



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL IPN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

**LA IMPORTANCIA DE DIFERENCIAR
ENTRE EL VALOR EXACTO Y EL VALOR
APROXIMADO EN EL APRENDIZAJE
DE LAS MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA**

TESIS QUE PRESENTA

EDER RICARDO AGUAYO ROSILLO

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN
CIENCIAS ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA
EDUCATIVA

DIRECTOR DE TESIS

DR. GONZALO ZUBIETA BADILLO

México D. F. 2013

DEDICATORIA

*A mi padre, quién es el gran artífice
de todo lo que soy y todo lo que seré.*

AGRADECIMIENTOS

*Antes que nada quiero agradecer al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** por el apoyo brindado para realizar mis estudios de maestría.*

Quiero agradecer con mucho cariño, admiración y respeto al Dr. Gonzalo Zubieta, por todo el apoyo brindado, la gran enseñanza recibida, los consejos imprescindibles, el tiempo compartido y principalmente por poner su fe en mi persona.

A mi madre que siempre ha estado en todo momento, creyendo fielmente en mis capacidades y porque es el mayor ejemplo de grandeza que tengo en la vida.

A Rosario, mi gran compañera, que me ha dado la fuerza para encontrar siempre el mejor camino y motivarme siempre para creer en mi mismo.

A mi hermana que es el mayor ejemplo de fortaleza que siempre ha motivado mi vida.

A mis sobrinos que son la razón de que uno se esfuerce más cada día.

A mis primos y a mis tíos que siempre mostraron un apoyo incondicional en todo momento.

A mis abuelos que siempre estuvieron para un buen consejo y para hacerme creer que la perseverancia es la mejor guía.

A la doctora María Eugenia Andreu y al doctor Hugo Mejía, en primera por darse el tiempo y el espacio para apoyarme como mis sinodales y en segunda, ya que con sus notables observaciones y correcciones, le dieron mejor argumento al presente trabajo.

A los doctores François Pluinage, Luis Moreno, Manuel Santos, Ernesto Sánchez, Ana Sacristán, Armando Cuevas, Jesús Riestra, que tuve el honor de escucharles y aprenderles durante mis clases de maestría.

A mis compañeros de clase, que siempre me mostraron su apoyo durante los cursos de la maestría.

A Adriana Parra y Gabriela Rodríguez por su incondicional ayuda en todos los trámites durante la maestría.

RESUMEN.

En el aprendizaje de las matemáticas, nivel secundaria, se soslaya diferenciar entre un valor exacto y un valor aproximado, ya sea porque el programa no lo hace explícito o porque el profesor lo considera sobreentendido. En cualquier caso, consideramos de importancia tal diferenciación tomando en cuenta que el uso de calculadoras en los salones de clase, cada vez más extendido, hace explícita nuestra demanda.

Para ello mostramos ejemplos –donde es evidente lo mencionado- tomados de un artículo, de una tesis, de programas actuales y textos aprobados por SEP. Finalmente, realizamos actividades para estudiantes con el propósito de mostrar que se está omitiendo diferenciar entre un valor exacto y un valor aproximado, para así, poner énfasis en la distinción señalada, lo que daría claridad al conocimiento matemático del estudiante.

Las actividades que se eligieron aparecen en textos aprobados por SEP, preguntas de pruebas PISA y ENLACE, además de elaborar algunos ítems relacionados con la estimación, lo exacto y lo aproximado. El marco teórico para mirar las respuestas dadas en las actividades será a través de los registros de representación semiótica de Raymond Duval.

ABSTRACT.

In mathematics learning, secondary level, it ignores the difference between an exact and an approximate value, either because the program does not make it explicitly or because the teacher is considered granted. In any case, we consider this important distinction considering that the use of calculators in the classroom, is increasingly widespread, makes explicit our demand.

For this reason we show some obvious examples -where the above- taken from an article, a thesis, current programs and texts approved by SEP. Finally, we will create some activities for students with the purpose of showing that is omitting differentiate between an exact and an approximate value, for so, to emphasize the distinction mentioned, which would clear the student's mathematical knowledge.

The activities chosen appear in texts adopted by SEP, PISA and ENLACE test questions. Furthermore some items related to the estimate, the exact and the approximate. The theoretical framework to look at the answers in the activities will be through the registers of semiotic representation of Raymond Duval.

ÍNDICE

Resumen.....	iv
Introducción.....	11
CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES, PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.	
1.1 Antecedentes.....	15
1.1.1 Artículo.....	15
1.1.2 Tesis.....	16
1.1.3 Libros de Texto.....	20
1.1.4 Calculadora.....	26
1.2 Problema y preguntas de investigación.....	28
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO.	
2.1 Introducción.....	30
2.2 Acerca de las representaciones semióticas.....	31
2.3 Acerca de los registros de representación semiótica.....	31
2.4 Acerca de los números en notación decimal.....	34
CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.	
3.1 Introducción.....	36

3.2 Justificación de las preguntas del cuestionario.....	38
3.2.1 Pregunta 1.....	38
3.2.2 Pregunta 2.....	38
3.2.3 Pregunta 3.....	40
3.2.4 Pregunta 4.....	40
3.2.5 Pregunta 5.....	41
3.2.6 Pregunta 6.....	42
3.2.7 Pregunta 7.....	42
3.2.8 Pregunta 8.....	43
3.2.9 Pregunta 9.....	43
3.2.10 Pregunta 10.....	44
3.2.11 Pregunta 11.....	44
 CAPÍTULO 4: ANÁLISIS SOBRE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES.	
4.1 Introducción.....	46
4.2 Análisis sobre las respuestas de los estudiantes.....	47
4.3 Análisis sobre la forma en que contestaron algunos estudiantes respecto de cinco preguntas seleccionadas del cuestionario.....	50
4.3.1 Respuestas a la pregunta 2.....	51

4.3.2 Respuestas a la pregunta 3.....	52
4.3.3 Respuestas a la pregunta 3.....	54
4.3.4 Respuestas a la pregunta 7.....	56
4.3.5 Respuestas a la pregunta 9.....	58
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES.	
Conclusiones.....	61
REFERENCIAS.	
Referencias.....	66
APÉNDICES.	
Apéndice A: Publicación derivada de la tesis.....	70
Apéndice B: Cuestionario.....	71

ÍNDICE DE TABLAS.

Tabla 1: Primer tabla de respuestas.....	46
Tabla 2: Segunda tabla de respuestas.....	48

ÍNDICE DE IMÁGENES.

Imagen 1.1 Ejercicios artículo.....	15
Imagen 1.2 Tesis (página 86, capítulo 3).....	17
Imagen 1.3 Tesis (página 111, capítulo 4).....	19
Imagen 1.4 Tesis (página 137, capítulo 5).....	19
Imagen 1.5 Plan de estudios SEP (Bloque 2, primer grado).....	21
Imagen 1.6 Libro de texto: Matemáticas 1, pág. 26.....	24
Imagen 1.7 Libro de texto: Matemáticas 1. Construcción del Pensamiento, pág. 21.....	25
Imagen 1.8 Libro de texto: Descubriendo las Matemáticas 2, pág. 36.....	25
Imagen 4.1 Pregunta 2, primer respuesta.....	51
Imagen 4.2 Pregunta 2, segunda respuesta.....	52
Imagen 4.3 Pregunta 3, primer respuesta.....	53
Imagen 4.4 Pregunta 3, segunda respuesta.....	53
Imagen 4.5 Pregunta 4, primer respuesta.....	54
Imagen 4.6 Pregunta 4, segunda respuesta.....	55
Imagen 4.7 Pregunta 7, primer respuesta.....	56
Imagen 4.8 Pregunta 7, segunda respuesta.....	57

Imagen 4.9 Pregunta 9, primer respuesta.....	58
Imagen 4.10 Pregunta 9, segunda respuesta.....	59

INTRODUCCIÓN.

Al inicio de la maestría tuve la oportunidad de leer un documento de discusión para un estudio de ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) titulado: *¿What is Research in Mathematics Education and What are Its Results?* (Sierpinska, Kilpatrick, Balacheff, Howson, Sfard y Steinbring, 1993), el cual trata sobre diferentes cuestiones entorno a la educación matemática y en el que destacan preguntas como: ¿Cuál es el objeto de estudio específico de la Educación Matemática?, ¿Qué significa ser un educador matemático?, ¿Cuáles son los objetivos, perspectivas y problemas de investigación en Educación Matemática?, ¿Son vistos los educadores matemáticos como parte de la comunidad matemática?, etc. En cuestión del objeto de estudio específico de la Educación Matemática los autores señalan:

“El objeto de estudio (der Gegenstand) de la educación matemática podría ser, por ejemplo, la enseñanza de las matemáticas; el aprendizaje de las matemáticas; situaciones enseñanza/aprendizaje; situaciones didácticas; las relaciones entre la enseñanza, el aprendizaje y el conocimiento matemático; la realidad de las clases de matemáticas, visión social de la matemática y su enseñanza; o el sistema educativo en sí.”

Este trabajo de investigación pretende ser una aportación modesta en el campo de la Educación Matemática porque creemos se están soslayando las nociones que tienen los estudiantes de secundaria respecto de la estimación, lo exacto y lo aproximado.

Consideramos que se debería decir algo en ese sentido puesto que al desarrollar esta investigación, nos pudimos dar cuenta que existen diferentes factores que podrían influir en que los estudiantes tengan poca o nula claridad sobre las nociones de lo exacto, lo aproximado y la estimación. Encontramos entre otras cuestiones que no existe mucha referencia en el plan de estudios vigente que emite SEP, que los libros de texto en general tampoco hacen hincapié en el tema, parece también indicar que los profesores tampoco hacen mucha referencia a estas nociones, teniendo en cuenta la manera de operar por parte de los estudiantes.

A pesar que en el plan de estudios de SEP se menciona la conversión de números fraccionarios a números en notación decimal y viceversa, en general los libros de texto no ponen mucha atención ni especifican todos los detalles cuando se realiza la conversión de números en notación decimal a números fraccionarios.

De las aportaciones que creemos se obtienen al realizar esta investigación podemos mencionar:

- Que el tema en cuestión repercute de manera importante en el aprendizaje de los estudiantes pues efectivamente la noción de estimación, de aproximación y de lo exacto se está soslayando.
- Aunque hablamos en particular de la noción de aproximación, en las respuestas de los estudiantes vimos que realmente lo que ellos hacen al operar o emitir resultados, es truncar el número en cuestión, esto es, cuando tienen por ejemplo un número como 3.17824, y ellos quieren aproximarlos hasta centésimos, toman el número 3.17 sin tener en cuenta el siguiente dígito.
- Que los estudiantes de secundaria tienen una tendencia, un poco descuidada, a cambiar de registro (Duval, R. 1999), entre el registro de fracciones (cociente de dos enteros) al registro de los números en notación decimal, y esto lo pudimos ver por las respuestas de los estudiantes en el cuestionario ya que siempre que tienen que operar con fracciones ellos prefieren operar con decimales; como por ejemplo, si tienen la fracción $\frac{1}{3}$ ellos utilizan el número decimal 0.333, sin tener claro, que en este caso el número decimal representa una aproximación de la fracción y por lo tanto ya no representa el valor exacto.
- Que los estudiantes de secundaria desconocen las ventajas y desventajas que se suscitan al cambiar de registro, principalmente porque en muchos de los casos el cambiar de registro resulta en pérdida de la exactitud (como en el ejemplo anteriormente señalado). Podemos mencionar en cuanto al cambio de registro, que este siempre sucede del registro de fracciones al registro de los números en notación decimal, puesto que en ninguna de las respuestas del cuestionario los estudiantes lo hicieron de manera inversa, es decir, ninguno de ellos cambio del registro de los números en notación decimal al registro de fracciones.
- Que los estudiantes están habituados a realizar operaciones de manera mecanizada puesto que en algunas de las respuestas que dieron al cuestionario no se detuvieron a analizar o comprobar la veracidad de las mismas incluso en cuanto a lo que se les pedía.

El presente trabajo se organizó de la siguiente manera: El primer capítulo plantea los antecedentes del problema de investigación así como el problema y las preguntas de investigación.

El capítulo 2 está compuesto por el marco teórico que nos sirvió de base para mirar la forma en que contestaron los estudiantes el cuestionario.

En el capítulo 3 establecemos la metodología que usamos para llevar a cabo esta investigación así como la justificación de las preguntas del cuestionario, la constitución del cuestionario, las características de los participantes del cuestionario, las características del entorno donde se llevo a cabo el cuestionario, etc.

El capítulo 4 esta dedicado al análisis sobre las respuestas de los estudiantes, el cual se complementa con unas tablas que sirven de apoyo, así como también se incluye el análisis sobre la forma en que contestaron algunos estudiantes, respecto a cinco preguntas del cuestionario.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones que se generaron a partir de esta investigación incluyendo las respuestas a las preguntas de investigación, que inicialmente se hicieron.

CAPÍTULO 1:

ANTECEDENTES, PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.

1.1 Antecedentes.

Esta parte del capítulo está dividida en cuatro secciones correspondientes al material consultado: un artículo, una tesis, libros de texto y diferentes referencias

sobre el uso de la calculadora. Al final del capítulo se plantea el problema de investigación y las preguntas de investigación.

1.1.1 Artículo.

Revisamos un artículo que se titula: “**ENTRE LO EXACTO Y LO APROXIMADO. Una experiencia áulica**” (Braccialarghe, D., Emmanuele, D., González, M.I., Introcaso, B.), dada la particular similitud que presenta con nuestro tema de investigación, aunque el contexto en el que estos investigadores desarrollan su trabajo es en el nivel de licenciatura y nuestro trabajo se desarrolla en un contexto de nivel secundaria.

En el artículo los autores analizan si los estudiantes de primer año de licenciatura son capaces de diferenciar “simbólicamente” entre lo exacto y lo que es aproximado, a partir de dos problemas donde se les pide a los estudiantes que calculen (o aproximen) las áreas de ciertas figuras:

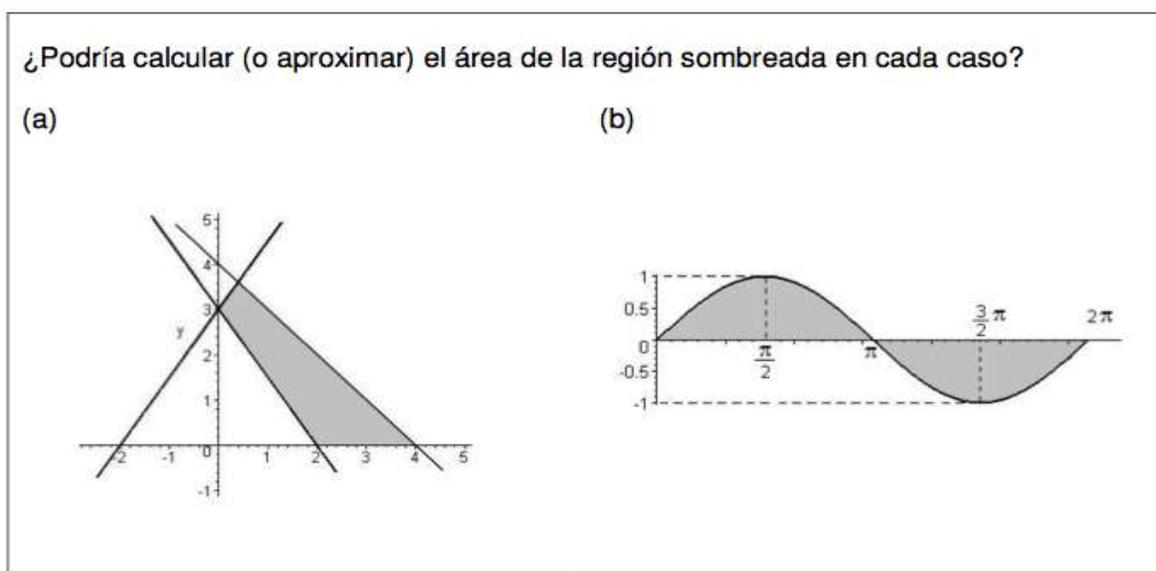


Imagen 1.1 Ejercicio Artículo.

