CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

SITUACIONES DE PROBABILIDAD CLÁSICA Y EL MODELO DE URNA COMO MEDIOS PARA FAVORECER EL DESARROLLO SIMULTÁNEO DE LOS RAZONAMIENTOS PROPORCIONAL Y PROBABILÍSTICO

TESIS QUE PRESENTA:

Maribel Aguas Hidalgo

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestra en Ciencias

EN LA ESPECIALIDAD DE

Matemática Educativa

DIRECTOR DE LA TESIS:

Dr. Ricardo Quintero Zazueta

México, D.F. Junio de 2014

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por la beca que me otorgó para cursar la Maestría en Ciencias.

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de Posgrado.

A mi director de tesis: Dr. Ricardo Quintero Zazueta por su inagotable paciencia, su tiempo, dedicación, compromiso y por sus valiosas enseñanzas.

A los lectores de esta tesis: Dra. Ana María Ojeda Salazar y Dr. Gonzalo Zubieta Badillo por sus valiosas sugerencias y comentarios que contribuyeron a enriquecer esta investigación educativa.

A los alumnos que participaron en este estudio por su disposición, desempeño y porque sin ellos la escuela no tendría razón de ser.

A toda la comunidad Cinvestav que hacen de él un lugar agradable.

DEDICATORIAS

A Dios por permitirme llegar hasta este momento

Con cariño y respeto
A mis Padres Magdalena y Jorge
Por su amor y motivación

A Tico, Gaby, Lore, Migue, Ramón, Juan y Jorge
A quienes exhorto a seguir adelante

A mis sobrinos
Porque han venido a enriquecer mi vida

A Rosita y Tomy por sus enseñanzas

Y en especial, a Óscar y Gonza
Por su gran amor

RESUMEN

En esta tesis se analizaron y clasificaron las estrategias que 35 alumnos de tercer grado de educación secundaria mostraron en su resolución de situaciones de probabilidad clásica con y sin proporcionalidad en un modelo de urna. Esto aporta evidencias de que con el tratamiento simultáneo de contenidos de proporcionalidad y probabilidad es posible favorecer el desarrollo de los razonamientos proporcional y probabilístico, contrario a lo que en otras investigaciones como las realizadas por Piaget e Inhelder (1951) se afirma respecto a que el razonamiento proporcional antecede al probabilístico y que si no se tiene el primero no se puede acceder al segundo. Se argumenta que la organización de los contenidos para la enseñanza de las matemáticas no necesariamente corresponde a la organización de los procesos de aprendizaje del estudiante y se comparte la propuesta de los Programas de estudio para la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria en cuanto a que la vinculación de los contenidos de matemáticas debe promoverse como forma de abordarlos sin fragmentarlos de tal manera, que al resolver un problema los alumnos logren relacionarlos.

SUMMARY

In this research strategies used by 35 third-grade high school students for solving classic probability situations with and without proportionality in a sample urn model, are analyzed and classified. Evidence is obtained that simultaneous treatment of ratio and probability contents favors the development of proportional and probabilistic reasoning, in contrast to the outcome of other researches such as those carried out by Piaget and Inhelder (1951) which state that proportional reasoning precedes probabilistic reasoning and that the lack of the first one excludes the access to the latter. It is argued that contents organization for mathematics teaching does not necessarily tallies with the student's learning processes organization. Furthermore this study endorses the idea in current high school education study programs for mathematic about the establishment of links between mathematic contents in order that students may tackle them without fragmentation.

ÍNDICE

LISTA DE CUADROS

LISTA DE DIAGRAMAS

INTRODUCCIÓN

En la presente investigación se diseñaron situaciones de probabilidad clásica con el modelo de urna. En cada situación se plantearon dos urnas con extracción simple a estudiantes de tercer grado de educación secundaria, con la finalidad de analizar las estrategias que siguen al resolverlas, y con base en ellas argumentar la pertinencia de que a través de este tipo de situaciones se puede favorecer el desarrollo paralelo del razonamiento proporcional y probabilístico.

Retomamos los *Programas de estudio 2006* de matemáticas para la educación secundaria y no los del 2011 porque el grupo de estudiantes con los que se trabajó pertenecían a la penúltima generación regida por los Programas de 2006. Además, de acuerdo a lo que nos interesó analizar (cómo relacionar los contenidos de proporcionalidad y probabilidad), los Programas de 2006 explicitan, en cada contenido, orientaciones didácticas donde se incluyen, para algunos casos, vínculos y relaciones. En cambio, en el documento que contiene a los Programas de 2011, en el apartado nombrado “orientaciones pedagógicas y didácticas", sólo se incluyen algunas orientaciones para determinados contenidos.

Justificación de la Investigación

En los *Programas de estudio 2006* de matemáticas para la educación secundaria (SEP, 2006) la proporcionalidad como tema de estudio se propone en los dos primeros grados y la probabilidad en los tres grados. Además, para algunos temas se establece de manera específica la finalidad del estudio de la proporcionalidad y su relación con otros temas; sin embargo, en ningún apartado se hace explícita la relación de la proporcionalidad con la probabilidad, aunque incluya situaciones como la comparación de probabilidades, que se trabaja en tercer grado de educación secundaria, donde ambas se relacionan. Lo anterior condujo a la revisión de publicaciones de investigadores que analizan y comentan las posibles relaciones entre la proporcionalidad y la probabilidad.

En la revisión y análisis de literatura, encontramos estudios sobre el desarrollo del razonamiento proporcional, el desarrollo del razonamiento probabilístico y la relación que existe entre ambos. Al revisar investigaciones de estos últimos identificamos dos vertientes: en la primera están investigadores como Piaget e Inhelder (1951) que sustentan que el razonamiento proporcional antecede al probabilístico, por lo que si no se tiene el primero no se puede acceder al segundo. En la segunda vertiente se encuentra Fischbein (1975), quien afirma que intuiciones correctas pueden llevar a realizar elecciones de probabilidades correctas y que aunque el sujeto se encuentre en la etapa de las operaciones formales esto no asegura que pueda llevar a cabo, durante la resolución de determinadas situaciones, algún razonamiento probabilístico.

Con base en la organización de los contenidos de proporcionalidad y probabilidad establecidos en los *Programas de estudio 2006* para la educación secundaria, los estudiantes de tercer grado ya debieron tener experiencia con situaciones de proporcionalidad, antes de resolver problemas de comparación de probabilidades. Además de que por su edad (entre 14 y 16 años, aproximadamente) estos estudiantes se encontrarían en la tercera etapa de desarrollo (operaciones formales), en la que según Piaget e Inhelder (1951) se adquiere un razonamiento proporcional, considerado por estos autores prerrequisito para acceder al razonamiento probabilístico. Por lo que se esperaría que los estudiantes de tercer grado de educación secundaria no tuvieran dificultades para resolver problemas de comparación de probabilidades.

Sin embargo, esto no siempre es así, puesto que el orden en que se presentan los contenidos en los programas de estudio no es necesariamente el orden en que ocurre el aprendizaje de las matemáticas de los alumnos. Aunado a esto tenemos los obstáculos cognitivos que los estudiantes presentan incluso después de largas jornadas de enseñanza y aprendizaje, debido a que su comprensión intuitiva de un fenómeno es a menudo diferente a la interpretación científica (Fischbein, 1999).

Por lo anterior y retomando lo comentado en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001) respecto a que la probabilidad puede ser un medio para adquirir, reforzar y profundizar en la comprensión de contenidos de otras áreas de las matemáticas siempre que estos no sean vistos como prerrequisitos para comprenderla, consideramos importante relacionar los temas de proporcionalidad y probabilidad para que se apoyen mutuamente y por esta razón desarrollamos la presente investigación educativa intitulada: *Situaciones de probabilidad clásica y el modelo de urna como medios para favorecer el desarrollo simultáneo de los razonamientos proporcional y probabilístico.*

Preguntas de investigación

- ¿Cuáles son las estrategias que los estudiantes de tercer grado de educación secundaria utilizan al resolver situaciones de probabilidad que pueden modelarse con urnas y que implican o no relaciones de proporcionalidad?
- ¿Qué errores o dificultades presentan los estudiantes de tercer grado de educación secundaria al resolver situaciones de probabilidad que pueden modelarse con urnas y que implican o no relaciones de proporcionalidad?

Propósitos

- Identificar, analizar, diseñar e implementar situaciones de probabilidad que puedan modelarse con urnas y que impliquen o no relaciones de proporcionalidad para explorar de qué manera se puede favorecer simultáneamente el desarrollo del razonamiento proporcional y probabilístico.

- Identificar y analizar estrategias que estudiantes de tercer grado de educación secundaria utilizan para resolver situaciones de probabilidad que pueden modelarse con urnas y que implican o no relaciones de proporcionalidad para clasificarlas.

Organización de la investigación

En el Capítulo I damos seguimiento a los contenidos de proporcionalidad y probabilidad en los *Programas de estudio 2006* de matemáticas para la educación secundaria (SEP, 2006), y hacemos un análisis de los vínculos y relaciones de estos temas. Finalmente, las relaciones específicas y no específicas entre los contenidos de proporcionalidad y probabilidad nos dejaron ver que en situaciones donde se tiene que determinar la probabilidad de un evento se especifica la relación que ésta guarda con la proporcionalidad, pero no se indica cuál es esta relación.

Este primer acercamiento nos llevó al análisis de la relación entre estos contenidos para sustentar su estudio simultáneo y contrastarlo en el Capítulo II con lo que autores como Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975) apuntan respecto al desarrollo del razonamiento proporcional y probabilístico, y lo que el *Libro para el maestro* de matemáticas para la educación secundaria (Alarcón *et al.* 2001) señala respecto a que la probabilidad constituye un contexto donde se puede adquirir, reforzar y profundizar otros temas matemáticos.

En el Capítulo II además describimos porqué el modelo de urna es el más adecuado para tratar elecciones binarias e identificamos que Heitele (1975) lo menciona dentro de sus diez ideas fundamentales para la enseñanza de la probabilidad. Así también en este capítulo argumentamos porqué consideramos a la probabilidad clásica y no a otra concepción de ésta. Del mismo modo, en este capítulo consideramos las relaciones del razonamiento proporcional y probabilístico desde un punto de vista conceptual y semántico, y analizamos cómo podrían interactuar estos razonamientos en el modelo elegido (probabilidad clásica y el modelo de urna). Finalmente revisamos la clasificación de situaciones de urnas en estudios previos y analizamos qué resultados se obtuvieron al implementarlas.

En el Capítulo III describimos el método, en el que señalamos el tipo de investigación, los instrumentos que incluyen las diez situaciones diseñadas y cada una de sus características, entre las que están: la semántica, los elementos gráficos o numéricos que las componen, los propósitos particulares y la incertidumbre que implicaron, así como las variables proporcionadas y la relación que guardan (con o sin proporcionalidad), además describimos el tipo de preguntas incluidas en las situaciones, una de ellas orientada a la comparación de probabilidades e incluida en las diez situaciones, y la otra incorporada sólo en cuatro situaciones (II, IV, VI, y X) para las que se solicitó plantear ejemplos de los conjuntos propuestos que presentaran la misma probabilidad. También especificamos que la implementación se llevó a cabo en dos etapas; en la primera se aplicó el instrumento a un grupo de treinta y cinco alumnos de educación secundaria, y en la segunda, con base en el análisis de los resultados, se seleccionó a uno de esos treinta y cinco para profundizar en sus estrategias de resolución. Por último, hicimos consideraciones para el análisis de los resultados donde incluimos expresiones y estrategias previstas al comparar los elementos de dos urnas.

En el Capítulo IV describimos y analizamos los resultados obtenidos de las dos preguntas planteadas. Primero clasificamos las respuestas a la primera pregunta que condujo a la comparación de probabilidades. En esta clasificación incluimos el tipo de comparación (cuantitativa, cualitativa o extra-matemática), los casos considerados (favorables, desfavorables o posibles), el tipo de elección (con base en el mayor, menor o igual resultado después de comparar los casos considerados), el orden de comparación de los casos considerados y las estrategias empleadas para hacer las elecciones.

Después clasificamos las respuestas a la segunda pregunta incluida sólo en las situaciones II, IV, VI, y X, donde mostramos conjuntos no equiprobables, por lo que los alumnos debieron proponer conjuntos que presentaran la misma probabilidad. La clasificación de las respuestas de esta segunda pregunta la hicimos con base en la probabilidad de los conjuntos propuestos y el punto de referencia (número de casos favorables, desfavorables, posibles u otro número no incluido en la situación) que los alumnos consideraron para la equiprobabilidad de los conjuntos. Al final de cada clasificación, tanto de las estrategias como de las propuestas, presentamos un cuadro que las resume, además incorporamos conclusiones donde analizamos con base en la clasificación de los resultados obtenidos cómo confluyen los razonamientos proporcional y probabilístico.

En el Capítulo V reflexionamos sobre lo desarrollado y obtenido en esta investigación. Aquí exponemos lo conveniente de relacionar los contenidos en matemáticas para avanzar en el aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina. Mostramos que el modelo de urna y la probabilidad clásica son un medio que favorece el desarrollo simultáneo de los razonamientos proporcional y probabilísticos, sin embargo, no dejamos de lado a otros medios o modelos. Señalamos la importancia que tiene presentar la información de cada situación de manera distinta para enriquecer las relaciones que los alumnos logren establecer a partir de estas diferencias y que contribuye a que se desarrolle un razonamiento proporcional y probabilístico. Los conocimientos previos los incorporamos en estas reflexiones porque si bien pueden ser correctos, incorrectos o parcialmente correctos, son la base para la estructuración de un nuevo conocimiento e influyen en el aprendizaje de los educandos. Enfatizamos en la comparación por cociente como la más conveniente para comparar probabilidades, aunque no excluimos a otro tipo de comparaciones que también podrían llevar a elecciones correctas en algunas situaciones, y que de alguna forma son muestra de lo que los estudiantes establecen para sus elecciones.

CAPÍTULO I

LA PROPORCIONALIDAD Y LA PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

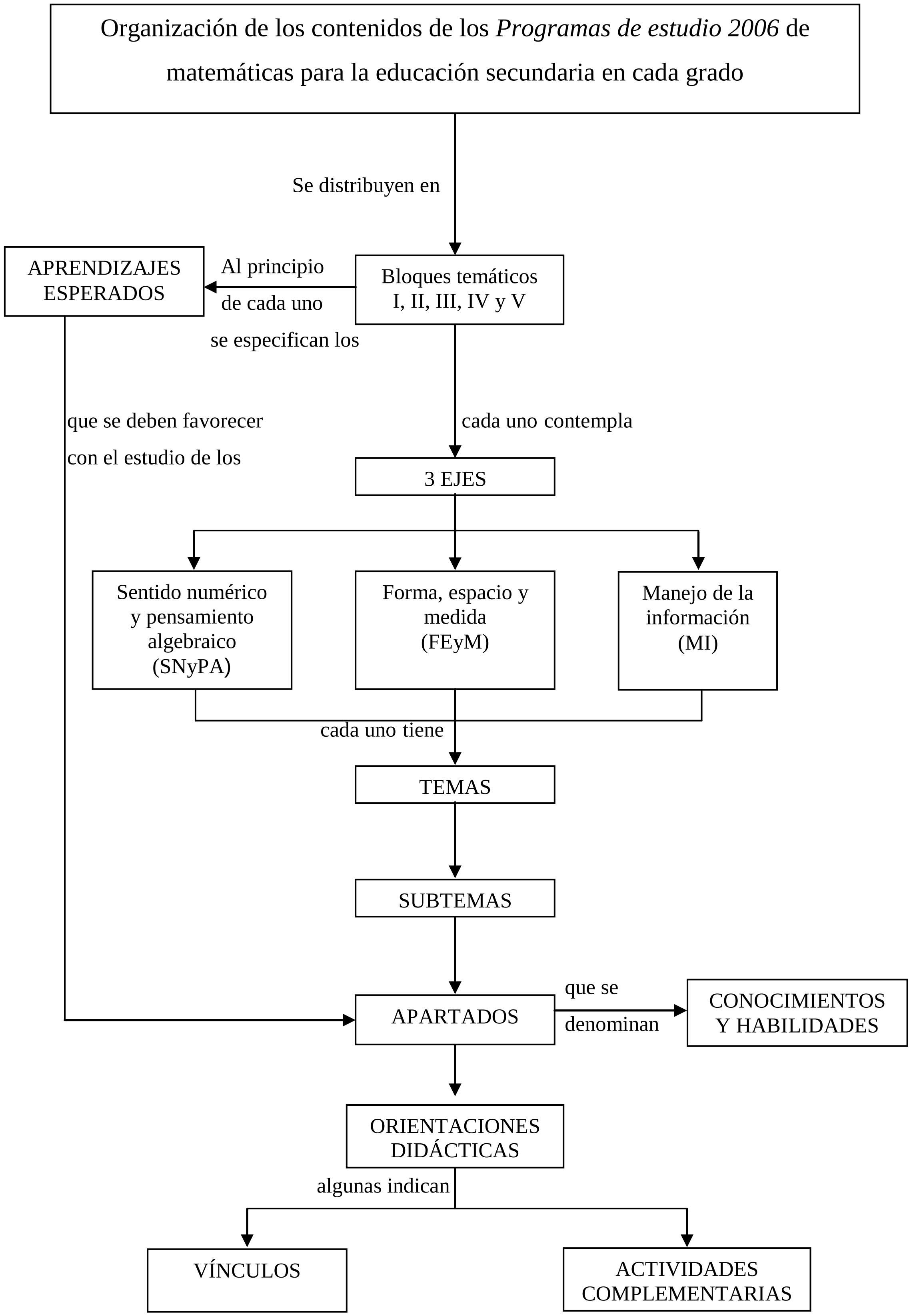
En este capítulo analizamos la organización de los contenidos en los *Programas de estudio 2006* de matemáticas para la educación secundaria (SEP, 2006) y damos seguimiento a través de esa organización a los contenidos de proporcionalidad y probabilidad y a sus implicaciones con otros temas de estudio. Además establecemos la relación que tienen, de manera específica y no especifica, ambos contenidos y concluimos que en la comparación de probabilidades la proporcionalidad está relacionada pero no se hace mención de cuál es esta relación, lo que inicialmente nos motivó a ver cómo podría darse el estudio simultáneo de ambos contenidos.

1.1.- Los *Programas de estudio 2006* de matemáticas para la educación secundaria

En los *Programas de estudio 2006* de matemáticas (SEP, 2006), los contenidos a enseñar en los tres grados están organizados, de la misma manera, en cinco bloques temáticos (véase el diagrama 1), en cada uno se contemplan tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico (SNyPA); Forma, espacio y medida (FEyM) y Manejo de la información (MI). Cada eje incluye temas que se dividen en subtemas y estos a su vez contienen apartados que se denominan *conocimientos y habilidades.*

Al principio de cada bloque se especifican los aprendizajes esperados que se tienen que favorecer con el estudio de los apartados. Cada apartado contiene orientaciones didácticas que sugieren formas de cómo abordar los contenidos, y en algunos casos, también se indican los vínculos o las actividades complementarias relacionadas con el estudio de los temas propuestos.

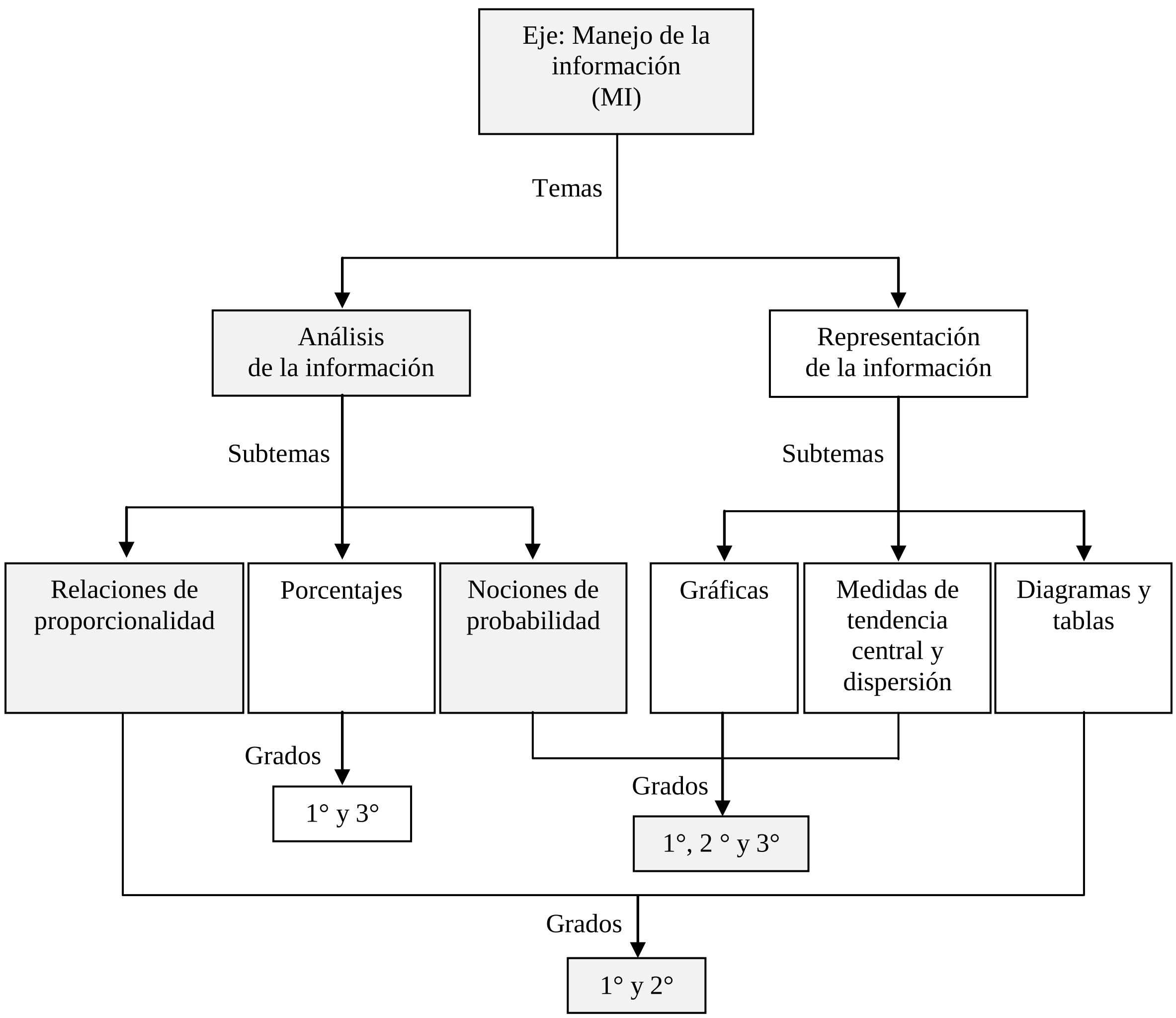
Diagrama 1. Organización de los contenidos de los *Programas de estudio*



1.1.1.- La proporcionalidad, la probabilidad y sus implicaciones en los *Programas de estudio 2006*

La proporcionalidad como tema de estudio específico está presente en los dos primeros grados y la probabilidad en los tres; ambas pertenecen al eje Manejo de la Información (MI), se les considera en el tema Análisis de la información, y en los subtemas Relaciones de Proporcionalidad y Nociones de probabilidad, respectivamente, como se muestra en el siguiente diagrama.

Diagrama 2. Organización del eje Manejo de la información



El eje Manejo de la información (MI), con base en los *Programas de estudio*, tiene como propósito resolver problemas que demanden el análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos que puedan provenir de situaciones deterministas, definidas —por ejemplo—, por una función lineal, o aleatorias, en las que se puede identificar una tendencia a partir de su representación gráfica o tabular. Lo que se realiza en este eje se apoya en nociones matemáticas como porcentaje, probabilidad, función y en el significado de los números enteros, fraccionarios y decimales.

La proporcionalidad como tema de estudio específico

En primer grado la proporcionalidad se trata en el bloque I, en los apartados 1.6 y 1.7 con situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante", que destacan el factor de proporcionalidad y con reparto proporcional que favorezcan el uso de procedimientos informales, respectivamente; en el bloque II, en el apartado 2.7 se deben considerar situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" con diversos procedimientos, con énfasis en los factores constantes de proporcionalidad fraccionarios y el valor unitario, y en el apartado 2.8 se deben tratar situaciones relacionadas con factores constantes de proporcionalidad fraccionarios y se deben de extender a dos o más, además, se vincula con biología en el tema "La nutrición como proceso vital".

En el bloque III, en el apartado 3.5, las situaciones que se planteen tendrán que implicar a la proporcionalidad directa del tipo valor faltante utilizando procedimientos expertos tales como el valor unitario, la constante de proporcionalidad y la regla de tres; y en el bloque V, en el apartado 5.5 se debe tratar la proporcionalidad inversa, y mediante las situaciones planteadas se deben establecer comparaciones entre la directa y la inversa, por ejemplo, mientras en un caso los cocientes son constantes en la otra lo son los productos.

Es importante señalar que en los aprendizajes esperados de los bloques I y III la proporcionalidad no se contempla, aunque en algunos apartados de estos bloques sí se considera el tratamiento directo, mientras que en los bloques II y V desde los aprendizajes ya está presente.

En el segundo grado se especifica la proporcionalidad desde los aprendizajes esperados pero, a diferencia del primer grado en que fue contemplada en cuatro bloques, aquí sólo se le presenta de forma específica en el bloque I, en los apartados 1.7 y 1.8. En el primero se pide que se trate con el factor inverso dada una relación de proporcionalidad y con el factor de proporcionalidad fraccionario desde un contexto de reproducciones a escala, y en el segundo se ve la proporcionalidad múltiple. Como actividad complementaria para el apartado 1.8 se tiene el trabajo con la *Hoja electrónica de cálculo EMAT* "Variación proporcional (3)". En el bloque II, aunque no se señala a la proporcionalidad de manera específica, sí se contempla en el subtema "Relaciones de proporcionalidad", en el apartado 2.6 correspondiente a la comparación de dos o más razones a partir de la noción de equivalencia.

Así, la proporcionalidad está de forma directa en los dos primeros grados y en seis bloques; en primero en cuatro (I, II, III y V) y en segundo en dos (I y II). A diferencia de la probabilidad, como se describirá a continuación, que se trata en los tres grados y en cinco bloques; en primero en dos (III y V), en segundo en dos (IV y V) y en tercero en uno (II).

La probabilidad como tema de estudio específico

La probabilidad se contempla desde los aprendizajes esperados en los tres grados. En primero, en el bloque III, en el apartado 3.9, se pide que se enumeren los resultados de una experiencia aleatoria, que se utilice la escala de probabilidad entre 0 y 1 y que se establezca en cuál de dos eventos de una experiencia aleatoria se tiene mayor probabilidad de ocurrir. Se indica que la determinación del espacio muestral en una situación de azar se relaciona estrechamente con los problemas de conteo, por lo que se sugiere el trabajo con este tipo de situaciones. También se pide que se reflexione sobre los resultados que se obtendrían al utilizar la probabilidad frecuencial y la teórica con el fin de estudiar la escala de valores de la probabilidad y la comparación de probabilidades de dos o más eventos. En el bloque V, en el apartado 5.4, se debe tratar la noción de equiprobabilidad y no equiprobabilidad. En este apartado se sugiere que se elabore la gráfica de probabilidad en las situaciones (juegos justos o no) que se planteen para que se noten las condiciones en las que se esté trabajando.

En segundo grado, en el apartado 4.4 del bloque IV se pide que se aborden situaciones de azar para distinguir eventos independientes y que se calcule su probabilidad de ocurrencia. La noción de independencia en situaciones de azar tiene varios matices, por ejemplo, se podría tratar la independencia en situaciones donde la ocurrencia de un evento no afecta la ocurrencia de otro evento; otro en que los elementos de una situación no manipulada tengan la misma probabilidad de salir, aunque estén diferenciados de alguna manera (color, numeración, etc.). El apartado 5.4 del bloque V corresponde a situaciones de azar para distinguir eventos que son mutuamente excluyentes y calcular su probabilidad de ocurrencia.

En el tercer grado en el apartado 2.6 del bloque II se pide utilizar la simulación para resolver situaciones probabilísticas. Se resalta la importancia de utilizarla como herramienta de análisis que permita a los estudiantes abordar situaciones probabilísticas complejas y al mismo tiempo avanzar hacia la construcción de modelos matemáticos más eficaces. Como actividad complementaria se tiene el trabajo con la *Hoja electrónica de cálculo EMAT* “Simulación”, en los apartados de segundo y tercer grados, y no así en primero.

Aunque hay contenidos específicos de proporcionalidad y probabilidad en el eje Manejo de la Información (MI), como ya se describió, también hay algunos en el mismo eje o en los ejes Sentido numérico y pensamiento algebraico (SNyPA) y Forma, espacio y medida (FEyM) que refieren a la proporcionalidad, ya sea en los aprendizajes esperados, conocimientos y habilidades, orientaciones didácticas, vínculos o actividades complementarias; pero no se encontró alguno que aludiera a la probabilidad.

La proporcionalidad y sus implicaciones específicas con otros contenidos de los Programas

En tercer grado la proporcionalidad no se consideró como tema de estudio específico; sin embargo, al igual que en los grados primero y segundo, se incluyeron contenidos que la refieren. Los apartados 2.2 y 2.3 del subtema Problemas multiplicativos que pertenecen al eje SNyPA y tema Significado y uso de la operaciones. En el 2.2 se deben plantear multiplicaciones o divisiones que se ubican en el contexto de la proporcionalidad, por ejemplo, buscar una relación proporcional entre dos magnitudes y decidir cuál de estos términos se va a calcular. Así, el estudio de estas operaciones se relaciona estrechamente con el eje MI. En el apartado 2.3 se propone la multiplicación de números decimales al resolver problemas de proporcionalidad directa mediante el empleo de tablas y el uso del valor unitario.

En el apartado 3.1 del bloque III, que se ubica en el mismo eje, tema y subtema, que el 2.2 y el 2.3, se pide que se traten problemas de división con números decimales. También se enfatiza el empleo de la propiedad de multiplicar el dividendo y el divisor por el mismo número, es decir, del idéntico multiplicativo, por el que el resultado no cambia. Esta propiedad se vincula con la equivalencia de fracciones y con la idea de proporción.

En el apartado 3.8 del mismo bloque pero del eje MI, del tema Representación de la información y del subtema Gráficas, se propone analizar la información que se presenta en gráficas circulares y que se reflexione en torno a la relación entre los porcentajes señalados y las fracciones de área del círculo que ocupan, para lo que se puede establecer directamente una relación proporcional entre las cantidades y los ángulos.

En el apartado 4.3 del bloque IV, del eje SNyPA del tema Significado y uso de las literales del subtema Relación funcional, se pide que se analice y represente la relación de cantidades relativas mediante una tabla y una expresión algebraica. En particular, la expresión de la relación de proporcionalidad $y = kx$. Como actividad complementaria se tiene el trabajo con la *Hoja electrónica de cálculo EMAT* “Variación lineal (1)”.

En el apartado 4.4 del bloque IV, del eje FEyM, del tema Formas geométricas y del subtema Figuras planas, se señala que se solucionen problemas de determinación de la relación entre las longitudes de los diámetros de dos círculos, para vincular la geometría con la proporcionalidad directa. El apartado 4.7, que se ubica en el mismo eje, tema y subtema que el 3.8, corresponde a las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano.

El apartado 5.2 del bloque V, del mismo eje, tema y subtema que el 4.3, corresponde a los vínculos entre varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) de la misma situación, donde se tiene que identificar las que son de proporcionalidad directa. Los bloques I y IV refieren a la proporcionalidad desde los aprendizajes esperados, mientras que los bloques II, III y V hasta los conocimientos y habilidades o hasta las orientaciones didácticas.

En segundo grado, un apartado del bloque I y uno del II señalan su implicación. En el apartado 1.1 del boque I, del eje SNyPA, del tema Significado y uso de las operaciones y del subtema Problemas multiplicativos, como actividad complementaria se tiene el trabajo con la *Hoja electrónica de cálculo EMAT* “Variación proporcional (3)”. Y en el 2.5 del bloque II del eje FEyM, se señala que se resuelvan problemas de variación funcional en contextos geométricos y se argumenten sus respuestas. También se indica que un antecedente de estos problemas son los de proporcionalidad múltiple. Tanto los bloques I y II se refieren a la proporcionalidad hasta las orientaciones didácticas o las actividades complementarias.

En tercer grado son cuatro los apartados, dos del bloque II y dos del III, que refieren a la proporcionalidad. El 2.3, 2.4 y 3.3 pertenecen al eje FEyM, al tema Formas geométricas y al subtema Semejanza. En el 2.3 se deben construir figuras semejantes y comparar las medidas de los ángulos y de los lados. Al analizar las medidas de los lados correspondientes se puede concluir que si las razones son iguales entonces los lados son proporcionales, de esta manera se señala que la semejanza está estrechamente ligada a la proporcionalidad. El 2.4 es continuación del 2.3, pero ahora se tienen que determinar los criterios de semejanza y aplicarlos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos, así como en el cálculo de distancias y alturas inaccesibles.

En el 3.3 se señala que el Teorema de Tales es otro tema vinculado con los conocimientos sobre proporcionalidad y semejanza; además se tiene como actividad complementaria el trabajo con *Geometría dinámica de EMAT*. En este caso es hasta las orientaciones didácticas donde se refieren a la proporcionalidad. En el 3.4, que corresponde al mismo eje que el 3.3 pero del tema Transformaciones y del subtema Movimientos en el plano, se espera que al realizar las construcciones, la homotecia se relacione con la proporcionalidad de figuras y como actividad complementaria se propone la *Hoja electrónica de cálculo EMAT* “La homotecia como aplicación del teorema de Tales”.

Los vínculos y relaciones entre los contenidos

Algunas implicaciones de los contenidos de proporcionalidad y probabilidad ya se sugieren en los programas de estudio, como las descritas con antelación. Los vínculos y relaciones entre los contenidos son importantes porque en el aprendizaje de las matemáticas existen redes conceptuales que enlazan los contenidos y permiten transitar de un conocimiento a otro con distinto nivel de profundidad. Al respecto, en los *Programas de estudio 2006* se señala que

> La vinculación entre contenidos del mismo eje, entre ejes distintos o incluso con los de otras asignaturas es un asunto de suma importancia, puesto que la tendencia generalizada en la enseñanza ha sido la fragmentación o la adquisición del conocimiento en pequeñas dosis, lo que deja a los alumnos sin posibilidades de establecer conexiones o de ampliar los alcances de un mismo concepto. (SEP, 2006, p. 8)

Otras implicaciones quedan a cargo de los profesores o de los autores de materiales de desarrollo curricular. De aquí que particularmente nos interesó analizar y establecer las implicaciones no especificadas en los *Programas de estudio* que los contenidos de proporcionalidad y probabilidad pueden tener entre sí y con otros temas.

La proporcionalidad y sus implicaciones no específicas con otros contenidos de los Programas

Aunque hay contenidos que se refieren a la proporcionalidad y no así a la probabilidad, hay otros de los tres ejes en que está implícita. En primer grado dos apartados del boque I, uno del bloque II y uno del bloque III pueden implicar a la proporcionalidad: en el apartado 1.2 del bloque I, en el subtema Números fraccionarios y decimales del tema Significado y uso de los números que corresponde al eje SNyPA, se especifica que para determinar el orden de las fracciones pueden utilizarse recursos como las fracciones equivalentes o los productos cruzados. En este apartado se establecen relaciones de proporcionalidad si al comparar dos fracciones resultan ser equivalentes.

En el apartado 1.5, del eje FEyM, del tema Transformaciones, del subtema Movimientos en el plano, se pide que dada una figura, se analicen las propiedades que se conservan al construir su simétrica respecto de un eje. Al comparar por cociente las medidas de los lados correspondientes de las figuras construidas se obtiene siempre la unidad, lo que equivaldría a la constante de proporcionalidad.

En el apartado 2.1 del bloque II, que corresponde al eje SNyPA del tema Significado y uso de las operaciones del subtema Problemas aditivos, se consolida el uso de los algoritmos al resolver problemas, con base en la equivalencia de fracciones y se revisan las nociones de números fraccionarios, sus usos y significados en diversos contextos. Uno de los contextos en los que se podrían utilizar los números fraccionarios es en el de la proporcionalidad.

En el apartado 3.6, del eje MI, del tema Análisis de la información, del subtema Porcentajes, se tienen que resolver problemas que impliquen el cálculo de porcentaje utilizando la expresión fraccionaria o decimal. En este caso, ya sea al aplicarlo o determinarlo se pueden establecer relaciones de proporcionalidad, específicamente en el cálculo del "valor faltante".

En segundo grado, cuatro apartados del bloque III y un apartado del bloque V podrían relacionarse con la proporcionalidad. En el apartado 3.3, que pertenece al eje SNyPA, al tema Significado y uso de las literales y al subtema Relación funcional, se indica que se reconozca en situaciones problemáticas la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar esta relación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma $y = ax + b$. Los apartados 3.6, 3.7 y 3.8 corresponden al eje MI, al tema Representación de la información y al subtema Gráficas. En el 3.6 se analizan dos características de las gráficas lineales de la forma $y = mx + b$ (a), el punto de intersección de la recta con el eje y determina el valor de b en la expresión algebraica y (b) al determinar dos valores cualesquiera de x se puede saber qué pasa con los valores de y, si crecen, decrecen o se mantienen constantes. En el 3.7 se tiene que anticipar el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando se modifica el valor de b mientras el valor de m permanece constante. En el 3.8 se analiza el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando cambia el valor de m, mientras el valor de b permanece constante. En estos apartados del bloque III podrían presentarse relaciones de proporcionalidad directa cuando al trabajar expresiones de la forma $y = mx + b$ el valor de b sea cero.

En el apartado 5.2 del boque V, del eje FEyM, del tema Transformaciones, del subtema Movimientos en el plano, se pretende que se anticipe el tipo de transformación que sufrió una figura (por una rotación, traslación o simetría) y que se analice qué propiedades se conservan después de estas transformaciones. Una propiedad que implica a la constante de proporcionalidad es cuando al comparar por cociente las medidas de los lados correspondientes de las figuras construidas se obtiene siempre la unidad.

En tercer grado, dos apartados del bloque I, dos del II, dos del III, uno del IV y uno del V podrían relacionarse con la proporcionalidad. En el 1.2, que pertenece al eje FEyM, al tema Figuras geométricas y al subtema Figuras planas, se pide que se apliquen los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros. Un criterio consiste en comparar los lados homólogos de los triángulos, lo que llevaría a establecer relaciones de proporcionalidad donde el factor siempre es 1. En el 1.6 del eje MI, del tema Representación de la información y del subtema Gráficas, se pide que se analice la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa. En este caso, la proporcionalidad estaría implicada cuando se tratara, por ejemplo, la velocidad constante.

En el 2.1 del bloque II, del eje SNyPA, del tema Significado y uso de las literales y del subtema Ecuaciones, se tiene que utilizar un razonamiento proporcional cuando, al resolver determinadas situaciones relacionadas con el uso de ecuaciones no lineales, se contesten preguntas como: ¿El volumen de las cajas que se forman es directamente proporcional a la altura de las cajas? El 2.5 pertenece al eje MI, al tema Análisis de la información y al subtema Porcentajes. En este apartado se propone que se interpreten y utilicen índices, se reflexione sobre su utilidad y en cómo se construyen. Los índices implican a la proporcionalidad cuando se obtengan o comparen los porcentajes implicados.

En el aparatado 3.1 del bloque III, del eje SNyPA, del tema Significado y uso de las literales, del subtema Relación funcional se indica que los problemas a abordar consisten en representar, con una expresión algebraica, la regla de la variación, por ejemplo, donde la distancia recorrida, por un móvil que va a una velocidad constante es directamente proporcional al tiempo transcurrido. En el 3.5, que corresponde al eje MI, del tema representación de la información y del subtema Gráficas, se sugiere plantear situaciones que den origen a expresiones lineales y no lineales con la finalidad de graficarlas y analizar sus características. Aquí se pide trabajar con situaciones como las de los ejemplos de los apartados 1.6 y 3.1 donde la proporcionalidad está implicada.

En el apartado 4.3 del bloque IV, del eje FEyM, del tema Medida y del subtema Estimar, medir y calcular se tienen que reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. También se tienen que calcular las medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. La proporcionalidad en este apartado se presenta, por ejemplo, al establecer las relaciones de semejanza entre los triángulos y en el cálculo del valor faltante.

Finalmente en el apartado 5.1del bloque V, del eje SNyPA, del tema Significado y uso de las literales y subtema Ecuaciones, se señala que dado un problema, determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se puede resolver, y viceversa; proponer una situación que se modele con una de esas representaciones. Se puede vincular a la proporcionalidad, por ejemplo al plantear situaciones para determinar su ecuación, como los ejemplos de los apartados 1.6 y 3.1, o dada una ecuación lineal de la forma $y = mx$ para que se proponga una situación que la pueda modelar.

La probabilidad y sus implicaciones no específicas con otros contenidos de los Programas

El estudio de la probabilidad no se especifica en otros contenidos, aunque se podría relacionar al abordar los apartados 1.8 y 1.9 de los grados primero y segundo, respectivamente; ambos del eje MI, del tema Representación de la información y del subtema Diagramas y tablas. En el apartado 1.8 se pide que se trabaje con situaciones como la siguiente: En una caja hay cinco fichas marcadas con los números 1, 3, 5, 7 y 9. Se extrae una ficha de la caja y se anota su número. La ficha extraída se regresa a la caja y nuevamente se realiza una extracción. ¿Cuántos números diferentes de dos cifras es posible formar? Esta pregunta implicaría únicamente el conteo, sin embargo, la pregunta "¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una ficha esta contenga al 9?" implicaría a la probabilidad. En el apartado 1.9 se continúa con el desarrollo del razonamiento combinatorio al anticipar resultados en problemas de conteo. Cabe mencionar que en el apartado 3.9, del bloque III, que corresponde al subtema Nociones de probabilidad, se sugiere que se planteen problemas en los que se vincule el conteo con la probabilidad y no así a la probabilidad con el conteo, aunque podría darse.

Además de los contenidos de conteo, la probabilidad podría relacionarse con la proporcionalidad o viceversa, sin embargo, en ningún apartado se especifica esta relación, por lo que surge la interrogante: ¿De qué manera se podrían relacionar contenidos de probabilidad y proporcionalidad?

Relaciones entre contenidos de proporcionalidad y probabilidad no especificadas en los Programas

Los apartados 3.9 y 5.4, de los bloques III y V, respectivamente, de primer grado, el apartado 5.4 pero de segundo grado y el 2.6 de tercero, corresponden al subtema Nociones de probabilidad y se pueden relacionar con el apartado 2.6 del bloque II de segundo grado del subtema Relaciones de proporcionalidad. En el 3.9 se especifica la comparación de probabilidades. En el 5.4 se deben reconocer las condiciones para que un juego sea justo con base en la noción de equiprobabilidad, y en el 5.4 pero de segundo se deben distinguir eventos que son mutuamente excluyentes y calcular su probabilidad de ocurrencia. En el 2.6 de tercero, con la simulación, se deben resolver situaciones probabilísticas. En el 2.6, pero del subtema Relaciones de proporcionalidad, se pide que se resuelvan problemas de comparación de razones con base en la noción de equivalencia. Para las probabilidades expresadas como fracción (razón) en el apartado 2.6 se podrían plantear problemas de comparación de probabilidades, en el 3.9 y 5.4, de primer grado, se iniciaría con la comparación de razones y en el 5.4 de segundo grado, se continuaría con la comparación de razones para determinar cuál probabilidad de ocurrencia es mayor. Con la simulación que se aborda en el apartado 2.6 del subtema Nociones de probabilidad se corroboraría el comportamiento de las razones comparadas.

De esta manera la comparación de probabilidades está estrechamente ligada a la comparación de razones (fracciones) siendo estas últimas importantes para el estudio de la proporcionalidad. Un caso particular en el que se puede establecer una relación de proporcionalidad en un contexto de probabilidad, es cuando al comparar probabilidades éstas resultan ser iguales.

Además hay situaciones de probabilidad que pueden relacionarse con las de proporcionalidad directa del tipo valor faltante, como las sugeridas en los apartados 1.6, 2.7 y 3.5 de primer grado, es decir, se pueden proponer situaciones donde se pida inicialmente que se determine la probabilidad de un evento donde se relacionen —número de casos favorables y número total de casos posibles—, posteriormente y a partir de la probabilidad obtenida se pediría que dados los casos posibles se determinara el número de casos favorables para que las probabilidades fueran equivalentes. Para esto, en 1.6 se haría uso del factor constante de proporcionalidad. En el 2.7 se pondría énfasis en factores constantes de proporcionalidad fraccionarios, al igual que en el 2.8 que, aunque no aborda el valor faltante, sí trabaja con situaciones donde se emplean factores constantes de proporcionalidad pero ahora extendiéndolos a dos o más. En el 2.7 además se puede emplear el valor unitario. En estos tres apartados el trabajo debe darse a partir de diversos procedimientos, a diferencia del 3.5, en el que se deben utilizar procedimientos expertos como el valor unitario, la constante de proporcionalidad y la regla de tres.

Otras situaciones de proporcionalidad que pueden relacionarse con las de probabilidad son las de reparto proporcional que se abordan en el apartado 1.7 de primer grado. Esto si se plantea, por ejemplo, que de manera aleatoria se distribuyan proporcionalmente los elementos de determinado conjunto en dos o más subconjuntos. En esta situación podemos utilizar un conjunto equiprobable para hacer el reparto aleatorio si el conjunto original es inaccesible.

En el apartado 5.5 de primer grado y 1.7 de segundo grado del subtema Relaciones de proporcionalidad se pide que se analicen situaciones para hacer comparaciones entre la proporcionalidad directa y la inversa. En este caso una situación de probabilidad que puede relacionarse es cuando comparamos la probabilidad de los casos favorables y la probabilidad de los casos desfavorables de un mismo conjunto, por ejemplo, si se mantiene constante el número de casos posibles se presenta que: al aumentar el número de casos favorables también aumenta su probabilidad, y lo mismo sucedería con los casos desfavorables: al aumentar el número de casos desfavorables aumenta la probabilidad de estos. Así, se presentaría la proporcionalidad directa. En cambio, si aumenta el número de casos favorables disminuye la probabilidad de los desfavorables y en este mismo sentido si aumentan los casos desfavorables disminuye la probabilidad de los favorables, por lo que la relación de proporcionalidad sería inversa.

Con las relaciones que determinamos entre los contenidos de proporcionalidad y probabilidad podemos señalar, hasta este momento, que no sólo se trata de la comparación de razones sino del trabajo que se realiza en torno a ellas cuando trabajamos ambos contenidos.

En conclusión, en los *Programas de estudio 2006* de matemáticas para la educación secundaria como tema específico se trata la proporcionalidad en los dos primeros grados, aunque su implicación está en temas de los tres grados, mientras que la probabilidad se trata en los tres grados y aunque guarda estrecha relación con la proporcionalidad, no se señala cuáles son esas relaciones, sin embargo, ambas corresponden al mismo eje “Manejo de la información” y al mismo tema “Análisis de la información”.

Finalmente, al analizar los *Programas de estudio 2006*, identificamos que hay temas donde se especifica la finalidad del estudio de la proporcionalidad, así como sus implicaciones con otros contenidos. Pero en el caso particular de la probabilidad, la proporcionalidad sólo está relacionada como algo que está presente, pero no se hace mención de cómo está implicada; aunque, como ya señalamos, existen relaciones entre contenidos de proporcionalidad y probabilidad, como en la comparación de probabilidades, que nos podrían llevar a su estudio simultáneo. De esta manera, al tratar los contenidos de Proporcionalidad y Probabilidad simultáneamente contribuiríamos a lograr lo que se pretende en la escuela secundaria, es decir: “[…] que los alumnos logren un conocimiento menos fragmentado, con mayor sentido, de modo que cuenten con más elementos para abordar un problema” (SEP, 2006, p.8).

CAPÍTULO II

LA IDEA DE QUE EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL ANTECEDE AL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO *VERSUS* LA IDEA DEL DESARROLLO SIMULTÁNEO DE LOS RAZONAMIENTOS PROPORCIONAL Y PROBABILÍSTICO EN UN CONTEXTO DE URNA

Este segundo capítulo inicia definiendo al razonamiento proporcional y probabilístico y continúa con el análisis de investigaciones que concuerdan o se contraponen respecto al razonamiento proporcional, probabilístico y sus relaciones. Posteriormente se toma una postura sobre estas investigaciones y se refuerza con lo que se comenta en los documentos oficiales, y se analiza la pertinencia de desarrollar paralelamente ambas formas de razonamiento mediante situaciones en un contexto de urna. Nuestro punto de partida es el análisis de la clasificación y estrategias con dos urnas provenientes de otras investigaciones.

2.1 Razonamiento proporcional y probabilístico: Una definición

Lesh, Post y Behr (1988) definen al razonamiento proporcional como:

> Una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación de comparaciones múltiples, así como la habilidad para acumular y procesar mentalmente información diversa. Está relacionado con la inferencia y la predicción, y abarca métodos de pensamiento cualitativos y cuantitativos. (Lesh *et al.*, 1988, p.93)

Landín y Sánchez (2010) entienden al razonamiento probabilístico como:

> […] la manera de razonar que siguen los matemáticos o estadísticos para formular, interpretar, obtener y validar enunciados y afirmaciones probabilísticas. Una persona que sabe razonar probabilísticamente reconoce situaciones de azar y puede modelarlas, puede escapar a los sesgos cognitivos, cuida que sus creencias y concepciones no estén en contradicción con el razonamiento normativo, sabe cuándo y cómo la probabilidad puede jugar un papel importante, puede determinar la probabilidad de eventos (aislados o a partir de probabilidades dadas). Además, construye e interpreta distribuciones de probabilidad y las utiliza para hacer inferencias. (Landín y Sánchez, 2010, p. 599)

Con base en las citas, tenemos que el razonamiento proporcional y el probabilístico guardan estrecha relación, ambos requieren de un análisis cuantitativo y cualitativo, así como de la inferencia y la predicción de resultados. De esta manera, los razonamientos proporcional y probabilístico no se limitan a comparaciones numéricas, y aunque algunos investigadores han intentado distinguir entre sí a estos conceptos (véase por ejemplo, Hoemann y Ross; y Alarcón (citados en Alatorre, 1994)), nuestra investigación no se centra en distinguirlos sino en incorporarlos.

2.2.- Relación entre el razonamiento proporcional y probabilístico

En investigaciones que analizan la relación entre el razonamiento proporcional y el probabilístico se distinguen dos vertientes: en la primera, Piaget e Inhelder (1951), Green (citado en Shaughnessy, 1992) y Brousseau (1983), sustentan que el razonamiento proporcional antecede al probabilístico, por lo que de no presentarse el primero no se puede acceder al segundo. En este sentido, el razonamiento proporcional es un factor que determina el desarrollo del razonamiento probabilístico, es decir, es visto como un prerrequisito para acceder al razonamiento probabilístico. En la segunda vertiente, Fischbein (1975) señala que no necesariamente se presenta esta diferencia del razonamiento proporcional y el razonamiento probabilístico, sustenta que algunas intuiciones correctas pueden activar elecciones correctas de probabilidades.

Piaget e Inhelder (1951) concluyen que surgimiento de noción de azar y probabilidad se da en tres etapas. En la primera, los niños entre dos y siete años de edad aproximadamente, por mencionar algunas características, son incapaces de distinguir entre eventos necesarios y eventos posibles; no tienen el concepto de incertidumbre. Los niños no entienden la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria, por lo que intentan encontrar orden en ella, notan ciertas regularidades percibidas intuitivamente, es decir, si en una situación con dos sucesos aparece uno con mayor frecuencia, algunos de ellos predicen que el otro ocurrirá porque es el que se ha presentado con menor frecuencia. Pero también hay otros que predicen el evento que se ha presentado con más frecuencia sin tomar en cuenta la proporción de la población, las predicciones que realizan no muestran una estructura probabilística de relación parte (casos favorables) todo (casos posibles), pues en esta etapa aún no se entiende la probabilidad como una razón.

La segunda etapa corresponde a niños entre siete y once años de edad, en la que entre otras características, ya son capaces de distinguir los eventos necesarios de los posibles pero aún no pueden generar una lista de posibilidades, pues todavía no han desarrollado habilidades combinatorias. En esta etapa se adquiere la idea de mezcla aleatoria y la noción de azar y, aunque se tienen igualmente dificultades para comprender la ley de los grandes números, comienzan a establecer relaciones cuantitativas, es decir, en una situación de dos sucesos tiene más oportunidades de ocurrir el más numeroso, pero como aún no reconocen todos los casos posibles no pueden establecer la relación entre los casos favorables y posibles de una manera sistemática.

En la tercera etapa, los niños mayores de once años comienzan a desarrollar habilidades combinatorias y a comprender la probabilidad como el límite de la frecuencia relativa. La capacidad de la estructuración del todo es la causa del surgimiento de los juicios de probabilidad. Esta capacidad origina, en este estadío, la comprensión de la ley de los grandes números y de la probabilidad de los casos aislados como una función del todo. En este sentido se entiende la probabilidad como una razón.

En consecuencia, el concepto de razón para Piaget e Inhelder (1951) es decisivo para el desarrollo del concepto de probabilidad. Además, como enfatizan Lema y Morfin (1981) cuando estas investigadoras analizan las ideas generales de Piaget sobre la "Génesis de las nociones de azar y probabilidad", un sistema de probabilidades sólo puede construirse en el tercer estadio con el surgimiento de sistemas combinatorios acabados y la capacidad de establecer proporciones.

Green (citado en Shaughnessy 1992) realizó un estudio con 3000 estudiantes en Inglaterra de entre 11 y 16 años de edad, para determinar, con base en los estudios de Piaget e Inhelder, en qué etapa de desarrollo se encontraban en torno a los conceptos de probabilidad y del lenguaje de la incertidumbre; encontró que la mayoría de los estudiantes había alcanzado la etapa de las operaciones formales a los 16 años. Sin embargo, su estudio reflejó que las preguntas que implicaban resultados de conteo fueron mejor respondidas que las que implicaban razones. En este estudio Green concluye que: (a) el concepto de razón es crucial para la comprensión conceptual de la probabilidad; (b) los estudiantes no están preparados para comprender y utilizar el lenguaje común de la probabilidad, tal como: "al menos" o "cierto" o "imposible"; y (c) solamente un programa amplio y sistemático de estocástica en las escuelas puede eliminar este pensamiento falaz en los niños.

Brousseau (1983) señala que son tres los obstáculos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas. Para él, los obstáculos son barreras que los estudiantes tienen durante su apropiación de algunos conceptos; se manifiestan por errores que son reproducibles, persistentes y no son siempre explicables. Entre estos obstáculos se encuentran los didácticos, que resultan de alguna forma inadecuada de enseñar un concepto, otros son los epistemológicos relacionados con el propio concepto, y los ontogénicos o psicogenéticos que están directamente relacionados con lo que Piaget e Inhelder (1951) plantean, es decir, son debidos a las características del desarrollo del niño, quien en el caso particular de la probabilidad requiere un cierto razonamiento proporcional para comprenderla, por lo que un niño muy pequeño no podría hacerlo.

Piaget e Inhelder, Green y Brousseau coinciden en que el concepto de razón, así como el razonamiento proporcional, determinan el desarrollo del razonamiento probabilístico, es decir, son vistos como un prerrequisito para acceder a éste. Sin embargo, es posible que el razonamiento proporcional no sea un factor que determine el razonamiento probabilístico. Fischbein (1975) se basa en la conducta de los niños al practicar juegos de azar, ya que en juegos sencillos, los niños son capaces de elegir la opción con mayor probabilidad y considera que hay por lo menos dos aspectos de la actuación de los niños que no deben pasarse por alto:

> (a) […] la existencia de […] mecanismos pre-operacionales para la estimación de probabilidades, y
> (b) el hecho de que el niño pre-escolar responde correctamente a las preguntas relativas a la evaluación de las posibilidades […] muestra que el niño ha captado correctamente el problema, y que la respuesta expresa verdaderamente un juicio probabilístico. (Fischbein, 1975, p. 120)

Y aunque algunos autores como lo señala Fischbein (1975) ya aluden que estas respuestas y que consideran que éstas no indican un verdadero juicio probabilístico sino que se basan en reglas intuitivas. Al respecto, Fischbein señala que estos autores no atribuyeron estos casos a la intuición sino a la percepción de los conjuntos.

Fischbein (1975) distingue entre la intuición primaria del azar y la comprensión del concepto de azar. El primero se basa sólo en la distinción entre fenómenos estocásticos y deterministas. Y el segundo considera el concepto científico de la causalidad y presupone un sistema de evolución conceptual en el que el pensamiento operacional se ha alcanzado, se tiene familiaridad con las nociones de necesidad, leyes, etc. De esta manera, Fischbein afirma que

> […] es necesario distinguir entre la *concepto* de probabilidad como un cálculo explícito, correcto de probabilidades y la *intuición* de probabilidad como una estimación subjetiva, global de probabilidades. (Fischbein, 1975, p. 79)

En el trabajo de Piaget e Inhelder (1951), se presenta la intuición del azar en experimentos donde el sujeto sólo predice, por ejemplo, para estudiar las nociones de mezcla aleatoria e irreversiblidad se le presenta al niño una caja rectangular y se colocan en uno de sus extremos dieciséis canicas alineadas, la mitad de ellas de color blanco seguidas de la otra mitad de color rojo, las canicas por su color han quedado divididas por un borde. La caja está inclinada hacia el lado donde están las canicas, de tal manera, que al mover la caja hacia el otro lado las canicas rueden hacia él y después de haberse mezclado se regresa la caja a su inclinación inicial. En este experimento se le pide al niño que anticipe la posición en que quedarán las canicas y la trayectoria que parece que ellas seguirán antes de mover la caja una o varias veces. Este experimento, al igual que los utilizados para estudiar distribuciones centradas y uniformes, requieren sólo de la intuición del azar.

En otros experimentos Piagetianos el sujeto además debe reconocer la estructura de las condiciones, por ejemplo, la cuantificación de probabilidades con el trabajo con urnas implica procesos de organización conceptual que ponen en juego esquemas operativos específicos, que dejan ver la capacidad del sujeto para comparar probabilidades a partir de ordenarlos de acuerdo a los procesos de estimación. Estos experimentos, al igual que los utilizados en los de operaciones de combinación y de permutación, presuponen en esencia un pensamiento operacional.

Mientras que Piaget e Inhelder (1951) estudian especialmente las etapas de la organización lógica de los conceptos de azar y probabilidad, y sólo consideran ocasionalmente las predisposiciones de interpretación, explicación y solución de problemas generados por la base intuitiva, Fischbein (1975) lo hace desde el punto de vista de las relaciones entre la intuición y la ontogénesis del pensamiento probabilístico, en particular el desarrollo de esquemas operativos del intelecto, porque considera que la relación entre la intuición y las estructuras lógicas desempeña un papel esencial en el dominio de la probabilidad. Para Fischbein (1975) "los conceptos de azar y probabilidad podrían construirse sobre una base intuitiva natural" (p. 97), y también señala que "si en los procesos de instrucción ésta no se considera, la base intuitiva se mantiene sin cambios desde el periodo de las operaciones formales en adelante" (p. 97). Aunque es conveniente comentar que "el cálculo final no se encuentra intuitivamente" (p.97).

En contraste con Piaget e Inhelder (1951), quienes sustentan que la noción de azar no se adquiere antes de la segunda etapa, Fischbein (1975) considera que "el esquema conceptual del azar sólo puede existir en función de los recursos operativos pertinentes.

Pero la intuición primaria de azar está presente día a día en la actuación del niño" (p. 118). Fischbein también señala que:

> Los niños de preescolar poseen una intuición natural de azar y la cuantificación de la probabilidad, pero, a esta edad, sólo estimaciones basadas en comparaciones binarias son posibles. (Fischbein 1975, p. 98)

De esta manera, con base en las comparaciones binarias que el niño de preescolar realiza, los problemas que se le planteen no deben estar más allá de sus recursos intelectuales (Fischbein, 1975).

Fischbein (1975) señala que con una enseñanza apropiada los niños entre 9-10 años (segunda etapa) pueden mejorar significativamente sus respuestas, aunque no así las de los niños en edad preescolar, en problemas que no pueden ser reducidos a comparaciones binarias. La instrucción para este autor, desempeña un papel predominante debido a que: "Con la instrucción en el nivel de las operaciones concretas los niños pueden aprender a comparar probabilidades por medio de una comparación cuantitativa de razones" (Fischbein, 1975, p. 98). Esto contrasta con otra afirmación de Piaget e Inhelder (1951), quienes consideran que la proporcionalidad es propia de las operaciones formales que se presenta a partir de los 11 años (tercera etapa). Con esto Fischbein demuestra que con una instrucción pertinente algunos esquemas considerados accesibles sólo hasta las operaciones formales se pueden construir en el nivel de las operaciones concretas, por lo que "la ausencia de la proporcionalidad no es un obstáculo para el aprendizaje del concepto de probabilidad" (Fischbein, 1975, p. 123).

Para Piaget e Inhelder (1951), en la etapa de las operaciones formales (tercera etapa) es cuando se construyen las nociones fundamentales de la probabilidad, porque se tiene la capacidad de establecer proporciones que requieren de operaciones de segundo orden, es decir, operaciones en las operaciones. Al respecto, Fischbein (1975) considera que esto es sólo una potencialidad para la mayoría de los sujetos.

