**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

***UNIDAD ZACATENCO***

***DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA***

# “La resolución de problemas y representación de conceptos de Geometría Analítica en un ambiente dinámico”

TESIS

Que presenta

**DANIEL AURELIO AGUILAR MAGALLÓN**

Para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

En la Especialidad de

**MATEMÁTICA EDUCATIVA**

Director de Tesis: **Dr. Luz Manuel Santos Trigo**

México, D.F. AGOSTO, 2014

A los trabajadores de México, quienes hicieron posible que el consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) me diera apoyo económico otorgado con registro de becario Nº. 486327 para completar los estudios de Maestría en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.

# Agradecimientos

Al Dr. Luz Manuel Santos Trigo por su ejemplo, orientación, apoyo y paciencia brindados en la realización de este trabajo.

A mis sinodales, Dr. Luis Enrique Moreno Armella, Dr. Gonzalo Zubieta Badillo y Dr. Marco Antonio Santillán Vázquez por sus aportaciones para la mejora del trabajo.

Al grupo de trabajo del cubículo 107 “Proyecto Conacyt” y en especial a Francisco Ortega Moreno por su constante apoyo y guía para la obtención de este trabajo.

A los estudiantes y autoridades del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel “Vallejo” por las facilidades brindadas para la implementación de la investigación.

A los profesores que me impartieron clase durante la duración de los estudios de maestría por compartir un poco de su conocimiento.

A mi familia, quienes son mi razón de ser y mi motivación para seguirme preparando.

## Contenido

# Resumen

El uso de tecnologías digitales para fomentar la comprensión y desarrollo de habilidades de resolución de problemas se ha convertido en un área importante de la investigación en educación matemática. En particular, es importante investigar el grado en que los profesores incorporan el uso de la tecnología en salones de clases regulares.

Un objetivo de este estudio fue analizar y documentar las formas en que estudiantes de bachillerato usan un sistema de geometría dinámica para representar y explorar tareas y conceptos de geometría analítica.

Algunas preguntas que fueron usadas para enmarcar el estudio fueron: ¿Cuáles son las formas de razonamiento que construyen los estudiantes cuando usan sistemáticamente un sistema de geometría dinámica (Geogebra) para resolver problemas de geometría analítica? y ¿A qué tipo de dificultades se enfrentan los estudiantes durante la implementación de las actividades de resolución de problemas que demandan el uso de la herramienta?

Los resultados muestran que los estudiantes eventualmente relacionaron los enunciados de los problemas con su representación dinámica, basándose en las permisibilidades (*affordances*) de la herramienta; como resultado de mover algunos elementos dentro del modelo dinámico, fueron capaces de reconocer patrones asociados con el comportamiento de objetos matemáticos. En este camino, surgieron algunas conjeturas y los estudiantes se involucraron en un proceso de búsqueda de argumentos para soportarlas.

## Abstract

The use of digital technologies to foster students' comprehension and development of problem solving competence has become an important area of research in mathematics education. In particular, it is important to investigate the extent to which teachers incorporate the use of technology in regular classrooms.

A goal in this study was to analyse and document ways in which high school students use a dynamic software system to represent and explore analytic geometry tasks and concepts.

Research questions that were used to frame the study included: What ways of reasoning do students construct when they systematically use a dynamic geometry system (GeoGebra) to solve analytic geometry problems? And what types of difficulties do students encounter during the implementation of problem solving activities that enhance the use of the tool?

Results indicate that students eventually relied on the tool's affordances to relate problem statements to the construction of dynamic models of the problem. As a result of moving some elements within the model, they were able to identify patterns associated with the behaviours of mathematical objects. In this perspective, some conjectures emerged and students got involved in the search of arguments to support them.

# Capítulo 1

## El problema de Investigación

## 1.1 Introducción

La resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, son temas importantes de la agenda de investigación en Educación Matemática. De acuerdo con Santos (2007), en los últimos 30 años la resolución de problemas ha sustentado propuestas de currículos matemáticos y prácticas de enseñanza. "Un gran número de propuestas del currículo en el ámbito internacional, a nivel preuniversitario, identifican a la resolución de problemas como un eje central en la organización de los contenidos" (Santos, 2008, p. 2). En este sentido, tanto las propuestas de currículos como los escenarios de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son importantes en el análisis del pensamiento matemático que construyen los estudiantes en el salón de clases. De acuerdo con Schoenfeld (1985) pensar matemáticamente va más allá de conocer una gran cantidad de información, es decir, se requiere que dicha información se utilice como una estructura y de forma eficiente para resolver problemas. Santos (2008a) comenta que una característica fundamental del pensamiento matemático es que el alumno desarrolle una forma de pensar que esté relacionada con la práctica de las matemáticas como disciplina.

> Aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios. Los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar consistente con la práctica o el quehacer de la disciplina. En este contexto, los estudiantes constantemente buscan y examinan diferentes tipos de relaciones, plantean conjeturas, utilizan distintos sistemas de representación, establecen conexiones, emplean varios argumentos y comunican sus resultados. (Santos, 2007, p. 36).

Partiendo de esta premisa, el objetivo esencial en el proceso de enseñanza de las matemáticas es lograr que el estudiante desarrolle un pensamiento matemático, donde el uso de diferentes representaciones de relaciones matemáticas para la búsqueda y exploración de conjeturas es un aspecto determinante. En este camino, el uso de tecnologías digitales resulta importante ya que los estudiantes pueden generar y explorar representaciones numéricas, visuales, geométricas, algebraicas y dinámicas de relaciones matemáticas.

> Se argumenta que el uso sistemático de tecnologías digitales no solo mejora lo que profesores y estudiantes hacen con el uso de lápiz y papel; sino también extiende y abre nuevas rutas y formas de razonamiento de los estudiantes y profesores para desarrollar conocimiento matemático. (Santos & Ortega, 2013, p. 196).

En particular, un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) es una herramienta digital novedosa que ha sido ampliamente usada e investigada en escenarios de enseñanza y aprendizaje. Contreras (2011) argumenta que un AGD puede ser utilizado como una herramienta pedagógica de tres formas: herramienta administrativa, motivacional y cognitiva. Como una herramienta administrativa se utiliza para construir configuraciones con alto grado de exactitud; evitando errores de dibujo y medición asociados con el uso de lápiz y papel. También, por ser interactivo, permite generar y refutar conjeturas más fácilmente que con lápiz y papel, pero además, es una herramienta que facilita el seguimiento de la intuición de los estudiantes, lo cual es una característica motivacional del mismo. Por último, representa una herramienta cognitiva, pues genera un ambiente de acción-respuesta fomentando una activa participación de los estudiantes en su proceso de aprendizaje. La potencialidad del uso de un AGD en escenarios de enseñanza y aprendizaje es resaltado por Santos, Espinosa y Reyes (2008) "El uso de software dinámico parece ofrecer a los profesores una oportunidad didáctica para desarrollar actividades de aprendizaje en las cuales los estudiantes pueden tomar ventaja de las características dinámicas de la herramienta para identificar y examinar relaciones matemáticas" (p. 669), además de destacar su utilidad para desarrollar una actividad cercana a las matemáticas como disciplina y a la resolución de problemas.

> El uso de software dinámico es relevante para construir figuras geométricas que pueden ayudar a los estudiantes a reconstruir y examinar relaciones matemáticas. En este proceso, los estudiantes tienen la oportunidad de formular preguntas, hacer conjeturas, presentar argumentos y comunicar resultados. (Santos, Espinosa & Reyes, 2008, p. 657).

La enseñanza de la geometría, y en particular, de la geometría analítica puede ser favorecida por el uso de un AGD, pues este permite explorar relaciones matemáticas mediante construcciones geométricas dinámicas incrustadas en un sistema de referencia. Algunos AGD, como GeoGebra, permiten obtener representaciones algebraicas e información empírica (visual y numérica) de elementos dentro de una construcción, lo que facilita la exploración de distintas representaciones de relaciones matemáticas. Los conceptos de lugar geométrico y cónica son esenciales cuando se trabaja en este tipo de ambientes, pues a partir del movimiento, se puede explorar el recorrido o camino (rastro) que siguen algunos elementos de la construcción y posteriormente definirlos en términos de sus propiedades. Así, el concepto de lugar geométrico deja de ser tratado de forma estática y puede estudiarse dinámicamente como el movimiento de un punto que cumple con ciertas propiedades.

## 1.2 Planteamiento del problema

Debido a la potencialidad que ofrecen los AGD para representar objetos matemáticos, su impacto en escenarios de resolución de problemas de Geometría Analítica es un tema recurrente de investigación en Educación Matemática. Por un lado, Ortega (En revisión) reporta los resultados de plantear problemas rutinarios de libro de texto (Lehman) a estudiantes de Maestría en donde el uso de (GeoGebra) es un componente fundamental; uno de los problemas propuestos en dicha investigación es el siguiente:

> *Un punto se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual a su distancia del punto* $A(4,0)$. *Hallar la ecuación de su lugar geométrico. (Lehman, 2001).*

Un resultado de esta investigación es que el AGD permitió extender y generalizar los problemas, mediante la exploración de modificaciones en la configuración dinámica inicial. En particular, una representación dinámica del problema anterior (representación dinámica de la parábola) sirvió como punto de partida para generar y estudiar todas las secciones cónicas mediante un enfoque de excentricidad (Santos & Ortega, 2013). Además, Ortega (En revisión) afirma que para resolver el problema, mediante una construcción dinámica, los alumnos requieren construir y usar representaciones geométricas dinámicas de los siguientes conceptos:

I. Distancia entre dos puntos.
II. Distancia de un punto a una recta.
III. Mediatriz.

Ortega (En revisión) resalta la importancia de relacionar la distancia entre dos puntos con la traslación de medidas mediante circunferencias, la perpendicularidad para localizar geométricamente la distancia entre un punto y una recta y la relación de la mediatriz con una familia de triángulos isósceles. También, argumenta que el movimiento controlado, entendido como la generación (a partir del movimiento) de una familia de objetos que conservan ciertas propiedades, es una heurística esencial para poder resolver los problemas en un AGD. En resumen, dicho autor reporta que algunas de las ventajas de usr AGD en la resolución de problemas son: 1) permite conectar distintos contenidos matemáticos y diferentes representaciones (excentricidad), 2) favorece la interpretación geométrica y visual de condiciones matemáticas en los problemas y 3) facilita el estudio de una familia de objetos, en este caso, familias de cónicas.

Por otro lado, Jiménez (2011) investiga los procesos de solución de tres problemas geométricos, por parte de estudiantes de Bachillerato dentro de un curso de Geometría Analítica dentro de un AGD (Geogebra). Uno de estos problemas involucra el trazado de circunferencias tangentes a una recta dada que pasan por un punto dado (fuera de la recta) estudiado por Santos (2008a); dicho problema se usa para generar una parábola como lugar geométrico de los centros de dichas circunferencias tangentes. La autora argumenta que el uso del AGD favoreció la adquisición de heurísticas para resolver problemas y facilitó la implementación de estrategias de verificación de resultados o conjeturas (proceso de control); las heurísticas generales de resolución de problemas desarrolladas por los estudiantes fueron las de relajar condiciones del problema y exploración de casos particulares; el arrastre y movimiento controlado fueron dos heurísticas particulares del AGD que ayudaron a los estudiantes a resolver los problemas. Finalmente, resalta que el ambiente dinámico permitió la exploración de diferentes acercamientos a la solución de los problemas.

Tomando la investigación de Ortega (En revisión) como antecedente fundamental, interesa documentar los resultados de implementar una secuencia didáctica, alrededor de la resolución de problemas rutinarios de libro de texto con el uso de un AGD (GeoGebra), en un curso de Geometría Analítica de bachillerato. Se parte de la hipótesis de que es posible que alumnos de este nivel usen heurísticas, para resolver problemas, desarrolladas en este tipo de ambientes (Jiménez, 2011). El problema de la parábola usado por Ortega (En revisión) servirá como punto de partida para generar y estudiar todas las secciones cónicas. Así, interesa diseñar una secuencia didáctica en la que la resolución de dicho problema, en este ambiente dinámico, sea alcanzable para los estudiantes. Los objetivos generales de implementar la secuencia didáctica son:

- Que los alumnos construyan, en el AGD GeoGebra, las representaciones geométricas (dinámicas) de los conceptos de distancia entre punto y recta, distancia entre puntos y mediatriz. El objetivo es que el alumno desarrolle los recursos necesarios para poder resolver el problema de la parábola, es decir, que el alumno use circunferencias para trasladar distancias, que identifique geométricamente la distancia entre un punto y una recta (perpendicularidad) y que relacione a la mediatriz de un segmento con una familia de triángulos isósceles.
- Que los alumnos desarrollen heurísticas generales de resolución de problemas y heurísticas particulares asociadas con el AGD, específicamente arrastre, medición y movimiento controlado.

En particular, interesa documentar los distintos tipos de razonamiento, recursos y heurísticas que desarrollan los alumnos cuando resuelven problemas rutinarios de geometría analítica dentro de un AGD. Por lo tanto, el objetivo general de la investigación es reportar los resultados de la secuencia didáctica así como las ventajas y desventajas de trabajar con este tipo de escenarios de enseñanza y aprendizaje. Es importante mencionar que el objetivo no es plantear un curso completo de Geometría Analítica de bachillerato dentro de un AGD, es decir, la secuencia didáctica será una parte de un curso tradicional.

## 1.3 Preguntas de investigación

De acuerdo con el objetivo general de la investigación y los objetivos particulares, se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cuáles son los recursos, estrategias o heurísticas y tipos de razonamiento que pueden desarrollar estudiantes de tercer semestre de bachillerato como resultado de usar, sistemáticamente, un ambiente de geometría dinámica (AGD) en actividades de aprendizaje?

2. ¿Cuáles son los resultados, ventajas y desventajas de implementar una secuencia didáctica, a partir de resolución de problemas y uso de un ambiente dinámico (Geogebra), para la construcción de conceptos asociados con Geometría Analítica por estudiantes de bachillerato?

## 1.4 Justificación de la investigación

De acuerdo con Santos (2007b), las propuestas curriculares actuales demandan el uso sistemático de herramientas digitales en los ambientes de enseñanza de las matemáticas, sin embargo, no se han incorporado los cambios necesarios para cumplir con esta demanda. El uso eficiente de tecnologías digitales y en específico de un AGD depende de los recursos del estudiante y por esta razón diseñar secuencias didácticas para desarrollar dichos recursos en este ambiente es esencial. Como consecuencia, un factor que reclama la investigación sobre el impacto de dichas herramientas en el aprendizaje de los estudiantes es la premisa de que diferentes herramientas favorecen el desarrollo de recursos distintos, así como otros acercamientos a conceptos matemáticos y a la resolución de problemas. En este sentido, una actividad primordial en la agenda de investigación en Educación Matemática es la de documentar los distintos razonamientos matemáticos y recursos que desarrollan los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas usando un AGD.

Las características que distinguen esta investigación son el uso de problemas rutinarios de libro de texto y el empleo sistemático de un AGD. En cuanto al uso de problemas rutinarios de libro de texto, se trabaja bajo la hipótesis de que incluso este tipo de problemas puede transformarse, mediante el uso de un AGD, en una actividad de aprendizaje profundo (entendido como aprendizaje que va más allá de la memorización e implementación de algoritmos) (Santos y Ortega, 2013). "Incluso problemas rutinarios pueden ser examinados y transformados en una serie de actividades que promuevan la búsqueda y exploración de relaciones matemáticas novedosas" (Santos & Camacho, 2009, p. 264).

> No es forzoso que los profesores utilicen una lista muy sofisticada de problemas para desarrollar el pensamiento matemático. El uso de problemas rutinarios de libro de texto para fomentar que los estudiantes analicen diferentes formas de representarlos, resolverlos, extenderlos y generalizarlos puede ser fructífero. (Santos & Camacho, 2009, p. 262).

El primer paso para fomentar en los estudiantes un pensamiento matemático acorde con las matemáticas como disciplina es la trasformación de problemas rutinarios en actividades de reflexión matemática. En este proceso de transformación, el uso de un AGD es útil, pues puede ayudar a transformar una tarea, que inicialmente parece rutinaria, en una oportunidad para identificar, explorar y reconstruir relaciones matemáticas (Santos, 2008).

> Una aproximación inicial a la práctica de las matemáticas como disciplina puede ser la transformación de problemas rutinarios de libros de texto en actividades que promuevan la reflexión matemática de los estudiantes. En esta aproximación el uso de la tecnología es un componente fundamental, pues permite a los estudiantes explorar diferentes acercamientos a la solución de un problema. (Santos & Camacho, 2009, p. 262).

En esta investigación, el uso de un AGD es un aspecto fundamental, pues la representación dinámica de los problemas puede funcionar como punto de partida para generar relaciones matemáticas que permitan su exploración y representación en términos de sus propiedades. En esta dirección Santos, Espinosa y Reyes (2005) comentan:

> Con el uso de software dinámico el estudio de temas clásicos como el de cónicas puede ser abordado desde distintos ángulos o perspectivas. Los estudiantes no solo pueden discutir las propiedades relacionadas con esas figuras en diferentes contextos, sino también extender el dominio en que este tipo de cónicas es normalmente estudiado (p. 133).

En resumen, la resolución de problemas rutinarios de libro de texto dentro de un AGD puede enmarcar una actividad cercana a la práctica de las matemáticas como disciplina y eventualmente favorecer el desarrollo de un pensamiento matemático en los estudiantes.

# Capítulo 2

## Revisión de la literatura

La planeación e implementación de actividades de enseñanza debe estar guiada por un conjunto de constructos conceptuales que determinan no solo los objetivos, sino también la caracterización e interpretación de los resultados. En este sentido, la resolución de problemas es el marco conceptual que fue la base para el diseño de la investigación y la interpretación de los resultados, sin embargo, la presencia de un AGD (GeoGebra) exige la complementación de dicho marco para poder analizar cuestiones específicas de la herramienta. Por lo tanto, se parte de la resolución de problemas (Schoenfeld 1985, 2008) y el marco propuesto por Santos y Camacho (2009) para caracterizar los distintos episodios presentes en los procesos de resolución de los problemas. En esta caracterización, cuestiones relativas a los ambientes de geometría dinámica como la medición, el arrastre y el rastro son parte fundamental.

## 2.1 Resolución de Problemas

Un marco conceptual ampliamente usado en educación matemática es la resolución de problemas propuesto por Schoenfeld (1985) en su libro *Mathematical Problem Solving*. Este marco proporciona las herramientas necesarias para analizar el proceso de resolución (conocimientos y procedimientos utilizados) de problemas matemáticos, además, sirve para poder explicar el éxito o fracaso en los intentos (por parte de estudiantes) para resolver problemas. Cuatro categorías de análisis, las cuales se superponen e interactúan entre sí, sirven para este fin: recursos, heurísticas, control y sistema de creencias.

### *2.1.1 Recursos*

Son todos los conocimientos que un individuo puede utilizar cuando se enfrenta a una situación matemática específica. Schoenfeld (1985) clasifica estos conocimientos de la siguiente manera:

1. Conocimiento informal e intuitivo,
2. hechos y definiciones,
3. procedimientos algorítmicos,
4. procedimientos de rutina,
5. competencias relevantes y
6. conocimiento acerca de las reglas del discurso.

El conocimiento informal e intuitivo es la forma de interpretar conocimiento nuevo por parte de un individuo. Esta interpretación (no siempre correcta) esta fundamentada en conocimientos asociados a su vida diaria o en conocimientos previos. Este tipo de conocimiento se debe tomar en cuenta en los escenarios de enseñanza, pues en algunas ocasiones es favorable usar las ideas intuitivas del individuo para desarrollar un conocimiento formal, en otras ocasiones es necesario confrontar y desechar dichas ideas. Los hechos y definiciones son el conjunto de información que requiere un individuo para resolver problemas matemáticos. Estos hechos y definiciones pueden ser correctos o incorrectos y puede darse el caso donde el individuo no puede utilizarlos aunque los conozca (Selden, Mason & Selden, 1989).

Para explicar la diferencia entre procedimientos algorítmicos y de rutina, se debe diferenciar entre ejercicios (problema rutinario) y problemas novedosos. Un ejercicio es resuelto mediante la aplicación de un procedimiento algorítmico específico y un problema (generalmente presenta dificultades para el individuo) no puede ser resuelto utilizando solo un procedimiento algorítmico pues requiere el uso de procedimientos rutinarios y competencias relevantes. Un ejemplo de ejercicio sería la resolución de una ecuación de segundo grado donde el procedimiento algorítmico consiste en aplicar la fórmula general. En este sentido, Schoenfeld (1985, p.58) señala que un procedimiento de rutina es una técnica bien codificada pero no algorítmica para resolver clases de problemas específicos e ilustra lo anterior con un ejemplo:

> Los procedimientos de rutina pueden ser bastante complejos y lejos de ser algorítmicos. Considere un problema de máximos y mínimos como ejemplo. Escoger una representación útil del problema, hacer una buena elección de variable independiente, obtener la fórmula para la variable dependiente, etcétera, son habilidades no triviales (Schoenfeld, 1985, p.59).