Consideran los autores “*que muy probablemente aunque los estudiantes sepan que su solución no es exacta, ellos no lo manifiestan. Pensamos que el origen de esta falta de rigurosidad debe buscarse en la experiencia que traen de su escolarización previa.*”

De igual manera los autores se plantean una serie de cuestiones de las cuales resaltamos:

- *Los libros de matemáticas en todos los niveles parecen en general, soslayar la importancia de diferenciar entre una igualdad y una aproximación.*
- *Los docentes “acomodamos” los problemas para que las operaciones sean entre números enteros o racionales.*
- *Lo que expresan los estudiantes simbólicamente no tiene en cuenta la diferencia entre lo exacto y lo aproximado (al calcular la longitud de algún lado de un triángulo utilizando el teorema de Pitágoras expresan el mismo con decimales pero manteniendo el signo igual.)¹*
- *Es notorio en los alumnos el abuso muy descuidado que hacen del símbolo = .*
- *Evidentemente a los alumnos no les “choca” el símbolo igual cuando representan $\pi = 3.14$, pero les resulta absurdo, que $2 + 2 = 3.98$.*
- *Es muy probable que esta desvirtuación (aproximado es lo mismo que igual) haya sido favorecida (y hasta provocada) por el excesivo énfasis que se pone tanto en la escuela primaria como en la media sobre un modo típico de resolución de problemas en matemáticas que esta relacionado más que nada con la aplicación de una fórmula o método algorítmico de cálculo, y muy poco, o nada, con la resolución de problemas a partir de la reflexión.*

Como se comentó anteriormente, a pesar de que la investigación realizada por estos autores se desarrolló en un contexto de nivel licenciatura, el objetivo que perseguían era mostrar que aunque los estudiantes se encuentren en un nivel donde su conocimiento sobre matemáticas debiera estar mejor fundamentado, la realidad es que al analizar su conocimiento sobre esta noción de diferenciar entre un valor o resultado exacto y un valor o resultado aproximado, que uno pensaría que los estudiantes lo tienen bien dominado, resulta que para ellos no parece tan claro en qué momento la operación llevó a un resultado exacto o a un resultado aproximado.

1.1.2 Tesis.

En este apartado nos apoyamos en la tesis de maestría de ANA ALEJANDRA MORALES RODRÍGUEZ, cuyo título es: “*Avances y Dificultades de los Adultos de la Secundaria en la Resolución de Problemas con Fracciones.*”

En esta tesis uno de los aspectos centrales a investigar es la educación de los adultos, de los cuales se pretende conocer los conocimientos que tienen acerca de

¹ Por ejemplo, en un triángulo rectángulo cuyos valores de sus catetos sean 1 y 2, respectivamente.

las fracciones, principalmente cuando se enfrentan a la resolución de problemas, teniendo en cuenta los diferentes significados de la fracción. Uno de los principales objetivos de la tesis es mostrar el desacierto que existe al impartir de la misma forma la instrucción tanto para los niños como para los adultos, de tal manera que sigue sin reconocerse que tanto los niños como los adultos tienen capacidades diferentes y por lo tanto el tipo de enseñanza no debería ser la misma.

Para apoyar sus hipótesis, la autora realiza un estudio de caso a tres diferentes individuos: Oscar (15 años), Giovanni (30 años) y Luz (45 años).

Es en la parte de “*Análisis de resultados de la observación y el cuestionario*” así como en los “*estudios de caso*”, donde se presentaron ciertas respuestas de los estudiantes que nos sirvieron de base para apoyar los antecedentes de nuestro trabajo; se observa que los estudiantes tienen una marcada tendencia a omitir el operar con fracciones (cociente de dos enteros) y prefieren convertirlas a su representación decimal, donde se les hace más fácil poder realizar dichas operaciones.

Fue en la parte de “*Análisis de resultados de la observación y el cuestionario*”, donde existieron dos casos de alumnos que al pedirles que resolvieran una división entre fracciones, ellos primero las convirtieron a su representación decimal para después realizar la operación, sin tener en cuenta que una de las dos fracciones que convertían a decimal era un número que tiene una expansión decimal infinita: $1/3$, y por lo tanto su solución ya no sería exacta sino una aproximación; como lo vemos en la siguiente cita:

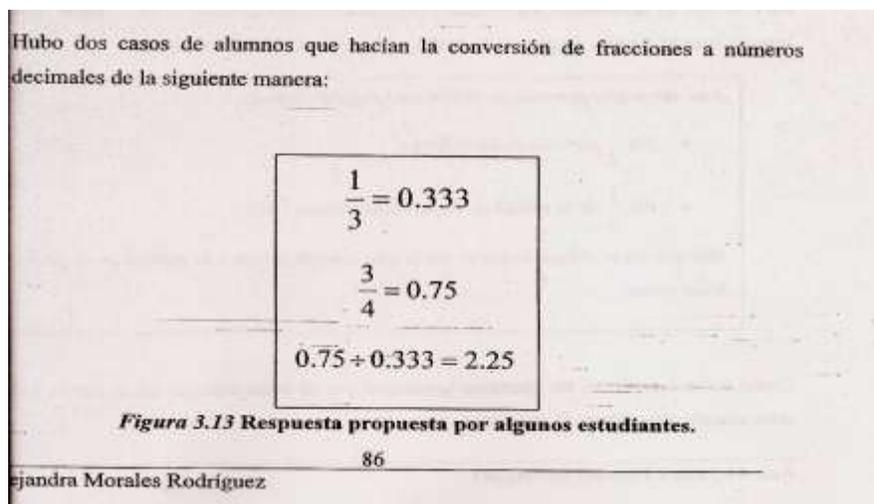


Imagen 1.2 Tesis (página 86, capítulo 3)

Es importante resaltar algunas cuestiones interesantes que se presentan en la imagen anterior de acuerdo a lo que realizaron los estudiantes, esto

principalmente, debido a que la respuesta que propusieron pareciera no estar incorrecta pues:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{9}{4} = 2.25$$

Pero en primer término el estudiante toma a $1/3 = 0.333$, es decir, aproxima la fracción hasta milésimos aunque para él la conversión equivale a 0.333, sin tener en cuenta que sólo es una aproximación de la fracción y por lo tanto las operaciones que realice lo conducirán a un resultado aproximado.

También convierte la fracción $3/4$ a su notación decimal, aunque en este caso no hay problema puesto que la conversión resulta en un número decimal exacto; pero al final cuando divide 0.75 entre 0.333 ocurre una situación curiosa, aunque relacionada con la falta de noción de lo exacto y lo aproximado, pues si realizamos esta división obtenemos:

$$0.75 \div 0.333 = 2.\overline{252} = 2.252252252 \dots$$

Entonces vemos que el estudiante al truncar esta división hasta centésimos por suerte obtendrá el resultado correcto de la división entre $3/4$ y $1/3$.

Por lo tanto vemos que el estudiante incurre en un doble error, primero al tomar $1/3 = 0.333$ y después al truncar a centésimos la división entre 0.75 y 0.333, que como dijimos anteriormente es el resultado correcto de la mencionada división.

De igual manera en “El caso de Oscar”, se le pide resolver un problema que involucra dos fracciones y como en la situación anterior, Oscar realiza la conversión de las fracciones a decimales, sin tener en cuenta que ha obtenido un resultado que ya no es exacto -pues la solución exacta debía estar dada en forma de fracción- ahora es una aproximación; para mostrar esta situación, veamos la siguiente cita:

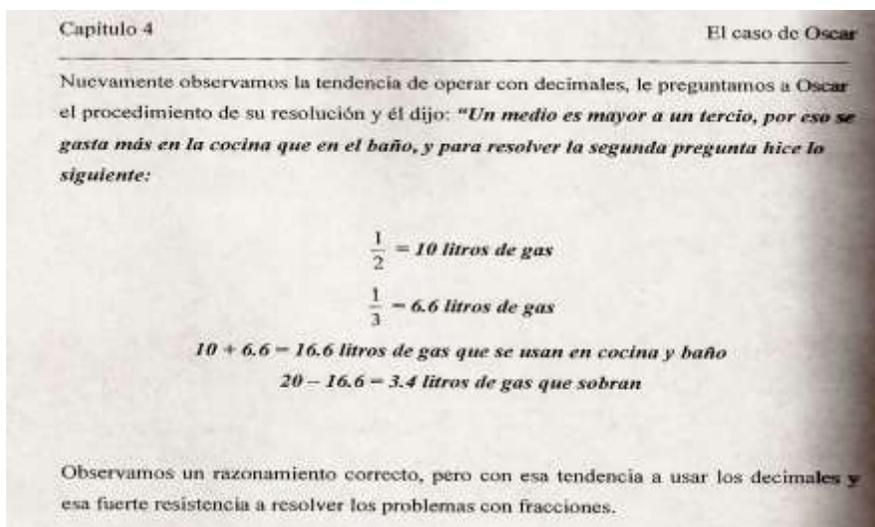


Imagen 1.3 Tesis (página 111, capítulo 4)

También ocurrió algo similar en *“El caso de Giovanni”*, pues al pedirle que resolviera un problema donde se debían de multiplicar fracciones y al no recordar como se resolvía con fracciones, él las convierte a decimales, sin tener en cuenta, que una de ellas tiene expansión decimal infinita y por lo tanto su solución ya no es exacta y representará ahora sólo una aproximación; como se ve en el siguiente texto:

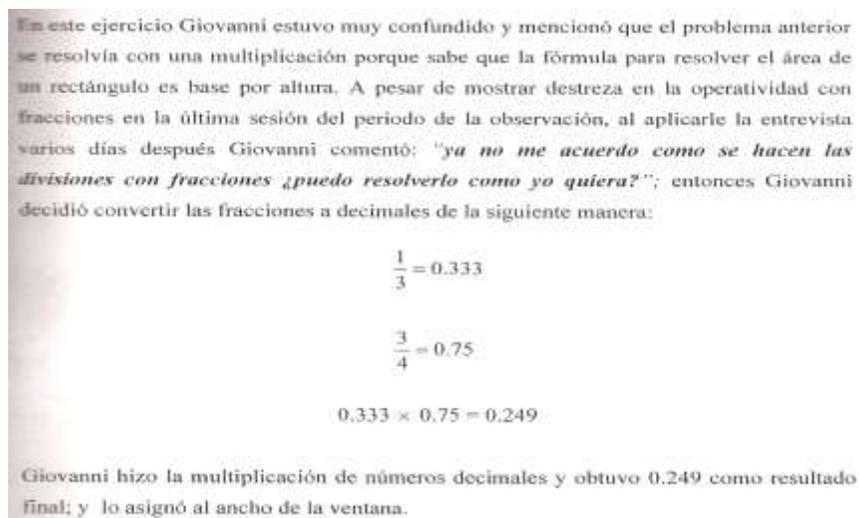


Imagen 1.4 Tesis (página 137, capítulo 5)

Como se observa en los ejemplos anteriores² los estudiantes tienen una tendencia natural a convertir cualquier fracción a decimal, sin analizar que existen algunas fracciones cuya conversión a decimal resulta en un número con expansión

² En la imagen 1.4, es interesante ver, que aunque el estudiante habla de que no sabe “dividir” fracciones, lo que se le pide en el ejercicio es una multiplicación de fracciones.

decimal infinita, del cual sólo tomarán ciertas cifras (ya sea que trunque o que redondee) y por lo tanto el resultado estará dado en los términos mencionados y no de una solución exacta.

1.1.3 Libros de texto.

Al incluir en los antecedentes un apartado sobre los libros de texto, revisamos la lista de los libros autorizados por SEP para primero, segundo y tercero de secundaria, en el portal de la **Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos** (www.conaliteg.gob.mx/), en la sección de matemáticas.

Para nuestro trabajo es importante analizar los aspectos matemáticos en donde aparece involucrada esta noción de lo exacto y lo aproximado, en un contexto de conversión de un número fraccionario (cociente de dos enteros) a un número decimal o al estar resolviendo una ecuación, sobre todo si se pide la comprobación. También al utilizar la calculadora para la obtención de una raíz cuadrada no exacta, siendo algún número irracional como $\sqrt{2}$.

Es por eso que nos dispusimos, en primer lugar a mostrar los temas que propone la SEP para la elaboración de los libros de texto, que servirán de base para el aprendizaje de los estudiantes y que podrían estar relacionados con nuestro tema de investigación (de los cuales se mencionó un poco en el párrafo anterior); y en segundo lugar comentar si en los libros de texto autorizados por la SEP se hace énfasis en resaltar esta noción de lo exacto y lo aproximado.

Nuestro análisis se realizó para los lineamientos de SEP de primero, segundo y tercero de secundaria, pues es donde creemos que se debe de iniciar un conocimiento explícito sobre esta noción.

Para ello requerimos, antes que nada, especificar la forma en que SEP propone los temas y los lineamientos para la elaboración de los libros de texto.

En primer estancia la SEP publica en el diario oficial de la federación (acuerdo 385) las normas y lineamientos específicos que los autores de libros de texto deben de considerar, como son: apegarse a lo dispuesto en el artículo 3º de la constitución política, omitir mensajes ofensivos y propaganda gubernamental; en cuanto a las materias a considerar, indica que los temas se desarrollen con un enfoque de enseñanza vigente, que los libros de texto traten la totalidad de los contenidos programáticos de la asignatura, que se apeguen a los propósitos establecidos en el plan de estudios de educación secundaria vigente, etc.

Por consiguiente la SEP publica el plan de estudios vigente para cada materia, en el cual se especifican los temas que deberán desarrollarse en los libros de texto de secundaria de acuerdo a cada año escolar y que se componen para matemáticas, por cinco bloques en cada año, los cuales se desarrollan teniendo en cuenta las competencias que se favorecen y los aprendizajes esperados para los tres ejes:

- Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico.
- Forma, Espacio y Medida.
- Manejo de la Información.

A continuación mostramos un ejemplo tomado del plan de estudios que emite la SEP:

Bloque II

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas utilizando el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. • Resuelve problemas geométricos que impliquen el uso de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en triángulos y cuadriláteros. 	<p>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> • Formulación de los criterios de divisibilidad entre 2, 3 y 5. Distinción entre números primos y compuestos. • Resolución de problemas que impliquen el cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. <p>PROBLEMAS ADITIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolución de problemas aditivos en los que se combinan números fraccionarios y decimales en distintos contextos, empleando los algoritmos convencionales. <p>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolución de problemas que impliquen la multiplicación y división con números fraccionarios en distintos contextos, utilizando los algoritmos usuales. 	<p>FIGURAS Y CUERPOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolución de problemas geométricos que impliquen el uso de las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo. <p>MEDIDA</p> <ul style="list-style-type: none"> • Justificación de las fórmulas de perímetro y área de polígonos regulares, con apoyo de la construcción y transformación de figuras. 	<p>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, con factores constantes fraccionarios.