> La estructura operativa del pensamiento formal por sí sola no puede hacer inteligible la probabilidad, a pesar de que puede proporcionar los esquemas necesarios para ello, como la capacidad combinatoria, la proporcionalidad y sus implicaciones. (Fischbein, 1975, p. 127)

Fischbein también señala que en la tercera etapa los sujetos son capaces de entender y aplicar correctamente los conceptos aprendidos, los cuales implican el inicio de una reestructuración de la base intuitiva, que a diferencia del adulto, el adolescente tiene mayores posibilidades de llevarla a cabo. La intuición del azar en esta tercera etapa, según este autor, se convierte en “irreconciliable con la estructura del pensamiento lógico, y es relegada a un estatus inferior como un método inadecuado de interpretación que no se ajusta a los estándares científicos” (Fischbein, 1975, p. 127). Considera Fischbein que esto es debido a aspectos culturales y educativos que privilegian esquemas deterministas de pensamiento que llevan a la búsqueda de relaciones causales que puedan justificar las explicaciones y predicciones unívocas.

Fischbein considera fundamental para el desarrollo del pensamiento probabilístico a la intuición y a su correcto desarrollo a partir de una adecuada instrucción.

> Intuición probabilística no desarrollada no es capaz de seguir los procedimientos de razonamiento sofisticado, ni guiar para la selección de tales procedimientos, o evaluar la plausibilidad del resultado obtenido. (Fischbein, 1975, p. 131)

Para Fischbein (1975)

> Las intuiciones son una parte integral del comportamiento inteligente. Son adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en la práctica o acción mental y se caracterizan por su inmediatez, globalidad, capacidad extrapolaría, por ser estructurales y autoevidentes. (Fischbein, 1975, p. 117)

Es decir, de acuerdo con Fischbein (1975; 1999), las intuiciones son aceptadas como tal sin que el individuo sienta la necesidad de verificarlas o probarlas. Proporcionan certeza intrínseca porque no requieren ayuda externa (formal o empírica) para ser declaradas; son globales en oposición a la lógica de los conocimientos adquiridos, que son secuenciales y analíticos; su capacidad de extrapolación consiste en ir más allá de cualquier tipo de apoyo empírico; son coercitivas, porque el individuo tiende a rechazar interpretaciones alternativas que las contradigan. Una intuición nunca es una mera suposición; son esquemas estables y estructurales que seleccionan, asimilan y almacenan todo en la experiencia de la persona que ha encontrado mejorar la rapidez, adaptabilidad y eficacia de la acción.

> Las intuiciones se basan principalmente en esquemas estructurales. Los esquemas estructurales son dispositivos conductual-mentales que hacen posible la asimilación e interpretación de la información y las reacciones adecuadas a diversos estímulos. Los esquemas estructurales se caracterizan por su importancia general para la conducta adaptativa. (Fischbein, 1999, p. 11)

En suma, Fischbein (1999, p. 41) comenta "los esquemas estructurales son programas de interpretación y de reacción". Otra característica esencial de las intuiciones, según Fischbein (1975; 1999), en el comportamiento inteligente es servir como una base para las extrapolaciones. Las intuiciones que evolucionan, cambia su estructura, es decir, son adaptables y por lo tanto pueden ser influenciadas por una enseñanza sistemática.

Fischbein (1999) diferencia a las intuiciones de las percepciones. Las intuiciones son cogniciones intelectuales que expresan un concepto, un principio, una interpretación, una predicción o bien una solución, mientras que las percepciones son cogniciones sensoriales, como ver un objeto determinado.

Este autor identifica dos tipos de intuiciones:

> *Intuiciones primarias* son adquisiciones cognitivas que se derivan de la experiencia individual, sin la necesidad de alguna enseñanza sistemática intencional.
>
> *Intuiciones secundarias* son adquisiciones que tienen todas las características de las intuiciones, pero éstas se forman por la educación científica, principalmente en la escuela. (Fischbein, 1975, p. 117)

Para Fischbein (1975) las intuiciones secundarias desde el punto de vista psicológico no se reducen a fórmulas aceptadas o mecanizadas, lo importante es que se transforman en creencias, convicciones, incluso en ideas evidentes. El proceso de reemplazo de una intuición primaria por una secundaria no es un proceso gradual, sino que se lleva a cabo como un todo.

Fischbein (1975; 1999) también clasifica a las intuiciones en afirmatorias y anticipatorias. Las afirmatorias son representaciones e interpretaciones que incorporan el conocimiento del mundo externo, que aceptamos como evidentes. Las intuiciones anticipatorias son construcciones mentales que se anticipan a la solución de un problema antes de que los pasos detallados de la solución hayan sido encontrados. Se caracterizan porque aparecen de repente, durante la resolución de una tarea, después de una intensa búsqueda, presentan un carácter global y en contraste con una suposición habitual o hipótesis. Las intuiciones anticipatorias se asocian a una sensación de profunda convicción y certeza antes de construir la base formal y analítica de la solución.

En ausencia de un control sistemático del sistema conceptual, las intuiciones primarias pueden conducir, a través de extrapolaciones ilícitas, a errores de interpretación y predicción. Estos errores se derivan del uso inadecuado de determinadas adquisiciones de inteligencia, propias de la etapa particular de desarrollo (Fischbein 1975). Esto nos podría llevar a pensar que hay intuiciones correctas e incorrectas, sin embargo, la diferencia entre éstas es relativa porque depende de la situación y del individuo que la resuelve, por ejemplo, en situaciones de urnas que contienen elementos favorables y desfavorables, un estudiante afirmaría que hay más probabilidad si considera el mayor número de casos favorables. En este sentido, si la afirmación intuitiva se basa en la experiencia que se ha tenido de comparar números naturales, sería correcta si se utilizan urnas con una variable (véase el cuadro 1), pero no podría serlo si se extrapola a una situación donde se utilicen urnas con dos variables (véase el cuadro 1), puesto que ahora la situación demanda otro tipo intuiciones y en consecuencia de comparaciones, por ejemplo, con racionales. Así, la intuición de comparar con números naturales sólo los casos favorables para determinar la mayor probabilidad ya no es correcta. Las intuiciones en el caso de urnas son válidas en determinadas situaciones y con determinados individuos sin poderse generalizar.

Fischbein (1999) considera a Bruner (1965) para señalar que en el proceso de formación intelectual los estudiantes deben ser alentados para expresar sus intuiciones, puesto que para estimar la viabilidad de una estrategia de solución se requiere que el estudiante tenga la oportunidad de enfrentarse a sus intuiciones. No obstante, la evidencia intuitiva de una propiedad u operación no excluye la necesidad de conferirles un estatuto formal, riguroso (definición, demostración, etc.) de acuerdo con la estructura axiomática, deductiva de las matemáticas. Fischbein (1999) apunta que en la enseñanza de las matemáticas es importante que se entiendan las interacciones entre lo intuitivo, lo formal y los aspectos en los procesos de comprender, recordar y resolver problemas. Si las fuerzas intuitivas se descuidan, estarán influyendo en la capacidad de los alumnos para comprender y resolver, pero desafortunadamente de una manera incontrolada, por lo general perturbarían el proceso de pensamiento matemático. Si el aspecto formal se descuida y se tiende a confiar exclusivamente en argumentos intuitivos, lo que se impartirá no será matemática.

Greer (2001) señala que la teoría de Fischbein sobre el desarrollo del pensamiento probabilístico está indisolublemente vinculada con la educación y con el mejoramiento de la enseñanza en relación con la probabilidad.

> Por lo tanto, la interacción entre intuiciones, pensamiento lógico, y la instrucción es fundamental para la teoría de Fischbein en el desarrollo del pensamiento probabilístico que la hace al mismo tiempo una teoría de la instrucción. (Greer, 2001, p. 19)

Mientras que la teoría de Piaget, según Greer (2001), está enmarcada en términos de etapas de desarrollo cognitivo; considera que los conceptos de incertidumbre se desarrollan como complemento lógico de las estructuras operativas.

2.3.- Nuestra postura ante el desarrollo del razonamiento proporcional y el probabilístico

Con base en lo que Fischbein argumenta y que se describió con antelación respecto a que:

- El razonamiento proporcional no necesariamente antecede al probabilístico porque considera posible la existencia de determinados mecanismos intuitivos pre-operacionales para la estimación de probabilidades,
- Con una instrucción adecuada en la etapa de las operaciones concretas el niño puede aprender a comparar cuantitativamente probabilidades por medio de razones. De esta manera, esquemas considerados accesibles sólo hasta la etapa de las operaciones formales se pueden construir en la etapa de las operaciones concretas.
- Por sí sola la estructura operativa del pensamiento formal no puede hacer inteligible la probabilidad, a pesar de que puede proporcionar los esquemas que sean necesarios para ello, como la capacidad combinatoria, la proporcionalidad y sus implicaciones.

Fischbein (1975) también considera que la relación entre la intuición y las estructuras lógicas desempeña un papel esencial en el dominio de la probabilidad, y que los conceptos de azar y probabilidad podrían construirse sobre una base intuitiva natural. La investigación que aquí se presenta comparte estas ideas de Fischbein y parte del supuesto de que el razonamiento proporcional no necesariamente antecede al probabilístico, por lo que es posible el desarrollo simultáneo de ambos razonamientos, a partir del trabajo con situaciones cuidadosamente diseñadas que impliquen a ambos.

La secuencia de los contenidos de probabilidad y proporcionalidad en los Programas de estudio 2006 de matemáticas

En las matemáticas como disciplina se tiene una organización conceptual lógica y se esperaría que en el proceso de su enseñanza, la construcción de los conceptos se llevara a cabo con base en la complejidad que estos presentan y que, a su vez, correspondiera al proceso de su aprendizaje por el sujeto, pero esto no siempre es así. Entre los factores que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se tiene que los ritmos de aprendizaje y los conocimientos previos de los estudiantes son distintos, así como las relaciones que ellos establecen entre estos conocimientos previos y los nuevos. De esta manera, generalmente se trabaja con grupos heterogéneos con quienes, con base en los *Programas de estudio* (SEP, 2006), se deben abordar determinados contenidos con distinto nivel de profundidad de acuerdo al grado que se curse 1º, 2º o 3º.

En los *Programas de estudio 2006* para la educación secundaria la organización de los contenidos, en el caso de los temas de proporcionalidad y probabilidad, se presentan de tal forma que en los dos primeros grados se estudiaban ambos contenidos y en tercero sólo los de probabilidad (véase el capítulo I), así cuando un estudiante trata en tercer grado el tema de comparación de probabilidades ya había tenido experiencia previa con contenidos de proporcionalidad, lo que nos llevaría a pensar que no presentaría dificultades con este tipo de comparaciones, con base en lo que Piaget e Inhelder (1951) señalan en cuanto a que el razonamiento proporcional determina el estudio de la probabilidad, es decir, estos autores ven al razonamiento proporcional como un prerrequisito para acceder el razonamiento probabilístico.

Piaget e Inhelder (1951) aseveran que un niño en la tercera etapa de las operaciones formales (análogamente un estudiante de tercer grado de secundaria) con un razonamiento proporcional no presenta dificultades para trabajar con situaciones probabilísticas, como la comparación de probabilidades. No obstante, alcanzar esta etapa, donde se supone que el individuo ha conformado ya un razonamiento proporcional, no asegura que pueda llevar a cabo, durante la resolución de determinadas situaciones, algún razonamiento probabilístico, tal y como sucedió en la investigación realizada por Alatorre (1994) con estudiantes universitarios, donde identificó estrategias de las tres etapas. Por lo expuesto, es importante que cuando se trabajen temas como el de probabilidad, no se presupongan los conocimientos previos, ya que aún después de una enseñanza sistemática que cimiente unos conocimientos para la adquisición de otros, las dificultades se podrían seguir presentando por obstáculos como los descritos por Brousseau (1983). En este sentido, no basta con que se agoten primero los temas de proporcionalidad para que no se presenten dificultades en probabilidad o esperar a que los estudiantes tengan la madurez suficiente para abordar estos temas. Es importante abordarlos de manera simultánea en la medida de lo posible para que no sean vistos de forma aislada.

En la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas, también se debe tener presente que hay conceptos o declaraciones científicas que contradicen a nuestra intuición y que no pueden ser aceptadas de manera natural. Al estudiante se le puede enseñar a comparar probabilidades por medio de números racionales, sin embargo, la comparación por medio de números naturales es más frecuente de lo que uno esperaría, como lo muestran los resultados presentados por Alatorre (1994) en su investigación. Esto quizá se deba a que en la medida en que se avanza en las matemáticas uno se encuentra con conceptos y declaraciones cada vez más difíciles de interiorizar y aceptar genuinamente, como lo señala Fischbein (1999). Este mismo autor también señala que al comparar la función y el desarrollo de las creencias intuitivas en la historia de la ciencia y en la mente del que aprende, se descubren analogías profundas que pueden ser útiles en la explicación de los hechos respectivos.

En matemáticas es importante la relación entre los temas para el aprendizaje de los conceptos, puesto que haber enseñado un tema no significa que los alumnos logren relacionarlo con otro contenido de la misma u otra área. En los *Programas de estudio 2006* de matemáticas se apunta que para lograr un mejor aprendizaje de esta disciplina se presentan vínculos con otras áreas y se sugieren relaciones entre los contenidos propios de las matemáticas, pero también dejan éstos a consideración del profesor.

En el primer capítulo, cuando se analizaron los *Programas de estudio*, se identificó que en el caso particular de la probabilidad la proporcionalidad sólo está relacionada como algo que está presente, pero no se hace mención de cómo esta implicada; aunque como se señaló existen relaciones entre contenidos de proporcionalidad y probabilidad que nos podrían llevar a su estudio simultáneo considerando, entre otras cosas, el nivel de dificultad de las situaciones, el grado académico en que se encuentren los alumnos y el progreso que presenten.

En el *Libro para el maestro* de matemáticas para la educación secundaria (1994) se presenta la relación de la probabilidad con algunos temas, en él se señala que:

> La probabilidad constituye un contexto donde pueden aplicarse con sentido conceptos y técnicas matemáticas elementales, relacionados con las fracciones, las cifras de porcentajes, el razonamiento proporcional y la simbolización algebraica. La probabilidad tiene, por lo tanto, valor para adquirir, reforzar y profundizar en la comprensión de nociones y procedimientos pertenecientes a otras partes de las matemáticas, siempre y cuando éstos no sean vistos rígidamente como prerrequisitos para comprenderla (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994, p. 364).

En este sentido, y apoyando nuestro punto de vista en lo expuesto por Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, podríamos trabajar con la probabilidad como medio para desarrollar el concepto de fracción y sus distintos significados, por ejemplo, el de razón como *comparador* para representar probabilidades y a su vez comparar probabilidades para favorecer tanto al desarrollo del razonamiento proporcional como al mismo razonamiento probabilístico.

Ventajas de utilizar la probabilidad como medio para favorecer otros contenidos de las matemáticas

No obstante que algunos investigadores señalan inconvenientes al trabajar otros temas matemáticos en probabilidad, otros nos dan fundamentos de la importancia de trabajarlos en este contexto. Elizarrarás, Vázquez y Ojeda (2007) concuerdan con Heitele (1975) en que la probabilidad en el aula es una oportunidad para aprender otros contenidos del programa, ya sea en geometría o aritmética, pero conservándola en primer plano.

Cañizares y Batanero (1997), en su estudio sobre la *influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades,* opinan que en el dominio del cálculo de proporciones es un prerrequisito para el cómputo adecuado de probabilidades y señalan en una de sus conclusiones que el nivel de razonamiento proporcional de los alumnos es "bajo", lo que podría ser un obstáculo para el aprendizaje de las probabilidades; sin embargo, también señalan que la enseñanza de la probabilidad podría ser un contexto muy rico para favorecer el desarrollo del razonamiento proporcional de estos alumnos.

2.4.- Relaciones entre el razonamiento proporcional y el probabilístico y su desarrollo en un contexto de urnas

2.4.1.- El modelo de urna como medio para favorecer el razonamiento proporcional y el probabilístico

Los fenómenos aleatorios

Los fenómenos aleatorios son aquellos a los que podemos aplicar el cálculo de probabilidades (Batanero, 2001) y en este cálculo están implicadas las fracciones y sus distintos significados, además de que en la comparación de probabilidades se puede identificar y llegar a establecer si éstas están o no en proporción. De esta manera, en los fenómenos aleatorios se encuentran involucradas la probabilidad y la proporcionalidad, temas que en esta investigación interesa analizar. Ahora bien, un fenómeno es aleatorio si cumple con los requisitos imprescindibles para asegurar la aleatoriedad de un suceso, por ejemplo, que sean equiprobables e independientes. Es decir, si de una urna se extrae con reemplazo al azar una bola de determinado color, ésta deberá tener la misma probabilidad de salir que cualquiera del conjunto de las bolas contenidas en esa urna y si el experimento se repite varias veces, los resultados no dependerán de las extracciones anteriores.

La simulación y el modelo de urna

En el *Libro para el maestro* de educación secundaria (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994) se señala que simular consiste en explorar el comportamiento de una experiencia aleatoria observando otra experiencia equivalente pero más fácil de realizar o de estudiar. Durante este proceso de simulación se puede predecir o conjeturar un resultado mediante el análisis y validar dicho resultado. La simulación es una forma de trabajar problemas difíciles y brinda la posibilidad de proponer alguna solución, por lo que es importante que el docente diseñe actividades que lleven a los estudiantes a emplear algún modelo de simulación o a que propongan sus propias situaciones para ser modeladas.

Al tratar situaciones que requieren de un cálculo de probabilidades se puede recurrir a simulaciones y para realizar éstas se pueden utilizar diferentes recursos o modelos, por ejemplo, una moneda que contenga dos sucesos (águila o sol) podría ser empleada para simular el experimento aleatorio del sexo de un recién nacido y un dado para elegir de un conjunto de seis sucesos uno o más.

Una urna es uno de los modelos universales de la probabilidad (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero,1994). Es un dispositivo físico que permite generar resultados aleatorios a partir de extracciones al azar de objetos como canicas, papelitos, fichas, monedas, cubos, entre otros. Cada uno de estos conjuntos de objetos debe poseer características físicas iguales en tamaño y forma para mantener en lo posible la equiprobabilidad.

El modelo de urna es más completo y funcional porque permite simular casi cualquier situación, inclusive a otros modelos como el lanzamiento de una moneda que equivaldría a tener en una urna dos bolas de diferente color, o si en una urna hay seis bolas de diferente color, o si cada bola contiene un número diferente del 1 al 6, esta urna estaría representando el lanzamiento de un dado de seis caras. Aunque una moneda y un dado podrían simular, cada uno, lo que sucede en una urna, estos sólo representarían casos particulares de las urnas.

Una urna puede contener los elementos necesarios para poner en correspondencia cualquier número finito de sucesos. En cambio, una moneda o un dado de 6 caras son modelos que sólo permiten poner en correspondencia 2 o 6 sucesos respectivamente, por lo que las situaciones que se pueden simular con una moneda o un dado están limitadas por los sucesos de cada uno de estos dos modelos y sus múltiplos, si se utilizan dos o más monedas o dados, considerando que pueden existir dados con más de seis caras que corresponderían a los cinco poliedros regulares, pero aún así estarían limitados por el número de caras que los componen.

Otra ventaja que tiene recurrir a urnas es que se pueden emplear una, dos o más (así como el número de elementos o sucesos que contienen), esto dependerá de la situación que se desee modelar. Por ejemplo, en el *Libro para el maestro* de educación secundaria (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994) los problemas propuestos en el apartado "Probabilidad" pueden modelarse sólo con una urna. Pero autores como Piaget e Inhelder (1951), Fischbein (1975), Green (1979, 1983a, 1983b, 1987, 1988), Falk (1980), Alatorre (1994), García (1996), Cañizares (1997), y Lema y Morfin (1981), en algunas de sus investigaciones, han planteado situaciones con dos urnas.

Cada elemento de una urna puede representar un suceso de otro experimento equiprobable, pero también un elemento de una urna puede representar dos o más sucesos, es decir, si en una bolsa se depositan dos fichas: un lado con una cara y el otro lado con una cruz y la otra con dos caras; si se extrae la ficha con dos caras el suceso es uno pero si se extrae la ficha con cara y cruz, éste es un elemento que contiene dos sucesos que deben ser valorados nuevamente.

No obstante que existen situaciones que pueden ser modeladas con urnas, las urnas en sí mismas son un contexto rico para trabajar temas de probabilidad u otros de las matemáticas. Se pueden estimar poblaciones desconocidas o inaccesibles, por ejemplo, si se quiere conocer el número de elementos que contiene una urna (elementos iguales) es posible estimarlo si se introducen elementos diferentes y si se hacen extracciones sucesivas para conocer la proporción entre los elementos iniciales y los que se introdujeron y así estimar el número de elementos que contenía originalmente la urna (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994). Este tipo de análisis con urnas es útil en el campo de la biología para conocer el tamaño de una población inaccesible de distintas especies, y aunque estas situaciones no se promueven en secundaria sería interesante, en algún momento, explorar sus alcances.

La urna es un recurso que el profesor puede proponer para que el estudiante modele situaciones de manera concreta o simbólica, que le ayude a comprender conceptos y modelos matemáticos propios de la probabilidad. En este sentido el modelo de urna permite llevar al alumno a un razonamiento probabilístico dejando a un lado el razonamiento determinista que se favorece si sólo se definen conceptos. También, durante el trabajo con urnas, se pueden favorecer de manera conjunta el desarrollo de habilidades y la adquisición de conceptos de otras áreas de las matemáticas como la proporcionalidad, que está implicada en el trabajo con probabilidades.

La proporcionalidad y la probabilidad, al igual que otros temas de las matemáticas están interrelacionados, de tal forma que no podemos separar uno del otro aunque existan diferencias específicas. En esta investigación, con situaciones contextualizadas en el modelo de urna se pretende que los alumnos analicen y representen datos, establezcan relaciones de proporcionalidad o no entre ellos para que determinen la probabilidad de un suceso.

Heitele (1975) propone diez ideas estocásticas como fundamentales, con base en las siguientes cuatro tesis de Bruner. *(1)* El principio determinante de la enseñanza en una disciplina es la transmisión de las ideas fundamentales, *(2)* cualquier tema puede enseñarse de manera efectiva en una forma correcta a cualquier niño en cualquier etapa de desarrollo, lo que implica que las ideas fundamentales son necesarias como una guía desde los niveles elementales hasta los universitarios con el fin de garantizar una cierta continuidad, *(3)* Las ideas y conceptos fundamentales se tratarán en los diferentes niveles cognitivos y lingüísticos en una "espiral curricular", y *(4)* La transición a un nivel cognitivo superior se facilita si el tema subyacente ha sido preparado en una representación adecuada en las etapas cognitivas anteriores. La comprensión intuitiva de las relaciones concretas se cultiva en las primeras etapas siempre y cuando el niño no pueda comprender en una forma analítica más elaborada.

Las diez ideas estocásticas fundamentales de Heitele (1975) se presentan a continuación.

1. Normar las expresiones de nuestras creencias
2. El campo de la probabilidad

3. Combinación de probabilidades - La regla de la suma
4. Combinación de probabilidades - Independencia
5. Equidistribución y simetría
6. Combinatoria
7. Modelo de urna y simulación
8. La idea de variable estocástica
9. Las leyes de los grandes números
10. La idea de muestra

Además de que las tesis de Bruner, retomadas por Heitele, apoyan nuestra postura respecto a que cualquier tema puede enseñarse en cualquier nivel de desarrollo, con diferentes niveles cognitivos y lingüísticos en un "currículum en espiral", y que al igual que Fischbein (1975) señala la importancia de las experiencias intuitivas en la enseñanza de la estocástica, dentro de las ideas fundamentales que Heitele propone se encuentra el modelo de urna y simulación, considerando que una idea es fundamental si es de gran valor explicativo, de acuerdo con Bruner.

Para Heitele, en estocástica se tienen conceptos firmemente arraigados que desafían cualquier definición rigurosa, por ejemplo, "elección al azar"; se puede probar *a posteriori* si una muestra se puede considerar como "al azar" pero el proceso de obtención de muestras aleatorias es por principios inaccesible a definiciones matemáticas, la única manera de describirlo con una alta eficiencia es concretándolo en un modelo de urna. Heitele también considera que la urna y los experimentos aleatorios se pueden componer en otros nuevos que permitan simular procesos aleatorios más complejos.

De esta manera, las simulaciones permiten representar y poner en correspondencia dos experimentos aleatorios diferentes; podemos operar y observar resultados del segundo experimento y utilizarlos para obtener información del primero, siempre y cuando exista una relación biunívoca entre los sucesos de ambos experimentos para que sean equiprobables.

No obstante que la simulación con urnas se puede utilizar para la concepción frecuencial de la probabilidad, en este estudio se retomará la concepción clásica para determinar la probabilidad de un suceso, que implica el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que todos sean equiprobables (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994 y Batanero, 2001). Laplace, en su obra de 1812 *Theorié analitique des probabilités,* dio la definición que se conoce como clásica de probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades como la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables (Batanero, Cañizares y Godino, 1991). Se eligió la probabilidad clásica debido a que se utiliza el valor exacto de la probabilidad y no con su estimación. Además, porque en la comparación de probabilidades están implicadas dos o más razones, que al ser equivalentes representan un caso específico, el de proporcionalidad.

El modelo de urna puede ser utilizado de dos maneras:

- Urna como forma gráfica. Para representar la información, y establecer relaciones entre los elementos que contiene cada urna para obtener información que permita hacer comparaciones y cálculos para tomar decisiones.
- Urna como dispositivo físico o virtual. Donde de manera visual o tangible se pueden hacer múltiples extracciones con y sin reemplazo para que con la información que se obtenga se establezcan relaciones y comparaciones para la toma de decisiones.

La urna como forma gráfica va más encaminada a trabajar con la probabilidad clásica, en cambio, la urna como dispositivo físico o virtual se orienta a la probabilidad frecuencial. Y aunque las urnas como forma gráfica podrían considerarse estáticas, estas finalmente son la representación de un modelo dinámico.

2.4.2.- La concepción frecuencial , clásica y subjetiva de la probabilidad

Fréchet (1988) en su libro *Las matemáticas y lo concreto* señala que el cálculo de las probabilidades tiene por objeto la “apreciación numérica de las oportunidades”, y se pregunta: ¿cómo asignar un valor numérico a un elemento tan complejo como es la posibilidad? Para esto nos presenta dos puntos de vista diferentes: el del estadista y el del jugador. El primero se preocupa por la constancia de algunas proporciones relativas a sucesos cuyas causas parecen ser diversas y variables. El estadista comprueba que para algunos sucesos cuya realización es debida efectivamente al azar, existe una proporción casi constante entre el número de observaciones en que este acontecimiento se realiza y el número total de las observaciones. De esta manera, y desde el punto de vista del estadista, la probabilidad puede ser considerada como una característica global y no individual.

Por otra parte, el jugador, contrariamente a lo que hace el estadista, declara antes de haber hecho una sola tirada, para él es suficiente conocer las condiciones del juego para definir las probabilidades sin tener necesidad de realizar la experiencia, así tan sólo necesita aislar del pensamiento ciertas modalidades que sean incompatibles e igualmente verosímiles para tomar como valor de la probabilidad la relación entre el número de modalidades favorables y el número total de las modalidades posibles.

Con base en lo que Fréchet señala, existen situaciones para las que se puede calcular la probabilidad de un suceso sólo después de una experiencia, e incluso después de una larga serie de pruebas y observaciones. Pero también están las situaciones para las que se puede calcular la probabilidad del resultado que interesa antes de realizar cualquier experiencia. La probabilidad, en cualquiera de las situaciones, como lo señala el mismo autor, es una fracción cuyo numerador es a lo sumo igual al denominador. Sin embargo, como nos interesó considerar situaciones de juegos de azar, analizaremos la probabilidad que se obtiene *a priori* desde el punto de vista del jugador, es decir, nos centraremos en la probabilidad clásica.

Los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo de la probabilidad

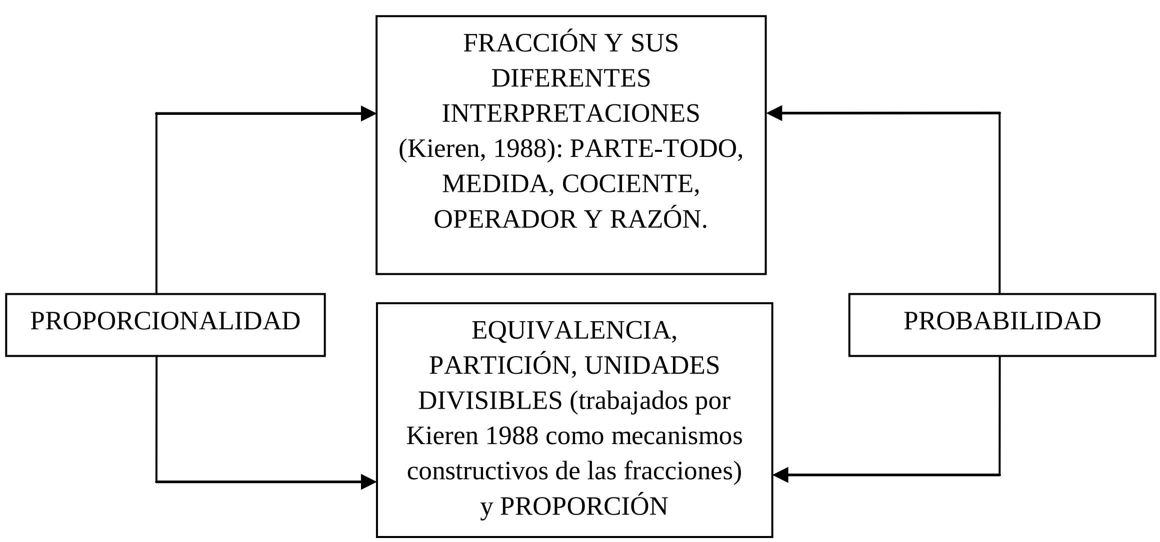
Una limitación del enfoque clásico es que es aplicable sólo a situaciones que generan un espacio muestral equiprobable. Fuera de situaciones de juego, hay muy pocas situaciones de la naturaleza o sociales que pueden modelarse con un espacio muestral equiprobable (Sánchez, 2009). Y aunque hay autores que ven como alternativa al enfoque frecuencialista, como lo señala este mismo autor, porque tiene la ventaja de ligar los conceptos teóricos con los eventos aleatorios de situaciones reales, también tiene desventajas: la primera, es que no proporciona el valor exacto de una probabilidad, y la segunda se refiere a la determinación de las veces que resulta pertinente repetir una experiencia para alcanzar una buena estimación de la probabilidad. Además de que hay situaciones que no se pueden repetir en las mismas condiciones (Hawkins y Kapadia, 1984; Batanero, Henry y Parzysz, 2005, citados en Sánchez, 2009), por lo que estos mismos autores recomiendan al enfoque subjetivista, para el que la probabilidad de un evento es un número entre cero y uno que representa el grado de creencia sobre la ocurrencia del evento. Steinbring y Von Harten (citados en Sánchez, 2009) sugirieron que un método subjetivo permite asignar una probabilidad a un amplio rango de situaciones, incluidas aquéllas en las que tanto el método frecuencialista como la probabilidad clásica o *a priori* no son aplicables.

Shaughnessy (1992) apoya un punto de vista pragmático que implique la modelización de varias ideas de probabilidad, y considera que el modelo de probabilidad que usemos en una situación particular debería estar determinado por la tarea que pedimos a nuestros estudiantes investigar y por el tipo de problemas que queremos resolver. De esta manera, aunque para este estudio fue conveniente el enfoque clásico, no dejamos a un lado la posibilidad de emplear los otros enfoques con base en lo que se desee investigar.

2.4.3.- Relaciones entre el razonamiento proporcional y probabilístico

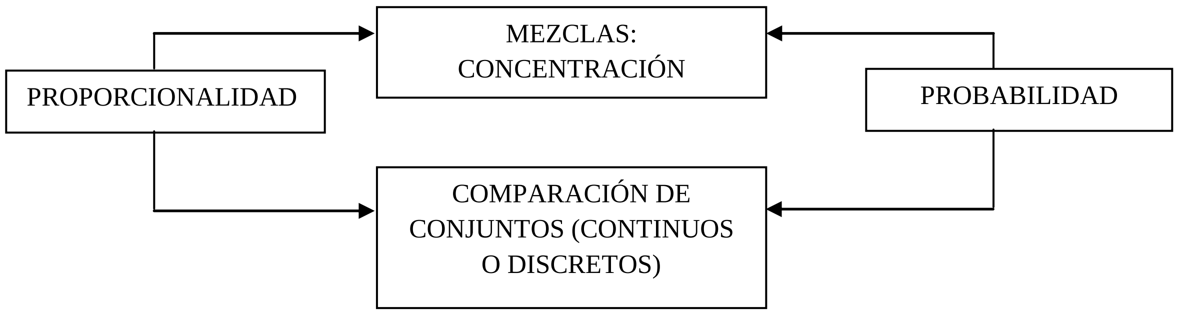
Las implicaciones de la proporcionalidad y la probabilidad se pueden analizar desde un punto de vista conceptual, porque para su estudio comparten conceptos como los que se muestran en el esquema.

Diagrama 3. Relación conceptual entre proporcionalidad y probabilidad



Y desde un punto de vista semántico se tiene:

Diagrama 4. Relación semántica entre proporcionalidad y probabilidad



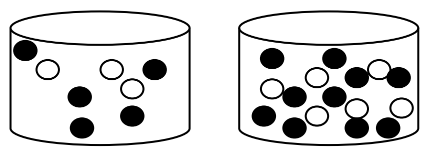
Tanto en proporcionalidad como en probabilidad, aunque se presentan algunos conceptos y semánticas similares, los resultados a los que se llega al resolver situaciones de cada uno tienen diferentes interpretaciones. Por ejemplo, en proporcionalidad, al determinar en cuál de dos conjuntos existe mayor proporción de un subconjunto, si se realiza la elección correcta, se tendría la certeza de que en el conjunto elegido la proporción es mayor, y en una situación de probabilidad aunque se realice la elección correcta dados dos conjuntos se tendría la misma certeza, pero al hacer la extracción al azar de un elemento del conjunto se tendría la incertidumbre de que se obtenga uno del subconjunto deseado, es decir, en probabilidad, específicamente, al comparar probabilidades los resultados, no son un hecho como en proporcionalidad. Cañizares y Batanero (1997) señalan que una diferencia entre las dos tareas es que el resultado de un problema proporcional se refiere a un acontecimiento seguro, mientras que el resultado de un problema probabilístico implica un grado de incertidumbre.

2.4.4.- Cómo interactúan el razonamiento proporcional y el probabilístico en un contexto de urna

Sánchez (2009) considera que cuando se trabaja con la comparación de probabilidades en un contexto de urna se tiene el inconveniente de que estas tareas se podrían asumir como comparación de fracciones o números relativos y no como tareas de probabilidad en las que esté presente la incertidumbre, pues señala que cuando se presenta: “cuál de dos o más eventos en una experiencia aleatoria tiene mayor probabilidad de ocurrir y justificar la respuesta" implica conocer alguna "definición de probabilidad" (clásica o frecuencialista), además afirma que

> […] la justificación tiene que ser en términos de la asignación de una probabilidad a cada uno de los eventos y luego comparar los números resultantes; la comparación de números no es objeto de la probabilidad, por lo tanto, lo importante en la comparación es el "cálculo o estimación de las probabilidades". (Sánchez, 2009)

Sin embargo, un contexto de urna puede utilizarse para trabajar situaciones donde interactúe el razonamiento proporcional y el probabilístico para que sean resueltas. De esta manera, si en dos conjuntos como los que se muestran,

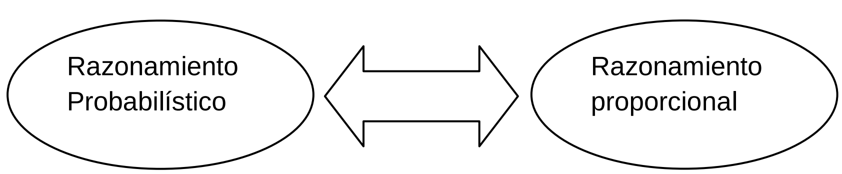


Primera urna   Segunda Urna

se tiene un razonamiento probabilístico cuando se considera que al extraer al azar un elemento de uno de los conjuntos este puede pertenecer a cualquiera de los dos subconjuntos que lo componen (disyunción). Por lo que se tienen las mismas posibilidades en un mismo nivel de jerarquía, es decir, que sin importar cuántos elementos haya de cada subconjunto cualquier elemento de ellos puede salir como paso previo a la realización de comparaciones cuantitativas.

Y en una comparación cuantitativa se presenta un razonamiento proporcional cuando se identifica, en la comparación de conjuntos, al subconjunto con mayor proporción que equivale a tener mayor probabilidad de extraer un elemento de determinado conjunto.

Aunque se realice una comparación cuantitativa adecuada, esto no determina que se extraiga determinado elemento por lo que se regresa nuevamente al mismo nivel de jerarquía con el que se inició (razonamiento probabilístico).



En consecuencia consideramos pertinente el modelo de urna para favorecer ambos razonamientos tomando en cuenta que están presentes cuando se trata con la comparación de probabilidades.

Colín, Garnica y Ojeda (1993), en un documento denominado *Intuición y probabilidad desde el punto de vista de Fischbein*, citan a Hoemann y Ross quienes investigaron la cuestión de si los juicios de los niños de preescolar eran realmente probabilísticos, o más bien se derivan de meras comparaciones perceptuales ligadas al contexto experimental. Al respecto, Colín, Garnica y Ojeda (1993) señalan que en la opinión de Fischbein, es la naturaleza del problema, incluyendo la forma en la que se formula, lo que mostrará si la tarea y la respuesta respectiva implican ó no un juicio probabilístico. Además apuntan que Fischbein concluye que el concepto de azar está presente en las tareas probabilísticas aún si la estimación es perceptual.

2.5.- Las urnas en estudios previos

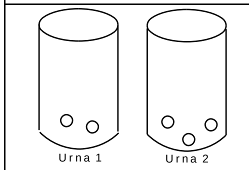
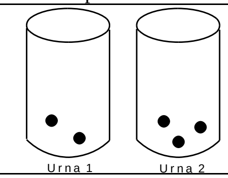
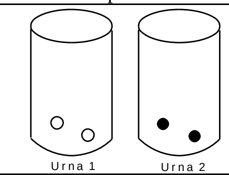
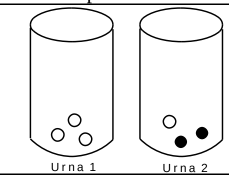
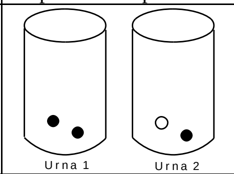
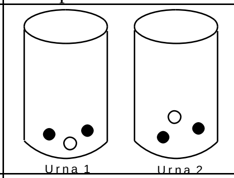
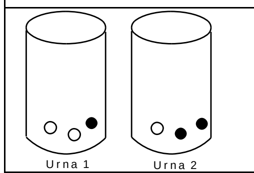
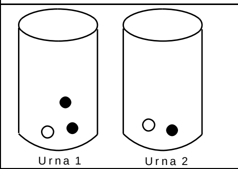
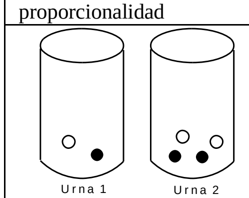
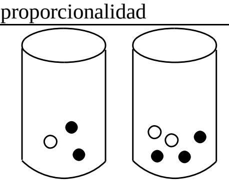
2.5.1.- Análisis de clasificación de dos urnas

Parte de la investigación que aquí se reporta corresponde al análisis de las estrategias que los estudiantes utilizan al proponerles situaciones que conducen la consideración de dos urnas. Piaget e Inhelder (1951), en la segunda parte de su libro *"La genése de l'idée de hasard chez l'enfant",* presentan un análisis del proceder de niños de distintas edades al proponerles juegos de azar como urnas y volados. Uno de los experimentos que realizan consiste en presentar al niño dos conjuntos de fichas blancas, algunas de ellas marcadas con una cruz en una de sus caras. Después de que el niño las observa, se voltean y se revuelven para que decida en cuál de los conjuntos hay más oportunidades de encontrar a la primera una cruz.

Las composiciones de fichas de los dos conjuntos que se les presentaron a los niños se clasificaron en tres categorías: En la primera están problemas con certeza o imposibilidad, y problemas con composiciones idénticas. En la segunda se presentan problemas con "una variable" (igualdad de casos favorables o igualdad de casos posibles), es decir, se tienen fichas con y sin cruz en ambos conjuntos pero cada uno con el mismo número de fichas con cruz o el mismo número de fichas. En la tercera se presentan problemas de "dos variables" (desigualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles); en ambos conjuntos hay fichas con y sin cruz pero cada uno con distinto número de fichas con cruz y distinto número fichas, que pueden o no presentar proporcionalidad.

En el siguiente cuadro (véase el cuadro 1) se muestra la clasificación de Piaget e Inhelder, retomada en el trabajo de Lema y Morfin (1981), quienes la ejemplifican numéricamente con cocientes. En el cuadro 1 incluimos urnas transparentes donde hemos cambiado las fichas con cruz por bolas negras y las fichas sin cruz por bolas blancas, pues consideramos que es otra manera de ejemplificarlas y que esto ayudaría a tener presente en todo momento la cantidad de elementos que las conforman, lo que con las fichas de Piaget no sucede.

Cuadro 1. Clasificación de dos urnas

Clasificación de dos urnas: con certeza, imposibilidad, posibilidad, composición idéntica; con una variable; y con dos variables.						
Urnas con certeza, imposibilidad, posibilidad, composición idéntica	Doble certeza	Doble imposibilidad	Certeza- imposibilidad	Certeza- posibilidad	Imposibilidad-posibilidad	Composición idéntica
						
	$\frac{2}{2}$ $\frac{3}{3}$	$\frac{0}{2}$ $\frac{0}{3}$	$\frac{2}{2}$ $\frac{0}{2}$	$\frac{3}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{0}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
Urnas con una variable	Desigualdad de casos favorables e Igualdad de casos posibles	Igualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles				
						
	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$				
Urnas con dos variables	Desigualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles con proporcionalidad	Desigualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles sin proporcionalidad				
						
	$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$				

De la clasificación mostrada en el cuadro anterior se retomaron los problemas de “dos variables” con y sin proporcionalidad, por ejemplo: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

2.5.2.- Análisis de clasificación de resultados en estudios previos al plantear situaciones con dos urnas

Cuando Piaget e Inhelder aplicaron sus diez situaciones de dos urnas, clasificadas y ejemplificadas en este estudio en el cuadro 1, encontraron características propias de cada una de las tres etapas, en la primera que se subdivide en los niveles IA y IB, generalmente se tiene la dificultad para establecer relaciones cuantitativas apropiadas. Las preguntas de doble imposibilidad, de certeza-imposibilidad y de imposibilidad-posibilidad no presentan dificultad. En el nivel IA se realizan elecciones incorrectas al abordar situaciones de una y dos variables, por ejemplo, en el caso de una variable (igualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles) donde se tienen las probabilidades $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, se tiende a escoger $\frac{1}{3}$ porque consideran que es mayor, aunque desde nuestro punto de vista cabría especificar en qué sentido es mayor, y cuando se presenta la desigualdad de casos favorables e igualdad de casos posibles, por ejemplo, con probabilidades $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$ se tiende a elegir el lado en el que hay un sólo elemento favorable, es decir, $\frac{1}{4}$. Esto también sucede con frecuencia cuando se les presenta el caso de certeza-posibilidad; eligen el de posibilidad cuando hay sólo un favorable. En situaciones de proporcionalidad, por ejemplo, cuando se presentan las probabilidades $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ se tuvo que la mayoría elije la segunda porque consideran que contiene mayor número de casos favorables. En ambos casos se realiza la elección centrando la atención en la parte o en el todo pero no en ambos, en el primero, en los casos posibles y en el segundo en los casos favorables. Entre las causas que Piaget e Inhelder consideran que los llevan a efectuar este tipo de elecciones se encuentra primordialmente la incapacidad para efectuar disyunciones y la carencia de las operaciones de clasificación que les permitan considerar simultáneamente los tres elementos de cada conjunto, es decir, los casos favorables, desfavorables y posibles. Sin estas relaciones

Piaget e Inhelder afirman que no se pueden establecer juicios de probabilidad debido a que en esta etapa los niños centran su atención sólo en uno de ellos.

En esta primera etapa Piaget e Inhelder ubican en el nivel IB a estudiantes que realizan elecciones correctas con base en dos intuiciones, a las que puede llegar cuando se les presentan situaciones con una variable. Por ejemplo, dados dos conjuntos cuyas probabilidades correspondan a $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ hay quienes no basan su elección considerando el conjunto que tiene mayor cantidad de fichas, sino por lo contrario, basan su elección en la menor cantidad. Y si se les presentan dos conjuntos con probabilidades $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$ hay quienes basan su elección considerando el conjunto con más casos favorables. Piaget e inhelder también comentan que este tipo de elecciones se debe a que la comparación de dos conjuntos facilita la intuición de las diferencias en las relaciones parte-todo a diferencia de los problemas de un solo conjunto donde las partes deben considerarse con base en la totalidad única que implica un mayor grado de abstracción.

La segunda etapa se subdivide en dos niveles IIA y IIB. Se caracteriza por la capacidad para establecer comparaciones cuantitativas apropiadas y, a diferencia de la primera, en la que los estudiantes realizan elecciones correctas con base en intuiciones cuando se les presentan preguntas con una variable, en esta segunda se presentan soluciones sistemáticas, es decir, dadas las probabilidades $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$, retomadas del ejemplo de la primera etapa, donde los casos posibles son iguales, se pueden establecer relaciones como: $4-1=3$ y $4-2=2$ para comparar los casos desfavorables 3 y 2 o $4-3=1$ y $4-2=2$ para comparar los favorables 1 y 2, y así hacer la elección. Piaget e Inhelder comentan que este tipo de comparaciones se presentan en esta etapa debido a la capacidad de efectuar disyunciones y a la adquisición de las operaciones lógico-aritméticas.

En esta segunda etapa se encuentran en el nivel IIA estudiantes que realizan constantemente elecciones incorrectas cuando se les presentan situaciones con dos variables con proporcionalidad, y en el nivel IIB a los que llegan a soluciones empíricas apoyadas en agrupamientos realizados por un tercero. En este nivel los sujetos abordan problemas de proporcionalidad recurriendo comúnmente a comparaciones de las diferencia de los casos favorables y desfavorables o viceversa en cada conjunto, considerándolas en sentido absoluto y no relativo al total de casos posibles. Piaget e Inhelder argumentan que esto se debe a que las situaciones con dos variables con proporcionalidad implican una relación de relaciones que sólo es posible llevarlas a cabo con la adquisición del pensamiento deductivo.

En la tercera etapa, con la adquisición del pensamiento deductivo y la noción de proporcionalidad, los estudiantes tienen la capacidad de resolver situaciones con dos variables con y sin proporcionalidad. Sin embargo, al tener la dificultad de operar fracciones se emplean estrategias por correspondencia cuando las equivalencias o desproporciones no se visualizan de inmediato.

De esta manera, Piaget e Inhelder identificaron las siguientes siete estrategias al aplicar las diez situaciones.

1. Elección del lado donde hay más casos favorables,
2. Elección del lado donde hay menos casos favorables,
3. Elección del lado donde hay sólo un caso favorable,
4. Elección del lado donde hay más casos posibles,
5. Elección del lado donde hay menos casos posibles,
6. Elección del lado donde es mayor la diferencia de casos favorables y desfavorables, y
7. Elección del lado donde la probabilidad es mayor.

Las primeras cinco estrategias, de acuerdo con Piaget e Inhelder, son propias de la primera etapa. La seis se presenta en la segunda etapa y la siete hasta la tercera. Sin embargo, aunque estos autores señalan algunos indicadores del porqué y cómo se realizaron las elecciones en cada una de las etapas, queda la incertidumbre de qué otras relaciones los alumnos establecen para realizar su elección, si es que las hay, así como si se pueden presentar otro tipo de elecciones distintas a las comentadas por Piaget e Inhelder o si las estrategias que en un momento no fueron funcionales pueda serlo en otro momento o viceversa, lo que sería interesante indagar. Por ejemplo, en la etapa I con la situación de una variable donde se tienen las probabilidades $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ se da la elección incorrecta al considerar el lado donde hay más posibles, aquí la estrategia no es funcional, pero si se presenta una situación con dos variables donde las probabilidades sean $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, esta estrategia llevaría a una elección correcta.

En la segunda etapa dadas las probabilidades $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$ se realizan elecciones correctas con base en las comparaciones de las diferencias de los casos posibles y los favorables o los posibles y los desfavorables. Esta estrategia es funcional porque se presentó una situación de una variable donde los casos posibles son iguales. Si esta misma estrategia se hubiera empleado en la situación de dos variables donde las probabilidades son $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ las diferencias encontradas serían, iguales lo que podría llevar al estudiante a no saber cuál elegir o a determinar que se tiene la misma probabilidad.

Lo anterior son sólo algunos ejemplos de la importancia que tiene profundizar en las estrategias que los alumnos emplean, sus límites y alcances dependiendo de la situación así como de los elementos que se consideran en cada una de estas.

Con base en estos estudios de Piaget e Inhelder (1951) se esperaría que al aplicar sus situaciones a otros estudiantes que se ubiquen en la tercera etapa, las resolverían utilizando la séptima estrategia (elección del lado donde la probabilidad es mayor) que identificaron y que corresponde a la etapa mencionada o al menos que utilizaran alguna estrategia previa (elección del lado donde es mayor la diferencia de casos favorables y desfavorables), sin embargo, Alatorre (1994), al implementar situaciones de probabilidad de tipo piagetianas con estudiantes universitarios, encontró que las categorías piagetianas descritas en cada etapa no se ajustan a los resultados que presentaron sus sujetos de estudio. Por lo que determina las siguientes estrategias.

1.- Estrategias simples: Se clasifican según el número de clases de elementos que entran en juego.

1.1.- Estrategias con una clase de elementos: Centraciones. Son argumentos que se refieren a la observación de una clase de elementos, donde se comparan ambos números de esa clase.

- Centración en casos totales: Llevan a la elección del espacio muestral por los elementos que lo componen (más, menos o igual) sean favorables o desfavorables.

Centración negativa {N-}: Elección del espacio muestral porque hay menos elementos en total.

Centración positiva {N+}: Elección del espacio muestral porque hay más elementos en total.

Centración de igualdad {N=}: Elección de cualquiera con base en la igualdad de elementos totales.

- Centración en casos favorables: Llevan a la elección del espacio muestral por los elementos favorables que lo componen (más, menos o igual) independiente de los desfavorables y totales.

Centración positiva {F+}: Elección del espacio muestral porque hay más elementos favorables.

Centración negativa {F-} y {F1}: Elección del espacio muestral porque hay menos elementos favorables {F-} o en donde se presenta sólo un favorable {F1}.

Centración de igualdad {F=}: Elección de cualquiera con base en la igualdad de elementos favorables.

- Centración en casos desfavorables: Llevan a la elección del espacio muestral por los elementos desfavorables que lo componen (más, menos o igual) independiente de los favorables y totales.

Centración negativa {D-}: Elección del espacio muestral porque hay menos elementos desfavorables.

Centración positiva {D+}: Elección del espacio muestral porque hay más elementos desfavorables.

Centración de igualdad {D=}: elección de cualquiera con base en la igualdad de los elementos desfavorables.

Es de señalar que tanto las estrategias que se centran en los casos totales como en los favorables corresponden a la 1, 2, 3, 4 y 5 de las identificadas por Piaget e Inhelder

(1951), pero Alatorre además incorpora la de centración en casos desfavorables y en cada una de las tres centraciones también incorpora la centración de igualdad {D=}.

1.2.- Estrategias con dos clases de elementos: Relaciones. Argumentos que se refieren a la observación de dos clases de elementos, de la que después de establecer dos relaciones se procede a comparar los resultados. Es de señalar que el proceso puede ser de dos tipos, "dentro" y "entre" —categorías que Alatorre retoma de Noelting (1980) y las amplía para otros tipos de razonamiento y no sólo para el proporcional—, que llevan a su vez a las siguientes tres estrategias de relación.

- Relación de orden: Estrategias de equilibrio. La relación de orden se efectúa con una comparación de los números de dos clases, sin asignarle una magnitud a ésta. Cuando se establece una relación de orden de tipo "dentro" con los casos favorables y desfavorables, y la comparación de los resultados se basa en el punto de equilibrio en que hay igualdad entre ellos, se está empleando una estrategia de equilibrio guiada por la combinación de posibilidades de perder, empatar o ganar que ofrecen ambos lados.

Estrategia de pierdo-gano ({E<>}): Lleva a la elección de un espacio muestral porque en él hay más posibilidades de ganar que de perder, mientras que en el otro hay más posibilidades de perder que de ganar.

Estrategia de pierdo-empato ({E<}): Lleva a la elección de un espacio muestral porque en él hay tantas posibilidades de ganar como de perder, mientras que en el otro espacio muestral hay más posibilidades de perder que de ganar.

Estrategia de empato-gano ({E>}): Lleva a la elección del espacio muestral porque ahí hay más posibilidad de ganar que de perder, mientras que en el otro espacio muestral hay tantas posibilidades de ganar como de perder.

Estrategia de pierdo-pierdo o gano-gano ({E=}): Se hace la consideración de que en ambos espacios muestrales hay más posibilidades de perder que de ganar o viceversa.

Atracción al punto de equilibrio: Lleva a la elección del espacio muestral en que $p = 0.5$ por ese sólo hecho (donde p es la probabilidad).

- Relación sustractiva: Diferencias de número de favorables menos número de desfavorables. En esta relación de carácter aditivo o sustractivo se asigna una magnitud, la diferencia aritmética entre los números de favorables y los números de desfavorables, pero no se toma en cuenta la cantidad basal. En este caso, las estrategias de relación de tipo “dentro” son las que establecen la diferencia en cada espacio muestral y posteriormente se comparan los resultados.

Estrategia de resta mayor ({R+}): Consiste en la elección del espacio muestral en el que después de formar “parejas” de cancelación o la operación aritmética el residuo mayor es gana o el menor es pierde.

Estrategia de resta menor ({R-}): Consiste en la elección del espacio muestral en el que después de formar “parejas” de cancelación o la operación aritmética el residuo mayor es pierde o el menor es gana.

Estrategia de resta igual ({R=}): Lleva a la respuesta “da igual” porque de ambos espacios muestrales, después de formar “parejas” de cancelación o la operación aritmética, los residuales de pierde o gana son iguales.

En este tipo de estrategias, la de resta mayor {R+} corresponde a la sexta trabajada por Piaget e Inhelder (1951), y las de resta menor {R-} e igual {R=} Alatorre las incorpora.

- Relación multiplicativa: Estrategias con razonamiento proporcional. La magnitud asignada es el cociente de casos favorables entre totales, favorables entre desfavorables, la diferencia aritmética de favorables y desfavorables entre totales, desfavorables entre totales, o bien, desfavorables entre favorables. Una relación de este tipo se establece con elementos de dos clases en un espacio muestral “dentro” (o de dos espacios muestrales en una clase “entre”) y después se compara con lo que ocurre entre los elementos correspondientes de otro espacio muestral (o de la otra clase).

Estrategia de cociente mayor ({P+}): Consiste en la elección del espacio muestral en que hay mayor cociente de casos favorables entre totales, favorables entre desfavorables o menor cociente de casos desfavorables entre totales.

Estrategia de cociente igual ({P=}): Lleva a la respuesta “da igual” porque en ambos espacios muestrales se establece la misma relación por cociente entre los números de dos clases.

Estrategia con error ($\{P^1\}$): Estrategia de razonamiento proporcional en el que hubo un error, ya sea en los cálculos, en la elección o en ambos.

Es de señalar que en el estudio de Alatorre (1994) el proceso de tipo “dentro” se presentó sólo en la relación de orden y en la relación sustractiva, mientras que el de tipo “entre” se presentó sólo en la multiplicativa.

En las estrategias multiplicativas, la de cociente mayor {P+} (específicamente favorables entre totales, porque los otros también se incorporan), corresponde a la séptima trabajada por Piaget e Inhelder (1951), y las de cociente igual {P=} y con error $\{P^1\}$: las incorpora Alatorre.

2.- Estrategias compuestas. Consisten en la yuxtaposición lógica de dos o más estrategias simples dentro de una misma argumentación, y se clasifican según el tipo de operación lógica que interviene en ellas.

2.2.- Composición de dos estrategias simples (E_1 y E_2).

- Conjunción: Cuando E_1 y E_2 llevan a la misma decisión, es decir, se apoyan mutuamente.
- Exclusión: Ocurre cuando E_1 lleva a la elección del un espacio muestral, pero es cancelada por E_2 que lleva a la elección del otro espacio muestral (o a una decisión del tipo “da igual”), es decir, E_2 domina explícitamente a E_1.
- Compensación: Ocurre cuando E_1 lleva a una decisión del tipo “da igual”, pero es cancelada por E_2 que lleva a la elección de alguno de los dos espacios muestrales, lo que rompe la “indecisión” provocada por E_1.

De esta manera la compensación es el resultante de una estrategia dominante y una dominada, como ocurre en la exclusión, pero la diferencia radica en que cuando la estrategia dominada es una estrategia de igualdad se trata de una compensación y cuando la dominada no es de igualdad se trata de una de una exclusión.

- Contrapeso: Ocurre cuando cada una de E_1 y E_2 lleva a la elección de un espacio muestral distinto pero se cancelan mutuamente y el resultado es una decisión del tipo “da igual”, es decir, la elección final no coincide con ninguna de las dos estrategias, por lo tanto E_1 y E_2 son dominadas, por lo que se consideran equivalentes. En conclusión, E_1 y E_2 son contrapeso una de la otra.

2.2.- Composiciones múltiples. Razonamiento basado en una composición de estrategias, una de las cuales es a su vez una estrategia compuesta.

3.- Estrategias y mecanismos primitivos: Alatorre los relaciona con los mecanismos que Piaget e Inhelder (1951) asocian con el periodo preoperatorio.

3.1.- Estrategias primitivas: Están relacionadas con las centraciones o las relaciones, pero se han agrupado para detectar sus similitudes y en lo posible interpretarlas. Se asocian a un “pensamiento mágico” cuyo origen puede ser una idea de que el azar es algo tan inaprensible y extraño que siempre hay que hacer las cosas al revés cuando uno se topa con él.

- Estrategia {N+}: Si el sujeto asocia las opciones para elegir con las opciones para ganar, entonces busca el espacio muestral en el que haya más opciones para elegir, “puesto que” ello le “garantiza” que habrá más opciones para ganar. En este caso, el factor “mágico” radica en la asociación. Esta estrategia es frecuente y se presenta como estrategia simple o como dominante en una composición.
- Estrategia {F-}, {F1} y {D-}: En todas ellas se puede hablar de asociaciones “mágicas” como la mencionada en {N+}. En {F-} pueden estarse asociando las opciones para ganar con las opciones para elegir, lo que llevaría que al buscar el espacio muestral con menor incertidumbre y por ende menos opciones para elegir, se elija el que tiene menos opciones para ganar. Un caso extremo sería {F1}, donde hay menos opciones para ganar, salvo los casos extremos de imposibilidades. En cuanto a {D+}, se podrían estar asociando las opciones para perder con las opciones para ganar, lo que llevaría a que al buscar el espacio muestral con más opciones para ganar se elija el que más opciones tiene para perder.

Estas estrategias también pueden estar relacionadas con dos aspectos sobre la incertidumbre causada por el azar: con la adjudicación de la incertidumbre al interior del conjunto de los elementos favorables (factor mágico) y con la búsqueda de la menor incertidumbre posible. De esta manera si se elije el espacio muestral en el que hay menos elementos favorables {F-}, podría ser porque se considera que hay menos incertidumbre. Un caso extremo sería {F1}. Pero si la incertidumbre está localizada entre los elementos desfavorables, podría llevar a elegir el espacio muestral con mayor certeza {D+}. Estas estrategias no son frecuentes, {F-} se presenta como estrategia simple, {F1} también se presenta como estrategia simple y en ocasiones en composiciones como estrategia dominada.

- Estrategia {E5} y {R-}: En este caso el factor “mágico” radica justamente en la atracción hacia el punto central de equilibrio, es decir, la elección del espacio muestral en el que es menor el valor absoluto de la diferencia entre los números de favorables y los de desfavorables, independientemente de en dónde haya mayor probabilidad de ocurrencia de favorables. Es de señalar que esta atracción nunca es distinguible de {E<}, {E=} y {R+} bajo determinadas situaciones, por esto no es posible saber cuáles respuestas corresponden a ellas y cuáles serían una atracción hacia el punto central de equilibrio. {E5} podría ser considerada como un caso extremo de {R-}. {E5} es la más frecuente de las estrategias primitivas después de {N+}, aparece como estrategia simple o dominante en composiciones, {R-} aparece poco, sólo como estrategia simple.

3.2.- Otros mecanismos primitivos: Pueden ser considerados primitivos de acuerdo con los criterios presentados con antelación.

- Mecanismos de atracción. El sujeto es llevado a una decisión por razones que no puede explicar más que en términos de gusto o “corazonada”: tiene un fuerte componente emotivo.
- Mecanismos de acomodo. El sujeto atribuye su elección a la manera en que están acomodados los elementos que le son mostrados.
- Mecanismo de juntar lados. El sujeto realiza una operación mental de “juntar” ambos espacios muestrales, para formar un solo conjunto. La decisión a la que llega puede ser del tipo “da igual” o a la elección de uno de los dos espacios muestrales.

De esta manera, de la categorización que presenta Alatorre, las estrategias simples que se refieren a las centraciones, a la relación de carácter aditivo o sustractivo y a la relación multiplicativa o proporcional, se derivan de algunas de las propuestas por Piaget e Inhelder (1951). En cambio, las estrategias simples que se refieren a la relación de orden, así como las estrategias compuestas y las estrategias y mecanismos primitivos, son totalmente nuevas en esta categorización.