Retomando este ejemplo de problema, un procedimiento algorítmico sería encontrar los puntos críticos de la función. Las competencias relevantes son los conocimientos y procedimientos que el individuo necesita para resolver problemas matemáticos específicos. En el problema de máximos y mínimos algunos ejemplos de competencias relevantes serían el conocimiento y comprensión de los criterios de la primera y segunda derivadas. Schoenfeld (1985) señala que (refiriéndose a problemas que involucran congruencia de triángulos para probar la igualdad de dos segmentos) un ejemplo de competencia relevante sería el conocimiento de los criterios de congruencia y su aplicación para comparar dos segmentos identificándolos como partes de triángulos congruentes.

El conocimiento de las reglas del discurso en matemáticas es esencial en la resolución de problemas. Las matemáticas tienen su lenguaje como cualquier otra disciplina y el conocimiento de este lenguaje determina el aprendizaje de conceptos matemáticos y su uso para resolver problemas. Un ejemplo de lo anterior es el uso de las palabras *un* y *el* para denotar variedad o unicidad; sea $P$ un punto de intersección (puede haber más) de los objetos $A$ y $B$ o sea $P$ el punto de intersección (es único) de los objetos $A$ y $B$. Otros ejemplos de reglas de discurso en matemáticas son los métodos de demostración por *reducción a lo absurdo* o *inducción matemática*.

Una parte importante de este marco es explicar cómo el individuo accede a los recursos cuando resuelve problemas, para ello, Schoenfeld (1985) se apoya en la teoría psicológica del procesamiento de información (IP) la cual sugiere, mediante el análisis del comportamiento de expertos al resolver problemas en diversas disciplinas, que cierto tipo de conocimiento se organiza en esquemas de "situación-respuesta" en donde condiciones familiares invocan acciones automáticas también llamadas "producciones". En este camino, Schoenfeld (1985) señala: "Se puede pensar en ciertos tipos de rendimiento competente como resultado de la posesión de largas colecciones de estas producciones de conocimiento" (p.49). Por lo tanto, la competencia del individuo en situaciones matemáticas familiares se basa en la cantidad de estas producciones que posee. Estas producciones o acciones son adquiridas mediante la experiencia (Schoenfeld, 1985, p. 50). Aunque los problemas no son situaciones rutinarias ni familiares, Schoenfeld (1985) afirma que este acceso de rutina al conocimiento es el fundamento para explicar el acceso al conocimiento en la resolución de problemas.

### *2.1.2 Heurísticas*

Según Schoenfeld (1985): "Heurísticas son las reglas de oro para resolver problemas efectivamente. Son estrategias bastante amplias para lograr progresos en problemas no familiares o difíciles" (p.44). Con esta definición surge la siguiente pregunta: ¿los procedimientos algorítmicos o rutinarios (definidos en la sección de recursos) se pueden considerar como heurísticas? Surge la sospecha de que un procedimiento algorítmico no puede considerarse como heurística, pues dicho procedimiento se utiliza comúnmente para resolver ejercicios (los cuales se consideran familiares y sencillos) y según la definición las heurísticas son propias de los problemas. Schoenfeld (1985) aclara este punto: "Muchos educadores matemáticos en los Estados Unidos confieren un invariante nivel de heurística a la aplicación de ciertos tipos de técnicas en la resolución de problemas" (p.60). Entonces, según Schoenfeld, las heurísticas son estrategias generales usadas para resolver problemas en los cuales el individuo tiene dificultades. El carácter general de las heurísticas es un aspecto importante para entender su definición, por lo tanto, los procedimientos algorítmicos y de rutina al tener un carácter específico (utilizados en problemas particulares) no pueden considerarse heurísticas. "Cuando una técnica es asociada cercanamente con una disciplina en particular, y es utilizada como un procedimiento estándar, la implementación de dicha técnica se considera una cuestión de recursos" (Schoenfeld, 1985, p.60).

Polya (1965) ofrece una definición de heurística (le llama moderna) partiendo de la definición antigua: ciencia encargada del estudio de las reglas y los métodos del descubrimiento y de la invención. "La heurística moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular *las operaciones mentales típicamente útiles* en este proceso" (Polya, 1965, p.102). Según Polya (1965) la construcción de las heurísticas depende de la experiencia (en la resolución de problemas) y observación de los métodos usados por otros individuos. En cuanto a la generalidad de las heurísticas Polya (1965) señala: "La heurística tiende a la generalidad, al estudio de métodos, independientes de la cuestión tratada y se aplica a problemas de todo tipo" (p.105).

Otra definición dada por Polya (1965) es la de *razonamiento heurístico*: "El razonamiento heurístico es un razonamiento que se considera no como definitivo y riguroso, sino simplemente como provisional y plausible, y cuyo objeto es descubrir la solución del problema propuesto" (p.173). Así, el razonamiento heurístico tiene el objetivo de ayudar a encontrar la solución, sin embargo, no puede ser admitido o presentado como una demostración rigurosa (Polya, 1965, p.174). Polya ofrece una lista amplia de heurísticas, algunos ejemplos son: realizar analogías (considerar problemas relacionados o parecidos al problema tratado), descomponer y recomponer el problema (trabajar el problema analizando cada una de las partes por las que se conforma), dibujar una figura, examinar hipótesis, generalizar el problema, trabajar casos particulares del problema, comprobar el resultado, obtener el resultado de diferentes maneras, considerar la utilidad del resultado en otras situaciones, razonar el problema en forma regresiva (considerar el resultado como cierto), trabajar el problema por reducción a lo absurdo y demostración indirecta (establecer la verdad de una afirmación demostrando la falsedad de la afirmación contraria), buscar simetrías en el problema (como partes intercambiables del problema que no modifican su estructura), buscar objetivos particulares (descomponer el objetivo principal en objetivos más específicos), etcétera.

Una conclusión importante es que el conocer las heurísticas no significa que el individuo pueda utilizarlas, es decir, el uso de heurísticas va acompañado con una habilidad para tomar decisiones, fruto de su experiencia en la resolución de problemas. Además, aunque las heurísticas son de carácter general (pueden usarse para resolver problemas en cualquier disciplina) el éxito en su implementación depende de los recursos con los que cuenta el individuo en la disciplina concreta (Schoenfeld, 1985, p. 92).

### *2.1.3 Control*

Schoenfeld (1985) nombra *control* a todo lo relacionado con manejo y planificación de recursos, por parte del individuo, en los intentos por resolver problemas. Este manejo y planeación de recursos se refleja en el uso de heurísticas en diferentes etapas del proceso de solución de problemas y el éxito o fracaso en dicho proceso depende en gran medida de la implementación de una estrategia de control adecuada. "Con buen control, los que resuelven problemas pueden sacar el máximo provecho de sus recursos y resolver problemas difíciles con cierta eficiencia. Sin buen control, pueden enterrar sus recursos y fallar en resolver problemas que están dentro de su alcance" (Schoenfeld, 1985, p. 44). En esta dirección, no es suficiente conocer un amplio repertorio de recursos y heurísticas para tener éxito en la resolución de problemas, pues se requiere, además, un adecuado uso de estos.

> Seleccionar y perseguir los enfoques correctos, recuperarse de elecciones inapropiadas, y en general monitorear y supervisar el proceso completo de resolución del problema, es igualmente importante. Se necesita ser eficiente al igual que tener recursos. En términos generales, esta es la cuestión del control (Schoenfeld, 1985, pp. 98-99).

Así, el control incluye acciones de planeación, monitoreo y evaluación de los procesos y soluciones en la resolución de problemas. El término control es utilizado en la literatura de inteligencia artificial y psicología cognitiva. En inteligencia artificial, el control es utilizado para la estructuración de programas y su principal objetivo es la búsqueda de soluciones para problemas mediante la planeación de toma de decisiones en forma jerárquica. En psicología cognitiva se utiliza una versión más general de control llamada *metacognición.* Según Flavell (1979):

> El conocimiento metacognitivo es el propio conocimiento almacenado o creencias acerca de uno mismo y de los demás como agentes cognitivos, acerca de las tareas, sobre las acciones o estrategias, y sobre todo de cómo se interrelacionan para afectar los resultados de cualquier tipo de empresa intelectual. Experiencias metacognitivas son experiencias cognitivas conscientes o afectivas que se producen durante esta empresa y afectan cualquier aspecto de la misma —a menudo, lo bien que va (p. 906).

Así, la metacognición es un proceso mediante el cual un individuo es capaz de recabar, producir y evaluar información, pero además, permite controlar y regular su razonamiento intelectual. Schoenfeld (1985) señala que este proceso tiene un alto grado de dificultad en los intentos para resolver problemas, pues generalmente se seleccionan estrategias de solución ineficientes (no se escoge la más simple) y muchas veces no se sabe cómo seleccionar dichas estrategias a partir de las características de los problemas. En la mayoría de los casos, la selección de estrategias de solución (proceso de control) está determinado automáticamente por el orden en que dichas estrategias son enseñadas.

Schoenfeld (1985) propone una estrategia de control, para resolver problemas, que consta de cinco etapas: análisis, diseño, exploración, implementación y verificación de resultados. En cada una de estas etapas se utilizan cierto tipo de heurísticas. En la Tabla 2.1 (traducida de Schoenfeld, 1985, p. 109, Tabla 4.5) se muestran las heurísticas usadas frecuentemente en las etapas de análisis, exploración y verificación de resultados. La etapa de análisis está relacionada con el entendimiento del problema y sus condiciones. La etapa de diseño está presente en todo el proceso de solución del problema y su función es asegurar que las estrategias utilizadas sean rentables (en términos de tiempo y resultados), en otras palabras, el diseño es donde se planea el proceso de solución de forma global y proporciona los pasos a seguir para estructurar argumentos de forma jerárquica. En la etapa de exploración es donde entran en juego la mayoría de las heurísticas para resolver problemas y se refiere a la manipulación de las condiciones del problema para poder resolverlo. En la etapa de implementación se ejecuta paso a paso el plan obtenido en la etapa de diseño y se obtiene una solución tentativa. Por último la etapa de verificación tiene como objetivo comprobar la validez de la solución obtenida mediante pruebas específicas (que la solución cumpla con las condiciones del problema) y pruebas generales (si la solución puede encontrarse de diferente manera o puede utilizarse en otros problemas). La descripción del proceso de control aparece en la Figura 2.1 (traducida de Schoenfeld, 1985, p. 110, Figura 4.2).

***Tabla 2.1.*** Heurísticas usadas frecuentemente en los procesos de análisis, exploración y verificación (traducida de Schoenfeld, 1985, p. 109, Tabla 4.5).

**Análisis**

1. Dibujar un diagrama si es posible.
2. Examine casos especiales:
    a. Escoja valores especiales para ejemplificar el problema.
    b. Examine los casos límite para explorar el rango de posibilidades.
    c. Substituya parámetros enteros por números 1, 2, 3… y busque por patrones inductivos.
3. Trate de simplificar el problema mediante:
    a. simetría o
    b. argumentos "sin pérdida de generalidad" como usar datos a escala.

**Exploración**

1. Considere problemas equivalentes
    a. Reemplace condiciones por otras equivalentes.
    b. Recombine los elementos del problema en diferentes formas.
    c. Introduzca elementos auxiliares.
    d. Reformule el problema mediante:
        i. Cambio de perspectiva o notación.
        ii. Considerando el argumento por contradicción o en sentido contrario.
        iii. Asuma que tiene la solución y determine sus propiedades.
2. Considere problemas ligeramente modificados:
    a. Escoja sub-objetivos (obtenga cumplimiento parcial de las condiciones).
    b. Deje a un lado una condición y luego intente reinsertarla.
    c. Descomponga el dominio del problema y trabájelo caso por caso.
3. Considere problemas ampliamente modificados:
    a. Construya un problema análogo con menos variables
    b. Trabaje con todas las variables pero fije una para determinar su impacto.
    c. Trate de explotar cualquier problema relacionado que sea similar en:
        i. forma,
        ii. datos o
        iii. conclusiones.

    Recuerde: cuando trabaje con problemas relacionados más sencillos, debería tratar de explotar tanto el método de solución como resultado en el problema dado.

**Verificar solución**

1. ¿La solución cumple con pruebas específicas?
    a. ¿Se usan todos los datos pertinentes?
    b. ¿Cumple con estimaciones o predicciones razonables?
    c. ¿Resiste pruebas de simetría, análisis de dimensiones y escalamiento?
2. ¿La solución cumple con pruebas generales?
    a. ¿se puede obtener de diferente forma?
    b. ¿Puede ser comprobado por casos especiales?
    c. ¿Puede reducirse a resultados conocidos?
    d. ¿Puede ser usada para generar algo que se sabe?

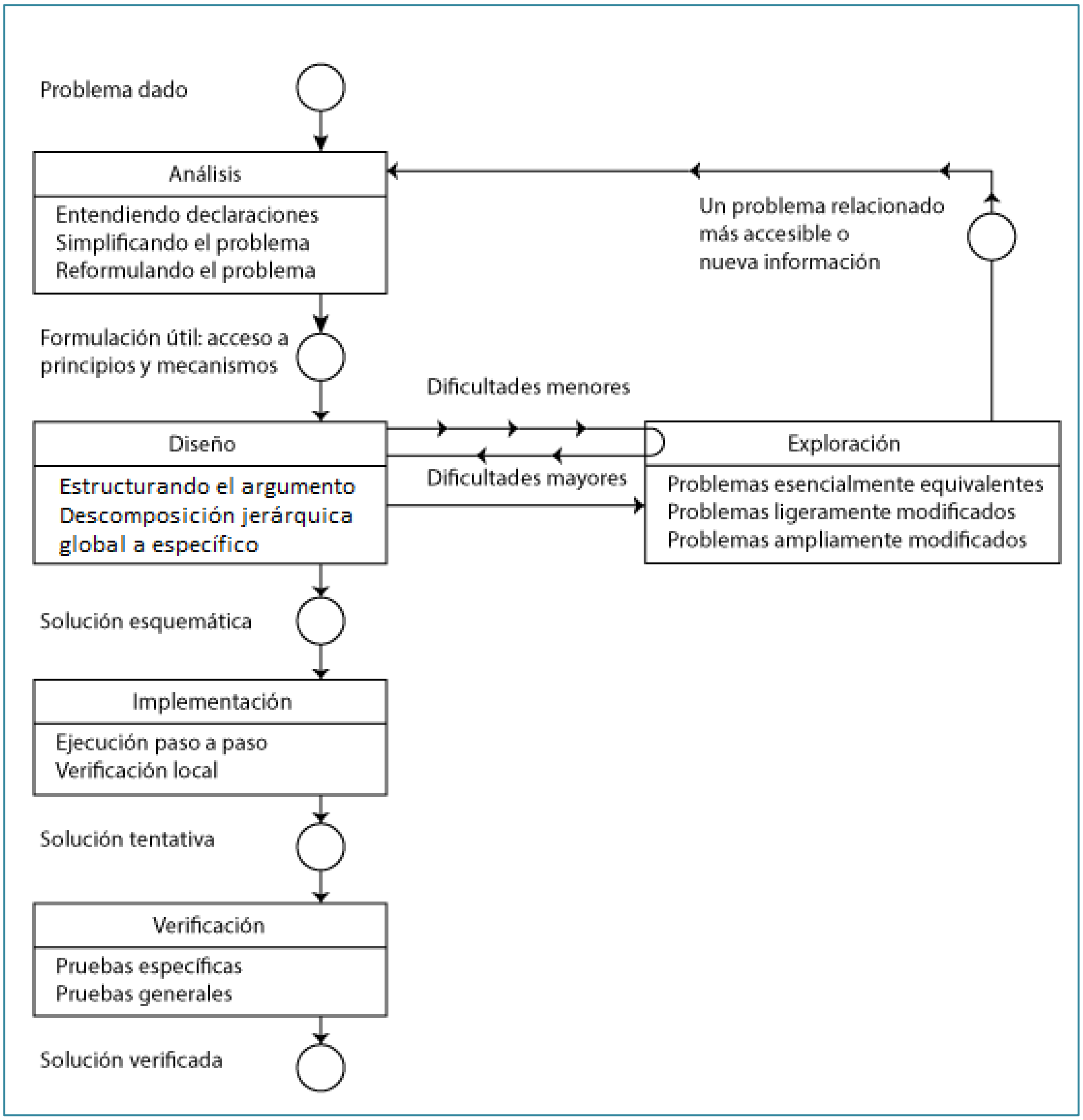



***Figura 2.1.*** Ejemplo de proceso de control en la resolución de un problema (traducida de Schoenfeld, 1985, p. 110, Figura 4.2).

### *2.1.4 Objetivos, recursos y orientaciones en la resolución de problemas*

El marco propuesto por Schoenfeld (1985) sirve para interpretar, analizar y caracterizar los procesos de resolución de problemas, sin embargo, no ofrece elementos conceptuales que ayuden a entender la toma de decisiones por parte del individuo, es decir, no permite analizar las razones del porque usa ciertos conocimientos o estrategias en sus intentos por resolver problemas. En este camino, Schoenfeld (2011) propone un marco que intenta explicar el proceso de toma de decisiones, en escenarios de enseñanza, a partir de los objetivos, recursos y orientaciones del profesor. Aunque este marco se propone para el análisis de prácticas de enseñanza, Schoenfeld (2011) comenta que se puede extender a cualquier ámbito. Así, cualquier actividad de resolución de problemas y toma de decisiones, en particular escenarios de enseñanza o aprendizaje, está orientada por los objetivos perseguidos por el profesor o el alumno. Dichos objetivos y su priorización dependen fundamentalmente de los recursos y orientaciones del individuo. “Intentar simular la toma de decisiones de la gente requiere tener en cuenta que es lo quiere conseguir, que es lo que sabe, y como valúan los posibles resultados de sus acciones” (Schoenfeld, 2011, p. 94).

*Objetivos*

Un aspecto fundamental de este marco es que cualquier actividad se puede caracterizar en términos de objetivos. Un objetivo es algo que el individuo desea conseguir y este puede dividirse en otros objetivos. Hay objetivos a corto y largo plazo y el individuo los jerarquiza en función de sus orientaciones. Algunos objetivos pueden funcionar de forma combinada (para un mismo fin) y otros no (contradictorios), además, puede que el individuo no sea consciente de los objetivos que determinan su toma de decisiones.

*Recursos*

El conocimiento es el recurso que recibe especial atención en este marco y es definido como sigue: “Defino conocimiento individual como la información potencialmente disponible que él o ella puede usar para resolver problemas, alcanzar objetivos, o realizar otras tareas.” (Schoenfeld, 2011, p. 107). Así, el conocimiento puede ser correcto o incorrecto. Se distinguen entre diferentes tipos de conocimiento: hechos o conocimiento aislado, conocimiento procedimental, conocimiento conceptual y estrategias de resolución de problemas (heurísticas).

*Orientaciones*

El término orientaciones se usa para englobar una serie de términos que están relacionados con el sistema de creencias del individuo, es decir, contempla sus disposiciones, creencias, valoraciones, gustos y preferencias. Así, las orientaciones determinan la forma en que una situación es percibida por el individuo y en consecuencia la forma de reaccionar ante la misma. Además, las orientaciones enmarcan la jerarquización de los objetivos y los recursos que se usan para alcanzarlos. Una orientación central en la toma de decisiones es la valoración subjetiva de los posibles resultados de determinada acción, es decir, la percepción de los costos, beneficios y probabilidades de los posibles resultados de tomar ciertas decisiones.

En resumen, el proceso de toma de decisiones puede caracterizarse a partir de las siguientes fases:

- El individuo interactúa en un ambiente (escuela, trabajo, etc.) con ciertos recursos y orientaciones.
- Debido a esta interacción, ejecuta toma de decisiones para plantear y jerarquizar objetivos en función de sus recursos y orientaciones.
- Se diseñan las rutas a seguir y los recursos a utilizar para cumplir con dichos objetivos.
- En el trascurso de su interacción con el ambiente pueden surgir situaciones familiares o no familiares; si la situación es familiar, entonces la toma de decisiones es casi automática, es decir, la situación familiar desencadena una serie de acciones (esquemas) aprendidas como producto de experiencias similares; si la situación no es familiar entonces se toman decisiones a partir de una valoración subjetiva de las opciones, de acción, disponibles.
- Este proceso es cíclico y el planteamiento y priorización de objetivos es una actividad mediada por un proceso de monitoreo, en otras palabras, dada una serie de objetivos iniciales y dependiendo de cómo se van cumpliendo, se pueden plantear objetivos adicionales, desechar algunos o incluso cambiarlos por completo.

## 2.2 Episodios de la resolución de problemas

Santos y Camacho (2009) proponen una forma de caracterizar episodios, en términos de organización y estructura, del proceso de resolución de problemas partiendo de las etapas identificadas por Polya (1945). En general, proponen una estrategia de control, para resolver problemas, parecida a la ofrecida por Schoenfeld (1985) (véase Figura 2.1), sin embargo, se hace especial énfasis en los diferentes acercamientos a la solución del problema y en las distintas representaciones de relaciones matemáticas. Además, una característica esencial de este marco es que incorpora el uso de herramientas computacionales como un elemento central en el proceso de resolución de problemas. Los episodios son los siguientes:

### *2.2.1 Comprensión del problema*

En este episodio se requiere fomentar un método inquisitivo para que los estudiantes piensen el problema en términos de cuestiones relevantes que conduzcan a la exploración y representación de relaciones matemáticas. Algunos de los objetivos de esta etapa son:

- Identificar los objetos matemáticos involucrados en el problema y proponer formas de representarlos. Aquí, el uso de herramientas computacionales juega un papel importante.
- Evaluar la pertinencia del problema, es decir, verificar que el problema tenga sentido y sea factible.
- Relacionar las condiciones del problema con los objetos matemáticos. En otras palabras, se requiere explicitar la dependencia entre dichos objetos involucrados en el enunciado del problema.