Imagen 1.5 Plan de Estudios SEP (Bloque 2, primer grado)

Al revisar los lineamientos para el desarrollo de temas que propone la SEP resaltamos aquellos aspectos donde pudiera estar involucrada la noción de estimación, lo exacto y lo aproximado. Para el primer grado tenemos:

- **Bloque I:** Conversión de fracciones a su escritura decimal y viceversa, resolución y planteamiento de problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones, conoce y utiliza las convenciones

para representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica, resolución de problemas de reparto proporcional.

- **Bloque II:** Resolución de problemas aditivos en los que combinan números fraccionarios y decimales en distintos contextos, empleando los algoritmos convencionales, justificación de las fórmulas de perímetro y área de polígonos regulares.
- **Bloque III:** Resolución de problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional, resolución de problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos, resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado, donde los coeficientes o constantes puedan ser números naturales, fraccionarios y decimales.
- **Bloque IV:** Planteamiento y resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos, construcción de círculos a partir de diferentes datos (radio, cuerda, tres puntos, etc.), justificación de la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo, análisis de la regla de tres, empleando valores enteros o fraccionarios.
- **Bloque V:** Uso de la notación científica para realizar cálculos en los que intervienen cantidades muy grandes o muy pequeñas, resolución de problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada así como el cálculo de potencias de números naturales y decimales, uso de las fórmulas para calcular el perímetro y el área del círculo en la resolución de problemas.

Para segundo grado tenemos:

- **Bloque I:** Resolución de problemas que impliquen el área de figuras compuestas, resolución de problemas diversos relacionados con el porcentaje, resolución de problemas que impliquen el cálculo de interés compuesto.
- **Bloque II:** Justificación de las fórmulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos, estimación y cálculo del volumen de cubos, prismas y pirámides rectos.

- **Bloque IV:** Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado utilizando coeficientes enteros decimales o fraccionarios, análisis de situaciones problemáticas asociadas a la física, la biología, la economía y otras disciplinas.
- **Bloque V:** Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones 2×2 con coeficientes enteros.

Para tercer grado tenemos:

- **Bloque I:** Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas.
- **Bloque II:** Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización, explicitación y uso del teorema de Pitágoras.
- **Bloque III:** Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas, aplicación de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
- **Bloque IV:** Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal.
- **Bloque V:** Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones, formulación de problemas a partir de una ecuación dada, estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos.

A continuación mostramos y comentamos tres imágenes tomadas de tres libros de texto de secundaria para exponer, entre otras cosas, que aunque en el plan de estudios de SEP se hace alusión sobre algunos aspectos donde la noción de lo exacto, lo aproximado y la estimación pudieran estar presentes, vemos que en los libros de texto que presentamos no se está haciendo una clara mención sobre estas características.

Dos formas de representar

 El sistema decimal también es útil para representar números menores que la unidad, como 0.25 o como 0.4, así como aquellos que son un número entero de unidades y un poco más, como el 5.3 o el 7.31.

Algunos números no enteros pueden escribirse tanto en el sistema decimal como en forma de fracción. Considera por ejemplo 7.31, ¿cuántos enteros tiene? _____

¿Qué valor tiene el 3 en esta cantidad? _____

¿Qué valor tiene el 1? _____

Escribe el número 7.31 en forma de fracción:

¿Cuántos centésimos forman el número anterior? _____

Imagen 1.6 Libro de texto: Matemáticas 1, pág. 26.

Esta imagen fue tomada del libro de texto *Matemáticas 1*, correspondiente al primer bloque donde se habla de la conversión de números fraccionarios a su notación decimal; como se puede ver en la imagen aunque se habla sobre números fraccionarios y decimales, así como de la conversión entre ellos, en general, en toda la lección no se especifica las características de operar entre estos números así como las ventajas y desventajas que conlleva el hacerlo.

También se puede ver que se les pide conviertan un número en su notación decimal a su forma de fracción, pero tampoco se les hace el comentario sobre la naturaleza de estas conversiones cuando sea el caso de que el número decimal a convertir es un decimal periódico infinito.

Como vemos aunque los autores hablan de que es posible escribir algunos números tanto en notación decimal como en forma de fracción, no hacen hincapié en comentar los detalles cuando se realiza este tipo de conversiones, ya sea cambiar del registro de fracciones al de notación decimal o viceversa, por ejemplo, en una situación donde se deba de interpretar en notación decimal una fracción, la cual representa un decimal periódico infinito, o cuando el número en cuestión no pueda representarse en notación de fracción, como un número irracional.

A continuación mostramos otra imagen tomada de un libro de texto de secundaria, donde se les pide a los estudiantes que realicen la conversión de algunos números en forma de fracción a su notación decimal para lo cual en una de la actividades se les pide que hagan uso de la calculadora al obtener la expresión.

 Realiza las siguientes actividades.

- Usa una calculadora para obtener la expresión con números decimales de los siguientes números fraccionarios.

a) $\frac{3}{4}$	b) $\frac{4}{5}$	c) $\frac{8}{20}$
------------------	------------------	-------------------
- Convierte los siguientes números fraccionarios en números decimales.

a) $\frac{2}{3}$	b) $\frac{3}{7}$	c) $\frac{1}{11}$
------------------	------------------	-------------------

Imagen 1.7 Libro de texto: Matemáticas 1. Construcción del Pensamiento, pág. 21.

Esta imagen fue tomada del libro de texto *Matemáticas 1. Construcción del Pensamiento*, que corresponde al bloque 1 referente a la conversión entre diferentes sistemas de numeración. Como podemos ver en la primer actividad se les pide a los estudiantes que utilicen la calculadora para obtener la expresión decimal de los números fraccionarios en cuestión, los cuales no representan un problema pues tienen una expansión decimal finita; pero no es el caso en la segunda actividad donde no se especifica el uso de la calculadora y donde se tienen fracciones cuya expansión decimal es periódica infinita. Por lo tanto es necesaria una explicación para que los estudiantes interpreten debidamente el resultado y en este sentido que puedan conocer las limitaciones que tiene el aparato al efectuar dichas operaciones.

A pesar de que se les esta pidiendo a los estudiantes que realicen un cambio de registro entre el registro de fracciones y el de los números decimales, en toda la lección no se les especifica claramente todo lo que hay de por medio cuando se deben de realizar este tipo de conversiones.

Por último mostramos otra imagen tomada de un libro de texto de secundaria:

Bloque 1

Medida
Estimar, medir y calcular

Lección 5. Medición y construcción de ángulos.

Conocimientos y habilidades. Resolver problemas que impliquen reconocer, estimar y medir ángulos, utilizando el grado como unidad de medida.

La torre Eiffel, ubicada en París capital de Francia es considerada una de las siete maravillas del mundo. Tiene una enorme estructura formada en su mayor parte por armaduras triangulares.

Fue diseñada por el arquitecto e ingeniero francés Gustave Eiffel, quien presentó primero su proyecto de torre a los responsables del Ayuntamiento de Barcelona (1888) pero fue rechazado. Posteriormente Eiffel, presentó su proyecto a los responsables de la Exposición Universal de París, donde se **erigiría** un año más tarde, en 1889. Estos aceptaron construir la torre, pese a que en principio pensaron que la tendrían que desmontar una vez terminada la exposición. Sólo la voluntad popular evitó que se derribase.

Observa la imagen de la Torre, identifica las figuras geométricas que la conforman y los ángulos que aparecen en la misma.

¿Qué figuras geométricas aparecen en la estructura de la Torre Eiffel?

Glosario
erigr. Construir o edificar

Imagen 1.8 Libro de texto: Descubriendo las Matemáticas 2, pág. 36.

Esta imagen fue tomada del libro de texto *Descubriendo las Matemáticas 2*, que corresponde al bloque 1 referente a la medición y construcción de ángulos. Como vemos los autores comienzan con una reseña sobre la torre Eiffel tratando de invitar a los estudiantes a que analicen las figuras geométricas que aparecen en la estructura para después continuar con los temas de la lección.

A pesar de que al inicio de la lección se habla de estimar, medir y calcular, notamos que en todo el bloque de este libro no se hace una clara mención a dichas cuestiones, principalmente a la noción de estimación.

Aunque en el bloque se tocan diferentes aspectos donde podría estar involucrada la noción de estimación, no existe alguna referencia al tema que lo evidencie, teniendo en cuenta que en los principales temas de la lección (medición y construcción de ángulos) pudiera estar involucrada esta noción.

Después de revisar los lineamientos propuestos por la SEP para la elaboración de los libros de texto, consultamos algunos textos con el propósito de analizar someramente si es que hacen algún énfasis para que el estudiante distinga lo exacto de lo aproximado, en los diferentes contextos donde pudiera estar involucrada esta noción, que como sabemos representa el tema central de nuestra investigación.

A pesar de que la consulta fue realizada sólo a algunos libros de texto, notamos que aunque existen diferentes contextos donde la noción de la estimación, lo exacto y lo aproximado esta presente, los libros de texto por lo general no recalcan o enfatizan soluciones exactas o aproximadas.

1.1.4 Calculadora.

Existe una extensa investigación alrededor del uso de la calculadora en el aula como un recurso didáctico y de apoyo, tanto para los estudiantes como para los profesores; las opiniones respecto del tema suelen ser variadas puesto que algunos creen que la calculadora limita el desarrollo del cálculo mental y operacional de los estudiantes; mientras que algunos otros creen que el “buen” uso de la calculadora puede desarrollar las habilidades matemáticas de los estudiantes, como vemos que lo indica el informe Cockcroft: “*los alumnos habituados a usar la calculadora mejoran su actitud hacia la matemática, las destrezas de cálculo, la comprensión de los conceptos y la resolución de problemas*”. (Cockcroft 1985, citado en “*La calculadora como recurso didáctico*”, S. Del Puerto & C. Minnaard, 1991).

Desde que la calculadora se convierte en una herramienta de uso escolar, los investigadores en educación matemática han tratado de definir el rol bajo el cual debe ser introducida en el aula, teniendo en cuenta las virtudes o defectos con que cuenta como el hecho de producir cálculos exactos o aproximados; como lo indica el documento: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989) emitido por el NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*), el cual se cita en el cuaderno de investigación “*El Uso de la Calculadora en la Escuela Superior 1995-2005* (Reymat, A):

“There is no evidence to suggest that the availability of calculators makes students dependent on them for simple calculations. Students should be able to decide when they need to calculate and whether they require an exact or approximate answer.”

(“No hay evidencia que sugiera si la disponibilidad de las calculadoras hace que los estudiantes dependan de ellas para cálculos sencillos. Los estudiantes deben ser capaces de decidir cuando necesitan calcular y si lo que requieren es una respuesta exacta o aproximada.”)

Diversas han sido las cuestiones que involucran el uso de la calculadora así como variados son los enfoques con que es posible analizarla, como pueden ser el impacto de las calculadoras en la educación, la incorporación de las calculadoras en el salón de clases, la evaluación de los efectos del uso de la calculadora, el pensamiento matemático con la calculadora, la enseñanza de las matemáticas con la calculadora, etc., Ruthven (1996).

No vamos a profundizar en el tema ya que nos desviaríamos de nuestro objetivo y lo que a nosotros nos interesa, es comentar las posibles repercusiones que existen para los estudiantes al estar utilizando la calculadora, cuando se involucra el cálculo de un número irracional o de un número racional con expansión decimal periódica infinita.

Es de señalar esta cuestión, pues muchas veces la máquina de calcular estará proporcionando una aproximación de un resultado en vez de un valor exacto, mientras que el estudiante no sabe distinguir cuando esta obteniendo una aproximación y cuándo un valor exacto.

1.2 Problema y Preguntas de Investigación.

En esta parte del capítulo comentamos cuestiones alrededor de nuestro problema de investigación así como el planteamiento de las preguntas de investigación.

Uno de los conceptos que maneja un estudiante al estar cursando la educación secundaria es el concepto de número, aunque lógicamente limitado sólo a algunos conjuntos de números como los números naturales, los números enteros, los números racionales (escritos como fracciones y como decimales) y ocasionalmente algunos irracionales.

Para ello se les pide que realicen diferentes operaciones entre los sistemas de numeración ya sea sumar o restar números enteros con números fraccionarios, convertir números fraccionarios a su escritura decimal o viceversa, dividir números decimales, etc.

Dado que los estudiantes constantemente deben hacer uso de las diferentes formas de representar un número, en sus actividades curriculares de matemáticas, es imprescindible que entiendan la naturaleza y las características que conlleva el tener que resolver y operar utilizando de manera conjunta los diversos conjuntos de números. Es por eso que a continuación planteamos nuestro problema de investigación:

Problema de Investigación.

“Diferenciar entre lo exacto, lo aproximado y la estimación en el aprendizaje de las matemáticas, en la escuela secundaria”

Lo que nos lleva a establecer las siguientes preguntas de investigación que consideramos para el desarrollo de este proyecto:

Preguntas de Investigación.

1. ¿Qué noción tienen sobre lo exacto y lo aproximado, tanto al realizar operaciones como al obtener un resultado, los estudiantes de secundaria?
2. ¿Qué ideas sobre la estimación tienen los estudiantes de secundaria?

CAPÍTULO 2:

MARCO TEÓRICO

2.1 Introducción.

En el presente capítulo mostramos la teoría en la que nos apoyamos para mirar la forma en que los estudiantes respondieron a nuestro cuestionario.

La teoría principal en la que apoyamos nuestra investigación es la de los *Registros de Representación Semiótica* del psicólogo francés Raymond Duval.

Para Duval, existen dos tipos de representaciones:

- **Las representaciones mentales**, que son aquel conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les esta asociado. (Duval, R 1999)
- **Las representaciones semióticas**, que son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos y que no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, esto es, para hacerlas visibles o accesibles a otros. (Duval, R. 1999)

Desde hace ya un largo tiempo el campo de la semiótica se ha desarrollado constantemente en relación con la educación matemática, ya que muchos investigadores se han interesado en las grandes virtudes que presenta esta teoría al momento de trasladarla al terreno de la educación, principalmente al de la educación matemática.

Aunque no vamos a profundizar en el tema, comentamos que la semiótica no representa una teoría totalmente unificada por criterios comunes sino que existen por lo menos tres tradiciones semióticas que se diferencian con claridad (Radford, L. 2006):

1. La iniciada por el suizo Ferdinand de Saussure (1857-1913) y que emplea el término “*semiología*”.
2. La iniciada por el estadounidense Charles Sanders Peirce (1839-1914) y que emplea el término “*semiótica*”.
3. La iniciada por el psicólogo ruso Lev S. Vygotsky (1896-1934).

Cada una de estas tradiciones se desarrolló contemplando problemáticas diferentes (Radford, L. 2006).

2.2 Acerca de las Representaciones Semióticas.

Así como Duval refiere que las *representaciones semióticas* son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos, como un enunciado en lenguaje natural, una fórmula algebraica, una figura geométrica, etc. (Duval, R. 1999), en este sentido él mismo comenta:

“En matemáticas las representaciones semióticas no sólo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.” (Duval, R. 1999)

También comenta que estas representaciones pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico aunque pueden tomar significados diferentes para el sujeto que hace uso de ellas (Duval, R. 1999).