El estudio de las estrategias empleadas por los estudiantes al resolver situaciones de urnas, como lo señala Alatorre, ya ha sido realizado por otros autores como: Piaget e Inhelder (1951), Maury (1984, 1986), Lecoutre (1984), Fischbein *et al*. (1970) y Thornton y Fuller (1981). Cada uno de ellos ha especificado distintas estrategias, algunas comunes y otras no, porque al igual que Alatorre procedió, las categorías definidas dependieron, en gran medida, de lo que cada investigador se proponía observar o de lo querían enfatizar.

Cuadro 2. Resumen de la categorización de Alatorre (1994)

<table>
<tr><td colspan="4">Cuadro resumen de la categorización de Alatorre (1994) de estrategias empleada por estudiantes al trabajar situaciones con urnas</td></tr>
<tr><td rowspan="6">1.- Estrategias simples</td><td rowspan="3">1.1.- Estrategias con una clase de elementos</td><td>- Centración en casos totales</td><td>Centración negativa {N-}
Centración positiva {N+}
Centración de igualdad {N=}</td></tr>
<tr><td>- Centración en casos favorables</td><td>Centración positiva {F+}
Centración negativa {F-} y {F1}
Centración de igualdad {F=}</td></tr>
<tr><td>- Centración en casos desfavorables</td><td>Centración negativa {D-}
Centración positiva {D+}
Centración de igualdad {D=}</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1.2.- Estrategias con dos clases de elementos</td><td>- Relación de orden: Estrategias de equilibrio.</td><td>Estrategia de pierdo-gano ({E<>})
Estrategia de pierdo-empato ({E<})
Estrategia de empato-gano ({E>})
Estrategia de pierdo-pierdo o gano-gano ({E=})
Atracción al punto de equilibrio</td></tr>
<tr><td>- Relación sustractiva</td><td>Estrategia de resta mayor ({R+})
Estrategia de resta menor ({R-})
Estrategia de resta igual ({R=})</td></tr>
<tr><td>- Relación multiplicativa</td><td>Estrategia de cociente mayor ({P+}):
Estrategia de cociente igual ({P=})
Estrategia con error ({P^1})</td></tr>
</table>

[Continúa]

Cuadro 2. [Concluye]

2.- Estrategias compuestas	2.2.- Composición de dos estrategias simples (E_1 y E_2)	- Conjunción
		- Exclusión
		- Compensación:
		- Contrapeso
	2.2.- Composiciones múltiples	
3.- Estrategias y mecanismos primitivos	3.1.- Estrategias primitivas	- Estrategia {N+}
		- Estrategia {F-}, {F1} y {D-}
		- Estrategia {E5} y {R-}
	3.2.- Otros mecanismos primitivos	- Mecanismos de atracción
		- Mecanismos de acomodo
		- Mecanismo de juntar lados

Las categorías definidas por Alatorre, desde nuestra perspectiva, son las más específicas para el estudio de las estrategias que se emplean para resolver situaciones con dos urnas, pues como ella misma lo señala la cantidad y la calidad de las clases de elementos que entran en juego en una estrategia lleva a una jerarquización de las estrategias por nivel de complejidad.

No obstante, como ahora nos propusimos analizar las relaciones que se establecen entre el razonamiento proporcional y el probabilístico, consideramos conveniente hacer una clasificación de las estrategias para profundizar en los procesos que los estudiantes siguen para llegar a algún resultado. Es decir, identificar los elementos (casos) favorables, desfavorables o posibles que se consideren, el tipo de elecciones que se realicen con base en las relaciones que se establezcan y se analizan las particularidades de estas relaciones, que para este estudio son fundamentales, porque pretendemos obtener indicios de cómo los estudiantes relacionan o podrían relacionar paralelamente el razonamiento proporcional y el probabilístico en un modelo de urna.

El análisis de los niveles de complejidad de las urnas y del tipo de estrategias que los alumnos pueden utilizar para decir o para elegir cuál urna tiene mayor probabilidad, ya ha sido efectuado por otros autores, entre los que se encuentran los mencionados por Alatorre (1994), además de Green (1979, 1983a, 1983b, 1987, 1988), Falk (1980), Alatorre (1994), García (1996), Cañizares (1997), Lema y Morfin (1981), Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), por mencionar algunos de los revisados. Esto nos permite proponer que mediante el planteamiento de situaciones en un modelo de urna, los estudiantes no sólo las resolverían si no que a su vez les permitiría tener una guía para reflexionar sobre las respuestas que proporcionan, favoreciendo de alguna manera el desarrollo simultáneo del razonamiento proporcional y del probabilístico.

Los estudiantes de educación secundaria pueden o no tener un razonamiento proporcional, no obstante, deben abordar situaciones probabilísticas. Esto se debe a que en los *Programas de estudio 2006* (SEP, 2006) y en el *Libro para el* maestro (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994) no se hace distinción alguna en cuanto a las dificultades e implicaciones que tiene tratar los contenidos de proporcionalidad y de probabilidad, es decir, los programas de estudio generalizan implícitamente cada grado, sin considerar si los estudiantes de determinado grado han logrado los conocimientos esperados en el nivel anterior para desenvolverse de manera eficiente. Pese a esto, el docente tiene la encomienda de enseñar determinados contenidos.

Así también hemos considerado las heurísticas y sesgos en probabilidad que Kahneman, Slovic y Tversky (1982) han identificado cuando se presentan juicios probabilísticos. Estos autores se refieren a la heurística como una estrategia inconsciente que reduce la complejidad del problema, dejando a un lado parte de la información, que si bien puede llevar a soluciones correctas, también puede llevar a cometer errores sistemáticos, a los que estos autores nombran sesgos, surgidos de una excesiva confianza en las heurísticas utilizadas. Kahneman, Slovic y Tversky identifican tres tipos de heurísticas: la de representatividad; la de disponibilidad; y la de ajuste y anclaje.

Un ejemplo de una heurística sería cuando en juicios probabilísticos, donde las proporciones son iguales se puede dejar de lado el tamaño de las muestras, cometiendo un sesgo al considerar que muestras con proporciones iguales tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Sin embargo, esto no es así porque las muestras grandes son más estables. El estudio de este tipo de heurísticas puede profundizarse cuando además de la probabilidad clásica se incluya a la frecuencial.

CAPÍTULO III

MÉTODO

3.1.- Tipo de investigación

La investigación que aquí se reporta es de tipo cualitativo (Stake, 1995) porque nos interesó profundizar en el análisis de las estrategias que los estudiantes de educación secundaria siguen al tratar situaciones de probabilidad en un contexto de urna. Para obtener la información utilizamos un caso instrumental (Stake, 1995) con base en la intervención con situaciones que implicaran a la proporcionalidad y a la probabilidad. No obstante, es conveniente señalar que también nos apoyamos de aspectos cuantitativos para mostrar resultados.

3.2.- Instrumentos

3.2.1.- Las situaciones diseñadas y su semántica

Es importante comentar que en la investigación utilizamos la palabra "situación" para referirnos a lo que se les propuso y resolvieron los estudiantes. Para esto, consideramos lo que se menciona en los documentos oficiales para la educación secundaria. En el *Libro para el Maestro de Educación Secundaria* (2001) se asocia la palabra "situación" con lo que se entiende por *problema*, es decir:

> Cuando hablamos de problema, nos referimos a una situación que presenta un reto, un desafío, ante el cual, el alumno que intenta responderlo no dispone de un recurso expedito y, por tanto, debe buscar, ensayar, establecer relaciones, analizar sus efectos, elaborar conjeturas, probarlas y validarlas. ((Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994, p. 16)

Los *Programas de estudio* (2006 y 2011) de matemáticas para la educación secundaria, establecen:

> Toda situación problemática presenta obstáculos cuya solución no puede ser tan sencilla que quede fija de antemano, ni tan difícil que parezca imposible de resolver por quien se ocupa de ello. La solución debe ser construida en el entendido de que existen diversas estrategias posibles y hay que usar al menos una. Para resolver la situación, el alumno debe utilizar los conocimientos previos, mismos que le permiten entrar en la situación, pero el desafío se encuentra en reestructurar algo que ya sabe, sea para modificarlo, para ampliarlo, para rechazarlo o para volver a aplicarlo en una nueva situación. (SEP, 2006, p.11; 2011, p. 20)

Así, para la resolución de una *situación* es necesario poner en acción, entre otros aspectos, conocimientos, habilidades, procedimientos y razonamientos. Los procedimientos de resolución tienen que ver con las estrategias que se siguen para obtener la solución de la situación, qué se hizo. Los razonamientos implican las relaciones que se establecen durante la resolución de la situación. Todo lo que conlleva a la obtención de una solución, desde la revisión y el análisis, la identificación de los datos, de la incógnita, el establecimiento de estrategias, los razonamiento y los procedimientos, forman parte del proceso de resolución de una situación.

En la investigación educativa se utilizaron 10 hojas de trabajo (véase el apéndice A) que contienen las situaciones de urna diseñadas.

Las situaciones planteadas en el modelo de urna, aunque pueden reducirse a comparaciones numéricas (cuantitativas), no es lo único que se considera para su resolución, pues también se establecen comparaciones cualitativas, como en la investigación de López (2003) que presenta el uso de este análisis en la resolución de problemas relacionados con proporcionalidad.

Para el diseño de las actividades, además de utilizar el modelo de urna, analizamos los tipos de problemas de razonamiento proporcional. Özgün-Koca (2009), con base en la descripción y ejemplificación de otros investigadores, los clasifica en:

Problemas de valor faltante. Se proporcionan tres datos numéricos y la tarea consiste en calcular el cuarto (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto y Miller, 1998). Por ejemplo, si para elaborar un collar se necesitan 20 cuentas, ¿cuántas cuentas se necesitarían para elaborar tres collares?

Problemas de comparación numérica. Se presentan dos datos completos donde una respuesta numérica no es necesaria, sin embargo, las tasas se comparan en estos problemas (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto y Miller, 1998). Por ejemplo, proporcionadas las distancias recorridas por dos móviles y los tiempos correspondientes transcurridos, comparar sus velocidades.

Problemas de predicción cualitativa y problemas de comparación. En los primeros las comparaciones no dependen de valores numéricos específicos (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto y Miller, 1998); Cramer y Post, 1993). Si Devan corrió menos vueltas en más tiempo de lo que hizo ayer, su velocidad de carrera ha sido, (Cramer, 1993). Y los segundos problemas no contienen valores numéricos pero requieren comparaciones cualitativas y la compensación de las variables en los espacios de medida (Cramer, 1993). María corrió más vueltas que Greg. María corrió menos tiempo que Greg, ¿cuál fue el corredor más rápido? (Cramer, 1993).

Por su semántica Lamon (1993) clasifica a los problemas de razonamiento proporcional en cuatro tipos:

Tipo 1: Well-Chunked Measures (Medidas bien fragmentadas). Implica la comparación de dos medidas amplias, dando lugar a una medida de intensidad (tasa), por ejemplo, la relación que se establece entre la distancia recorrida en un tiempo determinado corresponde a la velocidad. En una velocidad constante las distancias recorridas cambian en función del tiempo transcurrido.

Tipo 2: Part-Part-Whole (Parte-parte-todo). En un contexto parcial de Parte-todo, la medida amplia (cardinalidad) de un subconjunto único de un todo se da en términos de las cardinalidades de dos o más subconjuntos que la componen. Por ejemplo, un cono con huevos de color blanco y marrón.

Tipo 3: Associated Sets (Establecimiento de relaciones). Dos conjuntos pueden no tener conexión conocida o una conexión mal definida hasta que alguna declaración explícita indica qué tipo de parejas se deben formar, es decir, se define dentro de la situación cuál es la relación entre los dos conjuntos. Esto puede verse cuando se presentan dos dibujos, el primero con 7 niñas y 3 pizzas, y el segundo con 3 niños y una pizza.

Tipo 4: Stretchers and Shrinkers (ampliaciones y reducciones). Cuando un uno a uno, con relación continua de preservación, existe entre dos magnitudes de una característica específica de un elemento, a saber, una medida de distancia. O entre dos magnitudes de dos características tales de un elemento, como la longitud y la anchura. La situación implica ampliación o reducción, un caso específico es el de escala.

De la clasificación presentada por Özgün-Koca (2009), a nuestras situaciones las ubicamos en las de comparación numérica porque una vez determinado el número de casos favorables en relación con los casos posibles se deben comparar las probabilidades. En cuanto a la clasificación de Lamon (1993), nuestros problemas corresponden a los de Parte-parte-todo —que Özgün-Koca incluye en su estudio dentro de las de comparación numérica— porque la mayoría de los problemas que planteamos pueden asumirse como conjuntos discretos donde un todo corresponde a los casos posibles y los subconjuntos de ese todo a los casos favorables y desfavorables.

3.2.2.- Los elementos gráficos o numéricos, los propósitos particulares y la incertidumbre que implicó cada situación

Para el diseño de las situaciones se partió del supuesto de que la forma en cómo se plantean puede influir de manera considerable en las respuestas que los alumnos proporcionen con base en las relaciones que establezcan a partir de la información presentada.

Con la finalidad de obtener mayores evidencias que permitieran sustentar la pertinencia de desarrollar de manera simultánea el razonamiento proporcional y el probabilístico se incluyeron, por los elementos que las componen, tres tipos de situaciones.

1.- Las textuales numéricas: se presenta información numérica total o parcial en un enunciado,

2.- Las gráficas: se plantean con esquemas o dibujos y

3.- Las textuales numéricas-gráficas: se presenta información numérica total o parcial en el enunciado de la situación y se incluyen esquemas o dibujos referentes a esa información.

En el cuadro 3 se clasifican las situaciones con base en los elementos que las componen y la manera en que se presentan los datos.

Cuadro 3. Características de las situaciones

Clasificación. Con base en la manera en que se presentan y relacionan los datos		
Tipos de situaciones	Situación	Algunas Particularidades
Textuales numéricas	III	Palabra clave: “Por cada”
	V	
	VI	Palabras clave: “a” y “Por cada”
	VIII	Se emplea un “cociente”
	IX	
	X	Incluye “porcentajes”
Gráficas	I	Conjuntos discretos que presentan un “orden”.
	II	Un conjunto continuo y uno discreto.
	VII	Dos conjuntos discretos que no presentan algún “orden”
Textuales numéricas – gráficas	IV	Dos conjuntos discretos cuyo contenido se describe

En las situaciones III, V, VI, VIII, IX y X, que corresponden a las textuales numéricas, no se proporcionó alguna figura, con la finalidad de ver si los estudiantes dibujaban algún esquema o figura que les sirviera para modelar la situación y así obtener algún resultado. Pero además en las situaciones III y VI se incluyó la expresión “por cada”, retomada del trabajo de Block (2007), quien concluye que la razón antecede al concepto de fracción y que si la fracción vista como razón forma parte de una proporción cuando se da la igualdad entre razones, entonces es útil para favorecer el estudio de este tipo de relaciones. Además, la VI contiene “a”, que en el trabajo de Mochón (2012) se utiliza para establecer una razón. Para este trabajo sólo incluimos las palabras “por cada” y “a” para relacionar la información, sin embargo, podemos encontrar a otras palabras que podrían incluirse más adelante, por ejemplo: esto(s) “entre” esto(s), esto(s) “para” esto(s), esto(s) “es a” esto(s), esto(s) “en” esto(s) En la VIII se propusieron probabilidades para ver de qué manera se interpretan (fracción, razón, cociente,…). Y en la situación X se incluyeron porcentajes porque Elizarrarás, Vázquez y Ojeda (2007), en su trabajo, concuerdan con Gigerenzer y Hofftrage (1995), que cuando la presentación de los datos numéricos de una situación aleatoria es el de porcentajes, se favorece el razonamiento probabilístico. Elizarrarás, Vázquez y Ojeda (2007) también incluyen la frase “tantos de cada tantos”.

Las situaciones I, II y VII correspondieron a las gráficas, que mostraron figuras con información de lo que se les propuso a los estudiantes, a fin de que tuvieran un apoyo visual para identificar algunas relaciones existentes entre los casos favorables, desfavorables o posibles. Por ejemplo, en la situación I se encuentran dos conjuntos con el contenido visible y cuantificable de cada uno, como los planteados por Piaget e Inhelder (1951), pero en lugar de marcar algunos elementos con una cruz, como él lo hizo en uno de sus estudios, se etiquetaron con las palabras “pierde” o “gana” para identificarlos.

En la situación II se incluyó una ruleta y una urna; tanto en una como en la otra es posible cuantificar de manera visual los elementos que las conforman, es decir, los sectores y las bolas, bajo la consideración de que se pueden establecer relaciones entre una y otra sin importar que una represente a un conjunto continuo y la otra a uno discreto. En la situación VII se presentaron tragamonedas; las relacionamos directamente con el tipo de situaciones de comparación numérica que se tratan en proporcionalidad Parte-parte-todo (Özgün-Koca, 2009; y Lamon, 1993) y mezclas (Noelting, 1980a y 1980b). Cabe señalar que el contenido de cada conjunto (pelotitas blancas y negras) es visible, pero no se sabe cuál de ellas saldría, lo que implica la incertidumbre. Además, al ser una extracción sin reemplazo es posible analizar distintas situaciones de proporcionalidad y probabilidad en este mismo modelo.

La situación IV corresponde a las textuales numéricas-gráficas, que además de proporcionar las figuras que representan a cada conjunto, suministró información textual con más elementos para relacionar. Es conveniente señalar que aunque la cantidad de huevos de cada conjunto está a la vista, no se sabe cuál es su contenido, lo que implica al azar al igual que con las urnas pero sin movimiento, si bien para el análisis del contenido de las urnas es estático. Esta situación surgió de la revisión de situaciones que se tratan en proporcionalidad con huevos color blanco y marrón (véase Özgün-Koca, 2009) pero se le adecuó para que también se implicara a la probabilidad.

En el cuadro 4 se detalla cada situación tomando en cuenta los elementos gráficos o numéricos proporcionados. También contempla los propósitos particulares y se describe a detalle la incertidumbre que implicó cada situación.

Cuadro 4. Descripción de las situaciones con base en los elementos que las conformaron

Descripción de las situaciones
Situación I Tarjetas
Los elementos gráficos o numéricos. Se presentaron dos conjuntos discretos en orden uno y uno. La información debió obtenerse a partir de los elementos de cada uno de ellos que se etiquetaron con las palabras “pierde” y “gana”. *El propósito.* Mostrar dos conjuntos de la misma naturaleza para que a partir de la observación de cada uno de ellos se establecieran relaciones, según se considerara conveniente, entre las partes o el todo que los conforman, es decir, los casos favorables, desfavorables o posibles. *La incertidumbre.* Se pudo conocer el número de casos favorables, desfavorables y posibles a partir de los dos conjuntos presentados y, con base en las relaciones que se establecieran, se tenía que identificar en qué conjunto habría mayor probabilidad de que al elegir una tarjeta, esta tuviera la palabra “gana”, con la consideración de que antes de elegirla se tendrían que barajar para que al voltearlas y revolverlas no quedaran en la misma posición, sin embargo, el conjunto identificado con la mayor probabilidad no asegura que la tarjeta elegida sea un caso favorable.

[Continúa]

Cuadro 4. [Continuación]

Situación II Urna y Ruleta
Los elementos gráficos o numéricos. Se mostraron dos conjuntos: uno continuo (ruleta) y uno discreto (urna), y la información debió obtenerse a partir de éstos. *El propósito.* Mostrar dos conjuntos de distinta naturaleza para que con base en la observación de cada uno de estos se establecieran relaciones según se considerara conveniente entre las partes o el todo, es decir, casos favorables, desfavorables o posibles pero desde dos perspectivas diferentes: una con orden uno y uno, con un conjunto continuo, y otra en desorden con un conjunto discreto. *La incertidumbre.* Se pudo conocer el número de casos favorables, desfavorables y posibles a partir de los conjuntos presentados, y con base en las relaciones que se establecieran se tuvo que identificar en qué conjunto habría mayor probabilidad, es decir, si en la ruleta de obtener un sector blanco o en la urna de extraer una bola blanca. Sin embargo, si se eligió la ruleta, al girarla y detenerse, no se sabría qué sector quedaría señalado por la flecha; en tanto que si se eligió la urna, al no ver al momento de la extracción, no se conocería el color de la bola que se estaría asiendo. Por lo que haber identificado el conjunto con mayor probabilidad no asegura la obtención de un caso favorable.
III Lotería y Loto millonario
Los elementos gráficos o numéricos. Se presentó información numérica donde se recurrió a la palabra “por cada” asociada a una razón en cada conjunto. En esa razón se presentó la relación entre un todo y una de sus partes. No se especificó la cardinalidad de cada uno de los conjuntos y no es posible obtenerla a partir de la información proporcionada. *El propósito.* Establecer relaciones numéricas sin considerar la cardinalidad de los conjuntos, porque las razones proporcionadas los representan. Por lo tanto, se pudo operar con esas razones, según se considerara conveniente, y relacionar el todo de cada razón o comparar las partes, es decir, asociar al todo de la razón con los casos posibles, la parte de la razón con los casos favorables y los desfavorables obtenerlos a partir de la diferencia de esos. *La incertidumbre.* No se dio la cardinalidad de los conjuntos pero sí se proporcionó una razón que representó a cada uno ellos, con la finalidad de que se establecieran relaciones para que se identificara qué conjunto tenía mayor probabilidad. La razón del conjunto con mayor probabilidad no indicó, por ejemplo, que en el “loto millonario” al comprar 6 boletos, 2 de ellos tuvieran que ser ganadores, o que si al comprar 8, una tercera parte de estos tendría que ganar porque no tendría sentido hablar de fracciones de boletos ganadores. Lo que sí indicó la razón fue que al comprar 6 boletos pudo ganar uno, más de uno o ninguno porque cada boleto estaba en razón de un tercio de ser ganador. La razón 6:2 se estableció con base en determinados boletos emitidos, por ejemplo, de las 6 partes que los componen, 2 contienen premio, si se establece en el orden en que se presentó la razón. Lo que permite considerar a la razón como un subconjunto equiprobable donde de 6 boletos, 2 son ganadores. Si es así, es posible establecer relaciones como si se tratara del conjunto original.

[Continúa]

Cuadro 4. [Continuación]

IV Huevos sorpresa
Los elementos gráficos o numéricos. Se presentó información numérica que debió relacionarse con la información gráfica de dos conjuntos discretos. Cabe señalar que la información numérica proporcionada fue "parte-parte" y no se dio la cardinalidad de cada conjunto, pero se podría obtener de la representación numérica o gráfica. *El propósito.* Establecer relaciones numéricas —apoyadas o no en la información gráfica— según se creyera conveniente entre las partes o el todo de cada conjunto, es decir, los casos favorables, desfavorables o posibles. *La incertidumbre.* Se dio el número de casos favorables y desfavorables de cada conjunto para que a partir de ellos se establecieran relaciones y se identificara de cuál era mayor probabilidad de extraer un huevo con insecto. Sin embargo, el huevo elegido de ese conjunto no asegura que tenga un caso favorable y no se podría saber en el momento por su presentación opaca sino hasta abrirlo.
V Futbol y basquetbol
Los elementos gráficos o numéricos. Se proporcionó información numérica, se dio la cardinalidad de los conjuntos y cada una de sus partes. *El propósito.* Establecer relaciones numéricas según se creyera conveniente entre las partes o el todo de cada conjunto, es decir, los casos favorables, desfavorables o posibles. *La incertidumbre.* Se proporcionó el número de casos favorables, desfavorables y posibles de cada conjunto y se tuvo que identificar cuál de ellos presentaba mayor probabilidad de que se eligiera a un alumno que le gustara el futbol, sin embargo, la elección de un alumno de ese conjunto no garantizaría que le gustara el futbol y no se sabría sino hasta revisar su preferencia.
Situación VI Servicio militar
Los elementos gráficos o numéricos. Se presentó información numérica donde se recurrió a la palabra "por cada" que estableció una razón en cada conjunto. En esa razón se presentó la relación entre un todo y cada una de sus partes, a diferencia de la Situación III en donde en esa razón se presentó la relación entre un todo y una de sus partes. No se especificó la cardinalidad de cada uno de los conjuntos y no podría obtenerse a partir de la información proporcionada. *El propósito.* Establecer relaciones numéricas sin importar que no se especificara la cardinalidad de los conjuntos porque las razones proporcionadas los representan. Por lo tanto, pudo utilizar esas razones, según se creyera conveniente, y relacionar el todo de cada razón o comparar las partes, es decir, considerar al todo de la razón como el total de casos posibles y las partes de la razón como los números de casos favorables y de desfavorables. *La incertidumbre.* No se dio la cardinalidad de los conjuntos pero sí se proporcionó, al igual que en la situación III, una razón que representó a cada uno ellos con la finalidad de que se establecieran relaciones para que se identificara de qué conjunto se tenía mayor probabilidad. El conocimiento de una razón de cada conjunto no determinó que en cualquier población existieran tantos casos favorables y desfavorables como se comparó en la razón, esto sólo sería posible si se tomara un subconjunto equiprobable, como pudo haber sido el caso particular de la razón.

[Continúa]

Cuadro 4. [Continuación]

Situación VII Tragamonedas
Los elementos gráficos o numéricos. Se presentaron dos conjuntos discretos y la información debió obtenerse a partir de éstos. Las partes de los conjuntos fueron de dos colores, a diferencia de la situación I donde a éstas se les asignaron dos palabras. *El propósito.* Mostrar dos conjuntos de la misma naturaleza para que a partir de la observación de cada uno de ellos se establecieran relaciones según se considerara conveniente entre las partes o el todo que los conforman, es decir, los casos favorables, desfavorables o posibles. *La incertidumbre.* Se pudo conocer el número de casos favorables, desfavorables y posibles a partir de los dos conjuntos presentados. Del establecimiento de las relaciones entre elementos de los conjuntos se pudo identificar en cuál de ellos existe mayor probabilidad de obtener un caso favorable, pero esta identificación no garantizaría la obtención de este aún cuando se pudo observar el contenido del conjunto en todo momento, inclusive, como se comentó en esta situación, cuando se revolvían las pelotitas mecánicamente, es decir, no era posible conocer cuál de ellas saldría hasta que la máquina la arrojara.
Situación VIII Secundarias
*Los elementos gráficos o numéricos***.** Se proporcionó información numérica representada por cocientes que correspondieron a la probabilidad de cada conjunto; la cardinalidad de éstos no se dio y con la información proporcionada no se podría conocer. *El propósito.* Interpretar a los cocientes como se creyera conveniente, por ejemplo como razón o como fracción, y se establecieran relaciones entre los elementos que los componen y que corresponden a una parte con su todo, es decir, a los casos favorables y posibles. La otra parte del todo podría obtenerse a partir de una relación entre los elementos del cociente y correspondería a los casos desfavorables. *La incertidumbre.* No se proporcionó la cardinalidad de los conjuntos. Al igual que en las situaciones III y VI, el conocimiento de una razón-fracción de cada conjunto, que en este caso corresponde a cocientes que representan la probabilidad que se tiene en cada uno de ellos, no determinó que en cierta población existan tantos casos favorables y posibles como se compara en la probabilidad, esto sólo pasaría si se tomata un subconjunto equiprobable, como pudo ser el caso particular de la misma probabilidad; y por ello es posible establecer comparaciones con base en los cocientes que representan las probabilidades de los conjuntos y así determinar cuál es mayor.
Situación IX Canicas
Los elementos gráficos o numéricos. Se proporcionó información numérica que señala las partes de cada conjunto que corresponden a los casos favorables y desfavorables. Esta situación, a diferencia de la V, no presentó la cardinalidad de los conjuntos pero es posible determinarla con los casos favorables y desfavorables. *El propósito.* Establecer relaciones numéricas según se creyera conveniente entre las partes, ya determinadas, o el todo de cada conjunto, es decir, los casos favorables, desfavorables o posibles. *La incertidumbre.* Se indicó el número de casos favorables y desfavorables de cada conjunto y a partir de las relaciones que se establecieran entre ellos se debió identificar la mayor probabilidad de obtener un caso favorable. Sin embargo, esta identificación no garantizaría la obtención de dicho caso, esto sólo se sabría hasta la extracción.

[Continúa]

Cuadro 4. [Concluye]

Situación X Chocolates
Los elementos gráficos o numéricos. Se presentó información numérica que indicó la cardinalidad de los conjuntos y se indicó una parte de cada conjunto expresada en porcentaje, aunque la otra parte pudo obtenerse a partir de ésta.
El propósito. Advertir las cantidades relacionadas en los porcentajes proporcionados, relacionar con el todo o con las partes que representan de ese todo, es decir, con los casos favorables, desfavorables o posibles.
La incertidumbre. Se dio el número de casos favorables (en porcentaje) y posibles de cada conjunto y con esta información se debió identificar en cuál de ellos se tendría mayor probabilidad de extraer un caso favorable, sin embargo, con esta identificación no se aseguraría que el elemento extraído correspondiera a este caso y no se sabría hasta que se descubriera el relleno.

En las situaciones III, VI y VIII consideramos, además de lo descrito con antelación, el estudio de Mochón (2012), quien señala algunas consideraciones al tratar con razones. Este autor señala que la razón contiene la relación multiplicativa de los tamaños entre las dos cantidades, pero pierde la información sobre sus magnitudes originales. Por ejemplo, cuando en nuestra situación III decimos: por cada tres que participan, dos reciben un premio; o en la VI: Por cada 15 que se inscriben, a 8 les corresponde bola blanca y a 7 bola negra; o en la VIII: Hay $\frac{2}{3}$ de probabilidad de quedarse en la mañana. En la primera desconocemos el número de personas ganadoras y el total de personas que participan. Sin embargo, puesto que el número de boletos emitidos está determinado, parece conveniente realizar comparaciones a partir de las razones presentadas con el desconocimiento de alguna información.

En la situación VI desconocemos el total de personas que se inscriben en cada campamento y el total de personas que realizarán el servicio militar. Sin embargo, es posible hacer comparaciones a partir de estas razones teniendo en cuenta que del total (desconocido) de individuos inscritos está determinada la parte que deberá realizar el servicio militar.

En la situación VIII, si el cociente que representa la probabilidad se trata como razón, se desconoce de igual manera el total de la población, así también la cantidad de estudiantes que serán asignados al turno matutino. Sin embargo, del total (desconocido) de alumnos que aceptó cada escuela, a determinado número de esos alumnos les corresponderá asistir en el turno matutino.

Las tres situaciones, en tanto no se pida conocer la cantidad total de alumnos para el turno matutino o la cantidad total de personas que realizarán el servicio militar o el total de personas ganadoras del sorteo, se pueden tratar en función de las razones proporcionadas, ya que pregunta uno requiere considerar las cantidades en términos absolutos, lo que no se puede conocer con la información proporcionada. En consecuencia, estas tres situaciones que planteamos sólo pueden ser tratadas en términos relativos.

3.2.3.- Urnas y las variables proporcionadas

Además de las variables consideradas por Piaget (véase cuadro 1 del capítulo II) que corresponden a los casos favorables y posibles para establecer la probabilidad de un evento, en esta investigación incluimos además una tercera variable, los casos desfavorables. En cada situación se consideró proporcionar ninguna, una, dos o las tres variables, con la finalidad de que los estudiantes trataran con las dadas con base en la información numérica, textual o gráfica e interpretarán o derivarán las variables. En el cuadro 5 se muestran las proporcionadas en cada situación.

Cuadro 5. Variables proporcionadas en cada situación

Situación	Variable 1	Variable 2	Variable 3
	Casos favorables	Casos desfavorables	Casos posibles
I	Su interpretación a partir de la información gráfica		
II	Su interpretación a partir de la información gráfica		
III	✓	Se deriva de las dadas	✓
IV	✓	✓	Se deriva de las dadas
V	✓	✓	✓
VI	✓	✓	✓
VII	Su interpretación a partir de la información gráfica		
VIII	Su interpretación a partir de la información numérica		
IX	✓	Se deriva de las dadas	✓
X	Se derivan de la información numérica		✓

3.2.4.- Las situaciones de probabilidad con y sin proporcionalidad en un modelo de urna

De acuerdo con la clasificación de urnas descrita en el capítulo I (véase el cuadro 1), las situaciones diseñadas corresponden a las urnas que presentan dos variables, al establecer la comparación de probabilidades de cada situación, se tienen dos clasificaciones. En la primera se encuentran las situaciones II, IV, VI, VIII y X porque contienen desigualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles sin proporcionalidad, y en la segunda están la I, III, V, VII y IX, debido a que contienen desigualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles con proporcionalidad.

En el cuadro 6 se especifica lo que incluyó cada situación de acuerdo a las dos variables implicadas en la comparación de probabilidades con y sin proporcionalidad. También relacionamos otra variable que corresponde al número de casos desfavorables porque influyen para establecer relaciones y elegir.

Cuadro 6. Variables implicadas en la comparación de probabilidades con y sin proporcionalidad

Situación	Primer planteamiento				Segundo planteamiento				Descripción:
	Variables			Probabilidad	Variables			Probabilidad	Urnas con dos variables, desigualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles con y sin proporcionalidad.
	NCP	*NCF*	*NCD*	$\frac{NCF}{NCP}$	*NCP*	*NCF*	*NCD*	$\frac{NCF}{NCP}$	
I Tarjetas	10	5	5	$\frac{5}{10}$	14	7	7	$\frac{7}{14}$	Con proporcionalidad. En cada conjunto los casos favorables están en razón de $\frac{1}{2}$ respecto a los posibles. Hay igualdad entre el número de casos favorables y desfavorables en ambos conjuntos, pero desigualdad entre el número de casos posibles.
II Ruleta	14	7	7	$\frac{7}{14}$	9	5	4	$\frac{5}{9}$	Sin proporcionalidad. En un conjunto los casos favorables están en razón de $\frac{1}{2}$ respecto a los posibles y en el otro conjunto están en razón $\frac{5}{9}$. Hay igualdad entre el número de casos favorables y desfavorables en un conjunto.
III Sorteo	6	2	4	$\frac{2}{6}$	9	3	6	$\frac{3}{9}$	Con proporcionalidad. En cada conjunto los casos favorables están en razón de $\frac{1}{3}$ respecto a los posibles, y la relación entre los favorables y desfavorables es $\frac{1}{2}$.
IV Huevos	10	4	6	$\frac{4}{10}$	16	7	9	$\frac{7}{16}$	Sin proporcionalidad. En un conjunto los casos favorables están en razón de $\frac{2}{5}$ respecto a los posibles y en el otro conjunto están en razón $\frac{7}{16}$. La diferencia entre los casos favorables y los desfavorables es 2.

[Continúa]

Cuadro 6. [Continuación]

Situación	Primer planteamiento				Segundo planteamiento				Descripción:
	Variables			Probabilidad	Variables			Probabilidad	Urnas con dos variables, desigualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles con y sin proporcionalidad.
	NCP	*NCF*	*NCD*	$\frac{NCF}{NCP}$	*NCP*	*NCF*	*NCD*	$\frac{NCF}{NCP}$	
V Deportes	28	21	7	$\frac{21}{28}$	24	18	6	$\frac{18}{24}$	Con proporcionalidad. En cada conjunto los casos favorables están en razón de $\frac{3}{4}$ respecto a los posibles. Y la relación que presentan los favorables respecto a los desfavorables es el triple.
VI Servicio militar	15	7	8	$\frac{7}{15}$	12	5	7	$\frac{5}{12}$	Sin proporcionalidad. En un conjunto los casos favorables están en razón de $\frac{7}{15}$ respecto a los posibles y en el otro conjunto están en razón $\frac{5}{12}$. El número de casos favorables del primer conjunto es igual al número de casos desfavorables del otro conjunto.
VII Pelotas	21	6	15	$\frac{6}{21}$	14	4	10	$\frac{4}{14}$	Con proporcionalidad. En cada conjunto los casos favorables están en razón de $\frac{2}{7}$ respecto a los posibles. Y la relación de los casos favorables y desfavorables es $\frac{2}{5}$.
VIII Turnos	3	2	1	$\frac{2}{3}$	8	5	3	$\frac{5}{8}$	Sin proporcionalidad. En un conjunto los casos favorables están en razón de $\frac{2}{3}$ respecto a los posibles y en el otro conjunto están en razón $\frac{5}{8}$.

[Continúa]

Cuadro 6. [Concluye]

Situación	Primer planteamiento				Segundo planteamiento				Descripción:
	Variables			Probabilidad	Variables			Probabilidad	Urnas con dos variables, desigualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles con y sin proporcionalidad.
	NCP	NCF	NCD	$\frac{NCF}{NCP}$	NCP	NCF	NCD	$\frac{NCF}{NCP}$	
IX Canicas	15	9	6	$\frac{9}{15}$	25	15	10	$\frac{15}{25}$	Con proporcionalidad. En cada conjunto los casos favorables están en razón de $\frac{3}{5}$ respecto a los posibles. La relación de los favorables y los posibles es $\frac{3}{2}$.
X Chocolates	15	6	9	$\frac{6}{15}$	20	12	8	$\frac{12}{20}$	Sin proporcionalidad. En un conjunto los casos favorables están en razón de $\frac{2}{5}$ respecto a los posibles y en el otro conjunto están en razón $\frac{3}{5}$.

Las situaciones con proporcionalidad presentan distinto grado de dificultad con base en la razón que se establece entre el número de casos favorables y posibles, es decir, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ tienen menor grado de dificultad para ser identificadas que $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{5}$, y $\frac{3}{4}$ estaría en un grado de dificultad intermedio. Consideramos que entre más grande sea el denominador de la razón, más dificultades se presentarían para identificar algún múltiplo común de las probabilidades que se establecen.

Las diferencias entre las variables que intervienen en cada situación (número de casos favorables, desfavorables y posibles) pueden determinar la elección. Por ejemplo, si la diferencia entre los favorables y desfavorables en cada conjunto es la misma, puede llevar a concluir que presentan la misma probabilidad. Sin embargo, esto no siempre es así, ya que todo depende de la situación planteada.

Cada situación se planteó de manera distinta (textuales numéricas, gráficas, textuales numéricas-gráficas) con y sin proporcionalidad para analizar relaciones entre el razonamiento proporcional y el probabilístico. A pesar de las diferentes formas en que a los estudiantes se les presentó la información, se consideró que durante la resolución y el análisis de cada una de las situaciones encontrarían regularidades que les permitieran, en determinado momento, resolver situaciones similares.

3.2.5.- El tipo de preguntas incluidas en las situaciones

Cuestiones como: ¿Cuál?, ¿Cómo?, ¿Por qué? y ¿De qué manera? Acompañaron a nuestras situaciones. Todas las preguntas estuvieron encaminadas a encontrar la probabilidad de los casos favorables en relación con los posibles de cada conjunto, sin embargo, se previó que las preguntas también llevarían a que se involucraran a los casos desfavorables, y a uno o a los dos anteriores para determinar la mayor probabilidad. Además, en las situaciones II, IV, VI y X se planteó modificar la información proporcionada (casos favorables, desfavorables o posibles) para que los conjuntos, que no presentaron la misma probabilidad, la tuvieran.

Las preguntas planteadas en las hojas de trabajo fueron abiertas para que los alumnos mostraran y argumentaran sus procedimientos y resultados, y así analizáramos, además del tipo de estrategias que utilizaron, de qué manera convergía el razonamiento proporcional y el probabilístico, y cómo influyó la forma en que se plantearon las situaciones y para favorecer estos razonamientos.

3.3.- La implementación de las situaciones diseñadas

3.3.1.- Actores

Participó un grupo de 35 alumnos que cursaba el tercer grado de educación secundaria en el Distrito Federal —aunque las situaciones por su diseño se podían implementar en cualquiera de los tres grados —. Es importante señalar que se consideró al tercer grado porque, con base en el análisis que se presenta en el Capítulo I, en primero y segundo grados es donde se concentra el mayor número de temas de probabilidad y de proporcionalidad, y es en tercero cuando se trabaja el tema de comparación de probabilidades. Por lo tanto, los alumnos de este último grado ya tendrían antecedentes de los contenidos que interesó analizar de acuerdo con los *Programas de estudio 2006,* lo que ayudaría a obtener una mayor variedad de estrategias de solución para analizar.

3.3.2.- Etapas de implementación

Primera etapa: Implementación de las situaciones

Esta primera etapa constó de dos momentos, en el primero, se implementó las diez situaciones en un grupo de tercer grado de educación secundaria con la finalidad de probar su viabilidad. Para la aplicación de las actividades se necesitaron tres sesiones de cincuenta minutos cada una. En cada sesión los alumnos resolvieron individualmente de tres a cuatro situaciones.

Durante la implementación se les dijo a los alumnos que en caso de tener dudas o dificultades para comprender las indicaciones de las situaciones, las expusieran. Lo anterior para recuperar los comentarios de los alumnos y hacer las modificaciones correspondientes para que los alumnos a los que se les aplicaran las situaciones con las modificaciones correspondientes comprendieran las indicaciones.

En un segundo momento, se implementaron las diez situaciones, ya con sus correspondientes modificaciones, a otro grupo de tercer grado de la misma escuela secundaria. Este grupo cursaba el último bimestre y lo conformaba 35 alumnos. Para la aplicación de las situaciones también se necesitaron tres sesiones de cincuenta minutos cada una. En cada sesión los alumnos resolvieron individualmente de tres a cuatro situaciones, sin instrucción previa o durante la implementación.

Es importante mencionar que solicitamos la autorización del docente titular para la primera y segunda implementación de las situaciones, el cual nos informó que los grupos no habían tratado el contenido de Comparación de probabilidades. Consideramos que esto favorecería la variedad de estrategias que resultarían pues si los alumnos hubieran tenido precedentes recientes de cómo establecer la probabilidad de un evento (por ejemplo, que la probabilidad de un evento se obtiene del cociente de comparar los casos favorables entre los casos posibles), o si se les hubiera instruido sobre cómo tratar la comparación de probabilidades, sería posible que las resoluciones de las situaciones se hubieran basado en estos esquemas, lo que les llevaría a no lograr un pensamiento independiente (al completamente escolar) para relacionar los casos favorables, desfavorables o posibles.

Segunda etapa: Entrevista

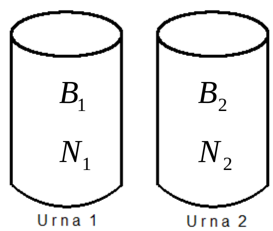
Se entrevistó a un estudiante (A17) con la finalidad de profundizar en las estrategias mostradas en sus hojas de trabajo. Cabe señalar que la elección de A17 se llevó a cabo con base en la diversidad de estrategias presentadas.

3.4.- Consideraciones para el análisis de los resultados

3.4.1.- Expresiones y estrategias previstas para comparar los elementos de dos urnas

Para el análisis de los resultados estudiamos y establecimos previamente las posibles relaciones que podrían surgir a partir de los elementos proporcionados en las hojas de trabajo. Como resultado de ese estudio identificamos dos tipos de comparaciones cuando se relacionan los elementos contenidos en dos urnas. Una comparación fue multiplicativa —por medio de un cociente—, considerado como razón o fracción y representado por dieciséis expresiones (véase el cuadro 7). Otra comparación fue aditiva —por medio de una diferencia— y representada por veinte expresiones (véase el cuadro 8).

Los cuadros 7 y 8 contienen las expresiones identificadas al comparar los elementos de dos urnas, donde B representa bolas Blancas y a su vez el número de casos favorables, N bolas Negras y también el número de casos desfavorables. $B+N$ corresponde al número de casos posibles.



Comparación por cociente

Cuadro 7. Expresiones que representan las relaciones que se pueden establecer cuando se compara por cociente

Punto de referencia B	**Punto de referencia N**	**Reciproco del punto de referencia B**	**Reciproco del punto de referencia N**
Expresión i	Expresión ii	Expresión iii	Expresión iv
$\frac{B_1}{B_2}$ con $\frac{N_1}{N_2}$	$\frac{N_1}{N_2}$ con $\frac{B_1}{B_2}$	$\frac{B_2}{B_1}$ con $\frac{N_2}{N_1}$	$\frac{N_2}{N_1}$ con $\frac{B_2}{B_1}$
Fracción: Parte – Parte		Fracción: Parte – Parte	
Razón: Cuando el antecedente es B y N y el consecuente es B y N.		Razón: Cuando el antecedente es B y N y el consecuente es B y N.	
Punto de referencia Urna 1	**Punto de referencia Urna 2**	**Reciproco del punto de referencia Urna 1**	**Reciproco del punto de referencia Urna 2**
Expresión v	Expresión vi	Expresión vii	Expresión viii
$\frac{B_1}{N_1}$ con $\frac{B_2}{N_2}$	$\frac{B_2}{N_2}$ con $\frac{B_1}{N_1}$	$\frac{N_1}{B_1}$ con $\frac{N_2}{B_2}$	$\frac{N_2}{B_2}$ con $\frac{N_1}{B_1}$
Fracción: Parte – Parte		Fracción: Parte – Parte	
Razón: Cuando el antecedente es B y el consecuente es N.		Razón: Cuando el antecedente es N y el consecuente es B.	
Expresión ix	Expresión x	Expresión xi	Expresión xii
$\frac{B_1}{B_1+N_1}$ con $\frac{B_2}{B_2+N_2}$	$\frac{B_2}{B_2+N_2}$ con $\frac{B_1}{B_1+N_1}$	$\frac{B_1+N_1}{B_1}$ con $\frac{B_2+N_2}{B_2}$	$\frac{B_2+N_2}{B_2}$ con $\frac{B_1+N_1}{B_1}$
Fracción: Parte-todo. Cuando la parte es B		Fracción: Todo-parte. Cuando la parte es B	
Razón: Cuando el antecedente es B y el consecuente es $B+N$.		Razón: Cuando el antecedente es $B+N$ y el consecuente es B.	
Expresión xiii	Expresión xiv	Expresión xv	Expresión xvi
$\frac{N_1}{B_1+N_1}$ con $\frac{N_2}{B_2+N_2}$	$\frac{N_2}{B_2+N_2}$ con $\frac{N_1}{B_1+N_1}$	$\frac{B_1+N_1}{N_1}$ con $\frac{B_2+N_2}{N_2}$	$\frac{B_2+N_2}{N_2}$ con $\frac{B_1+N_1}{N_1}$
Fracción: Parte-todo. Cuando la parte es N.		Fracción: Todo-parte. Cuando la parte es N.	
Razón: Cuando el antecedente es N y el consecuente es $B+N$.		Razón: Cuando el antecedente es $B+N$ y el consecuente es N.	

En la comparación por cociente (véase el cuadro 7), considerado como fracción o razón, se pueden presentar, durante las relaciones que se establecen con los elementos que las conforman (parte-parte, parte-todo, todo-parte y antecedente-consecuente), las siguientes estrategias para compararlas, donde en la relación parte-parte a, b, c y d son las partes; en la parte-todo a y c son las partes y b y d son los todos; en todo-parte a y c son los todos y b y d son las partes; y en la relación antecedente-consecuente a y c son los antecedentes y b y d son los consecuentes.

· 1ra Estrategia: Fracción-razón (parte-parte, parte-todo y todo-parte) con el uso de:

Múltiplos: Si se multiplica $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{c}$;y $\frac{c}{d}$ por $\frac{a}{a}$ se obtienen las expresiones $\frac{ac}{bc}$ y $\frac{ac}{ad}$ y si $bc = ad$ entonces se puede establecer la proporción $\frac{ac}{bc} = \frac{ac}{ad}$ que sería equivalente a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significa que los conjuntos representados por a y b y c y d son equiprobables.

Productos cruzados: Dados los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si al efectuar los productos ad y bc se obtiene la igualdad $ac = bd$, entonces se establece la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significa que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables. Los productos cruzados son un caso particular del uso de múltiplos para comparar razones o fracciones.

Submúltiplos: Si al simplificar $\frac{a}{b}$ se obtiene $\frac{m}{n}$, y al simplificar $\frac{c}{d}$ también se obtiene $\frac{m}{n}$, entonces se establece la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lo que significa que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

Suma y resta de fracciones o razones: Dados los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si al hacer la sustracción $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ se obtiene la diferencia $\frac{0}{bd} = 0$, entonces se establece la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significa que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

Suma y resta de fracciones o razones en su representación decimal: Parte de la relación fracción-razón, y se llega a su representación en forma decimal para comparar y hacer la elección. Si al simplificar $\frac{a}{b}$ se obtiene m, y al simplificar $\frac{c}{d}$ también se obtiene m, donde m es un número decimal, entonces se establece la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significa que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

· 2da.- Estrategia: Relación dentro. Se presenta de forma aditiva o multiplicativa.

Forma aditiva: Dados los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si $a \pm (a)\left(\frac{m}{n}\right) = b$, y $c \pm (c)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, o si $b \pm (b)\left(\frac{m}{n}\right) = a$ y $d \pm (d)\left(\frac{m}{n}\right) = c$, entonces se puede establecer la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

Forma multiplicativa: Dados los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ si $(a)\left(\frac{m}{n}\right) = b$ y $(c)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, o si $(b)\left(\frac{n}{m}\right) = a$ y $(d)\left(\frac{n}{m}\right) = c$, entonces se puede establecer la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

· 3ra.- Estrategia: Relación entre. Se presenta de forma aditiva o multiplicativa.

Forma aditiva: Dados los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si $a \pm (a)\left(\frac{m}{n}\right) = c$, y $b \pm (b)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, o si $c \pm (c)\left(\frac{m}{n}\right) = a$, y $d \pm (d)\left(\frac{m}{n}\right) = b$ entonces se puede establecer la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

Forma multiplicativa: Dados los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si $(a)\left(\frac{m}{n}\right) = c$ y $(b)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, o si $(c)\left(\frac{n}{m}\right) = a$ y $(d)\left(\frac{n}{m}\right) = b$, entonces se puede establecer la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significar ía que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

· 4ta.- Estrategia: Regla de tres. Se establece una relación cuaternaria donde uno de los cuatro elementos es desconocido y los otros tres deben ser relacionados para encontrar su valor. Este valor es comparado con el obtenido en otra relación cuaternaria similar.

*Para la obtención de porcentajes: D*ados los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si se multiplica a $\frac{a}{b}$ por 100 para obtener el porcentaje de a respecto al porcentaje de b, considerado como el 100%. Y $\frac{c}{d}$ también se multiplica por 100 para obtener el porcentaje de c respecto al porcentaje de d, considerado como el 100%, si $\frac{(a)(100)}{b} = \frac{(c)(100)}{d}$, entonces se podría establecer la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lo que significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

Para la obtención de a, b, c, *o* d*:* Dados los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si $\frac{(cb)}{a} = d$ y $\frac{(ad)}{c} = b$, y d resulta ser múltiplo o submúltiplo de b, entonces se puede establecer la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

Si en las relaciones anteriores no se puede establecer una proporción, entonces los conjuntos representados por a y b, y c y d no serían equiprobables, por lo que habría que identificar cuál de los dos conjuntos tiene mayor probabilidad con base en los casos (favorables, desfavorables o posibles) que se consideraron y las relaciones que se establecieron para hacer las comparaciones. En el capítulo IV se profundizará en el tipo de elecciones con base en las relaciones que los alumnos establecieron.

En las estrategias descritas anteriormente se encuentran las relaciones *dentro* y *entre* consideradas por Noelting (1980) al trabajar situaciones de mezclas, y aunque este investigador sólo considera las relaciones *dentro* y *entre* de carácter multiplicativo, Alatorre (1994) las amplía a relaciones de orden y de carácter aditivo o sustractivo, pero no las considera como nosotros en la comparación por cociente, pues ella señala las diferencias sin considerar la cantidad basal y desde nuestra perspectiva la *Forma aditiva* sí incluye esta cantidad basal al considerar cuántas de cuántas. Las incorporadas por Alatorre las incluimos, al igual que ella, en las comparaciones por diferencia, al no tomar en cuenta dicha cantidad basal.

La comparación por cociente está estrechamente relacionada con el pensamiento relativo. Lamon (1999) distingue a este tipo de pensamiento como aquel en el que se involucran estructuras multiplicativas y lo diferencia del pensamiento absoluto, que establece relaciones de tipo aditivo. Hart (1984) ha profundizado en el tipo de errores que estudiantes que los estudiantes cometen cuando resuelven situaciones de proporcionalidad y utilizan relaciones de tipo aditivo como estrategia de solución. A continuación mostramos las comparaciones por sustracción que contemplamos y que se relacionan con el pensamiento absoluto.

Comparación por diferencia

En este tipo de comparaciones se consideran una o dos variables, pero no de forma multiplicativa sino aditiva (véase el cuadro 8).

Cuadro 8. Expresiones que se pueden establecer cuando se compara por sustracción

Punto de referencia B	**Punto de referencia N**	**Punto de referencia B**	**Punto de referencia N**
Expresión i	Expresión ii	Expresión iii	Expresión iv
B_1 con B_2	N_1 con N_2	B_2 con B_1	N_2 con N_1
Minuendo B_1 Sustraendo B_2	Minuendo N_1 Sustraendo N_2	Minuendo B_2 Sustraendo B_1	Minuendo N_2 Sustraendo N_1
Parte con parte			
Punto de referencia urna 1	**Punto de referencia Urna 2**	**Punto de referencia urna 1**	**Punto de referencia Urna 2**
Expresión v	Expresión vi	Expresión vii	Expresión viii
$B_1 + N_1$ con $B_2 + N_2$	$B_2 + N_2$ con $B_1 + N_1$	$N_1 + B_1$ con $N_2 + B_2$	$N_2 + B_2$ con $N_1 + B_1$
Minuendo $B_1 + N_1$ Sustraendo $B_2 + N_2$	Minuendo $B_2 + N_2$ Sustraendo $B_1 + N_1$	Minuendo $N_1 + B_1$ Sustraendo $N_2 + B_2$	Minuendo $N_2 + B_2$ Sustraendo $N_1 + B_1$
Todo con todo			
Expresión ix	Expresión x	Expresión xi	Expresión xii
B_1 y N_1 con B_2 y N_2	B_2 y N_2 con B_1 y N_1	N_1 y B_1 con N_2 y B_2	N_2 y B_2 con N_1 y B_1
Minuendos B_1 y B_2 Sustraendos N_1 y N_2	Minuendos B_2 y B_1 Sustraendos N_2 y N_1	Minuendos N_1 y N_2 Sustraendos B_1 y B_2	Minuendos N_2 y N_1 Sustraendos B_2 y B_1
Parte y parte con parte y parte			
Expresión xiii	Expresión xiv	Expresión xv	Expresión xvi
B_1 y $B_1 + N_1$ con B_2 y $B_2 + N_2$	B_2 y $B_2 + N_2$ con B_1 y $B_1 + N_1$	$B_1 + N_1$ y B_1 con $B_2 + N_2$ y B_2	$B_2 + N_2$ y B_2 con $B_1 + N_1$ y B_1
Minuendos B_1 y B_2 Sustraendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$	Minuendos B_2 y B_1 Sustraendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$	Minuendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$ Sustraendos B_1 y B_2	Minuendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$ Sustraendos B_2 y B_1
Parte y todo con parte y todo		Todo y parte con todo y parte	
Expresión xvii	Expresión xviii	Expresión xix	Expresión xx
N_1 y $B_1 + N_1$ con N_2 y $B_2 + N_2$	N_2 y $B_2 + N_2$ con N_1 y $B_1 + N_1$	$B_1 + N_1$ y N_1 con $B_2 + N_2$ y N_2	$B_2 + N_2$ y N_2 con $B_1 + N_1$ y N_1
Minuendos N_1 y N_2 Sustraendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$	Minuendos N_2 y N_1 Sustraendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$	Minuendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$ Sustraendos N_1 y N_2	Minuendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$ Sustraendos N_2 y N_1
Parte y todo con parte y todo		Todo y parte con todo y parte	

En la comparación por diferencia (véase el cuadro 8), se pueden presentar, durante las relaciones que se establecen con los elementos que las conforman (Parte con parte, Todo con todo, Parte y parte con parte y parte, Parte y todo con parte y todo, Todo y parte con todo y parte), las siguientes estrategias para compararlas, donde en la relación parte-parte a y c son las partes favorables, y b, y d son las pates desfavorables; en todo-todo $a+b$ y $c+d$ son los todos. Y las demás relaciones se derivan de éstas.

· 1ra.- Estrategia: Relación entre (parte con parte o todo con todo).

Se presenta de forma aditiva entre los elementos de una misma clase o entre los elementos totales de dos conjuntos.

Diferencia de casos favorables: Cuando se tiene $a-c$ o $c-a$, donde $a \geq c$ o $a \leq c$.

Diferencia de casos desfavorables: Cuando se tiene $b-d$ o $d-b$, donde $b \geq d$ o $b \leq d$.

Diferencia de casos posibles: Cuando se tiene $(a+b)-(c+d)$ o $(c+d)-(a+b)$, donde $a+b \geq c+d$ o $a+b \leq c+d$.

· 2da.- Estrategia: Relación dentro (Parte y parte con parte y parte; Parte y todo con parte y todo; o Todo y parte con todo y parte).

Se presenta de forma aditiva entre los elementos de diferente clase o entre los elementos de una misma clase con los elementos totales de dos conjuntos.

Diferencia de casos favorables y desfavorables: Cuando se tiene $(a-b)-(c-d)$ o $(c-d)-(a-b)$, donde $a-b \geq c-d$ o $a-b \leq c-d$ o $c-d \geq a-b$ o $c-d \leq a-b$.

Diferencia de casos desfavorables y favorables: Cuando se tiene $(b-a)-(d-c)$ o $(d-c)-(b-a)$, donde $b-a \geq d-c$ o $b-a \leq d-c$ o $d-c \geq b-a$ o $d-c \leq b-a$.

Diferencia de casos favorables y posibles: Cuando se tiene $[a-(a+b)]-[c-(c+d)]$ o $[c-(c+d)]-[a-(a+b)]$, donde $a-(a+b) \geq c-(c+d)$ o $a-(a+b) \leq c-(c+d)$ o $c-(c+d) \geq a-(a+b)$ o $c-(c+d) \leq a-(a+b)$.

Diferencia de casos posibles y favorables: Cuando se tiene $[(a+b)-a)]-[(c+d)-c)]$ o $[(c+d)-c)]-[(a+b)-a)]$, donde $(a+b)-a \geq (c+d)-c$ o $(a+b)-a \leq (c+d)-c$ o $(c+d)-c \geq (a+b)-a$ o $(c+d)-c \leq (a+b)-a$.

Diferencia de casos desfavorables y posibles: Cuando se tiene $[b-(a+b)]-[d-(c+d)]$ o $[d-(c+d)]-[b-(a+b)]$, donde $b-(a+b) \geq d-(c+d)$ o $b-(a+b) \leq d-(c+d)$ o $d-(c+d) \geq b-(a+b)$ o $d-(c+d) \leq b-(a+b)$.

Diferencia de casos posibles y desfavorables: Cuando se tiene $[(a+b)-b]-[(c+d)-d]$ o $[(c+d)-d]-[(a+b)-b]$, donde $(a+b)-b \geq (c+d)-d$ o $(a+b)-b \leq (c+d)-d$ o $(c+d)-d \geq (a+b)-b$ o $(c+d)-d \leq (a+b)-b$.

Aunque en las expresiones anteriores se utilizó el signo menos (-) para representar las estrategias que se emplean cuando se compara por diferencia, las diferencias también pueden establecerse utilizando el signo más (+), por ejemplo, $a-b=z$, donde la diferencia entre a y b es z, o bien $a+z=b$, donde la diferencia entre b y a es z. De aquí que cuando se habla de problemas aditivos, están implicadas sumas y restas.

Las relaciones que se realicen a partir de este tipo de comparaciones pueden ser correctas o no dependiendo de las variables que se consideren, las urnas que se comparen y los elementos que las componen. Por lo tanto, si se utiliza este tipo de expresiones para comparar por sustracción se debe tener en cuenta que éste no se puede generalizar para los contenidos de las demás urnas porque puede servir sólo en casos similares. Y al igual que en la comparación por cociente, en el capítulo IV se profundizará en el tipo de elecciones con base en las relaciones que los alumnos establecieron.

Cabe señalar que las expresiones de los cuadros 7 y 8 pueden presentarse, total o parcial, en forma de enunciado y no necesariamente con la notación ahí empleada.

Cuando analizamos situaciones binarias identificamos dos tipos de comparaciones.

- Comparación por diferencias de cocientes, donde se utilizan estructuras multiplicativas.
- Comparación por diferencia de enteros, donde se emplean estructuras aditivas

Aunque en ambas comparaciones se utiliza la diferencia, en cada una de ellas están involucradas distinto tipo de pensamiento, en la primera se presenta el relativo, y en la segunda el absoluto, descritos por Lamon (1999). Así, para referirnos a las primeras comparaciones, desde un inicio las hemos nombrado comparación por cociente y a las segundas comparación por diferencia.

Elecciones realizadas con base en el tipo de comparaciones establecidas

Como las preguntas planteadas fueron abiertas, para el análisis de las respuestas obtenidas se hicieron clasificaciones con base en los argumentos que corresponden a una misma jerarquía a partir de tres fases: *1)* los elementos que se tomaron en cuenta (casos favorables, desfavorables o posibles); *2)* el tipo de comparaciones que hicieron y las relaciones que establecieron entre los elementos (casos favorables, desfavorables o posibles); y *3)* la elección que se realizó con base en estas relaciones. Para posteriormente identificar aquellos factores que contribuyen u obstaculizan el desarrollo paralelo de los razonamientos proporcional y probabilístico.

Sobre lo que se espera

Un obstáculo que podría presentarse es la forma en cómo los alumnos visualizan las urnas pues pueden trasladar lo que ya han resuelto en otro contexto a uno nuevo que si bien puede ser correcto no es funcional y en este caso puede presentarse por los distintos usos de la fracción.