### *2.2.2 Implementación de un plan de solución*

En este episodio es importante que se implementen diferentes acercamientos a la solución del problema; se requiere que las condiciones del problema, y su relación con los objetos matemáticos, se modelen desde diferentes perspectivas. Los acercamientos a la solución pueden ser visuales-dinámicos, numéricos-empíricos, geométricos, algebraicos, etc. Estos acercamientos pueden favorecer el acceso a los recursos necesarios para resolver el problema.

### *2.2.3 Búsqueda de patrones y una solución general*

De acuerdo con Santos (2007), el quehacer matemático se puede caracterizar como la actividad de encontrar y examinar patrones. En este sentido, la búsqueda de patrones entre los diferentes acercamientos a la solución del problema es fundamental. En esta etapa, el uso de la tecnología juega un papel determinante; los patrones numéricos pueden ser explicitados mediante el uso de una hoja de cálculo, un análisis algebraico puede ser implementado vía calculadora simbólica, los patrones geométricos pueden ser visibles a través de invariantes en configuraciones de software dinámico, etc. El reconocimiento de patrones, en los distintos acercamientos, puede conducir a la solución general del problema.

### *2.2.4 Conexiones y extensiones*

En este episodio se favorece el tratamiento de los acercamientos a la solución en forma de estructura, es decir, se requiere que los conceptos matemáticos utilizados en los diversos acercamientos (empírico, dinámico, algebraico, etc.) se expliciten y relacionen. Otra característica importante de esta etapa es la extensión del problema, entendida como la generalización de los resultados obtenidos; mediante el cambio de alguna (s) condición (es) del problema inicial.

En este marco inciden dos ideas fundamentales relacionadas con la teoría de resolución de problemas:

1. *Método inquisitivo*. La solución de un problema va más allá de la simple aplicación de un algoritmo o procedimiento; se requiere que el estudiante desarrolle un hábito de cuestionamiento que le ayude a resolver problemas de acuerdo con la práctica de las matemáticas como disciplina. En este sentido, el desarrollo de todos los episodios de este marco gira alrededor del planteamiento de preguntas relevantes que se buscan contestar en términos de relaciones matemáticas.

    > El método inquisitivo significa proponer o formular y dar seguimiento a preguntas relevantes que ayuden a la búsqueda de diversas representaciones del problema. La directa examinación de estas preguntas debería conducir al estudiante a identificar e investigar relaciones matemáticas, para buscar evidencia o información que ayude a fundamentar dichas relaciones y para presentar y comunicar resultados. (Santos & Camacho, 2009, p. 276).

2. *Práctica de la disciplina.* En este marco, el proceso de resolución de problemas es entendido como una oportunidad para plantear, perseguir y contestar

preguntas en un ambiente donde se favorezca el razonamiento y cuestionamiento continuo; donde el único objetivo no es dar la solución a problemas, pues se busca favorecer la resolución de problemas desde diferentes caminos, la generalización de problemas, la solución de problemas similares, extensión de los problemas iniciales, argumentación de resultados, conexión entre contenidos matemáticos, comunicación de resultados etc.

> Una meta importante en la instrucción matemática es crear un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes tengan la oportunidad de participar activamente en el proceso de construcción del conocimiento matemático…. Es decir, [donde] se promuevan los valores propios de la disciplina en las actividades de aprendizaje del salón de clases. (Santos, 2007, p. 45).

### 2.3 Sobre el uso de ambientes de geometría dinámica en escenarios de enseñanza

El uso de herramientas computacionales, en la resolución de problemas, es útil no solo para generar distintas representaciones de un problema, sino para explorar y conectar diversos contenidos matemáticos, para generar, explorar, probar o refutar conjeturas a partir de información empírica, para generar información útil para dar argumentos geométricos o algebraicos,  para facilitar el uso de recursos y estrategias (heurísticas) que eventualmente pueden conducir a una comprensión de conceptos matemáticos.

Moreno (2002) comenta que el uso de herramientas digitales puede impactar en la cognición del estudiante por medio de una amplificación o reorganización conceptual. Por un lado, las herramientas permiten amplificar lo que un estudiante puede hacer con lápiz y papel, pues tiene a su disposición un conjunto de comandos que le permiten manipular en tiempo real representaciones de objetos matemáticos. Por otro lado, los recursos y heurísticas que desarrolla el estudiante están mediados por las herramientas y tienen, en la mayoría de los casos, fundamentos  empíricos (dinámicos, numéricos, geométricos) que pueden permitir una reorganización  de lo que se sabe o de lo que se aprende.

En particular, los AGD pueden usarse para integrar todos los principios básicos de la resolución de problemas en actividades de enseñanza:

> Se observa que el uso del software dinámico puede resultar una herramienta poderosa para los estudiantes en términos de generar representaciones dinámicas del problema que les permitan identificar relaciones matemáticas. Se destaca que durante la construcción y análisis de las representaciones dinámicas, los estudiantes deben pensar el problema en términos de preguntas que los conduce al planteamiento de conjeturas o relaciones. Este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de herramientas. (Santos, 2007, p. 51).

### ***2.3.1 Resolución de problemas que involucran secciones cónicas en ambientes de geometría dinámica***

Partiendo de la premisa de que distintas herramientas computacionales promueven acercamientos y formas de razonamiento diferentes sobre conceptos matemáticos, el impacto de los ambientes de geometría dinámica en actividades de enseñanza y aprendizaje es un tema recurrente en la agenda de investigación en Educación Matemática. En particular, el repensar y replantear conceptos y problemas de Geometría Analítica, en términos de la herramienta, ha recibido especial interés. Santos (2003, 2004a, 2004b) propone distintos caminos para estudiar secciones cónicas a partir de representaciones dinámicas de problemas geométricos simples. Un aspecto esencial de estas investigaciones es que problemas clásicos, replanteados en ambientes de geometría dinámica, pueden servir como punto de partida para engancharse en una actividad cercana a las matemáticas como disciplina alrededor de representaciones novedosas de relaciones matemáticas.

Santos, Espinosa y Reyes (2005) proponen dos formas de estudiar a la parábola a partir de construcciones geométricas dinámicas simples. La primera involucra una familia de triángulos rectángulos donde la parábola surge como el lugar geométrico de uno de sus vértices; el concepto geométrico fundamental es la perpendicularidad. La segunda utiliza una familia de rectángulos, una de sus diagonales y la mediatriz de la misma; se estudian varias parábolas como lugares geométricos de puntos de intersección de la mediatriz con los lados del rectángulo. En estas propuestas, el uso del AGD resulta determinante, pues no solo se analizan las propiedades de la parábola en términos de información empírica (visual y numérica), sino que se utiliza para determinar los elementos (foco y directriz) de la parábola a partir de sus propiedades geométricas. Además, resulta importante mencionar que toda la información empírica sirve como base para generar argumentos algebraicos o geométricos.

Santos, Reyes y Espinosa (2007) implementaron una investigación con profesores donde se planteó un problema de demostración que involucra una elipse y una recta tangente a la misma. El AGD fue determinante en el proceso de solución del problema. En la fase de entendimiento del problema sirvió para construir dinámicamente una elipse a partir de su definición, propiedades y elementos. Para pensar en una solución al problema, la información empírica fue clave, pues permitió verificar numéricamente lo que se buscaba demostrar. La búsqueda de argumentos para apoyar la demostración se vio favorecida, en primera instancia, por información geométrica extraída de la construcción dinámica. Por último, la oportunidad para mover elementos de la configuración, permitió extender el problema y observar otras relaciones matemáticas; una de las construcciones usadas para generar elipses, propuesta en este artículo, utiliza el concepto de mediatriz como elemento fundamental (la otra utiliza una circunferencia) y sirve para generar una familia de hipérbolas.

Santos, Espinosa y Reyes (2008) utilizan problemas geométricos para generar las secciones cónicas estudiadas en un curso de geometría analítica. Todo el análisis surge de dos problemas iniciales. El primero, requiere encontrar circunferencias tangentes a una recta dada y que pasan por un punto dado sobre dicha recta (problema estudiado por Santos (2008a) y usado por Jiménez (2011) en su investigación). El segundo, utiliza la construcción de cuadrados para generar todas las secciones cónicas. En esta investigación, se destaca la importancia de observar e interpretar lugares geométricos, generados por el dinamismo de la construcción, para presentar argumentos sobre relaciones matemáticas. También, se comenta que actualmente el uso de la tecnología es un componente fundamental en el proceso de resolución de problemas; específicamente, los AGD pueden servir como punto de partida para generar, explorar y argumentar conjeturas sobre relaciones matemáticas. Finalmente, los autores argumentan que dos características esenciales de dichos ambientes son que permiten visualizar invariantes y lugares geométricos generados a partir del movimiento de ciertos elementos de la construcción. La caracterización de estas invariantes y lugares geométricos, mediante argumentos y propiedades matemáticas, se convierte en una actividad trascendente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Santos y Reyes (2011) reportan los beneficios de usar un AGD en actividades de resolución de problemas: 1) facilita la representación del problema y sus condiciones dinámicamente en términos de objetos y relaciones matemáticas, 2) permite identificar y explorar dinámicamente dichos objetos y relaciones matemáticas, 3) motiva la generación de conjeturas a partir de información visual (arrastre) y empírica (medición), 4) favorece el uso de heurísticas generales como considerar el problema resuelto y relajar condiciones, y heurísticas particulares como encontrar el lugar geométrico de puntos móviles, 5) ofrece la posibilidad de establecer conexiones entre distintos contenidos matemáticos, por ejemplo, el uso de cónicas para resolver problemas y 6) favorece la búsqueda de argumentos para las conjeturas y resultados.

Santos y Ortega (2013) proponen una forma de estudiar las secciones cónicas desde un enfoque con excentricidad. En otras palabras, utilizan la definición de una sección cónica como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la razón entre su distancia a un punto fijo (foco) y su distancia a una recta fija (directriz) es constante. El valor de dicha constante determina si la cónica es una parábola (razón igual a uno), una elipse (razón menor que uno) o una hipérbola (razón mayor que uno). En este sentido, proponen una construcción dinámica general con la que estudian las secciones cónicas en función de una razón numérica. También presentan dos construcciones para estudiar la parábola. Una de las construcciones se basa en dos conceptos fundamentales: mediatriz y distancia de un punto a una recta. Cabe resaltar tres características importantes enunciadas en este trabajo: 1) la importancia del uso de un AGD para identificar los contenidos matemáticos como una red, es decir, relacionados y conectados entre sí, 2) la interpretación geométrica y visual de condiciones matemáticas en los problemas como una actividad fundamental en matemáticas y 3) el AGD como un medio que facilita el estudio de una familia de objetos, en este caso, familia de cónicas.

### 2.3.2 Caracterización de algunas Heurísticas propias de los ambientes de geometría dinámica

La medición, el rastro y el arrastre son ejemplos de heurísticas esenciales en los procesos de resolución de problemas en AGD. El movimiento controlado se observa cuando el dinamismo depende de objetos matemáticos específicos, por ejemplo, cuando se mueve un punto a través de una circunferencia o una recta. Estas heurísticas determinan en gran parte las ventajas de trabajar en estos ambientes, pues son clave en el proceso de identificar y explorar relaciones matemáticas (Santos y Ortega, 2013). De acuerdo con González y Herbst (2009) la medición permite a los estudiantes investigar relaciones matemáticas desde el punto de vista de sus propiedades y no de sus formas, lo que permite descubrir relaciones matemáticas que resultan difíciles de observar en acercamientos geométricos o algebraicos utilizando lápiz y papel. Santos (2008a) afirma que la medición es una herramienta importante en el estudio de secciones cónicas, pues ofrece información empírica que puede ayudar a los estudiantes a reconocerlas a partir de su definición, sin embargo, también puede resultar útil para construir dicha definición. Otra heurística importante, en estos ambientes, es el trazado de lugares geométricos que resultan del movimiento de objetos dentro de una configuración dinámica.

> Una estrategia importante que es usada a menudo en tareas o problemas que pueden ser representados dinámicamente es identificar y analizar el lugar geométrico que resulta cuando algunos componentes (puntos, segmentos, líneas, etc.) de dicha representación dinámica son movidos a través de caminos bien definidos (Santos, 2008[a], p. 350).

En este sentido, se busca desarrollar en el estudiante una habilidad para conceptualizar y representar dinámicamente las propiedades matemáticas relevantes de un problema a través de la apropiación de estas heurísticas, pero también, es necesaria una caracterización de las modalidades de uso de dichas heurísticas. De acuerdo con Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002) las prácticas matemáticas dentro de un ambiente de geometría dinámica pueden enmarcarse dentro de una relación cognitiva entre percepciones e ideas abstractas. Este proceso no es en un solo sentido, es decir, en algunas ocasiones las percepciones permiten generar ideas abstractas y en otras las ideas abstractas necesitan de percepciones para poder ser probadas o refutadas. Arzarello et al. (2002) proponen una caracterización del arrastre, en AGD, dependiendo de la intención con que se use:

> *Arrastre errante:* cuando se mueven libremente puntos base de una construcción dinámica con el objetivo de descubrir patrones o invariantes.
>
> *Arrastre atado:* cuando se mueve un punto sobre una trayectoria bien definida (movimiento controlado).
>
> *Arrastre guiado:* cuando se mueven elementos de la construcción para obtener configuraciones específicas.
>
> *Arrastre simulando un lugar:* cuando se mueven puntos base de una construcción manteniendo alguna condición o relación matemática constante. En esta etapa es posible que no se perciba el lugar geométrico del punto que se mueve.
>
> *Arrastre formando un patrón:* cuando se construye una familia de puntos, que cumplen con la condición buscada, con el objetivo de hacer visible el lugar geométrico que conserva dicha condición.

Los arrastres errante, atado y guiado son heurísticas propias del proceso de exploración en la resolución de problemas matemáticos; donde se buscan relaciones matemáticas (patrones o invariantes) a través de información empírica visual. El arrastre simulando un lugar y arrastre formando un patrón se usan para analizar relaciones matemáticas explícitamente (encontradas en el proceso de exploración) a partir de información empírica visual.

Leung (2008) argumenta que el arrastre es una herramienta cognitiva que permite la construcción de significados, pues permite la visualización de invariantes y patrones relacionados con conceptos matemáticos. De acuerdo con este autor, la esencia cognitiva del arrastre es la variación y una evidencia de la adquisición de conocimiento matemático es la conceptualización de estructuras invariantes en fenómenos de cambio. Laborde (2005) comenta que la variación es un aspecto fundamental de las matemáticas muchas veces invisible para el estudiante debido al uso de herramientas estáticas como lápiz y papel. Esta autora afirma que la explicitación de la variación o invariancia en Geometría es la esencia de los AGD y divide las construcciones en dos tipos en función de la invariancia de sus propiedades:

> *Construcciones suaves.* Cuando algún elemento de la configuración se mueve y esta no conserva sus propiedades, por ejemplo, construir un cuadrado con vértices en los puntos $(0,0), (0,4)\ (4,4)\ y\ (4,0)$; si alguno de los puntos se mueve, la construcción deja de ser un cuadrado.
>
> *Construcciones robustas.* Cuando una construcción conserva sus propiedades ante el arrastre de sus elementos. Por ejemplo, construir un cuadrado con rectas perpendiculares y trasladando medidas con circunferencias.

Baccaglini y Mariotti (2010) reconocen que el uso de software dinámico (Cabri) puede ser un camino para transitar entre dos mundos en geometría: el mundo conceptual y el mundo experimental. Afirman que una característica importante de este tipo de software es la exploración dinámica mediante el arrastre de objetos. También comentan que el arrastre puede ayudar a identificar la dependencia o independencia entre elementos de una configuración dinámica mediante movimientos del cursor. Esta identificación puede facilitar la explicitación lógica de dicha dependencia en términos matemáticos. Además, catalogan el arrastre en dos tipos de movimiento: movimiento directo e indirecto. El movimiento directo se observa cuando se elige un elemento base de la construcción para moverlo. El movimiento indirecto se presenta cuando se fija la atención en la variación de un elemento distinto al que genera el movimiento. Estos autores agregan dos modalidades de arrastre a los propuestos por Arzarello et al. (2002) para caracterizar los procesos de exploración de problemas abiertos[1]:

> *Arrastre con el rastro activado*: cuando se mueve un elemento de la construcción con su rastro activado. Esta característica del AGD es fundamental para conjeturar sobre las características que debe cumplir el elemento en movimiento para que se mantenga fija una propiedad de la construcción. Este tipo de arrastre es similar al arrastre simulando un lugar propuesto por Arzarello et al. (2002); con la diferencia de hacer explícito el recorrido del elemento móvil mediante su rastro.
>
> *Arrastre de prueba:* se utiliza para comprobar que la construcción cumpla y mantenga las condiciones deseadas y comúnmente se utiliza en la fase de verificación de conjeturas.

La medición, como otra heurística propia de los AGD, es estudiada y caracterizada por Olivero y Robutti (2007). Por un lado, dichos autores argumentan que la medición puede generar conflictos entre aspectos conceptuales y gráficos de figuras debido a la doble naturaleza de la medición, es decir, como herramienta experimental (ambiente dinámico) y como concepto conceptual (disciplina). En este sentido, las mediciones hechas mediante el AGD siempre tienen un número de dígitos significativos, en otras palabras, los números manejados son siempre números racionales. Así, resaltan la necesidad de una interpretación y manejo adecuado de esta herramienta por parte de los estudiantes. Por otro lado, comentan que la medición puede servir como herramienta cognitiva para descubrir, explorar, probar o refutar conjeturas o relaciones matemáticas y que puede utilizarse para transitar entre razonamientos empíricos y conceptuales. Bajo esta perspectiva, proponen

[1] Un problema abierto consta de un enunciado corto que no sugiere ninguna actividad específica de solución (resuelve, encuentra, demuestra, etc.); comúnmente consiste en la descripción de una configuración con propiedades especificas donde el objetivo es buscar, encontrar, explorar y argumentar relaciones matemáticas (Baccaglini & Mariotti, 2010).

una caracterización de los distintos tipos de medición que pueden utilizarse en estos ambientes:

*Medición errante.* Cuando se toman medidas, aleatoriamente, de diferentes atributos de una construcción con el objetivo de detectar relaciones matemáticas.

*Medición guiada.* Cuando se utiliza la medición para obtener y explorar configuraciones particulares de la construcción general.
*Medición perceptual.* Se utiliza para validar una percepción (intuición), es decir, cuando se sospecha de posibles relaciones matemáticas cualitativas y se busca obtener información cuantitativa que apoye o refute dicha percepción.

*Medición para validar*. Después de la percepción se formula una conjetura la cual se valida con información empírica con este tipo de medición.

Por último, Marton, Runesson y Tsui (citado en Leung, 2008) proponen cuatro funciones cognitivas, relacionadas con la variación, que pueden usarse para caracterizar la forma en que los estudiantes usan el arrastre y la medición de forma conjunta en sus intentos por resolver problemas en ambientes de geometría dinámica:

*Contraste*. Cuando se comparan atributos (medidas o formas) de una construcción dinámica para obtener configuraciones específicas que cumplen alguna condición. Los arrastres errantes y guiados son ejemplos donde se utiliza este proceso cognitivo.

*Separación.* Cuando se enfoca en la variación de algún objeto con el objetivo de separar o explicitar los patrones e invariantes geométricos asociados con el movimiento de dicho objeto. El arrastre simulando un lugar y el arrastre formando un patrón son ejemplos donde se usa este tipo de función cognitiva.

*Generalización.* Una vez identificados y explorados los patrones o invariantes de la construcción dinámica se hacen las modificaciones necesarias para que la construcción cumpla con las condiciones deseadas. Este proceso cognitivo emplea el arrastre atado y arrastre de prueba.

*Fusión*. Este proceso cognitivo involucra la identificación simultánea de la relación que existe entre todas las dimensiones dinámicas (todos los posibles movimientos) de la construcción.

En resumen, se parte del marco de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985,2008) para caracterizar recursos, heurísticas y formas de razonamiento presentes en cada episodio del proceso de resolución de los problemas (Santos & Camacho, 2009) dentro de un ambiente de geometría dinámica, donde el empleo de heurísticas como arrastre y medición se analiza a partir de sus diferentes modalidades (Arzarello et al., 2002, Olivero & Robutti, 2007) y de acuerdo a las funciones cognitivas presentes (Leung, 2008).

# Capítulo 3

## Marco metodológico

## 3.1 Naturaleza de la investigación

La investigación es de carácter cualitativo e intenta documentar los recursos, estrategias y formas de razonamiento que desarrollaron, estudiantes de bachillerato, al resolver problemas de geometría analítica planteados como una secuencia didáctica en un ambiente de geometría dinámica, es decir, se buscó analizar las circunstancias que determinaron la toma de decisiones en los procesos de resolución. Además, de estudiar cómo se utiliza la información proporcionada en los problemas a partir de los recursos (matemáticos y de la herramienta) de cada estudiante.

