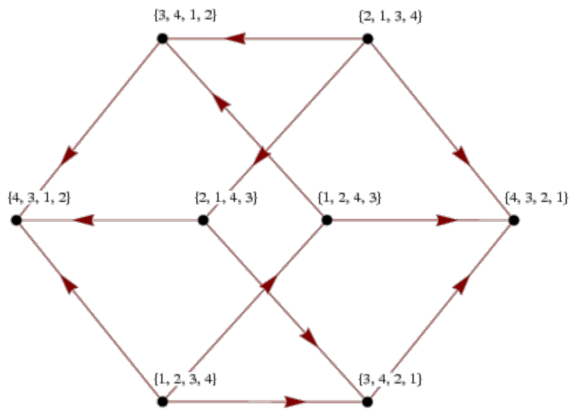
M: Para infinitos creo que sí, bueno, quién sabe, yo creo que sí, siempre y cuando el subgrupo sea finito, o sea, no importa que este tenga cardinalidad infinita […] o sea, el grupo, a ver si me entiendes; sea el grupo $(A,*)$, entonces, supongamos que A, tiene cardinalidad infinita, pero sea $(B,*)$ un subgrupo de A tal que la cardinalidad de B si sea finita, entonces yo creo que cuando pasa esto sigue siendo verdadero porque si el subgrupo es infinito no sé qué se pueda asegurar porque tendríamos un diagrama parecido pero acá no tendría fin, tendríamos muchos elementos, pero acá sí, no sé igual y también dependa de la f […].

Comentarios

Para algunos estudiantes la idea de que el conjunto más grande es por tanto el más numeroso los conduce a falsas conclusiones como la de considerar que un grupo es más grande que sus subgrupos y por lo tanto no es posible establecer un isomorfismo entre ellos, en particular, una biyección entre los conjuntos subyacentes. O llegan a considerar el hecho de que un grupo pueda ser isomorfo a alguno de sus subgrupos es algo “contra intuitivo”, como lo fue en el caso de Diana y Víctor, respectivamente; mientras que otros únicamente logran considerar esa posibilidad solo a partir de proponerles un ejemplo específico y cuestionarles sobre este.

Además, la idea de Miguel de que un grupo pueda ser isomorfo a alguno de sus subgrupos, debido a que estos últimos cumplen con las propiedades de grupo lo llevan a considerar que, por ejemplo, un grupo finito pueda ser isomorfo a sus subgrupos (propios) y en el caso de un grupo infinito esto también se cumpla cuando el subgrupo sea de cardinalidad finita; así, para estos casos según evidencia Miguel, para que la función sea un isomorfismo basta con que sea sobreyectiva. En el caso de los grupos $(Q,+)$ y $(\Re,+)$ el estudiante ignora si es posible establecer una biyección entre los conjuntos involucrados, a pesar de que dice que ellos tienen cardinalidad distinta, diciendo que tal vez como en el caso de Q y N, aunque a simple vista pareciera que el primero tiene más elementos que el segundo, “hay una función que te los manda a todos”; de esta manera el estudiante también pudiera estar pensando que para que un grupo sea isomorfo a alguno de sus subgrupos “depende de aplicación que uno dé”(véase sección 4.1.1).

Finalmente, con relación al ejercicio 14, Víctor identifica $G = \{a^n | n \in Z\}$ como el grupo cíclico, diciendo que pudiera tratarse del grupo cíclico finito o del cíclico infinito, el primero isomorfo a Z_p y el segundo isomorfo a Z, trabajando con estos y diciendo de ambos que no poseen subgrupos no triviales a los cuales pudieran ser isomorfos. Sabemos que eso es verdadero para el primer caso pero no para el segundo, claramente se tiene el conjunto nZ de todos los múltiplos de n que es un subgrupo de Z bajo la suma, el subgrupo cíclico generado por n. Por su parte, Rodolfo es capaz de construir un subgrupo isomorfo a G, $G' = \{a^{2n} | n \in Z\}$, diciendo que es como trabajar con Z y $2Z$, que son isomorfos puesto que al ser subgrupo “todas las propiedades” les son “heredadas”.



CAPÍTULO 5

Conclusiones

El objetivo de investigación planteado en el Capítulo 1 de este trabajo fue: *Identificar y explicar las dificultades encontradas en los estudiantes universitarios con el concepto isomorfismo de grupos*. En este capítulo se presentan las conclusiones generales, algunas sugerencias y los límites de esta investigación.

5.1 Con relación al problema y las preguntas de investigación

De una experiencia como estudiante de licenciatura en Matemáticas nace un interés personal por responder a la pregunta: *¿cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes universitarios con el entendimiento del concepto isomorfismo de grupos*?

La literatura muestra que el interés por llevar a cabo investigaciones dentro del campo de la didáctica del Álgebra Abstracta es relativamente reciente, prueba de ello son los escasos trabajos existentes (en comparación con otros dominios de la Matemática, por ejemplo, Álgebra Lineal y Cálculo Diferencial e Integral). No obstante, los resultados de esas investigaciones de procedencia, principalmente, Estadounidense, Israelí, Canadiense, entre otros, muestran un panorama de los problemas a los que se enfrentan estudiantes universitarios en su primer curso de Álgebra Abstracta, de manera particular con algunos conceptos de la Teoría de Grupos. Además, varias de esas investigaciones se han llevado a cabo empleando un método distinto a la enseñanza tradicional, mediante el uso de computadoras. Sin embargo, de manera particular en nuestro país, el curso de Álgebra es comúnmente impartido de manera tradicional; es así que consideramos importante iniciar un estudio bajo este contexto.

En los trabajos de los cuales se hizo referencia en el párrafo anterior se hace hincapié en la necesidad de ampliar las investigaciones con el fin de desarrollar a futuro propuestas de estrategias de enseñanza y lograr una incidencia positiva en el aprendizaje del Álgebra Abstracta. Dichas investigaciones han sido llevadas a cabo desde distintos marcos teóricos y metodológicos, poniendo en evidencia que los estudiantes presentan dificultades con el entendimiento de conceptos particulares de la Teoría de Grupos como: grupo, subgrupo, clases laterales, normalidad, grupo cociente, isomorfismo de grupos, grupos cíclicos, entre otros; de los cuales los tres primeros han recibido mayor atención con relación a los tres últimos. Así, consideramos que es importante llevar a cabo investigaciones que permitan entender el conocimiento que subyace a las dificultades, de las cuales se ha evidenciado que están presentes cuando los estudiantes se enfrentan a ciertos contenidos del Álgebra Abstracta.