Otro obstáculo que contemplamos es que las elecciones que se realicen pueden no estar relacionadas con cuestiones matemáticas, sino por los gustos, preferencias, creencias, experiencias y percepciones, así como lo que observan en cada situación los estudiantes.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

En tercer grado de educación secundaria, es posible encontrarnos con estudiantes que no poseen un razonamiento proporcional y aún así deben resolver situaciones de comparación de probabilidades. Si consideramos que el razonamiento proporcional es prerrequisito para abordar estas situaciones, estaríamos diciendo que estos estudiantes no pueden resolverlas y por lo tanto, no se les deben plantear. Sin embargo, en esta investigación la implementación de situaciones de comparación de probabilidades en un contexto de urna y los resultados obtenidos nos dan evidencias de que este tipo de situaciones se pueden abordar de manera exitosa en la educación secundaria como medio para relacionar y favorecer el desarrollo simultáneo de los razonamientos proporcional y probabilístico.

Como resultado de la investigación, en lo que sigue presentamos las conclusiones.

La relación de los temas en matemáticas debe promoverse como forma de abordar y avanzar en los contenidos que se enseñan en la educación secundaria

Entre algunos contenidos de probabilidad y proporcionalidad, contemplados en los *Programas de estudio 2006* para educación secundaria, se presentan relaciones, algunas de ellas explícitas y otras implícitas, como la comparación de probabilidades, en las que se tratan de manera simultánea ambos contenidos. Separar la probabilidad y la proporcionalidad cuando se trata la comparación de probabilidades es difícil, por lo que es más conveniente favorecer la relación entre estos contenidos.

Es importante considerar que un estudiante puede resolver problemas de proporciones y no así tener un razonamiento probabilístico o viceversa. En este sentido, las situaciones de urna pueden ser un medio eficaz para relacionar ambos razonamientos y a su vez distinguirlos, sin omitir sus diferencias específicas. De esta manera, podemos analizar cómo se transita de un razonamiento a otro.

El modelo de urna y la probabilidad clásica son un medio de exploración de situaciones estocásticas en la que se relacionan los razonamientos proporcional y probabilístico, pero conviene enriquecerlo con otros medios

Para este estudio se consideraron la probabilidad clásica y el modelo de urna; se les eligió porque permitieron que confluyeran dos tipos de razonamiento: el proporcional y el probabilístico. Sin embargo, es importante comentar que explorar otros medios con los estudiantes les proporcionaría un panorama amplio para decidir qué modelo o concepción de la probabilidad sería más conveniente utilizar para representar alguna situación y así establecer relaciones o la solución correspondiente. De lo contario, si el alumno no explorara otros medios, se vería limitado a uno solo. Además de que conocer y tratar con otros modelos y otros enfoques de probabilidad contribuiría a, por una parte, acercarse de una manera intuitiva a utilizar o comprender conceptos de probabilidad y, por otra, para adquirir conocimientos posteriores.

Para los fines de esta investigación educativa se consideró la probabilidad clásica, sin embargo, sería interesante, para investigaciones posteriores, analizar de qué forma se podrían vincular la probabilidad clásica, la frecuencial y la subjetiva al considerar diversas situaciones y, si no es así, incorporar la que mejor convenga o se adapte a lo que se desee investigar.

La información de las situaciones presentada de manera diferente ocasiona que los alumnos establezcan distintas relaciones para determinar un resultado. Esto contribuye a que se favorezca el desarrollo de un razonamiento proporcional y de uno probabilístico

Durante el diseño y análisis de las situaciones, se llegó a la conclusión de que se pueden plantear de distinta manera para que los estudiantes establezcan relaciones. Sin embargo, éstas demandan al estudiante conocimientos y el establecimiento de relaciones entre los datos proporcionados, por lo que se sugiere que se implementen de acuerdo al grado de dificultad que se desee implementar en la investigación.

Los conocimientos previos que los estudiantes tienen al abordar situaciones de urna influyen y en ocasiones son determinantes en las relaciones y en las soluciones que ellos presentan

Las intuiciones que los estudiantes activan al resolver problemas de comparaciones de probabilidades pueden llevarlos a resolver problemas con estrategias adecuadas o no, sin embargo, durante estas resoluciones se pueden promover las intuiciones correctas y confrontarlas con las que no lo son, con ejemplos o contraejemplos que contradigan a las incorrectas.

Sólo un tipo de comparación por cociente representa la probabilidad de un evento, pero las relaciones que los estudiantes establecen para determinar esta probabilidad son diversas

Las comparaciones cuantitativa, cualitativa o extra-matemática se presentan cuando se abordan situaciones de comparación de probabilidades en un modelo de urna. Estas comparaciones nos muestran la variedad de relaciones y los elementos que los alumnos consideran para establecer probabilidades y determinar cuál es mayor. Si sólo se considerara la comparación que se señala en los *Programas de estudio,* donde se apunta que para determinar la probabilidad de un evento favorable se debe calcular el cociente del número de casos favorables y el número total de posibles, se limitaría a los estudiantes a no encontrar otras relaciones que de igual manera los podrían llevar a realizar una elección correcta, además de a no explorar o descubrir otras relaciones que les ayudarían a favorecer tanto su razonamiento proporcional como el probabilístico.

Las comparaciones cualitativas, cuantitativas por diferencia y extra-matemáticas ocasionalmente pueden llevarnos a elecciones correctas, no obstante, es más conveniente comparar por medio de un cociente.

La comparación por sustracción tiene sentido cuando se trata de dos cantidades que no son afectadas por otras. Sin embargo, cuando intervienen más de dos cantidades la comparación por sustracción ya no es funcional, porque puede llevar a realizar elecciones incorrectas a reserva de la situación resuelta. Cuando se comparan más de dos cantidades las comparaciones en términos absolutos se pueden realizar sin perder de vista que en este tipo de situaciones lo más conveniente es considerar una comparación en términos relativos. No obstante, todas las relaciones cualitativas, cuantitativas y extra-matemáticas se presentan en la toma de decisiones.

La información que reciben las personas, así como la forma en que se les presenta, influyen en la manera en cómo esta información es interpretada. Por ejemplo, al escuchar que los índices de deserción en la educación básica aumentó en los últimos años, y si sólo se presenta el número de alumnos que desertó cada año, es posible creerlo si consideramos la información que se da y que se presenta comparando por sustracción. Por otra parte, si se presenta una razón que denote el número de alumnos que desertaron por cada determinado número de alumnos no tendría sentido si no se señala la población total de la cual se está hablando en cada año. Sin embargo, pocas veces nos ponemos a pensar en la población a la que se refieren y que determina el aumento o decremento de deserción de un año respecto a otro. La razón proporcionada por sí sola no es suficiente para determinar que hubo más, menos o igual deserción en un año o en otro, porque esto depende de la población de la cuál se esté hablando. Decidir comparar por cociente cobra sentido cuando comparamos el todo o las partes que componen a este todo en sus diferentes representaciones. Además de que comparar por medio de un cociente sólo nos sirve cuando hablamos de comparar ese cociente teniendo como punto de referencia a otro, que puede deducirse del mismo cociente o de uno ajeno.

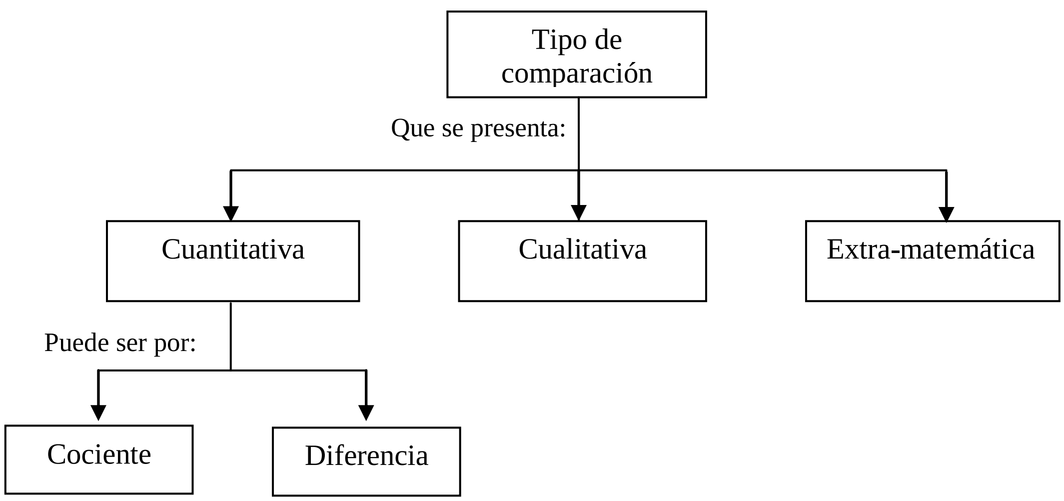
CAPÍTULO IV

COMPARACIONES, CONSIDERACIONES, ESTRATEGIAS Y RELACIONES DE ORDEN IDENTIFICADAS EN LA COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

En el capítulo II presentamos algunos estudios que han dado cuenta sobre el tipo de elecciones que se realizan cuando se tienen dos urnas con extracción simple. Sin embargo, para el análisis de los resultados de esta investigación, cuando se abordan situaciones de probabilidad en un contexto de urna, y por la finalidad que esta investigación persigue al proponerse identificar relaciones que se pueden presentar para favorecer el desarrollo simultáneo de los razonamientos proporcional y probabilístico, creímos conveniente no sólo mencionar el tipo de elecciones, sino también identificar las comparaciones que se establecen, las estrategias que se siguen y el sentido de las relaciones que se dan entre los casos que se consideran (favorables, desfavorables o posibles) para determinar la elección como las comentadas en el capítulo III.

Cuando hablamos del tipo de comparaciones, nos referimos a que pueden ser cuantitativas, cualitativas o argumentos extra-matemáticos (véase el diagrama 5). En las estrategias nos basamos en qué es lo que el estudiante realiza en cada comparación, por ejemplo, en la comparación por cociente las estrategias que se pueden presentar son: la regla de tres, porcentajes, productos cruzados, múltiplos, submúltiplos y otras descritas en el capítulo III. Las relaciones en la comparación cuantitativa (por cociente y diferencia) señalan los casos que el estudiante considera con el orden en que los relaciona, ya sea favorables-desfavorables, favorables-posibles, desfavorables posibles o viceversa. Estas mismas relaciones son características de la comparación cualitativa, pero la diferencia radica en que en esta última no se define la cantidad. En el caso de la comparación con argumentos extra-matemáticos, las estrategias y relaciones se basan en aspectos como gustos, preferencias, creencias, experiencias y percepciones de los estudiantes.

Diagrama 5. Tipo de comparaciones



Para fines de análisis de los resultados nombraremos conjunto uno y conjunto dos, respectivamente a los datos de cada situación, en el orden en que aparecen, como se muestra en el siguiente cuadro.

Cuadro 9. Nombre de los conjuntos en cada situación

Situación	Conjunto 1	Conjunto 2	Situación	Conjunto 1	Conjunto 2
I	Conjunto 1	Conjunto 2	VI	Campamento A	Campamento B
II	Ruleta	Urna	VII	Máquina A	Máquina B
III	Loto millonario	Lotería	VIII	Diurna	Técnica
IV	Caja chica	Caja grande	IX	Primera bolsa	Segunda bolsa
V	Grupo A	Grupo B	X	Bolsa chica	Bolsa grande

Para mostrar las resoluciones de los estudiantes utilizamos las siguientes notaciones.

Las situaciones se identificaron con los números romanos: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX y X. Los números 1 y 2 corresponden al número de pregunta, cuando la situación presenta dos preguntas (si la situación contiene sólo una, esta numeración se omite). Y al final se muestra el número de alumno que dio la respuesta como A1, A2,…A34 o A35. A continuación mostramos lo comentado.

Situación con una pregunta

I - A1

Número de situación ← → Número de alumno

Situación con dos preguntas

Número de pregunta

↑

II - 1 - A1

Número de situación ← → Número de alumno

II - 2 - A1

↓

Número de pregunta

4.1.- Comparación cuantitativa

Comparación cuantitativa: Relaciones que se establecen con cantidades definidas que pueden estar representadas de forma numérica o textual.

4.1.1.- Comparación cuantitativa por cociente. Relaciones que se establecen con dos o más variables (véase el cuadro 7 del capítulo III). Se especifican numéricamente las comparaciones por cociente que se realizaron con las variables que se implicaron: casos favorables, casos desfavorables o casos posibles. Y una vez establecidas las relaciones se activa una estrategia para hacer la elección.

- Consideración de casos favorables y casos desfavorables. Se comparan por medio de cocientes los casos favorables y desfavorables de cada conjunto (véanse las expresiones i, ii, iii, iv, v, vi, vii y viii del cuadro 7) y se realiza la elección con base en el mayor, menor o igual cociente.

Elección con base en el cociente mayor

Estrategia: Fracción-razón parte-parte con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Favorables-Desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: II-1-A2, II-1-A17, IV-1-A17 y V-A2.

II-1-A17 Urna. Hay más probabilidad de ganar en la urna. Pues fui sacando la mediana [mitad] a los colores de cada juego. En la ruleta eran los mismos colores y en la urna había una bola blanca más que negra y vi que había mejor probabilidad de ganar.

$$\frac{7}{7}=\frac{3.5}{3.5}=1$$

$$\frac{5}{4}=\frac{2.5}{2}=1.25$$

1.25
20)2.5.
050
100
00

Figura 4.1. Respuesta de II-1-A17 que elige el cociente mayor. Compara por cociente (favorables-desfavorables) llegando a su representación decimal con el uso de submúltiplos

II-1-A2, II-1-A17, IV-1-A17 y V-A2 presentan la comparación de casos favorables y desfavorables, esto pudo deberse a que las situaciones II y IV proporcionan estos datos y son con los que utilizan, la situación V proporciona los casos favorables y posibles. Para simplificar la comparación de variables, utilizan submúltiplos y terminan con su representación decimal. Es de señalar que relacionan al conjunto uno y posteriormente al dos (véase la expresión v del cuadro 7).

Elección con base en el cociente menor

Estrategia: Fracción-razón parte-parte con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Desfavorables-Favorables.

Se presentó esta estrategia en: IV-1-A2.

IV-1-A2 Caja grande. Sacarle mitad a las cantidades y dividirlo entre lo que me salió.

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad \frac{9}{7} = \frac{4.5}{3.5} = 1.28$$

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ 2\overline{)3} \\ 10 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.2 \\ 3.5\overline{)45} \\ 100 \\ 0 \end{array}$$

Figura 4.2. Respuesta de IV-1-A2 que elige el cociente menor. Compara por cociente (desfavorables-favorables) llegando a su representación decimal con el uso de submúltiplos

IV-1-A2 presenta la relación de los casos desfavorables con los favorables en el conjunto uno y posteriormente en el conjunto dos (véase la expresión vii del cuadro 7). Para simplificar la comparación de variables utiliza submúltiplos y termina con su representación decimal.

Elección con base en el cociente igual

Estrategia: Fracción-razón parte-parte con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Favorables-Desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: IX-A2, IX-A17 y IX-A31.

IX-A2 Cualquiera. En cualquiera de las 2 porque en las 2 bolsas hay la misma probabilidad de que salga una negra.

Bolsa 1

9 negras
6 blancas

$$\frac{9}{6}=\frac{4.5}{3}=1.5 \qquad \begin{array}{r} 1.5 \\ 3\overline{)4.5} \\ 15 \end{array}$$

Bolsa 2

15 negras
10 blancas

$$\frac{15}{10}=\frac{7.5}{5}=1.5 \qquad \begin{array}{r} 1.5 \\ 5\overline{)7.5} \\ 25 \end{array}$$

Figura 4.3. Respuesta de IX-A2 que elige el cociente igual. Compara por cociente (favorables-desfavorables) llegando a su representación decimal con el uso de submúltiplos

IX-A2, IX-A17 y IX-A31 presentan la comparación de casos favorables con los desfavorables porque son los que proporciona la situación. Es de señalar que relacionan al conjunto uno y posteriormente al dos (véase la expresión v del cuadro 7). Para simplificar la comparación de variables utilizan submúltiplos y terminan con su representación decimal (igual 1.5), lo que les permite hacer una elección correcta. Aunque cabe señalar que IX-A31 no utiliza la fracción ni hace uso de submúltiplos, sino que se observa el símbolo de la operación de división y la galera para realizar la operación y obtener el resultado al igual que IX-A2 y IX-A17.

Estrategia: Fracción-razón parte-parte con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Desfavorables-Favorables.

Se presentó esta estrategia en: VII-A2 y VII-A17.

VII-A17 Ambas. En cualquiera de las 2 tiene la misma probabilidad de sacar la pelota blanca. Pues sacando su fracción en la máquina A y la máquina B sale igual.

$$\frac{15}{6}=\frac{7.5}{3}=2.5 \qquad \begin{array}{r} 2.5 \\ 3\overline{)7.5} \\ 15 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.5 \\ 2\overline{)5} \\ 10 \end{array}$$

$$\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5$$

Figura 4.4. Respuesta de VII-A17 que elige el cociente igual. Compara por cociente (desfavorables-favorables) llegando a su representación decimal con el uso de submúltiplos

VII-A2 y VII-A17 presentan la comparación de casos desfavorables y favorables. Esta situación contiene dibujos de los que se deben obtener los casos favorables, desfavorables y posibles. VII-A2 y VII-A17 relacionan al conjunto uno y posteriormente al dos (véase la expresión vii del cuadro 7). Para simplificar la comparación de variables utilizan submúltiplos y terminan con su representación decimal (igual a 2.5) lo que les permite hacer una elección, en este caso correcta.

Estrategia: Fracción-razón parte-parte con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Favorables-Desfavorables o Desfavorables-Favorables.

Se presentó esta estrategia en: I-A2 y I-A17.

I-A2 Cualquiera. En cualquiera de los 2 conjuntos obtiene la misma probabilidad de ganar.

$$\frac{7}{7} = \frac{3.5}{3.5} = 1$$

$$\frac{5}{5} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

Dividí entre 2 cada una de las cantidades y después lo dividí entre el resultado que nos dio.

Figura 4.5. Respuesta de I-A2 que elige el cociente igual. Compara por cociente (favorables-desfavorables o desfavorables-favorables) llegando a su representación decimal con el uso de submúltiplos

I-A2 y I-A17 presentan la comparación de casos favorables y desfavorables o viceversa, esto pudo deberse a que la situación muestra conjuntos con subconjuntos iguales (casos favorables y desfavorables). Además, en el resultado no se observa alguna distinción en el orden de la comparación de los subconjuntos. I-A2 relaciona al conjunto dos y posteriormente al uno (véanse las expresiones vi y viii del cuadro 7) y I-A17 realiza lo contrario (véanse las expresiones v y vii del cuadro 7).

Para simplificar la comparación de variables I-A2 y I-A17 utilizan submúltiplos y terminan con su representación decimal, lo que les permite hacer una elección, en este caso correcta con base en la igualdad de los resultados. En esta estrategia se considera la relación parte-parte y en el caso de la situación I son los datos que proporciona y los que utilizan tanto I-A2 como I-A17.

- Consideración de casos favorables y casos posibles. Se comparan por medio de cocientes los casos favorables y posibles de cada conjunto (véanse las expresiones ix, x, xi, y xii del cuadro 7) y se realiza la elección con base en el mayor, menor o igual cociente.

Elección con base en el cociente mayor

Estrategia: Fracción-razón parte-todo con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Favorables-Posibles.

Se presentó esta estrategia en: IV-1-A30, VI-1-A30, VIII-A2, VIII-A13, VIII-A17, VIII-A30, VIII-A31 y X-1-A30.

IV-1-A30 Caja grande. La caja grande ya que tiene mayor probabilidad de sacar un insecto.

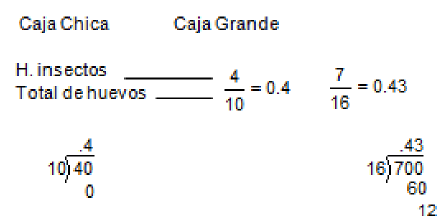


Figura 4.6. Respuesta de IV-1-A30 que elige el cociente mayor. Compara por cociente (favorables-posibles) llegando a su representación decimal sin el uso de submúltiplos

IV-1-A30 y VI-1-A30 presentan la comparación de casos favorables y posibles en cada conjunto donde primero relacionan los del primer conjunto y posteriormente los del segundo (véase la expresión ix del cuadro 7). La situación IV proporcina los casos favorables y desfavorables, y a partir de éstos se pueden obtener los posibles, y en la situación VI se tienen los tres, favorables, desfavorables y posibles. La situación X proporciona los casos posibles y el porcentaje de favorables, por lo que X-1-A30 con esta información opera para obtener el número de casos favorables para establecer la relación entre los posibles y estos.

Una vez establecida la relación entre los casos favorables y los posibles se realiza una elección con base en el mayor resultado decimal, obtenido de manera directa sin simplificación previa con el empleo de submúltiplos. Esto quizá se deba a que la situación IV, en el segundo conjunto presenta un número impar en el numerador y un par en el denominador que hacen que la fracción-razón no se pueda simplificar, aunque dicha simplificación es posible en el primer conjunto, o en ambos conjuntos con el uso de números decimales. En cuanto a la situación VI, esta simplificación no se puede llevar a cabo en ninguna de las relaciones establecidas pero de igual manera esto es posible con el empleo de números decimales como se ha visto en otras elecciones y con otras estrategias, por ejemplo II-1-A17.

VIII-A2, VIII-A13, VIII-A17, VIII-A30 y VIII-A31 de igual manera toman la relación del conjunto uno y posteriormente la del conjunto dos. VIII-A13 de manera directa obtiene los valores decimales para compararlos, a diferencia de VIII-A2, VIII-A17, VIII-A30 y VIII-A31 quienes primero simplifican con submúltiplos. Los cuatro se limitan a operar los números fraccionarios que se les proporcionan pero no indican el significado que tienen para cada uno de ellos estos números, que señalan la probabilidad pero que no se hace distinción alguna de los elementos que la conforman, en cuestión de casos favorables, desfavorables o posibles. En la situación X-1-A30 aunque se puede simplificar con submúltiplos no se realiza y se procede a obtener de inmediato el valor decimal para comparar.

Estrategia: Fracción-razón parte-todo con el uso de productos cruzados.

Relación de orden: Favorables-Posibles.

Se presentó esta estrategia en: VIII-A1 y X-1-A1.

VIII-A1 Diurna. Multipliqué 5 × 3 y el resultado lo puse debajo de la fracción contraria y lo mismo con 2 × 8.

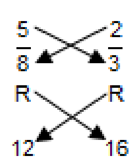


Figura 4.7. Respuesta de VIII-A1 que elige el cociente mayor. Compara por cociente (favorables-posibles) y utiliza productos cruzados

VIII-A1 presenta la comparación de casos favorables y posibles en cada conjunto, es decir, relaciona los del segundo conjunto y posteriormente los del primero (véase la expresión x del cuadro 7). Mientras que X-1-A1 relaciona los del primer conjunto y posteriormente los del segundo (véase la expresión ix del cuadro 7). La situación VIII proporciona dos números racionales que representan en cada conjunto la probabilidad de los casos favorables en relación con los posibles. Tanto VIII-A1 como X-1-A1 consideraron las probabilidades proporcionadas y emplearon productos cruzados para hacer la elección con base en el mayor resultado obtenido. Y aunque VIII-A1 presenta error al operar uno de los productos, esto no afecta su elección. La relación de orden de favorables y posibles representa la probabilidad de un evento, y al operar los productos cruzados lo que se obtiene son múltiplos comunes de las probabilidades comparadas. Es importante comentar que VIII-A1 mostró flechas que indican la manera en cómo se efectuaron los productos cruzados.

La situación X presenta los casos posibles y el porcentaje de casos favorables. X-1-A1 obtiene los casos favorables de cada conjunto con base en su porcentaje en relación con los casos posibles. Una vez obtenidos los casos favorables establece su relación con los posibles mediante productos cruzados. Es de señalar que con esa información encuentra los desfavorables pero no los considera en su elección.

Estrategia: Regla de tres. Para la obtención de porcentaje de casos favorables en relación con los casos posibles en cada conjunto.

Relación de orden: Favorables-Posibles.

Se presentó esta estrategia en: IV-1-A16, IV-1-A19, VI-1-A16, VI-1-A23, VII-A16, VII-A23, IX-A19 y IX-A23.

VI-1-A23 Campamento A. Llegando a la conclusión de cuál grupo tiene más %.

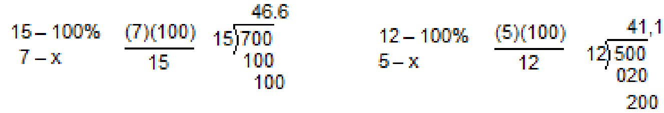


Figura 4.8. Respuesta de VI-1-A23 que elige el cociente mayor. Compara por cociente (favorables-posibles) y utiliza porcentajes

IV-1-A16, IV-1-A19, VI-1-A16, VI-1-A23, VII-A16, VII-A23, IX-A19 y IX-A23 trabajan con los casos favorables y posibles para obtener el porcentaje de los primeros a partir de considerar el porcentaje de los segundos como el 100%. Al obtener porcentajes diferentes establecen una elección correcta al considerar que en el más grande se tiene mayor probabilidad. Las situaciones IV y IX presentan los casos favorables y desfavorables y a partir de estos es posible obtiener los posibles para relacionarlos con los primeros. Y la situación VI proporciona los casos favorables, desfavorables y posibles. De esta manera se puede relacionar directamente esta información.

Estrategia: Fracción-razón todo-parte con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Posibles-Favorables.

Se presentó esta estrategia en: III-A2 y V-A17.

III-A2 Lotería. Con la lotería, sacarle mitad a las cantidades y después lo dividí.

$$\frac{6}{2} = \frac{3}{1} = 3 \qquad \boxed{\frac{9}{3} = \frac{4.5}{1.1} = 4}$$

Figura 4.9. Respuesta de III-A2 que elige el cociente mayor. Compara por cociente (posibles-favorables) y utiliza porcentajes aunque comete un error al dividir

III-A2 y V-A17 cometen un error al obtener múltiplos por lo que su resultado no fue correcto, pero por sus comparaciones los incluimos en la de por cociente mayor. Cabe señalar que su elección es incorrecta debido a que en esta relación de órden se debe considerar el cociente menor.

Elección con base en el cociente menor

Estrategia: Fracción-razón todo-parte con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Posibles-Favorables.

Se presentó esta estrategia en: VI-1-A17 y X-1-A17.

X-1-A17 Bolsa chica. Saqué la probabilidad de la bolsa chica y me salió 2.5 de probabilidad y de la grande que me salió 1.6.

$$\begin{array}{lll} 15 \text{ — } 100\% & \quad & 20 \text{ — } 100\% \\ x \text{ — } 40\% & & x \text{ — } 60\% \\ x = 6 & & x = 12 \end{array}$$

$$\frac{(40)(15)}{100} \qquad \frac{(20)(60)}{100}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \underline{X15} \\ 200 \\ \underline{40} \\ 600 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 \\ \underline{x60} \\ 00 \\ \underline{120} \\ 1200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.6 \\ 6\overline{)10} \\ 40 \\ 4 \end{array}$$

$$\frac{15}{6} = \frac{7.5}{3} = 2.5 \qquad \frac{20}{12} = \frac{10}{6} = 1.6$$

Figura 4.10. Respuesta de X-1-A17 que elige el cociente menor. Compara por cociente (posibles-favorables) llegando a su representación decimal con el uso de submúltiplos

VI-1-A17 y X-1-A17 presentan la comparación de casos posibles y favorables en cada conjunto, además primero relacionaron los del primer conjunto y posteriormente los del segundo (véase la expresión xi del cuadro 7). La situación VI muestra los tres casos: favorables, desfavorables y posibles. De esta manera, se les podía operar, a diferencia de la situación X que proporciona los casos posibles y el porcentaje de favorables, por lo que X-1-A17 con esta información recurre a la regla de tres para obtener el número de casos favorables y así establece la relación entre los posibles y los favorables, nótese que X-1-A17 en su explicación menciona que esta relación corresponde a las probabilidades 2.5 y 1.6, donde no debemos olvidar que la probilidad ésta dada por el parámetro $(0,1]$.

Una vez establecida la relación entre los casos posibles y favorables, se realiza una elección con base en el mayor resultado decimal obtenido, a partir de submúltiplos para simplificar la expresión. Es de señalar que en este ocasión la relación de casos posibles y favorables representa el recíproco de la probabilidad (la probabilidad de un evento es igual al cociente de los casos posibles entre los favorables, véase la expresión ix del cuadro 7) por lo que de haberse realizado una elección con base en el menor resultado posible ésta hubiera sido correcta. Vale la pena aclarar que para ejemplificar esta clasificación se consideró a X-1-A17 dando prioridad al tipo de relaciones de orden que implicó y no así a su elección.

Elección con base en el cociente igual

Estrategia: Fracción-razón parte-todo con o sin la utilización de submúltiplos sin llegar a su forma decimal.

Relación de orden: Favorables-Posibles.

Se presentó esta estrategia en: III-A1, III-A22, III-A25, III-A26 y III-A30.

III-A30 Cualquiera. En cualquiera de las 2, ya que tienen la misma probabilidad de ganar en los 2 sorteos.

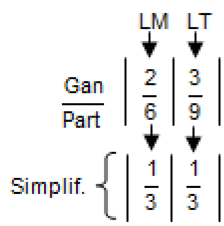


Figura 4.11. Respuesta de III-A30 que elige el cociente igual. Compara por cociente (favorables-posibles) sin llegar a su representación decimal con el uso de submúltiplos

III-A30 presenta la comparación de casos favorables y posibles (véase la expresión ix del cuadro 7). Esto pudo deberse a que la situación diseñada proporciona estos datos, además, a diferencia de III-A17 en la estrategia todo-parte, no mantiene el orden en que se dan los datos, es decir, los casos favorables se mantienen en el numerador aunque se proporcionen después de los casos posibles. Para simplificar la comparación de variables A30 utiliza submúltiplos sin llegar a su representación decimal, lo que le permite hacer una elección, en este caso correcta con las fracción(es)-razón(es) obtenidas.

En III-A22, III-A25 y III-A26 se señala que en los dos conjuntos los casos favorables representan una tercera parte, pero no establecen estas fracción(es)-razón(es) de manera numérica sino verbal. III-A22 señala los casos posibles, desfavorables y favorables, indicando de manera verbal que sólo aumentan los primeros y de estos sólo una tercera parte son favorables, es decir, alude a la parte y el todo.

III-A22 Ambos. Es lo mismo porque lo único que aumentan son las personas y sólo gana una tercera parte de las personas:

$6 - 4 - \boxed{2}$, $9 - 6 - \boxed{3}$

Figura 4.12. Respuesta de III-A22 que elige el cociente igual. Compara por cociente (favorables-posibles) con el uso de submúltiplos

III-A1 y III-A25 cuando señalan que sólo una tercera parte gana, aluden a la parte y el todo, en este caso a los casos favorables en relación con los posibles. Pero también identifican que si existe la misma probabilidad de ganar entonces en los dos también existe la misma probabilidad de perder. Aunque III-A1 comenta que puede haber mayor probabilidad donde hay menor número de casos posibles, finalmente elige por cociente y externa su seguridad en este tipo de comparación.

> III-A25 Ambos. En los 2 existe la misma probabilidad de ganar y perder. En los dos casos la tercera parte reciben premios, por lo tanto, en los 2 casos existe una misma probabilidad.

Figura 4.13. Respuesta de III-A25 que elige el cociente igual. Compara por cociente (favorables-posibles) con el uso de submúltiplos

III-A26 indica de manera numérica los casos posibles y los favorables, y señala de manera verbal que estos últimos corresponden a una tercera parte de los primeros.

> III-A26 Ambos. Es igual porque del loto millonario es esto: 6 participantes gana 2 o sea una tercera parte y de la lotería 9 participan ganan 3 o sea una tercera parte

Figura 4.14. Respuesta de III-A26 que elige el cociente igual. Compara por cociente (favorables-posibles) con el uso de submúltiplos.

Estrategia: Fracción-razón parte-todo con o sin el uso de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Favorables-Posibles.

Se presentó esta estrategia en: V-A30 y VII-A30.

> V-A30 Ambos. En cualquiera de los 2 grupos ya que tiene la misma probabilidad.

$\frac{\text{Niños que prefieren el futbol}}{\text{Total de niños}}$	$\frac{21}{28}$	$\frac{18}{14}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
Probabilidad	0. 75	0.75

Figura 4.15. Respuesta de V-A30 que elige el cociente igual. Compara por cociente (favorables-posibles) llegando a su representación decimal con el uso de submúltiplos

V-A30 y VII-A30 presentan la comparación de casos favorables y posibles en cada conjunto, además primero relacionaron los del primer conjunto y posteriormente los del segundo (véase la expresión ix del cuadro 7). La situación V proporciona los casos favorables, desfavorables y los posibles, a diferencia de la situación VII que muestra dibujos que los representan. Se establece la relación entre los casos favorables y los posibles dándose una elección con base en el igual resultado decimal obtenido después de la simplificación previa con el empleo de submúltiplos. La respuesta de VII-A30, a diferencia de V-A30, presenta el resultado de manera directa sin alguna simplificación previa. Es importante señalar que V-A30 y VII-A30 establecen que los resultados decimales obtenidos corresponden a las probabilidades de cada conjunto.

Estrategia: Fracción-razón parte-todo con el uso de Productos cruzados.

Relación de orden: Favorables y Posibles.

Se presentó esta estrategia en: IX-A1.

IX-A1 Cualquiera. Es la misma probabilidad, pues vi qué fracción era más grande pero al hacer esto vi que era igual.

1n 2n

9n 6b 15n 10b

$\frac{9}{15}$ $\frac{15}{25}$

225 225

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 9 \\ \hline 225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

Figura 4.16. Respuesta de IX-A1 que elige el cociente igual. Compara por cociente (favorables-posibles) y utiliza productos cruzados

IX-A1 presenta la comparación de casos favorables y posibles en cada conjunto, además primero relaciona los del primer conjunto y posteriormente los del segundo (véase la expresión ix del cuadro 7). La situación IX proporcion los casos favorables y desfavorables, y a partir de éstos se obtienen los posibles. Una vez establecida la relación entre los casos favorables y los posibles se efectúan los productos cruzados para hacer la elección con base en la igualdad de los resultados.

Estrategia: Regla de tres. Para la obtención de porcentaje de casos favorables en relación con los casos posibles en cada conjunto.

Relación de orden: Favorables-Posibles.

Se presentó esta estrategia en: I-A19, III-A35, V-A16 y IX-A16.

I-A19 Cualquiera. En el conjunto 1 hay 10 tarjetas de las cuales son el 100% de posibilidad pero no se sabe cuál es de ganar si hay 5 tarjetas ganadoras.

$$\begin{array}{c} 10 - 100 \\ 5 - x \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ \times 5 \\ \hline 500 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \\ 10\overline{)500} \\ 00 \\ 0 \end{array}$$

Hay un 50% de probabilidad de ganar del conjunto 1.

Y hay del conjunto 2: 14 = 100% y la posibilidad de ganar con las 7 tarjetas ganadoras.

$$\begin{array}{c} 14 - 100 \\ 7 - x \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ \times 7 \\ \hline 700 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \\ 14\overline{)700} \end{array}$$

Las 2 tarjetas [los 2 conjuntos] tienen posibilidad del 50% de ganar, así que cualquiera sería ganadora.

Figura 4.17. Respuesta de I-A19 que elige el cociente igual. Compara por cociente (favorables-posibles) y utiliza porcentajes

I-A19, III-A35, V-A16 y IX-A16 consideran los casos favorables y posibles para obtener el porcentaje de los primeros a partir de considerar el porcentaje de los segundos como el 100%. Al obtener porcentajes iguales se establece una elección correcta al considerar que en cualquiera se tiene la misma probabilidad.

Es de señalar que en las situaciones I, V y IX se obtiene un resultado exacto igual al 50%, 75% y 60% respectivamente, a diferencia de la situación III donde se obtiene un resultado decimal igual al 33.3%. Además V-A16 no sólo señala el porcentaje de casos favorables en relación con los posibles, sino además deduce a partir de esto el porcentaje de casos desfavorables.

En esta estrategia se establece la relación parte-todo considerando los casos favorables y posibles en porcentaje. En el caso de la situación III son los datos que se proporcionaron y los que opero III-A35, a diferencia de las situaciónes I y IX que no proporcionaron los casos posibles y, sin embargo, I-A19 y IX-A16 relacionaron los casos favorables y desfavorables para obtener esta información y aplicar esta estrategia. Es de señalar que la diferencia en estas situaciones es que la I proporciona dibujos en los cuales se deben contar los favorables y desfavorables para conocer la cantidad de cada uno de ellos y la situación IX esta información ya la proporciona. La V da los casos favorables, desfavorables y posibles de tal manera que podían relacionar de manera inmediata esta información.

Estrategia: Estimación de resultados. Para la obtención del porcentaje de casos favorables en relación con los casos posibles en cada conjunto.

Relación de orden: Favorables-Posibles.

Se presentó esta estrategia en: V-A19.

> V-A19 Ambos. En cualquiera, porque saqué cantidades y en los 2 grupos la mayoría tiene [quieren] jugar futbol soccer como un 75% de los 2 grupos.

Figura 4.18. Respuesta de V-A19 que elige el cociente igual. Compara por cociente (favorables-posibles) y utiliza la estimación de resultados para obtener porcentajes

V-A19 estima porcentajes e implícitamente compara los favorables y los posibles en cada conjunto y determina que en ambos conjuntos se presenta la misma probabilidad de obtener un caso favorable.

Estrategia: Fracción-razón todo-parte con o sin el uso de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Posibles-Favorables.

Se presentó esta estrategia en: III-A17.

> III-A17 Cualquiera. En cualquiera tienes la misma probabilidad. Sacar la mediana [mitad] de cada número en fracción y dividirlo.
>
> $$\frac{6}{2} = \frac{3}{1} = 3 \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 1.5\overline{)4.5} \\ 00 \end{array}$$
>
> $$\frac{9}{3} = \frac{4.5}{1.5} = 3$$

Figura 4.19. Respuesta de III-A17 que elige el cociente igual. Compara por cociente (posibles-favorables) llegando a su representación decimal con el uso de submúltiplos

III-A17 presenta la comparación de casos posibles y favorables en cada conjunto (véase la expresión xi del cuadro 7). Esto pudo deberse a que la situación III proporciona estos datos y A17 conserva el orden. Para simplificar la comparación de variables utiliza submúltiplos y termina con su representación decimal (igual a 3) lo que le permite hacer una elección, en este caso correcta.

- Consideración de casos desfavorables y casos posibles. Se comparan por medio de cocientes los casos posibles y desfavorables de cada conjunto (véanse las expresiones xiii, xiv, xv y xvi del cuadro 7) y se realiza la elección con base en su mayor, menor o igual cociente.

Elección con base el resultado igual

Estrategia: Fracción-razón parte-todo con o sin el uso de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Desfavorables-Posibles.

Se presentó esta estrategia en: IX-A30.

IX-A30 Cualquiera. En cualquiera de las 2 tienen la misma probabilidad.

	Bolsa 1	Bolsa 2
$\frac{\text{Canicas blancas}}{\text{Total de canicas}}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{15}{25}$
Probabilidad	0.6	0.6

$$\begin{array}{r} .6 \\ 15\overline{)90} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} .6 \\ 25\overline{)150} \\ 0 \end{array}$$

Figura 4.20. Respuesta de IX-A30 que elige el cociente igual. Compara por cociente (desfavorables-posibles) llegando a su representación decimal sin el uso de submúltiplos

IX-A30 presenta la comparación de casos desfavorables y posibles en cada conjunto. Además primero relaciona los del primer conjunto y posteriormente los del segundo (véase la expresión xiii del cuadro 7). La situación V proporciona los casos favorables y desfavorables, y si se consideran los posibles, se deben obtener a partir de estos. Se establece la relación entre los casos desfavorables y los posibles dándose una elección con base en el resultado decimal igual, obtenido de manera directa sin presentar alguna simplificación previa. Es importante señalar que IX-A30 establece que los resultados decimales obtenidos corresponden a las probabilidades de cada conjunto.

Estrategia: Regla de tres. Para la obtención de porcentaje de casos desfavorables en relación con los casos posibles en cada conjunto.

Relación de orden: Desfavorables-Posibles.

Se presentó esta estrategia en: III-A16.

III-A16 Ambos. En los dos, porque en los dos tengo las mismas posibilidades.

Loto millonario	Lotería	$6 = 100$	$9 = 100$
		$4 = x$	$6 = x$
6 participantes 2 premiados	9 participantes 3 premiados	$6\overline{)400}$ = 66.6 40 40	$9\overline{)600}$ = 66.6 60 60
en esta sólo le restan cuatro personas	y en ésta sólo se le quitan 6 personas		
6 participantes - 4 desafortunados 2 premiados	9 participantes - 6 desafortunados 3 premiados		

Figura 4.21. Respuesta de III-A16 que elige el cociente igual. Compara por cociente (desfavorables-posibles) y utiliza porcentajes

III-A16 con los casos desfavorables y los posibles obtiene el porcentaje de los primeros en relación con los segundos, considerados como el 100%. Aunque los desfavorables no se proporcionan, se obtienen a partir de los posibles y favorables para utilizarlos en esta estrategia. Al obtener porcentajes iguales del 66.6% se establece una elección correcta al considerar que en cualquiera se tiene la misma probabilidad.

Conclusiones de la comparación cuantitativa por cociente

En la comparación cuantitativa por cociente, con las expresiones contenidas en el cuadro 7 del capítulo III, cuando se tiene la relación razón-fracción parte-parte, parte-todo y todo-parte o antecedente-consecuente, se dan elecciones correctas si en las expresiones: v, vi, ix, x, xv y xvi, se elige con base en el cociente mayor. Esto porque: el cociente de la v y vi representa el número de favorables por cada desfavorable, y en la ix y x el número de favorables por cada posible. Además, estas dos últimas expresiones son las únicas que se utilizan y consideran para representar probabilidades y realizar comparaciones entre ellas. En cuanto a las expresiones xv y xvi el cociente resultante determina el número de posibles por cada desfavorable.

Por lo contrario, si se presentan las expresiones vii, viii, xi, xii, xiii y xiv, las elecciones serán correctas sólo si se elige con base en el cociente menor. Esto debido a que el cociente resultante en la vii y viii representa el número de desfavorables por cada favorable y en la xi y xii, en el cociente resultante se obtiene el número de posibles por cada favorable. En xiii y xiv el cociente representa el número de desfavorables por cada posible.

Ahora bien, cuando se utilizan las expresiones v, vi, ix, x, xv y xvi, y se elige con base en el cociente mayor que resulta del trato con porcentajes, a partir de las relaciones que se podrían establecer como la regla de tres. Esto debido a que el cociente de la v y vi puede representar el porcentaje de favorables respecto al 100% de desfavorables, y en la ix y x el porcentaje de favorables respecto al 100% de los posibles. Y si estas dos últimas expresiones son las que se utilizan para representar y comparar probabilidades, también pueden estar dadas en porcentajes. En cuanto a las expresiones xv y xvi, el cociente resultante determina el porcentaje de posibles respecto al 100% de desfavorables.

Por lo contrario si se presentan las expresiones vii, viii, xi, xii, xiii y xiv, las elecciones serán correctas sólo si se elige con base en el cociente menor que resulta del trato con porcentajes, puesto que el cociente resultante en la vii y viii representa el porcentaje de desfavorables por el 100% de favorables y en la xi y xii el cociente establece el porcentaje de posibles dado que el 100% corresponde a los favorables. En xiii y xiv el cociente representa el porcentaje de los desfavorables por el 100% de los posibles. De aquí la importancia de las relaciones de orden: favorables-desfavorables, favorables-posibles, desfavorables-posibles o viceversa. Es de señalar que si se realiza una elección con base en la igualdad de los cocientes sería correcta sin importar la relación de orden.

Aunque las expresiones i, ii, iii y iv del cuadro 1 no se presentaron, cuando se establece la relación razón-fracción parte-parte y antecedente-consecuente, se tendrían elecciones correctas si se considerara, en las expresiones i y iii el segundo cociente, es decir, si éste resulta ser mayor que el primer cociente se debe elegir el conjunto cuyos elementos se asignaron a los denominadores de los cocientes comparados. Por el contrario, si resulta ser menor que el primero, se realiza una elección correcta si se elige el conjunto cuyos elementos se asignaron a los numeradores.

Por otra parte, si se consideran las expresiones ii y iv la elección también dependería del segundo cociente, si resulta ser mayor que el primer cociente se debe elegir el conjunto que haya quedado en los numeradores. Por el contrario, si resulta ser menor se realiza una elección correcta si se elige el conjunto cuyos elementos quedaron en los denominadores.

Esto es debido a que en las expresiones i, ii, iii y iv los cocientes resultantes representan el número de favorables de un conjunto por cada favorable del otro, y en este mismo sentido, el número de desfavorables de un conjunto por cada desfavorable del otro. Es de señalar que en estas cuatro expresiones, de la misma manera se da una elección correcta con base en la igualdad de los cocientes, sin importar que éstos correspondan a los favorables y desfavorables de ambos conjuntos, ni a la relación de orden (favorables del conjunto uno con favorables del conjunto dos o viceversa, y de la misma manera los desfavorables).

El análisis anterior de las expresiones i, ii, iii y iv del cuadro 7 puede describirse utilizando la notación de dicho cuadro.

En las expresiones i y iii

Si $\frac{B_1}{B_2} \rangle \frac{N_1}{N_2}$, se elige el conjunto (1) que corresponde al numerador. Lo mismo sucede con iii, cuando se tiene que $\frac{B_2}{B_1} \rangle \frac{N_2}{N_1}$, se elige el conjunto (2) que corresponde al numerador.

Si $\frac{B_1}{B_2} \langle \frac{N_1}{N_2}$, se elige el conjunto (2) que corresponde al denominador. Lo mismo sucede cuando se tiene que $\frac{B_2}{B_1} \langle \frac{N_2}{N_1}$, se elige el conjunto (1) que corresponde al denominador.

En las expresiones ii y iv

Si $\frac{N_1}{N_2} \rangle \frac{B_1}{B_2}$, se elige el conjunto (2) que corresponde al denominador. Lo mismo sucede cuando se tienen que $\frac{N_2}{N_1} \rangle \frac{B_2}{B_1}$, se elige el conjunto (1) que corresponde al denominador.

Si $\frac{N_1}{N_2} \langle \frac{B_1}{B_2}$, se elige el conjunto (1) que corresponde al numerador. Lo mismo sucede cuando se tienen que $\frac{N_2}{N_1} \langle \frac{B_2}{B_1}$, se elige el conjunto (2) que corresponde al numerador.

En las expresiones i, ii, iii y iv

Si $\frac{B_1}{B_2} = \frac{N_1}{N_2}$, o $\frac{N_1}{N_2} = \frac{B_1}{B_2}$, o $\frac{B_2}{B_1} = \frac{N_2}{N_1}$, o $\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_2}{B_1}$, entonces ambos conjuntos presentan la misma probabilidad.

Cuadro 10: Resumen del tipo de elección, las estrategias y la relación de orden identificadas en la comparación cuantitativa por cociente

<table>
<tr><td colspan="3">Comparación cuantitativa
- Comparación cuantitativa por cociente
▪ Consideración de casos favorables y casos desfavorables
▪ Consideración de casos favorables y casos posibles
▪ Consideración de casos desfavorables y casos posibles</td></tr>
<tr><td>Elección</td><td>Estrategia</td><td>Relación de orden</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cociente mayor

Cociente menor

Cociente igual</td><td>Fracción-razón parte-parte con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.</td><td>Favorables-desfavorables v y vi
Desfavorables-favorables vii y viii</td></tr>
<tr><td>Fracción-razón parte-todo con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Fracción-razón parte-todo con el manejo de productos cruzados.

Regla de tres. Para la obtención de porcentaje de casos favorables en relación con los casos posibles en cada conjunto.

Fracción-razón parte-todo con la utilización de submúltiplos sin llegar a su forma decimal.

Estimación de resultados. Para la obtención de porcentaje de casos favorables en relación con los casos posibles en cada conjunto.</td><td>Favorables-posibles ix y x
Posibles-favorables xi y xii</td></tr>
<tr><td>Cociente igual</td><td>Fracción-razón parte-todo con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Regla de tres. Para la obtención de porcentaje de casos desfavorables en relación con los casos posibles en cada conjunto.</td><td>Desfavorables-posibles xiii, xiv
Posibles desfavorables xv y xvi</td></tr>
</table>

4.1.2- Comparación cuantitativa por diferencia. Relaciones que se establecen con una o más variables (véase el cuadro 8 del capítulo III). Se especifican numéricamente las comparaciones por diferencia (mayor que, menor que, más que o menos que y se precisa por cuánto) que se realizaron con las variables que se implicaron: casos favorables, casos desfavorables o casos posibles. Y una vez establecidas las relaciones se activa con una estrategia, dentro o entre, de solución para hacer la elección.

- Consideración de casos favorables. Se comparan por medio de diferencia los casos favorables de cada conjunto (véanse las expresiones i y iii del cuadro 8) y se realiza la elección con base en su mayor, menor o igual número.

Elección con base en el mayor número de casos favorables

Estrategia: Relación entre parte con parte.

Relación de orden: Favorables ⟷ Favorables.

Se presentó esta estrategia en: V-A25, VI-1-A14, VI-1-A25 y VII-A25.

VII-A25 Máquina A. Porque en general tiene 21 pelotas la máquina A y la B tiene 14 pero de esas 21, 6 son blancas y, en la máquina B son 14 pero sólo hay 4 blancas y tiene 2 oportunidades más de obtener una pelota blanca.

Figura 4.22. Respuesta de VII-A25 que elige el mayor número de casos favorables. Compara por diferencia (favorables -favorables) y explicita la diferencia

VI-1-A14 y VI-1-A25 señalan los casos favorables y la diferencia específica que es dos. V-A25 y VII-A25 también especifican la diferencia y aunque señalan los casos posibles, dan prioridad a los casos favorables para hacer su elección.

- Consideración de casos favorables y casos desfavorables. Se comparan por medio de diferencia los casos favorables y desfavorables de cada conjunto (véanse las expresiones ix, x, xi y xii del cuadro 8 del capítulo III) y se realiza la elección con base en su mayor, menor o igual número.

Elección con base en la diferencia mayor

Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.

Relación de orden: Favorables ⟷ Desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: II-1-A11, II-1-A34, V-A35, IX-A4, IX-A9, IX-A22, IX-A32 y IX-A35.

II-1-A11 Urna. Porque en la urna hay 5 bolitas blancas y 4 bolitas negras y por 1 bolita blanca es la diferencia y puedes ganar por las posibilidades.

Figura 4.23. Respuesta de II-1-A11 que elige la diferencia mayor. Compara por diferencia (favorables –desfavorables) y explicita la diferencia

II-1-A11 y II-1-A34 presentan la comparación de casos favorables y desfavorables en un conjunto. La situación II presenta dibujos que ilustran la situación y de los cuales se deben obtener los casos favorables, desfavorables y posibles. A34 menciona que su elección se da porque en el segundo conjunto hay mayor diferencia de casos favorables y desfavorables, no indica las cantidades involucradas pero si señala la diferencia numérica específica que se da entre unos y otros, en este caso tiene uno más. A11 señala el número de casos favorables y desfavorables en un conjunto e indica la diferencia específica entre ambos, en este caso por 1, para hacer su elección con base en el mayor número de los primeros.

Es de señalar que tanto II-1-A11 y II-1-A34 no indican si realizaron algún conteo o qué relaciones establecieron para señalar la diferencia entre el segundo conjunto y el primero, y en este entre los casos favorables y desfavorables por lo que se considera que quedan implícitas estas comparaciones. Esto quizá puede tener su origen en el diseño de la situación II pues presenta una mayor diferencia de favorables y desfavorables en el segundo conjunto y en el primero no la hay, por lo que se puede deducir que es nula. Es de señalar que relacionan al conjunto uno y posteriormente al dos (véase la expresión vii del cuadro 8).

V-A35, IX-A4, IX-A9, IX-A22, IX-A32 y IX-A35 las situaciones V y IX fueron diseñadas con proporcionalidad y en comparación con la situación II, la diferencia de los casos favorables y desfavorables de ambos conjuntos no es nula.

IX-A9 sólo señala la diferencia en un conjunto quedando el otro implícito. IX-A4 y IX-A22 señalan la diferencia pero no indican las cantidades comparadas, es decir, de dónde surge la diferencia. V-A35, IX-A32 y IX-A35 sí señalan la diferencia e indican las cantidades comparadas. V-A35 también indica los casos posibles aunque estos no los considera para realizar su elección, quizá se deba a que la situación V presenta estos datos y en la IX no los anotó porque no los proporciona.

V-A35 Grupo A. Porque en el grupo A tienen 14 alumnos de diferencia entre el futbol y el basquetbol, mientras que en el grupo B tiene 12 alumnos de diferencia, y por lo tanto en el grupo A tiene mayor posibilidad de elegir a un alumno que le guste el futbol soccer.

Grupo A – 28 alumnos	Grupo B – 24 alumnos
21 futbol soccer y 7 basquetbol	18 futbol soccer y 6 basquetbol
21-7=14	18 – 6 =12

Figura 4.24. Respuesta de V-A35 que elige la diferencia mayor. Compara por diferencia (favorables –desfavorables) y explicita la diferencia

Elección con base en la diferencia menor

Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.

Relación de orden: Favorables-Desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: IX-A15.

IX-A15 Primera bolsa. Porque sólo hay 5 [3] bolas de diferencia y en la bolsa dos hay 5.

Figura 4.25. Respuesta de IX-A15 que elige la diferencia menor. Compara por diferencia (favorables –desfavorables) y explicita la diferencia

IX-A15 señala la diferencia específica en cada conjunto para elegir con base en la menor diferencia pero no indica de dónde surge esta.

Relación de orden: Desfavorables-favorables.

Se presentó esta estrategia en: VII-A31, VII-A32, VII-A35, VI-1-A1, VI-1-A11, VI-1-A21, VI-1-A32 y VI-1-A35.

VII-A31 La máquina B. En la máquina A hay menos probabilidades que salga la pelota blanca y en la máquina B puede que salga la pelota blanca.

[B] [A]

$$\begin{array}{r} 10 \\ -\;\;4 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ -\;\;6 \\ \hline 9 \end{array}$$

Figura 4.26. Respuesta de VII-A31 que elige la diferencia menor. Compara por diferencia (desfavorables –favorables) y explicita la diferencia

VII-A31, VI-1-A1 y VI-1-A21 señalan los casos desfavorables y favorables, además de la diferencia específica de cada conjunto para ser comparadas y elegir con base en la menor. VII-A31 además anota la operación. VII-A32 señala la diferencia específica y aunque comete un error, este no afecta su elección. VI-1-A32 indica la diferencia específica en ambos conjuntos pero no las cantidades de las cuales se obtuvieron. VI-1-A11 indica la diferencia específica en un conjunto pero no las cantidades de las cuales se obtuvo esta diferencia. VI-1-A35 señala la diferencia específica con operación; indica los casos favorables, desfavorables y posibles, pero estos últimos no influyen en su elección. VII-A35 señala la diferencia específica sin operación, indica los casos favorables, desfavorables y posibles aunque estos últimos no influyen en su elección. Además ilustra con dibujos las adiciones.

Elección con base en la diferencia igual

Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.

Relación de orden: Favorables ⟷ Desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: IV-1-A5.

IV-1-A5 Ambas cajas. Yo elegiría las dos cajas porque en las dos cajas es casi lo mismo de insectos, sólo la diferencia es de dos en la caja chica y en la caja grande, y en cualquiera de las dos es la misma probabilidad.

Figura 4.27. Respuesta de IV-1-A5 que elige la diferencia igual. Compara por diferencia (favorables –desfavorables) y explicita la diferencia

IV-1-A5 presenta la comparación de casos favorables y desfavorables en cada conjunto. La situación IV proporciona los casos favorables y desfavorables, además presenta dibujos que ilustran la situación pero donde no se distinguen los casos favorables de los desfavorables. IV-1-A5 realiza su elección considerando que en cada conjunto la diferencia de favorables y desfavorables es la misma y aunque no indica las cantidades involucradas en su comparación, sí señala la diferencia numérica específica entre unos y otros, en este caso es dos. Es de señalar que por el diseño de la situación, respecto a las cantidades proporcionadas la estrategia abordada lleva a una elección incorrecta.

Conclusiones de la comparación cuantitativa por diferencia

Decidir comparar y elegir por medio de diferencia puede ser correcto o no, pues esto dependerá del tipo de situaciones que se resuelvan, por ejemplo, si en el cuadro 8 las expresiones i y iii al comparar por diferencia se elige con base en el mayor número de casos favorables, esto será correcto si la situación presenta el mismo número de casos desfavorables o posibles. Por lo contrario, si en las expresiones ii y iv al comparar por diferencia se elige con base en el menor número de casos desfavorables, esto será correcto si la situación presenta el mismo número de casos favorables o posibles. De presentarse la elección con base en la igualdad de favorables, esta será correcta si la situación tiene igualdad en los desfavorables o posibles. Las características de las situaciones pueden ser notadas explícita o implícitamente por quien resuelve la situación. Sin embargo, las situaciones con igualdad de casos favorables, igualdad de casos desfavorables o igualdad de casos posibles, señaladas anteriormente no demandan un razonamiento proporcional porque llevan a que se involucre sólo un pensamiento absoluto y no uno relativo.

En las expresiones i, ii, iii y iv, con base en los argumentos que expusimos, existen fundamentos matemáticos que llevan a que la comparación por diferencia sea una estrategia correcta en situaciones con una variable como es la igualdad de casos favorables, desfavorables o posibles. No así cuando tratan situaciones donde existe diferencia entre el número de casos favorables, desfavorables y posibles con o sin proporcionalidad.

Cuando en las situaciones que se resuelven se realizan elecciones correctas con base en la comparación por diferencia puede llevar a que los alumnos construyan intuiciones correctas (para determinadas situaciones) que pueden extrapolar a otras situaciones donde estas intuiciones ya no les ayuden y se conviertan en un obstáculo para resolver la situación de manera adecuada. Por lo que en ese momento habría que plantear otras situaciones que contradigan a esas intuiciones y con esto se modifiquen o se construyan nuevas intuiciones para las situaciones ahora planteadas.

En las expresiones v, vi, vii y viii, cuando se comparan los elementos totales de un conjunto con los elementos totales de otro conjunto, se debe tomar en cuenta que aunque se muestren evidencias numéricas que denoten la diferencia entre estos elementos, no es una estrategia conveniente para realizar elecciones, debido a que las elecciones pueden ser correctas sólo por el diseño de la situación, donde se consideró que la probabilidad se presentará en conjuntos con mayor, menor o igual número de casos posibles. Algo parecido ocurre con las últimas ocho expresiones que corresponden a comparar los casos favorables o desfavorables con los posibles.

Las expresiones ix, x, xi y xii son convenientes para realizar elecciones sólo cuando en las situaciones la diferencia de casos favorables y casos desfavorables o viceversa es nula. De ser así, los conjuntos que se presentan son equiprobables y entonces se puede realizar una elección correcta con base en la igualdad que estos casos representan. Esta aseveración puede llevar a que en conjuntos donde exista una misma diferencia mayor o menor a cero también se consideren equiprobables, hecho que no se puede generalizar.

Cuadro 11. Resumen del tipo de elección, las estrategias y la relación de orden identificadas en la comparación cuantitativa por diferencia

<table>
<tr><td colspan="3">Comparación cuantitativa
- Comparación cuantitativa por diferencia
▪ Consideración de casos favorables
▪ Consideración de casos favorables y casos desfavorables</td></tr>
<tr><td>Elección</td><td>Estrategia</td><td>Relación de orden</td></tr>
<tr><td>Mayor número de casos favorables</td><td>Relación entre parte con parte</td><td>Favorables ⟷ Favorables</td></tr>
<tr><td>Diferencia mayor

Diferencia menor

Diferencia igual</td><td>Relación dentro Parte y parte con parte y parte</td><td>Favorables ⟷ Desfavorables

Favorables-Desfavorables

Desfavorables- Favorables</td></tr>
</table>

La comparación cualitativa que a continuación presentamos guarda estrecha relación con la comparación cuantitativa por diferencia, por la manera en cómo se comparan y relacionan los casos (favorables, desfavorables o posibles) que se toman en cuenta para realizar la elección. Por esto, utilizamos las mismas expresiones que se establecieron en la tabla 8 para analizar ahora las relaciones cualitativas. Y aunque la comparación cualitativa guarda estrecha relación con la comparación cuantitativa, consideramos conveniente separarlas para mostrar, entre otras cosas, que aunque en la primera se menciona la existencia de una deferencia, ésta nunca se señala, y que en la segunda si se muestra esa diferencia.

4.2.- Comparación cualitativa. Relaciones que se establecen con una o más variables (véase el cuadro 8 del capítulo III). Se tienen las comparaciones: muchos, pocos; mayor, menor (sin indicar por cuánto), más o menos (sin señalar cuántos) que se realizaron con las variables que se implicaron: casos favorables, casos desfavorables o casos posibles. Y una vez establecidas las relaciones se activa una estrategia, dentro o entre, de solución para hacer la elección.

- Consideración de casos favorables. Se comparan los casos favorables (véase las expresiones i y iv del cuadro 8) y se hace la elección con base en la diferencia obtenida considerando si uno es mayor, menor o igual al otro.

Elección con base en el mayor número de casos favorables

Estrategia: Relación entre parte con parte.

Relación de orden: Favorables⟷ favorables.