## 3.2 Participantes de la investigación

La secuencia didáctica se diseñó para un grupo de tercer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades sobre temas de Geometría Analítica. El grupo estuvo conformado por 14 estudiantes con edades entre 15 y 17 años. En la tabla 3.1 se resume la trayectoria académica (en Matemáticas) de cada estudiante y su experiencia en el uso de AGD.

***Tabla 3.1.*** Trayectoria académica del grupo.

| **Estudiante** | **Edad** | **Calificación Matemáticas I (Aritmética y Álgebra)** | **Calificación Matemáticas II (Geometría y Trigonometría)** | **Uso de AGD** |
|---|---|---|---|---|
| Alan | 16 | 10 | 8 | No |
| Alexandra | 17 | 9 | 7 | No |
| Carla | 15 | 6 | 7 | No |
| Carlos | 15 | 8 | 8 | No |
| César | 16 | 8 | 6 | No |
| David | 16 | 7 | 7 | No |
| Diego | 16 | 5 | 5 | No |
| Fernanda | 16 | 6 | 8 | No |
| Giovanny | 17 | 7 | NP | No |
| Honorine | 16 | 5 | 6 | No |
| Itzia | 16 | 10 | 7 | No |
| Karen | 17 | 9 | 6 | No |
| Miguel | 16 | 8 | 9 | No |
| Virginia | 17 | 7 | 6 | No |

### 3.3 Diseño de la secuencia didáctica

El diseño de actividades es un aspecto clave en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues es el medio para el desarrollo del pensamiento matemático y heurísticas de resolución de problemas. Además del diseño de las actividades, resulta importante identificar posibles rutas de aprendizaje (Simon & Tzur, 2004) que sirven como un marco para caracterizar y predecir las formas en que los estudiantes trabajarán los problemas. En este sentido, una fase que es importante cuando se diseñan secuencias didácticas a partir de la resolución de problemas y dentro de AGD es que el profesor trabaje los problemas de forma exhaustiva; en primera instancia, se busca detectar oportunidades didácticas para la enseñanza de conceptos matemáticos y el desarrollo del pensamiento matemático; en segunda instancia, se busca formular un plan, para guiar al estudiante, en función de las posibles rutas que podría seguir en su proceso de resolución del problema. Para ejemplificar lo anterior, a continuación se muestra el proceso de resolución del problema de la parábola usado por Ortega (En revisión) que sirvió como punto de partida para planear la secuencia didáctica.

El problema:

> *Un punto se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual a su distancia del punto* $A(4{,}0)$. *Hallar la ecuación de su lugar geométrico. (Lehman, 2001, p. 52).*

*Comprensión del problema*

¿Cuáles son los objetos y conceptos matemáticos involucrados en el problema? Los objetos matemáticos del problema son un punto móvil, un punto fijo $A(4{,}0)$ y una recta (el eje Y). Los conceptos matemáticos relacionados con el problema son distancia entre dos puntos y distancia entre un punto y una recta. ¿Cuáles son las relaciones matemáticas entre los objetos del problema? Las distancias del punto móvil al eje $Y$ y al punto fijo deben ser iguales.

*Diseño de un plan de solución*

En esta etapa, la construcción de una representación dinámica de los objetos matemáticos en términos de sus propiedades es importante, pues permite explorar el problema desde un punto de vista empírico (medición y arrastre) con el objetivo de generar conjeturas, observar invariantes y buscar patrones. Una característica importante de esta representación dinámica es que no depende de un acercamiento algebraico inicial (Santos & Camacho, 2009). Por ejemplo, los alumnos pueden construir una representación dinámica inicial que depende del arrastre y la medición; pueden localizar varios puntos en el plano y medir las distancias de dichos puntos al punto fijo y al eje Y para posteriormente moverlos hasta que se cumpla la condición del problema (arrastre guiado), como se observa en la Figura 3.1.

Claramente el método anterior no es exacto, sin embargo, esta fase puede ayudar a los alumnos a conjeturar que el lugar geométrico buscado es simétrico con respecto al eje $X$ y que debe intersectarlo en el punto $(2,0)$; pueden colocar el punto $(2,0)$ y verificar, con medición, que cumple con las condiciones del problema, además, pueden darse cuenta que uno de los vértices de los cuadrados de lado cuatro (con vértices el punto fijo y el origen y lados en los ejes) también pertenecen al lugar geométrico (véase Figura 3.2). En este camino, los estudiantes pueden participar en un proceso continuo de refinación de su construcción que eventualmente los lleve a reconocer las relaciones matemáticas necesarias para resolver el problema.

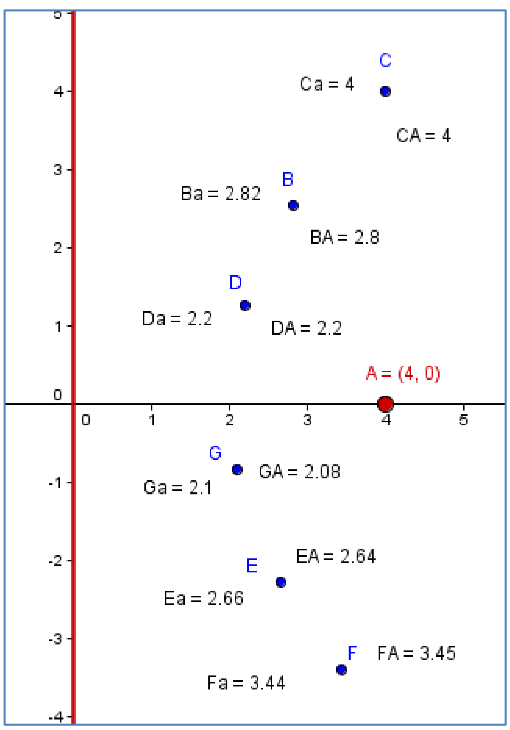



***Figura 3.1.*** Acercamiento empírico y discreto del problema.

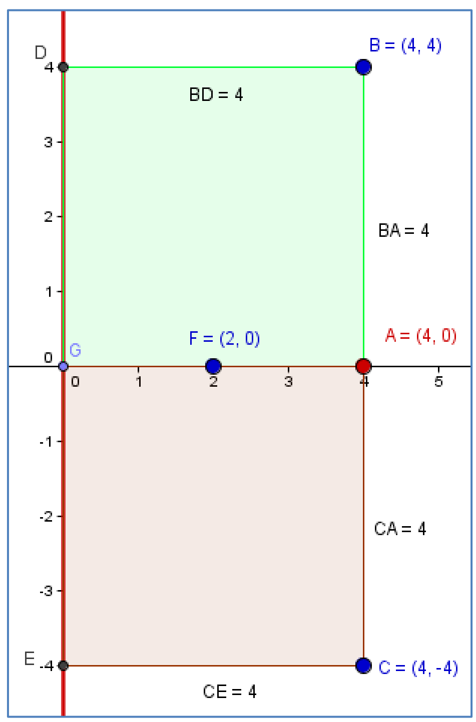



***Figura 3.2.*** Refinamiento del primer acercamiento.

De la construcción, exploración y análisis de los acercamientos dinámicos iniciales, los estudiantes pueden pensar el problema en términos de preguntas que los conduzcan a identificar y conectar diferentes contenidos y relaciones matemáticas (Santos, 2007c). Por ejemplo, los estudiantes pueden preguntarse si existe alguna relación entre el problema y una familia de triángulos isósceles, dado que se tienen dos distancias iguales (posibles lados del triángulo) y dos posibles vértices de los triángulos; si el punto $A(4,0)$ es un vértice común de todos los triángulos y los puntos B, C, D, E, F y G son otro vértice de cada triángulo, entonces ¿dónde estaría localizado el tercer vértice del triángulo? ¿Cómo se interpreta geométricamente la distancia de un punto a una recta? Estas preguntas podrían guiar al estudiante hacia la identificación de las relaciones matemáticas fundamentales para resolver el problema. Los alumnos pueden identificar que un lado de los triángulos isósceles debe ser perpendicular a al eje $Y$ como se observa en la Figura 3.3.

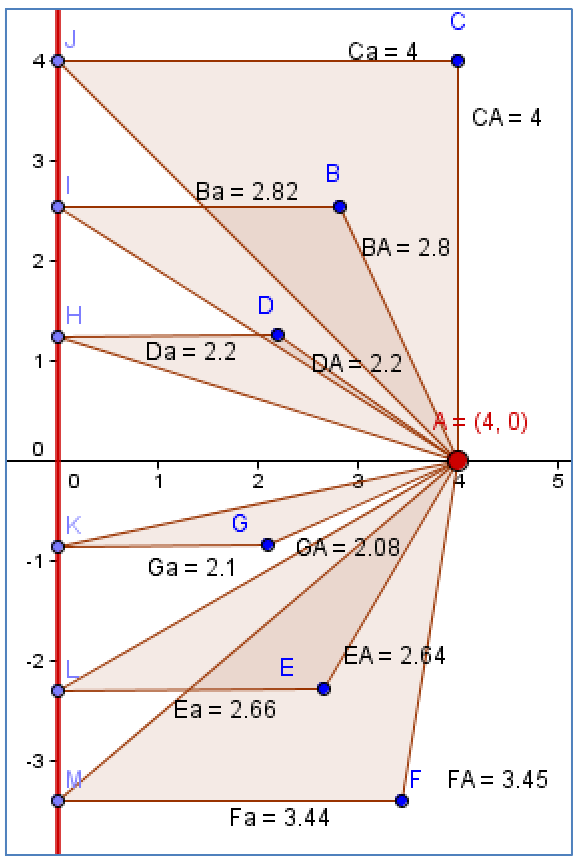



***Figura 3.3.*** Detección de una familia de triángulos isósceles.

*Implementación del plan de solución*

Observar patrones, variantes e invariantes es una de las ventajas que ofrece el uso de un AGD y cuando se traducen a relaciones matemáticas, mediante heurísticas particulares de la herramienta, se puede resolver el problema dinámicamente. Uno de los vértices de la familia de triángulos siempre está sobre el eje Y, por lo tanto, esta invariante se puede traducir con la heurística del movimiento controlado (arrastre atado); colocando un punto móvil sobre el eje Y. Ahora el punto móvil y el punto fijo dado $A(4,0)$ forman la base de una familia de triángulos isósceles. El tercer vértice de la familia de triángulos debe estar sobre la recta perpendicular al eje Y que pasa por el punto móvil. ¿Cómo se encuentra el tercer vértice de un triángulo isósceles si tengo la base y uno de sus lados? ¿Qué relación existe entre la mediatriz de la base de un triángulo isósceles y el vértice opuesto? Por un lado, el vértice opuesto a la base de un triángulo isósceles siempre está en la mediatriz de la base, por otro lado se conjeturó que dicho vértice se encuentra en la recta perpendicular al eje $Y$ que pasa por el punto móvil (vértice del triángulo en el eje Y). Por lo tanto, el punto que cumple las condiciones del problema es el punto de intersección de la recta perpendicular al eje $Y$ y la mediatriz de la base del triángulo (véase Figura 3.4). En este sentido, analizar el comportamiento dinámico de objetos matemáticos dentro de una configuración dinámica se vuelve una actividad determinante en el proceso de resolución de problemas, en particular, para analizar lugares geométricos en términos de sus propiedades. Por ejemplo, por medio de los comandos traza y lugar geométrico se puede explicitar el recorrido del punto que cumple las condiciones del problema (vértice opuesto a la base del triángulo), como se observa en la Figura 3.4.

> La actividad de identificar y describir el camino o huella que dejan partes de una figura al mover ciertos componentes dentro de una configuración dinámica llega a ser una estrategia importante para distinguir y analizar propiedades de lugares geométricos que aparecen en el estudio de la geometría analítica. (Santos, 2007, p. 37).

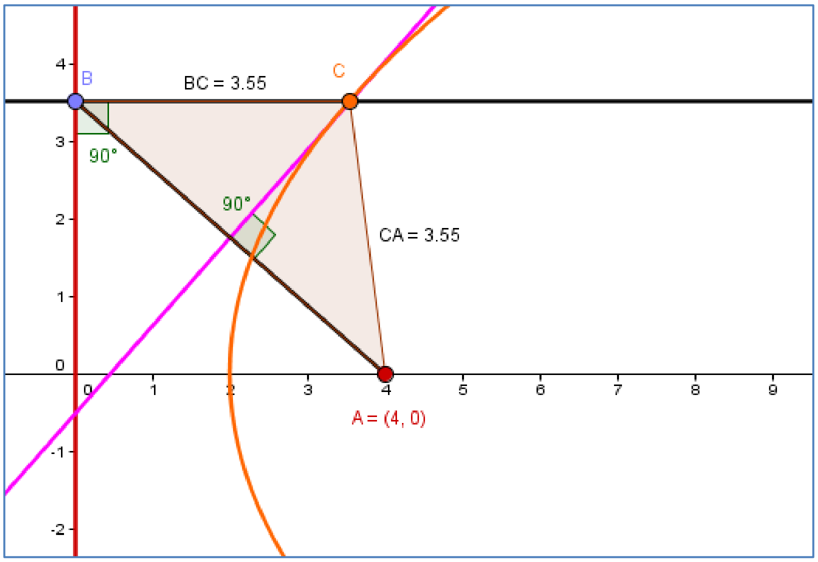


***Figura 3.4***. Construcción dinámica del problema.

El uso de un AGD no solo es una parte fundamental en la representación inicial del problema, sino que puede ofrecer información empírica útil para generar argumentos geométricos o algebraicos; puede ayudar al estudiante a reconocer que la relación matemática fundamental del problema es una igualdad de distancias y en este camino, el problema se reduce a representar algebraicamente dicha relación. También, se puede generar la ecuación del lugar geométrico encontrado, lo cual ofrece una forma de relacionar la representación dinámica (que a su vez es geométrica y numérica) con una representación algebraica.

*Extensión del problema*

Una de las características que distingue el uso de un AGD en la resolución de problemas es la facilidad para generalizar y extender los  problemas (Santos, 2007[a]). Esta extensión y generalización del problema se implementa a través de preguntas que conduzcan a la variación o modificación de algunos de los elementos de la configuración inicial. ¿Qué ocurre si en vez de una línea (eje Y) tomamos una circunferencia con centro en el origen? ¿Cómo se interpretaría la distancia de un punto a una circunferencia? Esta son algunas preguntas que podrían llevar a la búsqueda de una extensión del problema. Siguiendo el mismo enfoque (Mediatriz y distancia de un punto a una recta) la nueva construcción sería la siguiente:

1. Colocar un punto móvil $C$ sobre la circunferencia.
2. Trazar la mediatriz del segmento determinado por el punto móvil $C$ y el punto fijo $A(4,0)$.
3. Trazar la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto móvil $C$; esta recta es perpendicular a la circunferencia desde el punto de vista infinitesimal, pues con este enfoque la circunferencia se comporta como una recta en una vecindad infinitamente pequeña (se comporta como la recta tangente a la circunferencia que pasa por el punto $C$), por lo tanto, la mínima distancia de cualquier punto a la circunferencia se encuentra con la recta que pasa por dicho punto y el centro de la circunferencia (segmento determinado por el punto de intersección, de la recta con la circunferencia, y el punto dado).
4. Localizar el punto de intersección $D$ de la recta (que pasa por el centro de la circunferencia) y la mediatriz.
5. Localizar el lugar geométrico del punto $D$ que resulta del movimiento del punto $C$.

Aunque esta construcción también se basa en el concepto fundamental de mediatriz, la distancia de un punto a una recta sufre una modificación que no es propia de la geometría euclidiana (enfoque infinitesimal). Sin embargo, utilizando el zoom que la herramienta ofrece, puede hacerse un acercamiento conveniente a la circunferencia (hasta que parezca una recta) para que esta modificación pueda resultar intuitivamente alcanzable para los estudiantes. De acuerdo con Ímaz y Moreno (2010) un enfoque infinitesimal puede resultar conveniente en cuestiones de enseñanza, pues respeta la intuición; que es una característica inseparable del estudiante.

Otra de las ventajas del uso de este tipo de herramientas, es que facilita el proceso de generalización de los problemas, pues mediante la variación de los objetos dentro de la configuración se pueden estudiar, de manera inmediata, una familia de casos (Santos & Ortega, 2013). En esta dirección, la variación del radio de la circunferencia con centro en el origen es clave para generar todas las secciones cónicas; el lugar geométrico generado por el punto $D$ puede ser una elipse si el radio de la circunferencia es mayor a cuatro, una hipérbola si el radio de la circunferencia es menor a cuatro o un punto si el radio de la circunferencia es igual a cuatro (véase Figuras 3.5 y 3.6). En este proceso de generalización, también, se pueden mover los objetos de la construcción como el centro de la circunferencia o el punto fijo $A$; esto puede ayudar al estudiante a detectar que cuando el centro de la circunferencia y el punto fijo $A$ coinciden, la cónica se transforma en una circunferencia.

La información visual tanto empírica como numérica puede ser útil para definir los objetos matemáticos en torno a relaciones matemáticas. Por ejemplo, dependiendo del radio $r$ de la circunferencia, el lugar geométrico puede definirse a partir de la relación entre las distancias involucradas en el problema. Si $r > 4$ (Figura 3.5) el punto $D$, que genera el lugar geométrico, cumple que la suma de sus distancias a los puntos $A$ $y$ $B$ (centro de la circunferencia) es igual al radio $r$ de la circunferencia, pues $r = BD + DC$ pero $DC = DA$ por lo tanto $BD + DA = r$ para cualquier posición del punto D. Esta propiedad define una elipse con focos $A$ , $B$ y constante $2a = r$. Si el radio es $0 < r < 4$ entonces se cumple que $|BD - DA| = r$ , pues $BD = BC + CD = BC + DA$ y $|BD - DA| = |BC + DA - DA| = BC = r$, propiedad que define una hipérbola con focos $A, B$ y constante $2a = r$ (Figura 3.6). Es claro que la construcción dinámica del problema y la definición de los lugares geométricos, depende de los conceptos matemáticos fundamentales de distancia y mediatriz. Por lo tanto, resulta necesario que los estudiantes dominen estos dos conceptos, para que tengan la oportunidad de elaborar esta construcción.

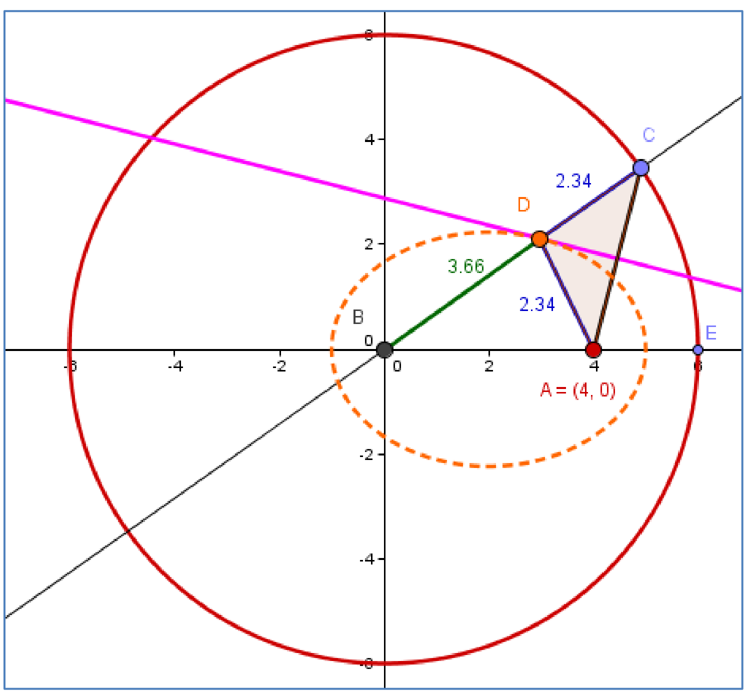



***Figura 3.5.*** Construcción dinámica de la elipse (cuando $r > 4$).

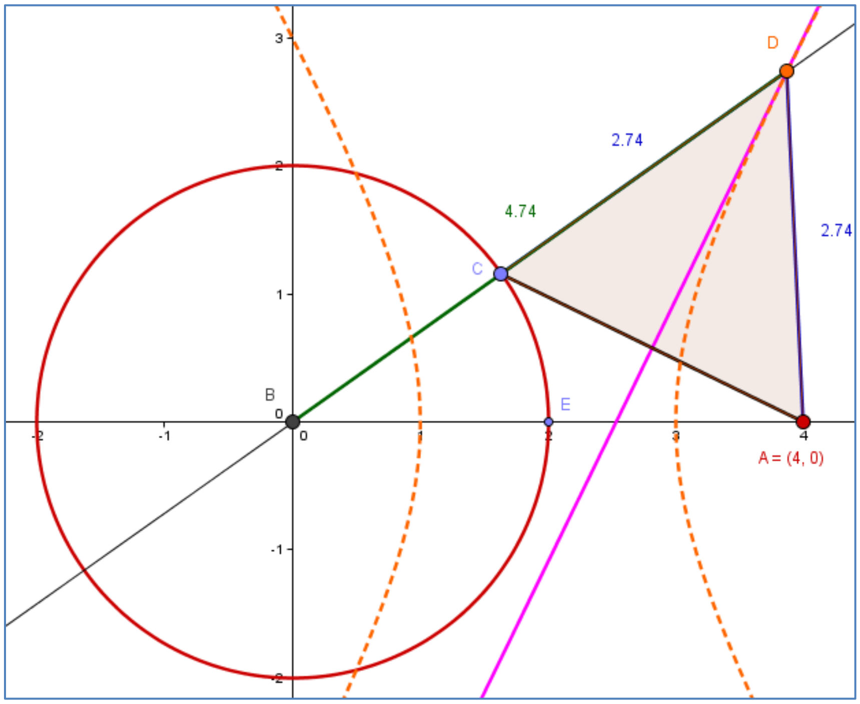


***Figura 3.6.*** Construcción dinámica de la hipérbola (cuando $0 < r < 4$).

*Conexiones (rectas tangentes a cónicas y localizar los focos de una hipérbola)*

Este tipo de enfoque dinámico del problema, junto con el planteamiento y seguimiento de cuestiones relevantes, ofrece la oportunidad de usar información matemática como una estructura. ¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia (directriz) y la constante "$a$" de la cónica? Por un lado, la construcción dinámica permite observar que el radio de la circunferencia directriz es igual a la longitud entre los vértices de la cónica ($2a$). Por otro lado, es claro que la mediatriz utilizada para resolver el problema es una recta tangente de cada cónica (parábola, elipse e hipérbola) en el punto $D$. En esta dirección, la construcción ofrece un método para trazar rectas tangentes, a dichas cónicas, que pasen por un punto apropiado (que no esté dentro de la elipse o dentro de los brazos de la parábola e hipérbola), como se observa en la Figura 3.7.