Otro aspecto que nos parece importante resaltar respecto de las representaciones semióticas, es precisamente ese *“cambio de forma”* que comenta Duval al referirse al cambio de representación de un cierto conocimiento, del cual realiza el siguiente comentario:

“Se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible.” (Duval, R. 1999)

Estas cuestiones son importantes en lo que tiene que ver con esta investigación puesto que nos interesa analizar la forma en que los estudiantes entienden esta situación del cambio de la forma en que se representa un conocimiento teniendo como contexto las diferentes formas de representación de un número (fraccionario, decimal, etc.).

2.3 Acerca de los Registros de Representación Semiótica.

Todo este conjunto de representaciones a las que se refiere Duval se clasifican en lo que él llama *Registros de Representación*, según las características y propiedades que poseen cada una de ellas. (Lupiañez y Moreno, 2001)

Para Duval los *Registros de Representación Semiótica* constituyen, aquella libertad de movimiento con la que cuenta un sujeto para hacerse objetiva una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar informaciones, etc. (Duval, R. 1999), en este sentido refiere que para que un sistema semiótico pueda considerarse como un registro de representación debe permitir que se cumplan las tres características siguientes:

1. Que constituyan una marca o un conjunto de marcas que sean identificables como una representación de alguna cosa (Duval, R. 1999).
2. Que exista lo que él llama “tratamiento” en la representación, es decir, que se puedan transformar las representaciones de acuerdo con las propias reglas del sistema, esto es, que pueda haber manipulación y transformación pero únicamente dentro del mismo registro:

Un tratamiento es una transformación al interior de un mismo registro, pues no moviliza más que un solo registro de representación. (Duval, R. 1999)”

3. Que exista lo que él llama “conversión”, es decir, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, en este caso es una transformación que hace pasar de un registro a otro (Duval, R. 1999).

Habiendo señalado lo anterior, para nuestra investigación es muy importante la idea de registro de representación que sostiene Duval, debido a que nuestro tema central se refiere a la noción que tienen los estudiantes sobre lo exacto y lo aproximado y en este caso involucra diversas situaciones donde pudiera estar involucrada la idea de registro pues, como se verá más adelante, los estudiantes que contestaron el cuestionario en la mayoría de los casos recurrieron a un cambio de registro de representación para resolver cada uno de los ejercicios del cuestionario, como lo fue cuando convertían una fracción a su representación decimal.

Al decir que los estudiantes cambiaron de registro de representación nos referimos a la manera en que, al contestar el cuestionario, los estudiantes constantemente recurrían a trabajar en términos de un número decimal en lugar de una fracción, aunque las condiciones iniciales de la pregunta y el planteamiento de la misma estuvieran en términos de una fracción.

Esta situación de cambiar de registro por parte de los estudiantes al parecer muestra que se les hace más fácil operar con números decimales en lugar de operar con fracciones; esto parece ser muy congruente con la propia experiencia docente al reconocer que muchos de los estudiantes de los diferentes niveles educativos tienen mucha dificultad al operar con fracciones, ya sea porque no saben o no recuerdan las reglas para operar fracciones o porque en general no entienden lo que representa una fracción.

Y esto también fue muy notorio en la parte de los Antecedentes, cuando se hizo referencia a la tesis de Alejandra Morales, ya que como se mostró en los comentarios a las imágenes, algunos de los estudiantes que analizó Alejandra adolecieron de la misma situación, esto es, recurrir al cambio de registro dado en fracciones al registro con números en notación decimal.

Aunque los estudiantes utilizan de manera muy natural, y quizás descuidada, cambiar del registro de fracciones al de los números en notación decimal es importante que reconozcan las posibles ventajas y desventajas que suscita el mencionado cambio de registro. Y esto lo comentamos ya que en muchos ejercicios donde se involucran fracciones, el cambiar a un registro de números decimales puede representar un riesgo en cuanto a la naturaleza exacta de la solución, debido a que al hacer ese cambio de registro, uno puede obtener una solución en términos de algo exacto o en términos de algo aproximado.

En este sentido, las preguntas del cuestionario, tanto las que se diseñaron como las que se tomaron de las diversas pruebas y libros de texto, se plantearon precisamente para analizar si los estudiantes recurrían a ese cambio de registro para resolver las preguntas del cuestionario y principalmente para analizar si entendían las posibles repercusiones de trabajar tanto en uno como en el otro registro, es decir, si lograban ver la importancia que tiene el diferenciar cuando se opera o se resuelve trabajando en ambos registros para la obtención de un resultado exacto o aproximado.

Por ejemplo en la pregunta 2 que tiene que ver con dónde es preferible comprar un celular teniendo tres diferentes establecimientos para hacerlo, la mayoría de los estudiantes eligió como su respuesta sólo uno de los establecimientos, principalmente porque hicieron un cambio de registro de la fracción (que representa el pago por semana del celular), a su notación decimal, sin tener en cuenta que al hacerlo, el resultado no sería exacto sino sólo una aproximación, lo que finalmente afectaría para decidir, que realmente convenía comprar el celular en cualquiera de los tres establecimientos.

Mostramos un comentario que hizo Duval en una conferencia dictada en Dinamarca:

“La actividad matemática requiere que aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), sólo elijan una según el propósito de la actividad, pues la actividad matemática requiere una coordinación interna” (Duval, R. 2004)

Cuando Duval se refiere a una “coordinación interna”, es porque establece la importancia de la coordinación en los diferentes registros que un sujeto utiliza, pues muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación entre registros de representación y en estos términos la habilidad para cambiar de registro de representación resulta de suma importancia para el aprendizaje de las matemáticas. (Duval, R. 1999)

Por lo tanto creemos necesario que los estudiantes sepan la importancia de trabajar en diferentes registros, para que también así logren entender que de eso dependerá, en muchos casos, que obtengan un resultado exacto o aproximado, lo que conllevará a que logren un mejor conocimiento en actividades matemáticas posteriores.

2.4 Acerca de los Números en Notación Decimal.

La notación decimal de las fracciones nació con el fin de facilitar las cuentas que era necesario realizar utilizando partes proporcionales de la unidad, puesto que entre otras cosas permiten expresar cantidades menores que la unidad. (Ávila y García, 2008)

Las reglas para operar los números en notación decimal, deben tener en cuenta la posición del punto decimal, al efectuar las diferentes operaciones, tomando a dichos números como si fuesen enteros.

Otra de las características que posee este tipo de escritura, es que tiene diversas aplicaciones que van desde los porcentajes, cálculo de costos, conversiones de monedas, proporcionalidad, etc.

Los estudiantes tienen cierta noción respecto de lo que son los números decimales, como aquellos números que llevan punto, sin tener en cuenta que sólo es una manera que se tiene para representarlos. (Ávila y García, 2008)

CAPÍTULO 3:

**METODOLOGÍA DE LA
INVESTIGACIÓN**

3.1 Introducción.

En este capítulo comentamos todos los aspectos concernientes a la forma en que se llevó a cabo la investigación, como las características de los participantes del cuestionario, las características del entorno donde se llevo a cabo, la constitución del mismo, etc., así al final del capítulo planteamos y justificamos las preguntas del cuestionario.

Aplicamos un cuestionario a estudiantes de tercer grado de secundaria con el propósito de analizar sus respuestas sobre la noción de lo exacto y lo aproximado, así como la idea que tienen de la estimación.

La escuela donde se efectuó el cuestionario es una escuela pública (secundaria técnica), que se conduce bajo los estándares y lineamientos de la secretaría de educación pública.

Las edades de los estudiantes oscilan entre los 12 y 15 años, que es la edad común en México para estudiar la secundaria, después de haber cursado la educación preescolar y primaria.

El nivel educativo que presentan los estudiantes que participaron en el cuestionario podríamos situarlo entre un nivel medio, teniendo en cuenta el promedio de las calificaciones que tienen en sus materias.

El cuestionario se llevó a cabo bajo circunstancias normales, es decir, se les pidió a los alumnos que contestaran el cuestionario con sus propios conocimientos y exclusivamente de manera personal.

Se les mencionó también que debían de tomar con un carácter formal el cuestionario principalmente para que trataran de contestar de la mejor manera posible cada una de las preguntas del cuestionario y se pudiera reflejar el conocimiento que poseen sobre nuestro tema en cuestión.

A pesar de que los estudiantes contestaron individualmente el cuestionario, hubo ciertos momentos donde existieron dudas sobre cómo debían contestar ciertas preguntas y en ese momento se desarrolló una pequeña discusión general, que sin afectar la respuesta individual de los estudiantes, contribuyó a que se aclarara el entendimiento de la pregunta en cuestión.

También se les pidió que escribieran todas las operaciones que realizaran (aunque usaran la calculadora), ya que para nosotros es muy importante analizar la forma en que plantean y realizan las operaciones que les llevarán a establecer su resultado.

En las instrucciones que se plantean al inicio del cuestionario se les indica a los estudiantes que pueden utilizar la calculadora como ayuda para resolver las preguntas, siempre y cuando establezcan el planteamiento de cada una de las operaciones que les sirvieron para contestarlas.

El motivo de que se les permitiera utilizar la calculadora para resolver las preguntas del cuestionario tiene que ver entre otros aspectos con:

- Analizar la manera en que utilizan la calculadora para resolver problemas.
- Analizar el conocimiento que poseen sobre los resultados de la calculadora, es decir, si entienden cuando en la calculadora se obtiene un resultado exacto o cuando se obtiene un resultado aproximado.
- Indagar sobre el uso de la calculadora, es decir, si es como una herramienta de apoyo en los cálculos o es como una herramienta de resolver problemas.
- Analizar en que momentos los estudiantes recurren al uso de la calculadora, esto es, si la utilizan para resolver algunos problemas, los problemas más difíciles, todos los problemas, etc. Esta cuestión nos interesa puesto que al parecer muchos estudiantes están utilizando la calculadora aún para resolver operaciones sencillas que se pueden realizar mentalmente.

El cuestionario (apéndice B), esta constituido por los siguientes ítems:

- Ejercicios que aparecen en textos aprobados por la SEP.
- Preguntas de la prueba PISA (2003).
- Preguntas de la prueba ENLACE (2011).
- Elaboración de algunos ítems relacionados con la estimación, la aproximación y lo exacto.

Es preciso comentar que el cuestionario tuvo un carácter exploratorio puesto que nos interesaba tener una idea general de lo que sucedía con los estudiantes al involucrarlos en una situación donde tuvieran que decidir sobre lo aproximado o exacto de una solución, así como la idea que tienen de la estimación. A continuación planteamos y justificamos las preguntas del cuestionario.

3.2 Planteamiento y Justificación de las Preguntas del Cuestionario.

3.2.1 Pregunta 1.

El precio del litro de la gasolina *Premium* es de $527/50$ pesos.

- a) ¿Cuánto debo de pagar si recargo 50 litros de gasolina? Argumenta tu respuesta.
- b) ¿Cuántos litros de gasolina obtendré si pago 150 pesos? Argumenta tu respuesta.

Esta pregunta fue propuesta tomando en cuenta una situación de la vida cotidiana. Se tomó el precio real de la gasolina (en ese momento), aunque en vez de proponerlo en términos de un número decimal (10.54), como comúnmente se establece, lo propusimos en términos de una fracción ($527/50$), para así poder analizar cómo planteaban los estudiantes sus operaciones y por lo tanto su resultado.

3.2.2 Pregunta 2.

Existen 3 establecimientos A, B y C, que venden el mismo celular. El celular cuesta 2700 pesos y lo puedo pagar a crédito dando cada semana cierta cantidad de la siguiente forma:

Establecimiento.	Semanas.	Pago por semana.
A	52	$675/13$ pesos
B	42	$450/7$ pesos
C	26	$1350/13$ pesos

¿En cual de los establecimientos comprarías el celular? Argumenta tu respuesta.

Esta pregunta fue propuesta también involucrando una situación de la vida cotidiana. Establecimos el pago por semana en fracción para ver cómo reaccionaban los estudiantes ante el cambio de registro numérico, entre otras cuestiones que a continuación comentaremos.

Para conocer qué establecimiento es el que conviene para comprar el celular uno debe de multiplicar las semanas por el pago por semana³ de lo cual se obtiene, y

³ Nótese que el número de semanas es divisible entre el denominador del pago por semana.

como en la misma pregunta viene indicado, que en cualquiera de los 3 establecimientos conviene comprar el celular y sería sólo cuestión del tiempo en que lo queramos pagar, es decir, el argumento no tiene que ver con el costo sino con el tiempo en que se pague el celular.

Pero si uno convierte las fracciones a su forma decimal (cambia de registro), podría no llegar al mismo resultado y esto debido a que la forma decimal de estas fracciones es un número decimal periódico, como se ve a continuación:

$$\frac{675}{13} = 51.\overline{923076}$$

$$\frac{450}{7} = 64.\overline{285714}$$

$$\frac{1350}{13} = 103.\overline{846153}$$

Esta periodicidad al operarla, conlleva a un resultado aproximado en vez de a un resultado exacto, que resulta de gran importancia si se quiere conocer que el celular cuesta lo mismo en los tres establecimientos.

Por último comentamos algunas cuestiones que tienen que ver con la forma en que los estudiantes truncaron sus resultados, al operar lo que les resultó de la conversión de las fracciones (pago por semana) por la cantidad de semanas.

Como se ve en el análisis de las respuestas de los estudiantes, uno de los estudiantes truncó el resultado obtenido de la conversión de la fracción de pago por semana a milésimos, mientras que el otro estudiante truncó su resultado a centésimos.

Ambos estudiantes encontraron que resultaba más barato comprar el celular en el establecimiento B, debido a que habían truncado a centésimos y a milésimos la fracción; pero en el caso de que hubieran truncado la fracción de pago por semana, ya sea a diezmilésimos, cienmilésimos o millonésimos, el resultado ahora indica que sería más barato comprar el celular en el establecimiento A.

Por lo tanto aunque se aproxime con pocos o con muchos decimales las fracciones en cuestión, se puede ver que se obtienen resultados distintos al establecer un resultado.

3.2.3 Pregunta 3.

Cuando fui a la tienda de autoservicio al momento de pagar, el cajero me preguntó si deseaba donar los centavos y así poder redondear mi cuenta. Teniendo en cuenta esto, uno podría redondear desde 1 centavo hasta 99 centavos.

a) Suponiendo que en un día compran 1000 clientes en la tienda de autoservicio, ¿qué cantidad se genera aproximadamente al sumar los centavos que se redondean en un día? Argumenta tu respuesta.

b) ¿Qué cantidad se genera aproximadamente al sumar los centavos que se redondean en un año? Argumenta tu respuesta.

En esta pregunta, pretendemos analizar el sentido y la noción que los estudiantes de secundaria tienen sobre la estimación, situación que está muy relacionada con la noción de lo exacto y lo aproximado.

Para ello les pedimos que realizaran una estimación de la suma de los centavos que se pueden redondear en una tienda de autoservicio en un día, así como en un año, considerando que se puede redondear desde 1 centavo hasta 99 centavos. Para ello es importante tener en cuenta la forma en que se establece el redondeo al hacer una compra en una tienda de autoservicio.