Se presentó esta estrategia en: I-A1, I-A5, I-A6, I-A7, I-A13, I-A18, I-A27, I-A30, I-A32, I-A33, II-1-A6, II-1-A10, II-1-A14, II-1-A18, II-1-A20, III-A12, III-A18, III-A29, IV-1-A4, IV-1-A6, IV-1-A10, IV-1-A18, IV-1-A23, V-A3, V-A4, V-A7, V-A13, V-A23, V-A27, V-A29, V-A33, VI-1-A8, VI-1-A10, VI-1-A19, VII-A6, VII-A11, VII-A14, VII-A21, VII-A29, VIII-A6, VIII-A25, IX-A7, IX-A14, IX-A18, IX-A24, IX-A27, IX-A29 y IX-A34, X-1-A2, X-1-A6, X-1-A15, X-1-A25, X-1-A27, X-1-A31, X-1-A3, X-1-A7, X-1-A8, X-1-A11, X-1-A13, X-1-A14, X-1-A16, X-1-A19, X-1-A20, X-1-A21, X-1-A22, X-1-A23, X-1-A24, X-1-A26, X-1-A33, X-1-A34, X-1-A35.

I-A18 Conjunto 2. El conjunto 2 tiene más posibilidad porque tiene más tarjetas de ganar y el conjunto 1 no porque tiene menos.

Figura 4.28. Respuesta de I-A18 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

La elección de I-A18, I-A27, IV-1-A4, IV-1-A23, V-A3, V-A4, V-A7, V-A23, V-A27, VI-1-A19, VII-A11, VII-A21, IX-A7, IX-A14, IX-A34, IX-A24, IX-A27 y X-1-A15 se da porque hay mayor número de casos favorables, pero no indican las cantidades involucradas, ni si realizaron algún conteo. I-A27, IV-1-A23, V-A7, V-A23, V-A27, VI-1-

A19, VII-A11, IX-A24, IX-A34 y X-1-A15 señalan que un conjunto tiene más casos favorables y dejan implícita su comparación con el otro conjunto que presenta menos, a diferencia de I-A18, IV-1-A4, V-A3, V-A4, VII-A21, IX-A7, y IX-A27 quienes señalan que un conjunto tiene más casos favorables y dejan explícita su comparación con el otro conjunto que presenta menos. IX-A14 representa la información en conjuntos discretos pero sólo considera los favorables para su elección.

I-A1señala que contó pero no indica las cantidades al igual que I-A5, II-1-A10, II-1-A14, II-1-A20 VII-A29. El indicar un conteo no es garantía que necesariamente se haya hecho, por lo que en vez de considerarlo como comparación cuantitativa lo consideramos en este apartado.

I-A1 Conjunto 2. Pues conté cuantos (gana) tiene cada conjunto y el que tiene más es el que elegí, hay mayor probabilidad de ganar.

Figura 4.29. Respuesta de I-A1 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

I-A6, I-A7, I-A13, I-A30, I-A32, I-A33, II-1-A6, II-1-A18, III-A12, III-A29 IV-1-A6, IV-1-A10, V-A13, V-A29 y V-A33, VII-A6, VII-A14, VIII-A6, VIII-A25, IX-A18, IX-A29 X-1-A2, X-1-A6, X-1-A25, X-1-A27 y X-1-A31 señalan el número de casos favorables de cada conjunto pero no indican la diferencia específica entre ambos.

I-A7 Conjunto 2. Del conjunto 2 porque en el uno sólo hay 5 de ganar y, en el conjunto 2, 7 de ganar entonces hay más probabilidad de ganar en el conjunto 2.

Figura 4.31. Respuesta de I-A7 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

V-A13 además utiliza una gráfica de barras para representar la información que se le proporciona aunque sólo considera los casos favorables. VIII-A6 y VIII-A25 representan la información en conjuntos continuos y consideran el número de sectores sombreados (casos favorables) de cada conjunto continúo (representados por círculos) y no así el tamaño de las áreas sombreadas. VII-A14 y X-1-A25 indican los casos favorables, desfavorables y posibles de cada conjunto pero sólo consideran a los primeros en su elección. La situación X proporciona los casos favorables en porcentaje por lo que si se quiere tratar con éstos, se debe utilizar alguna estrategia para obtenerlos, en este caso X-1-A27 y X-1-A31 multiplican por 0.40 y 0.60 para obtener los casos favorables de cada conjunto respectivamente y X-1-A2 utiliza la “regla de tres” para obtener los favorables y en consecuencia los desfavorables.

X-1-A2 Bolsa grande. Hice 1[una] regla de 3 para saber cuántos chocolates de fresa y de limón tengo en cada bolsa.

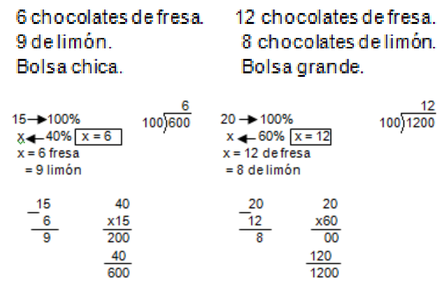
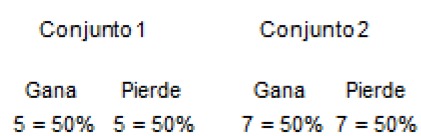


Figura 4.30. Respuesta de X-1-A2 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

Estos últimos tres estudiantes nos dejan ver que el tratar adecuadamente porcentajes o la “regla de tres” para la obtención de los casos favorables, desfavorables o posibles no implica pensar en términos relativos, porque a pesar del adecuado trabajo de un algoritmo el pensamiento absoluto sigue presente.

I-A30 Conjunto 2.



Del 2° conjunto ya que tiene más ganadores que el 1er conjunto.

Figura 4.32. Respuesta de I-A30 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

I-A30 también el porcentaje de los casos favorables y desfavorables de cada conjunto pero para realizar su elección no los considera.

I-A33 Conjunto 2.

10 14

La mayor probabilidad de ganar es en el conjunto 2 porque tiene más boletos de ganar.

Conjunto 1 Conjunto 2

5 7

Figura 4.33. Respuesta de I-A33 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

I-A33, III-A12 y IV-1-A18 además indican los casos posibles en cada conjunto pero no consideran esta información para elegir. III-A18 obtiene múltiplos para indicar que los casos favorables en un conjunto aumentan de 2 en 2 y en otro de 3 en 3 y con base en esto realiza su elección.

III-A18 Lotería. El loto millonario por que de cada 6 personas ganan 2 y si son 12 personas gana 4 y va aumentando de 2 y la lotería porque si son 9 que participan 3 y si son 18 ganan 6 van aumentando de 3.

18 12
12 8
6 4

Figura 4.34. Respuesta de III-A18 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

Es de señalar que A18 si hubiera continuado con el razonamiento quizá pudo haber llegado a encontrar relaciones como las siguientes:

Lotería		Loto millonario	
Participan	Ganan	Participan	Ganan
6	2	9	3
12	4	18	6
18	6	27	9

III-A18 compara los que ganan en cada conjunto (estableciendo una relación escalar) donde la diferencia entre estos es 2 y 3, respectivamente, por lo que considera el mayor número de casos favorables. La obtención de múltiplos posiblemente le hubiera ayudado a identificar la equiprobabilidad entre los dos conjuntos.

VI-1-A8 y VI-1-A10 señalan el número de casos favorables, desfavorables y posibles en un conjunto y sólo comparan explícitamente los primeros con los casos favorables del otro conjunto pero no los señalan y tampoco indican la diferencia específica entre ambos. Y en VI-1-A10 esta comparación queda implícita.

> VI-1-A8 Campamento A. En el campamento A porque en el campamento A por cada 15 que se inscriben a 8 les toca bola blanca y 7 bola negra y en el otro hay menos bolas negras.

Figura 4.35. Respuesta de VI-1-A8 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

En a situación X aunque los porcentajes corresponden a los casos favorables en relación con los posibles, esto no permite conocer, si en realidad los que hicieron su elección con base en el mayor de ellos comprendieron esta relación o si eligieron el mayor porcentaje considerando sólo su valor, como en el caso de elegir el mayor número de casos favorables y no como lo que representa el porcentaje.

X-1-A11, X-1-A14, X-1-A19, X-1-A21 y X-1-A24 mencionan que su elección se da con base en el mayor porcentaje de favorables pero no refieren cantidades.

> X-1-A24 Bolsa grande. Porque hay más posibilidad de sacar el relleno de fresa que en los demás. Pues viendo el porcentaje más alto.

Figura 4.36. Respuesta de X-1-A24 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

X-1-A3, X-1-A8, X-1-A16, X-1-A23, X-1-A26 y X-1-A34 mencionan que su elección se da con base en el porcentaje mayor y lo señalan pero no mencionan al otro ni la diferencia específica entre ellos.

> X-1-A23 Bolsa grande. En la bolsa grande es más probable, porque el 60% es de fresa.

Figura 4.37. Respuesta de X-1-A23 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

X-1-A7, X-1-A20 y X-1-A33 mencionan que su elección se da con base en el porcentaje mayor y lo señalan y mencionan el menor pero no indican la diferencia específica entre uno y otro.

X-1-A7 Bolsa grande. Porque se dice que en la bolsa chica hay 40% de fresa y en la grande el 60% que hay más entonces es la 2.

Figura 4.38. Respuesta de X-1-A7 que elige el mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

Elección con base en el menor número de casos favorables

Estrategia: Relación entre parte con parte.

Relación de orden: Favorables ⟷ Favorables.

Se presentó esta estrategia en: IV-1-A20, VI-1-A20 y V-A21.

VI-1-A20 Campamento B. Tiene menos bolas negras.

Figura 4.39. Respuesta de VI-1-A20 que elige el menor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

La elección VI-1-A20 se da porque considera el menor número de casos favorables, pero no indica las cantidades involucradas en su comparación o realizó algún conteo para hacer su elección. V-A21 y VI-1-A29 indican las cantidades involucradas en su comparación pero no muestran la diferencia específica. V-A21 además señala a los casos desfavorables y posibles pero no los considera para realizar su elección.

V-A21 Grupo B. Porque en el B son menos los que les gusta el soccer que en el A.

Grupo A	Grupo B
21 – soccer	18 – soccer
7 – basquet	6 – basquet
Total 28	Total 24

Figura 4.40. Respuesta de V-A21 que elige el menor número de favorables. Compara de forma cualitativa (favorables –favorables)

IV-1-A20, a diferencia de V-A20 y V-A21, elige ambos conjuntos porque identifica que tienen menor número de casos favorables, aunque queda implícita la diferencia que presentan éstos respecto a los posibles.

- Consideración de casos desfavorables. Se comparan los casos desfavorables (véanse las expresiones ii y iv del cuadro 2) y se hace la elección con base en la diferencia obtenida considerando si uno es mayor menor o igual al otro.

Elección con base en el menor número de casos desfavorables

Estrategia: Relación entre parte con parte.

Relación de orden: Desfavorables ⟷ Desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: I-A14, II-1-A23, III-A7, III-A10, III-A32, IV-1-A7, IV-1-A9, V-A15, V-A26, VII-A1, VII-A5, VII-A8, VII-A9, VII-A19, VII-A34, VIII-A35, IX-A6 y IX-A26.

II-1-A23 Urna. Porque la urna tiene menos bolitas negras.

Figura 4.41. Respuesta de II-1-A23 que elige el menor número de desfavorables. Compara de forma cualitativa (desfavorables –desfavorables)

II-1-A23 menciona que su elección se da porque hay menor número de casos desfavorables, pero no indica las cantidades involucradas en su comparación o si realizó algún conteo para hacer su elección. En este caso queda implícito que hay una comparación con los casos desfavorables de la ruleta para poder decir que hay menos casos desfavorables en la urna y la diferencia que presenta ésta con la ruleta. Sin embargo, por el argumento que presenta y por la forma en cómo está diseñada la situación deja en la incertidumbre si la comparación fue sólo de los casos desfavorables en ambos conjuntos o si se compararon los desfavorables en relación con los favorables en cada conjunto, es decir, la urna presenta menor número de casos desfavorables que la ruleta pero también menor número de casos desfavorables en el mismo conjunto en relación con los favorables, respecto a la ruleta que presenta los mismos.

V-A15, VII-A34, IX-A6 y IX-A26 realizan su elección con el menor número de casos desfavorables, pero no indican las cantidades involucradas o si realizaron algún conteo, de igual manera, queda implícita la comparación con el otro conjunto. Pero a diferencia de II-1-A23 y de la situación II, en la situación V los casos desfavorables son menores y entonces sólo queda la comparación entre ellos. IX-A6 aunque señala los favorables no los considera en su elección.

VII-A1, VII-A5, VII-A8, VII-A9 y VII-A19 mencionan que su elección se da porque hay menor número de casos desfavorables y consideran que en consecuencia mayor es la probabilidad de extraer un caso favorable, pero no indican las cantidades involucradas en su comparación o si realizaron algún conteo para hacer su elección. En este caso queda explicito que hay una comparación con los casos desfavorables del otro conjunto para poder decir que hay menos casos desfavorables.

> VII-E8 Máquina B. Porque la maquina A tiene más bolitas negras y hay más posibilidad de que te salga una negra. Y en la máquina B hay menos bolas negras, y entre menos negras haya, más es la posibilidad de que te salga una blanca.

Figura 4.42. Respuesta de VII-E8 que elige el menor número de desfavorables. Compara de forma cualitativa (desfavorables –desfavorables)

I-A14, III-A7, III-A10, III-A32 y V-A26 señalan el número de casos desfavorables de cada conjunto pero no indican la diferencia específica entre éstos.

> I-A14 Conjunto 1. Pues conté en cada conjunto qué probabilidad había de perder y en el conjunto 1 sólo son 5 y en el 2 son 7 y yo digo que debe de elegir el 1 porque hay menos posibilidad de perder.

Figura 4.43. Respuesta de I-A14 que elige el menor número de desfavorables. Compara de forma cualitativa (desfavorables –desfavorables)

IV-1-A9 señala los casos favorables y desfavorables en un conjunto y queda implícita esta comparación y la que se da entre conjuntos. Cuando dice: “en la chica no porque son menos”, se refiere a que en la caja chica hay menos probabilidad de que salga pez, considerando el menor número de peces respecto al mayor número de peces de la caja grande, por lo que se infiere que aunque menciona los favorables, su elección final está en función de los desfavorables.

> I-A9 En la caja chica. Porque si en la grande hay 7 insectos y 9 peces tiene más probabilidad de que salgan peces y en la chica no porque son menos.

Figura 4.44. Respuesta de I-A9 que elige el menor número de desfavorables. Compara de forma cualitativa (desfavorables –desfavorables)

Cabe señalar que en IV-1-A7 se presenta esta misma relación pero sin indicar cantidades.

> IV-1-A7 Caja chica. Porque son más huevos de insectos en la caja grande, pero en la caja grande son más de peces que de insectos.

Figura 4.45. Respuesta de IV-1-A7 que elige el menor número de desfavorables. Compara de forma cualitativa (desfavorables –desfavorables)

III-A7, III-A10 y III-A32 señalan el número de casos posibles y favorables pero sólo como medio para obtener el número de casos desfavorables puesto que no lon consideran como factores que influyan para realizar su elección. Esto quizá se deba a que la situación III proporciona el número de casos posibles y favorables pero no así los desfavorables por lo que si la elección se basa en estos últimos, se debe encontrar la diferencia entre los primeros.

> III-A32 Loto millonario. En el loto millonario porque si apuestas en la lotería no convendría. Es que en el "loto millonario" si hay 6 participantes y ganan 2 sobrarían 4 perdedores. Y si juego en la lotería de 9 ganan 3 y sobrarían 6; es mejor en el "loto millonario" por que hay menos perdedores y en la lotería sobran más perdedores y en uno de esos perdedores podría estar yo ahí.

Figura 4.46. Respuesta de III-A32 que elige el menor número de desfavorables. Compara de forma cualitativa (desfavorables –desfavorables)

III-A10 utiliza un diagrama como medio para comparar; consideró el número de sectores pero no su tamaño.De haberlo visto, posiblemente su elección hubiera cambiado al notar que se trata de áreas iguales.

> III-A10 Loto millonario. Con el loto millonario por cada 6 que participan 2 reciben un premio. Porque seis de cada 2, perderían 4, y 9 de cada 3, perderían 6 y se quedarían sin premio muchas personas.

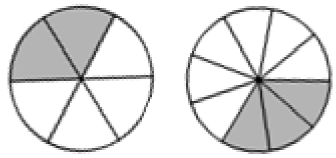


Figura 4.47. Respuesta de III-A10 que elige el menor número de desfavorables. Compara de forma cualitativa (desfavorables –desfavorables)

En cuanto a VIII-A35 obtiene la fracción de desfavorables respecto a los posibles, pero elige con base en el menor numerador, sin considerar que los denominadores de las fracciones comparadas son diferentes.

- Consideración de casos posibles. Se comparan los casos posibles (véanse las expresiones v, vi, vii y viii del cuadro 8) y se realiza la elección con base en su mayor, menor o igual número.

Elección con base en el mayor número de casos posibles

Estrategia: Relación entre todo con todo.

Relación de orden: Posibles ⟷ Posibles.

Se presentó esta estrategia en: I-A11, III-A9, V-A9, V-A28, V-A32 y VII-A7.

VII-A7 Máquina A. Porque hay más pelotas que en la (B).

Figura 4.48. Respuesta de VII-A7 que elige el mayor número de posibles. Compara de forma cualitativa (posibles –posibles)

VII-A7 basa su elección en el mayor número de casos posibles, pero no indica las cantidades involucradas en su comparación o si realizó algún conteo para hacer su elección.

I-A11 señala los casos favorables y desfavorables de un conjunto pero sólo como medio para encontrar los casos posibles y queda implícita la comparación de los posibles del conjunto 2 con los posibles del conjunto 1.

I-A11 Conjunto 2. Yo escogí el conjunto 2 porque son 7 de pierde y 7 de gana y yo sumé 7 más 7 y tendría 14 intentos para ganar, dependiendo de lo que saque.

Figura 4.49. Respuesta de I-A11 que elige el mayor número de posibles. Compara de forma cualitativa (posibles –posibles)

III-A9 y V-A32 señalan los casos posibles y favorables que se les presentan en las situaciones III y V, respectivamente, pero sólo consideran a los casos posibles para realizar su elección, es decir, eligen el mayor número de éstos. V-A32 además ilustra sus comparaciones con gráficas de barras y rectas numéricas.

> III-A9 Lotería. Según yo en la lotería. Porque si por cada 9, 3 reciben un premio y en la de 6, 2, en la de 9 tenemos más probabilidad ya que hay más boletos y en cada boleto que sale tenemos la probabilidad de que salga.

Figura 4.50. Respuesta de III-A9 que elige el mayor número de posibles. Compara de forma cualitativa (posibles –posibles)

V-A28 señala los casos favorables, desfavorables y posibles en el primer conjunto además de la probabilidad de los favorables en el mismo y representa de forma gráfica a cada conjunto pero sólo considera a los casos posibles para realizar su elección, para ello elige el mayor número de éstos.

> V-A28 Grupo A. En el grupo A es el que tiene más probabilidad de que tengan a un niño que elijan que le guste el futbol soccer. Porque en el grupo A de 28 a 21 les gusta el soccer y a 7 el basquetbol y si al elegir al azar 1 alumno del grupo A tendrían una probabilidad de 21 de 28 de que le guste el futbol soccer. Si eligen un alumno al azar del grupo A como son más alumnos que en el grupo B tendrían una mayor probabilidad de que al niño que elijan le guste el futbol soccer.

Figura 4.51. Respuesta de V-A28 que elige el mayor número de posibles. Compara de forma cualitativa (posibles –posibles)

V-A9 señala los casos posibles, favorables y desfavorables en el primer conjunto pero sólo considera a los casos posibles para realizar su elección, para ello elige el mayor número de éstos.

Elección con base en el menor número de casos posibles

Estrategia: Relación entre todo con todo.

Relación de orden: Posibles $\longleftrightarrow$ Posibles.

Se presentó esta estrategia en: I-A9, I-A23 y I-A28. III-A6, III-A15, III-A23, IV-1-27, IV-1-29, IV-1-32, IV-1-35, VI-1-A15 y VI-A-A33.

> III-A15 Loto millonario. Vi con cuál sorteo hay menos personas y hay más probabilidad para ganar. Porque hay menos personas.

Figura 4.52. Respuesta de III-A15 que elige el menor número de posibles. Compara de forma cualitativa (posibles –posibles)

I-A9, I-A23, I-A28, III-A15, IV-1-27, VI-1-A15 y VI-A-A33 basan su elección en el menor número de casos posibles de un conjunto respecto al otro conjunto, pero no indican las cantidades involucradas en su comparación o si realizaron algún conteo para hacer su elección y queda explícita la comparación de los posibles entre los conjuntos.

Aunque I-A23 menciona que se tiene el mismo número de casos favorables y desfavorables en el conjunto uno, queda implícita la comparación con el conjunto dos.

> I-A23 Conjunto 1. Porque aunque tiene las mismas cartas de ganar y perder tienen menos cartas y hay más probabilidades.

Figura 4.53. Respuesta de I-A23 que el menor número de posibles. Compara de forma cualitativa (posibles –posibles)

I-A28 y IV-1-35 muestran el número de casos favorables y desfavorables de cada conjunto pero esto no es considerado para su elección.

> I-A28 Conjunto 1. Yo digo que el 1 ya que son menos tarjetas y así tiene más probabilidades de ganar.

Conjunto 1	Conjunto 2
Pierde = 5	Pierde = 7
Gana = 5	Gana = 7

Figura 4.54. Respuesta de I-A28 que elige el menor número de posibles. Compara de forma cualitativa (posibles –posibles)

IV-1-29 señala que contó pero no refiere las cantidades y aunque alude a los favorables no los considera para su elección.

> IV-1-A29 Caja chica. Pues conté de la caja grande cuántos insectos había y en la caja chica cuántos había y en total cuántos huevos tenía la caja y mejor como la chica tenía menos huevos me fui por la caja chica.

Figura 4.55. Respuesta de IV-1-A29 que elige el menor número de posibles. Compara de forma cualitativa (posibles –posibles)

III-A6 y III-A23 señalan el número de casos posibles de cada conjunto pero no indican la diferencia específica entre ambos. III-A23 además muestra la cantidad de casos posibles y favorables de un conjunto para decir que tiene mayor probabilidad al tener menos casos posibles, pero queda implícita la comparación que establece con los casos posibles del otro conjunto.

III-A23 Loto millonario. Porque son 6 los participantes y dos los ganadores pero por ser menos los que participan es más probable ganar.

Figura 4.56. Respuesta de III-A23 que elige el menor número de posibles. Compara de forma cualitativa (posibles –posibles)

III-A6 y IV-1-32 señalan los casos posibles y favorables de cada conjunto, pero realizan su elección considerando el menor de los primeros.

III-A6 Loto millonario. Me conviene participar con el que participan 6 y ganan 2 porque son menos que los que de 9 y ganan 3. Yo hice una comparación de el de 6 y luego el de 9 y no hay mucha probabilidad de ganar con los de 9 y con los de 6 sí.

Figura 4.57. Respuesta de III-A6 que elige el menor número de posibles. Compara de forma cualitativa (posibles –posibles)

- Consideración de casos favorables y desfavorables. Se comparan los casos favorables y desfavorables (véanse las expresiones i, ii, iii, iv o ix, x, xi y xii del cuadro 8) y se realiza la elección con base en su mayor, menor o igual número.

Elección con base en la diferencia igual "mayor en cada conjunto"

Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.

Relación de orden: Favorables $\longleftrightarrow$ Desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: IX-A11 y IX-A21.

IX-A21 Cualquiera. Por que en las 2 tienen más canicas negras que blancas.

Figura 4.58. Respuesta de IX-A21 que elige la diferencia igual "mayor en cada conjunto". Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

IX-A11 y IX-A21 señalan que en las dos bolsas hay más casos favorables pero IX-A11 realiza esta comparación implícitamente con los casos desfavorables y IX-A21 lo hace explícitamente. Ninguno refiere cantidades o si realizaron algún conteo para hacer su elección.

Este tipo de elecciones se presenta cuando dados dos conjuntos el número de casos favorables de cada uno es mayor al número de casos desfavorables y la diferencia específica entre casos favorables y desfavorables de cada conjunto puede ser la misma o distinta.

Elección con base en la diferencia igual "menor en cada conjunto"

***Estrategia**:* Relación dentro Parte y parte con parte y parte.

Relación de orden: Favorables $\longleftrightarrow$ Desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: IV-1-A20.

IV-1-A20 Ambas cajas. Tienen menos huevos de insectos.

Figura 4.59. Respuesta de IV-1-A20 que elige la diferencia igual "menor en cada conjunto". Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

IV-1-A20 señala que el número de casos favorables en ambos conjuntos es menor a los desfavorables respectivamente entonces tienen la misma probabilidad.

Elección con base en el mayor número de casos favorables y desfavorables.

Estrategia: Relación entre Parte con parte y parte con parte.

Relación de orden: $\begin{cases} \text{Favorables} \longleftrightarrow \text{Favorables} \\ \text{Desfavorables} \longleftrightarrow \text{Desfavorables} \end{cases}$

Se presentó esta estrategia en: I-A3, I-A4, I-A8, I-A29 y VII-A22.

I-A3 Conjunto 2. Pues el que tiene conjunto 2 porque tiene más tarjetas que dicen gana como también dice pierde.

Figura 4.60. Respuesta de I-A3 que elige el mayor número de casos favorables y desfavorables. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables entre conjuntos)

I-A3 basa su elección en el mayor número de casos favorables y desfavorables en un conjunto respecto al otro conjunto, pero no indica las cantidades involucradas en su comparación o si realizó algún conteo para hacer su elección. Además queda implícito que compara los casos favorables y desfavorables de la urna con los del conjunto uno.

I-A4 señala que contó pero no refiere las cantidades. I-A8 anota las cantidades [7 y 7, respectivamente] para los casos favorables y desfavorables de un conjunto pero no indica la diferencia específica entre ambos conjuntos. De esta manera, queda implícito que se están comparando éstos con los del conjunto uno.

I-A8 Conjunto 2. El conjunto 2 porque tiene más posibilidades de que al voltear una tarjeta le salga gana o que salga pierde ya que son 7 tarjetas de gana y 7 de pierde y está equilibrado el conjunto 2.

Figura 4.61. Respuesta de I-A8 que elige el mayor número de casos favorables y desfavorables. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables entre conjuntos)

I-A29 indica las cantidades 5 y 5, y 7 y 7, respectivamente para los casos favorables y desfavorables de cada conjunto pero no así la diferencia específica entre ambos conjuntos.

I-A29 Conjunto 2. Pues tendría mayor probabilidad de ganar en el conjunto 2. Bueno, pues yo conté el conjunto 1 y me di cuenta que tenía sólo 5 tarjetas con las que ganaba y cinco con las que perdía, en el conjunto 2 con 7 ganaba y 7 perdía así es que me fui al conjunto 2.

Figura 4.62. Respuesta de I-A29 que elige el mayor número de casos favorables y desfavorables. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables entre conjuntos)

Elección con base en la diferencia mayor

Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.

Relación de orden: Favorables⟷Desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: II-1-A1, II-1-A5, II-1-A8, II-1-A9, II-1-A13, II-1-A15, II-1-A21, II-1-A22, II-1-A24, II-1-A27, II-1-A28, II-1-A29, II-1-A30, II-1-A32, II-1-A33, II-1-A35 y X-1-A32.

II-1-A30 Urna. La urna ya que tiene más bolas blancas que negras y la probabilidad es mayor que la ruleta ya que tiene el mismo número de sectores blancos y negros.

Figura 4.63. Respuesta de II-1-A30 que elige la diferencia mayor. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

II-1-A5, II-1-A8, II-1-A9, II-1-A15, II-1-A21, II-1-A22, II-1-A24, II-1-A30 y II-1-A33 eligen con base en el mayor número de casos favorables y menor numero de casos desfavorables de un conjunto respecto al igual numero de casos favorables y desfavorables del otro conjunto que presenta la situación II , pero no indican las cantidades involucradas en su comparación o si realizaron algún conteo para hacer su elección.

Además en II-1-A8, II-1-A9, II-1-A33, II-1-A21 y II-1-A30 queda explícito que hubo una comparación entre los casos favorables y desfavorables de la urna con los de la ruleta. Pero en II-1-A5, II-1-A15, II-1-A22 y II-1-A24 queda explícito que hubo una comparación entre los casos favorables y desfavorables de la urna, y queda implícita la comparación de estos con los de la ruleta. Por lo que nos deja a la expectativa de qué tipo de relaciones establecieron con ésta, si es que lo hicieron. Desde nuestra perspectiva, al señalar que hay más blancas que negras, hay un punto de referencia, que es el otro conjunto que se diseñó con la finalidad de que no se tuviera un mayor o menor número de casos favorables si no que fuera igual.

II-1-A15 Urna. En la urna porque hay más bolas blancas que negras y hay más probabilidad de ganar.

Figura 4.64. Respuesta de II-1-A15 que elige la diferencia mayor. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

Además II-1-A22 hace su elección con base en el mayor número de casos favorables de un conjunto pero queda implícita esta comparación respecto al menor número de casos desfavorables del mismo conjunto y el igual número de casos favorables y desfavorables del otro conjunto.

II-1-A22 Urna. Pues porque en la urna hay más bolitas blancas.

Figura 4.65. Respuesta de II-1-A22 que elige la diferencia mayor. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

II-1-A1, II-1-A27 y II-1-A29 señalan que contaron pero no refieren las cantidades. II-1-A1 cuenta los favorables y desfavorables de cada conjunto, señala que el segundo conjunto tienen más favorables aunque deja implícita la comparación de estos con los desfavorables del mismo conjunto y la igualdad de casos favorables y desfavorables que presenta el primer conjunto.

> II-1-A1 Urna. Conté cuántos espacios y bolas tiene [son] blancas y [son] negras pero la que tiene más blancas es la urna.

Figura 4.66. Respuesta de II-1-A1 que elige la diferencia mayor. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

II-1-A29 cuenta los favorables de cada conjunto, señala que el segundo conjunto tienen más favorables aunque deja implícita la comparación de estos con los desfavorables del mismo conjunto y la igualdad de casos favorables y desfavorables que presenta el primer conjunto.

> II-1-A29 Urna. Pues primero conté el sector blanco de la ruleta y creí que esa era pero después conté la de la urna y me convencí que era la urna porque tiene más bolas blancas.

Figura 4.67. Respuesta de II-1-A29 que elige la diferencia mayor. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

II-1-A27 sí menciona la comparación de casos desfavorables y favorables del segundo conjunto aunque deja igualmente implícita la comparación con el primer conjunto.

> II-1-A27 Urna. Pues en la urna porque hay menos negras y más blancas. Pues contando las partes blancas y después conté las partes negras.

Figura 4.68. Respuesta de II-1-A27 que la diferencia mayor. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

II-1-A13, II-1-A28, II-1-A32 y II-1-A35 señalan las cantidades 7 y 7, y 5 y 4, respectivamente, para los casos favorables y desfavorables de cada conjunto pero no indican la diferencia específica entre ambos conjuntos ni en el conjunto elegido.

> II-1-A35 Urna. Porque en la ruleta hay 7 blancas y 7 negras, y en la urna hay 5 blancas y 4 negras. Por lo tanto, en la urna hay mayor posibilidad de que salga una bola blanca.

Figura 4.69. Respuesta de II-1-A35 que elige la diferencia mayor. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

II-1-A13 además utiliza en forma de cociente la representación de los casos favorables y desfavorables de cada conjunto, sólo para mostrar qué elementos los conforman.

> II-1-A13 Urna. Tiene más posibilidades de ganar la urna porque tiene 4 bolitas negras y 5 blancas. Pues conté las bolitas blancas y negras de la urna e hice lo mismo con la ruleta.
>
> Ruleta $\frac{7}{7}$ Urna $\frac{5}{4}$ $\begin{matrix}\text{Blancas}\\ \text{Negras}\end{matrix}$

Figura 4.70. Respuesta de II-1-A13 que elige la diferencia mayor. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

X-1-A32 estima cualitativamente la diferencia entre favorables y desfavorables de cada conjunto.

> X-1-A32 Bolsa grande. En la bolsa grande 20 chocolates. Porque de la bolsa grande son 20 chocolates y supongamos que de 20 chocolates son más de la mitad con relleno de fresa y en la bolsa chica son 15 y son menos de la mitad y puede que en la chica te toque con limón el relleno y en la grande con fresa.

Figura 4.71. Respuesta de X-1-A32 que elige la diferencia mayor. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

Elección considerando diferencia igual

Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.

Relación de orden: Favorables ⟷ Desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: I-A16, I-A25, I-A26 y I-A35.

> I-A35 Cualquiera.
>
> | Conjunto 1 | Conjunto 2 |
> |---|---|
> | 5 gana - 5 pierde | 7 gana - 7 pierde |
>
> De cualquiera de los 2 porque los 2 tienen la misma cantidad de tarjetas con la palabra gana que con la palabra pierde.

Figura 4.72. Respuesta de I-A35 que elige la diferencia igual. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

I-A16, I-A25, I-A26 y I-A35 comparan ambos conjuntos y determinan que en cada conjunto se tiene igualdad de casos favorables y desfavorables. I-A16 y I-A35 señalan el número de casos favorables y desfavorables de cada conjunto que obtuvieron de las tarjetas mostradas en la situación I e indican que ambos tienen la misma cantidad (de favorables y desfavorables en cada conjunto y no entre conjuntos), sin embrago, no señalan la diferencia nula que presenta cada conjunto entre casos favorables y desfavorables.

I-A25 aunque señala los casos posibles, no es un factor que influye para hacer su elección.

I-A25 Ninguno. Ninguno, en los 2 hay las mismas posibilidades de perder como de ganar porque en un conjunto hay 10 tarjetas y en [el] otro 14 tarjetas pero la mitad de cada conjunto de tarjetas son perder y ganar; es la misma situación de los 2 conjuntos.

Figura 4.73. Respuesta de I-A25 que elige la diferencia igual. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

I-A26 menciona el número de casos desfavorables y favorables de cada conjunto así como sus porcentajes correspondientes. Aunque I-A26 pudo quedar en la comparación por cociente, se incluyó en la cualitativa por diferencia igual porque en su argumento especifica la comparación de favorables y desfavorables pero no explicita que esta comparación se deriva de las cantidades mostradas y además no incluye a los porcentajes que muestra.

I-A26 Cualquiera.

Conjunto 1		Conjunto 2	
P5	G5	P7	G7
50%	50%	50%	50%

En el que sea por que los dos conjuntos tienen el mismo número de fichas de gana y pierde.

Figura 4.74. Respuesta de I-A26 que elige la diferencia igual. Compara de forma cualitativa (favorables –desfavorables)

- Consideración de casos favorables y casos posibles. Se comparan los casos posibles con los favorables (véanse las expresiones i, iii, v, vi, vii, viii o xiii, xiv, xv y xvi del cuadro 2) y se realiza la elección con base en el mayor, menor o igual número de casos posibles y casos favorables.

Elección del mayor número de casos posibles y mayor número casos favorables.

Estrategia: Relación entre Todo con todo y parte con parte.

Relación de orden: Posibles ⟷ Posibles
Favorables ⟷ Favorables

Se presentó esta estrategia en: I-A15, IV-1-A34, V-A10, V-A14, V-A18 y V-A34.

I-A15 y IV-1-A34 no mencionan cantidades o si realizaron algún conteo y queda implícita la comparación de los posibles y favorables de un conjunto con los posibles y favorables del otro conjunto. V-A10 sólo menciona el número de posibles del conjunto A.

V-A10 Grupo A. En el grupo A, que está conformado por 28 alumnos, porque hay mayor probabilidad de que del grupo A gane ya que tiene más alumnos y de esos alumnos la mayoría eligió futbol soccer ya que [al elegir] al azar a un grupo [alumno] hay más posibilidad de que practiquen el futbol soccer.

Figura 4.75. Respuesta de V-A10 que elige el mayor número de casos posibles y favorables. Compara de forma cualitativa (posibles y favorables entre cada conjunto)

V-A14 además realiza tablas donde representa los casos posibles, favorables y desfavorables, pero sólo considera los dos primeros para sus comparaciones.

V-A14 Grupo A. En el grupo A, pues sólo bien [vi] la cantidad del grupo que le gusta el futbol soccer y viendo el otro, luego vi que en el grupo A les gusta más el futbol soccer que en el B.

Grupo A	Deporte	Alumnos	
28 alumnos	Basquetbol	7	
	Futbol soccer	21	Total 28

Grupo A	Deporte	Alumnos	
24 alumnos	Basquetbol	6	
	Futbol soccer	18	Total 24

A parte por que hay más cantidad de alumnos en le grupo "A" que en el "B".

Figura 4.76. Respuesta de V-A14 que elige el mayor número de casos posibles y favorables. Compara de forma cualitativa (posibles y favorables entre cada conjunto)

V-A18 menciona las cantidades de casos favorables y posibles pero no explicita las diferencias. V-A34 hace su elección con base en el mayor número de casos favorables y posibles pero no explicita las cantidades

Elección con base en la diferencia igual "mayor y menor"

Mayor número de casos posibles y mayor número casos favorables.

Menor número de casos posibles y menor número casos favorables.

Estrategia: Relación dentro Parte y todo con parte y todo.

Relación entre Parte con parte y todo con todo.

Relación de orden: Favorables ⟷ Posibles

Posibles ⟷ Posibles

Favorables ⟷ Favorables

Se presentó esta estrategia en: III-A11.

> III-A11 Con los dos ganarían y tendrían la misma posibilidad. Porque con el loto súper millonario son 6, y 2 ganan; con la lotería son 9, y ganan 3 y porque en las dos en una es más y en una es menos tendría las mismas posibilidades.

Figura 4.77. Respuesta de III-A11 que elige la diferencia igual "mayor y menor". Compara de forma cualitativa (favorables –posibles)

III-A11 deja en la incertidumbre las relaciones que establece, debido a que, por la situación, y por lo que señala el estudiante respecto a que en una es más y en una es menos podría presentarse: *(1)* que se refiera a que en la lotería hay más posibles y más favorables respecto a los posibles y favorables del loto que presenta menos posibles y menos favorables respecto a la lotería; o *(2)* que se refiera que el seis es más que dos y nueve más que tres, es decir, el número de casos posibles en cada conjunto es mayor al de favorables.

Elección del menor número de casos posibles y menor número casos favorables

Estrategia: Relación entre Todo con todo y parte con parte.

Relación de orden: $\begin{cases} \text{Posibles} \longleftrightarrow \text{Posibles} \\ \text{Favorables} \longleftrightarrow \text{Favorables} \end{cases}$

Se presentó esta estrategia en: III-A28.

> III-A28 Loto millonario. En el loto millonario ya que tendría mayor probabilidad de ganar. Porque si son 2 concursos y me meto en ambos 2 veces sería así.
>
> Loto millonario.
>
> 12 participantes y ganan 4 - mejor probabilidad de ganar.
>
> 18 participantes y ganan 6- menor probabilidad de ganar.

Figura 4.78. Respuesta de III-A28 que elige el menor número de casos posibles y favorables. Compara de forma cualitativa (posibles-favorables)

III-A28 obtiene múltiplos al duplicar los casos posibles y favorables de cada conjunto y como no indica la diferencia entre conjuntos o entre los casos posibles y favorables de los conjuntos, consideramos su elección se da con base en el menos número de casos posibles y favorables de un conjunto respecto al otro. Es de señalar que si hubiera continuado quizá pudo haber llegado a encontrar relaciones como las que mostramos en III-A18 cuando realizó su elección cualitativa con base en el mayor número de casos favorables.

- Consideración de casos desfavorables y casos posibles. Se comparan los casos desfavorables y posibles (véanse las expresiones ii, iv, v, vi, vii, viii o xvii, xviii, xix y xx del cuadro 8) y se realiza la elección con base en el menor o mayor número de casos desfavorables y casos posibles.

Elección del menor número de casos posibles y menor número casos desfavorables

Estrategia: Relación entre Todo con todo y Parte con parte.

Relación de orden: $\begin{cases} \text{Posibles} \longleftrightarrow \text{Posibles} \\ \text{Favorables} \longleftrightarrow \text{Favorables} \end{cases}$

Se presentó esta estrategia en: IX-A25.

IX-A25 Primera bolsa. La 1ra bolsa por que hay menos canicas blancas y en general sólo son 15 a comparación de la 2da que son 25.

Figura 4.79. Respuesta de IX-A25 que elige el menor número de casos posibles y desfavorables. Compara de forma cualitativa (posibles-favorables)

IX-A25 compara los casos desfavorables de cada conjunto y elige con base en el menor de ellos, también indica los casos posibles de cada conjunto y considera el menor para determinar su elección.

- Consideración de casos, casos favorables, casos desfavorables y casos posibles. Se comparan los casos favorables, desfavorables y posibles (combinación de las expresiones i-xx del cuadro 8) y se realiza la elección con base en si uno es mayor, menor o igual que otro.

Elección con base en el mayor número de casos posibles y mayor número de casos favorables y menor número de desfavorables

Estrategia: Relación dentro y entre Parte y todo con parte.

Relación de orden: Posibles ⟷ Favorables ⟷ Desfavorables

Se presentó esta estrategia en: II-1-A25.

II-1-A25 Urna. En el de la urna porque contiene 9 pelotas pero de esas 9, 5 son blancas y existen más posibilidades que salga una de color blanca. Observando y contando las partes blancas y negras de la ruleta y pues son un 50% a un 50% que toque un negro y un blanco y existen más posibilidades en la urna son 9 pelotas y la mayoría son blancas.

Figura 4.80. Respuesta de II-1-A25 que elige el mayor número de casos posibles y favorables y el menor número de desfavorables. Compara de forma cualitativa (posibles-favorables -desfavorables)

II-1-A25 señala las cantidades 9 y 5 para los casos posibles y favorables de un conjunto y las cantidades en porcentaje de los casos favorables y desfavorables del otro conjunto pero no indica la diferencia específica entre ambos conjuntos y en los mismos conjuntos.

Extrae de los posibles del segundo conjunto a los favorables y queda implícita la comparación del mayor número de favorables dentro de los posibles. Considera los casos favorables y desfavorables del primer conjunto y hace notar su igualdad por medio de porcentajes. Explicita la comparación del segundo conjunto respecto al primero, enfatizando el mayor número de favorables respecto a los posibles en el segundo conjunto.

Elección con base en el menor número de casos posibles y menor número de casos favorables y menor número de desfavorables

Estrategia: Relación entre y dentro Todo con todo y parte con parte.

Relación de orden: $\begin{cases} \text{Posibles} \longleftrightarrow \text{Posibles} \\ \text{Favorables} \longleftrightarrow \text{Desfavorables} \end{cases}$

Se presentó esta estrategia en: VII-A10.

VII-A10 implícitamente compara los casos posibles de los conjuntos y su elección la orienta al menor, y también queda implícita la comparación del menor número de favorables respecto a los desfavorables en el conjunto elegido, en comparación con el otro conjunto que presenta mayor número de casos desfavorables respecto a los posibles.

> VII-A10 Máquina B. Porque en la máquina B hay menos pelotas y hay una probabilidad de que le toque una bolita blanca ya que no son muchas. Y en la máquina A son muchas bolitas negras y hay menos posibilidad de que le toque bolita blanca.

Figura 4.81. Respuesta de VII-A10 que elige el menor número de casos posibles, favorables y desfavorables. Compara de forma cualitativa (posibles-favorables -desfavorables)

Elección con base en el menor número de casos posibles, mayor número de casos favorables y menor número de desfavorables

Estrategia: Relación dentro Todo con todo y parte con parte.

Relación de orden: $\begin{cases} \text{Posibles} \longleftrightarrow \text{Posibles} \\ \text{Favorables} \longleftrightarrow \text{Desfavorables} \end{cases}$

Se presentó esta estrategia en: V-A1.

V-A1 compara los casos posibles en ambos conjuntos, y en el conjunto donde hay menos posibles compara los favorables respecto a los desfavorables.

V-A1 Grupo B. Pienso que es por que hay menos alumnos pero más a los que les gusta jugar futbol soccer y pocos que les gusta el basquet.

Figura 4.82. Respuesta de V-A1 que elige el menor número de posibles y desfavorables y mayor número de favorables. Compara de forma cualitativa (posibles-favorables -desfavorables)

Conclusiones de la comparación cualitativa

En la comparación cualitativa, al igual que en la comparación cuantitativa por diferencia, existen elecciones correctas con base en estrategias que sólo son válidas para determinado tipo de situaciones y que por lo tanto no se pueden generalizar. Sin embrago, de igual manera lleva a construir o aplicar intuiciones correctas que pueden extrapolarse a situaciones donde no son aplicables.

Es importante comentar que las comparaciones cualitativas están presentes también en las comparaciones cuantitativas, pero en ocasiones de manera implícita, y aquí las clasificamos para mostrarlas explícitamente. Estudios como el de López (2003) muestran el análisis cualitativo en la resolución de problemas relacionados con proporcionalidad.

No obstante que en la comparación cualitativa la mayoría de los estudiantes no mostró argumentos numéricos donde se vieran las relaciones entre los elementos que consideraron para realizar su elección, y que por lo tanto pudieran quedar a la expectativa dichas relaciones, fue posible, en la mayoría de los casos, interpretar las relaciones establecidas por los estudiantes con base en el diseño de las situaciones, por ejemplo:

En las situaciones I y II, cuando se dice: “el conjunto 2 porque hay más favorables”, se entiende que la comparación se dio sólo entre los favorables de los conjuntos, por lo que no puede confundirse con otras comparaciones como la de los favorables con los desfavorables, puesto que en la situación I el número de favorables y desfavorables de cada conjunto es el mismo. Y en la situación II el número de favorables es mayor al de desfavorables sólo en el conjunto 2, sin embargo, ésto es omitido porque eligen el conjunto

1 que presenta igual número de favorables y desfavorables, pero mayor número de favorables respecto al conjunto 2.

En la situación III es imprescindible que se expliciten los casos (favorables, desfavorables o posibles) que se estén comparando. De otra manera puede llevar a interpretaciones erróneas cuando las comparaciones que se realizaron quedan implícitas, por ejemplo, decir que hay más probabilidad en un conjunto "porque hay seis más y en el otro sólo cuatro", puede interpretarse que en la comparación realizada se consideró la diferencia entre los posibles y favorables, pero señalar que en un conjunto hay más probabilidad porque hay una tercera parte de ganadores no es suficiente, porque el otro conjunto también presenta una tercera parte.

En la situación IV queda claro que cuando los estudiantes comentan "porque hay más insectos", es porque compararon los casos favorables de ambos conjuntos y no puede confundirse con otras comparaciones porque el número de desfavorables es mayor en cada situación y la diferencia entre los favorables y los desfavorables es la misma.

En las situaciones V, VIII y IX cuando se elije el mayor número de casos favorables, debe explicitarse a los favorables de ambos conjuntos, de otra manera, comparaciones implícitas pueden mal interpretarse si sólo se menciona que se eligió con base en el mayor número de favorables, pues no se sabría si la comparación sólo fue entre favorables o también se consideró a los desfavorables o posibles, debido a que por el diseño de las situaciones, hay más favorables que desfavorables en ambos conjuntos, hay más favorables dentro de los posibles y más favorables en un conjunto que en otro. Además que podría presentarse algo similar a lo descrito en la situación III. Las situaciones I, V y IX corresponden a las que presentan proporcionalidad, esto quizá sea un factor por el que se tengan que explicitar las comparaciones para que no se presenten malas interpretaciones sobre el tipo de comparaciones realizadas. En la situación VIII cuando se señala que hay más probabilidad porque la fracción es mayor, debe explicitarse porqué la consideran mayor o a qué se refieren con mayor, puesto que si no se hace así, no se sabría la interpretación que se le esté dando a la fracción o a sus elementos, por ejemplo, considerar que una fracción es mayor que otra si al comparar numeradores, uno es mayor, dejando de lado a los denominadores, o viceversa, si se comparan denominadores.

En las situaciones VI y VII cuando se elige con base en el mayor número de casos favorables queda entendido que sólo implican a los casos favorables de ambos conjuntos porque hay mayor número de desfavorables en cada conjunto, y en consecuencia, menor número de favorables dentro de los posibles.

En la situación X cuando se elige con base en el mayor porcentaje, se da como resultado una elección correcta porque el trabajo con ellos implica ya un trabajo con los posibles. No obstante, se debe considerar si los alumnos comprenden esta relación y por lo tanto lo que significa el porcentaje (como relación entre dos cantidades) o sólo es otra interpretación de considerar el mayor número de favorables de un conjunto (considerar al porcentaje) como un número y no como una razón.

Las características de las situaciones diseñadas son fundamentales para la interpretación de las comparaciones cualitativas pues sin ellas se puede mal interpretar, en la mayoría de los casos, debido a la carencia de argumentos numéricos que justifiquen las relaciones establecidas, así como lo que los alumnos consideran para sus elecciones.

Cuando se realizan las diferencias en las comparaciones cuantitativas (donde se precisa numéricamente la diferencia) o cualitativa (donde no se precisa) en las expresiones que se establecen en el cuadro 2, se puede presentar que: *(1)* a un entero mayor se le reste un entero menor, *(2)* que a un entero se le reste el mismo entero y *(3)* que a un entero menor se le reste un entero mayor. De aquí la importancia de señalar las relaciones de orden, que en el caso particular de la resta, el orden (al considerar dos números, uno para el minuendo y otro para el sustraendo) cambia el resultado obtenido si se considera el valor relativo de la diferencia cuando el minuendo y el sustraendo son diferentes, pero no así si se considera el valor absoluto de la diferencia. El valor absoluto y relativo de la diferencia quedó, en la mayoría de los casos, implícito en las comparaciones que los alumnos mostraron. Por ello fue conveniente incluir en algunos casos el orden bidireccional en las relaciones que se establecieron con los casos favorables, desfavorables y posibles. Además que el diseño de las situaciones influyó en el orden que los alumnos consideraron donde pueden presentarse cuestiones como:

- Favorables > Desfavorables en ambos conjuntos
- Favorable < Desfavorables en ambos conjuntos
- Favorables = Desfavorables en ambos conjuntos

Piaget, Noelting y Alatorre ya han dado cuenta de este tipo de combinaciones para el diseño de situaciones (véanse los capítulos II y III).

Cuadro 12. Resumen del tipo de elección, las estrategias y la relación de orden identificadas en la comparación cualitativa

<table>
<tr><td colspan="3">Comparación cualitativa
▪ Consideración de casos favorables
▪ Consideración de casos desfavorables
▪ Consideración de casos posibles
▪ Consideración de casos favorables y casos desfavorables
▪ Consideración de casos favorables y casos posibles
▪ Consideración de casos desfavorables y casos posibles
▪ Consideración de casos favorables, desfavorables y posibles</td></tr>
<tr><td>Elección</td><td>Estrategia</td><td>Relación de orden</td></tr>
<tr><td>Mayor número de casos favorables

Menor número de casos favorables</td><td>Relación entre parte con parte</td><td>Favorables ⟷ Favorables</td></tr>
<tr><td>Menor número de casos desfavorables</td><td>Relación entre parte con parte</td><td>Desfavorables ⟷ Desfavorables</td></tr>
<tr><td>Mayor número de casos posibles

Menor número de casos posibles</td><td>Relación entre todo con todo</td><td>Posibles ⟷ Posibles</td></tr>
<tr><td>Diferencia igual “mayor en cada conjunto”

Diferencia igual “menor en cada conjunto”

Mayor número de casos favorables y desfavorables

Diferencia mayor

Diferencia igual</td><td>Relación dentro parte y parte con parte y parte

Relación entre parte con parte y parte con parte</td><td>Favorables ⟷ Desfavorables

Favorables ⟷ Favorables
Desfavorables ⟷ Desfavorables</td></tr>
</table>

[Continúa]

Cuadro 12. [Concluye]

Mayor número de casos posibles y mayor número de casos favorables Diferencia igual "mayor y menor": mayor número de posibles mayor número de favorables y menor número de posibles menor número de favorables Menor número de casos posibles y menor número de casos favorables	Relación entre todo con todo y parte con parte Relación dentro parte y todo con parte y todo	{ Posibles ⟷ Posibles Favorables ⟷ Favorables } Favorables ⟷ Posibles
Menor número de casos posibles y menor número de casos desfavorables	Relación entre Todo con todo y Parte con parte	{ Posibles ⟷ Posibles Desfavorables ⟷ Desfavorables }
Mayor número de casos posibles y mayor número de casos favorables y menor número de desfavorables Menor número de casos posibles y menor número de casos favorables y menor número de desfavorables Menor número de casos posibles, mayor número de casos favorables y menor número de desfavorables	Relación dentro y entre Parte y todo con parte Relación entre y dentro todo con todo y parte con parte.	Posibles ↕ Favorables ↕ Desfavorables { Posibles ⟷ Posibles Favorables ⟷ Desfavorables }

4.3.- Comparación Extra-matemática. Depende de un factor externo y no matemático como en las comparaciones numéricas o cualitativas. Las relaciones que se establecen se basan en consideraciones personales, la suerte o la manipulación.

Elección con base en la distribución (percepción) de los casos favorables y desfavorables

Distribución de los elementos de los conjuntos. En orden uno y uno.

Se presentó esta estrategia en: I-A10, I-A24 y I-A31.

> I-A10 Conjunto 1. Porque primero pierde después gana y así sucesivamente hasta que la tarjeta salga gana y así hay una probabilidad de que gane.

Figura 4.83. Respuesta de I-A10 que muestra la percepción que tienen de los objetos

I-A10, I-A24 y I-A31 se basaron en el acomodo de las tarjetas en la situación e hicieron caso omiso a las indicaciones de su mezcla para que el juego fuera aleatorio. I-A24 además señaló la igualdad en el número de casos favorables y desfavorables de la situación, pero a diferencia de I-A10, eligió el segundo conjunto. I-A31 consideró que por el orden no debía elegir ninguno porque habría gran posibilidad de perder.

Distribución de los elementos de los conjuntos. En orden por hipótesis.

Se presentó esta estrategia en: IV-1-A3 y IX-A33.

> IV-1-A3 Caja grande. Porque supongo que primero están los 7 huevos de insectos.

Figura 4.84. Respuesta de IV-1-A3 que muestra la percepción que tienen de los objetos

Para el diseño de la situación IV se contempló proporcionar la cantidad de casos favorables y desfavorables e ilustrar mediante dibujos los casos posibles, pero no así la distribución de los que corresponden a los casos favorables y desfavorables, con la finalidad de favorecer la aleatoriedad al tomar un elemento del conjunto. Sin embargo, IV-1-A3 supone que en el segundo conjunto están primero siete casos favorables que corresponden a la mayor cantidad de ellos y realiza su elección con base en esta hipótesis.

IX-A33 Segunda bolsa. Sería la bolsa 2 por más bolitas negras si primero hay bolitas blancas y luego negras sería al final primero las blancas.

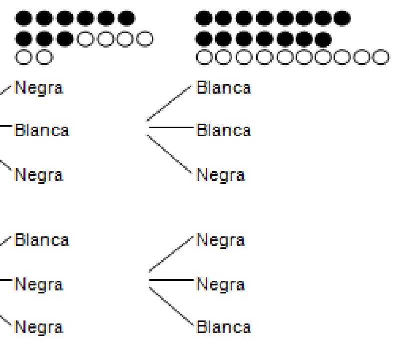


Figura 4.85. Respuesta de IX-A33 que muestra el orden de los objetos en su descripción en el enunciado.

Para el diseño de la situación IX se consideró subrayar el carácter azaroso de la extracción de una de las canicas conenidas en cualquiera de dos bolsas al describir estás como “negras”, para no atribuir el resultado a su distribución al interior de ellas (véase el Apéndice A). IX-A33 considera el mayor número de casos favorables y comenta que si primero se tienen los desfavorables y después los favorables estos últimos tienen más probabilidad de extraerse, es decir, combinó dos formas de realizar una elección: con base en el mayor número de casos favorables y la distribución de los casos favorables y desfavorables.

Distribución de los elementos de los conjuntos. Por la posición de los elementos.

Se presentó esta estrategia en: VII-A3, VII-A4, VII-A12, VII-A18, VII-A20, VII-A24, VII-A27, y VII-A33.

VII-A33 Máquina B. Por la posición que tiene la pelota blanca al depositar la máquina [moneda] es mayor posibilidad de que salga la bola blanca en la máquina B.

Figura 4.86. Respuesta de VII-A33 que muestra la percepción que tienen de los objetos

Para VII-A33 y VII-A3 la posición de un elemento favorable determina su elección. VII-A3 y VII-A27 además indican la cercanía del caso favorable con el orificio de salida. VII-A18 identifica que en el conjunto B hay menos casos posibles pero por la distribución de los elementos realiza su elección. VII-A20 considera la distribución de casos favorables y desfavorables en ambos conjuntos y señala que cerca del orificio de salida en uno de los conjuntos hay más desfavorables junto a los favorables y que en el otro es uno a uno, es decir, determina que hay mayor probabilidad en éste. VII-A24 identifica la posición de un caso favorable en relación con el hueco de salida y determina que al caer recto es seguro que se obtenga el color deseado. VII-A4 y VII-A12 consideran el mayor número de casos favorables pero en su elección también consideran la cercanía de un caso favorable con el orificio de salida.

Elección con base en la preferencia "moda" que se tiene de los casos favorables o desfavorables

Preferencia y moda de los casos favorables

Se presentó esta estrategia en: V-A6.

> V-A6 Grupo A. Porque muchos prefirieron futbol soccer y muy pocos basquetbol y pues el futbol ésta de moda y muchos lo juegan y sin en cambio el basquetbol casi no, y no hay probabilidad que elija basquetbol.

Figura 4.87. Respuesta de V-A6 que muestra la preferencia que tienen de los objetos

La elección de V-A6 se da porque los casos favorables están de moda, además de que hay más en comparación con los desfavorables.

Elección con base en la manipulación que se puede tener de los casos favorables o desfavorables

Manipulación de los elementos de los conjuntos: Para detectar los casos favorables.

Se presentó esta estrategia en: I-A22.

I-A22 Conjunto 1. Del conjunto uno porque como no son muchas se puede checar cuál agarrar.

Figura 4.88. Respuesta de I-A22 que muestra la manipulación de los objetos

I-A22 realiza su elección con base en el menor número de casos favorables para detectar y tomar uno, ignora la indicación de que no se puede conocer dónde quedaron los favorables una vez que fueran volteadas y revueltas las tarjetas.

Manipulación de los elementos de los conjuntos: Para determinar los casos favorables.

Donde se presentó esta estrategia fue en: II-1-A31.

II-1-A31 Ruleta. Porque al momento de girar la ruleta se puede apoyar en el color contrario para poder tirar al blanco.

Figura 4.89. Respuesta de II-1-A31 que muestra la manipulación que tienen los objetos

II-1-A31 con base en una experiencia o creencia considera que manipular de cierta forma un objeto [modelo generador de eventos aleatorios] puede llevar a que se obtenga un caso favorable.

Manipulación de los elementos de los conjuntos: Para distribuir los casos favorables y desfavorables.

Se presentó esta estrategia en: IV-1-A11.

IV-1-A11 Caja grande. Tomar de la caja grande porque en la caja grande hay 7 huevos de insectos y 9 de peces si vas poniendo de uno en uno en la caja grande hay más posibilidad.

Figura 4.90. Respuesta de IV-1-A11 que muestra la manipulación que tienen de los objetos

IV-1-A11 considera que si se acomodan los casos favorables y desfavorables en orden uno a uno entonces hay mayor probabilidad de extraer un caso favorable; omite el hecho de que no es posible conocer ni manipular su distribución.

Elección con base en la concepción que se tiene de sí mismo, de los juegos de azar o de las opciones implicadas

Se tienen dos casos: el que considera que siempre va a ganar; y el que considera que nunca va a ganar. Esto posiblemente sea por la concepción que se tienen de sí mismos, de los juegos o de las opciones implicadas por experiencia positiva o negativa que hayan tenido.

Concepción: De sí mismo.

Se presentó esta estrategia en: III-A5.

> III-A5 Ambos. Yo participaría con los dos. Bueno pues participo con los dos y puede que con los dos gane el premio. Y si no gano el premio en los dos pues en una debo de ganar el premio y en cualquiera ganaría un premio.

Figura 4.91. Respuesta de III-A5 que muestra la concepción que tiene de sí mismo

III-A5 muestra completa seguridad en sí mismo “en una debo de ganar”.

Concepción: De los juegos.

Se presentó esta estrategia en: III-A3

> III-A3 Lotería. Con los de la lotería porque es más fácil ganar. Pues con la lotería ganas más fácil porque sólo es cosa de sacar los nombres que digan y en el loto millonario sólo es cosa de suerte.

Figura 4.92. Respuesta de III-A3 que muestra la experiencia que tienen de los juegos

III-A3 La seguridad radica en los juegos de azar y aunque alude a la suerte en el “loto” se va por la facilidad de ganar en la “lotería”.

Concepción: De las opciones implicadas.

Se presentó esta estrategia en: VIII-A33.

VIII-A33 Diurna. Podría ser que sea la diurna porque hay más ganancia al poder meterlos en la mañana y logran que cursen en 2 años o a mediados de primer grado.

Figura 4.93. Respuesta de VIII-A33 que muestra su experiencia con las opciones implicadas

La respuesta de VIII-A33 muy probablemente tenga que ver con la concepción que se tiene sobre las instituciones, por ejemplo, “el prestigio”.

Conclusiones de la comparación Extra-matemática

La comparación extra-matemática manifiesta otros factores que influyen en las decisiones de los sujetos, alejándolos de los razonamientos matemáticos. Entre estos factores se encuentran las experiencias positivas o negativas propias o que observan en su entorno y extrapolan o generalizan a otras situaciones. La manipulación de los modelos por parte de los estudiantes nos lleva a pensar que para ellos estos modelos no aseguran la aleatoriedad física. También sus gustos o preferencia, así como lo que predomina en su entorno son determinantes en sus decisiones. La tarea aquí radica en privilegiar el uso de razones matemáticas que guíen sus elecciones y desplazar estas creencias.