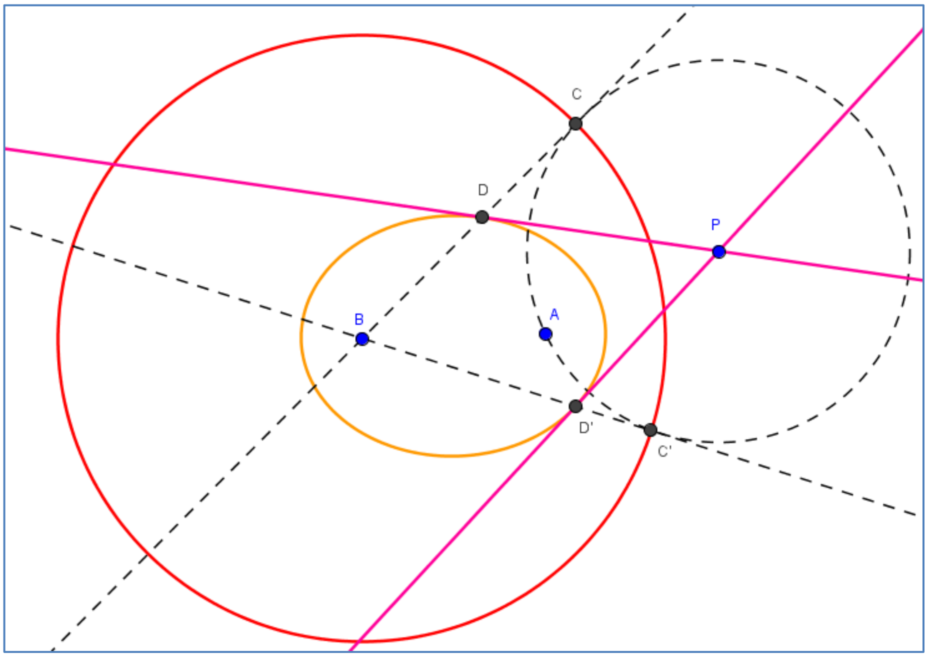


***Figura 3.7.*** Construcción de rectas tangentes a una elipse utilizando su directriz circular.

Dadas la cónica, su directriz y foco(s) y un punto cualquiera (apropiado), el método para trazar rectas tangentes a la cónica que pasen por el punto dado es:

1) Se traza una circunferencia con centro el punto $P$ dado y que pase por el foco $A$ de la cónica (en caso de ser elipse o hipérbola se toma el foco que no es centro de la circunferencia directriz).
2) Se localizan los puntos $C\ y\ C'$ de intersección de la circunferencia trazada con la directriz.
3) Se trazan las rectas perpendiculares a la directriz que pasen por los puntos de intersección del paso 2) (En caso de que la directriz sea circular, se traza las rectas que pasen por el centro $B$ de la directriz y los puntos de intersección $C\ y\ C'$).
4) Localizar los puntos $D\ y\ D'$ de intersección de las rectas, trazadas en el paso 3), y la cónica.
5) Trazar las rectas que pasen por el punto $P$ inicial dado y los puntos $D\ y\ D'$ de intersección del paso 4).
6) Las rectas trazadas en el paso 5) son tangentes a la cónica dada y pasan por el punto $P$ dado, como se observa en la Figura 3.7.

Este enfoque de construcción de cónicas, ofrece información valiosa que puede servir para abordar actividades desde un punto de vista diferente. Por ejemplo, utilizando esta información ¿cómo podemos encontrar los focos de una hipérbola? Supongamos que tenemos su eje focal (es fácil encontrarlo utilizando dos rectas paralelas que corten a la hipérbola). El método para encontrar los focos de la hipérbola utilizando este enfoque de directriz circular es el siguiente:

i. Localizar los vértices $D$ , $E$ y el centro $O$ de la hipérbola.
ii. Colocar un punto $F$ móvil sobre el eje focal y localizar su reflexión $F$' con respecto al centro $O$ de la hipérbola.
iii. Trazar la directriz suponiendo que el punto $F$ móvil es uno de los focos, es decir, trazar una circunferencia con centro en el punto F y de radio $DE$ (la longitud entre los vértices de la hipérbola $2a$).
iv. Trazar la recta perpendicular al eje focal que pase por el punto F móvil.
v. Localizar un punto $G$ de intersección entre la recta perpendicular del paso iv y la supuesta directriz (circunferencia del paso $iii$).
vi. Trazar la mediatriz del segmento determinado por el punto $G$ y el punto $F$'.
vii. Localizar el punto $H$ de intersección entre la recta perpendicular del paso iv y la mediatriz del paso vi.
viii. Encontrar el lugar geométrico del punto $H$ y localizar los puntos $N\, y\, P$ de intersección entre el lugar geométrico y la cónica.
ix. Trazar las rectas perpendiculares al eje focal que pasen por los puntos $N\ y\ P$.
x. Localizar los puntos $Q\ y\ R$ de intersección de las rectas perpendiculares del paso ix con el eje focal. Los puntos $Q\ y\ R$ son los focos de la hipérbola (véase Figura 3.8).

Si el punto móvil $F$ fuera el foco de la hipérbola entonces el punto $H$ debería pertenecer a la cónica, pues es la intersección de la mediatriz (del segmento determinado por el otro foco F' y un punto G en la directriz) y la recta que pasa por el centro $F$ de la directriz y el punto $G$ de la misma. El punto $H$ de la construcción describe un lugar geométrico, que depende del movimiento del punto $F$, y la solución del problema se encuentra cuando dicho lugar geométrico interseca a la cónica. En esta construcción se exhiben dos heurísticas generales para la resolución de problemas: selección de casos particulares (selección del punto $G$ específico sobre la directriz) y suponer el problema resuelto (suponer que el punto $F$ es el foco).

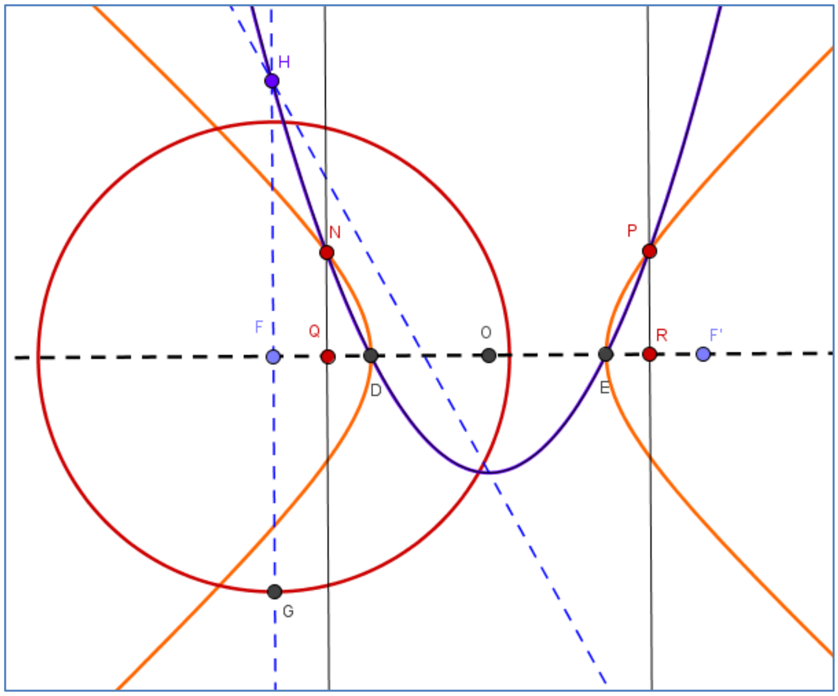



***Figura 3.8.*** Localización de los focos de una hipérbola utilizando directriz circular.

En general, la secuencia didáctica se planeó siguiendo los lineamientos de la resolución de problemas y uso sistemático de un AGD ejemplificados anteriormente. De acuerdo con Santos y Camacho (2009), una característica fundamental en la selección de tareas de una secuencia didáctica, es que favorezca el desarrollo de un pensamiento matemático en el alumno. Santos (2008a) propone que una ruta de aprendizaje, basada en el uso de un AGD, debe respetar las siguientes fases: 1) construir una representación dinámica del problema para comprender información relevante del problema, 2) exploración de la representación dinámica para generar información visual y empírica para identificar y analizar relaciones matemáticas y 3) utilizar toda la información recabada para representar las relaciones matemáticas en términos geométricos o algebraicos.

En particular, la secuencia didáctica se diseñó a partir de incorporar los resultados que Ortega (En revisión) aporta sobre el uso de un AGD para resolver problemas rutinarios de geometría analítica. En una fase se buscó construir, a partir del planteamiento de preguntas y actividades abiertas, las representaciones dinámicas de los conceptos matemáticos básicos de mediatriz, distancia entre dos puntos y distancia entre punto y recta. En estas representaciones dinámicas se intentó que los estudiantes desarrollaran el uso de la heurística de movimiento controlado (modalidades de arrastre). En otra fase, se plantearon problemas rutinarios de libro de texto para documentar el empleo de recursos matemáticos y heurísticas en los procesos de resolución por parte de los estudiantes.

## 3.4 Secuencia didáctica

La secuencia didáctica consta de una serie de actividades y problemas agrupados en tres fases: 1) fase de introducción al AGD, 2) fase de construcción de recursos y 3) fase de evaluación. En esta secuencia se distingue entre una actividad y un problema. Una actividad consta de una tarea matemática diseñada específicamente para ser trabajada dentro del AGD. Un problema es una tarea rutinaria pensada (inicialmente) para un ambiente estático de lápiz y papel y que comúnmente se puede encontrar en libros de texto tradicionales.

### *3.4.1 Fase de introducción al ambiente dinámico*

En la fase de introducción se buscó que los estudiantes conocieran los comandos y características del AGD. En primera instancia, se impartió un breve tutorial sobre los comandos básicos del AGD y su funcionamiento. En segunda instancia, se plantearon una actividad y dos problemas. Los problemas ya habían sido resueltos de forma algebraica. La Actividad fue novedosa, pero sin requerir recursos matemáticos muy sofisticados.

#### *3.4.1.1 Actividad 1*

> Dado el triángulo de vértices $\mathrm{A}(-2{,}0), \mathrm{B}(2{,}0)$ y $\mathrm{C}(0{,}2)$ encontrar triángulos que tengan la misma base AB y la misma área que el triángulo dado.

#### *3.4.1.2 Problema 1*

> El perímetro de un rectángulo es de 18 cm, y sabemos que su base es 5 cm más larga que su altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

#### *3.4.1.3 Problema 2*

> La base mayor de un trapecio mide el triple que su base menor. La altura del trapecio es de 3 cm y su área es de 12 $cm2$ .Calcula la longitud de sus dos bases.

### *3.4.2 Fase de construcción de recursos en el ambiente dinámico*

En esta fase se buscó que los estudiantes desarrollaran recursos matemáticos dentro del AGD, es decir, recursos geométricos y dinámicos. En específico, se diseñaron tres actividades para construir recursos asociados con los conceptos de distancia entre dos puntos, distancia entre punto y recta y mediatriz.

#### *3.4.2.1 Actividad 2*

Encontrar puntos que estén a dos unidades de distancia del punto $A(1,0)$.

#### *3.4.2.2 Actividad 3*

Dado el punto $A(3,5)$ y una recta cualquiera, encontrar la distancia del punto a la recta.

#### *3.4.2.3 Actividad 4*

Dados los puntos $A(5,6)$ y $B(10,2)$ encontrar puntos que equidisten de los puntos $A$ y $B$.

### *3.4.3 Fase de evaluación*

En esta fase se plantearon dos problemas rutinarios de libro de texto (Lehman, 2001) y el objetivo fue, principalmente, evaluar los recursos, heurísticas y formas de razonamiento que desarrollaron los estudiantes en las fases de introducción y construcción. Además, se buscó trabajar de forma novedosa, en donde la generalización y extensión de los problemas fue una parte fundamental. En particular una extensión del Problema 4 sirvió para estudiar todas las secciones cónicas.

#### *3.4.3.1 Problema 3*

Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: a) se conserva siempre a 2 unidades a la izquierda del eje Y; b) está siempre 4 unidades arriba del eje X; c) está siempre a igual distancia de los ejes X y Y (Lehman, 2001, p.54).

*3.4.3.2 Problema 4*

> Un punto se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual a su distancia del punto A(4,0). Hallar la ecuación de su lugar geométrico (Lehman, 2001, p.52).

## 3.5 Forma de Trabajo

La secuencia didáctica se aplicó en 11 sesiones de dos horas dentro de un laboratorio de cómputo (cada estudiante tuvo acceso a una computadora). Las sesiones de laboratorio fueron parte de un curso tradicional de Geometría Analítica de bachillerato, es decir, además de trabajar en el laboratorio, los alumnos trabajaron 3 horas a la semana en el salón de clases. Las diferencias fundamentales, de la forma de trabajo, entre una actividad y un problema fue la participación del profesor. En las actividades el profesor planteó preguntas de forma constante en el desarrollo de la actividad lo que motivó la participación grupal activa de los alumnos en el proceso de construcción. En los problemas, la actividad de los alumnos fue más individual, posteriormente, las construcciones de cada alumno se discutían de forma grupal. Los datos de la investigación se obtuvieron de videograbaciones de las sesiones de laboratorio y archivos electrónicos de GeoGebra entregados por los alumnos. En la tabla 3.2 se muestra como se desarrollaron las actividades y problemas en cada sesión, los objetivos iniciales de la secuencia didáctica y la distribución de sesiones en cada fase de la secuencia (en diferente color).

***Tabla 3.2.*** Desarrollo de las actividades y problemas en las sesiones de laboratorio.

| **Sesión** | **Trabajo realizado** | **Objetivos** |
|---|---|---|
| Sesión 1 | Introducción al software y resolución de Actividad 1 | Mostrar a los alumnos el funcionamiento de algunos comandos del software e introducir diferentes modalidades de arrastre y medición así como heurísticas de resolución de problemas como exploración de casos particulares, exploración de una familia de casos y verificación de resultados. |
| Sesión 2 | Repaso de Actividad 1 | Mostrar a los alumnos la heurística de movimiento dependiente y la función de los comandos traza y lugar geométrico. |
| Sesión 3 | Resolución del Problema 1 y planteamiento del problema 2 | Mostrar a los alumnos la heurística de variación dependiente de atributos de figuras y que los alumnos observen las diferencias entre configuraciones libres y robustas (que conservan sus propiedades ante el movimiento mediante arrastre de prueba). |
| Sesión 4 | Resolución del Problema 2 | Detectar y evaluar el uso de diferentes modalidades de arrastre y medición así como heurísticas de movimiento controlado, movimiento y variación dependiente. Detectar si los alumnos logran construir configuraciones robustas. |
| Sesión 5 | Resolución de Actividad 2 y Actividad 3 | Construir el concepto de circunferencia como lugar geométrico a partir de sus propiedades para conectarlo con el concepto de distancia entre dos puntos y motivar el uso de circunferencias para trasladar distancias a todo el plano. Generar una representación geométrica de la distancia entre un punto y una recta haciendo énfasis en la relación del concepto de perpendicularidad con la mínima distancia entre una recta y el punto. |
| Sesión 6 | Resolución de Actividad 4 | Que los alumnos construyan la mediatriz de un segmento a partir de sus propiedades como lugar geométrico para que reconozcan su relación con una familia de triángulos isósceles. Mostrar a los alumnos una construcción dinámica de la mediatriz de un segmento. |
| Sesión 7 | Resolución del Problema 3 | Detectar y evaluar el uso de diferentes modalidades de arrastre y medición así como heurísticas de movimiento controlado, movimiento y variación dependiente para construir una representación dinámica de la solución del problema. Repasar las representaciones gráficas de la distancia entre dos puntos, distancia entre punto y recta y mediatriz. |
| Sesión 8 | Extensión 1 del Problema 3 | Fomentar las heurísticas de generalización y extensión de los problemas así como su resolución a partir de problemas similares. Que los alumnos hagan los cambios a una configuración dinámica inicial en función de variaciones en las condiciones del problema. |
| Sesión 9 | Extensión 2 del Problema 3 | Fomentar las heurísticas de generalización y extensión de los problemas así como su resolución a partir de problemas similares. Que los alumnos hagan los cambios a una configuración dinámica inicial en función de variaciones en las condiciones del problema. |
| Sesión 10 | Resolución del Problema 4 | Que los alumnos construyan una representación dinámica del problema en donde se conecten las representaciones geométricas de mediatriz y distancia entre punto y recta. Evaluar el uso de heurísticas como medición, arrastre, movimiento dependiente y movimiento controlado. |
| Sesión 11 | Extensión del Problema 4 | Fomentar las heurísticas de generalización y extensión de los problemas. Estudiar una familia de casos como producto de la modificación de elementos dentro de una configuración dinámica. |

# Capítulo 4

## Análisis de datos

La descripción y análisis, a detalle, de las fases de introducción y construcción de recursos en el AGD se pueden encontrar en el Apéndice A.

Es importante mencionar que la unidad de análisis de este capítulo son los recursos y heurísticas presentes en los distintos acercamientos a la resolución de los problemas. En otras palabras, lo que se reporta es la caracterización de los procesos de solución que surgieron durante el desarrollo de las sesiones de laboratorio. En ocasiones se mencionan los nombres de los estudiantes con fines descriptivos, sin embargo, no interesó documentar la evolución particular de cada estudiante.

### 4.1 Resumen de la fase de Introducción al AGD

La fase de introducción al AGD se desarrolló a través un breve tutorial sobre el funcionamiento de comandos básicos de Geogebra en la construcción de rectas notables de un triángulo. En particular se estudiaron los comandos de Nuevo Punto, Punto medio o Centro, Recta que pasa por Dos Puntos, Segmento entre Dos Puntos, Recta Perpendicular, Recta Paralela, Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos, Circunferencia dados su Centro y Radio y Polígono. Algunas características particulares del ambiente fueron trabajadas durante esta sesión. Por ejemplo, se trabajaron las heurísticas de arrastre y movimiento dependiente (controlado); mediante el comando "Nuevo Punto" el profesor diferenció entre arrastre errante (arrastrando un punto libre sobre el plano) y arrastre atado (arrastrando un punto sobre el eje $Y$, eje $X$ y sobre cualquier recta); también, se observó el movimiento de rectas paralelas y perpendiculares que dependían del movimiento de un punto (movimiento dependiente). Además, los alumnos pudieron relacionar el arrastre de un punto con la variación de sus coordenadas y la variación de la longitud de un segmento en función del arrastre de sus extremos (función cognitiva de contraste). Una característica importante de esta fase es que los estudiantes manipularon representaciones geométricas y dinámicas de objetos matemáticos, mediante los comandos del AGD, sin conocer su representación algebraica, lo que permitió centrar la atención en sus características geométricas y en los objetos matemáticos necesarios para trazarlos.

Posteriormente, el profesor les pidió a los estudiantes que trazaran un triángulo cualquiera. Los estudiantes utilizaron el comando “Polígono” para trazarlo e inmediatamente notaron la variación de su área, mostrada en la vista algebraica, a partir del arrastre de sus tres vértices (función cognitiva de separación). El profesor mostró cómo usar la barra de comandos para resolver operaciones aritméticas en función de parámetros de la construcción; se obtuvo el perímetro del triángulo sumando la longitud (variable) de sus lados. En esta parte, los alumnos notaron la variación del área y perímetro del triángulo. Después, el AGD se usó para trazar las rectas notables de un triángulo a partir de sus características geométricas.

### *4.1.1 Resumen de Actividad 1*

> *Dado el triángulo de vértices $A(-2,0), B(2,0)$ y $C(0,2)$ encontrar triángulos que tengan la misma base AB y la misma área que el triángulo dado.*

En primera instancia, los alumnos usaron un arrastre guiado para encontrar varios puntos que formaran triángulos de área constante (conservando la misma base $AB$). Este tipo de arrastre les permitió visualizar que todos los puntos encontrados parecían formar una línea paralela a la base por el vértice $C(0,2)$. Así, resolvieron el problema trazando dicha recta paralela (Figura 4.1).