Entre otras cosas, algo que caracteriza a la enseñanza en el nivel superior y en particular en la carrera de licenciatura en matemáticas, es la presentación de los conceptos a partir de sus definiciones y se espera que los estudiantes logren entenderlos a partir de estas. Por lo tanto, las definiciones juegan un rol importante; sin embargo, hay evidencia de que precisamente las definiciones crean un problema serio en el aprendizaje de las matemáticas (Vinner, 1991; Moore, 1994; Edwards & Ward, 2008); en particular, el Álgebra Abstracta no es la excepción (Lajoie, 2000).

Precisamente, un marco que describe la interacción del entendimiento del individuo con relación a un concepto matemático particular y su definición formal es el modelo teórico *imagen del concepto/definición del concepto* (Tall & Vinner, 1981), razón por la que consideramos apropiado emplear este marco como soporte teórico de nuestra investigación.

Tomando en cuenta los aspectos descritos en este apartado se llegó a la formulación de las siguientes dos preguntas específicas (auxiliares) que nos permitirían dar respuesta a la pregunta general de investigación enunciada al principio de esta sección:

1. ¿Cuáles son las definiciones y explicaciones del concepto isomorfismo de grupos en las que se apoyan los estudiantes participantes?

2. ¿Cuáles son las principales imágenes del concepto isomorfismo de grupos usadas por los estudiantes participantes ante las situaciones planteadas?

5.2 Síntesis de los resultados de la entrevista

5.2.1 Dificultades asociadas con el concepto isomorfismo de grupos

Los estudiantes en esta investigación exhiben distintas ideas con relación a los grupos isomorfos, mismas que ocupan un lugar importante en su imagen desarrollada de dicho concepto.

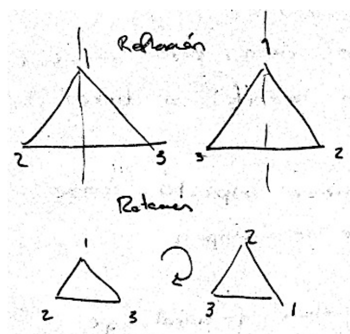
Observamos que para algunos estudiantes la preservación de las operaciones no ha sido integrada a su imagen del concepto y esto les impide asociar su idea acerca de los grupos isomorfos como aquellos que "tienen que cumplir ciertas propiedades en común" o que "son iguales respecto a sus propiedades algebraicas" con la definición formal, de hecho, con la definición de isomorfismo de grupos.

Además, todos los estudiantes dicen estar de acuerdo en que "dos grupos son isomorfos si existe una función biyectiva de uno al otro que <u>preserve la misma estructura de grupo</u>", cada uno dando una interpretación distinta a la parte final del enunciado anterior; por ejemplo, suelen asociarlo con las semejanzas que ellos son capaces de observar, principalmente, entre los elementos de los grupos, también para referirse a la propiedad de homomorfismo y a los axiomas de grupo; incluso suele pensarse, como en el caso de Miguel, que basta con que la función sea sobreyectiva y no necesariamente inyectiva.

Para demostrar que dos grupos son isomorfos los estudiantes son conscientes que deben construir una correspondencia biunívoca entre los grupos; sin embargo para algunos, como se dijo anteriormente, la preservación de las operaciones no es considerada y suelen recurrir a la búsqueda de semejanzas entre los grupos para encontrar esa correspondencia; por ejemplo, el orden del grupo y el orden de los elementos. Respecto al cálculo del orden de los elementos, al igual que en la investigación de Leron, Hazzan y Zazkis (1995), aquí también fue utilizado para determinar cuándo dos grupos eran isomorfos.

Lo expuesto al final del párrafo anterior pudiera tener una explicación lógica si consideramos que estas "semejanzas" o "parecidos" son relativamente fáciles de identificar entre dos grupos por los estudiantes, debido quizá a que dichas propiedades hacen alusión a un lenguaje familiar para ellos, el cual involucra números y por lo tanto hay una preferencia hacia estas; o también debido a la experiencia de trabajar con grupos de orden pequeño donde el orden de los elementos determinan un isomorfismo. Además, algunos de los estudiantes fueron incapaces o fallaron al generar y usar sus propios ejemplos de grupos isomorfos y grupos no isomorfos, veamos el caso de Diana.

> **D:** […] por ejemplo, el grupo de las transformaciones de un triángulo podría ser un grupo isomorfo con Z_4; el de la rotación, traslación y ¿cuál es el otro?; rotación, traslación y reflexión, lo haría con Z_4.
>
> **E:** ¿Cómo sabes que ellos son isomorfos?
>
> **D:** Ambos tienen cuatro elementos. Ah, me falta un elemento, el que los deja fijos, que sería la identidad […] no, no sería ésta porque la traslación no va a cumplir nada, entonces sí sería el ejemplo que di, la de la reflexión por cada uno de los ejes o las rotaciones, también podría ser […] Podría ser el isomorfismo que va de la reflexión por cada uno de los ejes y la rotación de 60° por cada uno de estos, o sea, y ahí sí podría asociar el isomorfismo correspondiente de que, bueno, si éste me lo manda acá, el de la reflexión por el vértice 1, entonces encontrarme la rotación que pues efectivamente me deje éste en 1, éste en 2 y éste en 3; sí, entonces haría esa, sí, ese sería el isomorfismo que daría, entre el grupo de las rotaciones y el de las reflexiones […].



Por otra parte, fue común entre los estudiantes referirse exclusivamente al isomorfismo como un homomorfismo biyectivo (correspondencia particular entre dos grupos isomorfos) y no verlo también como una relación de equivalencia (la clase de isomorfismo), a excepción de Rodolfo quien sí se refiere al isomorfismo de estas dos maneras; sin embargo, es interesante observar cómo el estudiante no parece considerar demasiado útil el saber que un isomorfismo es una relación de equivalencia.

> **R:** […] hay una relación entre los grupos isomorfos […] dado el conjunto, dada la clase de todos los conjuntos, ¡porque es una clase! […] es una relación dada, la de isomorfismo y esa es una, de hecho así es una primera clasificación, pero no es tanto como los espacios vectoriales que se pueden clasificar a partir de […] la dimensión […] esto es mucho más complicado (se refiere al caso de los grupos), la caracterización, ¡vaya, es realmente

> complicada!, […] entonces sí, existe esta relación pero, ¿caracterizarlos a partir de?; no, es complicado.

Otra dificultad presentada por algunos de los estudiantes en esta investigación fue el considerar que el isomorfismo entre dos grupos isomorfos es único; pensemos por ejemplo en el caso de Diana, quien basada en su concepción de que "dos grupos que son isomorfos tienen que cumplir ciertas propiedades en común" cree que existe una "única" función biyectiva de un grupo al otro, ya que los elementos de ambos grupos se comportan igual bajo su operación; dichas propiedades a las que hace referencia son precisamente los "parecidos" que ella observa entre los elementos, los cuales le permiten establecer la correspondencia biunívoca entre ellos, el isomorfismo. Diana tiene la idea de que si dos grupos tienen el mismo orden, son isomorfos, lo cual pudiera tener su origen en una confusión entre una proposición y su recíproco, aunado a los resultados del Álgebra lineal que son trasladados al caso particular de grupos.