Cuadro 13. Resumen del tipo de elección con base en argumentos extra-matemáticos

Comparación Extra-matemática ▪ Consideración de casos favorables y casos desfavorables		
Elección	*Con base en la distribución de los casos favorables y desfavorables*	*Distribución de los elementos de los conjuntos.* En orden uno y uno *Distribución de los elementos de los conjuntos.* En orden por hipótesis *Distribución de los elementos de los conjuntos.* Por la posición de los elementos
	Con base en la preferencia "moda" que se tiene de los casos favorables o desfavorables.	*Preferencia y moda de los casos favorables*
	Con base en la manipulación que se puede tener de los casos favorables o desfavorables.	*Manipulación de los elementos de los conjuntos:* Para detectar los casos favorables *Manipulación de los elementos de los conjuntos:* Para determinar los casos favorables *Manipulación de los elementos de los conjuntos:* Para distribuir los casos favorables y desfavorables
	Con base en la concepción que se tiene de sí mismo, de los juegos de azar o de las opciones implicadas	*Concepción:* De sí mismo *Concepción:* De los juegos *Concepción:* De las opciones implicadas

Las respuestas a las situaciones planteadas no siempre es posible clasificarlas dentro de las categorías construidas porque muestran explicaciones parciales, erróneas o indecisiones que no podemos tomar en cuenta para incorporarlas a nuestras categorías y que por lo tanto las agrupamos por separado en el siguiente apartado.

4.4.- Sin clasificación. Se presenta cuando no hay un argumento que justifique la elección o este es incompleto, se tiene una doble elección o no se muestra alguna.

Elección que carece del ¿Por qué? o del ¿cómo? (con base en la consideración de los dos conjuntos)

Se presentó esta estrategia en: II-1-A16, III-A19, III-A13, III-A21, III-A24, III-A27, IV-1-A26, IV-1-A13, IV-1-A28, V-A8, V-A11, V-A22, V-A24, V-A31, VI-1-A4, VI-1-A6, VI-1-A7, VI-1-A18, VI-1-A24, VII-A13, VII-A28, VIII-A7, VIII-A14, VIII-A22, VIII-A26, VIII-A28, VIII-A29, VIII-A32, IX-A10, IX-A13, X-1-A4 y X-1-A29.

III-A27 Ambos. Pues las 2, porque en las 2 te dan la misma probabilidad de ganar. Y fui viendo en cuál tenía más posibilidad de ganar y me di cuenta de que en las 2 era la misma probabilidad.

Figura 4.94. Respuesta de III-A27 que carece del ¿Por qué? o del ¿cómo? realizó su elección

III-A27 aunque indica que ambos conjuntos tienen la misma probabilidad, no menciona las relaciones que estableció entre los casos favorables, desfavorables o posibles.

II-1-A16 Urna.

Ruleta	Urna
7 negras	4 negras
7 blancas	5 blancas

Figura 4.95. Respuesta de II-1-A16 que carece del ¿Por qué? o del ¿cómo? realizó su elección

II-1-A16, IV-1-A13, IV-1-A28, V-A8, V-A11, V-A31, VI-1-A6, VII-A13, VII-A28, VIII-A7, VIII-A22, VIII-A28, VIII-A29, IX-A10, IX-A13, X-1-A4 y X-1-A29 indican su elección y los casos favorables, desfavorables o posibles que se presentan o derivan de la situación, pero no así las relaciones que establecen para elegir. II-1-A16, IV-1-A13, V-A11, VII-A13 y IX-A10 señalan los casos favorables y desfavorables de cada conjunto, a diferencia de IV-1-A28 y VII-A28 que indican los casos favorables y posibles como resultado de contar los elementos del gráfico presentado en la situación. III-A13, III-A21,

III-A24, VIII-A7, VIII-A22, VIII-A26, VIII-A28, VIII-A29, IX-A13 y X-1-A29 indicaron los casos favorables y posibles presentados en la situación y mencionaron que se tendría más posibilidad de ganar en el conjunto dos que en el uno, sin embargo, no explicitaron las relaciones que establecieron para su elección. X-1-A4 presenta el número de casos favorables y desfavorables y menciona que utilizó la regla de tres para obtenerlos. VIII-A14 y VIII-A32 representan la información gráficamente en dos círculos donde le asignan un área sombreada a los casos favorables, es de señalar que VIII-A14 no dividió en sectores iguales un círculo. V-A8 repite los casos favorables, desfavorables y posibles que se le proporcionan en la situación para justificar su elección. VI-1-A7 menciona los casos posibles y desfavorables de un conjunto y los relaciona cualitativamente con los casos del otro conjunto.

IV-1-A26 Caja chica. Porque en la caja grande hay más huevos de peces al igual que en la caja chica pero hay más posibilidad en la caja chica.

Figura 4.96. Respuesta de IV-1-A26 sin argumentos que justifiquen su elección

IV-1-A26, V-A22, V-A24, VI-1-A6, VI-1-A18 y VI-1-A24 señalan su elección e indican que se presentan porque hay mayor probabilidad, relacionan algunos aspectos de la situación no otros. Indican que los casos favorables son más (que los desfavorables o posibles) pero no indican porqué consideran que en el primer conjuntos hay más probabilidad. V-A24, VI-1-A4 y VI-1-A6 repiten la información de la situación (número de casos favorables, desfavorables y posibles). V-A31, al igual que V-A24, repite la información pero no establece alguna relación que nos deje ver porqué de su elección.

III-A19 Ambos. Los 2. Por que si se saca el por ciento de probabilidad de ganar del loto millonario y la lotería sale igual.

Figura 4.97. Respuesta de III-A19 sin argumentos que justifiquen su elección

III-A19 señala que ambos conjuntos tienen el mismo porcentaje de probabilidad pero no los indica, por lo que no se sabria si en realidad los obtuvo.

Elección con argumentos que involucran a sólo un conjunto

Se presentó esta estrategia en: I-A34, II-1-A26, V-A5, V-A12, V-A20, VI-1-A3, VI-1-A5, VI-1-A12, VI-1-A13, VI-1-A22, VI-1-A26, VI-1-A28, VI-1-A34, VIII-A3, VIII-A5, VIII-A10, VIII-A11, VIII-A15, VIII-A19, VIII-A21, IX-A3, IX-A8, IX-A12, IX-A20, IX-A28, X-1-A5, X-1-A10, X-1-A12, X-1-A13, X-1-A18, X-1-A22 y X-1-A28.

> I-A34 Conjunto 2. Pues yo digo que en el conjunto número 2 porque es donde hay más probabilidad de ganar.

Figura 4.98. Respuesta de I-A34 que involucra a sólo un conjunto

I-A34, VIII-A3, VIII-A5, VIII-A15 y X-1-A5 señalan su elección e indican que se presenta porque hay mayor probabilidad (I-A34) o menor probabilidad (X-1-A5) pero no dicen el porqué se presenta, qué relaciones establecen o cómo llegan a esa conclusión. Ahora bien, no se podría saber si el término “probabilidad” los estudiantes lo utilizan como tal o es sinónimo de “posibilidad”.

V-A5, V-A12, IX-A12, IX-A20, IX-A28, X-1-A10 X-1-A12, X-1-A13, X-1-A18, X-1-A22 y X-1-A28 señalan los casos que componen a un conjunto sin considerar al otro, explicitan una diferencia cualitativa entre los casos favorables y desfavorables de este conjunto, pero queda en la incertidumbre cuáles fueron las relaciones que establecieron entre los conjuntos para hacer su elección. VIII-A10, V-A20, VI-1-A13 y VI-1-A28, a diferencia de los otros (mencionados en este párrafo), no establecen alguna relación cualitativa o cuantitativa.

VI-1-A5, VI-1-A34, IX-A3 y IX-A8 señalan la diferencia cualitativa entre los casos favorables y desfavorables de un conjunto pero no establecen relaciones con el otro conjunto, además la relación cualitativa que señalan también se presenta en el otro conjunto. VI-1-A26 señala la diferencia cualitativa aproximada sólo en un conjunto. VI-1-A12, VI-1-A3 y VI-1-A22 señalan esta misma diferencia pero anotan las cantidades involucradas (de los casos favorables y desfavorables).

II-1-A26 señala su elección y que contó los casos favorables y desfavorables en un conjunto pero no indica las cantidades o las relaciones que estableció. VIII-A19 señala que hizo la conversión de fracciones a decimales pero no lo muestra.

VIII-A11 y VIII-A21 consideran que en uno de los dos conjuntos la fracción es maás grande y que si se realiza la división (de los elementos de esta fracción) da mayor resultado, pero no explicitan qué comparaciones realizaron con el otro conjunto o a qué se refieren con “más grande”.

Elección con argumentos que contradicen a su elección

Se presentó esta estrategia en: IV-1-A14.

> IV-1-A14 Caja chica. Pues yo conté qué cantidad contenía cada caja y el número de huevos y contenidos que tenía y luego analicé que en la caja chica tenía menos huevos de peces y en la caja grande más pero tenía más huevos de insectos la grande que la chica.

Figura 4.99. Respuesta de IV-1-A14 con argumentos que contradicen su elección

IV-1-A14 señala que contó, aunque no indica cantidades, los casos posibles, favorables y desfavorables de cada conjunto. Compara los casos desfavorables de ambos conjuntos e Identifica el menor y compara el número de casos favorables e identifica al mayor y aunque elige muestra dos argumentos que se contraponen y no permite discernir el porqué de su elección.

Sin elección

Se presentó esta estrategia en: I-A21, IV-1-A31 y VIII-A24.

I-A21 [Sin elección]

Conjunto 1	Conjunto 2
5 Pierde	7 Pierde
5 Gana	7 Gana

Podría elegir pierde porque hay más posibilidades que salga aunque en los dos son las mismas tarjetas.

Figura 4.100. Respuesta de I-A21 con argumentos pero sin elección

I-A21 menciona que hay más posibilidades de que se obtenga un caso desfavorable, pero no señala si en un conjunto o en ambos, además se deduce que se da cuenta que cada conjunto tiene el mismo número de casos favorables y desfavorables.

IV-1-A31 no refiere elección alguna aunque señala que observó la cantidad de casos favorables y desfavorables, y queda la duda si esto lo hizo para un conjunto o para ambos. VIII-A24 sólo anota los datos de la situación pero no los relaciona y tampoco elige.

Doble elección

Se presentó esta estrategia en: III-A4, III-A8, II-1-A12, III-A33, III-A34 y IV-1-A33.

Aunque eligen un conjunto, en sus argumentos dejan explícita la posibilidad de elegir el otro conjunto sin reemplazar su primera elección.

III-A4 [Con dos respuestas]

1.- Ah pues yo elijo la del loto millonario porque habrá menos perdedores. Pues yo creo a lo mejor porque hay menos perdedores.

2.- Pero también pienso que ninguna de las dos. Pues creo que ninguna de las dos porque hay muchos participantes que [pueden] perder.

Figura 4.101. Respuestas de III-A4 a la situación III

III-A4 compara los casos desfavorables de ambos conjuntos y considera el menor de ellos. También señala que en ambos conjuntos los casos desfavorables son “muchos” por lo que no podría elegir alguna.

III-A8 elige el conjunto dos al comparar los casos favorables de ambos conjuntos y elige con base en el mayor de ellos. Y en su segundo argumento compara los casos posibles de ambos conjuntos y elige el conjunto donde el número de posibles es menor.

III-A33, III-A34 y IV-1-A33 eligen el conjunto dos, comparan implícitamente los casos favorables de ambos conjuntos y eligen el mayor. También comparan implícitamente los casos posibles y eligen el menor.

III-A33 Lotería. Fácil pensar en cuál posibilidad tenía de ganar y elegí la lotería, porque reciben más personas el premio, pero igual y pierdo porque hay más personas jugando.

(6 juegan 2 reciben)
(9 juegan 3 reciben)

Pero también puede que elija al loto millonario porque sólo juegan 6 y reciben 2 y puede que gane porque hay menos gente jugando y puede que reciba el premio.

Figura 4.102. Respuestas de III-A33 a la situación III

II-1-A12 elige el conjunto 1 porque la igualdad entre los casos favorables y desfavorables es la misma, aunque hay error de interpretación al considerar que se desea obtener un sector negro y no un blanco. Elige el conjunto 2 porque considera que hay más casos favorables pero hay error de conteo porque en el conjunto 2 se presenta mayor número de casos desfavorables.

Elección por error al contar

Se presentó esta estrategia en: I-A12, I-A20 II-1-A3, II-1-A4, IV-1-A1 y VII-A26.

I-A12 Conjunto 1. El primer conjunto tiene más probabilidad porque tiene más fichas de ganar que perder. El segundo conjunto porque tiene lo mismo de fichas: ganar y perder, son 7 y 7 fichas, total 14.

Figura 4.103. Respuesta de I-A12 con error al contar

I-A12 y I-A20 presentan su elección por error de conteo porque en la situación I se presenta el mismo número de casos favorables y desfavorables en cada conjunto, pero en sus argumentos presentan que el conjunto 1 tiene más casos favorables, queda implícito que se están comparando los favorables con los desfavorables del mismo conjunto. I-A12 además señala lo que se presenta en el otro conjunto en relación con los casos favorables, desfavorables y posibles.

II-1-A4 Urna. Yo creo que se extraiga una bola porque tiene más blancas que negras. Conté el número de sectores y de bolas y en la ruleta hay más negras que blancas y en el vaso hay más blancas.

Figura 4.104. Respuesta de II-1-A4 con error al contar

II-1-A3 y II-1-A4 presentan su elección por error de conteo. La situación II presenta, en el conjunto 1 el mismo número de casos favorables y desfavorables pero en su argumento II-1-A3 señala que en el conjunto 1 hay más casos favorables y lo elige, a diferencia de II-1-A4 que menciona lo contrario, es decir, que el conjunto uno tiene más desfavorables que favorables. También indica que el conjunto dos tiene más favorables, pero este conjunto presenta menos en comparación con los desfavorables.

IV-1-A1 Caja grande. De la caja grande pues sólo dividí [separé] los insectos de los peces y vi cuántos hay en cada caja y hay más probabilidad de que se saque un insecto aunque tengan la misma cantidad de insectos y de peces.

Figura 4.105. Respuesta de IV-1-A1 con error al contar

IV-1-A1 considera que en la caja grande se tienen la misma cantidad de casos favorables y desfavorables pero esto no es así, ya que en la situación IV se presenta diferente número de casos favorables y desfavorables en cada conjunto y entre conjuntos.

VII-A26 anota cantidades que no corresponden ni a los casos favorables o desfavorables de los conjuntos.

Elección por estimación incompleta

Se presentó esta estrategia en: IV-1-A25 y IV-1-A22.

IV-1-A25 Caja grande. Hay 7 huevos de insectos y 9 peces es casi la mitad de la caja que tiene más huevos de insectos.

Figura 4.106. Respuesta de IV-1-A25 por estimación incompleta

Aunque la estimación (cualitativa o cuantitativa) puede llevar a elecciones correctas, IV-1-A25 y IV-1-A22 no muestran elementos suficientes en sus respuestas que justifiquen su elección debido a que en la situación IV si se considera una estimación de la probabilidad, en ambos conjuntos los casos favorables se aproximan a la mitad de los posibles. IV-1-A25 sólo señala la estimación de la probabilidad en un conjunto y queda implícita la comparación de ésta con la del otro conjunto y IV-1-A22 estima la probabilidad de un conjunto y deja explícito que hubo una previa comparación entre los favorables de ambos conjuntos para estimar la probabilidad del conjunto con mayor número de éstos.

Elección con base en comparaciones con la recta numérica

Se presentó esta estrategia en: VII-A4, VII-A23 y VII-A27.

VIII-A23 Diurna. Una barra para saber quién tenía más probabilidad de quedarse en la mañana.

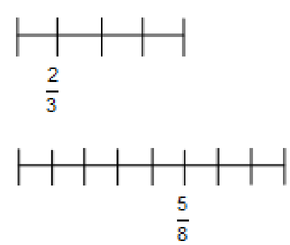


Figura 4.107. Respuesta de VIII-A23 que utiliza la recta numérica para comparar

VII-A4, VII-A23 y VII-A27 representan en dos segmentos distintos (considerados por VII-A4 y VII-A27 como líneas rectas) los datos proporcionados en la situación ($\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{8}$). Sin embargo, el tamaño de los segmentos no es el mismo, por lo que la comparación de $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{8}$ no los deja ver cuál es mayor, esto los lleva a realizar una elección incorrecta.

Elección por error de interpretación

Se presentó esta estrategia en: III-A14, IV-1-A15, IV-1-A8, IV-1-A12, IV-1-A21, VII-A15, VIII-A18, IX-A5 y X-1-A9.

> IV-1-A8 Caja grande. Que en la caja chica hay 6 huevos con peces y 4 huevos con insectos y así la caja chica tendrá más peces que insectos y con la grande sería lo contrario, tendría más insectos que peces.

Figura 4.108. Respuesta de IV-1-A8 con error de interpretación

IV-1-A8 y IV-1-A12 señalan que existen más favorables que desfavorables en el segundo conjunto, pero la situación presenta lo contrario, y su elección se da con base en el mayor número de favorables respecto a los desfavorables. Aunque IV-1-A8 interpreta correctamente los casos favorables y desfavorables del primer conjunto, no lo hace con el segundo conjunto. IX-A5, a diferencia de IV-1-A8, interpreta correctamente al segundo conjunto pero no al primero.

> IV-1-A15 Caja grande. Porque en la grande sólo hay dos huevos menos que contienen peces, así que hay más probabilidad que salgan en la caja grande.

Figura 4.109. Respuesta de IV-1-A15 con error de interpretación

IV-1-A15 señala que hay dos casos desfavorables menos en el segundo conjunto, pero en la situación se deja ver que en cada conjunto hay dos casos desfavorables más respecto a los favorables.

Aunque IV-1-A21 en sus relaciones numéricas muestra una correcta interpretación de los casos favorables, desfavorables y posibles, en su argumento del primer conjunto cambia a los favorables que son cuatro por nueve y esto lo lleva a considerar que existe una mayor diferencia en este conjunto entre los favorables y desfavorables y que por lo tanto elige con la menor diferencia al conjunto dos.

IV-1-A21 Caja grande. Debes elegir la caja grande. En la caja 1 son 9 insectos y 6 peces y en la 2 son 7 insectos y 9 peces. Debes elegir la 2 porque sólo son 2 peces de diferencia y en la 1 son 6.

Caja 1	Caja 2
4 - I	7 - I
6 - P	9 – P
Total 10	Total 16

Figura 4.110. Respuesta de IV-1-A21 con error de interpretación

III-A14 extrae de los posibles a los favorables y los suma para considerar esta suma como un todo del cual toma una cuarta parte que corresponde a los favorables, pero al hacer esto modifica la situación cambiando la proporción.

III-A14 Lotería. 1° Pues analicé que por cada premio sólo agarran una cuarta parte de las personas. 2° le restan.

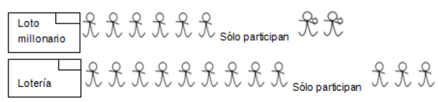


Figura 4.111. Respuesta de III-A14 con error de interpretación

X-1-A9 al aplicar la regla de tres no considera a los casos posibles como el 100%, sino como una parte de éste.

VII-A15 elige con base en el menor número de casos posibles, y considera que el porcentaje de los casos favorables y desfavorables es casí al mismo, pero en esta situación la diferencia entre el número de casos favorables y desfavorables es significativa.

VIII-A18 interpreta que los numeradores 2 y 5 de $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{8}$ corresponden al 20 y 50 por ciento, respectivamente.

Falta de comprensión de la situación

Se presentó esta estrategia en: II-1-A7, IV-1-A24 y III-A31.

> II-1-A7 Ruleta. Porque tiene más; porque si hay 7 blancas y 7 negras y dice que si se quita una blanca quedan 6 blancas y 7 negras, es la ruleta.

Figura 4.112. Respuesta de II-1-A7 sin comprensión de la situación

En la situación II no se pide quitar algún caso favorable del primer conjunto, sin embargo, II-1-A7 entiende que sí hay que quitarlo.

> IV-1-A24 Caja grande. Hay más posibilidad porque ahí se pusieron los insectos.

Figura 4.113. Respuesta de IV-1-A24 sin comprensión de la situación

IV-1-A24 considera que en el segundo conjunto se depositaron todos los casos favorables, sin embargo, ambos conjuntos contienen casos favorables y desfavorables.

> III-A31
>
> 6 – 2 – 4
>
> 9 – 3 – 6
>
> Primero vi la diferencia que hay entre cada uno y también vi la diferencia de personas que no reciben un premio y creo que combiné el sorteo.

Figura 4.114. Respuesta de III-A31 sin comprensión de la situación

III-A31 establece relaciones entre los casos favorables y desfavorables y obtiene la diferencia entre éstos y comenta que combina el sorteo por lo que muestra una falta de comprensión de lo que se solicita en la situación.

Elección con base en el mayor producto

Se presentó esta estrategia en: III-A20, VIII-A9, VIII-A12, VIII-A16, VIII-20 y VIII-A34.

III-A20 Lotería.

Por 9 que participan 3 [ganan].

Si multiplicas $6\times 2=12$ y $9\times 3=27$.

Figura 4.115. Respuesta de III-A20 que opera los datos que se proporcionan

III-A20, VIII-A9, VIII-A12, VIII-A16, VIII-20 y VIII-A34 operan los datos numéricos que se les proporcionan (casos favorables, desfavorables o posibles), sin embargo no justifican sus operaciones.

Elección con base en el mayor cociente al aplicar la "regla de tres"

Se presentó esta estrategia en: VI-1-A31.

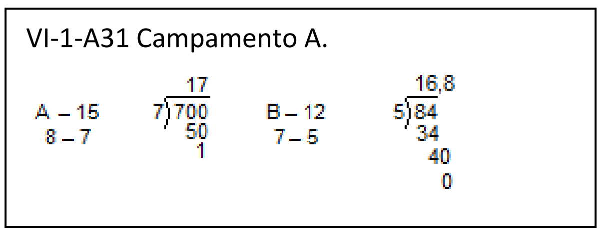


Figura 4.116. Respuesta de VI-1-A31que muestra la aplicación incorrecta de la regla de tres

VI-1-A31 establece una "regla de tres" con los casos favorables, desfavorables o posibles proporcionados. Comete un error en la multiplicación de los casos posibles y favorables. En este ejemplo se recurrió a la "regla de tres" muy posiblemente porque se relacionó con que hay tres elementos, pero no se consideraron las relaciones entre estos y qué es lo que se pedía en la situación.

Elección donde los decimales no son significativos

Se presentó esta estrategia en: II-1-A19.

II-1-A19 señala el número de casos favorables de cada conjunto y obtienen el valor numérico del porcentaje que les corresponde y aunque se observa que un porcentaje es mayor que el otro al parecer esta diferencia no le es significativa al considerar que ambos tienen la misma probabilidad.

> II-1-A19 En ambos. En la ruleta y en la urna porque sacando porcientos hay mucha probabilidad de cualquiera. Porque en la ruleta hay 7 sectores blancos y en la urna sólo hay 5, el % de la ruleta es el 50% y en la urna es de $55.\overline{5}\%$

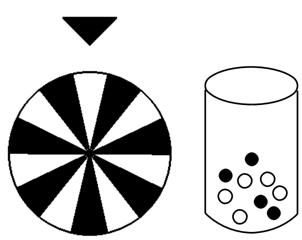
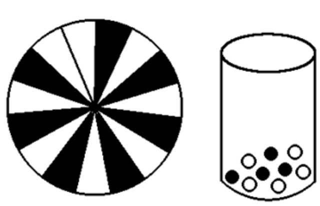
Figura 4.117. Respuesta de II-1-A19 para quien los decimales no son significativos

En la entrevista de A17 (véase el apéndice B) se presenta algo similar a lo que nos mostró II-1-A19, pero con la comparación de números enteros. A continuación mostramos el fragmento de la entrevista.

Situación II: "Ruleta y urna"

E: Entrevistador

A17: Alumno número 17

126	*E:* […] Mira, si aquí tenemos esta ruleta y esta urna nuevamente, si queremos que estas dos tengan la misma probabilidad, ¿qué modificarías? 
143	*A17:* (dibuja) 
162	*E:* Ah bueno, y ¿qué pasaría si en esta (muestra los dibujos de *A17* en el argumento 143) me trabajas un porcentaje? A ver, trabájame un porcentaje aquí, a ver si se obtiene la misma probabilidad como para comprobar.

163	*A17:* (opera la situación). 15 = 100% 8 = 53% $\begin{array}{r} 53 \\ 15\overline{)800} \\ 50 \\ 5 \end{array}$ 9 = 100% 5 = 55% $\begin{array}{r} 55 \\ 9\overline{)500} \\ 50 \\ 5 \end{array}$
165	*A17:* (continúa trabajando) Que sale aquí como un 53% y aquí sale un 55%.
166	*E:* Y que me habías dicho, ¿cómo eran antes [las probabilidades]?
167	*A17:* Eran iguales.
168	*E:* Y ahorita qué piensas cuando estás empleando lo que a ti te gusta que dices que son los números, más que los dibujos.
169	*A17:* Sigue siendo igual, para mí sigue siendo igual.
170	*E:* ¿No lo cambiarías?
171	*A17:* No.
172	*E:* ¿Por qué?
173	*A17:* Porque ninguno de los dos [resultados] se llevan como que un número extenso se podría decir, aquí es un 53 y aquí es un 55, dos puntos de probabilidad pero no sobrepasa que sea aquí este no sé que sea aquí 58 y 55 (corrige) 50.
174	*E:* ¿Y seguiría siendo para ti la misma probabilidad?
175	*A17:* Sí.

A17 muestra en [163] los cocientes 53 y 55 que compara, y en [173] menciona que no tienen una diferencia significativa como la que existiría si comparara a 50 con 58]. Este argumento nos deja ver el porqué en [169] reafirma que su propuesta presentada en [143] representa la misma probabilidad en ambos conjuntos.

Conclusiones del apartado "Sin clasificación"

Los errores que presentaron los alumnos al contar, operar o estimar son parte del proceso de su aprendizaje, que de no haberse presentado, los hubiéramos incorporado en las categorías establecidas para el análisis de los resultados.

La "regla de tres" es fuancional si quien la aplica entiende de dónde se deriva, cómo establecer las relaciones correctas y en qué situaciones es conveniente utilizarla. Por lo contrario, si se aprendió como una regla que debe aplicarse cuando hay tres elementos de por medio, sin analizar lo que se desea obtener a partir de ella y sin identificar las relaciones entre los elementos que ponen en acción con su aplicación, el "uso de la regla de tres" lleva a resultados incorrectos.

No elegir o mostrar una doble elección podrían considerarse indicios de la incertidumbre que un sujeto experimenta, y para analizar sus razonamientos debemos poner especial atención a los argumentos que muestra y ver cuáles tienen mayor, menor o igual influencia para determinar la mayor probabilidad. Lo que sugiere que cuando se presenta esto, ya se tiene un razonamiento pre-proporcional, porque las relaciones que se establecen implican más de dos intuiciones que se contraponen, reemplazan o complementan para realizar su elección.

La lectura de comprensión determina la resolución de situaciones con texto en matemáticas, prueba de ello son los errores de interpretación y la incomprensión de la misma, que pueden disminuirse si en el aula se fomenta, entre otras, el análisis de este tipo de situaciones.

Cuando en las situaciones se opera sin justificación con los datos para dar una respuesta, se presenta un efecto del contrato didáctico. Al respecto, Sarrazy (citado en Ávila, 2006) muestra que este tipo de respuestas numéricas se deriva no de la incompetencia intelectual de los alumnos sino de un efecto del contrato didáctico, que los obliga a ofrecer respuestas, cualquiera que sea la situación a la que se vean enfrentados.

Otro efecto del contrato didáctico se presenta en argumentos que no justifican una elección. Esto quizá se deba a que el alumno siente la necesidad de proporcionar una respuesta, que en el caso que se expuso tuvo que ver con redundar en la elección sin justificarla.

Cuadro 14. Resumen del tipo de respuestas que no fueron clasificadas

Sin clasificación.

- *Elección que carece del ¿Por qué? o del ¿cómo?(con base en la consideración de los dos conjuntos*
- *Elección con argumentos que involucran a sólo un conjunto*
- *Elección con argumentos que se contraponen a su elección*
- *Sin elección*
- *Doble elección*
- *Elección por error al contar*
- *Elección por estimación incompleta*
- *Elección por error de interpretación*
- *Elección con base en el mayor producto de casos posibles y favorables.*
- *Elección donde los decimales no son significativos.*

Cuadro 15. Concentración de respuestas de la pregunta 1 de las situaciones implementadas

A	X	VI	II	IV	VIII	III	I	IX	V	VII	C	I	SE
A30	X-1-A30, BG-C	VI-1-A30, CA-C	II-1-A30, U-C	IV-1-A30, CG-C	VIII-A30, D-C	III-A30, CRA-C	I-A30, C2-I	IX-A30, CRA-C	V-A30, A C	VII-A30, CRA-C	9	1	0
A16	X-1-A16, BG-C	VI-1-A16, CA-C	II-1-A16, U-C	IV-1-A16, CG-C	VIII-A16, T-I	III-A16, A-C	I-A16, CRA-C	IX-A16, CRA-C	V-A16, A C	VII-A16, MA-I	8	2	0
A1	X-1-A1, BG-C	VI-1-A1, CA-C	II-1-A1, U-C	IV-1-A1, CG-C	VIII-A1, D-C	III-A1, CRA-C	I-A1, C2-I	IX-A1, CRA-C	V-A1, GB. I	VII-A1, MB-I	7	3	0
A2	X-1-A2, BG-C	VI-1-A2, CB-I	II-1-A2, U-C	IV-1-A2, CG-C	VIII-A2, T-I	III-A2, L-I	I-A2, CRA-C	IX-A2, CRA-C	V-A2, GA. I	VII-A2, N-C	6	4	0
A11	X-1-A11, BG-C	VI-1-A11, CA-C	II-1-A11, U-C	IV-1-A11, CG-C	VIII-A11, T-I	III-A11, A-C	I-A11, C2-I	IX-A11, CRA-C	V-A11, GB. I	VII-A11, MA-I	6	4	0
A17	X-1-A17, SE	VI-1-A17, CB-I	II-1-A17, U-C	IV-1-A17, SE	VIII-A17, HA-C	III-A17, CRA-C	I-A17, CRA-C	IX-A17, CRA-C	V-A17, GB. I	VII-A17, A-C	6	2	2
A19	X-1-A19, BG-C	VI-1-A19, CA-C	II-1-A19, A-I	IV-1-A19, CG-C	VIII-A19, T-I	III-A19, A-C	I-A19, CRA-C	IX-A19, SB-I	V-A19, A C	VII-A19, MB-I	6	4	0
A22	X-1-A22, BG-C	VI-1-A22, CA-C	II-1-A22, U-C	IV-1-A22, CG-C	VIII-A22, D-C	III-A22, A-C	I-A22, C1-I	IX-A22, SB-I	V-A22, GA. I	VII-A22, MA-I	6	4	0
A25	X-1-A25, BG-C	VI-1-A25, CA-C	II-1-A25, U-C	IV-1-A25, CG-C	VIII-A25, T-I	III-A25, A-C	I-A25, N-C	IX-A25, PB-I	V-A25, GA. I	VII-A25, MA-I	6	4	0
A35	X-1-A35, BG-C	VI-1-A35, CA-C	II-1-A35, U-C	IV-1-A35, CC-I	VIII-A35, HA-C	III-A35, A-C	I-A35, CRA-C	IX-A35, SB-I	V-A35, GA. I	VII-A35, MB-I	6	4	0
A4	X-1-A4, BG-C	VI-1-A4, CA-C	II-1-A4, U-C	IV-1-A4, CG-C	VIII-A4, D-C	III-A4, DR-I	I-A4, C2-I	IX-A4, SB-I	V-A4, GA. I	VII-A4, MA-I	5	5	0
A8	X-1-A8, BG-C	VI-1-A8, CA-C	II-1-A8, U-C	IV-1-A8, CG-C	VIII-A8, D-C	III-A8, L-I	I-A8, C2-I	IX-A8, SB-I	V-A8, GB. I	VII-A8, MB-I	5	5	0
A21	X-1-A21, BG-C	VI-1-A21, CA-C	II-1-A21, U-C	IV-1-A21, CG-C	VIII-A21, HO-I	III-A21, L-I	I-A21, SE	IX-A21, CRA-C	V-A21, GB. I	VII-A21, MA-I	5	4	1
A23	X-1-A23, BG-C	VI-1-A23, CA-C	II-1-A23, U-C	IV-1-A23, CG-C	VIII-A23, D-C	III-A23, LM-I	I-A23, C1-I	IX-A23, SB-I	V-A23, GB. I	VII-A23, MA-I	5	5	0
A26	X-1-A26, BG-C	VI-1-A26, CA-C	II-1-A26, R-I	IV-1-A26, CC-I	VIII-A26, D-C	III-A26, A-C	I-A26, CRA-C	IX-A26, PB-I	V-A26, GB. I	VII-A26, MB-I	5	5	0
A27	X-1-A27, BG-C	VI-1-A27, CA-C	II-1-A27, U-C	IV-1-A27, CC-I	VIII-A27, D-C	III-A27, A-C	I-A27, C2-I	IX-A27, SB-I	V-A27, GB. I	VII-A27, MA-I	5	5	0
A28	X-1-A28, BG-C	VI-1-A28, CA-C	II-1-A28, U-C	IV-1-A28, CG-C	VIII-A28, D-C	III-A28, LM-I	I-A28, C1-I	IX-A28, PB-I	V-A28, GA. I	VII-A28, MB-I	5	5	0
A31	X-1-A31, BG-C	VI-1-A31, CA-C	II-1-A31, R-I	IV-1-A31, SE	VIII-A31, D-C	III-A31, SE	I-A31, N-C	IX-A31, CRA-C	V-A31, GA. I	VII-A31, MB-I	5	3	2
A32	X-1-A32, BG-C	VI-1-A32, CA-C	II-1-A32, U-C	IV-1-A32, CC-C	VIII-A32, D-C	III-A32, LM-I	I-A32, C2-I	IX-A32, SB-I	V-A32, GA. I	VII-A32, MB-I	5	5	0
A3	X-1-A3, BG-C	VI-1-A3, CA-C	II-1-A3, R-I	IV-1-A3, CG-C	VIII-A3, D-C	III-A3, L-I	I-A3, C2-I	IX-A3, SB-I	V-A3, GA. I	VII-A3, MA-I	4	6	0
A10	X-1-A10, BG-C	VI-1-A10, CA-C	II-1-A10, R-I	IV-1-A10, CG-C	VIII-A10, D-C	III-A10, LM-I	I-A10, C1-I	IX-A10, SB-I	V-A10, GA. I	VII-A10, MB-I	4	6	0
A13	X-1-A13, BG-C	VI-1-A13, CA-C	II-1-A13, U-C	IV-1-A13, CC-I	VIII-A13, D-C	III-A13, L-I	I-A13, C2-I	IX-A13, SB-I	V-A13, GA. I	VII-A13, MA-I	4	6	0
A24	X-1-A24, BG-C	VI-1-A24, CA-C	II-1-A24, U-C	IV-1-A24, CG-C	VIII-A24, SE	III-A24, L-I	I-A24, C2-I	IX-A24, SB-I	V-A24, GA. I	VII-A24, MA-I	4	5	1
A33	X-1-A33, BG-C	VI-1-A33, CB-I	II-1-A33, U-C	IV-1-A33, CG-C	VIII-A33, D-C	III-A33, L-I	I-A33, C2-I	IX-A33, SB-I	V-A33, GA. I	VII-A33, MB-I	4	6	0
A34	X-1-A34, BG-C	VI-1-A34, CA-C	II-1-A34, U-C	IV-1-A34, CG-C	VIII-A34, T-I	III-A34, L-I	I-A34, C2-I	IX-A34, SB-I	V-A34, GA. I	VII-A34, MB-I	4	6	0
A5	X-1-A5, BC-I	VI-1-A5, CA-C	II-1-A5, U-C	IV-1-A5, AC-I	VIII-A5, T-I	III-A5, A-C	I-A5, C2-I	IX-A5, PB-I	V-A5, GA. I	VII-A5, MB-I	3	7	0
A14	X-1-A14, BG-C	VI-1-A14, CA-C	II-1-A14, R-I	IV-1-A14, CC-I	VIII-A14, HA-C	III-A14, L-I	I-A14, C1-I	IX-A14, SB-I	V-A14, GA. I	VII-A14, MA-I	3	7	0
A15	X-1-A15, BG-C	VI-1-A15, CB-I	II-1-A15, U-C	IV-1-A15, CG-C	VIII-A15, HO-I	III-A15, LM-I	I-A15, C2-I	IX-A15, PB-I	V-A15, GB. I	VII-A15, MB-I	3	7	0
A18	X-1-A18, BG-C	VI-1-A18, CA-C	II-1-A18, R-I	IV-1-A18, CG-C	VIII-A18, T-I	III-A18, L-I	I-A18, C2-I	IX-A18, SB-I	V-A18, GA. I	VII-A18, MB-I	3	7	0
A6	X-1-A6, BG-C	VI-1-A6, CB-I	II-1-A6, R-I	IV-1-A6, CG-C	VIII-A6, T-I	III-A6, LM-I	I-A6, C2-I	IX-A6, PB-I	V-A6, GA. I	VII-A6, MA-I	2	8	0
A7	X-1-A7, BG-C	VI-1-A7, CA-C	II-1-A7, R-I	IV-1-A7, CC-I	VIII-A7, T-I	III-A7, LM-I	I-A7, C2-I	IX-A7, SB-I	V-A7, GA. I	VII-A7, MA-I	2	8	0
A9	X-1-A9, BC-I	VI-1-A9, CA-C	II-1-A9, U-C	IV-1-A9, CC-I	VIII-A9, T-I	III-A9, L-I	I-A9, C1-I	IX-A9, SB-I	V-A9, GA. I	VII-A9, MB-I	2	8	0
A12	X-1-A12, BG-C	VI-1-A12, CB-I	II-1-A12, SE	IV-1-A12, CG-C	VIII-A12, T-I	III-A12, L-I	I-A12, C1-I	IX-A12, SB-I	V-A12, GA. I	VII-A12, MA-I	2	7	1
A29	X-1-A29, BG-C	VI-1-A29, CB-I	II-1-A29, U-C	IV-1-A29, CC-I	VIII-A29, T-I	III-A29, L-I	I-A29, C2-I	IX-A29, SB-I	V-A29, GA. I	VII-A29, MA-I	2	8	0
A20	X-1-A20, BG-C	VI-1-A20, CB-I	II-1-A20, R-I	IV-1-A20, AC-I	VIII-A20, T-I	III-A20, L-I	I-A20, C1-I	IX-A20, SB-I	V-A20, GA. I	VII-A20, MB-I	1	9	0
C	32	27	24	23	18	12	8	8	3	3			
I	2	8	10	10	16	22	26	27	32	32			
SE	1	0	1	2	1	1	1	0	0	0			

C=CORRECTAS	I=INCORRECTAS	SE = SIN ELECCIÓN

4.5.- Propuestas para que los conjuntos presentados en las situaciones II, IV, VI y X sean equiprobables.

En las situaciones II, IV, VI y X los alumnos, además de comparar probabilidades, debieron proponer conjuntos que presentaran la misma probabilidad. En sus respuestas nos mostraron y argumentaron lo siguiente:

Propuesta 1: Probabilidad $\frac{1}{2}$

Dos conjuntos con: Igualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos e igualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto con proporcionalidad $\frac{1}{2}$

Punto de referencia: favorables- desfavorables conjunto 1 para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: II-2-A8, II-2-A9, II-2-A10, II-2-A12, II-2-A14, II-2-A18, II-2-A28, II-2-A29 y II-2-A35.

II-2-A29 Pues sería a la urna, se le pondrían dos bolas blancas y 3 negras. Porque los 2 tienen los mismos colores por ejemplo 7 bolas negras y 7 sectores blancos y 7 bolas blancas y 7 sectores negros.

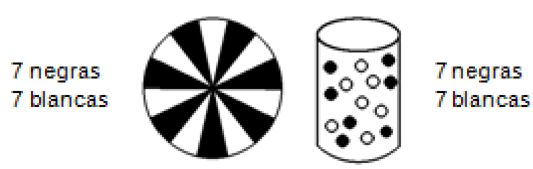


Figura 4.118. Respuesta de II-2-A29 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

II-2-A8, II-2-A9, II-2-A10, II-2-A12, II-2-A14, II-2-A18, II-2-A28, II-2-A29 y II-2-A35 igualan los casos favorables y desfavorables del conjunto 2, con base en los casos que se presentan en el conjunto 1.

Punto de referencia: favorables conjunto 2 para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: II-2-A2, II-2-13, II-2-A11, IV-2-A30 y VI-2-A6.

II-2-A13 Porque están igual la ruleta y la urna van con 5 bolitas y triangulitos [sectores] blancos y negros.

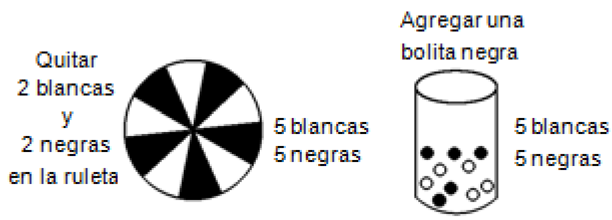


Figura 4.119. Respuesta de II-2-A13 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

II-2-A2, II-2-13, II-2-A11 y VI-2-A6 igualan los casos desfavorables del conjunto 2 con los favorables del mismo conjunto y a su vez igualan los favorables y desfavorables del conjunto 1 con base en los que se presentan en el conjunto 2. VI-2-A6 al realizar este cambio no conserva los casos posibles como se solicita en la situación.

II-2-A11 presenta una dificultad al considerar sectores continuos de un mismo color (blanco) como uno sólo, es decir considera el color pero no el tamaño, esto lo llevó a plantear conjuntos que no son equiprobables.

II-2-A11 Porque aumentando esa bolita quedarían las mismas oportunidades porque estaría igual que la ruleta.

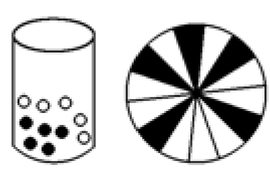


Figura 4.120. Respuesta de II-2-A11 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$ sin considerar el tamaño de los sectores

Punto de referencia: favorables conjunto 1 para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: IV-2-A7.

IV-2-A7 En la grande quitar 3 huevos de insectos y en la grande quitar 5 huevos de peces y en la chica quitar 2 huevos de peces.

Figura 4.121. Respuesta de IV-2-A7 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

IV-2-A7 iguala los casos favorables y desfavorables del conjunto 2 con los favorables del conjunto 1 y a su vez iguala los desfavorables del conjunto 1 con base en los favorables que se presentan en este mismo conjunto.

Punto de referencia: desfavorables conjunto 1 y favorables conjunto 2 para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: X-2-A14.

X-2-A14
Bolsa 1: Limón 60% Fresa: 40%
Bolsa 2: Limón 40% Fresa 60%
Bolsa 1 Fresa 20%
Bolsa 2 Limón 20%

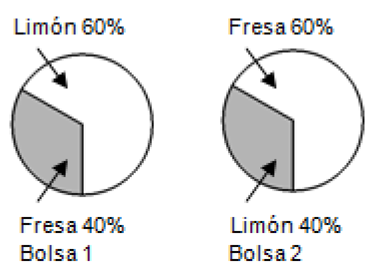


Figura 4.122. Respuesta de X-2-A14 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$ con porcentajes

X-2-A14 iguala los casos favorables y desfavorables de cada conjunto considerando los casos desfavorables y favorables presentados en los conjuntos 1 y 2 respectivamente. De esta manera, en ambas bolsas tendría el 60% de limón y el 60% de fresa, pero esto lo llevó a considerar un porcentaje mayor al 100%. Además que los diagramas que muestra representan a los conjuntos originales.

Punto de referencia: Consideración de un número distinto de casos favorables, desfavorables y posibles respecto al número de casos proporcionados para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: II-2-A3, II-2-A6, II-2-A7, VI-2-A21 y VI-2-A34.

II-2-A3 Porque así los 2 tienen la misma cantidad de sectores y bolas.

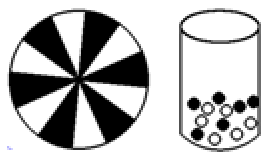


Figura 4.123. Respuesta de II-2-A3 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

II-2-A3, II-2-A6, II-2-A7, II-2-A30, VI-2-A21 y VI-2-A34 igualan los casos favorables y desfavorables y en consecuencia los posibles sin considerar los que se proponen en la situación. En la pregunta dos de la situación II sí pudieron hacer esto porque no existe alguna restricción, pero en pregunta dos de la situación VI sí debieron conservar los posibles, lo que los llevaría a una propuesta incorrecta si se considera esta restricción.

Punto de referencia: Consideración del mismo porcentaje de favorables y desfavorables en cada conjunto, con un porcentaje distinto a los presentados en los conjuntos.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: X-2-A13, X-2-A22 y X-2-A29.

X-2-A22 Sería 50% de fresa y 50% de limón. Pues que es lo mismo y hay probabilidad en las 2 bolsas de chocolates.

Figura 4.124. Respuesta de X-2-A22 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$ con porcentajes

X-2-A13, X-2-A22 y X-2-A29 presentan el mismo porcentaje de casos favorables y desfavorables dentro y entre conjuntos, por lo que muy probablemente mantuvieron el número de casos posibles diferente en los conjuntos presentados en la situación.

Dos conjuntos con: desigualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos e igualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto con proporcionalidad $\frac{1}{2}$

Punto de referencia: desfavorables conjunto 2 y favorables conjunto 2 para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: VI-2-A10.

VI-2-A10 Así va a ver una probabilidad de que ambos saquen bola negra.

Figura 4.125. Respuesta de VI-2-A10 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

VI-2-A10 iguala los favorables del conjunto 1 y los desfavorables del conjunto 2 con los favorables y desfavorables del conjunto 1 y 2, respectivamente, pero no conserva los casos posibles como se indica en la situación.

Punto de referencia: favorables conjunto 2 para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: II-2-A1, II-2-19 y II-2-21.

II-2-A1 Porque en la urna y la ruleta hay el mismo número de sectores y bolas blancas como negras, en la ruleta hay 7/b y 7/n; en la urna 5/b y 5/n.

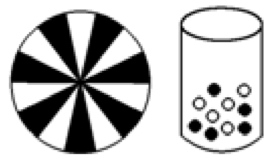


Figura 4.126. Respuesta de II-2-A1 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

II-2-A1, II-2-19, II-2-21 igualan los casos desfavorables del conjunto 2 considerando los favorables del mismo conjunto. El conjunto 1 se mantuvo sin cambio.

Punto de referencia: favorables conjuntos 1y 2 para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: VI-2-A15.

VI-2-A15 Que pongan la misma cantidad de bolas blancas que negras.

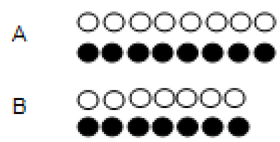


Figura 4.127. Respuesta de VI-2-A15 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

VI-2-A15 Iguala los desfavorables en cada conjunto con base en los desfavorables que se presentan en el conjunto 1 y 2, respectivamente. No conservó el número de casos posibles como se indicó en la situación.

Punto de referencia: desfavorables conjunto 2 para igualar probabilidades. Se igualan los casos favorables del conjunto 2 con los desfavorables del mismo conjunto. El conjunto 1 se mantiene sin cambio.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: II-2-A15, II-2-17, II-2-24 y II-2-A34.

II-2-A24 Pues quitándole una bola blanca hay un poco de probabilidad para que pueda ganar y alguna probabilidad de perder.

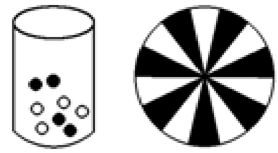


Figura 4.128. Respuesta de II-2-A24 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

II-2-A15, II-2-17, II-2-24 y II-2-A34 igualan los casos favorables del conjunto 2 con los desfavorables del mismo conjunto. El conjunto 1 lo mantuvieron sin cambio.

Punto de referencia: Consideración de un número distinto de casos favorables, desfavorables y posibles respecto al número de casos proporcionados para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: IV-2-A1, VI -2-A13 y IV-2-A4.

IV-2-A1 En las 2 cajas hay la misma cantidad de peces e insectos.

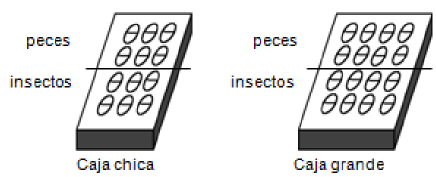


Figura 4.129. Respuesta de IV-2-A1 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

Aunque IV-2-A1, VI -2-A13 en el primer conjunto consideran al número de desfavorables para igualar a los favorables. En el segundo conjunto igualan los favorables con los desfavorables con un número distinto al presentado. IV-2-A4 en ambos conjuntos cambia el número de casos posibles y en cada conjunto considera igual número de casos favorables y desfavorables. VI -2-A13 no conserva los casos posibles como se indica en la situación.

Punto de referencia: favorables conjunto 1 desfavorables conjunto 2 para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: IV-2-A11.

IV-2-A11 Ponerle a las dos la misma cantidad para que sea igual.

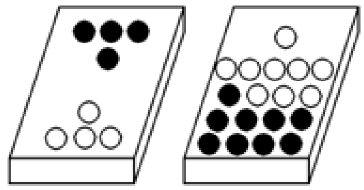


Figura 4.130. Respuesta de IV-2-A11 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

IV-2-A11 iguala los desfavorables del conjunto 1 con los favorables del mismo conjunto e iguala a los favorables del conjunto 2 con los desfavorables del mismo conjunto.

Propuesta 2: Probabilidad $\frac{1}{3}$

Dos conjuntos con: desigualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto con proporcionalidad $\frac{1}{3}$

Punto de referencia: Consideración de un número distinto de casos favorables y desfavorables respecto al número de casos proporcionados donde se conservan los casos posibles para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: VI-2-A17.

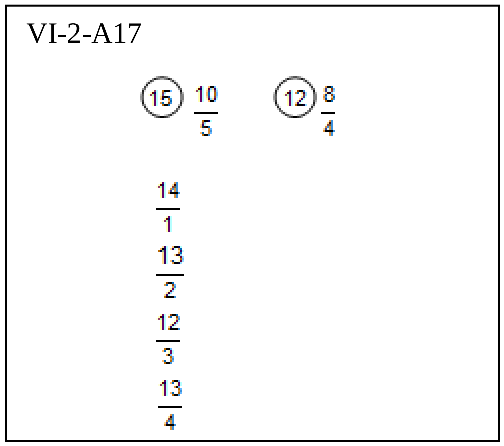


Figura 4.131. Respuesta de VI-2-A17 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{3}$

VI-2-A17 conserva los casos posibles como se indica en la situación y en ambos conjuntos presenta la misma probabilidad.

Propuesta 3: Probabilidad $\frac{2}{3}$

Dos conjuntos con: igualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto con proporcionalidad $\frac{2}{3}$

Punto de referencia: Consideración de un número distinto de casos favorables, desfavorables y posibles respecto al número de casos proporcionados para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: II-2-A32 y IV-2-A5.

II-2-A32 Yo pondría 2 negras y 4 blancas en cada una porque hay mayor probabilidad de ganar en los 2 juegos. Porque tienen lo mismo y a cualquiera le podrían apostar y ganarían un juego o premio.

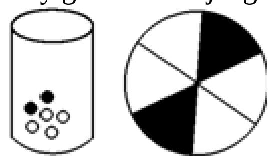


Figura 4.132. Respuesta de II-2-A32 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{2}{3}$

II-2-A32 y IV-2-A5 cambian el número de casos favorables y desfavorables que se les presentan en los conjuntos de la situación original y mencionan la igualdad de favorables y desfavorables entre conjuntos pero se manifiesta la desigualdad de favorables y desfavorables en cada conjunto. VI-2-A5 sus conjuntos presentan la misma probabilidad aunque no conserva los casos posibles en cada conjunto como se le indica en la situación, iguala los casos posibles del segundo conjunto con los del primero que son 15.

Propuesta 4: Probabilidad $\frac{2}{5}$

Dos conjuntos con: igualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto con proporcionalidad $\frac{2}{5}$

Punto de referencia: favorables- desfavorables conjunto 1 para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: IV-2-A16.

IV-2-A16

Figura 4.133. Respuesta de IV-2-A16 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{2}{5}$

IV-2-A16 iguala los casos favorables y desfavorables del conjunto 2, con base en los casos que se presentan en el conjunto 1.

Propuesta 5: Probabilidad $\frac{3}{5}$

Dos conjuntos con: igualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto con proporcionalidad $\frac{3}{5}$

Punto de referencia: favorables y desfavorables conjunto 2 para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: X-2-A2.

X-2-A2 En la bolsa chica quitaría 1 de limón y agregaría 6 de fresa. En la grande sólo agregaría uno de limón, pues como saqué el número de chocolates que tenía cada bolsa solamente vi cuál era la diferencia entre cada una.

Figura 4.134. Respuesta de X-2-A2 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{3}{5}$

X-2-A2 intenta igualar los casos favorables y desfavorables del conjunto 1 con los casos favorables y desfavorables que se presentan en el conjunto 2. Sin embargo, al agregar un elemento desfavorable en el segundo conjunto ya no obtiene la equiprobabilidad deseada.

Punto de referencia: Consideración de un número distinto de casos favorables, desfavorables y posibles respecto al número de casos proporcionados para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: II-2-A27.

II-2-A27 Porque la ruleta tiene el mismo número de sectores negros que la urna bolas negras y la urna tiene el mismo número de bolas blancas que la ruleta tiene el mismo número de sectores blancos.

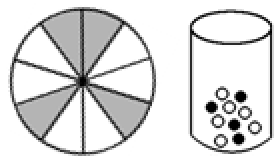


Figura 4.135. Respuesta de II-2-A27 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{3}{5}$

II-2-A27 cambia el número de casos favorables y desfavorables que se le presentaron en los conjuntos de la situación original y mencionó la igualdad de favorables y desfavorables entre conjuntos pero también se observa la desigualdad de favorables y desfavorables en cada conjunto.

Dos conjuntos con: desigualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto con proporcionalidad $\frac{3}{5}$

Punto de referencia: Consideración de un número distinto de casos favorables y desfavorables respecto al número de casos proporcionados donde se conservan los casos posibles para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: X-2-A30.

X-2-A30 A la bolsa chica ponerle 3 chocolates rellenos de fresa y a la bolsa grande así como está.

Bolsa Chica Bolsa Grande

$\frac{9}{15} = 0.6$ $15\overline{)90}$ (.6, 0) $\frac{12}{20} = 0.6$

Figura 4.136. Respuesta de X-2-A30 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{3}{5}$ llegando a su representación decimal

X-2-A30 conserva los casos posibles de los conjuntos originales y modifica el número de casos favorables en el conjunto 1, justifica su respuesta con cocientes en su representación decimal. De esta manera sus conjuntos presentados son equiprobables.

Propuesta 6: Probabilidad $\frac{7}{12}$

Dos conjuntos con: igualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto, con proporcionalidad $\frac{7}{12}$

Punto de referencia: favorables- desfavorables conjunto 2 para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: VI-2-A16.

VI-2-A16 Se le aumentaron 3 personas más al campamento B para que en los campamentos 8 saquen bola blanca y 7 bola negra.

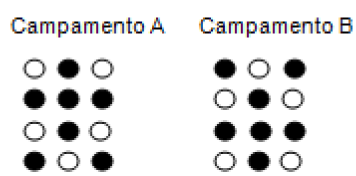


Figura 4.137. Respuesta de VI-2-A16 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{7}{12}$

VI-2-A16 invierte los casos favorables y desfavorables del segundo conjunto y con base en estos distribuye los casos favorables y desfavorables del primer conjunto, cambiando el número de casos posibles del mismo. No conserva los casos posibles de ambos conjuntos, como se solicita en la situación.

Propuesta 7: Probabilidad $\frac{7}{13}$

Dos conjuntos con: Igualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto con proporcionalidad $\frac{7}{13}$

Punto de referencia: favorables conjunto 2 y desfavorables conjunto 1.

Quien mostró estos conjuntos fue: IV-2-A2.

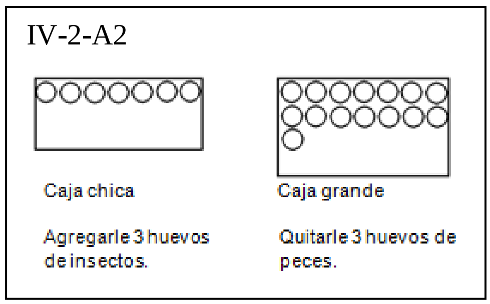


Figura 4.138. Respuesta de IV-2-A2 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{1}{2}$

IV-2-A2 Iguala los favorables de ambos conjuntos considerando los favorables del conjunto 2 y también los desfavorables de ambos conjuntos considerando los desfavorables del conjunto 1. Esto quizá se deba a que considera el mayor número de casos favorables y el menor número de casos desfavorables de ambos conjuntos para igualar.

Propuesta 8: Probabilidad $\frac{7}{15}$

Dos conjuntos con: Igualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto con proporcionalidad $\frac{7}{15}$

Punto de referencia: favorables y desfavorables conjunto 1 para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: VI-2-A7, VI-2-A12, VI-2-A14, VI-2-A18 y VI-2-A24.

VI-2-A24 Pues que haya la misma cantidad en ambos campamentos, por ejemplo.

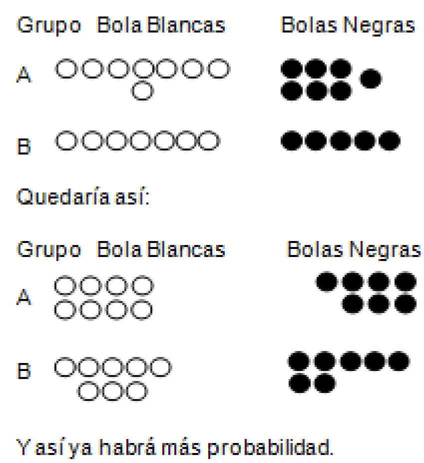


Figura 4.139. Respuesta de VI-2-A24 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{7}{15}$

VI-2-A7, VI-2-A12, VI-2-A14, VI-2-A18 y VI-2-A24 igualan los casos favorables y desfavorables del conjunto 2 con base en los que presenta el conjunto 1. Consideramos que quizá eligen al conjunto 1 para igualar probabilidades porque este presenta mayor número de favorables en comparación con los que presenta el conjunto 2, es de señalar que no conservan los casos posibles en el segundo conjunto a pesar de que fue una restricción de la situación. VI-2-A12 invierte el número de casos favorables y desfavorables en el primer conjunto. VI-2-A18 además también establece la igualdad de casos favorables y desfavorables del primer conjunto con base en los casos favorables y desfavorables presentados en el segundo conjunto.

Propuesta 9: Probabilidad $\frac{7}{16}$

Dos conjuntos con: Igualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto con proporcionalidad $\frac{7}{16}$

Punto de referencia: favorables- desfavorables conjunto 2 para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: IV-2-A14 y IV-2-A19.

IV-2-A19

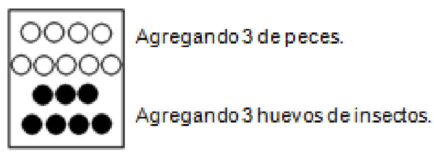


Figura 4.140. Respuesta de IV-2-A19 que muestra conjuntos con probabilidad $\frac{7}{16}$

IV-2-A14 y IV-2-A19 igualaron los casos favorables y desfavorables del conjunto uno, con base en los casos que se presentan en el conjunto 2.

Propuesta 10: Igualdad de casos favorables

Dos conjuntos con: Igualdad de casos favorables, desigualdad de casos desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto sin proporcionalidad

Punto de referencia: favorables conjunto 1 para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: IV-2-A12.

IV-2-A12 Quitarle huevos a la caja grande seria quitarle 6 peces y 3 insectos para que tengan la misma probabilidad; tienen lo mismo.

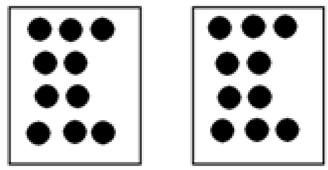


Figura 4.141. Respuesta de IV-2-A12 que muestra conjuntos con igualdad de casos favorables

IV-2-A12 iguala los casos favorables con base en los que se presentaron en el conjunto 1, además modifica el número de casos desfavorables del conjunto 2, pero en sus dibujos mestra conjuntos con igual número de casos posibles donde no se diferencian los casos favorables de los desfavorables, esto quizá porque fue lo que observó de la situación.

Punto de referencia: favorables conjunto 2 para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: VI-2-A33, VI-2-A35, X-2-A8, X-2-A7, X-2-A10 y X-2-A20.

X-2-A8 Agregaría 20% más de chocolates de fresa a la bolsa de chocolate de 15. Le sumé 20% a 40% para que nuestro resultado sea 60% es igual a la de 20 chocolates.

Figura 4.142. Respuesta de X-2-A8 que muestra conjuntos con igualdad de casos favorables

VI-2-A33 y VI-2-A35 igualaron los casos favorables del conjunto 1 con los favorables presentados en el conjunto 2, sin considerar los desfavorables. De esta manera, conservaron los casos posibles como se indica en la situación, sin embargo, los conjuntos presentados no son equiprobables. X-2-A8, X-2-A7, X-2-A10 y X-2-A20 realizan lo mismo que VI-2-A33 y VI-2-A35 pero con porcentajes.

Punto de referencia: Consideración de un número distinto de casos favorables respecto al número de casos proporcionados para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: X-2-A15 y X-2-A35.

X-2-A15 A la bolsa chica le pondría 10% de sabor fresa. A la bolsa grande le quitaría el 10 % sabor fresa. Así tendrían la misma probabilidad para los dos sabores y tendrían el mismo porcentaje de chocolates con relleno de fresa y chocolate [limón].