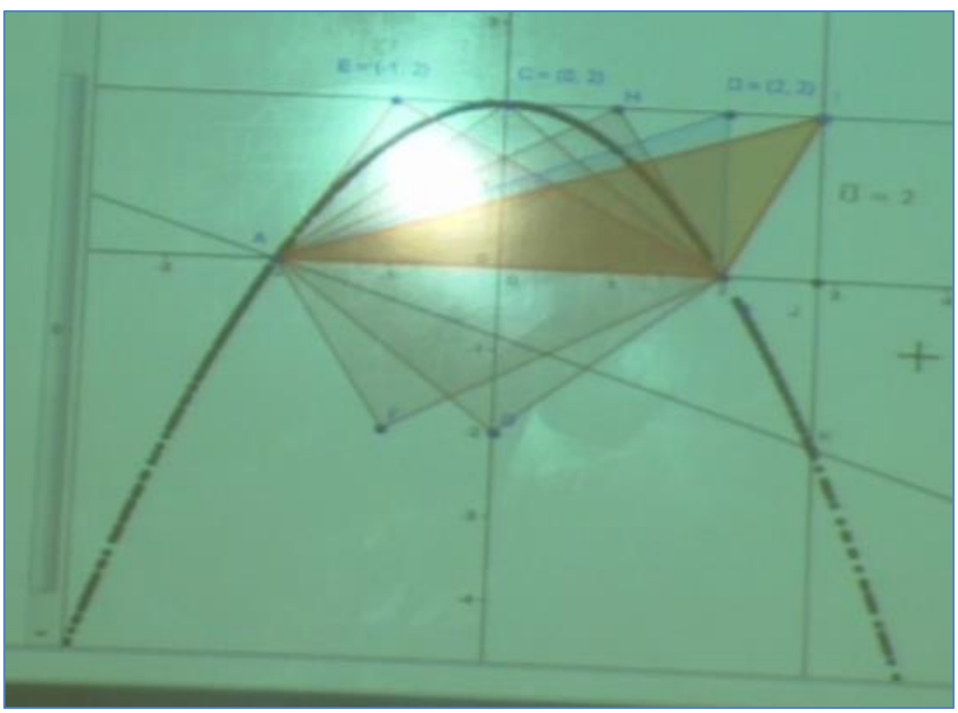


***Figura 4.1.*** Solución dinámica de la actividad 1.

Se destacan algunos aspectos importantes en la resolución de esta actividad:

- Los estudiantes lograron detectar la simetría del problema, pues encontraron la familia de triángulos en el tercer y cuarto cuadrantes.
- EL uso del AGD les permitió verificar su conjetura, pues mediante un punto móvil sobre la recta paralela construyeron un triángulo dinámico y verificaron que su área era constante.
- Lograron argumentar que el área de los triángulos era constante debido a que la base y altura de la familia de triángulos era también constante.
- Los estudiantes pudieron observar las heurísticas de rastro, movimiento dependiente y movimiento controlado al observar el movimiento del ortocentro de la familia de triángulos de área constante.
- Los estudiantes asociaron el valor numérico constante de la altura de la familia de triángulos con la longitud de un segmento perpendicular a la base que pasaba por el vértice opuesto.

### *4.1.2 Resumen de Problema 1*

> *El perímetro de un rectángulo es de 18 cm, y sabemos que su base es 5 cm más larga que su altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?*

Este problema ya había sido resuelto por los estudiantes mediante la solución de un sistema de ecuaciones, sin embargo, para resolver este problema en el AGD, los estudiantes experimentaron dos dificultades: 1) la construcción de rectángulos dinámicos a partir de rectas paralelas y perpendiculares y 2) el uso de parámetros para definir relaciones dependientes entre los lados de los rectángulos. La primera dificultad fue superada por los estudiantes mediante preguntas dirigidas. La segunda dificultad requirió que el profesor mostrara como usar la herramienta para definir relaciones variables y dependientes. El profesor mostró el comando “Circunferencia dado su centro y radio” como un método para trasladar distancias variables en el plano y construyó el rectángulo de lados dependientes.

### *4.1.3 Resumen de Problema 2*

> *La base mayor de un trapecio mide el triple que su base menor. La altura del trapecio es de 3 cm y su área es de 12 cm$^2$ .Calcula la longitud de sus dos bases.*

La dificultad 2) reportada en el Problema 1 fue persistente en este problema. Los estudiantes trazaron sin problema trapecios con altura de tres unidades (mediante una recta paralela al eje $X$ por el punto $(0,3)$, pero trasformar la relación de sus bases en términos del AGD únicamente lo consiguió una estudiante. Karen construyó trapecios rectangulares usando una circunferencia de radio "basemayor/3" donde "basemayor" era el parámetro asignado a la longitud variable de la base mayor del trapecio. La construcción de una familia de trapecios rectangulares sirvió como punto de partida para encontrar una construcción más general, donde la base menor de longitud fija podía moverse por la paralela a la base mayor y generar una familia de trapecios de área constante (Figura 4.2). De forma similar a la Actividad 1, la argumentación de este hecho estuvo relacionada con la invariancia de la altura de los trapecios.

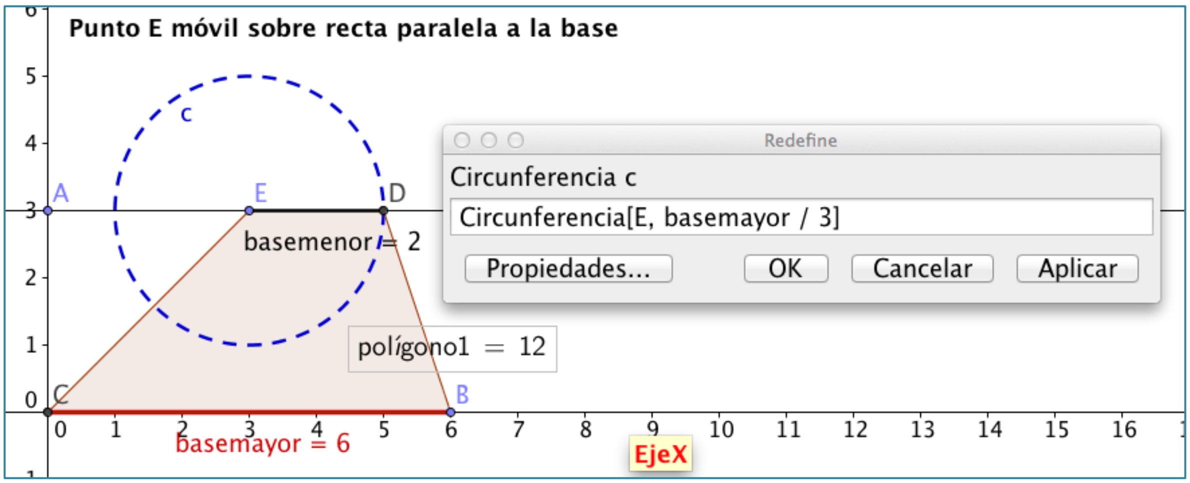


***Figura 4.2.*** Construcción dinámica para resolver el Problema 2.

## 4.2 Resumen de la Fase de  construcción de recursos

### *4.2.1 Resumen de Actividad 2*

*Encontrar puntos que estén a dos unidades de distancia del punto* $A(1,0)$.

Los alumnos empezaron a explorar el problema de forma discreta introduciendo los puntos específicos $(3,0), (-1,0), (1,2)\ y\ (1,-2)$. Algunos alumnos sugirieron que todos los puntos que resolvían el problema formarían un cuadrado con vértices en los puntos antes mencionados. Esta conjetura fue refutada mediante información empírica, pues el profesor trazó el cuadrado y colocó un punto sobre su perímetro para mostrar que la distancia de dicho punto al punto $A$ no era siempre de dos unidades. Posteriormente, la mayoría de los estudiantes encontraron varios puntos que cumplían con la condición de problema (arrastre guiado y arrastre formando un patrón) y lograron visualizar que la posición de dichos puntos formaba un patrón circular. Así, sugirieron que los puntos formaban una circunferencia y la trazaron con el comando “Circunferencia dado su centro y radio” (centro punto $A$ y radio 2). Luego, colocaron un punto sobre la circunferencia y lo arrastraron (arrastre atado) para verificar que su distancia al punto $A$ fuera constante (arrastre de prueba y medición para validar). Finalmente, el problema se trabajó algebraicamente y se obtuvo la ecuación de la circunferencia a partir de la definición de distancia entre dos puntos.

### *4.2.2 Resumen Actividad 3*

> *Dado el punto* $A(3,5)$ *y una recta cualquiera, encontrar la distancia del punto a la recta.*

Inicialmente, todos los estudiantes usaron el comando “Distancia entre dos objetos” para localizar el valor numérico de la distancia entre el punto y la recta. El reto del profesor fue lograr que los estudiantes entendieran que dicho valor numérico correspondía a la longitud de un segmento. La representación geométrica de la distancia de un punto a una recta dependió de la propuesta de un estudiante quién sugirió usar un triángulo y su altura para encontrar dicha distancia (Figura 4.3).

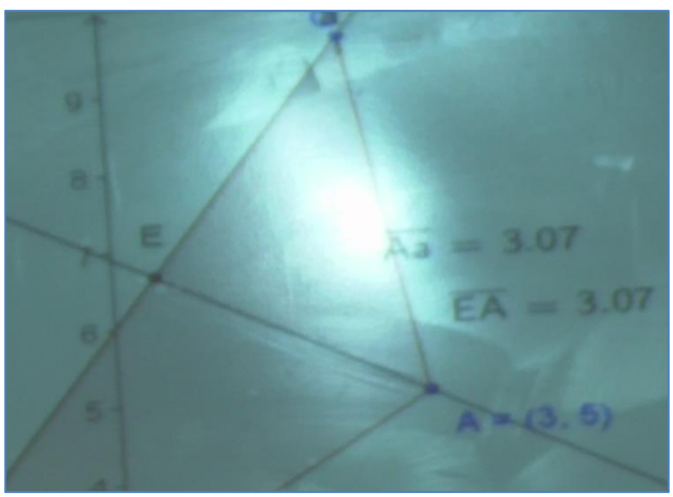



***Figura 4.3.*** Relación entre la distancia entre un punto y una recta con la altura de un triángulo.

A partir de esta idea, otra estudiante afirmó que el triángulo no era necesario y que sólo se requería la recta perpendicular. Otra propuesta de un estudiante consistió en el uso de un punto móvil (arrastre atado) sobre la recta dada para trazar la circunferencia con centro en el punto dado y que pasara por el punto sobre la recta (Figura 4.4). Mediante esta construcción, los estudiantes lograron comparar el radio de la circunferencia con la distancia del punto a la recta dada por la herramienta. Así, concluyeron que la distancia del punto a la recta era la mínima distancia entre cualquier punto sobre la recta y el punto dado (El profesor relacionó esta mínima distancia con el radio de una circunferencia tangente).

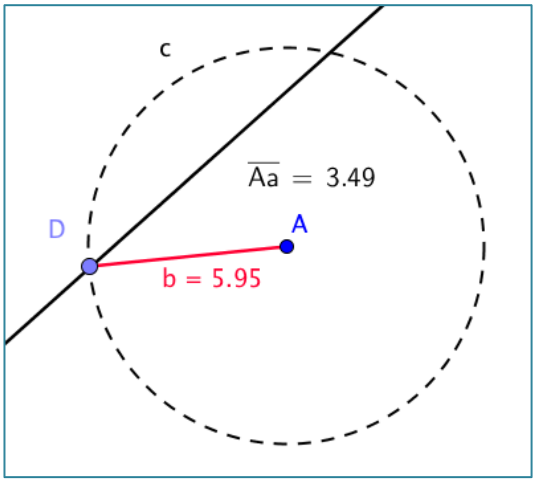



***Figura 4.4.*** Uso de una circunferencia para visualizar la distancia entre un punto y una recta.

### *4.2.3 Resumen de Actividad 4*

> *Dados los puntos* $A(5,6)$ $y$ $B(10,2)$ *encontrar puntos que equidisten de los puntos* $A$ $y$ $B$.

La mayoría de los alumnos colocaron puntos libres sobre el plano y midieron sus distancias a los puntos $A$ $y$ $B$ (medición guiada), luego los arrastraron (arrastre guiado) hasta conseguir que dichas distancias fueran iguales (función cognitiva de contraste). Así, los estudiantes lograron detectar un patrón lineal (función cognitiva de separación) que los condujo a construir una recta que pasaba por cualesquiera dos puntos encontrados (función cognitiva de generalización).

Una estudiante sugirió trazar un triángulo equilátero con lado $AB$ usando circunferencias para trasladar distancias. Dicha estudiante afirmó que únicamente los vértices $C$ $y$ $D$ de los triángulos equiláteros cumplían con la condición del problema (Figura 4.5). Posteriormente, los alumnos descubrieron que cualquier punto sobre el segmento $CD$ equidistaba de $A$ $y$ $B$, pues colocaron un punto móvil sobre dicho segmento y midieron su distancia a los puntos

$A\ y\ B$ (medición para validar), luego arrastraron el punto móvil (arrastre atado) para verificar que las distancias siempre eran iguales (arrastre de prueba). Esto les permitió, con ayuda del profesor, asociar el problema con una familia de triángulos isósceles, lo cual condujo a encontrar triángulos isósceles que tenían su vértice fuera del segmento $CD$. Finalmente los alumnos trazaron la recta $CD$ y verificaron que cumplía con las condiciones del problema (arrastre de prueba y medición para validar). Es importante notar que en un principio los alumnos no identificaron el lugar geométrico como la mediatriz del segmento $AB$.

El profesor sugirió una construcción dinámica usando dos circunferencias de igual radio variable, con centro en los puntos $A\ y\ B$. La mediatriz del segmento AB, es el lugar geométrico de la intersección de las circunferencias variables. Los alumnos lograron argumentar que los puntos de intersección de las circunferencias equidistaban de los puntos $A\ y\ B$ porque sus distancias eran las longitudes de radios iguales.

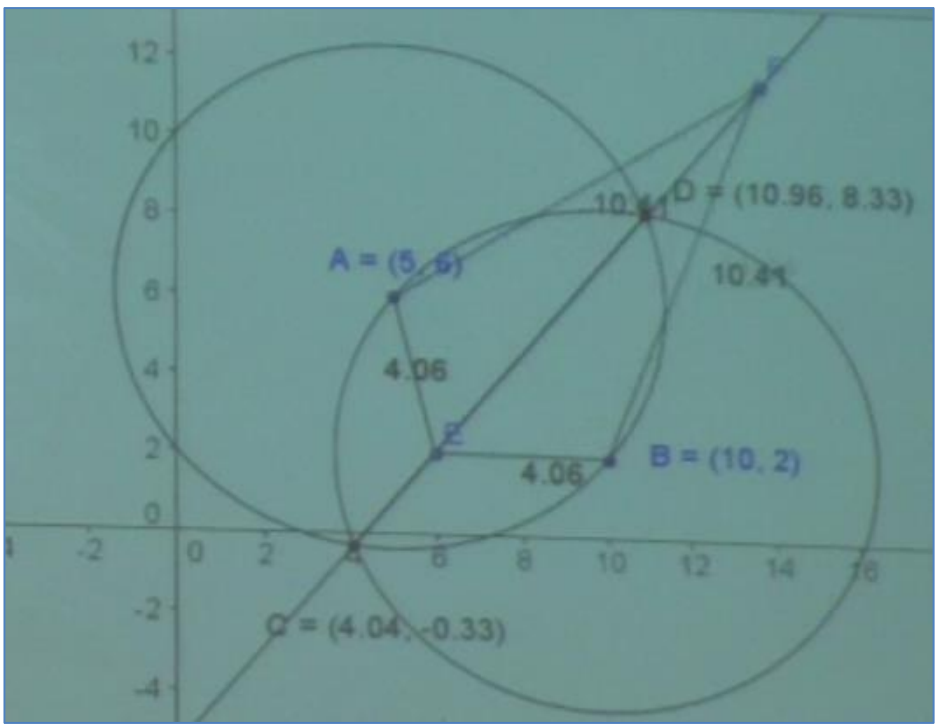



***Figura 4.5.*** El conjunto de punto sobre la recta CD equidistan de los puntos A y B.

## 4.3 Resultados de la fase de evaluación

### *4.3.1 Problema 3*

*Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: a) se conserva siempre a 2 unidades a la izquierda del eje $Y$; b) está siempre 4 unidades arriba del eje $X$; c) está siempre a igual distancia de los ejes $X$ y $Y$ (Lehman, 2001, p.54).*

*Comprensión del problema*

La distancia entre un punto y una recta era un concepto esencial para poder resolver este problema y la principal dificultad en esta etapa fue su representación geométrica. Para resolver el inciso a) algunos alumnos como Itzia, Fernanda y Honorine colocaron un punto $A$ móvil sobre el eje $Y$ y trazaron una circunferencia con centro en el punto $A$ y radio dos unidades (Figura 4.6). Dichas estudiantes afirmaron que la circunferencia era el lugar geométrico buscado. El profesor utilizó la idea de las estudiantes para que todos los estudiantes entendieran el problema (Transcripción 7.13).

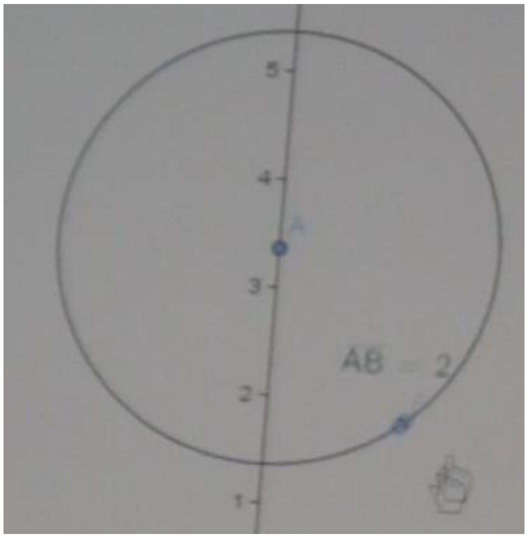



***Figura 4.6.*** Concepción geométrica de distancia de un punto a una recta

*Implementación de un plan de solución*

La propuesta hecha por Itzia, Honorine y Fernanda sirvió como base para la exploración del inciso $a$) del problema. Los alumnos midieron la distancia del punto $B$ (punto sobre la circunferencia) al eje $Y$ y lo movieron para verificar en qué posiciones cumplía con la condición del problema, es decir, utilizaron las heurísticas de arrastre atado, arrastre guiado y medición guiada (función cognitiva de contraste) para explorar el problema. Algunos alumnos como César y Carlos usaron un arrastre formando un patrón, pues colocaron puntos libres en el plano (a excepción del punto $(-2,0)$ que fue introducido mediante la barra de comandos), midieron la distancia de dichos puntos al eje $Y$ y los arrastraron hasta que estuvieran a dos unidades a la izquierda del eje $Y$ (función cognitiva de contraste). En este acercamiento los alumnos trabajan con la heurística de buscar casos particulares partiendo del caso más simple (punto sobre el eje coordenado).

*Búsqueda de patrones y una solución general*

Después de explorar la idea de Itzia, Honorine y Fernanda surgieron varios acercamientos al problema. Por ejemplo, Itzia colocó los puntos $A(-2,0)\ y\ B(-2,8)$ y los fijó para que no se pudieran mover, luego trazó la recta $AB$. David y Honorine colocaron el punto $B(-2,0)$, usando la barra de comandos y trazaron la recta paralela al eje Y por el punto $B$, como se observa en la Figura 4.7.

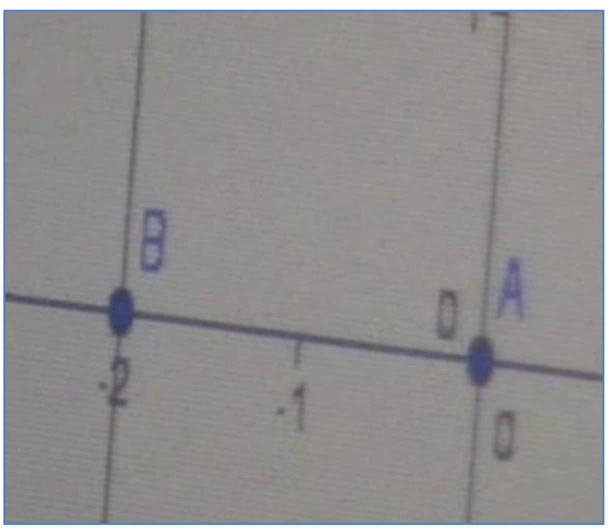



***Figura 4.7.*** Uso de una recta paralela para encontrar el conjunto de puntos que equidistan de una recta.

Tanto Itzia como David y Honorine colocaron un punto móvil sobre la recta encontrada para verificar que la distancia del punto a la recta fuera siempre de dos unidades (arrastre enlazado, arrastre de prueba y medición para validar). Estos alumnos muestran la transición de razonar el problema de forma discreta a razonarlo de forma continua (función cognitiva de generalización), pues utilizan casos particulares (discreto) y el eje cartesiano para trazar una recta (continuo) que resuelve el problema. Las construcciones de David y Honorine relacionan la equidistancia a una recta con el concepto de paralelismo. Todas las construcciones antes mencionadas dependieron de encontrar puntos específicos mediante sus coordenadas.