> **E:** […] *Dos grupos son isomorfos si son grupos del mismo orden.*
>
> **D:** […] Pues yo recuerdo del Álgebra lineal que si al menos dos espacios tienen la misma dimensión, o sea, que para la base tienen el mismo número de elementos entonces son isomorfos, entonces pues sí, por ejemplo en el último ejercicio que todos son isomorfos pues tienen la misma cardinalidad […]
>
> **E:** […] *Si G y G^* no tienen el mismo orden, entonces no son isomorfos.*
>
> **D:** No, por la respuesta que te di antes, del ejemplo que te pongo del Álgebra lineal, que tengo un Espacio vectorial y otro Espacio vectorial en el que son isomorfos, entonces deberían tener la misma base, ¿no?, el mismo número de elementos en la base y si no se da, pues no puedo hacer el isomorfismo ahí, entonces deben tener el mismo orden.

Por otra parte, sabemos que si un grupo G es isomorfo a un subgrupo (propio) de él, entonces la cardinalidad de G debe ser infinita, aunque claramente esto no es suficiente; sin embargo, algunos de los estudiantes participantes no conciben a primera instancia que un grupo pueda ser isomorfo a alguno de sus subgrupos (propios), ya que se tiene la idea de que el conjunto "más grande" es por tanto el más numeroso, por tanto, no es posible establecer una función biyectiva entre ellos.

5.2.2 Otras dificultades

A lo largo de la entrevista algunos de los estudiantes participantes en esta investigación exhiben ciertas dificultades que no están asociadas precisamente con el concepto de isomorfismo de grupos, más bien parecen tener su origen en el entendimiento de conceptos relacionados con este, principalmente el de grupo (axiomas de grupo) y subgrupo, como veremos a continuación.

Recordemos que si G es un conjunto no vacío y $*$ una operación binaria definida en G, al par $(G,*)$ es un grupo si $*$ satisface:

i) $*$ es asociativa.

ii) Existencia de elemento neutro para $*$.

iii) Existencia de inverso de un elemento respecto a $*$.

- En dos ocasiones Diana considera la posibilidad de que en un grupo no exista elemento neutro; de hecho utiliza esto como argumento para presentar un contraejemplo al enunciado, G *es isomorfo a* G^* *si ambos son conmutativos*.

  D: ¿Son isomorfos si ambos son conmutativos?, mmm, pues no, porque por ejemplo, en la primera, yo puedo tener, no sé, elemento identidad y en el segundo no necesariamente pero en ambos se cumple la conmutatividad, entonces ya no existe el isomorfismo ahí. Puede ser que en la estructura del primero, por ejemplo, se cumpla que hay elemento identidad y en mi segundo no necesariamente, pero en ambos se cumple la conmutatividad y ya, no son grupos isomorfos porque ya, en uno no tengo identidad y en el otro sí tengo identidad.

- Referente al ejercicio 13, los tres estudiantes a quienes se les preguntó de este, presentaron algún tipo de dificultad al intentar averiguar si un conjunto dado era grupo.
  - Con relación al conjunto $A_1 = \{[2],[4],[6],[8]\} \subset Z_{10}$, con la multiplicación módulo 10; Alejandro y Víctor consideran a primera instancia que no es grupo ya que $[1]$ no forma parte de los elementos de ese conjunto. Mientras que Alejandro logra concluir correctamente que $[6]$ es el elemento neutro y que $(A_1,\cdot_{10})$ es grupo; Víctor tiene la idea de que en caso de ser grupo, $[1]$ estaría ahí considerando que fuese subgrupo de Z_{10}; fuera de ello, si algún otro elemento de A_1 resultara ser la identidad sería "muy extraño".

V: […] Como es la multiplicación, pues si va a asociar, es la más difícil de ver, que asocia; a ver, pues a ver si tiene identidad, es ver si alguno cumple que es identidad aunque no creo porque sería muy extraño; pues si fuera un subgrupo de esta pues sería el 1, pero ninguna de estas es la clase del 1, pero si fuera un subgrupo, ¿no?; pero, ¿si fuera un grupo por sí mismo?, a lo mejor con esta, podría, así muy raramente ser la identidad. A ver, pues el $2 \cdot 2$ me da 4, la clase del 4, $2 \cdot 4$ me da la del 8 […] el 2 no es la identidad, el 4 tampoco, el 6 tampoco y el 8 tampoco, es que ya viendo que no, o sea, multiplicando a uno por otro, pues para empezar si fuera la identidad lo tendría que dejar fijo y ninguno deja fijo a nada, entonces este no tiene identidad y por lo tanto no es grupo.

Cabe hacer mención que en el caso de Diana, ella no presenta algún problema al trabajar con este conjunto y mediante el empleo de las tablas de operación concluye correctamente que $(A_1, \cdot_{10})$ es grupo. Al respecto, recordemos lo que investigaciones como las de Findell (2002) y Thrash y Walls (1991) han evidenciado respecto al empleo de tablas de operación; los resultados dan cuenta de que estas pueden jugar un papel importante en el pensamiento de los estudiantes ya que trabajar en este contexto permite adquirir algunas habilidades concretas en el trabajo y manipulación de grupos; sin embargo también es importante tomar en cuenta sus limitaciones.

- Con relación al conjunto $A_2 = \{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\} \subset S_4$, con la composición de permutaciones; Alejandro no es capaz de concluir algo respecto a este y en el caso de Víctor, considera que no cumple la propiedad iii) y por lo tanto no es grupo; el problema es que en sus cálculos no toma en cuenta que cada elemento pudiera ser su propio inverso.

V: […] y ahora vamos a ver si este es grupo (se refiere a A_2) y ya después ver cuáles de ellos son isomorfos, a ver, pues vamos a representar a estos de otra forma, ¿no?

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = \alpha_1$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix} = \alpha_2 \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \alpha_3$$

[…] con la composición de permutaciones, pues vamos a ver si es grupo; como son funciones pues asocia, como este deja fijos, pues es la identidad; ah, bueno, vamos a ver si es cerrado, vamos a ver si operando cualesquiera dos de estas no me da otras cosas que no esté […] tengo que hacer todas porque no sé si sea subgrupo de S, tengo que hacer todas las combinaciones y pues no, aquí al menos ya noté algo, estos conmutan:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 \cdot \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[…] bueno, estas no conmutan pero al menos sí están en el conjunto:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \alpha_3 \cdot \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces ya hice α_1, ya hice este con este, este con este ya lo hice, entonces falta este con este (se refiere a α_2 y α_3):

$$\alpha_2 \cdot \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha_3 \cdot \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

[…] aparte de ver que sí es grupo pues ya vi algunas propiedades, ¿no?; que, al menos estos conmutan (se refiere a $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ y $\alpha_2 \cdot \alpha_3$), ya vi que es asociativo, que cierra, que tiene identidad y de los inversos pues aquí se ve, ¿no?, porque por ejemplo, o sí, ¿sí?; no sé, a ver, nadie me dio la identidad, ¿verdad?; no, no tienen inversos, porque ya multipliqué estos y busqué por ahí, con este, no da la identidad, ni con este y este pues tampoco porque va a dar el mismo, entonces <u>no tienen inversos</u> (se refiere a las permutaciones obtenidas anteriormente); o, ¿sí me dio la identidad? ¿no, verdad?, no, pues ya no tienen inversos […].