Hay que considerar que cuando les pedimos a los estudiantes que estimen la cantidad que se puede generar al redondear lo que compran los clientes tanto en un día como en un año, estamos hablando de que dadas algunas suposiciones, nos propongan y argumenten algún “valor promedio” que ellos consideren válido, para referir la cantidad que se puede generar al redondear la compra de los clientes en un día y en un año.

La cuestión que nos interesa, es analizar las respuestas y los argumentos que los estudiantes dan para referirse a una estimación, ya que en el plan de estudios vigente no es clara una referencia explícita, aunque existen diversos temas en los que permanece implícita la noción de la estimación.

3.2.4 Pregunta 4.

Se compraron 10 kilogramos de café verde a \$70.50 el kilogramo. Si el café pierde $\frac{1}{5}$ de su peso al tostarlo, ¿en cuanto deberá venderse el kilogramo de café tostado para ganar $\frac{1}{10}$ del precio de compra? Argumenta tu respuesta.

Esta pregunta fue tomada del libro de texto de primero de secundaria *Matemáticas 1*, editorial Mc Graw Hill, con el propósito de involucrar números decimales, enteros y fraccionarios en operaciones de suma y multiplicación, y así poder analizar la forma en que los estudiantes hacen uso de los diferentes registros de representación.

Es por eso que las características que presenta este ejercicio, nos podrían resultar de gran ayuda, al situar a los estudiantes ante un problema donde muestren sus conocimientos cuando tienen que operar entre números decimales, enteros y fraccionarios.

Para nosotros es de gran importancia saber como es que los estudiantes están realizando las operaciones al combinar números decimales, enteros y fraccionarios, puesto que nos podrían dar evidencia sobre la noción que tienen de lo exacto y lo aproximado tanto al estar operando como al emitir sus resultados.

3.2.5 Pregunta 5.

He pagado \$156 por un libro, después de obtener un descuento del 10% del precio marcado en el catálogo. ¿Cuál es el precio de ese libro en el catálogo? Argumenta tu respuesta.

Esta pregunta fue modificada a partir de un ejercicio tomado del libro *Aritmética Razonada*, para hacerlo más acorde a los precios que comúnmente se manejan en una librería teniendo en cuenta un libro de precio estándar.

En los problemas de contexto que involucra dinero, lo más que se puede aproximar (en un sentido práctico) es a centavos, lo que puede obligar a que el resultado, se trunque o se redondee sólo hasta centésimos.

Decidimos incluir este ejercicio dentro del cuestionario, principalmente porque involucra una situación de porcentaje, donde el resultado está dado en términos de un número decimal periódico, para lo cual es importante analizar la forma en que los estudiantes presentan su respuesta, esto es, si al emitir su respuesta aproximan y como lo hacen, puesto que así se puede evidenciar si realmente entienden que están mostrando una aproximación.

Es de señalar la cuestión anterior ya que por lo regular los estudiantes muestran cierta incongruencia al emitir sus resultados, pues por un lado argumentan que han obtenido una aproximación y por otro lado mantienen el símbolo igual en su resultado.

3.2.6 Pregunta 6.

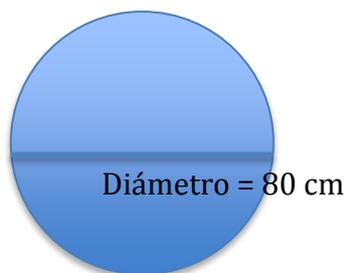
Una muestra de un mineral contiene 3.25% de níquel y 5.02% de hierro. Si la muestra pesa 860 gramos, ¿cuántos gramos de níquel y de hierro contiene? Argumenta tu respuesta

Esta pregunta fue tomada del libro *Aritmética Razonada*, ya que también involucra operaciones entre números con registro entero, decimal y como porcentaje, que en un primer análisis nos podrá mostrar la capacidad que tienen los estudiantes al resolver este tipo de operaciones.

Como las características de la pregunta motivan el conocimiento y la operación entre números enteros, decimales y como porcentaje, resulta de gran interés analizar la manera en que los estudiantes presentan sus resultados después de haber operado con estos diferentes registros de representación.

3.2.7 Pregunta 7.

En la siguiente circunferencia:



- Calcula la longitud de la circunferencia.
- ¿Obtuviste un valor exacto o un valor aproximado?. Argumenta tu respuesta.

Esta pregunta fue modificada partiendo de una pregunta de la prueba ENLACE (2011), con el propósito de analizar las respuestas de los estudiantes al involucrar la noción de la circunferencia así como el número inherente a ella, esto es, el número π .

Como sabemos el número π al ser un número irracional, tiene una expansión decimal infinita y no periódica, por lo tanto resulta un buen ejemplo, en términos de aproximación, calcular la longitud de una circunferencia.

El inciso b), se incorporó también, con el propósito de analizar que tipo de argumentos dan los estudiantes al preguntarles sobre la forma en que expresan su resultado, en cuanto a si es exacto o si es aproximado, ya que al utilizar alguna aproximación del número π para calcular la longitud de la circunferencia, se obtendrá por lo tanto, sólo una aproximación de la longitud de la circunferencia.

Finalmente, al estar involucrado en el ejercicio, la naturaleza del número π , tratamos de plantear una situación a los estudiantes, donde forzosamente tienen que reflexionar entre admitir un resultado aproximado o un resultado exacto, entonces el detalle consiste en analizar dos aspectos interesantes que tanto importan a esta investigación, como son: que tipo de operaciones realizaron los estudiantes para obtener su resultado y cuales fueron sus reacciones cuando se les preguntó sobre la forma en que expresaron su resultado.

3.2.8 Pregunta 8.

La altura de las llantas de mi bicicleta es de 60 cm, ¿qué distancia avanzo cada vez que las llantas dan una vuelta completa? Argumenta tu respuesta.

Esta pregunta fue tomada de los ejercicios de la prueba ENLACE del año 2011, principalmente porque involucra tanto a la circunferencia como a el número π , en un contexto de la vida cotidiana.

Es de notar, que para resolver esta pregunta, el estudiante debe tener conocimiento sobre la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia, y en este sentido, nos interesa conocer el valor que los estudiantes dan al número π , tanto al estar operando como al emitir su resultado.

3.2.9 Pregunta 9.

Juan va a viajar a España durante unos días. Necesita cambiar algunos Pesos (mexicanos) a Euros. Juan se enteró de que el tipo de cambio entre el Peso y el Euro es de:

$$1 \text{ Euro} = \frac{412}{25} \text{ Pesos}$$

Juan cambió 7350 Pesos (mexicanos) a Euros, ¿cuántos Euros recibió Juan? Argumenta tu respuesta.

Este problema fue modificado partiendo de un ejercicio de la prueba PISA (2003), primordialmente para hacerlo más acorde a la idiosincrasia de los

estudiantes que realizaron la prueba y para involucrar un factor de conversión en términos de una fracción.

En este sentido lo que pretendemos analizar es la forma en que los estudiantes aproximan, esto es, cual es la forma como establecen su resultado: si su aproximación es a centésimos, milésimos, etc. Teniendo en cuenta que al ser un problema sobre dinero, el resultado podría estar aproximado sólo hasta centésimos (centavos), incluso, aproximado sólo a enteros.

3.2.10 Pregunta 10.

Resuelve la ecuación de segundo grado y verifica (comprueba) ambas soluciones.

$$21x^2 - 4x - 1 = 0$$

Esta pregunta fue propuesta con el propósito de analizar dos cuestiones: la primera, la forma en que los estudiantes operan y resuelven una ecuación de segundo grado. Por factorización o con la fórmula general, tendrán que efectuar diferentes tipos de operaciones, ya que las raíces de la ecuación son los números $1/3$ y $-1/7$.

La segunda cuestión es para analizar la forma en que los estudiantes comprueban sus resultados pues como anteriormente se dijo, al estar dados en términos de dos números fraccionarios nos interesa ver si los estudiantes toman las raíces como fracción o si hacen la conversión a número decimal, lo que podría influir en que no lleguen a comprobar satisfactoriamente sus resultados.

3.2.11 Pregunta 11.

La base de una escalera se coloca a 50 cm de la pared. Si la escalera mide 240 cm, ¿a qué altura del piso la escalera toca la pared? Argumenta tu respuesta.

Esta pregunta fue tomada del libro de texto *Matemáticas 3*, principalmente para poner en juego el teorema de Pitágoras y en consecuencia el triángulo rectángulo, ya que ambas cuestiones conllevan ciertas características que tienen que ver con la noción de lo exacto y lo aproximado, como es el hecho de tener que encontrar la raíz cuadrada de algún número en específico.

En este sentido es interesante ver la forma en que los estudiantes hacen operaciones y obtienen un resultado que involucra una raíz cuadrada.

CAPÍTULO 4 :

**ANÁLISIS SOBRE LAS
RESPUESTAS DE LOS
ESTUDIANTES**

4.1 Introducción.

En este apartado comentamos el análisis que se hizo partiendo de las respuestas que dieron los estudiantes de tercer año de secundaria, así como las respuestas que dieron los mismos, respecto de cinco preguntas seleccionadas del cuestionario que se aplicó.

En primer término realizamos una tabla sobre las respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes. Obtuvimos que aproximadamente un 44.7% de las preguntas fueron contestadas correctamente por los alumnos y que aproximadamente un 55.3% fueron contestadas incorrectamente. En este sentido nos dimos cuenta que las últimas dos preguntas en general no fueron respondidas por los estudiantes debido a que tenían que ver con dos temas que todavía no les habían enseñado, en este caso el teorema de Pitágoras y la ecuación cuadrática. A continuación mostramos la tabla que elaboramos para ilustrar lo que anteriormente se dijo:

	1A	1B	2	3A	3B	4	5	6	7A	7B	8	9	10	11	Correctas	Incorrectas
1	si	si	no	no	no	no	si	si	si	no	si	no	no	no	6	8
2	si	si	no	si	si	no	si	no	5	9						
3	si	si	no	si	si	no	si	no	no	si	si	si	no	no	8	6
4	si	si	no	si	si	no	si	no	no	no	si	si	no	no	7	7
5	si	si	no	si	si	no	no	si	si	no	si	si	no	no	8	6
6	no	no	no	si	no	si	si	si	no	no	si	si	no	no	6	8
7	no	no	no	no	no	si	si	si	si	si	si	no	no	no	6	8
8																
9	si	si	no	si	no	si	si	si	si	no	si	si	no	no	10	4
10	si	no	no	si	si	no	3	11								
11	no	no	no	si	si	no	si	si	no	no	no	si	no	no	5	9
12																
13	si	si	no	si	si	no	no	si	si	si	no	si	no	no	8	6
14	no	no	no	si	no	no	9	5								
15	si	si	no	si	si	no	no	si	si	si	no	si	no	no	8	6
16	si	si	no	si	si	no	si	no	si	no	si	no	no	no	7	7
17	si	si	no	si	si	no	no	si	si	si	no	si	no	no	8	6
18	si	no	no	si	si	no	si	no	4	10						
19	si	no	no	si	si	no	no	si	si	si	si	no	no	no	7	7
20	si	no	no	si	si	no	no	si	no	no	no	no	no	no	4	10
21	no	no	no	si	si	no	si	si	si	si	si	si	no	no	8	6
22	no	no	no	si	no	no	no	si	si	no	no	si	no	no	4	10
23	si	si	no	si	no	si	no	no	si	no	no	no	no	no	5	9
24	no	no	no	si	si	no	si	si	no	si	no	no	no	no	5	9
25	si	no	no	si	si	no	si	si	si	no	si	si	no	no	8	6
26	si	si	no	si	si	no	no	si	si	si	no	si	no	no	8	6
27	si	si	no	si	no	no	3	11								
28	si	si	no	no	no	no	no	si	no	no	no	no	no	no	3	11
29	no	no	no	si	si	no	no	no	no	no	si	no	no	no	3	11
30	si	si	no	si	no	no	no	si	no	no	si	no	no	no	5	9
31	no	no	no	si	si	no	si	si	si	si	si	si	no	no	8	6
32	si	si	no	si	si	si	si	si	si	no	si	si	no	no	10	4
33	si	si	no	si	si	no	no	no	no	no	no	si	no	no	5	9

Tabla 1. Primer Tabla de Respuestas.

Los dos estudiantes que aparecen señalados en la tabla con una línea azul es porque no aplicaron el cuestionario. Es de señalar, que ningún estudiante contestó correctamente el ejercicio 2, que tiene que ver con la compra de un celular; así mismo también podemos ver en la tabla la cantidad de ejercicios que

fueron contestados correctamente (194) y los que fueron contestados incorrectamente (240 incisos).

4.2 Análisis sobre las Respuestas de los Estudiantes.

Después realizamos un análisis, que aunque nominal, trata de mostrar una inspección más profunda sobre las respuestas que dieron los estudiantes. Este análisis hace referencia a la forma en que respondieron los estudiantes bajo la siguiente clasificación:

- i) El estudiante realizó operaciones y argumentó.
- ii) El estudiante sólo realizó operaciones.
- iii) El estudiante sólo argumentó.
- iv) El estudiante sólo expuso el resultado.
- v) El estudiante no contesto.

Es de señalar que la clasificación anterior fue propuesta como una manera de poder diferenciar las respuestas de los estudiantes y así también analizar su conocimiento sobre las nociones de lo exacto, lo aproximado y la estimación. Esta clasificación es nominal, es decir, ninguno de los incisos tiene preponderancia sobre los otros.

A partir de este análisis obtuvimos que:

- Aproximadamente en el 17.05% de las preguntas los estudiantes están en el inciso i).
- Aproximadamente en el 27.65% de las preguntas los estudiantes están en el inciso ii).
- Aproximadamente en el 15.67% de las preguntas los estudiantes están en el inciso iii).
- Aproximadamente en el 18.2% de las preguntas los estudiantes están en el inciso iv).
- Aproximadamente en el 21.43% de las preguntas los estudiantes están en el inciso v).

Realmente nos interesa ver la forma en que operan los estudiantes y de igual manera nos interesa ver cómo argumentan al momento de establecer su respuesta. A continuación mostramos otra tabla que ilustra lo anteriormente dicho:

Uno de los principales objetivos de la tabla anterior es analizar la posible concordancia entre lo que se les pedía a los estudiantes en el cuestionario y lo que realmente ellos contestaron, de lo cual podemos ver que si hubo una considerable cantidad de ellos que realizaron operaciones y argumentaron.

También podemos ver en el inciso de la pregunta 7, que la mayoría de los estudiantes en sus respuestas, estuvieron en el inciso iii) (argumentó), pero esto se debió a que la pregunta pretendía una respuesta de tipo literal en vez de una respuesta de tipo numérica, pues motivaba a los estudiantes a que respondieran sobre una característica que presentaba el ejercicio.

La tabla también nos da la oportunidad de hacer un análisis ya sea tomando como base las filas o las columnas de la misma. Por ejemplo, en las dos primeras columnas se ve que hubo mayor preponderancia de incisos en color amarillo, esto es, que realizaron operaciones; en las siguientes cuatro columnas se puede ver que el inciso que más aparece es el verde, sobre argumentar y realizar operaciones; en las siguientes tres columnas el inciso que aparece con mayor frecuencia es el amarillo aunque hay una considerable de incisos en color azul que tiene que ver con que el estudiante sólo expuso el resultado; en la siguiente columna se nota la preponderancia del color anaranjado por las razones que se comentaron en el párrafo anterior; en las dos columnas siguientes también se nota mayor frecuencia del inciso en color amarillo y por último las dos columnas finales están casi en su totalidad en color rojo, del inciso donde los estudiantes no contestaron, lo cual tuvo que ver, como se dijo, con que el tema en cuestión no les había sido enseñado a los estudiantes.