Ningún estudiante logró resolver el inciso $a$) de forma dinámica, por lo que el profesor decidió usar la idea inicial de Itzia, Honorine y Fernanda para mostrar al grupo una representación dinámica de la solución a dicho inciso (Transcripción 7.14). Como se observa en la Figura 4.8, la construcción está basada en una circunferencia móvil sobre el eje $Y$ de radio constante (dos unidades). Uno de los extremos de su diámetro, determinado por la recta perpendicular al eje $Y$, genera el lugar geométrico buscado a partir del arrastre de la circunferencia.

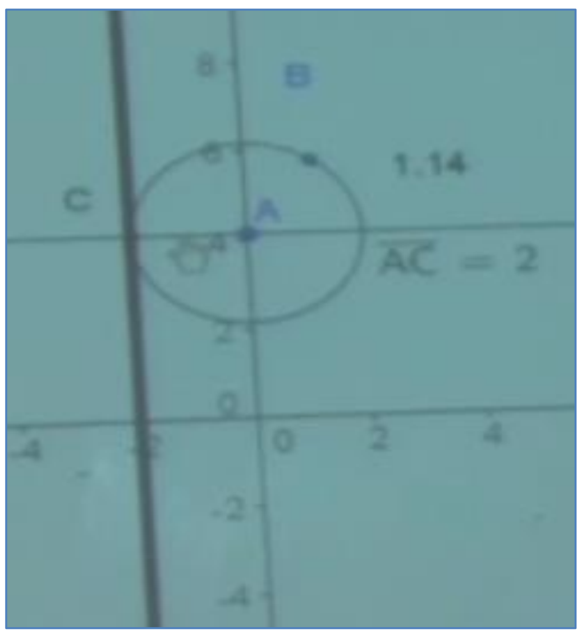



***Figura 4.8.*** Representación dinámica de la solución del inciso a).

El resumen de las construcciones obtenidas para el inciso a) del problema se muestra en la Tabla 4.1. Para el inciso $b$) del problema, los alumnos generaron construcciones similares.

***Tabla 4.1***. Resumen de construcciones para resolver el inciso a) del problema 3.

| **Construcción** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Acercamiento discreto* (puntos libres) César, Carlos, Alan, Miguel | Punto, plano cartesiano, sistema de coordenadas rectangulares, distancia entre recta y punto. | Colocar punto libre en el plano y medir distancia entre punto y recta | Conseguir puntos específicos (por aproximación) que cumplen con la condición del problema. | | Explorar casos particulares y considerar una familia de objetos. Arrastre guiado y medición guiada (Contraste) |
| *Acercamiento continuo* (recta que pasa por dos puntos) Itzia, Carla | Punto, coordenadas rectangulares, plano cartesiano, **recta**. | **Colocar puntos por medio de la barra de comandos, trazar recta que pasa por dos puntos.** | **Colocar puntos específicos exactos que cumplen con la condición del problema La abscisa de los puntos sobre la recta solución es $-2$** | | Explorar casos particulares, **generalizar el resultado, Búsqueda de simetría y validar resultado. Arrastre atado, arrastre de prueba y medición para validar** (Generalización) |
| *Acercamiento continuo* (recta perpendicular) David, Honorine, Karen Fig. 4.23 | Punto, coordenadas rectangulares, plano cartesiano, **recta perpendicular** | Colocar puntos por medio de la barra de comandos, **trazar recta perpendicular**. | Colocar puntos específicos exactos que cumplen con la condición del problema, **asociar equidistancia de rectas con paralelismo**, **aprovechar las características geométricas de los ejes.** | | Explorar casos particulares, generalizar el resultado, Búsqueda de simetría y validar resultado. Arrastre atado, arrastre de prueba y medición para validar (Generalización)) |
| *Acercamiento dinámico* (uso de una circunferencia) Profesor Fig. 4.24 | Punto, recta perpendicular, **circunferencia, punto de intersección** | **Trazar circunferencia con radio constante,** trazar recta perpendicular, **localizar punto de intersección** | **Colocar un punto móvil sobre el eje Y, trazar una circunferencia móvil,** aprovechar las características geométricas de los ejes coordenados. | **Usar una circunferencia para trasladar una distancia a todo el plano** | Generalizar el resultado, **buscar distinta formas de resolver el problema.** Arrastre atado, **movimiento dependiente, rastro.** (Fusión) |

El inciso $c$) del problema se resolvió en una sesión posterior a la sesión donde se resolvieron los incisos $a$) $y$ $b$). Carlos y César usaron un arrastre guiado y una medición guiada para encontrar varios puntos que cumplían con la condición (función cognitiva de contraste) y trazaron una recta por cualesquiera dos puntos encontrados (función cognitiva de generalización). El arrastre guiado permitió a Carlos y César visualizar un posible lugar geométrico y transformarlo en la solución del problema, sin embargo, su construcción dependía de dos puntos libres específicos y al mover dichos puntos la construcción ya no conservaba la relación matemática deseada.

Miguel, propuso trazar la "mediatriz de un ángulo", pues argumenta que la solución a este inciso tendría que ser una recta a 45°. Su idea era dividir, con una recta, el ángulo formado por los ejes coordenados en dos partes iguales. Su construcción dependía de los puntos específicos $A(0,0)$, $B(0,4) y\ C(4,0)$ y el triángulo rectángulo isósceles $ABC$; la solución es la recta perpendicular a la hipotenusa $BC$ que pasa por el punto $A(0,0)$ (Figura 4.9). La construcción de Miguel depende de dos puntos específicos, uno sobre el eje $X$ y otro sobre el eje $Y$, es decir, no conserva las condiciones del problema si se mueve cualquiera de dichos puntos. La solución se encontró únicamente cuando la ordenada del punto $B$ era igual a la abscisa del punto $C$ (función cognitiva de separación). Esta característica relacionada con una familia de triángulos rectángulos isósceles fue discutida por todo el grupo (Transcripción 7.15).

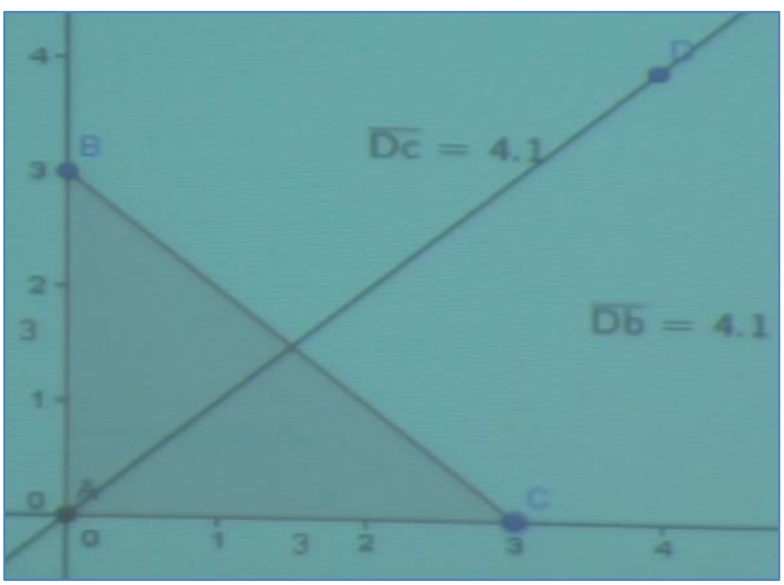


***Figura 4.9.*** Solución del inciso $c$) con una recta a 45°.

Inicialmente, Carla asoció la relación matemática del problema con los vértices de un cuadrado y propuso varios puntos con coordenadas enteras e iguales. Posteriormente, resolvió el problema construyendo un cuadrado específico y trazando una de sus diagonales (Figura 4.10). La construcción de Carla dependía de tres puntos móviles ($C(4,0), B(4,0)\ y\ D(4,4)$ colocados específicamente por medio de sus coordenadas) y no conservaba la relación matemática deseada si se movía cualquiera de ellos. Fernanda, Itzia y Honorine resolvieron el problema de forma similar.

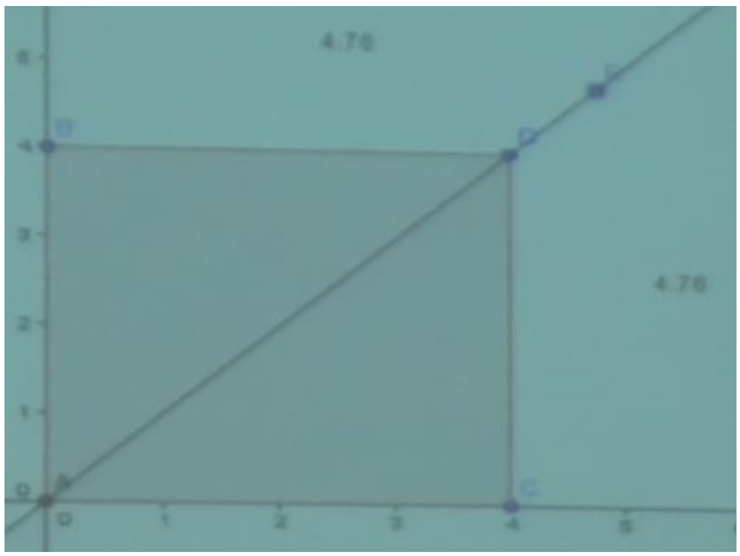


***Figura 4.10.*** Solución del inciso $c$) usando un cuadrado.

La construcción de configuraciones robustas, que dependan del movimiento de un solo punto y que conserven las relaciones matemáticas del problema es una competencia relevante en la construcción de configuraciones dinámicas. En este sentido, que los alumnos logren adquirir esta competencia no es sencillo. Por ejemplo, Carla logró transformar el punto $D$ móvil en un punto que dependía del movimiento de los puntos $B\ y\ C$ (mediante el trazo de rectas paralelas a los ejes coordenados por dichos puntos). Sin embargo, ni Miguel ni Carla lograron robustecer sus construcciones para generar una familia de triángulos isósceles o una familia de cuadrados en función del movimiento de un solo punto, por lo que sus construcciones no corresponden a una función cognitiva de fusión.

A diferencia de las construcciones anteriores, David consiguió una construcción robusta y dinámica, pues construyó una familia de cuadrados con centro en el origen apoyándose de una circunferencia de radio variable (a partir de un punto móvil $B$ sobre el eje $X$) (Figura 4.11). David encuentra la intersección de la circunferencia con los ejes coordenados por donde traza rectas perpendiculares a los ejes. La intersección de dichas rectas perpendiculares son los vértices de un cuadrado que describen el lugar geométrico buscado en función del arrastre del punto móvil $B$ sobre el eje $X$.

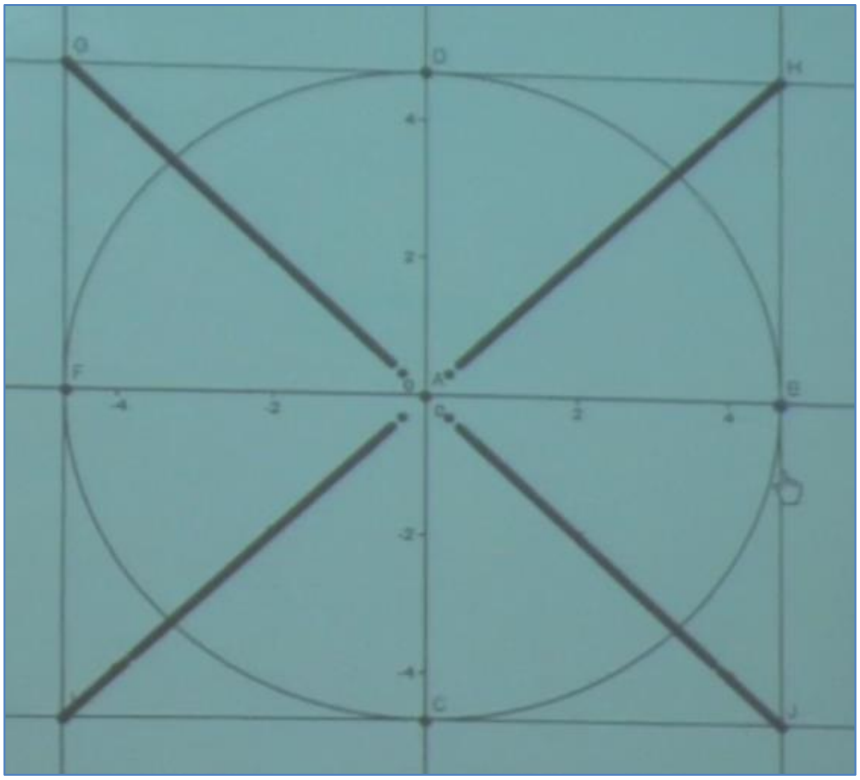


***Figura 4.11.*** Solución dinámica del inciso $c$).

Además de ser robusta, pues conserva sus propiedades ante el movimiento, esta construcción considera el lugar geométrico en el segundo y cuarto cuadrantes, es decir, la recta $y = -x$. Las heurísticas particulares usadas son el arrastre atado (movimiento controlado), movimiento dependiente y rastro de objetos. David se fija en el movimiento de cuatro puntos en función del movimiento de un objeto (función cognitiva de fusión). Además, se observa el uso de dos competencias relevantes; la primera, es el uso de una circunferencia para trasladar una distancia; la segunda, la relación entre distancia de un punto a una recta y perpendicularidad. En la Tabla 4.2 se muestra el resumen de las construcciones obtenidas por los alumnos para el inciso c) del problema.

***Tabla 4.2.*** Resumen de construcciones usadas para resolver el inciso c) del problema 3.

| **Construcción** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Acercamiento continuo* (usando puntos libres) Carla, César, Carlos, | Punto, plano cartesiano, distancia entre punto y recta, recta. | Colocar punto libre en el plano, medir distancia de punto a recta. | Conseguir puntos específicos (por aproximación) que cumplen con la condición del problema. | Trazar la recta que pasa por dos puntos que cumplen con la condición del problema (razonamiento continuo) | Explorar casos particulares, generalizar el resultado. Arrastre guiado y medición guiada (Contraste) |
| *Acercamiento continuo* (usando triángulo libre y mediatriz) Miguel Fig. 4.27 | Punto, plano cartesiano, distancia entre punto y recta, **mediatriz, bisectriz, segmento, triángulo rectángulo isósceles, ángulo,** recta**.** | **Colocar puntos por medio de la barra de comandos, trazar recta perpendicular, trazar triángulo rectángulo isósceles.** | **Colocar punto sobre una recta, método intuitivo para trazar bisectriz, aprovechar las características geométricas del plano cartesiano.** | **Usar las características geométricas del plano cartesiano para trazar una recta a 45°.** | **Búsqueda de simetría,** generalizar el resultado, verificar el resultado, **Arrastre atado, arrastre de prueba y medición para validar** (Separación) |
| *Acercamiento continuo* (usando cuadrado libre) Carla, Fernanda, Itzia, Honorine. Fig. 4.28 | Punto, coordenadas rectangulares, plano cartesiano, distancia entre punto y recta, **cuadrado**, recta. | Colocar puntos por medio de la barra de comandos, **trazar un cuadrado como polígono, trazar una recta que pasa por dos puntos.** | **Colocar puntos específicos exactos que cumplen con la condición del problema. Asociar el problema con un cuadrado**, aprovechar las características geométricas del plano cartesiano, | **Asociar los lados iguales y perpendiculares de un cuadrado con las condiciones del problema.** | Explorar casos particulares, generalizar el resultado, verificar el resultado, búsqueda de simetría, Arrastre atado, arrastre de prueba y medición para validar (Separación) |
| *Acercamiento dinámico* (cuadrado dinámico) David Fig. 4.29 | Punto, distancia entre punto y recta, recta, recta perpendicular, **circunferencia, radio**, plano cartesiano, **punto de intersección**. | **Localizar punto de intersección,** trazar rectas perpendiculares. | **Trazar una circunferencia de radio variable,** aprovechar las características geométricas del plano cartesiano, **usar circunferencia para construir un cuadrado.** | **Usar circunferencia para trasladar distancias,** asociar las condiciones del problema con un cuadrado, **considerar el lugar geométrico en todos los cuadrantes.** | Explorar casos particulares, considerar una familia de casos, generalizar el resultado. Arrastre atado, **movimiento dependiente, variación dependiente, activar rastro de objetos móviles** (Fusión) |

*Conexiones y extensiones*

***Extensión 1***. *Encontrar el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al eje $X$ sea el doble de su distancia al eje $Y$.*

¿Cómo se puede utilizar la construcción propuesta por David para resolver problemas que involucren otra proporción entre las distancias del punto a los ejes coordenados? Algunos alumnos (César, Miguel y David) inmediatamente dijeron que debería estar involucrado un rectángulo. Miguel construyó un rectángulo estático con los vértices $A(0,0), B(4,0), C(0,2)$ y $D(4,2)$, donde $D$ es el punto de intersección de dos rectas perpendiculares a los ejes coordenados por los puntos $B\ y\ C$ (Figura 4.12). Miguel afirmó que la recta AD solucionaba el problema.

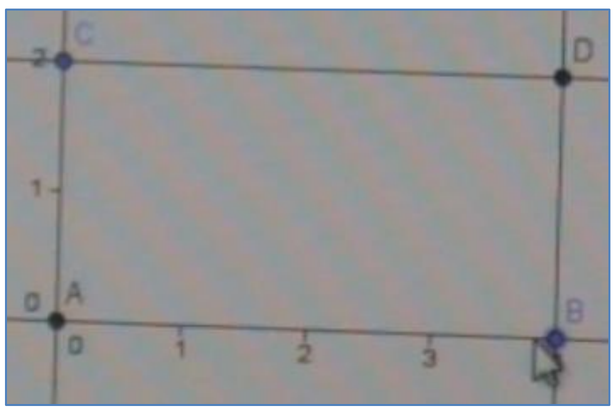



***Figura 4.12.*** La recta AD es el lugar geométrico de todos los puntos tales que su distancia al eje X es el doble de su distancia el eje Y (Miguel).

César usa la circunferencia propuesta por David y traza la mediatriz del radio sobre el eje $Y$ para generar el vértice $F$ de un rectángulo, como se observa en la Figura 4.13. En esta construcción se resalta el uso de la mediatriz para obtener una proporción y el considerar la construcción dinámica de un problema similar. Miguel y César usan el concepto de proporcionalidad, sin embargo, una dificultad común es la confusión entre una proporción y la proporción contraria. En este sentido, la intervención del profesor fue determinante para que los estudiantes corrigieran sus construcciones. César logró corregir su construcción trazando la mediatriz del radio sobre eje $X$ y repitiendo su procedimiento anterior.

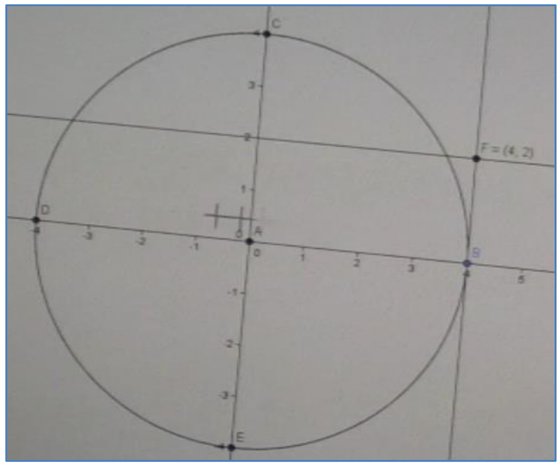



***Figura 4.13.*** Acercamiento usando mediatriz (César).

De manera similar a César, David resolvió el problema dinámicamente, pero trazando la mediatriz como recta perpendicular por el punto medio del radio sobre el eje $X$, es decir, no utilizó el comando "Mediatriz" como César (Figura 4.14). Las construcciones de César y David únicamente visualizan la variación de un punto a partir del arrastre de otro punto (función cognitiva de generalización) y no consideran el lugar geométrico en el segundo y cuarto cuadrantes.

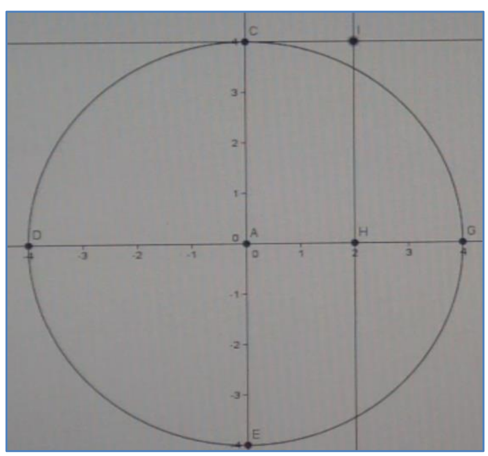



***Figura 4.14.*** Acercamiento usando punto medio y recta perpendicular (David).

Karen resuelve el problema utilizando un punto móvil sobre el eje $Y$ y una circunferencia con radio variable y dependiente (en función de la longitud de un segmento), como se observa en la Figura 4.15. La construcción de Karen es la siguiente:

- Localiza el punto $A(0,0)$ y el punto $B$ móvil sobre el eje $Y$.