Tocante al tercer axioma de grupo, cabe mencionar que en el caso de Diana este no es considerado, y por lo tanto no es de preocupación para la estudiante el verificarlo.

- Cuando hay que averiguar si la operación es asociativa, para Diana es suficiente verificarlo para un caso particular determinando a partir de este que cumple con esa propiedad.

D: […] tengo que checar la asociatividad […] a ver, veamos.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}}$$

[…] pues sí, asociativo […] entonces, pues sí, también es grupo.

- Con relación al conjunto A_4, constituido de las tres reflexiones de un triángulo equilátero y de la identidad, con la composición de transformaciones; Diana dice de él que también es grupo, sin embargo falla la cerradura, en realidad A_4 no es grupo.

En el caso de Miguel, cuando se le pide apoye con un ejemplo su explicación de grupos no isomorfos, dice que lo que haría sería "tomar dos grupos y dar la función que sea isomorfismo"; sin embargo, una dificultad inicial es que no es capaz de proponer ese par de grupos, por supuesto $(\Re,+)$ sí es grupo, mientras que $(\Re,\cdot)$ no lo es, pues en particular, 0 no tiene inverso.

> **M:** Mmm, pues sería $\Re$ con C, ¿no?; no son.
>
> **E:** $\Re$ con C.
>
> **E:** $\Re$, ¿con qué operación sería?
>
> **M:** No, pues con la suma no está cerrado, y con la multiplicación no, es que así un ejemplo específico, no […].

Por otra parte, cuando Miguel se propone a dar un ejemplo para explicar lo que para él significa que los grupos isomorfos sean grupos *similares* se presenta una situación que pudiera ser considerada como *reducción del nivel de abstracción*, ya que se pudo observar que al igual que otros estudiantes en la investigación de Hazzan (2001), Miguel no entiende cómo o por qué en una tabla de operación de grupo, todos los elementos del grupo aparecen exactamente *una vez* en cada renglón y exactamente *una vez* en cada columna; sin embargo, él encuentra suficiente el "procedimiento canónico" para llenar la tabla, es decir, el estudiante ejecuta el procedimiento automáticamente sin necesariamente estar entendiendo las ideas matemáticas detrás de dicho procedimiento.

> **E:** Y ese, ¿es grupo?, ¿cómo estás operando?
>
> **M:** No sé; con la multiplicación normal en $\Re$.

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

> Pero creo que no, porque tendría que estar uno de cada uno en cada línea y aquí hay puros ceros (se refiere a la segunda columna y a la segunda fila en su tabla).

E: Y, ¿por qué tendría que ser uno en cada línea?

M: Ah, no sé muy bien […].

Las dificultades presentadas anteriormente son dignas de tomarse en cuenta ya que como pudimos observar, ciertas ideas pueden no conducir a conclusiones correctas e incluso, como se vio en nuestro caso, pueden ser determinantes para la comprensión de otros conceptos matemáticos.

Finalmente, cabe hacer mención de otro factor influyente, observado en los resultados presentados en esta investigación y que tiene que ver con el contexto en que se presentaron ciertos grupos. Fue interesante observar cómo a pesar de que algunos estudiantes tienen conocimiento de que hay solo dos grupos de orden 4, Víctor por ejemplo no parece identificar que los grupos presentados en el ejercicio 4 y A_2 del 13 son *esencialmente* el mismo; y al concluir que $A_3 \cong A_5$ no menciona que sean isomorfos al grupo cíclico de orden 4.

5.3 Respuesta a las preguntas de investigación

5.3.1 Con relación a la pregunta: ¿cuáles son las definiciones y explicaciones del concepto isomorfismo de grupos en las que se apoyan los estudiantes participantes?

En el caso de Diana cuando se le pregunta qué significa para ella que dos grupos sean isomorfos la respuesta de la estudiante es "<u>que entre los grupos exista una función biyectiva</u> […] que asocie a los mismos relacionándolos con propiedades comunes que existan entre ellos", el isomorfismo. En el ejercicio 13 cuando se le pregunta si puede existir más de un isomorfismo entre los grupos isomorfos queda aún más claro esto al dar la siguiente respuesta.

D: […] no, pues si es único […] porque los estoy relacionando mediante <u>la única función biyectiva</u> que debe de haber ahí […] en cómo se comportan […] de esa manera los relaciono y esa relación es única, no puede ser de otra manera.

Nuevamente vuelve a hablar de ello cuando se le solicitan algunos consejos para dar a un (a) amigo (a) a fin de determinar son o no isomorfos.

> **D:** <u>Checar primero que la función es biyectiva</u> […] y la cardinalidad, yo creo que es importante la cardinalidad.

Cuando se le cuestiona a Víctor acerca del enunciado 5. (iii), el estudiante dice que "<u>el isomorfismo es en particular una biyección entre los grupos</u>". Casi al inicio de la entrevista se le pregunta cómo explicaría isomorfismo de grupos a un estudiante quien toma su primer curso de Álgebra moderna; su explicación se muestra en el siguiente extracto.

> **V:** Pues <u>el isomorfismo es como lo que los hace corresponder</u>; el isomorfismo ya sería como la manera en la que yo podría tomar elementos de uno y pasarlos al otro y trabajar ahí y viceversa y como entre esos se conservan las propiedades algebraicas pues, o sea, en cualquier momento yo puedo trabajar en uno, las propiedades algebraicas y regresarlas al otro, que a lo mejor en una parte se ven más difíciles y en el otro ya se ven más fáciles, entonces <u>como que ese isomorfismo preserva las cualidades algebraicas</u> pues puedo trabajar con cualquiera, bueno, la cualidad algebraica, el que yo quiera, en cualquiera que se me haga más fácil.

Conociendo esta idea de Víctor, resulta comprensible la manera en que él procede a averiguar si dos grupos son isomorfos. En este caso, de ser isomorfos los grupos, es decir, al existir una función biyectiva entre ellos, esta preservaría las cualidades (propiedades) algebraicas; así, al haber una contradicción donde uno de los grupos cumpla con una propiedad y el otro no, entonces inmediatamente se puede concluir que no son isomorfos; ya que los grupos isomorfos "no tienen alguna propiedad algebraica que los distinga".