Figura 4.143. Respuesta de X-2-A15 que muestra conjuntos con igualdad de casos favorables.

X-2-A15 iguala los casos favorables al 50% en cada conjunto, poniendo a la bolsa chica el 10% que le faltaría y quitándole el 10% a la bolsa grande sin considerar los casos desfavorables y posibles. X-2-A35 igualó el número de casos favorables.

X-2-A35 Sólo le aumenté 3 chocolates a la bolsa chica y le quité 3 a la bolsa grande para que las 2 bolsas queden proporcionales.

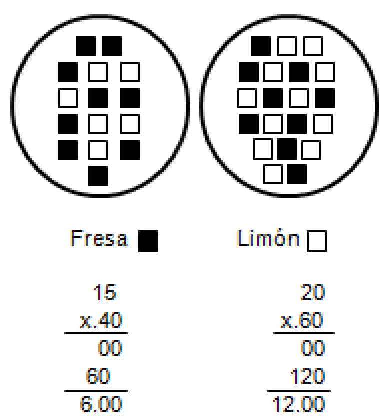


Figura 4.144. Respuesta de X-2-A35 que muestra conjuntos con igualdad de casos favorables

Propuesta 11: Igualdad de casos desfavorables

Dos conjuntos con: Igualdad de casos desfavorables, desigualdad de casos favorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto sin proporcionalidad

Punto de referencia: favorables conjunto 2 para igualar probabilidades.

Quien mostró estos conjuntos fue: VI-2-A28.

VI-2-A28 Propongo que tengan 1 bola negra más en cada campamento y --1 blanca para que así tengan las mismas probabilidades de sacar una bola negra y así no marchar porque 5 bolas serían blancas y las demás negras en cada grupo.

Figura 4.145. Respuesta de VI-2-A28 que muestra conjuntos con igualdad de casos desfavorables

VI-2-A28 invierte el número de casos favorables y desfavorables en cada conjunto e iguala el número de casos desfavorables de ambos conjuntos con los favorables que se presentaron en la situación original. Posiblemente el estudiante al invertir el número de casos favorables y desfavorables consideró que mientras el número de favorables en cada conjunto sea mayor al de desfavorables, en ambos conjuntos habría mayor probabilidad de extraer un caso favorable, y por lo tanto los conjuntos propuestos serían equiprobables.

Propuesta 12: Igualdad de casos posibles

Punto de referencia: posibles conjunto 1.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: IV-2-A17, IV-2-A32, IV-2-A34 y IV-2-A35.

IV-2-A32 Yo quitaría 6 en la caja grande porque hay menos probabilidad de sacar un insecto y si los dos son iguales puede que en cualquiera de las 2 pueda sacar un insecto.

Figura 4.146. Respuesta de IV-2-A32 que muestra conjuntos con igualdad de casos posibles

IV-2-A17, IV-2-A32, IV-2-A35 y X-2-A12 igualan los casos posibles del conjunto dos con el número de casos posibles que se presenta en el conjunto uno.

Punto de referencia: posibles conjunto 2.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: IV-2-A10, IV-2-A27, X-2-A34 y IV-2-A18.

IV-2-A10 Sería necesario agregarle a la caja chica más huevos, así habría una probabilidad de obtener un insecto.

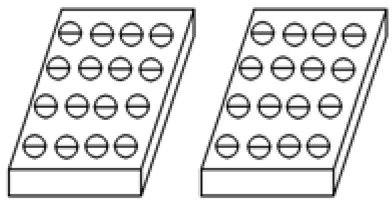


Figura 4.147. Respuesta de IV-2-A10 que muestra conjuntos con igualdad de casos posibles

IV-2-A10, IV-2-A27 y X-2-A34 igualan los casos posibles del conjunto uno con el número de casos posibles que se presentan en el conjunto dos. IV-2-A18 presenta la igualdad de los posibles considerando el conjunto uno y después al conjunto 2.

Punto de referencia: Consideración de un número distinto de casos posibles respecto al número de casos proporcionados para igualar probabilidades.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: IV-2-A24, IV-2-A31, VI-2-A20 y VI-2-A29.

IV-2-A31 Aumentarle huevos a la caja que contiene menos huevos para que en las dos cajas tengan la misma probabilidad de que salga lo mismo.

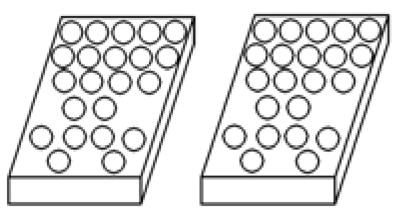


Figura 4.148. Respuesta de IV-2-A31 que muestra conjuntos con igualdad de casos posibles

IV-2-A24, IV-2-A31, VI-2-A20 y VI-2-A29 igualan los casos posibles de ambos conjuntos con un número de casos posibles distinto a los presentados en la situación original.

Propuesta 13: Probabilidad Cualitativa

Dos conjuntos con: desigualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre ellos y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto sin proporcionalidad

Punto de referencia: favorables para igualar probabilidades de forma cualitativa.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: II-2-A4, II-2-A5, II-2-A20, II-2-A25 y II-2-A33.

II-2-A4 Porque así los dos tienen más blancas que negras y así hay más probabilidad de que sea blanco.

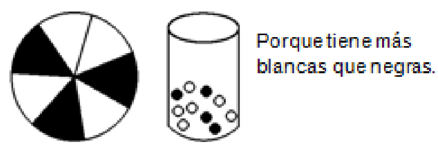


Figura 4.149. Respuesta de II-2-A4 quien consideró que a mayor número de favorables respecto a los desfavorables mayor probabilidad y equiprobabilidad entre conjuntos

II-2-A4, II-2-A5, II-2-A20, II-2-A25, II-2-A33, IV- 2-A33, X-2-A5 y X-2-A32 consideraron que al haber en ambos conjuntos más favorables que desfavorables se presenta la equiprobabilidad entre conjuntos, además cambiaron el número de casos favorables, desfavorables y posibles de la situación original. X-2-A32 no muestra alguna modificación a los casos desfavorables.

Punto de referencia: favorables y desfavorables para igualar probabilidades de forma cualitativa.

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: X-2-A3, X-2-A4 y X-2-A18.

X-2-A18 Es poniendo las mismas cantidades de limón o fresa. Sólo es leyendo y entendiendo lo que nos piden.

Figura 4.150. Respuesta de X-2-A18 que muestra conjuntos

X-2-A3, X-2-A4 y X-2-A18 con base en sus argumentos se deduce que igualaron los casos favorables y desfavorables en ambos o en cada conjunto, pero no explicitan cantidades, lo que no deja en la incertidumbre si cambiarían o conservarían los casos posibles presentados en la situación original.

4.6.- Dificultades de los estudiantes al proponer conjuntos equiprobables en las situaciones II, IV, VI y X.

Argumentos parciales que no dejan ver todas las consideraciones que se establecen para determinar la equiprobabilidad de ambos conjuntos

Modificación de un solo conjunto sin modificar al otro

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: II-2-A16, II-2-A22, II-2-A23, II-2-A31, IV-2-A15, VI-2-A1, VI-2-A4, VI-2-A23, VI-2-A25, VI-2-A26, X-2-A23 y X-2-A27

II-2-A31 En la ruleta sería necesario quitar sectores para que sea mayor la probabilidad de ganar.

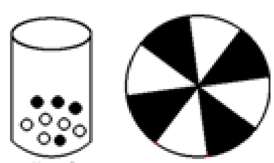


Figura 4.151. Respuesta de II-2-A31 que mostró conjuntos que no son equiprobables

II-2-A16, II-2-A22, II-2-A23 y II-2-A31 realizan una comparación cualitativa donde consideran que los conjuntos que tienen mayor número de casos favorables son equiprobables, sin embargo, uno de sus conjuntos no tiene mayor número de casos favorables respecto a los desfavorables. Esto quizá se deba a que para los estudiantes es más complicado dividir a un conjunto continuo en un número impar de sectores que en un número par.

VI-2-A26 La 15 la dejo igual. La 12 pongo 6 blancas y 6 negras.

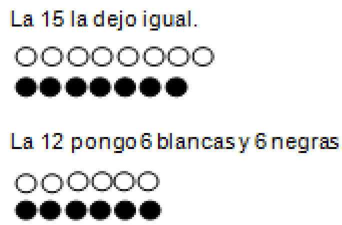


Figura 4.152. Respuesta de VI-2-A26 donde mostró conjuntos que no son equiprobables

VI-2-A4, VI-2-A23, VI-2-A25 y VI-2-A26 conservan los casos posibles en cada conjunto como se indica en la situación, sin modificar al conjunto 1, y en el conjunto 2 igualan los casos favorables y desfavorables. Es posible que no igualaran los casos favorables y desfavorables en el conjunto uno debido a que el número de casos posibles no es divisible por dos. VI-2-A4 además comete un error al invertir los favorables con los desfavorables en el primer conjunto. IV-2-A15 y VI-2-A1 invierten los casos favorables y desfavorables del primer conjunto; al conjunto 2 no lo modifican y conservan los casos posibles en ambos conjuntos. X-2-A23 y X-2-A27 modifican los casos favorables y desfavorables del primer conjunto sin modificar los del segundo conjunto. Los conjuntos presentados por estos alumnos no presentan equiprobabilidad.

X-2-A16 y X-2-A21 aumentan los casos favorables en el conjunto uno; el conjunto 2 no lo modifican, pero identificamos que en el conjunto 2 confunden los casos favorables con los favorables.

Modificación de un sólo conjunto sin contemplar al otro

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: IV-2-A3, IV-2-A6, IV-2-A9, IV-2-A13, IV-2-20, IV-2-A23, IV-2-A22, IV-2-A25, IV-2-A26, IV-2-A28, VI-2-A3, X-2-A1 y X-2-A26

IV-2-A3, IV-2-A6, IV-2-A22 y IV-2-A25 modifican a sólo un conjunto pero no señalan a cuál. X-2-A26 modifica los casos favorables y desfavorables del conjunto 1, además presenta dificultad para interpretar porcentajes pues considera que un caso favorable representa un 10%, sin embargo, esto no es así porque en la situación el 100%, en el conjunto 1 lo conforman 15 casos posibles. VI-2-A3 modifica los casos favorables y desfavorables de un conjunto sin señalar cuál y enfatiza que hay más probabilidad donde hay más casos favorables. En ninguna de estas respuestas se muestra alguna comparación con el otro conjunto.

IV-2-A3 Que sean 16 de insectos y 4 de pescados y habrá más posibilidad que saque insecto.

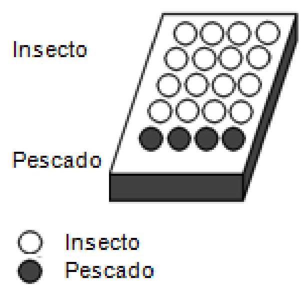


Figura 4.153. Respuesta de IV-2-A3 que contempla a sólo un conjunto para igualar probabilidades

IV-2-A9, IV-2-A13, IV-2-20, IV-2-A23, IV-2-A26, IV-2-A28, X-2-A1 modifican sólo a uno de los dos conjuntos, agregando o quitando casos favorables o desfavorables, y especifican a cuál conjunto modifican pero al otro conjunto no lo consideran.

IV-2-A13 Pues que en vez de 7 huevos de insectos fueran 8 y 8 huevos de peces.

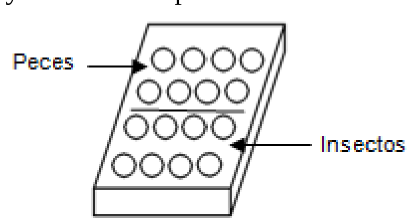


Figura 4.54. Respuesta de IV-2-A13 que contempla a sólo un conjunto para igualar probabilidades

Modificación de uno o dos conjuntos sin especificar si las cantidades agregadas o quitadas corresponden a los casos favorables o desfavorables

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: IV-2-A8, IV-2-A29, IV-2-A21, VI-2-A22 VI-2-A30, VI-2-A31 y X-2-A9 X-2-A11 X-2-A19 X-2-A24 X-2-A28 X-2-A31 X-2-A33.

IV-2-A29 y X-2-A19 indican que modificarían a ambos conjuntos y señalan cuántos casos quitarían pero no especifican si son favorables o desfavorables. VI-2-A30 menciona que agregaría un caso a cada conjunto pero no especifica si sería favorable o desfavorable y aunque muestra dos cocientes donde los denominadores corresponden a los casos posibles, los numeradores no corresponden a los favorables propuestos o de la situación original.

IV-2-A29 Pues yo le quitaría 2 a la caja grande y le pondría uno a la caja chica.

Figura 4.155. Respuesta de IV-2-A29 que muestra modificaciones no específicas

IV-2-A8 y IV-2-A21 muestran dos conjuntos en donde no diferencian los casos favorables de los desfavorables, además no brindan alguna explicación de lo que proponen. X-2-A33 y X-2-A11 agregaron al primer conjunto pero no especificaron si favorables o desfavorables y X-2-A33 aunque mencionó a la regla de tres, no muestra cómo emplearla. X-2-A31 señala que agregaría pero no indica a qué conjunto y qué casos. X-2-A9 modifica a uno de los dos conjuntos, y aunque señala el número de los casos que agregaría, no especifica si son favorables o desfavorables, además tampoco explicita a qué conjunto modificaría puesto que aunque menciona que modificaría al que tiene 60% no se sabría porque ambos conjuntos tienen 60% de favorables o desfavorables. Incluye dos cantidades que tampoco sabríamos qué representan. X-2-A28 aunque señala el número de casos favorables que corresponderían a cada conjunto, la incluimos en este apartado porque no especifica si se aumentan o disminuyen. X-2-A24 comenta que aumentaría el número de casos desfavorables pero no indica cuántos ni en qué conjuntos.

VI-2-A31 modifica al primer conjunto al restarle un caso pero no señala si este es favorable o desfavorable; muestra dos cocientes cuyos denominadores corresponden a los casos desfavorables de la situación original pero los numeradores no corresponden a los casos posibles o favorables. VI-2-A22 aunque señala el número de casos favorables que quitaría y el número de casos favorables que aumentaría, la incluimos en este apartado porque no señala a qué conjunto se refiere.

VI-2-A22 Pues que le quiten una blanca y le pasen una negra.

○○○○○ ●●●●●●●

Figura 4.156. Respuesta de VI-2-A22 que muestra modificaciones no específicas

Modificación de los casos favorables o desfavorables de los dos conjuntos

Quienes mostraron estos conjuntos fueron: VI-2-A8, VI-2-A19, X-2-A6 y X-2-A25.

X-2-A6 A la bolsa chica le quitaría 4 chocolates de fresa.
A la bolsa grande le agregaría 3 chocolates de fresa.

$$\frac{15}{x} = \frac{100}{40} = 6 = 40\% \qquad \frac{15 \times 40}{100}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{100}{60} = 12 = 60\% \qquad \frac{20 \times 60}{100}$$

Figura 4.157. Respuesta de X-2-A6 que muestra conjuntos que no son equiprobables

X-2-A6 y X-2-A25 quitan y agregan casos favorables a los conjuntos uno y dos, respectivamente. VI-2-A8 y VI-2-A19 quitan y agregan casos favorables y desfavorables en cada conjunto, respectivamente. Pero sus propuestas no representaron equiprobabilidad entre los conjuntos.

Estos alumnos no logran establecer conjuntos equiprobables, lo que nos lleva a pensar que quizá aún no logren identificar qué características deben tener los conjuntos para que sean equiprobables, o bien que dentro de su pensamiento absoluto sólo involucran a algunos elementos dentro o entre conjuntos que no les permite establecer relaciones en términos relativos para que se de la equiprobabilidad.

Sin respuesta

X-2-A17 y VI-2-A2 no respondieron.

Sin cambio en los conjuntos

VI-2-A27 y VI-2-A32 no realizan cambio alguno a la situación planteada porque consideraron que los conjuntos presentados ya son equiprobables.

Conclusión a la segunda pregunta de las situaciones II, IV, VI y X donde los alumnos tuvieron que proponer conjuntos equiprobables

Cuando a los alumnos no sólo se les solicita que resuelvan situaciones sino además que propongan otras, nos muestran el nivel de complejidad de sus situaciones y al mismo tiempo las relaciones de proporcionalidad y probabilidad que establecen, es decir:

1. Para los alumnos que propusieron igualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre conjuntos e igualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto, es necesaria la igualdad (dentro y entre conjuntos) para que los conjuntos sean equiprobables.
2. Para los alumnos que propusieron desigualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre conjuntos, pero igualdad de casos favorables y desfavorables en cada conjunto ya no es necesaria la igualdad entre los casos de los conjuntos, pero sí la igualdad dentro de cada conjunto.
3. Para los alumnos que propusieron igualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre conjuntos pero desigualdad de casos favorables y desfavorables en cada conjunto, ya no es necesario que dentro de cada conjunto el número de casos favorables y desfavorables sea el mismo.
4. Para los alumnos que propusieron conjuntos con desigualdad de casos favorables, desfavorables y posibles entre los conjuntos, y desigualdad de casos favorables y desfavorables dentro de cada conjunto.

Los incisos 1 y 2, donde $\frac{a}{a}=\frac{a}{a}$ para el 1 y $\frac{a}{a}=\frac{b}{b}$ para el 2, son propios de la probabilidad un medio. Y los incisos 3 y 4, donde $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ para el 3 y $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ para el 4 pueden presentarse también en otras probabilidades. Para los incisos 3 y 4 la dificultad cambia conforme la probabilidad sea menor a un medio, y a su vez la complejidad de los conjuntos presentados cambia conforme el orden en que se presentan los incisos, es decir, quienes plantearon conjuntos que corresponden al inciso 4 tienen un nivel mayor de complejidad que quienes presentaron conjuntos correspondientes a los otros tres incisos.

Los alumnos que establecieron relaciones cualitativas, así como los que centraron su atención en los casos favorables, desfavorables o posibles para determinar la mayor, menor o igual probabilidad entre conjuntos, ocasionalmente los llevaron a elecciones correctas, sin embargo, cuando siguieron estas mismas estrategias para igualar probabilidades, los conjuntos que propusieron no presentaron la misma probabilidad.

Una de las mayores dificultades fue cuando en la situación VI, para igualar probabilidades entre conjuntos, se les puso una restricción (que consistió en no cambiar los casos posibles). Aquí identificamos que los alumnos que no pudieron establecer equiprobabilidad conservando los casos posibles optaron por:

- Cambiar el número de casos posibles en ambos conjuntos, y
- Cambiar el número de casos posibles en un conjunto.

Las restricciones para igualar probabilidades representan una oportunidad para orientar a los alumnos a que establezcan relaciones de proporcionalidad y probabilidad que no son tan evidentes y que aún no han explorado.

Es importante comentar que muy probablemente para quienes igualaron los casos favorables y desfavorables dentro o entre conjuntos la equiprobabilidad consiste en que cada conjunto sea igual de alguna manera (como lo sucedido en los incisos 1, 2, 3 y 4), sin que necesariamente el estudiante que lleva a cabo esto identifique la proporción que presentan estos casos.

Cuadro 16. Resumen de las propuestas para tener conjuntos equiprobables

<table>
<tr><td colspan="3">Propuestas de los estudiantes para que los conjuntos presentados en las situaciones II, IV, VI y X sean equiprobables</td></tr>
<tr><td>Punto de referencia</td><td>Estrategia</td><td>Probabilidad</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Favorables y desfavorables conjunto 1

Favorables y desfavorables conjunto 2

Favorables conjunto 1

Desfavorables conjunto 1

Favorables conjunto 2

Desfavorables conjunto 2

Consideración de un número de casos favorables o desfavorables distinto al presentado en cada conjunto</td><td>Igualar casos favorables y desfavorables dentro y entre conjuntos.

Igualar casos favorables y desfavorables entre conjuntos.

Igualar casos favorables y desfavorables en cada conjunto.

Poner en proporción los casos favorables y desfavorables dentro y entre cada conjunto.</td><td>Conjuntos que presentan probabilidad $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{7}{16}$</td></tr>
<tr><td>Igual número de casos favorables entre conjuntos</td><td rowspan="4">Conjuntos que no presentan equiprobabilidad</td></tr>
<tr><td>Igual número de casos desfavorables entre conjuntos</td></tr>
<tr><td>Igual número de casos posibles entre conjuntos</td></tr>
<tr><td>Probabilidad cualitativa
-mayor número de casos favorables entre conjuntos
-igual número de favorables y desfavorables.</td></tr>
</table>

Lo que se puede decir de los resultados obtenidos en este capítulo IV

El razonamiento proporcional en el contexto de urnas

Los estudiantes que consideran:

a) Una elección con base en la relación sólo de los casos favorables, casos desfavorables o casos posibles. No se refleja algún razonamiento proporcional porque se manifiestan comparaciones en términos absolutos de las variables implicadas.

b) Doble elección o sin elección con base en dos o más relaciones entre los casos favorables, desfavorables y posibles pero de forma aislada. Muestran la transición de un razonamiento no proporcional a uno proporcional. En este sentido, poseen un rozamiento pre-proporcional porque trabajan dos comparaciones en términos absolutos que influyen en la indecisión que experimenta el sujeto.

c) Una elección vinculando más de dos relaciones entre los casos favorables, desfavorables y posibles. Manifiestan un razonamiento proporcional al presentar comparaciones en términos relativos.

El inciso “a” se presenta en la comparación cuantitativa por diferencia y en la cualitativa, y los incisos b y c se pueden presentar en la comparación cuantitativa por diferencia, por cociente o en la cualitativa.

Lo que se considera (casos favorables, desfavorables y posibles) y el tipo de estrategia que se utiliza para realizar la elección

Las estrategias pueden ser correctas o no dependiendo el tipo de situación que se trabaje y los elementos que la componen.

Una estrategia donde se elija el mayor número de casos favorables por diferencia puede ser correcta cuando en una situación se presentan dos conjuntos con un elemento idéntico, pero no cuando en una situación se presentan dos conjuntos con diferente número de casos favorables y desfavorables que pueden estar o no en proporción. De esta manera, hay estrategias que son adecuadas para determinadas situaciones porque llevan a una elección correcta, aunque tienen sus inconvenientes al no poderse generalizar. En cambio, hay otras estrategias que por su estructura pueden generalizarse a cualquier situación, llevando a elecciones correctas. Con base en lo comentado a continuación presentamos tres tipos de elecciones.

a) Elección correcta con estrategia correcta que no se puede generalizar porque es válida sólo para determinada situación.

b) Elección correcta con estrategia incorrecta que no se puede generalizar. En este caso la elección es correcta por casualidad debido al tipo de situación que se trabaja.

c) Elección correcta con estrategia correcta que se puede generalizar, porque es funcional para cualquier situación por la estructura que la conforma.

Los incisos a y b se presentan en la comparación cuantitativa por sustracción y en la cualitativa. El inciso c puede presentarse en la comparación cuantitativa por sustracción, por cociente, o en la cualitativa.

Intuiciones en probabilidad

En las situaciones planteadas donde se presenta la comparación de probabilidades, distinguimos que las intuiciones en probabilidad no son absolutas. Existen situaciones donde nuestras intuiciones pueden corresponder a las declaraciones probadas, por ejemplo, se podría afirmar que.

1. Hay más probabilidad donde hay más casos favorables;
2. Hay más probabilidad donde hay más casos posibles;
3. Hay igual probabilidad donde hay igual número de casos favorables;
4. Hay igual probabilidad donde hay igual número de casos posibles.

Sin embargo, también hay declaraciones que contradicen a las intuiciones anteriores.

1. Hay más probabilidad donde hay menos casos favorables.
2. Hay más probabilidad donde hay menos casos posibles.
3. Hay igual probabilidad donde hay diferente número de favorables.
1. Hay igual probabilidad donde hay diferente número de posibles.

Las intuiciones que corresponden o contradicen a las declaraciones establecidas, nos pueden dar un punto de partida, ya que un sujeto que ha confirmado las primeras intuiciones debe ser llevado a las segundas declaraciones con la finalidad de que complemente, cambie o modifique el esquema estructural previamente establecido.

Las intuiciones que ejemplificamos corresponden a la comparación de dos cantidades y son las que se presentan cuando se compara por sustracción. Cuando se compara por cociente intervienen cuatro cantidades, pero existe un punto donde una primera intuición puede ser influenciada por otra u otras que pueden complementar, contradecir o reemplazar a la primera. En este punto, el sujeto considera dos o más comparaciones de dos cantidades, es decir, se presentan más de dos intuiciones que lo pueden llevar a la certeza o incertidumbre de sus decisiones. Es posible considerar con base en los ejemplos que lo más idóneo para comparar probabilidades es hacerlo por medio de un cociente, porque nos llevaría a elegir la opción correcta en cualquier situación de comparación de probabilidades, sin embargo también se pueden presentar dificultades como el considerar que:

1. La correspondencia uno a uno simplifica cualquier situación.
2. La fracción mayor es donde el dividendo es mayor.

La riqueza de estrategias que se presentan al abordar situaciones de probabilidad al comparar de diversas maneras los casos favorables, desfavorables o posibles, para determinar en dónde se presenta mayor probabilidad, así como otros factores que influyen en la elección de probabilidades, nos lleva a confirmar a este tipo de situaciones probabilísticas como un contexto muy rico para tratar otros contenidos como el de proporcionalidad, que se encuentra directamente relacionado, sin anteponerlo al de probabilidad, sino al tratamiento simultáneo de ambos.

Las comparaciones cuantitativas, cualitativas y extra-matemáticas.

El tipo de comparación que los estudiantes establecen nos deja ver el estado actual de su conocimiento mediante las formas de justificación que presentan. En la comparación cuantitativa los estudiantes muestran elementos numéricos justificando sus respuestas, donde señalan su elección con base en la diferencia o igualdad de cocientes o de números enteros. Y en la comparación cualitativa los estudiantes mencionan diferencias pero no las explicitan en sus argumentos, esto quizá se deba a que como lo comenta Fischbein (1999), para ellos no es necesario probar formalmente lo que argumentan pues el estudiante no acepta que una declaración intuitivamente evidente tenga que ser probada formalmente. No obstante, en matemáticas debe llevarse a los estudiantes a presentar justificaciones formales, debido a que una evidencia intuitiva no representa por sí misma una justificación aceptada. Y sin embargo, las intuiciones deben considerarse porque se presentan cuando se descubren nuevas estrategias y se realiza un cambio de una intuición primaria a una secundaria, o bien de una intuición incorrecta a una correcta.

Las comparaciones que los estudiantes realizaron nos dejan ver que para la resolución de situaciones, como las propuestas, se deben considerar tres aspectos: (1) cuestiones formales de las matemáticas, (2) interpretaciones intuitivas de las situaciones y (3) las creencias que se tienen de las situaciones que se resuelven. Estos tres aspectos interactúan en la enseñanza y el aprendizaje de determinado contenido y aunque se debe favorecer lo formal, los alumnos deben expresar y enfrentar sus intuiciones y creencias para valorar la viabilidad de sus estrategias.

APÉNDICE B

ENTREVISTA REALIZADA AL ALUMNO NÚMERO 17

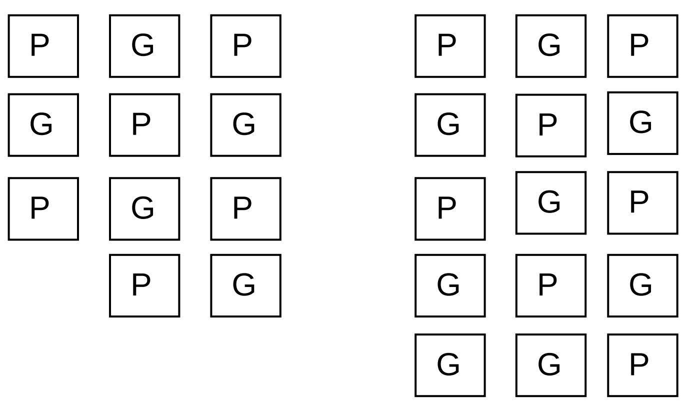
La entrevista inicia cuando el entrevistador comenta al alumno número 17 que van a platicar sobre las actividades que resolvió previamente.

SITUACIÓN I: “Tarjetas pierde y gana”
E: Entrevistador
A17: Alumno número 17

<table>
<tr><td>1</td><td>E: (Muestra y lee la situación 1).En un programa de concursos muestran los siguientes dos conjuntos de tarjetas. Y ahí vienen los dos conjuntos de tarjetas.

<table>
<tr><th colspan="3">Conjunto 1</th><th colspan="3">Conjunto 2</th></tr>
<tr><td>PIERDE</td><td>GANA</td><td>PIERDE</td><td>PIERDE</td><td>GANA</td><td>PIERDE</td></tr>
<tr><td>GANA</td><td>PIERDE</td><td>GANA</td><td>GANA</td><td>PIERDE</td><td>GANA</td></tr>
<tr><td>PIERDE</td><td>GANA</td><td>PIERDE</td><td>PIERDE</td><td>GANA</td><td>PIERDE</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>GANA</td><td>GANA</td><td>PIERDE</td><td>GANA</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>GANA</td><td>PIERDE</td></tr>
</table>

Si después de voltear y revolver las tarjetas, para que no queden en la misma posición, un participante tiene que elegir una de cualquiera de los dos conjuntos para ganar un premio, ¿de qué conjunto debe elegir su tarjeta para que tenga mayor probabilidad de ganar? Anota el procedimiento que seguiste para llegar a la respuesta.
Tú anotaste que en ninguno (Retoma las soluciones de A17 a dicha situación); en los 2 hay las mismas posibilidades de perder como de ganar porque en un conjunto hay 10 tarjetas y en el otro 14 tarjetas pero la mitad de cada conjunto de tarjetas son perder y ganar, es la misma situación de los 2 conjuntos.
¿Hiciste alguna operación, alguna cuenta, o algo?</td></tr>
<tr><td>2</td><td>A17: No.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>E: ¿No?</td></tr>
<tr><td>4</td><td>A17: No.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>E: ¿Cómo le hiciste entonces para…</td></tr>
<tr><td>6</td><td>A17: Contando nada más las tarjetas.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>E: Ah, pero de manera mental.</td></tr>
</table>

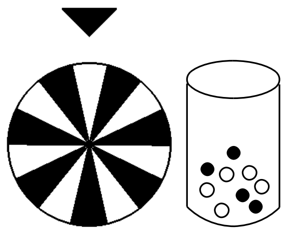
8	*A17:* Sí.
9	*E:* Y si nosotros quisiéramos que tuvieran distinta probabilidad o sea que fuera diferente, porque aquí tú dices que es la misma, pero si quisiéramos que en un concurso a lo mejor el participante tuviera más oportunidad que en otro, que no tuvieran la misma si no que tuvieran distinta probabilidad, ¿cuántas tarjetas y cuáles quitarías de qué conjunto?¿Cómo modificarías este problema? Piensa, toma tu tiempo, no hay problema, puedes hacer operaciones o algo como gustes.
10	*A17:* (La alumna observa la situación original).
11	*E:* Si quisiéramos que la probabilidad no fuera la misma para los dos conjuntos, sí no que en uno hubiera más probabilidad y en otro menos.
12	*A17:* Agregar más tarjetas.
13	*E:* ¿Agregando más tarjetas?, ¿de qué agregarías más tarjetas?
14	*A17:* De pierde. Yo digo que en éste (Señala el conjunto 1).
15	*E:* A ver dibuja aquí (le proporciona una hoja blanca y un lápiz). ¿Cuántas pondrías de perder? ¿Cómo quedarían los conjuntos?
16	*A17:* (Dibuja dos conjuntos con tarjetas). [Conjunto 1] [Conjunto 2] 
17	*E:* ¿En cuál hay más probabilidad?
18	*A17:* En éste (señala el conjunto 2).
19	*E:* Y en éste entonces hay menos probabilidad (señala el conjunto 1).
20	*A17:* Sí.
21	*E:* ¿Por qué hay más probabilidad aquí? (señala el conjunto 2).
22	*A17:* Porque hay más tarjetas para ganar. Hay… (Cuenta el número de tarjetas de

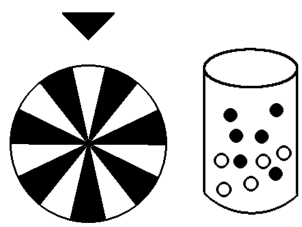
	gana) ocho.
23	*E:* Ocho tarjetas tienes para ganar y ¿para perder?
24	*A17:* Son… (Cuenta en silencio el número de tarjetas de gana) siete.
25	*E:* Y aquí cuántas hay para ganar (señala el conjunto 1).
26	*A17:* Cinco.
27	*E:* Y entonces cuál es la diferencia para que exista mayor probabilidad.
28	*A17:* Que en los dos conjuntos se le agregó una tarjeta más, pero en esa tarjeta a uno se le aumentó una de pérdida (conjunto 1) y en el otro una para ganar (conjunto 2) y en éste existe más probabilidad (Señala el conjunto 2).
29	*E:* ¿Por qué le aumentaste uno?
30	*A17:* Porque le aumenté uno.
31	*E:* ¡Ah ya!, y en éste (conjunto 1) también le aumentaste. Pero en este caso fue de pérdida.
32	*A17:* Sí.
33	*E:* Bueno, vámonos con la otra actividad.

SITUACIÓN II: “Ruleta y urna”

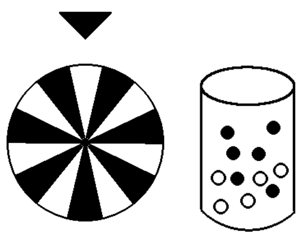
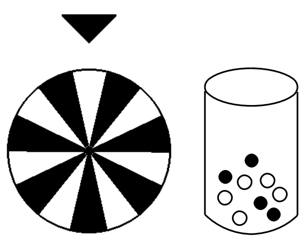
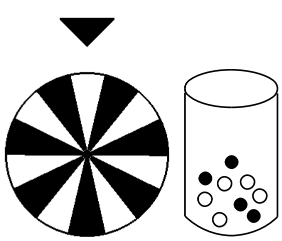
E: Entrevistador

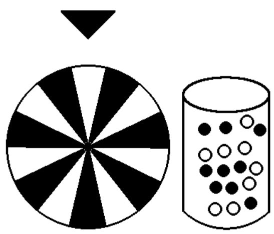
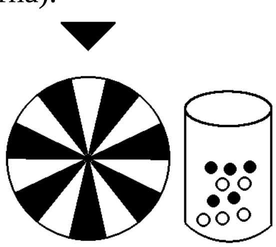
A17: Alumno número 17

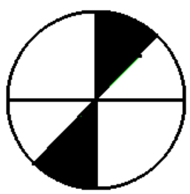
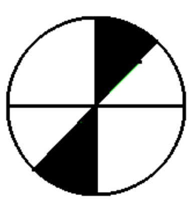
34	*E:* (Muestra la situación 2) Mira en la segunda actividad veíamos que nos dan una ruleta y una urna. 1.- En una feria hay dos juegos de apuestas: una ruleta y una urna. 
35	*A17:* Sí.
35	*E:* Y qué nos pedían.
37	*A17:* (lee la pregunta de la situación 2) Si se le apuesta a un sector blanco o a que se extraiga una bola blanca, ¿en qué juego existe mayor probabilidad de ganar?
38	*E:* Y tú, ¿en cuál le pusiste?
39	*A17:* En la urna
40	*E:* ¿Por qué?
41	*A17:* Porque contiene 9 pelotas pero en esas 9, 5 son blancas y existe más probabilidad de sacar una de color blanco.
42	*E:* ¡Ah ya! Entonces te fijaste en eso.
43	*A17:* En la urna.
44	*E:* (lee la respuesta qué A17 escribió en su hoja de trabajo) “en el de la urna porque contiene 9 pelotas pero de esas 9, 5 son blancas y existen más posibilidades que salga una de color blanco”. ¿Y existe más posibilidad de que salga?
45	*A17:* Sí.
46	*E:* (lee la siguiente instrucción que se encuentra en la hoja de trabajo) Explica cómo le hiciste para determinar tu respuesta. (Al respecto le cometa a A17) Ah mira lo interesante es que aquí pusiste 50 y 50 [%]. Pusiste observando y contando las partes blancas y negras de la ruleta y pues son un 50% a un 50% que toque un negro y un blanco y existen más posibilidades en la urna son 9 pelotas y la mayoría son blancas.

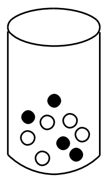
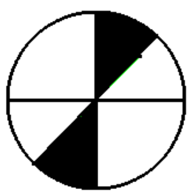
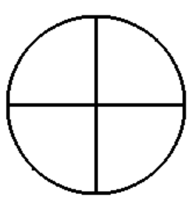
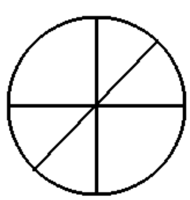
47	*A17:* Ajá, Sí, 50% de blanco y 50% de negro.
48	*E:* Y aquí (señala la urna) si lo trabajáramos con porcentajes ¿no sería igual, 50 y 50 [%]?
49	*A17:* No.
50	*E:* ¿Por qué?
51	*A17:* Porque hay una pelota blanca [más].
52	*E:* ¿Y eso ya cambiaría …
53	*A17:* Ajá, ya cambia la probabilidad.
54	*E:* ¿Cómo cuanto sería aproximadamente si lo trabajáramos en porcentaje?
55	*A17:* En porcentaje como un 65 y a un 35 más o menos.
56	*E:* mmm, ah entonces ahí ya. Y bueno, ¿qué pasaría en ésta (señala la ruleta y la urna de la hoja de trabajo) si ahora yo te pongo una situación así (toma una hoja blanca y dibuja una urna). Sí en lugar de poner cuatro negras ponemos 6 negras y seguimos conservando las bolas blancas que son cinco, y la ruleta la dejamos igual. ¿Se seguirá conservando la probabilidad? 
57	*A17:* No.
58	*E:* ¿Cambia?
59	*A17:* Cambia.
60	*E:* ¿Por qué?
61	*A17:* Porque se le aumentaron dos bolas negras y como que aumentó el porcentaje de pérdida, porque se tiene que sacar una blanca.
62	*E:* Y entonces, ¿cuál elegirías de los dos (señala la ruleta original y la nueva urna)?
63	*A17:* Sería la ruleta.
64	*E:* ¿Por qué? Has tus comparaciones, toma tu tiempo, no te preocupes, puedes hacer operaciones, dibujos, lo que a ti te ayude.
65	*A17:* (la alumna realiza cálculos en la hoja blanca) Ya.

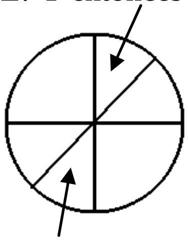
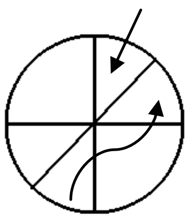
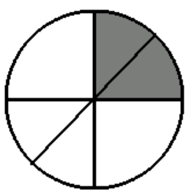
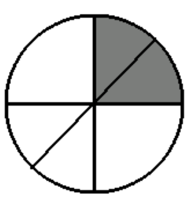
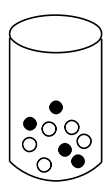
<table>
<tr><td></td><td>$11 = 100\%$ $14 = 100\%$
$5 = 45\%$ $7 = 50\%$

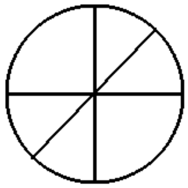
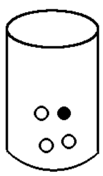
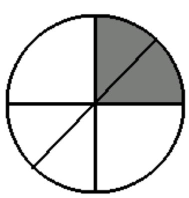
$$\begin{array}{r} 45.4 \\ 11\overline{)500} \\ 60 \\ 50 \\ 4 \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>66</td><td>E: ¿Ya?, ¿Cuál elegiste?</td></tr>
<tr><td>67</td><td>A17: La ruleta</td></tr>
<tr><td>68</td><td>E: ¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>69</td><td>A17: Porque sacando un porcentaje, hay un 50% de negras y un 50% de blancas (señala la ruleta), pero en estas son once (refiriéndose a la urna), entonces hay 5 blancas pero hay seis negras. Pero nada más sería un porcentaje de 45 (señala las bolas blancas) y este sería uno de 50 (señala los sectores blancos) aunque hay un poco más pero hay una posibilidad más.</td></tr>
<tr><td>70</td><td>E: Y ¿Cuál de los dos problemas se te hizo más fácil?, cuando estaba así (muestra los dibujos).

O cuando estaba así (muestra los dibujos).
</td></tr>
<tr><td>71</td><td>A17: Cuando estaba así.
</td></tr>
</table>

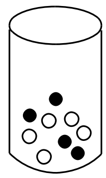
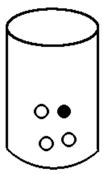
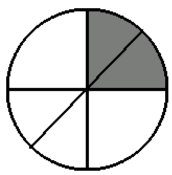
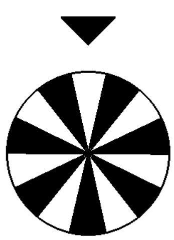
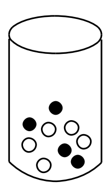
72	*E:* ¿Por qué?
73	*A17:* Porque es más notable.
74	*E:* Aja, aquí es rápido.
75	*A17:* Sí.
76	*E:* Y ¿qué pasaría ahora? Te voy a poner otro diferente. Mira si ahora seguimos conservando la ruleta, la ruleta no va a cambiar, pero ahora ponemos nueve negras y ocho blancas (toma la hoja blanca y dibuja la nueva urna). Ahora tienes esta situación, la ruleta se conserva pero ahora te presentan esto (señala los dibujos). ¿Cuál eliges? 
77	*A17:* Igual (señala la ruleta).
78	*E:* ¿Por qué?
79	*A17:* Porque sigue aumentado pero igual hay más negras todavía y tengo que sacar una blanca.
80	*E:* A ver otra vez.
81	*A17:* Si aumentaron más bolas negras, pero sigue ocupando más probabilidad de ganar esta que esta (señala la ruleta y después la urna).
82	*E:* ¿Por qué?
83	*A17:* Porque se tiene que sacar una bola blanca o sacar un cuadrito de este, un triangulito blanco, (señala un sector blanco), pero hay más negras que blancas aquí (señala la urna).
84	*E:* ¡Ah, ya! Bueno, entonces vamos a la siguiente. Y qué pasa si ahora tenemos cinco negras y cinco blancas y conservamos la ruleta (dibuja en la hoja blanca la nueva urna). 

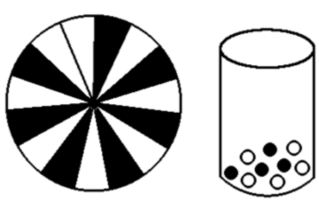
85	*A17:* Es igual, porque son diez, pero si hablamos de porcentaje es un cincuenta por ciento de negras y aquí es igual un cincuenta por ciento de negras y un cincuenta por ciento de blancas (señala la urna) y aquí (señala la ruleta).
86	*E:* ¡Ah bueno!, entonces nos vamos con la otra actividad. En la de abajo, perdón antes de irnos con la otra actividad (lee el inciso número dos de la situación 2) ¿en qué juego sería necesario agregarle o quitarle algo (sectores o bolas) para que en los dos juegos se tenga la misma probabilidad de ganar?. A continuación dibuja lo que propones. Aquí en tu dibujito qué pusiste. 
87	*A17:* Que ni yo le entiendo.
88	*E:* Bueno pero ahorita ve lo que pusiste. Si quieres leemos lo que pusiste. ¿Si te acuerdas?
89	*A17:* Ajá.
90	*E:* A ver ¿qué te salió?, ¿qué pusiste? (lee la respuesta que anotó la estudiante en su hoja de trabajo) porque la idea es ganar pero que tengan la misma probabilidad es que se gane como se pierda. Entonces explícame el dibujo que pusiste aquí.
91	*A17:* Se supone que dividí el dibujo en (cuenta las partes) cuatro partes primero y después lo volví a dividir en nada más una vez pero hacia acá y puse nada más dos sectores negros pero eran más pequeños y estos eran más grandes los blancos (muestra su dibujo). 
92	*E:* ¿Por qué unos más pequeños y unos más grandes?
93	*A17:* Para que haya más probabilidad de ganar también aquí.
94	*E:* Pero quieren que tengan la misma probabilidad, ¿en éste caso los dos tienen la misma probabilidad?. Con esto si se tendría la misma probabilidad. Y la urna la

	dejaste así.
95	*A17:* Aquí no modifiqué nada.
96	*E:* No modificaste nada. ¿Aquí cuantas bolitas [blancas] tendrías? (señala la urna de la situación original). Cinco. 
97	*A17:* Sí
98	*E:* Y sectores blancos (señala el dibujo de A17). 
99	*A17:* Cuatro.
100	*E:* Y qué pasaría si a lo mejor en lugar de poner esto (señala figura mostrada en 98), esto lo representamos, bueno igual como está ¿pero qué pasaría si estos dos pedacitos [sectores negros] los ponemos juntos? Lo voy a dibujar aquí (toma la hoja blanca). Entonces tenemos aquí la ruleta tú dices que lo dividiste en cuatro. 
101	*A17:* Sí.
102	*E:* Y luego esto lo dividiste otra vez. 
103	*A17:* Sí.

104	*E:* Y entonces tomas este pedacito y tomas este otro. 
105	*A17:* Sí.
106	*E:* Y ahora qué pasa si yo lo divido en cuatro y lo pongo aquí, pero este pedacito lo voy a dejar aquí, y este lo voy a dejar aquí. Lo único que hice fue cambiarlo de lugar acá.  Entonces ahora tienes esto. 
107	*A17:* Una cuarta parte.
108	*E: A*h sí, sí observamos (muestra la nueva ruleta con la urna de la situación original) ¿Son iguales las probabilidades? Tómate tu tiempo no te preocupes.  
109	*A:* No, yo creo que no.
110	*E:* ¿Por qué?, ¿qué estás pensando?, a ver dime.
111	*A17:* Sería así igual como una ruleta digamos.

112	*E:* A ver dibújala.
113	*A17:* (Dibuja). 
114	*E:* Qué estás haciendo.
115	*A17:* Igual como una ruleta.
116	*E:* Y ¿Cuántas partes quieres ahí?
117	*A17:* ¡Ah!, sí ya.
118	*E:* Sí quieres aquí (muestra otra parte de la hoja blanca) para que no borres.
119	*A17:* (Dibuja cambiando la ruleta de 113 por una urna) ya. 
120	*E:* A ver explícame qué hiciste.
121	*A17:* Igual hice la misma urna y aquí como está dividido el círculo, está como que dividido en cuatro partes y de esas cuatro partes, dos están divididas en dos partes, entonces considerando que no sean dos partes que sea sólo una serían cuatro cuartos y tres cuartos serían blancos y un cuarto sería negro (muestra la figura),  y entonces si lo paso a una urna serían como dibujar cuatro pelotas pero de esas cuatro pelotas pero de esas cuatro pelotas nada más una va a ser negra (muestra la urna que dibujó en 119).

122	*E:* Es interesante aquí lo que pusiste, pero entonces ya lo cambiamos en esta (argumento 119 y 121) y entonces ¿qué pasaría? es que aquí ya modificaste pero la urna, para que sea igual a esta (señala la urna original) y entonces ¿cuáles tienen la misma probabilidad? ¿Cuál sería? 
123	*A17:* (Señala la urna y la ruleta)  
124	*E:* Porque representaste la misma probabilidad, pero en el dibujo anterior y con otro dibujo (argumento 123) y entonces sería qué, ya modificamos la urna y la ruleta. ¿Y existirá otra forma donde se tenga la misma probabilidad?
125	*A17:* (Señala la urna y la ruleta nuevamente)
126	*E:* Ajá, sí aquí (señala la urna y la ruleta) tú ya me dijiste que estas dos tienen la misma probabilidad, sería esta ruleta y esta urna. Pero sí tomamos otra vez estos que estaban aquí, si tomamos estos, los primeros (señala la situación original). Vamos a dejar esto un poquito atrás (los dibujos que A 17 propone en 123). Mira, si aquí tenemos esta ruleta y esta urna nuevamente, si queremos que estas dos tengan la misma probabilidad, ¿qué modificarías?  
127	*A17:* Aumentándole yo creo que a esta (señala la ruleta) un sector blanco.
128	*E:* ¿Un sector blanco?

129	*A17:* Ajá
130	*E:* Y esto ¿para qué?
131	*A17:* Para que al contar serian (cuenta uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete) siete (y vuelve a contar uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete pero del otro color) y siete, son siete sectores de los dos colores.
132	*E:* ¡Ah ya!
133	*A17:* Hay siete negros y hay siete blancos. Si se le aumenta uno más blanco quedaría la misma probabilidad con este (señala la urna) porque aquí hay 11 pelotas pero hay cinco blancas y cuatro negras.
134	*E:* ¿y cinco y cuatro son?
135	*A17:* Cinco y cuatro son once.
136	*E:* Bueno, y ya serían
137	*A17:* No es cierto, son nueve. Ahorita me quede pensando.
138	*E:* Y entonces le aumentarías aquí(señala la ruleta). A ver dibújala cómo quedaría. Bueno esta ya sabemos que va ha tener una blanca más (señala nuevamente la ruleta).
139	*A17:* Sí
140	*E:* Y a esta (señala la urna) ¿no le vas a hacer algo?
141	*A17:* Asiente con la cabeza
142	E: A ver dibújalos aquí.
143	*A17:* (dibuja) 
144	*E:* Puedes modificarlo como quieras, no hay problema. ¿Ya está?
145	*A17:* Asiente con la cabeza.
146	*E:* Y ahora explícame tus dibujos ¿tienen la misma probabilidad?
147	*A17:* Asiente con la cabeza.
148	*E:* ¿Por qué?
149	*A17:* Porque aquí se dividió la ruleta en quince, pero ocho (sectores de la ruleta) son

	blancos y siete negros, y aquí hay cuatro pelotas negras y hay cinco blancas, y aquí de los blancos sólo se llevan como que una probabilidad más, porque siete es más que ocho [ocho es más que siete] y de aquí igual cinco es más que cuatro, y se llevan sólo uno.
150	*E:* Entonces tú consideras que aumentándole una [un sector blanco a la ruleta] ya tienen la misma probabilidad.
151	*A17:* Sí.
152	*E:* Bueno, a mi me parece aquí interesante de que en una me pones dibujitos como en esta mira (le enseña la hoja de trabajo), me parece muy interesante y dices que esta ruleta con esta urna (argumento 123) son iguales o tienen la misma probabilidad porque tienen un cuarto y un cuarto y me parece muy interesante esta forma en como lo hiciste, y en esta me pareció muy interesante porque trabajaste porcentajes entonces dices 50% y 45% (argumento 65) y en la primera que ya habías resuelto me pareció interesante de que dices: "está mitad y mitad, 50 y 50 porciento (argumento 46)" y lo escribes, pero aquí hay una pelotita más entonces como que pasa del 50 porciento y el otro disminuye en las negras y aquí haces una comparación pero de números y me dices aquí hay como que una probabilidad más que otra y una probabilidad más porque es para cuatro. Si te das cuenta trabajas de distinta manera.
153	*A17:* Ajá.
154	*E:* A qué se debe de que a la mejor no empleaste en todas porcentajes o en todas números (como fracciones) o en otras…
155	*A17:* No se, casi a mi no me gusta emplear en todas un mismo procedimiento
156	E: ¡Ah ya!
157	*A17:* Me gusta tratar con varios procedimientos para ver qué resultados obtengo.
158	*E:* Me gustó como trabajaste de distinta manera y ¿cuál te gusta más de estos (procedimientos), qué tu digas: en este estoy bien segura que si me lo ponen en un examen yo se que está bien.
159	*A17:* En el porcentaje
160	*E:* ¿Por qué?
161	*A17:* Porque aparte de que no me gusta dibujar, me gusta más trabajar con números que hacer (muestra los dibujos).

162	*E:* Ah bueno, y ¿qué pasaría si en esta (muestra los dibujos de *A17* trabajados en el argumento 143) me trabajas un porcentaje? A ver trabájame un porcentaje aquí, a ver si se obtiene la misma probabilidad como para comprobar.
163	*A17:* (trabaja con la situación). 15 = 100 8 = 53% $\begin{array}{r} 53 \\ 15\overline{)800} \\ 50 \\ 5 \end{array}$ 9 = 100% 5 = 55% $\begin{array}{r} 55 \\ 9\overline{)500} \\ 50 \\ 5 \end{array}$
164	*E:* Es bien interesante ahorita lo que estoy viendo porque fíjate que cuando estoy dando clases me ponen distintos procedimientos.
165	*A17:* (continúa trabajando) Que sale aquí como un 53% y aquí sale un 55%.
166	*E:* Y que me habías dicho, ¿cómo eran antes [las probabilidades]?
167	*A17:* Eran iguales.
168	*E:* Y ahorita qué piensas cuando estás empleando lo que a ti te gusta que dices que son los números, más que los dibujos.
169	*A17:* Sigue siendo igual, para mí sigue siendo igual.
170	*E:* No lo cambiarias.
171	*A17:* No
172	*E:* ¿Por qué?
173	*A17:* Porque ninguno de los dos [resultados] se llevan como que un número extenso se podría decir, aquí es un 53 y aquí es un 55, dos puntos de probabilidad pero no sobrepasa que sea aquí este no se que sea aquí 58 y 55 (corrige) 50.
174	*E:* Y seguiría siendo para ti la misma probabilidad.
175	*A17:* Sí
176	*E:* Me parece muy interesante. Y ahora que bueno ya viste los dibujos y los porcentajes, ¿aun así te siguen gustando más los porcentajes? o los números.
177	*A17:* Sí.
178	*E:* Son interesantes. Bueno esto ya quedó.

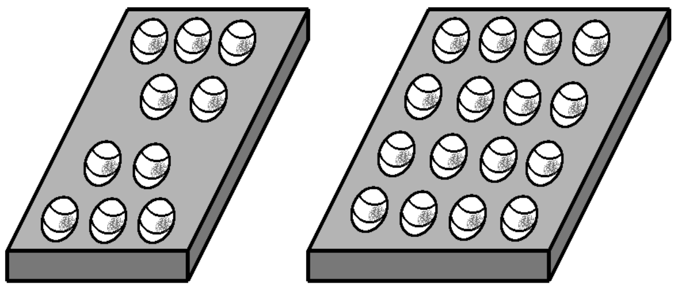
SITUACIÓN III: “loto millonario y lotería”

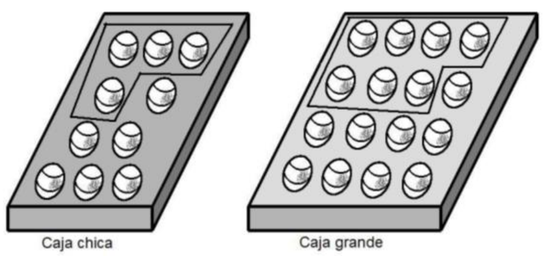
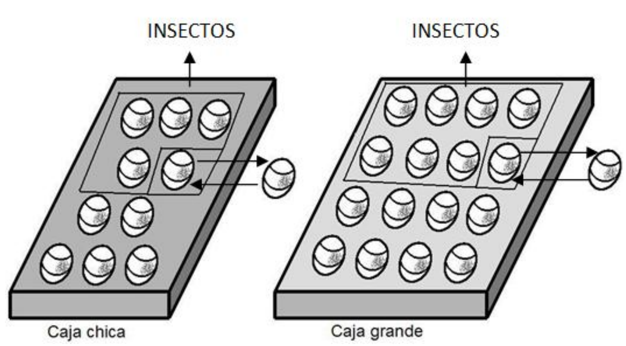
E: Entrevistador

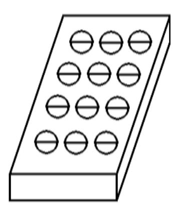
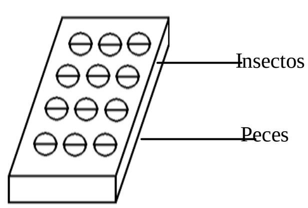
A17: Alumno número 17

179	*E:* Vamos con la número tres (*E* y *A17* leen juntos la situación III). 1.- Si quieres participar en un sorteo y sabes que con el loto millonario por cada 6 que participan 2 reciben un premio y que con la lotería por cada 9 que participan 3 reciben un premio, ¿con quién te conviene participar para que tengas más probabilidad de obtener un premio? ¿Cuál fue tu respuesta?
180	*A17:* En los dos existe la misma probabilidad de ganar que de perder.
181	*E:* ¿y qué hiciste?
182	*A17:* En los dos casos la tercera parte recibe premio, por lo tanto, en los dos casos existe la misma probabilidad porque aquí son seis y su tercera parte sería dos y aquí es nueve y su tercera parte es tres.
183	*E:* Y ya te fijaste que aquí (respuesta de *A17* a la segunda pregunta de la situación) parece interesante como razonaste: dices seis y su tercera parte es dos, nueve y su tercera parte es tres. Y qué te pareció esta actividad a diferencia de las otras [dos situaciones]. Dejemos esto, ahorita regresamos (el entrevistador suspende el análisis de la solución para atender el comentario de *A17).*
183	*A17:* Que aquí como que si es más notorio que es lo mismo.
184	*E:* Y en las otras ¿es más confuso?
185	*A17:* Sí
186	*E:* En esta (retoma la primera pregunta de la situación III) pusiste la misma probabilidad, ¿y si quisiéramos que tuvieran distinta probabilidad?, que a lo mejor en el loto millonario o en la lotería, en uno de los dos conjuntos tuvieras más oportunidad de ganar.
187	*A17:* Sería en el loto, aumentarle como que un ganador más.
188	*E:* A ver qué cantidades entonces pondrías.
189	*A17:* Sería (trabaja en una hoja lo siguiente), bueno originalmente seis y dos en el loto, y el otro es nueve y tres en la lotería.

	$\frac{6}{2} = \textit{loto}$ $\frac{9}{3} = \textit{lotería}$
190	*E:* Y ahí dices que tienes la misma [probabilidad], que es una tercera parte. Y ahora que pasaría si a lo mejor, para ganar (para atraer) más gente uno de los dos concursos tenga más probabilidad de ganar. ¿Qué cambiarias?
191	*A17:* (trabaja en una hoja lo siguiente) $\frac{6}{2} = \textit{loto}\ \frac{6}{3}$ $\frac{9}{3} = \textit{lotería}\ \frac{9}{3}$
192	*E:* Y porqué son ahora diferentes.
193	*A17:* No, no me gusto.
194	*E:* A ver ahí como lo pusiste. Por qué pones 6 y 3, y 9 y 3.
195	*A17:* (trabaja en una hoja y corrige la respuesta de 191) $\frac{6}{2} = \textit{loto}\ \frac{6}{4}$ $\frac{9}{3} = \textit{lotería}\ \frac{9}{3}$
196	*E:* A ver por qué no tienen la misma probabilidad ahora.
197	*A17:* Porque aquí dos terceras partes ganan, dos tercios ganan, y aquí nada más un tercio gana (indica las fracciones y señala la mayor). $\frac{6}{2} = \textit{loto}\ \frac{6}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{9}{3} = \textit{lotería}\ \frac{9}{3}$ $\frac{1}{3}$
198	*E:* Ah mira está bien interesante esto que acabas de poner. Entonces, ¿quién tiene más probabilidad?
199	*A17:* El loto
200	*E:* El loto, muy buena esa observación que hiciste. Vamos con el otro

201	*E:* Mira este es el de los huevitos que hicimos y lo leemos juntos. 1.- Se tienen dos cajas de huevo sorpresa y se sabe que en la caja chica 4 huevos contienen insectos y 6 huevos peces y en la caja grande 7 huevos contienen insectos y 9 huevos peces.  A mí me gustan más los insectos; ayúdame a elegir de cuál caja debo tomar mi huevo para tener mayor probabilidad de que me salga un insecto. ¿Tu qué pusiste?
202	*A17:* La caja grande.
203	*E:* En la grande y ¿porqué? Abajo creo que me especificas.
204	*A17:* (Lee la indicación y su respuesta) Describe el procedimiento que seguiste para realizar la elección, hay 7 huevos de insectos y 9 de peces es casi la mitad de la caja que tiene más huevos de insectos. Es un poco más de la mitad que 7.
205	*E:* Y en esta [caja chica] cuánto es, por que aquí dices un poco más de la mitad, pero aquí cuanto sería entonces en la [caja] chica.
206	*A17:* La [caja] chica sólo tiene cuatro que contienen insectos y en la caja grande hay siete.
207	*E:* A ver explícame. Ahí cómo ves la mitad y cómo aquí, ¿cómo los comparas? Si quieres escribe aquí lo que quieras o ahí mismo en la hoja, o donde tu quieras.
208	*A17:* Creo que no es así porque …. No, no es cierto (analiza en silencio).
209	*E:* Tu revisa, revisa no te preocupes por el tiempo. Ve tu respuesta si quieres para

	que te acuerdes.
210	*A17:* No se porque escogí la grande si las dos tienen la misma probabilidad ahorita que la estoy analizando ya.
211	*E:* Pero a ver explícame primero esta (respuesta original), ¿cómo es que comparaste en ese momento?
212	*A17:* Según yo.
213	*E:* En ese momento y ya después nos vamos a otra idea que tu tengas ahorita.
214	*A17:* Se supone que yo había comparado los insectos que son los que me piden (retoma la consigna), a mi gusta más los insectos ¿De qué caja debo de tomar mi huevo para que tenga mayor probabilidad? Y según yo dije que era la caja grande.
215	*E:* ¿Por qué?
216	*A17:* Porque había siete de insectos y aquí nada más eran cuatro (agrupa los huevitos en las cajas). 
217	*E:* Ajá, pero aquí se me hizo interesante cuando pones esto (refiriéndose a la respuesta de *A17* en 204) hay siete huevos de insectos y nueve de peces es casi la mitad (hace énfasis) ¿Por qué?
218	*A17:* Porque aquí nada más falta un huevito para que sean ocho y ocho. Y no me puse a pensar que también aquí falta un huevito para que sean cinco y cinco. 