Otra cuestión interesante que nos muestra la tabla es la tendencia con que algunos estudiantes respondieron el cuestionario, pues a partir de ella podemos ver que algunos de ellos estuvieron más en alguno de los incisos que se propusieron; como en el caso de los estudiantes 1, 4 y 32 que se inclinaron a realizar operaciones y argumentar; otros de ellos tuvieron una tendencia a realizar operaciones (estudiantes 9, 19 y 25); otros más se inclinaron sólo a exponer el resultado (estudiantes 7, 18 y 20); hubo algunos que se inclinaron a no contestar (estudiantes 2, 10 y 27) y en los estudiantes restantes, no se nota claramente alguna tendencia para contestar.

Es posible que la tendencia para contestar, por parte de los estudiantes, fuera porque entendieron mejor la pregunta, se les hizo más interesante, pensaron que no era tan difícil, que la pregunta requería menos cálculos, etc.

4.3 Análisis Sobre la Forma en que Contestaron Algunos Estudiantes Respecto de Cinco Preguntas Seleccionadas del Cuestionario.

En esta parte del capítulo comentamos sobre cómo es que contestaron algunos estudiantes a cinco preguntas del cuestionario y de igual forma mostramos con una imagen la respuesta de cada uno de ellos.

Las preguntas que fueron tomadas como referencia son: la pregunta 2, la pregunta 3, la pregunta 4, la pregunta 7 y la pregunta 9.

En principio se decidió tomar bajo análisis y como muestra sólo estas cinco preguntas debido a que, en primer lugar, creímos que no era necesario mostrar las respuestas de los estudiantes para cada una de las preguntas del cuestionario, porque estas cinco preguntas que se tomaron como muestra satisfacen los criterios de análisis que interesan a esta investigación y en segunda instancia, porque así lo indicaban las características de la tabla que anteriormente se mostró, al señalarlos qué preguntas del cuestionario habían sido contestadas realizando operaciones y argumentando.

Estos criterios principalmente tienen que ver con la forma en que los estudiantes respondieron al cuestionario teniendo como fondo la cuestión de la estimación, lo exacto y lo aproximado.

Por ejemplo, elegimos la pregunta 2 ya que en general a los estudiantes se les complico, después de realizar sus cálculos, el determinar que les convenía comprar el celular en cualquier establecimiento, así como el hecho de que fue una de las preguntas en la que más estudiantes argumentaron su respuesta.

Elegimos la pregunta 3, porque tiene que ver con cuestiones de estimación lo cual representa uno de los temas importantes en el presente trabajo y en este sentido también nos interesa saber lo que argumentan los estudiantes.

Se eligió la pregunta 4, porque es un ejercicio interesante al tener en su descripción una combinación entre números decimales y fraccionarios lo cual nos ayudaría a analizar la forma en que los estudiantes operan entre ambos sistemas de numeración; también resulto de apoyo la tabla anterior pues nos mostraba que en esta pregunta varios estudiantes habían realizado operaciones y argumentado.

La pregunta 7 se tomó como muestra puesto que contiene ciertas características donde las nociones de lo exacto y lo aproximado son importantes, al estar involucrada en la pregunta la naturaleza del círculo y se les preguntaba a los estudiantes que explicaran literalmente el porqué de sus resultados.

Por último tomamos la pregunta 9, ya que contiene ciertos aspectos que de forma similar están presentes en otras preguntas y porque queríamos ver la forma en que los estudiantes realizan operaciones, teniendo en cuenta que fue una de las preguntas en que más ocurrió esto. A continuación mostramos los ejemplos:

4.3.1 Respuestas a la Pregunta 2.

Seleccionamos sólo las respuestas de dos estudiantes, debido a la forma en que contestaron, pues se asemeja a la forma en que contestaron los demás estudiantes; podríamos decir, que entre un 40% o 50% de los estudiantes contesto de manera similar estas dos respuestas. Como se comentó anteriormente, ningún estudiante respondió de forma correcta esta pregunta, que nos parece de notable consideración.

A continuación mostramos la respuesta de un estudiante:

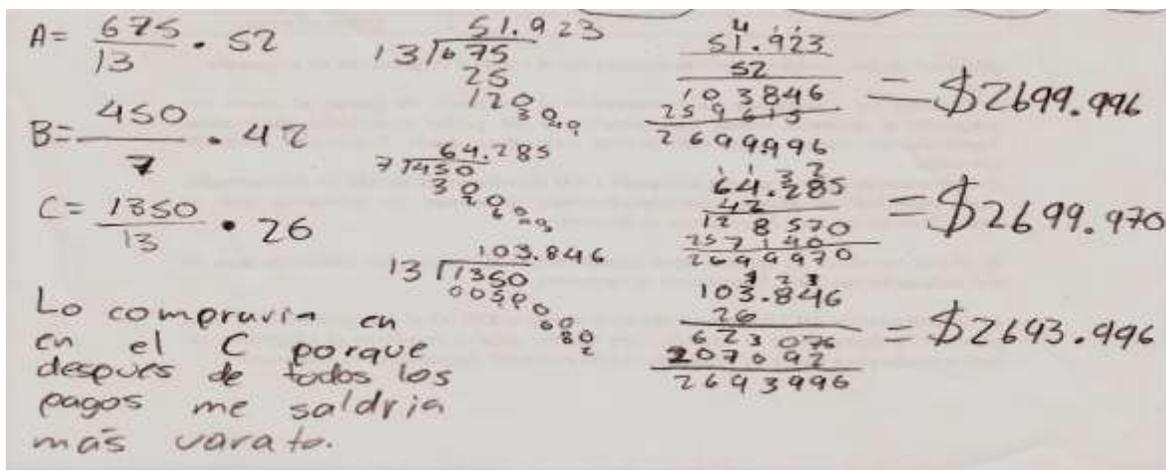


Imagen 4.1 Pregunta 2, primer respuesta.

Como vemos en esta respuesta el estudiante comenzó a plantear de forma correcta las operaciones que le llevarían al resultado correcto pero en vez de multiplicar la fracción (que representa el pago por semana) por las semanas en cuestión, decidió convertir primero las fracciones a decimales y luego multiplicar el resultado por las semanas. Pero había un gran riesgo al convertir las fracciones a decimales puesto que, como se dijo anteriormente, cada una de ellas resultaba en un número decimal periódico. En este caso el estudiante al convertir la

fracción a decimal truncó el resultado hasta centésimos y después lo multiplico por las semanas, sin tener en cuenta que esto lo llevaría a una solución aproximada.

También podemos ver que el estudiante en el caso de las operaciones del establecimiento C, tuvo un error al multiplicar lo que le resultó de la conversión a fracción por las semanas.

El hecho de haber convertido la fracción a decimal y haber truncado hasta centésimos, sin tener en cuenta la pérdida de exactitud que esto conlleva, motivó a que el estudiante decidiera que le convenía comprar el celular en el establecimiento C.

A continuación mostramos la respuesta de otro estudiante:

2: Primero para sacar la equivalencia de $(675/13)$, $(450/7)$, $(1350/13)$ obtendré.
se divide $675 \div 13$, $450 \div 7$, $1350 \div 13$, y los resultados son
\$51.92, \$64.28, \$103.84 y después elegí la B porque
sería un pago de 42 semanas, y cada semana pagaría
\$64.28, para comprobar que el celular si cuesta \$2700
multiplique $\$64.28 \times 42 \text{ semanas} = 2699.76$ equivalente a \$2700
y sale más barato en B.

Imagen 4.2 Pregunta 2, segunda respuesta.

De igual forma este estudiante realiza la conversión de cada fracción a decimal, aunque hay que resaltar la forma en que argumentó su respuesta. Como vemos el estudiante utiliza la palabra “equivalencia” para señalar la conversión de las fracciones a decimales; por un lado muestra que está utilizando de forma descuidada el término equivalencia ya que ninguna de las fracciones equivale a los decimales que obtuvo y por otro lado muestra que el sentido que da al término equivalencia es el de admitir que la fracción resultante por 42 casi es 2700.

4.3.2 Respuestas a la Pregunta 3.

Seleccionamos las respuestas de dos estudiantes, debido a dos razones diferentes: la respuesta del primer estudiante fue seleccionada, ya que ningún estudiante contestó de manera similar y porque nos pareció interesante la forma en que estableció el estudiante su respuesta; la respuesta del segundo estudiante se seleccionó, debido a que alrededor de un 30% o 40% de estudiantes contestó de manera muy parecida.

A continuación mostramos la respuesta de un estudiante:

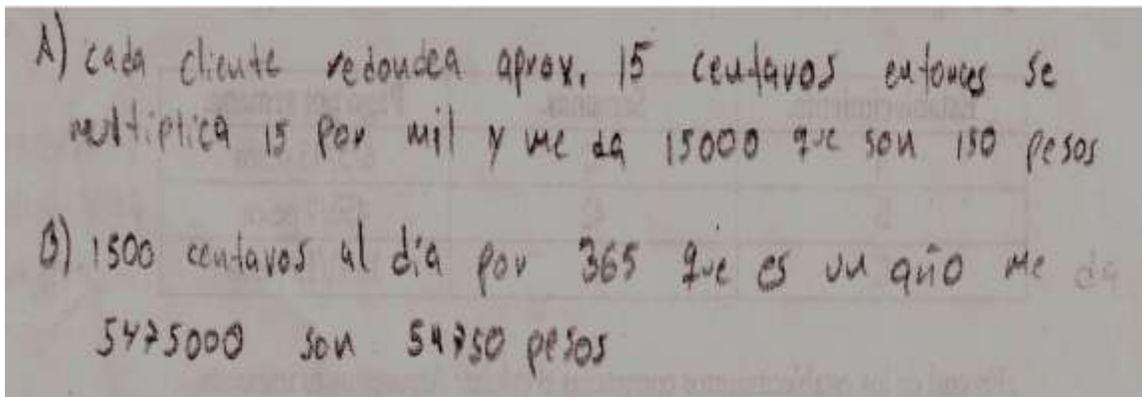


Imagen 4.3 Pregunta 3, primer respuesta.

En esta respuesta dada por el estudiante es muy interesante el hecho de que haya elegido 15 centavos como promedio posible para lo que podrían redondear todas las personas al haber permitido hacerlo en su cuenta y también vemos que esa misma estimación la ocupa para un año.

Aunque el estudiante no lo especifica creemos que para el estudiante tomar 15 centavos como promedio, fue una elección que tuvo que ver con la suposición de que, a su criterio, por lo regular son los centavos que se redondean cuando uno compra en una tienda de autoservicio.

Pero más allá de lo que pudiera haber creído el estudiante respecto de los centavos que se podían estimar y al no explicar el porqué de su elección, nos hace ver que su noción sobre la estimación se reduce sólo a una posibilidad.

A continuación mostramos la respuesta de otro estudiante:

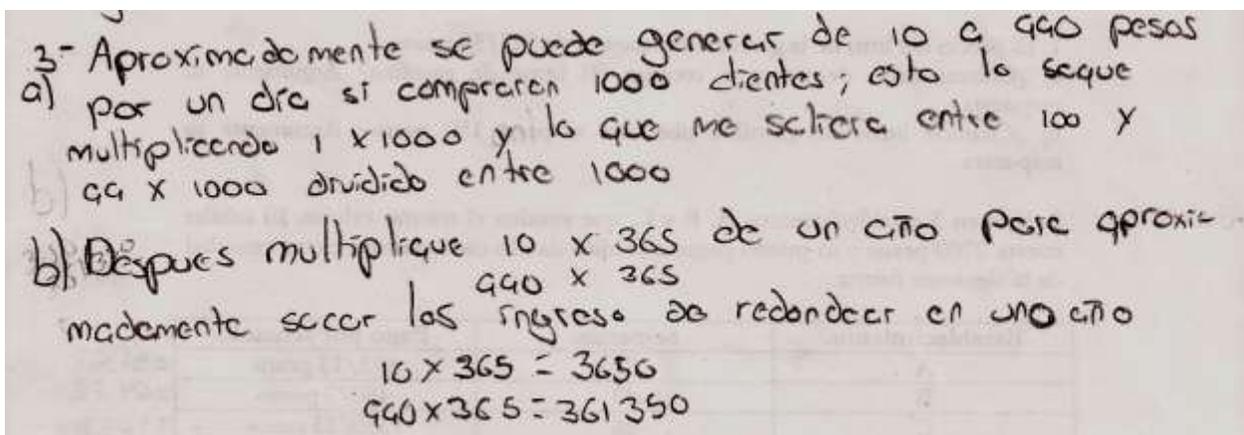


Imagen 4.4 Pregunta 3, segunda respuesta.

En esta respuesta el estudiante tuvo una noción diferente sobre la estimación de los centavos que se redondean, ya que planteó un posible intervalo donde incluye tanto el valor mínimo posible como el valor máximo posible que se puede redondear.

Para ello multiplicó un centavo por mil y luego divide este resultado entre cien para establecer su resultado en términos de pesos y así mismo lo hace para 99 centavos, aunque al final de la respuesta a) comete un pequeño error (que no influye en su respuesta), al explicar que divide entre 1000 en vez de entre 100.

De igual manera para un año multiplica lo que se redondea en un día, o como él lo toma de 10 pesos a 990 pesos, por los días que tiene un año.

Para este estudiante la noción de la estimación esta un poco más estructurada pues pudo establecer un intervalo donde ese posible promedio ocurre.

4.3.3 Respuestas a la Pregunta 4.

Se eligieron las siguientes respuestas de dos estudiantes, debido a que hubo una cierta cantidad de estudiantes que contestaron de manera similar, esto es, alrededor de un 30% de estudiantes contestó como se ve en la imagen del primer estudiante que mostramos y alrededor de un 20% de estudiantes contestó como se puede ver en la imagen del segundo estudiante que mostramos. Es de comentar que la forma en que contestó el segundo estudiante, representa la respuesta correcta del enunciado.

A continuación mostramos la pregunta de un estudiante:

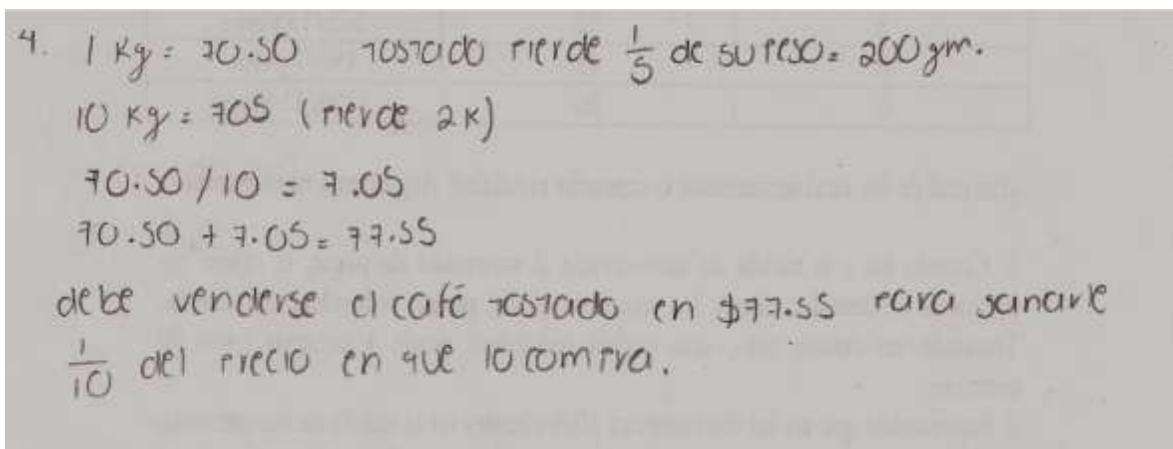


Imagen 4.5 Pregunta 4, primer respuesta.