Para Miguel, dos grupos son isomorfos si hay una función (biyectiva o sobreyectiva) tal que bajo la condición (regla): $f(a+b)=f(a)+f(b)$ se puede decir que los grupos isomorfos tienen (preservan) la misma estructura algebraica.

> **E:** Bien; entonces, ¿cómo explicarías isomorfismo de grupos a un estudiante quien toma su primer curso de Álgebra moderna?
>
> **M:** […] entonces <u>el isomorfismo es una función</u>, <u>una función que cumple</u> esto, <u>la condición</u> que se tiene (se refiere a $\underline{f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2)}$.

Para Alejandro, un isomorfismo es <u>un homomorfismo biyectivo</u>. En varias ocasiones se refiere a él como una función f (biyectiva) que preserva el neutro y que cumple con la característica de que abre la operación (propiedad de morfismo).

> **E:** […] Para ti, ¿qué significa que dos grupos sean isomorfos?
>
> **A:** […] Cuando yo puedo formar una biyección entre dos grupos, que cumple dos condiciones; que la función manda al elemento neutro en un elemento neutro al otro grupo y que cumple esta característica, la función, digamos que abre la operación, esto es en una notación aditiva.
>
> Sea G, H grupos y f una función que cumple
>
> $$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
>
> $$f(e_G) = e_H$$
>
> $$\langle G, + \rangle \qquad \langle H, + \rangle$$
>
> **E:** ¿Te refieres a la propiedad de morfismo?
>
> **A:** Sí, porque puede ser una biyección pero necesita ser un morfismo también, ¿no?; porque si no fuera morfismo, entonces no se puede hacer el isomorfismo; entonces, que fuera un morfismo y que fuera una biyección ese morfismo […].

Finalmente, Rodolfo dice del isomorfismo que es una relación de equivalencia sobre los grupos. Además se refiere a éste como una función biyectiva que preserve la estructura de grupo, es decir, que $f(a+b)=f(a)+f(b)$.

5.3.2 Con relación a la pregunta: ¿cuáles son las principales imágenes del concepto isomorfismo de grupos usadas por los estudiantes participantes ante las situaciones planteadas?

Recordemos que la "imagen del concepto" se refiere al conjunto de todos las imágenes mentales que son asociadas con el concepto, junto con todas las propiedades que lo caracterizan; se deriva de los ejemplos, gráficos, símbolos, y otras experiencias que se tienen con el concepto. Así, una imagen del concepto puede contener diferentes ideas, concepciones, imágenes, ejemplos, etc., y algunos de estos elementos pueden entrar en contradicción con la teoría oficial, dando origen a ciertas *dificultades* importantes.

Como se mencionó en el Capítulo 2, como investigadores no podemos esperar comprender en su totalidad la imagen del concepto desarrollada por un estudiante; sin embargo, contamos con los diversos elementos de esta que son activados ante situaciones específicas que les son planteadas.

La información obtenida a partir de las entrevistas reveló ciertos aspectos del concepto isomorfismo de grupos que se encuentran presentes en los estudiantes participantes, algunos de los cuales los conducen a conclusiones erróneas como se muestra a continuación:

La idea que tiene Diana con relación a isomorfismo de grupos la lleva a creer que la única condición para que dos o más grupos sean isomorfos es que tengan el mismo orden; en su imagen no ha sido integrada la preservación de las operaciones, por lo tanto esto no es de preocupación para ella cuando se dispone a averiguar si los grupos son isomorfos.

Cuando se dispone a construir ***el*** isomorfismo entre dos grupos (finitos) se concentra en encontrar la correspondencia biunívoca basada en los "parecidos" que ella logra observar entre los elementos de los grupos. Esta idea se ve expresada claramente cuando se le presenta a Diana el ejercicio 12; de los grupos implicados dice al principio que no son isomorfos y el breve extracto que se muestra a continuación fue la respuesta que proporcionó cuando se le preguntó cómo podría estar segura de que no lo son.

> **D:** […] es que yo me lo estoy imaginando como con las tablas de colores […] entonces yo tendría que encontrar como los colores análogos a este elemento aquí como con este elemento aquí y entonces si éste es un color, entonces otro j por acá tendría que ser otro color y tendría que ser análogo a este color que tengo acá que no es el análogo al que tengo en este color […].

En el caso de Víctor, la concepción que posee respecto a isomorfismo de grupo lo lleva a no recurrir a la definición formal y cuando se propone averiguar si dos grupos (finitos) son isomorfos le es suficiente con explorar las propiedades algebraicas de ambos, por ejemplo el orden de los elementos para establecer una correspondencia (un isomorfismo) entre ellos. Mientras que para Miguel dos grupos dados pueden ser y no ser a la vez isomorfos, dependiendo de la función que uno proponga; también su concepción acerca de isomorfismo de grupos le permite considerar la posibilidad de que dos grupos con cardinalidad distinta puedan ser isomorfos.

> **E:** […] ¿Qué consejos darías a un (a) amigo (a) a fin de determinar si dos grupos son o no isomorfos?
>
> **M:** El truco está en la función que uno dé, porque puede cumplir con la condición o no […] La función que propuse no es isomorfismo, entonces puedo decir que no son bajo esta función f, pero igual puedo construir otra que sí […] y entonces yo puedo decirle que estos no son isomorfos bajo la función, doy otra función y veo que sí son y ya después le digo, pero con esta función vas a ver que sí son isomorfismos […].

Por otra parte, tanto Alejandro como Rodolfo son los únicos que se refieren al isomorfismo de grupos como "homomorfismo biyectivo"; podemos apreciar esto en la respuesta de Alejandro cuando se le pregunta cuáles serían algunos consejos que él daría a un (a) amigo (a) a fin de determinar si dos grupos son o no isomorfos y en el caso de Rodolfo cuando se le pregunta por la manera en que él se aseguraría de que los grupos implicados en el ejercicio 12 son isomorfos.