219	*E:* Ah mi mira en eso no te habías fijado.
220	*A17:* En eso no me había fijado y ahorita que lo estoy viendo otra vez.
221	*E:* Y ahora que estás viendo eso, ¿qué consideras?, ¿cambiarias tu respuesta?
222	*A17:* Sí.
223	*E:* Sí la cambiarias. Y en este caso, ¿cuál eliges o cuál me recomiendas? Piénsalo, piénsalo utiliza tus estrategias para que me digas cuál me recomendarías.
224	*A17:* Mmm, ninguno, tienen lo mismo.
225	*E:* Tienen lo mismo
226	*A17:* Sí.
227	*E:* Bueno, mira que interesante es esta situación. A ver vamos a la otra pregunta. (Lee la pregunta) 2.- Si se quiere que en ambas cajas exista la misma probabilidad de extraer un insecto, en que caja sería necesario agregar o quitar huevos con insectos o peces para que en las dos cajas se tenga la misma probabilidad de obtener un insecto. Aquí que me habías dicho (señala la respuesta de la alumna).
228	*A17:* Agregar dos huevos más de insectos. Sí, a cada caja agregarle dos huevos más de insectos.
229	*E:* En este caso aquí (señala el dibujo de *A17*) los tienes dibujados serían dos más de insectos. 
230	*A17:* Sí
231	*E:* A ver colócalos. Aquí junto si quieres colócalos.
232	*A17:* (Señala los insectos y los peces) 

233	*E:* Y aquí ya tendrías la misma (probabilidad), ¿cambio la situación?
234	*A17:* No
235	*E:* ¿Por qué?, ¿por qué dices que no?
236	*A17:* De todos modos sigue siendo la misma probabilidad aunque le agregue o le quite
237	*E:* Vámonos con la otra actividad. Lo curioso es que aquí ya, al analizarlo, te diste cuenta de algo diferente, y ya planteas algo diferente.
238	*A17:* Sí

SITUACIÓN V: “Futbol soccer o basquetbol”

E: Entrevistador

A17: Alumno número 17

239	*E:* (Lee la situación). 1.- En una escuela se preguntó a los alumnos de dos grupos sobre el deporte que les gusta practicar más, si futbol soccer o basquetbol. En el grupo A, que está conformado por 28 alumnos, 21 comentaron que el futbol soccer y 7 que el basquetbol, mientras que en el grupo B que está conformado por 24 alumnos 18 prefirieron el futbol soccer y 6 el basquetbol. ¿En qué grupo hay mayor probabilidad de que al elegir un alumno al azar le guste practicar el futbol soccer?
240	*A17:* En el grupo “A”.
241	*E:* Ahí me habías dicho que en el grupo “A” y ahora, ¿por qué?
242	*A17:* (Lee su respuesta). En el grupo A hay 28 alumnos, en el B hay 24, en el grupo A hay más de 20 alumnos que practican el soccer y en el grupo B son menos de 20 y existen 3 probabilidades de que se escoja a un alumno que le guste el soccer.
243	*E:* ¿A qué te referías con esto?, bueno acuérdate bien de lo que pusiste para que me expliques.
244	*A17:* Ya, que en uno de los grupos hay tres (corrige) cuatro alumnos más (en total) pero.
245	*E:* En qué grupo hay cuatro alumnos (más en total).
246	*A17:* En el grupo “A” pero de esos cuatro hay tres más que les gusta el soccer y sólo hay uno que le gusta el básquet, por lo tanto en el otro grupo (grupo B) son 18 que les gusta el fut y 6 que les gusta el básquet, que sería 21 a 18, entonces 18 sería el número menor y 21 el mayor pero aquí (señala el grupo A) hay tres alumnos más que les gusta el futbol y aquí (señala al grupo B) hay 18.
247	*E:* Tres alumnos más.
248	*A17:* Sí.
249	*E:* A ver, como está, futbol soccer 21 y aquí 18, ahí es donde me dices que hay más alumnos (cuatro más).

250	*A17:* Sí.
251	*E:* Y en estas no te gustaría a ti trabajar, o sea, me habías dicho que te gusta mucho trabajar con números, en este caso hiciste tus operaciones mentalmente y fuiste restando y viendo quien era mayor y quien era menor, si utilizaras tu estrategia de porcentajes o de fracciones como lo hiciste en la otra (situación 2) ¿crees que a lo mejor cambiarias tu respuesta?
252	*A17:* Yo creo que no.
253	*E:* ¿No?
254	*A17:* No
255	*E:* A ver, vamos a utilizar porcentajes y a ver me dices que sucede, porcentajes o fracciones lo que tu quieras.
256	*A17:* (escribe en las hojas) A: $28 = 100\%$, $21 = 78\%$ B: $21 = 100\%$, $18 = 85\%$ $28 \overline{)2100}$ = 78; 240; 26 $21 \overline{)1800}$ = 85; 120; 0 28 X8 = 196 21 X8 = 168; 180; 12 21 X5 = 05
257	*E:* (Cuando ve que termina A17 de escribir pregunta) ¿Cómo ves?
258	*A17:* Si cambiaria mi respuesta.
259	*E:* Y bueno, hasta ahorita si te das cuenta has utilizado muchas estrategias y todas son muy interesantes en la forma como vas analizado ¿Cuál utilizarías de todas tus estrategias? para estar bien segura de que son …
260	*A17:* El porcentaje
261	*E:* Ahorita sería [esa estrategia], ¿Por qué?
262	*A17:* Porque te da un resultado con más exactitud.
263	*E:* Y que pasa cuando estás haciendo este tipo de comparaciones aquí (argumento 246) donde no utilizaste porcentajes.

264	*A17:* Pues a simple vista se ve como que en el primer grupo [A] se pueden sacar más alumnos que les guste el futbol pero si lo analizo con porcentajes ya no. Sí lo veo de esta forma (argumento 246) me confundo.
265	*E:* Ah, y que te permiten los porcentajes.
266	*A17:* Sacar un resultado con más exactitud.
267	*E:* Pero en la actividad 2. Ahí no utilizaste porcentajes. Y ¿Cómo te pareció esa actividad? ¿Por qué no utilizaste porcentajes?
268	*A17:* Silencio.
269	*E:* ¿No sabes porqué no utilizaste?
270	*A17:* No
271	*E:* Veamos tu respuesta.
272	*A17:* (Lee su primer respuesta de la situación II) en la urna porque contiene 9 pelotas pero de esas 9, 5 son blancas y existen más probabilidades que salga una de color blanca.
273	*E:* Y si te acuerdas que aquí (señala la urna) habíamos dicho que eran mitad y mitad. Sí aquí (situación II) lo hiciste por escrito (textual) y aquí (argumento 256) lo hiciste con porcentajes (numérico), entonces aquí dices que esto (señala los porcentajes) te da más seguridad, pero en el caso de esta respuesta (de la situación II) estas bien segura que está correcta.
274	*A17:* Sí
275	*E:* ¿Porqué?
276	*A17:* Porque es un poco más notorio.
277	*E:* Ah mira es algo que no me habías dicho. Se me hace interesante. Y con esta ya (regresa a la situación V). Y bueno ya hiciste tu procedimiento aquí (argumento 256) con porcentajes y entonces ¿cuál sería el grupo en donde hay más probabilidad?
278	*A17:* En "B"
279	*E:* Este es del (señala el porcentaje del grupo A en el argumento 256)
280	*A17:* "A"
281	*E:* Entonces en el grupo "B" hay más probabilidad dices

282	*A17:* Sí.
283	*E:* Me gustan todas tus estrategias. Vamos con la situación VI.

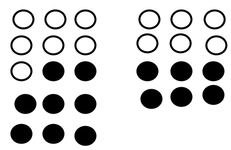
SITUACIÓN VI: "Servicio Militar"

E: Entrevistador

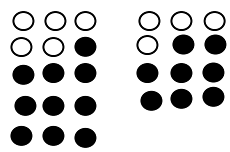
A17: Alumno número 17

284	*E:* (Lee la situación 6) 1.- Para tramitar la cartilla del Servicio Militar se puede acudir a 2 campamentos. En el campamento A, al hacer el sorteo, por cada 15 que se inscriben a 8 les corresponde bola blanca y a 7 bola negra, y en el campamento B por cada 12 que se inscriben a 7 les corresponde bola blanca y a 5 bola negra. ¿En qué campamento existe mayor probabilidad de obtener bola negra para que no te toque marchar?
285	*A17:* Es en el grupo (campamento) A.
286	*E:* Si, es lo que pusiste. Y a ver porqué dijiste que en el grupo (campamento) "A".
287	*A17:* En el grupo (campamento) "B" [A] son siete probabilidades más que en el cinco (corrige) más que en el "A" [B] que sólo son cinco, pero hay dos probabilidades más [menos] en el "B" que eso es lo que puse.
288	*E:* Mmm, y como qué comparaste con qué.
289	*A17:* Era este.
290	*E:* Si quieres puedes anotar aquí (proporciona a *A17* una hoja en blanco) como hiciste tus comparaciones.
291	*A17:* (realiza anotaciones) eran 7 de bola negra (campamento A) y… $\frac{7}{8}$
292	*E:* Anota para que no se nos olvide.
293	*A17:* …y ocho son de blanca y en el otro (campamente B) son este siete blancas y cinco negras. A B $\frac{7 = negra}{8 = blanca}$ $\frac{7 = blanca}{5 = negra}$
294	*E:* Y ahora cómo te fijaste o qué, porque aquí dice no (lee la respuesta que A17 tenía), en el grupo (campamento) "B" [A] son siete probabilidades y en el A [B]

	sólo son cinco, dos probabilidades más que en el “B”.
295	*A17:* Sí, porque aquí (grupo B) las negras serían cinco y aquí (grupo A) son siete, son aquí (grupo A) dos más que les toca bola negra para que no marchen.
296	*E:* Y nada más te fijaste en las negras.
297	*A17:* Sí
298	*E:* Porque bueno, en las otras actividades (I, II, III, IV yV) te fijaste en cuántas hay en total, y aquí (argumento 295) únicamente en las bolas negras. Bueno y crees que puedes hacer alguna otra comparación para obtener tu resultado o únicamente esta.
299	*A17:* Mmm, con un porcentaje.
300	*E:* ¿Y eso te ayudaría?
301	*A17:* Ajá.
302	*E:* A ver puedes hacerlo, aquí (donde previamente ya había hecho anotaciones argumento 293).
303	*A17:* Escribe. A B $7 = negra$ $7 = blanca$ $8 = blanca$ $5 = negra$ $15 = 100\%$ $12 = 100\%$ $7 = 46\%$ $5 = 41\%$
304	*E:* Y de dónde sacas los quince.
305	*A17:* (señala el 7 y el 8 del campamento A)
306	*E:* Ya, ¿y qué pasó?
307	*A17:* Que sí, sigue siendo el grupo “A”.
308	*E:* Entonces aquí (situación VI) resulta que coincidió el porcentaje con ...
309	*A17:* La respuesta.
310	*E:* Y aquí (situación VI) no habías utilizado porcentajes. Y aquí abajo qué, a ver (lee la pregunta dos de la situación VI) si se conserva por cada 15 y por cada 12, ¿cómo modificarías el número de bolas blancas y negras en cada campamento para que en ambos tengas la misma probabilidad de obtener bola negra? Es esta

	(señala respuesta del inciso 2 de la situación VI), entonces aquí (indica las bolitas que se señalan como grupo A) son, ¿cuántas bolitas?  Grupo A Grupo B
311	*A17:* Quince.
312	*E:* Entonces conservaste el quince. Y aquí (indica las bolitas que se señalan como grupo B).
313	*A17:* Doce.
314	*E:* Y conservaste el doce. Pero aquí (grupo A), ¿cuántas blancas pusiste?
315	*A17:* Siete
316	*E:* ¿Y aquí (grupo B)?
317	*A17:* Seis.
318	*E:* Y, ¿acá negras? (grupo A)?
319	*A17:* Ocho y acá (grupo B) igual son seis.
320	*E:* A ver cuéntalas de nuevo.
321	*A17:* Sí, son siete blancas y son ocho negras (grupo A), y en el otro son seis blancas y seis negras
322	*E:* Y así dices que tiene la misma probabilidad (ambos grupos).
323	*A17:* No.
324	*E:* ¿Porqué?
325	*A17:* (se mantiene en silencio y reflexionando)
326	*E:* Ahí en lo que tú propones dices que tienen la misma probabilidad.
327	*A17:* (asiente con la cabeza y se mantiene en silencio reflexionando), pero como que (se mantiene en silencio), viéndolo y analizándolo como que no, ya no sería la misma probabilidad.
328	*E:* ¿Por qué?
329	*A17:* Porque aquí (grupo A) son quince y aquí (grupo B) son doce, pero aquí (grupo B) si se pudiera como que sería la mitad y la mitad, mitad blanca y mitad

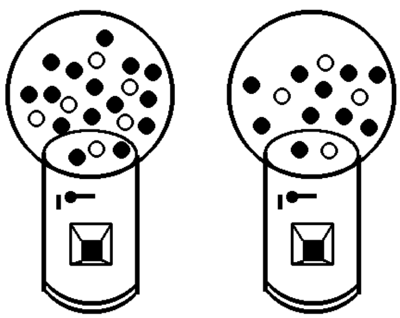
	negra pero ya aquí (grupo A) ya no se podría porque aquí (grupo A) siempre hubiera una bola más blanca o una bola más negra.
330	*E:* Y podríamos buscar alguna forma de que tengan, conservando el quince y el doce, que tengan los dos la misma probabilidad.
331	*A17:* No.
332	*E:* ¿Por qué?
333	*A17:* Porque si se conserva el quince (del grupo A) es como que un número que es non, y este es par (señalando al doce). Y aquí (señalando al doce) sería igual mitad blanca y mitad negra y aquí (grupo A) siempre hubiera una más blanca o una más negra.
334	*E:* Y para que se tenga la misma probabilidad en todo caso tú ¿qué estas considerando?
335	*A17:* Yo diría que sería este (se mantiene en silencio).
336	*E:* Aquí (señalando al doce) lo que veo es que me dices que es mitad y mitad.
337	*A17:* Sí
338	*E:* Y aquí (señalando al quince) me dices que como es non no se puede poner mitad y mitad.
339	*A17:* No
340	*E:* Y entonces, ¿necesariamente se tiene que poner la mitad y mitad para que tengan la misma probabilidad?
341	*A17:* Sí.
342	*E:* Vamos a ver una actividad que tenemos por allá (refiriéndose a la situación III donde trabajo con tercios). Aquí me dijiste 6 y 2 ¿cuánto es?
343	*A17:* Su tercera parte.
344	*E:* ¿y aquí nueve y tres?
345	*A17:* Su tercera parte.
346	*E:* ¿Y son mitad y mitad?
347	*A17:* No
348	*E:* Bueno a mi se me hace muy curioso porque aquí (situación III) dices en los dos existe la misma probabilidad de ganar que de perder.

	Y ahora qué consideras, ahora que ves esta actividad (situación III) y ves esta otra (situación VI).
349	*A17:* (se mantiene un momento en silencio reflexionando) tienen la misma probabilidad (refiriéndose a la situación VI).
350	*E:* ¿Porqué?
351	*A17:* Sacándole como que tercera parte al quince y tercera parte al doce.
352	*E:* A ver inténtalo. Vamos a intentarlo en esta hoja (proporciona una hoja en blanco), ahí inténtalo y me dices que.
353	*A17:* (escribe y comenta) que en los dos existe la misma probabilidad. $\frac{15}{5}$ $\frac{12}{4}$  Grupo A Grupo B
354	*E:* Y ahí (señala los dibujos del argumento 353) ¿crees que se tenga la misma probabilidad?
355	*A17:* Sí
356	*E:* ¿Porqué?
357	*A17:* Porque de aquí (grupo A del argumento 353) se obtiene la tercera parte de quince que es cinco y aquí (grupo B del argumento 353) se obtiene también la tercera parte de doce que es cuatro.
358	*E:* La tercera parte de doce.
359	*A17:* Que es cuatro
360	*E:* Mmm, Interesante la forma en cómo lo pusiste. Y qué consideras de lo qué habías pensado aquí (argumento 310) que me habías dicho y que ahora me pones esto (argumento 353) otro. Aquí (argumento 333) me habías dicho que era mitad y mitad, y qué consideras ahora que vemos tu actividad (situación) número III.
361	*A17:* Que no precisamente para tener la misma probabilidad se tiene que tener la mitad para ganar y la mitad para perder.

362	*E:* ¿Entonces?
363	*A17:* Se pueden sacar cuartas partes, quintas partes, sextas partes en los ejercicios, pero en los dos se va ha trabajar lo mismo.
364	*E:* Bien interesante todo lo que me dices aquí. Vamos con otra actividad, ya viste como vamos relacionando lo que hiciste antes con lo que ahorita vas haciendo.
364	*A17:* (Asiente con la cabeza).

E: Entrevistador

A17: Alumno número 17

365	*E:* Mira esta actividad, es la actividad siete, y vamos a ver, tenemos ahí dos máquinas (lee la situación). 1.- En un centro comercial hay 2 máquinas “traga monedas” en donde al depositar una moneda de $5 las pelotitas son revueltas automáticamente y se puede extraer una.  Máquina A Máquina B Un niño llega y desea extraer una pelotita blanca, ¿cuál máquina le recomendarías para que tenga mayor probabilidad de obtener el color deseado? ¿Qué máquina le pusiste ahí?
366	*A17:* La máquina “A”
367	*E:* A ver, vamos a ver porqué
368	*A17:* Porque en general (total) se tienen veintiuna pelotas en la máquina “A” y en la “B” catorce. Pero de esas veintiuna de la máquina “A” seis son blancas y en la máquina “B” son catorce pero sólo tiene dos oportunidades más para obtener una pelota blanca.
369	*E17:* Mmmm, y ahorita que lo estas leyendo nuevamente ¿cómo ves tu respuesta?, analízala, recuerda lo que pusiste porque luego ya no nos acordamos. ¿Crees que esté bien?
370	*A17:* Ya, que de esas 21 pelotas que hay en la máquina “A” hay seis blancas y de aquí de la máquina “B” hay cuatro blancas, y aquí (máquina A) se tienen como que dos pelotas más para cuando pongas la moneda y puedas sacar una pelota

	salga yo creo que una blanca, dos pelotas blancas más que aquí (máquina B) que podamos sacar.
371	*E:* Entonces aquí (máquina A) tu me dices que hay dos blancas más que aquí (máquina B) entonces hay más probabilidad. (Retoma la actividad VI) mira aquí hay cuatro y aquí hay (cuenta) tres, cuatro, cinco.
372	*A17:* Sí.
373	*E:* Y aquí (situación VI) ¿qué puedes ver?, en esta actividad que tu me habías puesto y esta actividad (situación VII). Si razonáramos esta (situación VI) como ahorita tu estas razonando esta (situación VII) ¿Qué pasaría en esta (situación VII)?
374	*A17:* (piensa en silencio)
375	*E:* ¿Si me explico o no?
376	*A17:* No, no me quedó la idea clara.
377	*E:* Mira, aquí (situación VII argumento 370) tú me dices que hay dos pelotitas más blancas y entonces aquí hay más probabilidad porque hay dos más blancas.
378	*A17:* Sí
379	*E:* Suponiendo que estas fueran las máquinas (situación VI).
380	*A17:* Sí
381	*E:* Y están revueltas las pelotitas.
382	*A17:* Sí
383	*E:* Que pasaría si lo que tu me estas diciendo aquí (VII) ahora lo ponemos en este ejemplo (VI).
384	*A17:* Sería como que mmm, igual sacando porcentaje para saber exactamente si la respuesta que di es correcta.
385	*E:* Y ahorita como está tu respuesta. ¿Por qué no me dices sí maestra esta es la correcta?
386	*A17:* Porque también pasó eso en una actividad (situación VI) que yo elegí que era la correcta y no, era la otra respuesta. Tal vez yo ahorita la veo así segura, así diciéndole mil porciento segura que la maquina “A” tiene más pelotas y por eso

	nada más está bien. Pero en la otra igual le dije que había igual más cantidad de una cosa pero no, no era eso, sino que había menos pero había como que mas, había más y menos porque así (situación VII) son veintiuna digamos en general [total] (máquina tragamonedas A), pero seis son blancas y aquí (máquina tragamonedas B) son catorce en general [total] y cuatro son blancas. Yo le pudiera decir que estoy mil porciento segura que esta es la correcta, pero tal vez si lo paso a porcentajes ¡no!
387	*E:* ¿Que te permiten los porcentajes?
388	*A17:* Sacar una respuesta exacta.
389	*E:* Mira se me hace interesante que primero ves las puras blancas y después me dices cuántas hay en total y cuántas son blancas.
390	*A17:* Ajá.
391	*E:* Y entonces me gusta como relacionas porque observas muchas cosas. Vamos a ver lo que me estás platicando de los porcentajes y a ver qué sucede.
392	*A17:* (trabaja en hojas) A: $21 = 100\%$ $6 = \%$ 28.5% B: $14 = 100\%$ $4 = 28.5\%$ Sabe algo, que en los dos existe la misma probabilidad si le sacamos porcentaje.
393	*E:* Y eso que te permite ver en esta actividad.
394	*A17:* Que con los porcentajes se puede ver un poco más exactamente en donde hay una mejor [mayor] probabilidad y así a simple vista no, como que nos engañamos nosotros mismos.
395	*E:* Si es importante aquí como lo viste primero.
396	*A17:* Sí
397	*E:* Y como ahora que compruebas esto, tu te das cuenta que… y mira lo curioso es que aquí (porcentajes del argumento 392) trabajaste porcentajes y aquí (fracciones del argumento 353) trabajaste …
398	*A17:* Fracciones.
399	*E:* ¿Crees que puedas trabajar esto (argumento 353) aquí (argumento 392)?

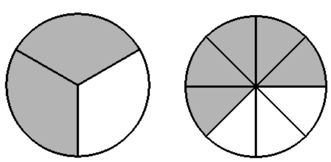
400	*A17:* Sí
401	*E:* A ver, vemos a ver que sucede, porque es interesante que aquí (argumento 353) trabajaste fracciones.
402	*A17:* Serían las pelotas igual, serían veintiuno, entonces serían veintiuno aquí, aquí serian blancas (trabaja con la situación VII y escribe). $\frac{21}{6}=\frac{bolas-en-general}{blancas}$ $\frac{14}{4}=\frac{bolas-en-general}{blancas}$
403	*E:* Ponle la B de blancas para que no se me olvide. Y ahora ¿qué observamos ahí?, que me puedes decir de esas () cantidades
404	*A17:* Que en el…(silencio)
405	*E:* Porque aquí (retoma el argumento 353) se me hizo curioso como me dijiste, quince y ¿qué dijiste?
406	*A17:* Cinco
407	*E:* Y una tercera parte si te acuerdas que habíamos dicho. Y aquí (argumento 353)
408	*A17:* doce y cuatro.
409	*E:* Y nuevamente.
410	*A17:* Una relación que hay con los números.
411	*E:* Y aquí (argumento 392) crees que se pueda encontrar, vamos a ver.
412	*A17:* (escribe) $\frac{21}{6}=\frac{bolas-en-general}{blancas}=3.5$ $\frac{14}{4}=\frac{bolas-en-general}{blancas}=3.5$
413	*E:* ¿Qué divides?
414	*A17:* Las cantidades
415	*E:* Y, ¿en este caso?
416	*A17:* Y aquí (primer fracción del argumento 412) también dividiendo veintiuno

	entre seis da tres punto cinco y aquí (segunda fracción del argumento 412) dividiendo catorce entre cuatro igual también da tres punto cinco.
417	*E:* ¿Esto ya lo habíamos visto?
418	*A17:* No
419	*E:* Y ahora ¿cómo le haces aquí (argumento 412)?, ¿cómo ves esto?
420	*A17:* Que aparte de que las fracciones tienen que ver más o menos con los porcentajes, con el método de porcentaje y fracciones se puede sacar exactamente y también si aquí (argumento 353) hacemos lo mismo, al dividir quince entre cinco da tres y al dividir doce entre cuatro da tres y sería la misma probabilidad.
421	*E:* Interesante, vamos con otra.

SITUACIÓN VIII: “Diurna o Técnica”

E: Entrevistador

A17: Alumno número 17

422	*E:* (Lee la actividad) 1.- Una niña se quedó en una secundaria Diurna y su hermano en una Técnica. Para determinar el turno en el que cursarán, serán seleccionados de manera aleatoria; ambos quieren estar en el turno matutino pero saben que en la Diurna hay (se detiene y pregunta) ¿ahí qué sería?
423	*A17:* En la diurna hay dos tercios de probabilidad de que se quede en la mañana, mientras que en la técnica hay cinco octavos, ¿quién tiene mayor probabilidad de quedarse en el turno que desea? Según yo en la técnica.
424	*E:* A ver, ¿cómo le hiciste?
425	*A17:* Porque hay cinco probabilidades de ocho en general [total], mientras que en la diurna solo hay dos y tres.
426	*E:* Y que pasaría si aquí (retoma los dibujos con los que *A17* argumenta su respuesta a la situación VIII), imagínate si yo recorto este circulo y recorto este otro circulo y entonces es una mica transparente donde tu puedes ver aquí que están iluminados y los sobre pones, entonces ¿cómo ves?¿cómo quedaría? 
427	*A17:* Yo creo que quedaría igual, el mismo sombreado que tiene aquí (señala el primer circulo) es el mismo sombreado que tiene aquí (señala el segundo circulo).
428	*E:* ¿Por qué?
429	*A17:* Porque yo creo que así a simple vista, si los ponemos así como usted dice, el mismo espacio que está en blanco aquí (señala el primer circulo) sería el mismo que esta en blanco [aquí] (señala el segundo circulo), sería poner los mismos aquí, sería dos tercios y aquí cinco octavos y yo creo que sería el mismo.
430	*E:* Entonces tú dices que dos tercios y cinco octavos son lo mismo.
431	*A17:* Sí.

432	*E:* Y ¿cómo me puedes comprobar que dos tercios y cinco octavos son lo mismo?
433	*A17:* Dividiéndolo
434	*E:* ¿Qué divides?
435	*A17:* Dos entre tres y cinco entre ocho.
436	*E:* A ver hay que trabajarlo.
437	*A17:* (Opera en la hoja) $\frac{2}{3} = 0.666$ $\frac{5}{8} = 0.6$
438	*E:* ¿Dio lo mismo?
439	*A17:* No
440	*E:* Y dices qué ¿cómo me habías dicho aquí?
441	*A17:* Que la técnica.
442	*E:* Pero, ¿por qué?
443	*A17:* Porque yo creo que fue la vista que me engañó porque no me puse a pensar que igual dividiendo podía sacar un resultado más acertado que dibujándolo nada más.
444	*E:* Pero aquí me dices, aquí (del argumento 425) mira, porque son cinco probabilidades y en este caso en tu dibujito (del argumento 426) ¿cuál representa cinco probabilidades?
445	*A17:* Este (el segundo circulo del argumento 426)
446	*E:* ¿y ocho?
447	*A17:* Son generalmente [en total].
448	*E:* Mientras que en la Diurna sólo tienes.
449	*A17:* Dos.
450	*E:* Pero aquí tu respuesta se me hizo interesante porque dices que en esta (segundo circulo del argumento 426) tiene cinco y en esta (segundo circulo del argumento 426) tiene dos, entonces si lo vemos así tú dices que es en la técnica. Y a ver aquí (argumento 437) en lo que hiciste. A ver sácalo otra ves el primero.
451	*A17:* Trabaja en la hoja.

	$\frac{2}{3} = 0.6$ $\frac{5}{8} = 0.6$
452	*E:* ¿Por qué nada más pones uno [un decimal], un seis?
453	*A17:* Porque es más fácil trabajar con uno sólo décimo [decimal] que trabajar con millones de décimos [decimales].
454	*E:* Bueno, ahora qué te parece si aquí (hoja) ponemos todo lo que nos dice aquí (calculadora).
455	*A17:* Nos esta faltando algo (realiza las divisiones). Hay menos números (refiriéndose a los cocientes). $\frac{2}{3} = 0.6$ 0.666666666 $\frac{5}{8} = 0.6$ 0.625
456	*E:* Aquí (señala el cociente periódico del argumento 544) yo creo que si esta más grande esta (se refiere a la hoja) nos seguimos. ¿Y aquí (se refiere al cociente no periódico)?
457	*A17:* Como más corto.
458	*E:* Pero ahí, ¿qué observas en esas dos cantidades?, aparte de la cantidad de numeritos.
459	*A17:* Que hasta aquí son los números iguales (0.6 y 0.6), pero después del punto seis aquí hay un seis (0.66) y aquí hay un siete (dos 0.62), y ya estoy trabajando otro tipo de cantidades.
460	*E:* Y ¿Cómo consideras que son esas cantidades (0.666666666 y 0.625)?
461	*A17:* Para mi serían iguales hasta aquí (0.6 y 0.6).
462	*E:* Pero si consideramos toda esta cantidad y toda esta cantidad (0.666666666 y 0.625) ¿Cómo consideras que son esas cantidades?
463	*A17:* Yo creo que seria mayor esta (0.666666666).
464	*E:* ¿Por qué?
465	*A17:* Aparte de que tiene menos (más) numeritos, por que si lo pasamos a fracción sería como tener una gran parte más que aquí (0.625). Porque ya hablando de

	números más extensos ya como que dividiéndolo como que es fácil y aquí no tiene una terminación (0.66666666…) y esta como tiene una terminación bien (0.625).
466	*E:* Y entonces ¿cuál consideras que es mayor?
467	*A17:* Esta (0.666666666).
468	*E:* Esta consideras que es mayor. Es interesante como salen cosas.
469	*A17:* Sí
470	*E:* Y porque en un principio nada me habías dicho, ¿qué nada más hasta ahí (0.6)?
471	*A17:* Porqué hasta aquí (0.6) según yo mi cantidad es igual.
472	*E:* Y qué pasaría si aquí tomamos tres y aquí tomamos estos tres (refiriéndose a los tres decimales de cada cantidad, 0.666 y 0.625). ¿Cuál sería mayor?
473	*A17:* No pues ya cambia ahí.
474	*E:* ¿Por qué?
475	*A17:* Porque es cero punto seis cientos sesenta y seis, y aquí ya sería punto seiscientos veinticinco.
476	*E:* A ver, vamos a ver entonces ¿cuál es mayor?
477	*A:* Según yo este (0.666).
478	*E:* Y entonces regresando aquí (pregunta del inciso 1 de la situación VIII), ¿quién tiene mayor probabilidad por fin?
479	*A:* Sería la técnica.
480	*E:* ¿Por qué?
481	*A:* Porque ya sacándole decimales sería un poco más
482	*E:* Pero aquí también sacamos decimales.
483	*A:* Si, pero a parte de que hay más numeritos se divide en más partes y acá en menos.
484	E: Bueno estuvo interesante esto.

SITUACIÓN IX: “Primera bolsa o segunda bolsa”

E: Entrevistador

A17: Alumno número 17

485	*E:* Bueno en esta mira, en la número nueve. ¿Si te acuerdas de esa?
486	*A17:* Sí
487	*E:* Entonces vamos a leerla.
488	*A17:* (Lee la situación) Una profesora muestra a sus estudiantes dos bolsas negras; en la primera deposita 9 canicas negras y 6 blancas, y en la segunda deposita 15 negras y 10 blancas. Si propone a sus estudiantes que les aumentará un punto si al extraer una canica al azar de cualquiera de las dos bolsas ésta resulta ser negra, ¿qué bolsa deben elegir para que tengan mayor probabilidad de obtener la canica del color deseado? Explica el procedimiento que seguiste para hacer la elección.
489	*E:* A ver tu procedimiento.
490	*A17:* (Lee su respuesta) según yo la primera bolsa porque hay menos canicas blancas y en genera [total] sólo son quince y a comparación de la segunda que son veinticinco en general [total].
491	*E:* Y entonces ¿qué comparaste con qué?
492	*A17:* Los números en general [total] da veinticinco y quince.
493	*E:* Y ¿cómo ves tu respuesta? Te quedas con ella, la cambiamos o que hacemos. A ver analiza. Piensa y si me dices me quedo con esta no hay problema y si dices quien sabe, a la mejor.
494	*A17:* Pues igualmente, le puedo decir que estoy cien por ciento segura pero yo creo que viéndolo otra vez desde otro punto de vista sacándole porcentaje, sacándole decimales, sacándole muchos resultados tal vez por eso la cambiaría.
495	*E:* Pero ahorita así como la tienes ¿la cambiarías?
496	*A17:* Sí.
497	*E:* O la dejarías igual.
498	*A17:* No, yo creo que si la cambiaría.
499	*E:* Bueno aquí (segunda bolsa) dices que porque este tiene más, de veinticinco, te fijas en las cantidades, aquí tengo una bolsa con veinticinco canicas y aquí

	(primera bolsa) tengo una bolsa con quince canicas y dices en la de veinticinco tengo más probabilidad y hay más canicas.
500	*A17:* Sí.
501	*E:* Y como comprobarías que tu resultado es correcto.
502	*A17:* Con un porcentaje.
503	*E:* ¿Te gustan los porcentajes?, bueno vamos a ver que hiciste, tu no te preocupes por el tiempo.
504	*A17:* (Escribe en una hoja) A B $\underline{15} = 100\%$ $\underline{25} = 100\%$ $9 = 60\%$ $15 = 60\%$ Ya ve.
505	*E:* ¿Qué pasó?
506	*A17:* Que en los dos existe la misma probabilidad.
507	*E:* ¿Porqué?
508	*A17:* Porque sacándole un porcentaje se obtiene lo mismo. Sale un sesenta por ciento.
509	*E:* Y ¿Cuál te convence más, esta respuesta (argumento 490) o esta respuesta (argumento 504)?
510	*A17:* Esta (argumento 504).
511	*E:* ¿Porqué esta no?
512	*A17:* Pues porque a lo mejor yo pensando generalmente en todas las canicas me dan nada más nueve negras que es el color que debo sacar, pero no me pongo a analizar a lo mejor completamente que existen las mismas probabilidades de obtener un color y otro no. Entonces sacando yo una canica es lo mismo que si la saco de la otra bolsa.
513	*E:* Y si ahorita viene tu amiga y te dice yo me voy con esta respuesta (argumento 490) tu qué le dirías.
514	*A17:* Estas loca y ponte a analizar.
515	*E:* ¿Por qué?
516	*A17:* Pues porque no nos dejemos llevar con tan sólo una respuesta que nos

	convenza, sino ponernos analizar completamente en las dos partes.
517	*E:* ¿Cuáles dos partes?
518	*A17:* Sería las dos bolsas digamos en este caso.
519	*E:* Pero si yo soy tu amiga te diría, aquí (argumento 490) yo analicé las dos bolsas, aquí tengo mi bolsa de quince y aquí tengo mi bolsa de veinticinco y estoy analizando mis dos bolsas y yo te digo que en la de veinticinco porque hay más canicas.
520	*A17:* Hay más pero (se mantiene en silencio),
521	*E:* Que me dirías para convencerme que esta (es la respuesta correcta argumento 504), si yo estoy bien convencida de que esa (respuesta del argumento 490) es mi respuesta correcta. Y tu me dices que no que ahora es esta (la de porcentajes y fracciones, argumento 504).
522	*A17:* Que tal vez tendremos canicas más en general [total] pero ya hablando de probabilidades para ganar sería menor, pero si te pones a analizar completamente serían igual.
523	*E:* ¿Pero porqué?
524	*A17:* Porque sacándole un porcentaje se puede ver exactamente que vas a decir que si yo lo saco de una manera, no se digamos analítica de alguna u otra manera sería, son nueve y quince (compara las canicas negras de ambas bolsas) y aquí ya se ve la diferencia serían cuatro canicas más que hay aquí, y también aquí (compara las canicas blancas de ambas bolsas) hay cuatro canicas más.
525	*E:* En las dos (de los dos colores) hay cuatro canicas (de diferencia en ambas bolsas).
526	*A17:* Sí
527	*E:* A ver
528	*A17:* Nueve para quince (canicas negras de ambas bolsas), a no son seis. Y de aquí son cuatro (de diferencia de canicas blancas de ambas bolsas).
529	*E:* Y en la otra.
530	*A17:* Seis y cuatro (la diferencia de canicas de ambos colores).
531	*E:* Entonces dices nueve para quince, son seis y nueve para seis (confunde las comparaciones de A17).

532	*A17:* Son tres, pero yo le dije.
533	*E:* A ver otra vez.
534	*A17:* Era de nueve a quince (canicas negras) y de seis a diez (canicas blancas).
535	*E:* De nueve a quince cuánto es.
536	*A17:* Seis.
537	*E:* Y de seis a diez
538	*A17:* Cuatro
539	*E:* Y eso qué me quiere decir. Por que yo soy tu amiga y no a lo mejor no… a ver explícame que quiere decir bien eso.
540	*A17:* Hay seis canicas más que son negras y aquí hay igual cuatro canicas más que son blancas, pero (piensa en silencio).
541	E: De que otra forma me explicarías así para que yo te entendiera. Suponiendo que soy tu compañera y te digo es que no te entiendo muy bien aquí y los números no se me dan mucho y entonces yo sigo con la idea de que donde hay veinticinco canicas hay más probabilidad, tu ¿cómo me convencerías de que no hay más probabilidad aquí (argumento 490) sino que hay más probabilidad en la otra?¿Cómo me convences de que lo que me propones aquí (argumento 504) es cierto?
542	*A17:* Porque (piensa)
543	*E:* De que otra forma lo representarías.
544	*A17:* Con decimales podría ser.
545	*E:* A ver hagámoslo con decimales.
546	*A17: (Trabaja en la hoja).* $\frac{15}{9}=1.6$ $\frac{25}{15}=1.6$
547	*E:* Y qué paso ahí
548	*A17:* Que es igual, que tomé de una bolsa que de la otra. Sigue siendo lo mismo que si lo hacemos con porcentajes que si lo hacemos con decimales.
549	*E:* Y aquí no salió como en el otro (situación VIII) una filota (refiriéndose a los decimales)
550	*A17:* Bueno si salió una filota pero la misma filota la tienen los dos.

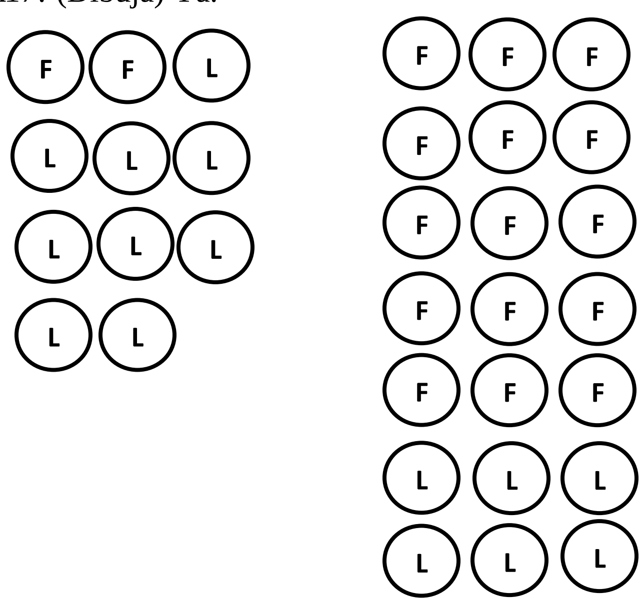
551	*E:* A aquí ya no hubo tanto relajo, aquí sí salieron los dos números. Y habrá otra forma de que me lo expliques ¿Por qué a mi no me convences? Mira aquí lo representaste con porcentajes (504), aquí lo representaste con decimales (argumento 546), aquí lo representaste de manera escrita textual (540) ¿Qué otra representación podrías utilizar para hacer este análisis.
552	*A17:* Lo que no me gusta, dibujar.
553	*E:* Y crees que esto podría ayudar o no
554	*A17:* No creo
555	*E:* ¿Por qué?
556	*A17:* Porque pasa lo mismo que con los huevitos (situación IV) que por ver más a lo mejor hay más probabilidades en esa pero si tienes menos nada más por eso digo que no es esa.
557	*E:* Y qué paso con las actividades como en esta (situación I) donde nada más te representan con dibujos o en esta (situación II y VII) otra igual mira con dibujos ¿a ti te ayudó esa actividad o no? Donde te representan con dibujitos.
558	*A17:* No.
559	*E:* ¿Por qué?
560	*A17:* Porque yo creo que textualmente te explican un poco más que con los simples dibujitos. Porque nos dejamos llevar por los dibujitos que por el texto.
561	*E:* Bueno.

SITUACIÓN X: “Bolsa chica o bolsa grande”

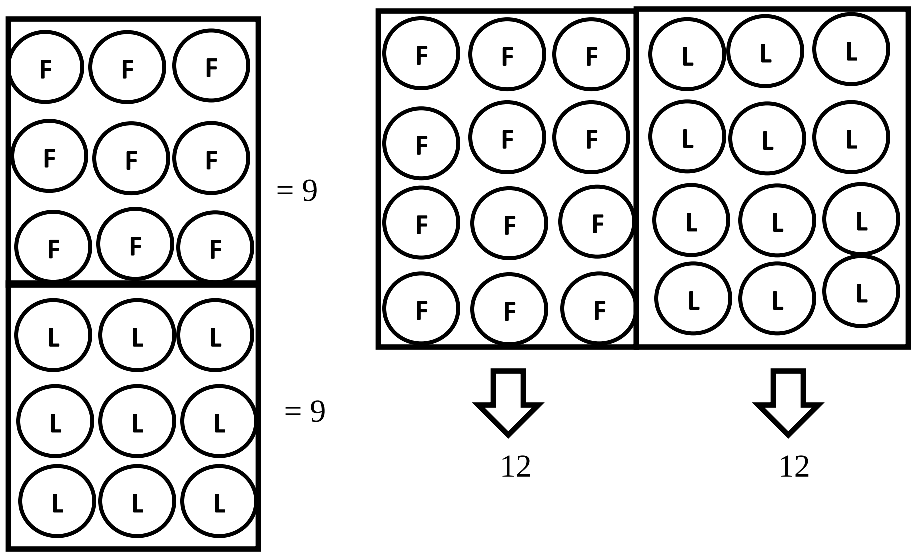
E: Entrevistador

A17: Alumno número 17

559	*E:* Mira vamos a leer la última (lee la situación10). 1.- En la tienda venden bolsas con chocolates rellenos de caramelo suave sabor fresa o limón. La bolsa chica contiene 15 chocolates, de los cuales el 40% es de sabor fresa y el resto de limón, y en la bolsa grande que contiene 20 chocolates el 60% es de sabor fresa y el resto de limón. Dos amigas compran una bolsa de cada tamaño y juegan a adivinar el sabor. ¿En qué bolsa existe mayor probabilidad de que al sacar el primer chocolate éste tenga relleno sabor fresa? Ahí ¿Cómo le hiciste?
560	*A17:* La bolsa grande.
561	*E:* ¿Por qué?
562	*A17:* (Lee su respuesta) porque más de la mitad de la bolsa son de sabor fresa y es lo doble, saqué aquí los porcentajes, saqué los…
563	*E:* Revisa bien lo que hiciste para que me expliques que pasó.
564	*A17:* Ya, que en la bolsa grande el 60% es fresa y en la bolsa chica son el 40% y aquí (bolsa grande) el cuarenta porciento es de limón y aquí (bolsa chica) el 60% es de limón. Ya que si hablamos en porcentajes hay un 20% más (de fresa) en la bolsa grande que en la bolsa chica.
565	*E:* Pero qué pasa porque aquí (señala el argumento de la respuesta 1 de *A17* a la situación X) yo veo un ocho que pones y veo un nueve entonces eso no se qué represente. $12 = 60\%$ fresa $\quad 6 = 40\%$ fresa $8 = 40\%$ limón $\quad 9 = 60\%$ limón
566	*A17:* Que aquí generalmente [total] son veinte chocolates de la bolsa grande y de la bolsa chica son quince: El sesenta porciento son nueve chocolates y el cuarenta porciento son seis (bolsa chica) y aquí el sesenta porciento son doce y aquí cuarenta porciento son ocho (bolsa grande).
567	*E:* Y aquí ya se presentaron lo que a ti te gusta, que son doce es el sesenta

	porciento y ocho el cuarenta porciento y aquí (trabajar con porcentajes) lo que te gusta si te ayudó ya hiciste tu elección. Bueno esto ya lo dejamos (lee el inciso 2 de la situación X). 2. Si se quiere que en ambas bolsas se tenga la misma probabilidad de extraer un chocolate con relleno sabor fresa, ¿cuántos chocolates rellenos de caramelo sabor fresa o limón agregarías o quitarías en cada bolsa?
568	*A17:* (Lee su respuesta del inciso 2 de la situación X) a la bolsa chicha le quitaría cuatro chocolates [fresa] y la bolsa chica es esta. Y aquí a la bolsa grande le agregaría tres chocolates de fresa.
569	*E:* ¿Y ya con eso quedaría la misma probabilidad?
570	*A17:* La bolsa chica son quince menos cuatro son once, de los cuales dos son de fresa y aquí (bolsa grande) le sumaria tres de fresa para que sean quince (de fresa) y seis de limón (de manera verbal cambia los ocho que obtuvo por seis).
571	*E:* ¿cómo comprobarías que esto es correcto?
572	*A17:* Igual con porcentajes.
573	*E:* A ver aquí, se que no te gustan los dibujos, pero dibújame lo que tu me estás diciendo aquí (argumento 570). Ahí ponme como quedaron las nuevas bolsas.
574	*A17:* (Dibuja) Ya. 
575	*E:* Ahora sí, explícame cómo quedó eso.
576	*A17:* Según a la bolsa chica era quitarle cuatro chocolates, se los quité y a la otra

	era agregarle tres y así quedó (argumento 374). Pero ya después, analizándolo bien no tienen la misma probabilidad.
577	*E:* ¿Por qué no tienen la misma probabilidad?
578	*A17:* Porque aquí nada más hay dos chocolates (de fresa del primer conjunto del argumento 374) y aquí tenemos quince (de fresa del segundo conjunto del argumento 374).
579	*E:* Y eso afecta.
580	*A17:* Sí
581	*E:* ¿Por qué?
582	*A17:* Porque de quince (cambia verbalmente al once por el quince) nada mas tengo dos que son de fresa, y aquí de veintiuno quince son de fresa.
583	*E:* Y como comprobarías para que estés cien por ciento segura de que…
584	*A17:* No está balanceada.
585	*E:* No está balanceada.
586	*A17:* Con un porcentaje o con decimales.
587	*E:* A ver compruébalo.
588	*A17:* (Trabaja en la hoja blanca). $\frac{11}{2} = \frac{100\%}{18\%}$ $\frac{21}{15} = \frac{100\%}{71.42}$
589	*E:* ¿Qué pasó?
590	*A17:* Que aquí el setenta y uno punto cuarenta y dos porciento son de sabor fresa y acá sólo el dieciocho porciento, y no está balanceado.
591	*E:* Y habías dicho que sí estaba balanceado.
592	*A17:* Según yo.
593	*E:* Pero yo la quiero balanceada, ¿qué haríamos entonces?
594	*A17:* Volverla a analizar.
595	*E:* Entonces dame aquí un ejemplo o propón algo para que esté balanceada [que tengan la misma probabilidad]. Recuerda que puedes quitar, poner, cambiarlas de sabor, son tus dulces puedes hacer con ellos lo que quieras.

596	*A17:* (trabaja en la hoja) así. 
597	*E:* Y ahora sí qué pasó.
598	*A17:* Se supone que originalmente hay una bolsa chica porque son quince chocolates: seis de fresa y nueve de limón y de aquí (bolsa grande) son: doce de fresa y seis (en el dibujo del argumento 596 pone los ocho originales) de limón, pero yo le agregué a esta (bolsa grande) cuatro de limón y aquí (bolsa chica) tres de fresa y así ya está balanceado, en los dos serían nueve de fresa y doce de limón.
599	*E:* A ver otra vez, aquí nueve de fresa
600	*A17:* Aquí son nueve y aquí igual son nueve y acá son doce y aquí igual son doce.
601	*E:* Entonces aquí que le pusiste.
602	*A17:* Aquí le agregué tres chocolates y aquí también le agregué tres chocolates.
603	*E:* Aquí le agregaste tres
604	*A17:* Digo cuatro.
605	*E:* Y entonces aquí ya hay balanceo. Y bueno, aquí yo te dije ponme otro ejemplo y tú me lo hiciste con lo que no te gusta: con dibujitos. Y cómo vez ahora los dibujos. Me puedes hacer un ejemplo numérico así sin utilizar dibujos.
606	*A17:* Sí.
607	*E:* A ver ponme un ejemplo sin utilizar dibujos que tengan la misma probabilidad ¿Cuántos pondrías de cuántos?

608	*A17:* (la alumna trabaja en la hoja y muestra). $\frac{9}{3} = \frac{24}{8}$
609	*E:* ¿Por qué?
610	*A17:* Porque esta [8] es la tercera parte de veinticuatro y de aquí esta [3] es la tercera parte de nueve. Si lo sacamos con decimales van a dar los dos números igual.
611	*E:* A ver hay que hacerlo.
612	*A17:* Sí (escribe). $\frac{9}{3} = \frac{24}{8}$ $3 = 3$
613	*E:* Bien ya terminamos, muchas gracias por aguantar mucho tiempo.

Lo importante de la entrevista

- Las situaciones presentadas son visualizadas de distinta manera,
- Los datos que se presentan influyen en la estrategia que se activa, y
- No se utiliza la misma estrategia a pasar de que las situaciones conllevan al modelo de urna y, al establecimiento y comparación de probabilidades.

Conclusiones:

Cuando se presentan situaciones que implican el modelo de urna, con distintos elementos y no sólo las urnas, favorece que los alumnos relacionen diferentes elementos, utilicen distintas estrategias como el caso de A17. De esta manera están relacionadas la proporcionalidad y la probabilidad.

APÉNDICE A

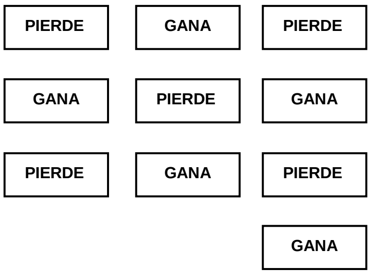
SITUACIONES IMPLEMENTADAS

Nombre del alumno: ____ Grupo: ___

Situación I

1.- En un programa de concursos muestran los siguientes dos conjuntos de tarjetas.

Conjunto 1



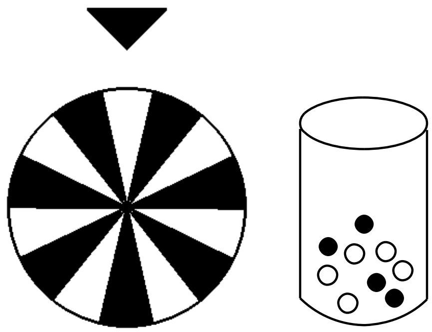
Conjunto 2

Si después de voltear y revolver las tarjetas, para que no queden en la misma posición, un participante tiene que elegir una de cualquiera de los dos conjuntos para ganar un premio, ¿de qué conjunto debe elegir su tarjeta para que tenga mayor probabilidad de ganar? Anota el procedimiento que seguiste para llegar a la respuesta.

Nombre del alumno: ____ Grupo: ___

Situación II

1.- En una feria hay dos juegos de apuestas: una ruleta y una urna.



Si se le apuesta a un sector blanco o a que se extraiga una bola blanca, ¿en qué juego existe mayor probabilidad de ganar?

Explica como le hiciste para determinar tu respuesta.

2.- En qué juego sería necesario agregarle o quitarle algo (sectores o bolas) para que en los dos juegos se tenga la misma probabilidad de ganar. A continuación dibuja lo que propones.

Comenta porqué tus dibujos representan una misma probabilidad.

Nombre del alumno: ____ Grupo: ___

Situación III

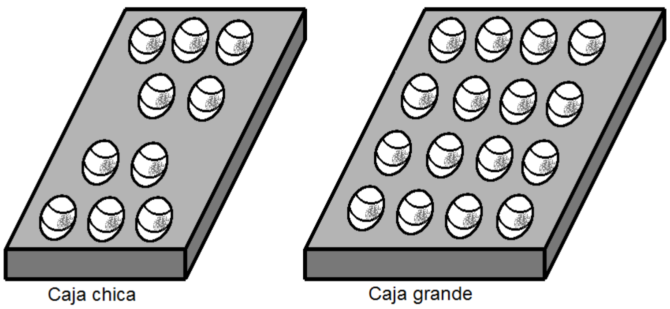
1.- Si quieres participar en un sorteo y sabes que con el loto millonario por cada 6 que participan 2 reciben un premio y que con la lotería por cada 9 que participan 3 reciben un premio, ¿con quién te conviene participar para que tengas más probabilidad de obtener un premio?

¿Qué hiciste para realizar tu elección?

Nombre del alumno: ____ Grupo: ___

Situación IV

1.- Se tienen dos cajas con huevos sorpresa y se sabe que en la caja chica 4 huevos contienen insectos y 6 huevos peces y en la caja grande 7 huevos contienen insectos y 9 huevos peces.



A mí me gustan más los insectos; ayúdame a elegir de cuál caja debo tomar mi huevo para tener mayor probabilidad de que me salga un insecto.

Describe el procedimiento que seguiste para realizar la elección.

2.- Si se quiere que en ambas cajas exista la misma probabilidad de extraer un insecto, en que caja sería necesario agregar o quitar huevos con insectos o peces para que en las dos cajas se tenga la misma probabilidad de obtener un insecto.
A continuación dibuja y explica lo que propones.

Nombre del alumno: ____ Grupo: ___

Situación V

En una escuela se preguntó a los alumnos de dos grupos sobre el deporte que les gusta practicar más, si futbol soccer o basquetbol. En el grupo A, que está conformado por 28 alumnos, 21 comentaron que el futbol soccer y 7 que el basquetbol, mientras que en el grupo B que está conformado por 24 alumnos 18 prefirieron el futbol soccer y 6 el basquetbol. ¿En qué grupo hay mayor probabilidad de que al elegir un alumno al azar le guste practicar el futbol soccer?

Explica cómo puedes estar seguro que la respuesta que obtuviste es la correcta.

Nombre del alumno: ____ Grupo: ___

Situación VI

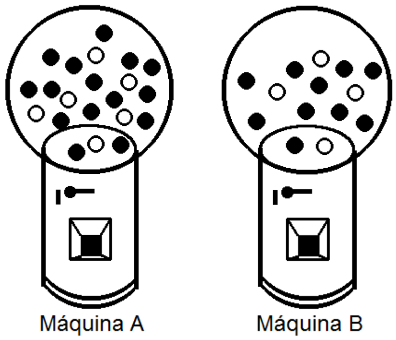
Para tramitar la cartilla del Servicio Militar se puede acudir a 2 campamentos. En el campamento A, al hacer el sorteo, por cada 13 que se inscriben a 8 les corresponde bola blanca y a 5 bola negra, y en el campamento B por cada 8 que se inscriben a 5 les corresponde bola blanca y a 3 bola negra. ¿En qué campamento existe mayor probabilidad de obtener bola negra para que no te toque marchar?

Explica cómo llegaste a establecer tu respuesta.

Nombre del alumno: ____ Grupo: ___

Situación VII

En un centro comercial hay 2 máquinas "traga monedas" en donde al depositar una moneda de $5 se puede extraer una pelotita.



Un niño llega y desea extraer una pelotita blanca. Si observas el contenido de ambas máquinas, ¿cuál le recomendarías para que tenga mayor probabilidad de obtener el color deseado?

Comenta cómo te diste cuenta que máquina tiene mayor probabilidad.

Nombre del alumno: ____ Grupo: ___

Situación VIII

Una niña se quedó en una secundaria Diurna y su hermano en una Técnica. Para determinar el turno en el que cursarán, serán seleccionados de manera aleatoria; ambos quieren estar en el turno matutino pero saben que en la Diurna hay $\frac{2}{3}$ de probabilidad de quedarse en la mañana, mientras que en la Técnica hay $\frac{5}{8}$. ¿Quién tiene mayor probabilidad de quedarse en el turno que desean?

¿Qué hiciste para llegar al resultado?

Nombre del alumno: ____ Grupo: ___

Situación IX

Una profesora muestra a sus estudiantes dos bolsas negras; en la primera deposita 9 canicas negras y 6 blancas, y en la segunda deposita 15 negras y 10 blancas. Si propone a sus estudiantes que les aumentará un punto si al extraer una canica al azar de cualquiera de las dos bolsas ésta resulta ser negra, ¿qué bolsa deben elegir para que tengan mayor probabilidad de obtener la canica del color deseado? Explica el procedimiento que seguiste para hacer la elección.

Nombre del alumno: ____ Grupo: ___

Situación X

En la tienda venden bolsas con chocolates rellenos de caramelo suave sabor fresa o limón. La bolsa chica contiene 15 chocolates, de los cuales el 40% es de sabor fresa y el resto de limón, y en la bolsa grande que contiene 20 chocolates el 60% es de sabor fresa y el resto de limón. Dos amigas compran una bolsa de cada tamaño y juegan a adivinar el sabor. ¿En qué bolsa existe mayor probabilidad de que al sacar el primer chocolate éste tenga relleno sabor fresa?

Explica el procedimiento que seguiste para llegar a la respuesta.

Si se quiere que en ambas bolsas se tenga la misma probabilidad de extraer un chocolate con relleno sabor fresa, ¿cuántos chocolates rellenos de caramelo sabor fresa o limón agregarías o quitarías en cada bolsa?

Explica el procedimiento que seguiste para llegar a la respuesta.

REFERENCIAS

Alarcón, J.; Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T. y Quintero, R. (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*. México: SEP.

Alarcón, J.; Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T. y Quintero, R. (2001). *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*. México: SEP.

Alatorre, S. (1994). *Respuestas intuitivas de adultos a problemas de probabilidad. Algunas aportaciones metodológicas.* Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional, México, 1994.

Ávila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México: Paidós Educador.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* España: GEEUG.

Block, D. (2007). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 455 – 470). México, DF. México: Comité Latinoamericano de Matemática A.C.- Díaz de Santos.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 164-198.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Colín, J., Garnica, I., y Ojeda, A. M. (1993). *Intuición y probabilidad desde el punto de vista de Fischbein* [Cuadernos de investigación, No. 26, Noviembre de 1993]. México: Cinvestav-IPN.

Elizarrarás, S., Vázquez, O. y Ojeda, A. M. (2007). *Ideas fundamentales de estocásticos en la educación secundaria: Enseñanza y comprensión* [Seminario Probabilidades y Estadística en Matemática Educativa en vinculación con la Educación Secundaria para la investigación]. México: Cinvestav-IPN.

Falk, R. (1980). Comportamientos de elección en situaciones de probabilidad. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics. Vol. II.* University of Sheffield 9-13 August 1982.

Fischbein, E., Barbat, I. y Minzat, I. (1971). Intuitions primaires et intuitions secondaires dans l'initiation aux probabilités. *Educational Studies in Mathematics* 4, 264–280. [Reproduced as Appendix I in Fischbein, 1975].

Fischbein, E (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E (1987). *Intuition in Science and Mathematics*, Reidel, Dordrecht, The Netherlands.

Fischbein, E (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 38, 11-50.

Fréchet, M. (1988). *Las matemáticas y lo concreto.* México: UNAM.

García, F. J. (1996). *Concepciones de azar y de probabilidad entre estudiantes de educación básica.* Tesis de maestría. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Sección Matemática Educativa, México, 1996.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1991). *Azar y probabilidad fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Green, D. R. (1979). The chance and probability concepts project. *Teaching Statistics*, 1(3), 66-71.

Green, D. R. (1983a). School pupils' probability concepts. *Teaching Statistics,* 5(2), 34-42.

Green, D. R. (1983 b). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, y G. M. Constable (Eds), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (V. 2, pp. 766-783). UK: University of Sheffield.

Green, D. R. (1987). Probability concepts: Putting research into practice. *Teaching Statistics*, 9(1), 8-14.

Green, D. R. (1988). Children’s understanding of randomness: Report of a survey of 1600 children aged 7-11 years. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. Victoria, B. C.: University of Victoria.

Greer, B. (2001). Understanding probabilistic thinking: The legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics.* 45, 15–33.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children’s Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secundary Mathematics Project.* London: Nfer-Nelson.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics,* 6, 187-205.

Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children’s thinking. En Lester, F. K. (Ed). *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(1), pp. 41-61. USA: NCTM.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. Educação Matemática Pesquisa, 12 (3). [Recuperado el 15/01/13 de: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842]

Lema, S. S. y Morfin, M. P. (1981). *Experimentos sobre el desarrollo de la noción de azar y probabilidad en el niño.* Tesis de maestría. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Sección Matemática Educativa, México, 1981.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En Hiebert, J. y Behr, M. (Eds). *Number Concepts an Operations in the Middle Grades.* Research Agenda for Mathematics Education. Vol. 2. The United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.

López, G. (2003). *El uso del análisis cualitativo en la resolución de problemas relacionados con proporcionalidad.* Tesis de doctorado. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Sección Matemática Educativa, México, 2003.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática.* 24(1), pp. 133-157. México: COMIE.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics,* 11, pp. 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part II. Problem structure at successive stages; problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics,* 11, pp. 331- 363.

Özgün-Koca, S. A. (2009). An investigation of proportional reasoning skills of middle school students. En Schimittau, J. (Ed). *Investigations in Mathematics Learning*, 2(1), pp. 26-48. USA: RCML.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación Matemática.* 21(2), pp. 39-77. México: Santillana.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2006). *Programas de estudio 2006. Educación Básica. Secundaria.* México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Básica. Secundaria.* México: SEP.

Shaughnessy J. M. (1992) Research in Probability and statistics: Reflections and Directions en Grouws D. A., (Editor), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan Publishing Company. pp. 465-494.