Como vemos este estudiante primero estableció la cantidad de dinero que se habían gastado por los 10 kg de café para después calcular lo que debía de ganarse por cada kilogramo de café, esto es, una décima parte y por último sumo lo que cuesta cada kilogramo de café más lo que debía de ganarse estableciendo así el precio al que se debe de vender para que exista la ganancia propuesta.

Aunque la respuesta del estudiante no es del todo correcta es interesante analizar la forma en que desarrollo el problema así como la manera en que realizó sus operaciones ya que al principio establece de manera correcta la cantidad de dinero por los 10 kilogramos de café pero después realiza las operaciones sólo teniendo en cuenta 1 kg, haciendo que la ganancia esperada no resulte.

Como nos interesa analizar la forma en que los estudiantes realizan operaciones entre diferentes sistemas de numeración, vemos que este estudiante operó de manera adecuada entre números decimales y fraccionarios pero al momento de establecer su respuesta no entendió que debía de estar en términos de los 10 kg iniciales que se habían comprado y no de un solo kilogramo.

A continuación mostramos la respuesta de otro estudiante:

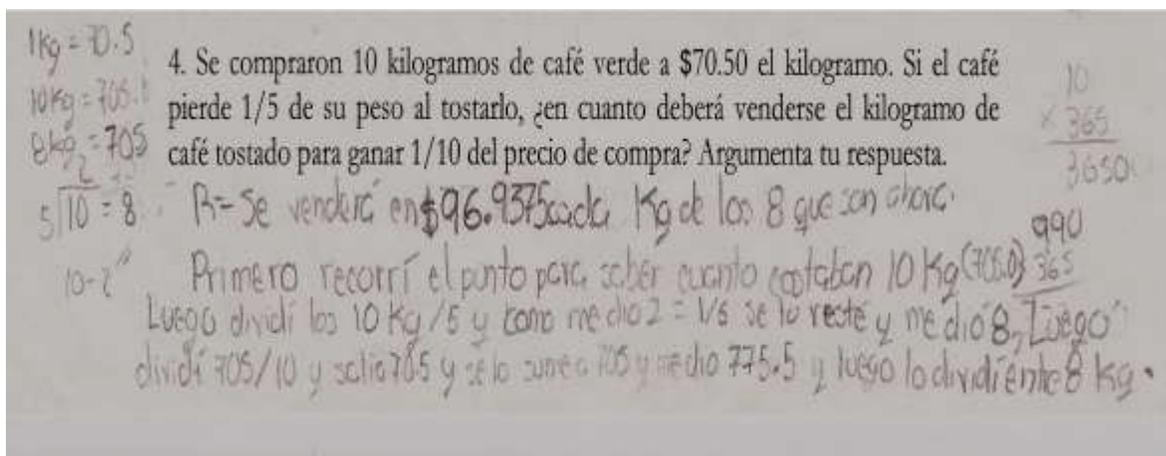


Imagen 4.6 Pregunta 4, segunda respuesta.

Las respuesta de este estudiante tiene ciertas características que debemos de analizar con detalle pues más allá de que contestó correctamente, se puede ver en su respuesta que toma 4 decimales para establecerla, lo que nos da pie a pensar, por un lado, que realizó las operaciones con la calculadora, o por otro, que el estudiante se dio cuenta realmente de que al tomar esos decimales se llegaba a un resultado exacto.

También podemos ver que para multiplicar los 10 kg de café por el precio unitario del mismo, él habla de “recorrer el punto”, lo que nos muestra que tiene cierta noción sobre multiplicar números decimales y fraccionarios. Después divide tanto el total de kilogramos de café entre lo que se pierde al tostarlo, así como el precio total de los 10 kg entre la ganancia requerida. Por último suma la ganancia requerida y el precio total para dividirlo entre la cantidad de café que queda después de tostarlo y entonces establecer su respuesta.

En su respuesta el estudiante entendió que para resolver de manera adecuada el problema, debía de tenerse en cuenta el total de kilogramos de café que se compraron y no sólo un kilogramo de café.

4.3.4 Respuestas a la Pregunta 7.

Las siguientes imágenes que presentamos, tienen que ver con las respuestas de dos estudiantes que se seleccionaron, ya que presentan ciertas características interesantes para ser mostradas. La respuesta del primer estudiante que mostramos fue contestada de manera semejante por unos 8 estudiantes, de los 31 que realizaron el cuestionario. La respuesta del segundo estudiante que mostramos fue muy singular, pues sólo este estudiante contestó de esa manera.

A continuación mostramos la respuesta de un estudiante:

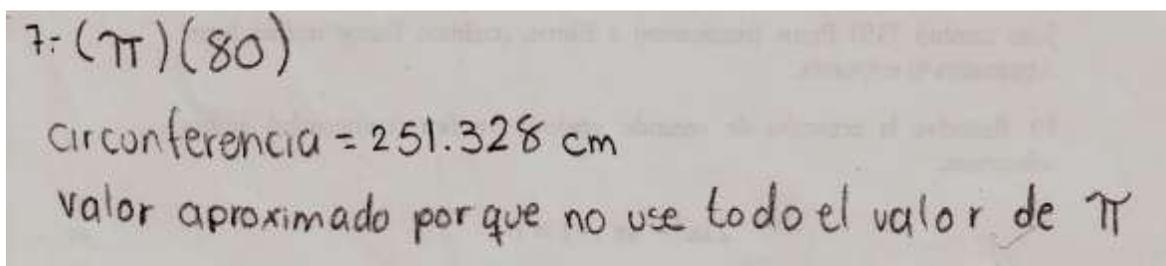


Imagen 4.7 Pregunta 7, primer respuesta.

La respuesta dada por este estudiante tiene algunos aspectos interesantes que hay que considerar.

En primera, el estudiante establece correctamente la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia, pero en el momento de obtener el resultado, este lo expresa como una solución exacta al utilizar el signo igual en su resultado.

En seguida cuando se le cuestionó si su solución era exacta o aproximada, comenta que obtuvo un valor aproximado debido a que no utilizó todo el valor del número π , pues a pesar de que su comentario es correcto en la aproximación

del número π , muestra una incongruencia con el renglón anterior que él mismo estableció al referir, con el signo igual, que obtuvo un resultado exacto.

Es posible que los estudiantes al conocer únicamente el símbolo “=”, para establecer un resultado, lo ocupen de igual manera tanto para emitir un resultado exacto como para un resultado aproximado; al parecer es un aspecto que tiene que ver con la enseñanza que se le da a los estudiantes, pues no se les enseña otro símbolo, como el de aproximación (\cong).

Vemos que cuando establecen el signo igual en un resultado, ellos no tienen en cuenta si está en términos de una aproximación o del valor exacto, pues para el estudiante el signo igual, en general, representa una “equivalencia” entre las operaciones realizadas y el resultado obtenido, como decir “esto fue lo que me resultó después de haber hecho estas operaciones”.

Ahora mostraremos la respuesta de otro estudiante:

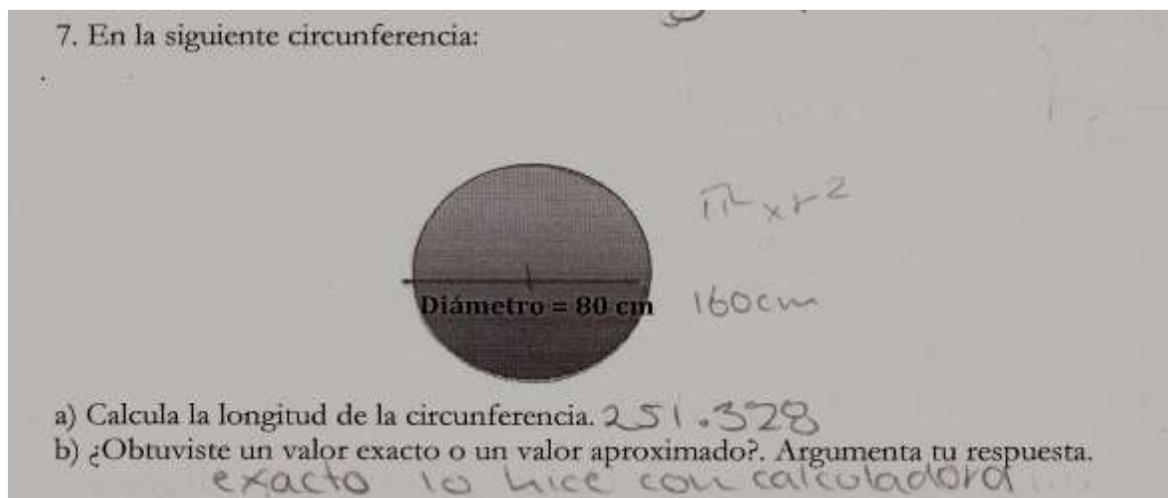


Imagen 4.8 Pregunta 7, segunda respuesta.

Como vemos este estudiante primero establece una aproximación correcta a la solución de calcular la longitud de la circunferencia, situando dicha aproximación hasta milésimos aunque después en el siguiente inciso, podemos darnos cuenta de la falta de conocimiento que posee en el uso de la calculadora pues el estudiante cree que sólo el hecho de utilizarla le garantizará un resultado exacto.

Esto fue evidente después de preguntarle sobre si su valor es exacto o aproximado puesto que él responde que obtuvo un valor exacto dado que lo obtuvo a partir de usar la calculadora.

Por lo tanto, lo que podemos considerar es que el estudiante no tiene clara la noción sobre la naturaleza del número π , pues no tiene en cuenta que sólo ha tomado una aproximación de este número y también en este sentido, vemos que el estudiante al estar utilizando la calculadora y sin conocer la naturaleza del número π entendió que su resultado debería de ser exacto.

4.3.5 Respuestas a la Pregunta 9.

En general, la mayoría de los estudiantes contestó de manera correcta la pregunta 9. Las imágenes que mostramos a continuación representan las respuestas de dos estudiantes, que se seleccionaron para evidenciar la forma en que contestaron los demás estudiantes. La respuesta del primer estudiante que mostramos fue contestada de manera similar por unos 10 estudiantes y decidimos tomar esta respuesta, pues nos pareció interesante la forma en que el estudiante aproximó su resultado. La segunda respuesta que mostramos, fue contestada de manera semejante por 3 estudiantes.

Mostramos la respuesta de un estudiante:

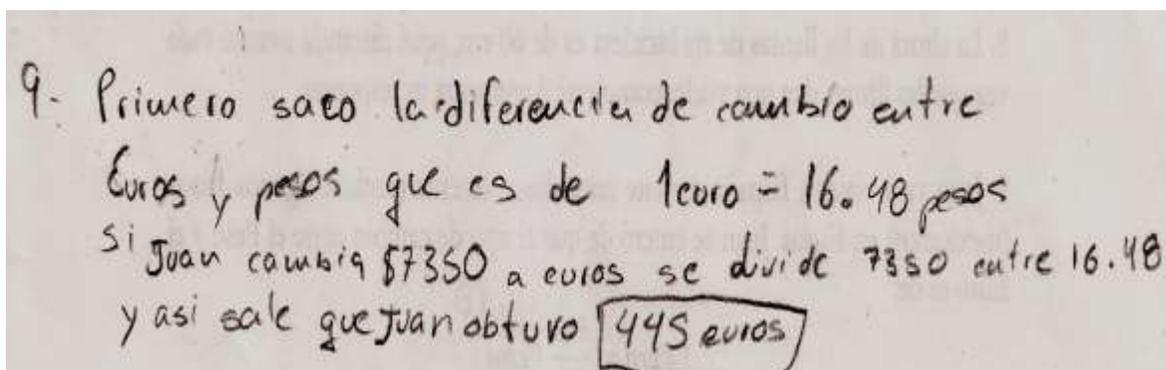


Imagen 4.9 Pregunta 9, primer respuesta.

Como vemos en esta respuesta el estudiante no muestra ninguna operación en la que se apoyo para llegar a sus soluciones lo que podría indicar que utilizó la calculadora para resolver el ejercicio. Aunque el uso de la calculadora estaba permitido se hizo la aclaración de que debían de mostrar las operaciones que realizaban para resolver el ejercicio.

Una cuestión que resalta en la solución de este estudiante, es la forma en que aproxima su resultado, pues lo expresa en enteros sin tener en cuenta los decimales. A pesar de que el resultado correcto (en términos de exactitud) tiene varios decimales, él consideró que debía de aproximarlos a un entero. Creemos

que lo que motivó a expresar su resultado de esta manera fue una cuestión más bien práctica pues entendió que cuando realizas un cambio de moneda debes de recibir una cantidad que se acomode a los tipos de denominaciones que maneja esa moneda, como en el peso mexicano son los 50 centavos, 1 peso, 5 pesos, 10 pesos, etc.

A continuación mostramos la respuesta de otro estudiante:

The image shows handwritten mathematical work. At the top left, it says "1 euro = $\frac{412}{25}$ pesos". To the right, it says "16.58" with a long division showing $25 \overline{) 412}$ resulting in 16.58. Below this, it says "1 euro = \$16.58". The main part of the work is a long division: $1658 \overline{) 735000}$. The student has written "479.8" above the line and "Resultado: 1100" below it. To the right of the division, there are several other calculations: $1658 \overline{) 4798}$ resulting in 2.9, $16580 \overline{) 8290}$ resulting in 5, and $1658 \overline{) 434}$ resulting in 0.26. The final result written is "Le dieron 479.8 euros."

Imagen 4.10 Pregunta 9, segunda respuesta.

En esta respuesta vemos que el estudiante estableció de manera correcta las operaciones que le llevarían a la solución, primero al convertir la fracción a decimales, para luego poder encontrar la cantidad aproximada de euros que se iban a canjear.

Vemos que la aproximación que obtiene es hasta décimos, lo que resultó después de haber aplicado el algoritmo de la división. Aunque en el momento de efectuar la división notamos que, a diferencia del anterior estudiante, realizó las operaciones manualmente y aunque claramente la imagen lo muestra, desgraciadamente esto ocasionó que tuviera un error, que finalmente le condujo a una solución incorrecta del ejercicio.

CAPÍTULO 5:

CONCLUSIONES

A partir del desarrollo que se hizo anteriormente podemos entonces establecer las conclusiones que son pertinentes en esta investigación.

Acerca de las Preguntas de Investigación.

En primera instancia tratamos de contestar las preguntas de investigación que fueron inicialmente planteadas:

1. Los estudiantes de secundaria, ¿qué noción tienen sobre lo exacto y lo aproximado, tanto al realizar operaciones como al obtener un resultado?