> **A:** Pues le diría: primero dame un morfismo, dame el morfismo que quieras […] bueno, entonces le diría: dame un morfismo que se te ocurra, de tal manera que tú creas que sea biyectivo, entonces ya a la hora de demostrarlo vamos a ver que no; porque si él me dice: no, es que yo creo que sí son isomorfos, pues ya que me dé todos los morfismos posibles y que él trate, que casi obligue que esos morfismos sean biyectivos y a la hora de la hora tendremos que demostrar que no, o que no es inyectivo o que no es suprayectivo. Para que sea inyectivo, el núcleo tiene que ser el cero, ¿no?, el neutro; y para que sea suprayectivo, pues tendrían que pasar otras cosas.
>
> **R:** […] agarrar primero la asignación, que es jugar, y ya después por construcción, tienes que verificar que para cada uno de ellos, esta propiedad, esto pasa para cada $a, b \in G$, nada más agarras pares e irlos multiplicando […] pero tenemos que hacer para todas las combinaciones posibles de dos elementos. Aquí, por ejemplo, si nada más preserva la estructura de grupo pues no es suficiente pues nada más sería un homomorfismo de grupos, pero ya cuando además hay una relación biunívoca entre los elementos ya podemos decir que son idénticamente, salvo el nombre de la operación y de los elementos.
>
> **E:** […] Y para el caso de los de orden infinito, ¿cómo procedes para construir un isomorfismo?
>
> **R:** […] El primer paso es dar la función […] entonces lo primero que procedemos es dar la función, la que se te ocurra, porque así tienes que jugar, no va a salir a la primera […] y ya, después que ya des la función, ver que preserva esto, que preserva estructura de grupo y ya, tienes el segundo paso y el tercer paso es verificar si es una biyección entre, de conjuntos, de G y G', y ya así podrías concluir […].

5.3.3 Con relación a la pregunta general de investigación: ¿cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes universitarios con el entendimiento del concepto isomorfismo de grupos?

Cuatro dificultades asociadas con el concepto isomorfismo de grupos fueron identificadas en esta investigación en los estudiantes participantes, de las que se habla a detalle en el Capítulo 4: 1) dificultad en dar una interpretación correcta a la definición formal de grupos isomorfos, 2) dificultad para demostrar formalmente que dos grupos son isomorfos, 3) dificultad en considerar más de un isomorfismo entre dos grupos isomorfos y 4) dificultad en considerar que un grupo pueda ser isomorfo a alguno de sus subgrupos.

5.4 Límites de la investigación

En esta investigación consideramos al menos dos factores importantes que tienen una implicación directa con los resultados finales que se han reportado. En primer lugar, como se mencionó en la sección 3.2.1, el cuestionario de selección fue aplicado a 36 estudiantes; de la información obtenida se eligieron aquellos quienes eran candidatos a participar en la entrevista. Sin embargo por motivos ajenos a este proyecto de investigación, algunos estudiantes no quisieron colaborar, es por ello que la disponibilidad aquí jugó un papel importante.

El otro factor está relacionado con el tipo de preguntas y ejercicios planteados a los estudiantes. El instrumento de entrevista se diseñó tomando en cuenta la información previa obtenida de los cuestionarios aplicados, de los resultados de otras investigaciones y del tipo de preguntas que se emplearon en sus respectivas investigaciones, como la de Lajoie (2000) y Leron, Hazzan y Zazkis (1995). El razonamiento a partir de tablas resultó innovador para algunos de los participantes ya que no es común trabajar en ese contexto y nos permitió apreciar otras dificultades que ellos tienen con nociones previas al concepto isomorfismo de grupos. Además, el tipo de preguntas que solicitaban la opinión acerca de una idea expuesta por una tercera persona o la explicación que darían a un (a) amigo (a), nos permitieron obtener información más valiosa que el solicitar la definición formal del concepto; sin embargo, los ejercicios trataban más con grupos finitos que con grupos infinitos.

5.5 Sugerencias

Tomando en cuenta las observaciones hechas en la sección 5.4 respecto al instrumento de entrevista, sería interesante pensar en otro tipo de ejercicios, por ejemplo, donde a pesar de que el orden de los elementos de los grupos sean iguales, estos no sean isomorfos; o aquellos donde un grupo sea isomorfo a un subgrupo (propio) de él.

Los tipos de dificultades identificadas con este grupo de estudiantes sería interesante compararlos con los presentados por otros, esto con la finalidad de tener elementos suficientes para realizar propuestas dirigidas hacia la enseñanza y aprendizaje del concepto.

Finalmente, al trabajar con definiciones, es importante tomar en cuenta lo que señalan Edwards y Ward (2008), "las definiciones matemáticas frecuentemente tienen una historia", esto indica que pueden evolucionar; un estudio sobre el desarrollo histórico de la definición de isomorfismo de grupos nos pudiera proveer información sumamente valiosa para entender con mayor exactitud el tipo de dificultades presentadas por los estudiantes en nuestro tiempo e incluso bajo una investigación de este tipo tener elementos importantes que nos permitan diseñar estrategias de aprendizaje del concepto en cuestión.

Referencias bibliográficas

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev, M. A. y otros. (1973). La matemática: su contenido, métodos y significado. Primera Edición. Madrid: Alianza Universidad.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp.1-32). U.S.A.: American Mathematical Society.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior,* 16(3), 241-309.

Carlson, D. (2004). The Teaching and learning of tertiary algebra. In K. Stacey, H. Chick and M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI study conference, pp. 293-309). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Clark, J., DeVries, D., Hemenway, C., St. John, D., Tolias, G. & Vakil, R. (1997). An Investigation of students' understanding of Abstract Algebra (binary operations, groups and subgroups) and the use of abstract structures to build other structures (through cosets, normality and quotient groups). *Journal of Mathematical Behavior,* 16(3), 181-185.

Dubinsky, E. (2001). Teaching and Learning Abstract Algebra and Linear Algebra: A Unified Approach. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.): *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 705-712). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Dubinsky, E. & Leron, U. (1995). An Abstract Algebra Story, *American Mathematical Monthly*, 102(3), 227-242.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics,* 27, 267-305.

Edwards, B. & Ward, M. (2008). The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses. En Carlson, M. & Rasmussen, C. (Ed.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, pp. 223-232.

Findell, B. (2002). The operation table as metaphor in learning abstract algebra. In D. Mewborn (ed.) *Proceedings of the 24th Conference for the North American chapter of the Psychology of Mathematics Education. pp. 233-245. Athens, GA.*

Fraleigh, J. B. (2003). *A First Course in Abstract Algebra*. Seventh Edition, with V. Katz; Boston: Pearson Education. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 40(1), 71-90.

Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction: The case of constructing an operation table for a group. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 163-172.

Hazzan, O. & Leron, U. (1996). Students´ use and misuse of mathematical theorems: The case of Lagrange´s theorem. *For the Learning of Mathematics*, 16(1), pp. 23-26.

Hazzan, O. & Zazkis, R. (2005). Reducing abstraction: The case of school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 58, 101-119.

Herstein, N. (1975). *Topics in Algebra*. Second Edition, New York: J. Wiley.

Herstein, N. (1976). *Álgebra Moderna: Grupos, anillos, Campos y Teoría de Galois*. México: Trillas.

Lajoie, C. (2000). Difficultés reliées à l'apprentissage des concepts élémentaires de la théorie des groupes chez des étudiants et étudiantes universitaires. Thèse de doctorat, Université Laval, Ste-Foy.

Lajoie, C. (2001). Students' difficulties with the concepts of group, subgroup and group isomorphism. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.): *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 384-391). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Lajoie, C. & Mura, L. (2000). What's in a name? A learning difficulty in connection with cyclic groups. *For the Learning of Mathematics*. 20(3), pp. 29-33.

Larsen, S. (2009). Reinventing the concepts of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28, 119-137.

Leron, U., Hazzan, O. & Zazkis, R. (1995). Learning group Isomorphism: A Crossroads of many Concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 29, 153-174. Lie, S. (1874). Über Gruppen von Transformationen. *Gottinger Nachrichten* Nr. 22(1874), pp. 529- 542.

Mena, A. (2011). Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de grupos. Tesis de Doctorado. CICATA-IPN. México.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics* 27, 249-266.

Nardi, E. (2000). Mathematics undergraduates' responses to semantic abbreviations, 'geometric' images and multi-level abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 169-189.

Rösken, B. & Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast* 3, 181-204.

Rotman, J. (1995). *An Introduction to the Theory of Groups*. Fourth Edition, New York: Springer-Verlag.

Siu, M-K. (2001). Why is it difficult to teach abstract algebra? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.): *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 541-547). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

Thrash, K. R. & Walls, G. L. (1991). A classroom note on understanding the concept of group isomorphism. *Mathematics and Computer Education* 25(1), 53-55.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14 (3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, pp. 65-81.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (4), 356-366.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley, California: University.

Weber, K. (2002). The role of instrumental and relational understanding in proofs about group isomorphisms. *Proceedings from the 2nd International Conference for the Teaching of Mathematics*. Hersonissos, Crete, Greece.

http://www.fciencias.unam.mx/estudiosProfesionales/asignaturas/0001.pdf

esfm.ipn.mx/planes

ANEXO A

Cuestionario piloto

Nombre: ____

Semestre: ____________________

1. ¿Qué significa que dos grupos G y G' sean isomorfos? Explica ampliamente.

2. ¿Qué significa que dos grupos G y G^* NO sean isomorfos? Explica ampliamente.

3. ¿Qué significa que una propiedad sea preservada bajo isomorfismo? Explica ampliamente.

4. Observa la siguiente tabla del grupo G y da un ejemplo de otro grupo G' que sea isomorfo a G. Justifica tu respuesta.

$*$	q	r	s	t
q	q	r	s	t
r	r	q	t	s
s	s	t	q	r
t	t	s	r	q

ANEXO B

Instrumento de selección

Cinvestav

Nombre: ____

Semestre: __________________________ e-mail_____________________________

1. Las afirmaciones que se presentan a continuación fueron hechas por estudiantes que habían tomado un curso de Álgebra moderna. Para cada una, señala si estás de acuerdo, en desacuerdo o parcialmente de acuerdo. Explica por qué.

i) Que dos grupos sean isomorfos significa que bajo ciertas reglas son equivalentes.

ii) Dos grupos son isomorfos si existe una función biyectiva de uno al otro que preserve la misma estructura de grupo.

iii) Dos grupos isomorfos son simplemente grupos del mismo orden.

iv) Que dos grupos sean isomorfos significa que son similares.

2. Para ti, ¿qué significa que dos grupos sean isomorfos?

3. ¿Cómo explicarías a un estudiante que toma su primer curso de Álgebra moderna lo que significa que dos grupos NO sean isomorfos? Cita al menos un ejemplo con el que apoyarías tu explicación.

4. Observa la siguiente tabla del grupo G y da un ejemplo de otro grupo G' que sea isomorfo a G. Justifica tu respuesta.

$*$	q	r	s	t
q	s	t	q	r
r	t	s	r	q
s	q	r	s	t
t	r	q	t	s

5. Supongamos que se tienen dos grupos G y G^*. Para cada una de las afirmaciones siguientes, indica si es Verdadera o Falsa. Justifica tu respuesta.

i) G es isomorfo a G^* si ambos son conmutativos.

ii) G y G^* son isomorfos si sus elementos y sus operaciones son idénticamente iguales.

iii) Si G y G^* no tienen el mismo orden, entonces no son isomorfos.

iv) Si G es un subgrupo de G^*, G^* es isomorfo a G.

6. Da un ejemplo de grupos isomorfos. Argumenta tu respuesta.

ANEXO C

Preguntas de entrevista por estudiante

1. Las afirmaciones que se presentan a continuación fueron hechas por estudiantes que habían tomado un curso de Álgebra moderna. Para cada una, señala si estás de acuerdo, en desacuerdo o parcialmente de acuerdo. Explica por qué.	
***i*)** Que dos grupos sean isomorfos significa que bajo ciertas reglas son equivalentes.	Todos
***ii*)** Dos grupos son isomorfos si existe una función biyectiva de uno al otro que preserve la misma estructura de grupo.	
***iii*)** Dos grupos isomorfos son simplemente grupos del mismo orden.	
***iv*)** Que dos grupos sean isomorfos significa que son similares.	
2. Para ti, ¿qué significa que dos grupos sean isomorfos?	Todos
3. ¿Cómo explicarías a un estudiante que toma su primer curso de Álgebra moderna lo que significa que dos grupos NO sean isomorfos? Cita al menos un ejemplo con el que apoyarías tu explicación.	Todos
4. Observa la siguiente tabla del grupo G y da un ejemplo de otro grupo G' que sea isomorfo a G. Justifica tu respuesta. $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} * & q & r & s & t \\ \hline q & s & t & q & r \\ \hline r & t & s & r & q \\ \hline s & q & r & s & t \\ \hline t & r & q & t & s \end{array}$	Todos
5. Supón que se tienen dos grupos G y G^*. Para cada una de las afirmaciones siguientes, indica si es Verdadera o Falsa. Justifica tu respuesta.	
***i*)** G es isomorfo a G^* si ambos son conmutativos.	
***ii*)** G y G^* son isomorfos si sus elementos y sus operaciones son idénticamente iguales.	Todos
***iii*)** Si G y G^* no tienen el mismo orden, entonces no son isomorfos.	

<table>
<tr><td>iv) Si G es un subgrupo de G^*, G^* es isomorfo a G.</td><td></td></tr>
<tr><td>6. Da un ejemplo de grupos isomorfos. Argumenta tu respuesta.</td><td>Todos</td></tr>
<tr><td>7. ¿Cómo explicarías grupos isomorfos a un estudiante quien toma su primer curso de Álgebra moderna?</td><td>Diana, Miguel, Víctor, Alejandro, Rodolfo.</td></tr>
<tr><td>8. Si tuvieras que dar algunos consejos a un(a) amigo(a) a fin de determinar si dos grupos son o no isomorfos, ¿cuáles serían esos consejos?</td><td>Diana, Miguel, Víctor, Alejandro, Rodolfo.</td></tr>
<tr><td>9. ¿Cómo explicarías isomorfismo de grupos a un estudiante quien toma su primer curso de Álgebra moderna?</td><td>Diana, Miguel, Víctor, Alejandro, Rodolfo.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo procedes para construir un isomorfismo?</td><td>Diana, Miguel, Víctor, Alejandro, Rodolfo.</td></tr>
<tr><td>¿El isomorfismo es único?</td><td>Miguel, Víctor, Alejandro, Rodolfo.</td></tr>
<tr><td>10. El siguiente extracto (en negrita) que se te presenta a continuación fue la respuesta dada por un estudiante ante la siguiente pregunta: ¿Por qué no hay isomorfismo entre los grupos (A,Δ) y $(B,\circ)$?, donde $A=\{f,g,h,i\}$ y $B=\{j,k,l,m\}$. Explica tu respuesta.