Al analizar las respuestas que dieron los estudiantes en el cuestionario exploratorio nos pudimos dar cuenta que la noción que tienen de lo que es y lo que representa, lo exacto y lo aproximado, tanto al operar como al emitir sus resultados no es muy clara, puesto que en muchas de sus respuestas, se notó su desconocimiento del tema, debido entre otras cosas a que ellos establecían sus resultados sin tener en cuenta los factores de los cuales dependía el mismo; esto fue muy notable ya que en la mayoría de las ocasiones ellos no establecían una, sino que truncaban su resultado tomando los decimales que consideraban adecuados, y en este sentido pudimos ver que desconocían trabajar en términos de una aproximación.

También constatamos que, a pesar de que algunos estudiantes argumentaban que habían llegado a una aproximación del resultado, en general, en su solución numérica no eran congruentes, puesto que mantenían el signo igual en la solución.

Principalmente pudimos notar que los estudiantes no tienen clara esta noción pues en el ejercicio 2 del cuestionario, no pudieron responder satisfactoriamente en cual de los establecimientos les convenía comprar el celular, y aunque esencialmente en cualquiera de los tres establecimientos convenía comprarlo, ellos se inclinaron a escoger alguno de los establecimientos como su respuesta.

Lo anterior muestra que la principal causa de que los estudiantes no lograran responder bien el ejercicio fue el cambiar de registro de representación (Duval, R. 1999), de los números entre el registro de fracción y el registro decimal. Y es que al hacerlo el número en cuestión debía de ser aproximado, lo que hacía que también la solución debía de ser aproximada.

Por lo tanto el hecho de que los estudiantes no tuvieran conocimiento de las ventajas y las desventajas que ocurrían al cambiar de registro (conversión) hizo que no pudieran encontrar la solución al citado ejercicio.

2. ¿Qué ideas sobre la estimación tienen los estudiantes de secundaria?

Después de analizar las respuestas que dieron los estudiantes pudimos constatar que tienen una idea muy elemental sobre lo que es la estimación; esto lo vimos a partir de las respuestas que dieron los estudiantes, principalmente en la pregunta 3 del cuestionario donde se les pedía que estimaran la cantidad de dinero que se podía generar en una tienda de autoservicio después de que se redondearan los posibles centavos que sobran en una compra; notamos que para algunos estudiantes el termino “estimación”, no tiene un claro sentido pues se limitan a establecer un valor sin tener en cuenta las variables que se deben de involucrar; para otros estudiantes la noción que tienen es un poco más precisa pues establecen no sólo un valor sino dos valores en donde establecer el resultado; finalmente algunos de ellos no pudieron establecer una respuesta que fuera consistente con lo que se les pedía.

Respecto de la estimación, en el plan de estudios vigente de SEP no se hace una referencia explícita a este tema, únicamente en el bloque V para tercer grado de secundaria se hace una referencia a “Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de...”, pero en ningún otro bloque se habla de la estimación de manera explícita, aunque el tema pudiera estar involucrado en otros contextos.

Acerca de la Enseñanza.

- Encontramos que no hay una referencia explícita en el plan de estudios de secundaria que emite SEP, ni por consiguiente en los libros de texto, para definir con claridad las nociones de exactitud, aproximación y estimación, aunque existen diferentes temas en los que se involucran de manera implícita estas nociones.
- De igual manera notamos que los profesores parecen soslayar estas nociones en el momento que realizan su práctica educativa y esto se ve reflejado en el conocimiento que tienen los estudiantes respecto de estas ideas, principalmente cuando llevan a cabo operaciones entre diferentes registros así como cuando emiten algún resultado.
- Pudimos ver que existen diferentes contextos donde esta presente este desconocimiento sobre las nociones de exactitud, aproximación y estimación; nosotros los constatamos tanto en la tesis como en el artículo de investigación que presentamos.

- Uno de los factores que pueda estar afectando a este desconocimiento es el uso inconsciente y descuidado que tienen los estudiantes de la calculadora; esto es relevante, ya que antes de que se les permita a los estudiantes realizar cálculos con una calculadora, deberían primero mostrarles las ventajas y desventajas de operar entre diferentes registros numéricos, para que así puedan entender las limitaciones con que cuenta este aparato.
- Es importante que se haga una referencia explícita, ya sea por los maestros o por las autoridades competentes, de las ventajas y desventajas que existen al operar o emitir resultados cuando se hacen entre diferentes registros de representación.
- Notamos que cuando los estudiantes utilizan el símbolo “=” para establecer un resultado, comúnmente lo entienden como una equivalencia entre las operaciones realizadas y el resultado obtenido, es decir, no están pensando si el resultado está en términos de algo exacto o algo aproximado pues no se les enseña otro símbolo para referir una aproximación (\cong).

Acerca del Aprendizaje.

- Constatamos que los estudiantes de nivel secundaria tienen una tendencia a convertir números fraccionarios a su representación decimal (cambio de registro), cuando en algún problema está involucrada la operación de números fraccionarios.
- También notamos que los estudiantes de secundaria desconocen el posible riesgo que existe al cambiar de registro de representación (conversión), cuando a partir de alguna operación entre los registros involucrados se pasa de una representación exacta a una representación aproximada.
- Los estudiantes no entienden la importancia de diferenciar entre un valor exacto y un valor aproximado cuando realizan una operación o en el momento de establecer un resultado.
- Se pudo ver que los estudiantes de este nivel académico tienen un vago conocimiento de la noción de estimación, haciéndose visible cuando en un ejercicio se les pregunto acerca del tema.

- Los estudiantes al utilizar la calculadora no hacen un uso consciente de los resultados que les proporciona esta.
- Sería importante pensar en la convención alrededor del símbolo “=” y en las diferencias de su uso. Teniendo en cuenta el uso de este símbolo, tanto en expresiones verbales como simbólicas y los significados que los estudiantes dan a cada una.

Acerca de una Investigación a Futuro.

- Después de haber realizado esta investigación creemos que sería de mucho provecho, extender las mismas ideas centrales de este trabajo a un nivel académico posterior como lo es el nivel medio superior, incluso, en el nivel superior mismo.
- Creemos que también sería interesante realizar un estudio, teniendo como base las ideas de lo exacto, la aproximación y la estimación, con los personajes del otro sector, es decir, con los profesores. Este estudio podría hacerse tanto en profesores de secundaria, de preparatoria o de licenciatura.
- Claro está, se tendrían que ampliar los horizontes de investigación pues se deberían de investigar los planes de estudio de los distintos niveles académicos así como profundizar en las cuestiones de exactitud, aproximación y estimación, puesto que se debe de planear de forma distinta la enseñanza y el aprendizaje en estos niveles académicos.

REFERENCIAS .

REFERENCIAS.

- Antaria, C. (2010). *Descubriendo las matemáticas 2*. México Distrito Federal: Ediciones de Excelencia.

- Ávila, A.; García, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura*. Textos de divulgación. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México D. F.

- Braccialarghe, D., Emmanuele, D., González, M.I. & Introcaso, B. (2010). Entre lo Exacto y lo Aproximado. Una experiencia áulica. Cuarta Jornada de Educación Matemática FCEIA – IPS. Recuperado en: http://www.fceia.unr.edu.ar/matematica/jornadas2010/materiales/entre_exacto_aproximado.pdf.

- Cantoral, R.; Farfán, R.; Montiel, G.; Lezama, J.; Molina, G.; Cabañas, G.; Castañeda, A.; Martínez, G. (2008). *Matemáticas 1*. México Distrito Federal: Mc Graw-Hill.

- Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos: www.conaliteg.gob.mx/.

- Del Puerto, S., & Minnaard, C. (1991). La calculadora como recurso didáctico. Recuperado el 6 de Julio de 2012, de Universitat de Girona: http://www.udg.edu/Portals/88/Santalo/l libre_homenatge/La_calculadora_como_recurso_didactico_paper97.pdf

- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. [Primera edición en francés 1995, Berne: Peter Lang].

- Duval, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register, Regular Lecture in the 10th *International Conference on Mathematics Education (ICME 10)*, Dinamarca.

- Hernández, P.; Romero, S. (2010). *Matemáticas 1*. México Distrito Federal: Ediciones Castillo.

- Lupiañez, José Luis; Moreno, Luis (2001). *Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas*. En Gómez, P. ; Rico, L. (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 291-300). Granada: Editorial Universidad de

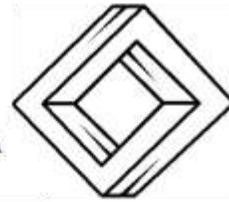
Granada.

- Menéndez Raymat, A. (2006). *El uso de la calculadora en la escuela superior (1995-2005)*. San Juan, P.R.: College Board Oficina de Puerto Rico y América Latina. Recuperado en : http://oprla.collegeboard.com/prod_downloads/ptorico/Cuaderno-10-Uso-de-la-Calculadora-WEB.pdf.
- Morales, R. A. (2012). *Avances y Dificultades de los Adultos de la Secundaria en la Resolución de Problemas con Fracciones*. Tesis de Maestría. Director de Tesis: Marta Elena Valdemoros. Matemática Educativa – CINVESTAV, México.
- Plan de estudios SEP. Recuperado en : <http://alianza.sep.gob.mx/evidencias/EjeIV/>.
- Prueba ENLACE 2011. Recuperado en: <http://enlace.sep.gob.mx/content/>.
- Prueba PISA 2003. Recuperado en: <http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/>.
- Radford, L. (2006). Introducción. *Semiótica y Educación Matemática*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal, México. Pp. 7-21.
- Ruthven, K. (1996). *Calculators in the Mathematics Curriculum. The Scope of Personal Computational Technology*. En: *International Handbook of Mathematics Education*. A. J. Bishop et al. (Eds.), Kluwer Academic Publishers, (pp. 435-468).
- Sánchez, F. (2011). *Matemáticas 1. Construcción del pensamiento*. México Distrito Federal: Fernández Educación.
- Sierpinska, A.; Kilpatrick, J.; Balacheff, N.; Howson, A. G.; Sfard, A.; Steinbring, H. (1993): "What Is Research in Mathematics Education, and What Are its Results?" *Journal for Research in Mathematics Education* 24, 3, 274-278.

- Trigueros, M.; Lozano M.; Schulmaister, M.; Sandoval, I.; Charney, E.: Cortés, M; (2010). *Matemáticas 3*. México Distrito Federal: Santillana Horizontes.
- Zubieta, Francisco.; Sánchez, Elodia. (1970). *Aritmética Razonada*. Edición del autor, México Distrito Federal.

APÉNDICES .

Apéndice A: Publicación Derivada de la Tesis.



México, D. F., 25 de julio 2012

Eder Ricardo Aguiayo Rosillo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), Departamento de Matemática
Educativa (DME).

Estimado (a) ponente Aguiayo Rosillo:

En relación con su solicitud de participación para presentar una ponencia durante el XLV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, que se llevará a cabo del 28 de octubre al 02 de noviembre del año en curso, teniendo como sede la Universidad Autónoma de Querétaro, en Santiago de Querétaro, tengo el placer de informarle que su trabajo:

"La importancia de diferenciar entre el valor aproximado y el valor exacto en el aprendizaje de las matemáticas de secundaria."

ha sido aceptado dentro del área de Matemática Educativa, y clasificado como *Conferencia de Divulgación y de Vinculación*. Su ponencia ha sido programada el día Lunes 29 de Octubre a las 12:20:00 PM Hrs.

Aprovecho la presente para hacer las siguientes consideraciones:

- 1) Para la exposición de su plática, el Comité Organizador le proporcionará cañón y pizarra.
- 2) Es importante mencionar que requerimos del pago de su cuota de inscripción al Congreso, pues para la Sociedad Matemática Mexicana, éste representa una de las principales formas de obtener recursos para el buen funcionamiento del Congreso.
- 3) Esta carta de aceptación no es una constancia oficial de participación en el Congreso.

Agradeciendo su participación, me despido de usted y le envío un cordial saludo.

Atentamente

Dr. Luis Montejano Peimbert
Presidente

Apéndice B: Cuestionario.

INSTRUCCIONES:

- Al contestar cada pregunta debes indicar el procedimiento que realizaste.
- Para efectuar las operaciones puedes utilizar la calculadora siempre y cuando hayas indicado las operaciones que realizaste.

EJERCICIOS.

1. El precio del litro de la gasolina *Premium* es de $527/50$ pesos.

- a) ¿Cuánto debo de pagar si recargo 50 litros de gasolina? Argumenta tu respuesta.
- b) ¿Cuántos litros de gasolina obtendré si pago 150 pesos? Argumenta tu respuesta.

2. Existen 3 establecimientos A, B y C, que venden el mismo celular. El celular cuesta 2700 pesos y lo puedo pagar a crédito dando cada semana cierta cantidad de la siguiente forma:

Establecimiento.	Semanas.	Pago por semana.
A	52	$675/13$ pesos
B	42	$450/7$ pesos
C	26	$1350/13$ pesos

¿En cual de los establecimientos comprarías el celular? Argumenta tu respuesta.

3. Cuando fui a la tienda de autoservicio al momento de pagar, el cajero me preguntó si deseaba donar los centavos y así poder redondear mi cuenta. Teniendo en cuenta esto, uno podría redondear desde 1 centavo hasta 99 centavos.

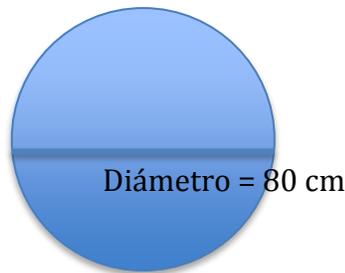
- a) Suponiendo que en un día compran 1000 clientes en la tienda de autoservicio, ¿qué cantidad se genera aproximadamente al sumar los centavos que se redondean en un día? Argumenta tu respuesta.
- b) ¿Qué cantidad se genera aproximadamente al sumar los centavos que se redondean en un año? Argumenta tu respuesta.

4. Se compraron 10 kilogramos de café verde a \$70.50 el kilogramo. Si el café pierde $1/5$ de su peso al tostarlo, ¿en cuanto deberá venderse el kilogramo de café tostado para ganar $1/10$ del precio de compra? Argumenta tu respuesta.

5. He pagado \$156 por un libro, después de obtener un descuento del 10% del precio marcado en el catálogo. ¿Cuál es el precio de ese libro en el catálogo? Argumenta tu respuesta.

6. Una muestra de un mineral contiene 3.25% de níquel y 5.02% de hierro. Si la muestra pesa 860 gramos, ¿cuántos gramos de níquel y de hierro contiene? Argumenta tu respuesta

7. En la siguiente circunferencia:



a) Calcula la longitud de la circunferencia.

b) ¿Obtuviste un valor exacto o un valor aproximado?. Argumenta tu respuesta.

8. La altura de las llantas de mi bicicleta es de 60 cm, ¿qué distancia avanzo cada vez que las llantas dan una vuelta completa? Argumenta tu respuesta.

9. Juan va a viajar a España durante unos días. Necesita cambiar algunos Pesos (mexicanos) en Euros. Juan se enteró de que el tipo de cambio entre el Peso y el Euro es de:

$$1 \text{ Euro} = \frac{412}{25} \text{ Pesos}$$

Juan cambió 7350 Pesos (mexicanos) a Euros, ¿cuántos Euros recibió Juan? Argumenta tu respuesta.

10. Resuelve la ecuación de segundo grado y verifica (comprueba) ambas soluciones.

$$21x^2 - 4x - 1 = 0$$

11. La base de una escalera se coloca a 50 cm de la pared. Si la escalera mide 240 cm, ¿a que altura del piso la escalera toca la pared? Argumenta tu respuesta.