<table>
<tr><td>$\circ$</td><td>j</td><td>k</td><td>l</td><td>m</td></tr>
<tr><td>j</td><td>k</td><td>m</td><td>j</td><td>l</td></tr>
<tr><td>k</td><td>m</td><td>l</td><td>k</td><td>j</td></tr>
<tr><td>l</td><td>j</td><td>k</td><td>l</td><td>m</td></tr>
<tr><td>m</td><td>l</td><td>j</td><td>m</td><td>k</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Δ</td><td>f</td><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr>
<tr><td>f</td><td>h</td><td>i</td><td>f</td><td>g</td></tr>
<tr><td>g</td><td>i</td><td>h</td><td>g</td><td>f</td></tr>
<tr><td>h</td><td>f</td><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr>
<tr><td>i</td><td>g</td><td>f</td><td>i</td><td>h</td></tr>
</table>

“Definiendo la función $\varphi: A \to B$ tal que $f \mapsto j, g \mapsto k, h \mapsto l, i \mapsto m$. Observamos que $\varphi(f\Delta i)=\varphi(g)=k$ no es igual a $\varphi(f)\circ\varphi(i)=j\circ m=l$. Así que no hay isomorfismo entre A y B”.

¿Cuál es tu opinión al respecto? ¿Estás de acuerdo o en desacuerdo? ¿Por qué?</td><td>Diana, Víctor, Alejandro.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo procederías para demostrar que no hay isomorfismo entre esos dos grupos?</td><td>Diana, Víctor, Alejandro.</td></tr>
<tr><td>11. El siguiente extracto (en negrita) que se te presenta a continuación es</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>la opinión que tiene un estudiante respecto a los grupos $(\Re,+)$ y $(Q,+)$:
“Los grupos $(\Re,+)$ y $(Q,+)$ no siempre son isomorfos. Hay que decir que depende de la aplicación (función) que se dé”.
¿Estás de acuerdo?, ¿en desacuerdo? o ¿parcialmente de acuerdo? Argumenta tu respuesta.</td>
<td>Miguel, Alejandro, Rodolfo.</td>
</tr>
<tr>
<td>12. A continuación se te presentan dos tablas de operación de grupos:
$G=\{h,i,j,k,l,m\}$, con la operación $*$ y $G'=\{s,t,u,v,w,x\}$, con la operación $\circ$
<table>
<tr><td>$*$</td><td>h</td><td>i</td><td>j</td><td>k</td><td>l</td><td>m</td></tr>
<tr><td>h</td><td>m</td><td>j</td><td>i</td><td>l</td><td>k</td><td>h</td></tr>
<tr><td>i</td><td>l</td><td>m</td><td>k</td><td>j</td><td>h</td><td>i</td></tr>
<tr><td>j</td><td>k</td><td>h</td><td>l</td><td>i</td><td>m</td><td>j</td></tr>
<tr><td>k</td><td>j</td><td>l</td><td>h</td><td>m</td><td>i</td><td>k</td></tr>
<tr><td>l</td><td>i</td><td>k</td><td>m</td><td>h</td><td>j</td><td>l</td></tr>
<tr><td>m</td><td>h</td><td>i</td><td>j</td><td>k</td><td>l</td><td>m</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\circ$</td><td>s</td><td>t</td><td>u</td><td>v</td><td>w</td><td>x</td></tr>
<tr><td>s</td><td>v</td><td>x</td><td>w</td><td>s</td><td>u</td><td>t</td></tr>
<tr><td>t</td><td>u</td><td>v</td><td>s</td><td>t</td><td>x</td><td>w</td></tr>
<tr><td>u</td><td>t</td><td>w</td><td>x</td><td>u</td><td>s</td><td>v</td></tr>
<tr><td>v</td><td>s</td><td>t</td><td>u</td><td>v</td><td>w</td><td>x</td></tr>
<tr><td>w</td><td>x</td><td>u</td><td>t</td><td>w</td><td>v</td><td>s</td></tr>
<tr><td>x</td><td>w</td><td>s</td><td>v</td><td>x</td><td>t</td><td>u</td></tr>
</table>
¿Los grupos anteriores son isomorfos? ¿Cómo sabes que son isomorfos?</td>
<td>Diana, Miguel, Víctor, Alejandro, Rodolfo.</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Cuál podría ser un isomorfismo entre ellos?</td>
<td>Diana, Miguel, Víctor, Alejandro, Rodolfo.</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Cómo sabes que es un isomorfismo?</td>
<td>Diana, Miguel, Víctor, Alejandro, Rodolfo.</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Podría haber otro? ¿Cómo lo sabes?</td>
<td>Miguel, Víctor, Rodolfo.</td>
</tr>
</table>

13. A continuación se te presentan cinco conjuntos con sus respectivas operaciones, ¿cuáles de entre ellos son grupos isomorfos? A_1 =El conjunto $\{[2],[4],[6],[8]\} \subset Z_{10}$, con la multiplicación módulo 10. $A_2 = \{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\} \subset S_4$, con la composición de permutaciones. $A_3 = \{1, i, -1, -i\}$, con la multiplicación. A_4 =El conjunto constituido de las tres reflexiones de un triángulo equilátero y de la identidad, con la composición de transformaciones. $A_5 = \{[1],[2],[3],[4]\} = Z_5^*$, con la multiplicación módulo 5. ¿Cuáles de entre ellos son grupos isomorfos?	Diana, Víctor, Alejandro.
¿Cómo sabes que son isomorfos?	Diana, Víctor.
¿Cuál podría ser un isomorfismo entre ellos?	Diana, Víctor.
¿Cómo sabes que es un isomorfismo?	Diana, Víctor.
¿Podría haber otro? ¿Cómo lo sabes?	Diana, Víctor.
14. A continuación se te presenta el siguiente grupo: $G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in Z\}$. ¿Puede G tener un subgrupo al cual sea isomorfo? Argumenta tu respuesta.	Diana, Víctor, Rodolfo.
¿Cuál podría ser un isomorfismo entre ellos?	Rodolfo.
¿Cómo sabes que es un isomorfismo?	Rodolfo.