- Mide la longitud del segmento $AB$.
- Traza una circunferencia con centro en el origen y radio "$AB/2$", es decir, el radio de dicha circunferencia es siempre la mitad de la longitud del segmento $AB$.
- Localiza los puntos $C\ y\ D$ de intersección de la circunferencia con el eje X.
- Traza las rectas paralelas a los ejes coordenados por los puntos $C, D\ y\ B$.
- Localiza los puntos $E\ y\ F$ de intersección entre las rectas paralelas a los ejes.
- Activa el rastro de los puntos $E\ y\ F$.

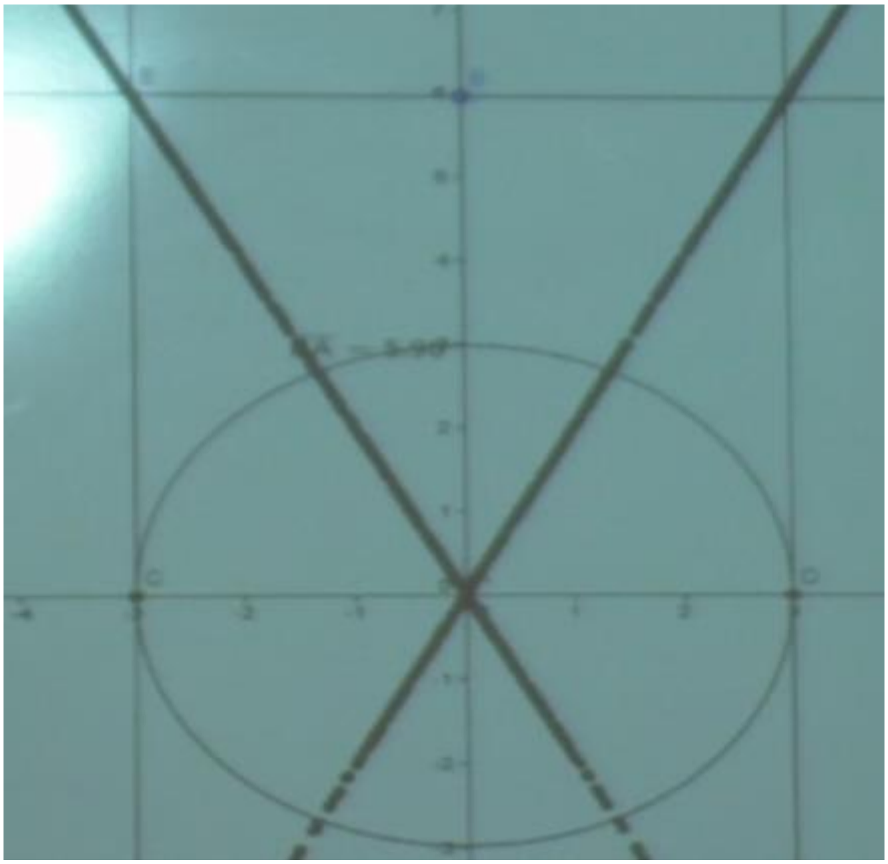


***Figura 4.15*** Acercamiento usando una circunferencia con radio en función de la longitud de un segmento.

En la construcción de Karen se observa el uso de una circunferencia con radio dependiente como heurística para representar dinámicamente una condición de proporcionalidad. El arrastre enlazado y el considerar la variación, en el mismo instante, de más de un objeto representan una función cognitiva de fusión, además, obtiene el lugar geométrico en el segundo y cuarto cuadrantes. Las construcciones de David, César y Karen son robustas, pues la condición del problema se conserva ante el arrastre.

Itzia utilizó la construcción para resolver el inciso c) propuesta por David y consideró los cuadrados formados en cada cuadrante para trazar los puntos medios de cada lado, además, traza cuatro circunferencias (que no eran necesarias) con diámetros determinados por los puntos medios (Figura 4.16).

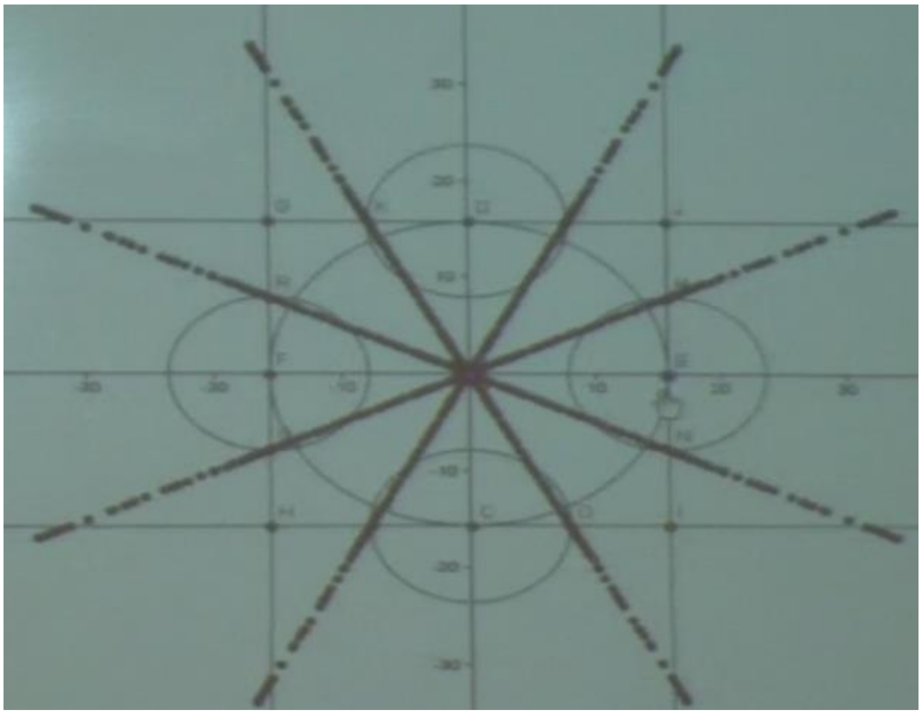


***Figura 4.16.*** Representación dinámica de dos condiciones de proporcionalidad usando puntos medios.

Con esta modificación Itzia resuelve el problema planteado y el contrario, es decir, también resuelve el problema del punto que se mueve tal que su distancia al eje $Y$ es el doble que su distancia al eje $X$. Claramente Itzia ejecuta una función cognitiva de fusión, pues contempla la variación de ocho objetos en un mismo instante y relaciona adecuadamente cada representación dinámica con su respectiva condición de proporcionalidad. Esta construcción sirvió como punto de partida para una discusión grupal sobre la diferencia entre cada relación matemática y su representación dinámica (Transcripción 7.16). En la tabla 4.3 se muestra el resumen de las construcciones usadas para resolver la primera extensión del Problema 3.

***Tabla 4.3.*** Resumen de construcciones usadas para resolver la primera extensión del problema.

| **Construcción** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Acercamiento continuo* (usando rectángulo libre) Miguel Fig. 4.30 | Punto, distancia entre punto y recta, recta, rectángulo, recta, plano cartesiano. | Localizar puntos usando la barra de comandos, trazar recta que pasa por dos puntos, trazar rectángulo como polígono. | Aprovechar las características geométricas del plano cartesiano, colocar puntos que cumplen con la condición del problema exactamente (vértice del rectángulo) | Asociar las condiciones del problema con un rectángulo de lados proporcionales. | Explorar casos particulares, considerar una familia de casos, generalizar el resultado, búsqueda de proporcionalidad. Arrastre atado, arrastre de prueba y medición para validar. (Separación) |
| *Acercamiento dinámico (usando mediatriz)* David, César Fig. 4.32 | Punto, distancia entre punto y recta, **recta perpendicular**, punto medio, **circunferencia**, plano cartesiano, **punto de intersección, mediatriz, radio,** rectángulo. | **Localizar punto de intersección y punto medio trazar rectas perpendiculares, trazar mediatriz de un segmento.** | **Trazar una circunferencia de radio variable,** aprovechar las características geométricas del plano cartesiano, **usar circunferencia para construir un rectángulo.** | **Usar una circunferencia para trasladar distancia,** asociar el problema con un rectángulo proporcional, **usar la mediatriz para obtener una proporción 1:2.** | Explorar casos particulares, considerar una familia de casos, generalizar el resultado, **usar problemas similares.** Arrastre atado, **movimiento dependiente, activar rastro de objetos móviles**. (Generalización) |
| *Acercamiento dinámico* (usando relación dependiente) Karen Fig. 4.33 | Punto, distancia entre punto y recta, recta, recta perpendicular, circunferencia, plano cartesiano, punto de intersección, radio, rectángulo. | Localizar punto de intersección, trazar rectas perpendiculares | **Colocar punto móvil sobre eje *Y***, aprovechar las características geométricas del plano cartesiano, usar circunferencia para construir un rectángulo. | **Trazar una circunferencia de radio variable en proporción 2:1 con la longitud variable de un segmento, considerar el lugar geométrico en todos los cuadrantes.** | Explorar casos particulares, considerar una familia de casos, generalizar el resultado. Arrastre atado, movimiento dependiente, **variación dependiente** activar rastro de objetos móviles (Fusión) |
| *Acercamiento dinámico* (usando punto medio) Itzia Fig. 4.34 | Punto, punto medio, distancia entre punto y recta, recta, recta perpendicular, circunferencia, radio, plano cartesiano, punto de intersección. | Localizar punto de intersección, trazar rectas perpendiculares, localizar punto medio de segmento. | Trazar una circunferencia de radio variable, aprovechar las características geométricas del plano cartesiano, usar circunferencia para construir un cuadrado. | Usar una circunferencia para trasladar una distancia a todo el plano, usar punto medio obtener una proporción 2:1, considerar el lugar geométrico en todos los cuadrantes. | Explorar casos particulares, considerar una familia de casos, generalizar el resultado, **usar problemas similares, extender el resultado.** Arrastre atado, movimiento dependiente, activar rastro de objetos móviles (Fusión) |

¿Cómo podría resolverse un problema en el cual la relación entre las distancias del punto a los ejes ya no es una proporción directa? El profesor planteó el siguiente problema:

> ***Extensión 2.*** *Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje $Y$ disminuida en 3 es siempre igual al doble de su distancia al eje $X$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica (Lehman, 2001).*

Por un lado, resolver este problema de forma dinámica apoyándose de los problemas anteriores no era simple, pues el problema ya no involucraba una variación directamente proporcional. Por otro lado, resolver el problema algebraicamente tampoco es simple, pues la distancia siempre es positiva lo que involucra el concepto de valor absoluto, así, la solución es $|x| - 3 = 2|y|$ siempre que $|x| - 3 \geq 0$. La ecuación anterior (considerando el dominio) representa cuatro semirrectas (Figura 4.17).

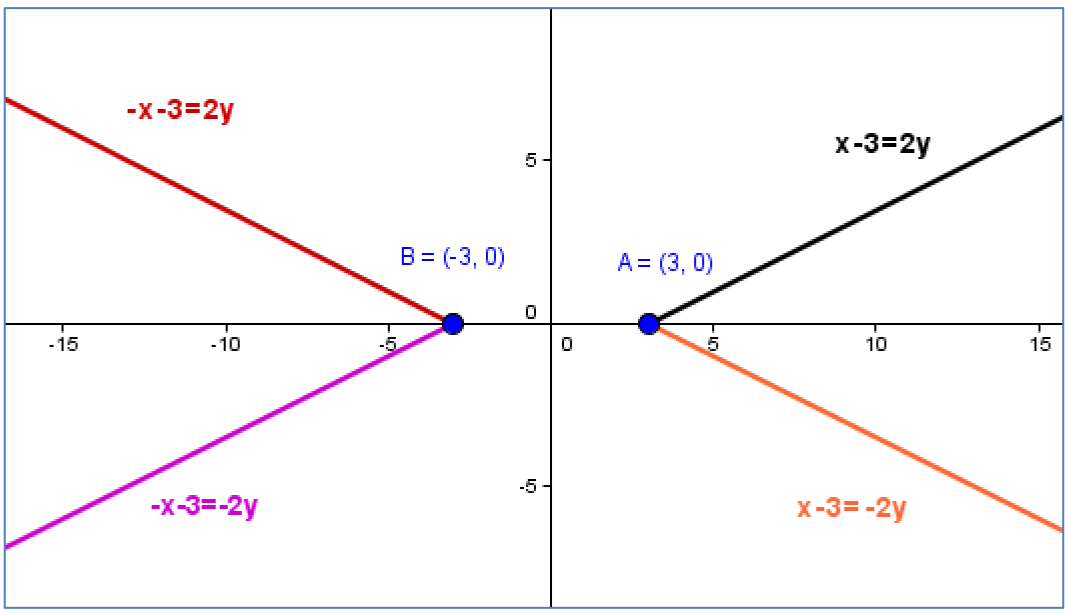



***Figura 4.17.*** Solución de la segunda extensión del problema.

Los alumnos decidieron abordar el problema algebraicamente y propusieron varias ecuaciones al profesor, las cuales estaban guiadas por simples interpretaciones de palabras claves en el enunciado del problema. Por ejemplo, Karen sugirió que la ecuación que describía el lugar geométrico era $y - 3 = 2x$, luego, Alexandra propuso la ecuación $2y - 3 = x$ (Figura 4.18). Aunque la ecuación propuesta por Alexandra era correcta no era claro que proviniera de un razonamiento correcto. Karen interpretó y relacionó directamente la distancia al eje $X$ con la variable $x$ y la distancia al eje $Y$ con la variable $y$, aun cuando había manejado adecuadamente la representación geométrica de la distancia de un punto a los ejes coordenados; esto demuestra que manejar el mismo concepto en representaciones diferentes puede no ser inmediato.

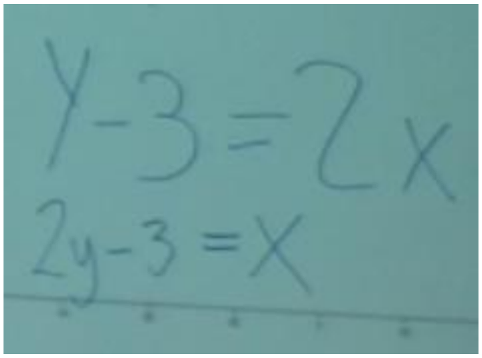



***Figura 4.18.*** Propuestas de ecuación para lugar geométrico del problema.

El AGD sirvió a los alumnos para comprobar si la ecuación correspondía o no al lugar geométrico buscado; Karla graficó la recta $y - 3 = 2x$, colocó un punto móvil sobre ella y midió las distancias del punto a los ejes (arrastre enlazado y medición para validar). Entre todo el grupo se verificó que el punto $(-4.98, -6.95)$ sobre la recta no cumplía con las condiciones del problema apoyándose de información numérica obtenida con el comando "Distancia entre dos Objetos" (Figura 4.19).

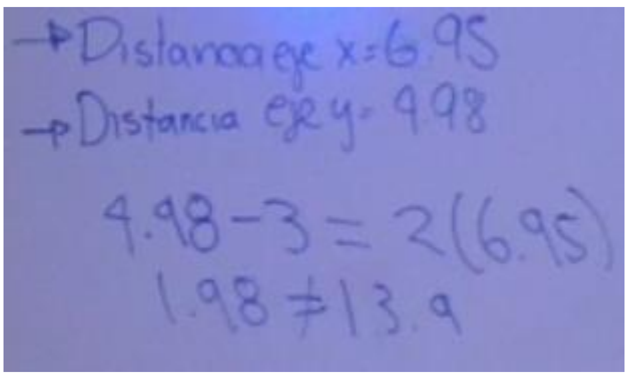



***Figura 4.19.*** Uso de información empírica, ofrecida por el AGD, para refutar conjetura.

De forma similar, los alumnos comprobaron si la recta $2y - 3 = x$ cumplía con las condiciones del problema. Una observación importante es que los alumnos no identificaron inmediatamente la relación entre la distancia del punto a los ejes y sus coordenadas, es decir, se les dificultó reconocer que el valor absoluto de la abscisa de un punto corresponde a su distancia al eje $Y$ y que el valor absoluto de su ordenada corresponde a su distancia al eje $X$. Otra dificultad fue reconocer el dominio correspondiente a la recta, pues la recta $2y - 3 = x$ en efecto era solución del problema, pero para valores de $x$ menores que $-3$; los alumnos concluyeron que la ecuación no era solución al problema pues se seleccionó un punto sobre la recta en el primer cuadrante. Lo anterior muestra que el uso de un AGD sin los recursos necesarios puede conducir a los estudiantes a probar o refutar conjeturas incorrectamente, por lo tanto el papel del profesor en estos casos es determinante. Finalmente, por ensayo y error los estudiantes encontraron que la recta $x - 3 = 2y$ cumplía con las condiciones del problema y verificaron su solución usando un punto sobre ella en el primer cuadrante. En este momento los estudiantes se detuvieron y afirmaron que el problema estaba resuelto.

¿Qué modificaciones serán necesarias para transformar la construcción de Itzia en la solución dinámica de esta extensión del problema? El profesor planteó esta pregunta a los estudiantes y el objetivo fue resolver el problema dinámicamente usando la construcción de Itzia. El profesor activó el rastro de los puntos medios de cada lado, perpendicular al eje $X$, de los cuadrados, es decir, los puntos tales que su distancia al eje $Y$ eran el doble que su distancia al eje $X$ (uno de esos puntos era el punto T, Figura 4.20) y señaló a los alumnos la similitud de ese problema con la extensión planteada.

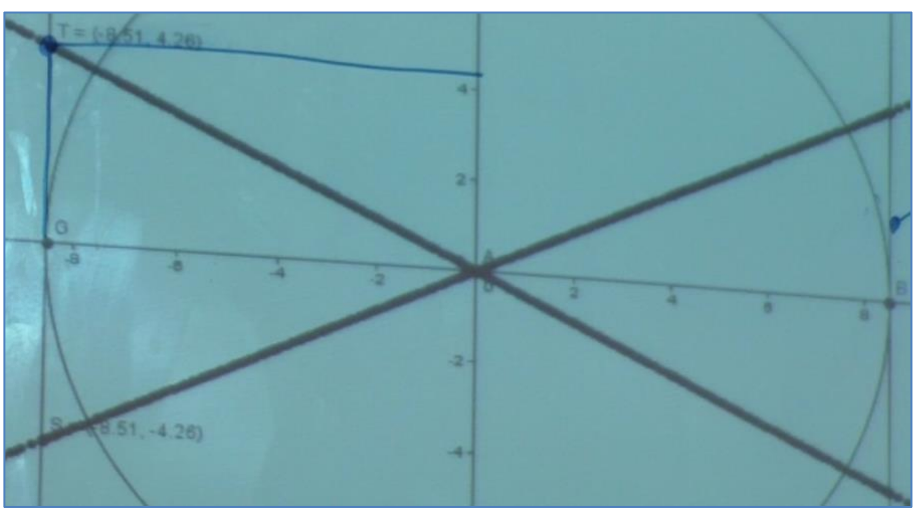


***Figura 4.20.*** Lugar geométrico de todos los puntos tales que su distancia al eje $Y$ es el doble de su distancia al eje $X$.

Alexandra sugirió trazar una circunferencia de radio tres unidades con centro en el punto T (Figura 4.20), es decir, con centro en el punto que esta al doble de distancia del eje Y que del eje X (Transcripción 7.17). La traducción de un enunciado en términos matemáticos es una habilidad matemática relevante y una dificultad común es la traducción automática de palabras clave como “disminuida” en operaciones de sustracción; en este sentido, Alexandra argumenta que la solución es el lugar geométrico generado por el punto *U* localizado a tres unidades a la derecha del punto *T* (Figura 4.21). Esta dificultad se superó verificando que el punto *U* no cumplía con las condiciones del problema. Finalmente, los alumnos comprobaron que el punto que solucionaba el problema era el otro extremo *V* del diámetro de la circunferencia (Figura 4.22) y construyeron la representación dinámica de la solución del problema repitiendo el procedimiento para los demás puntos medios.

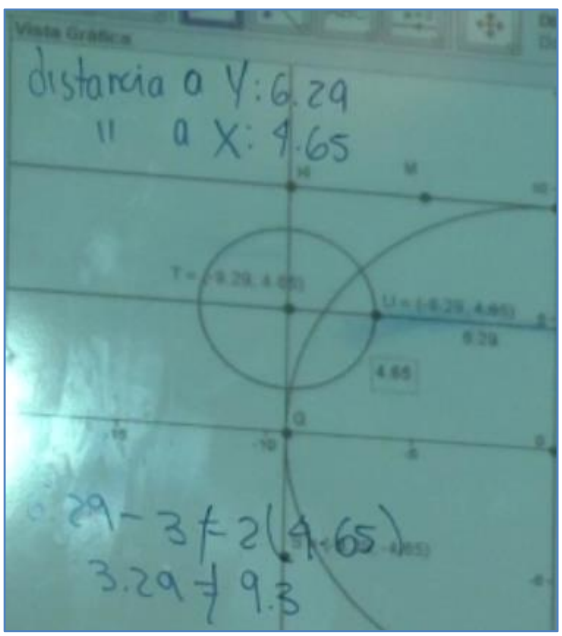



***Figura 4.21.*** El punto U no cumple con las condiciones del problema.

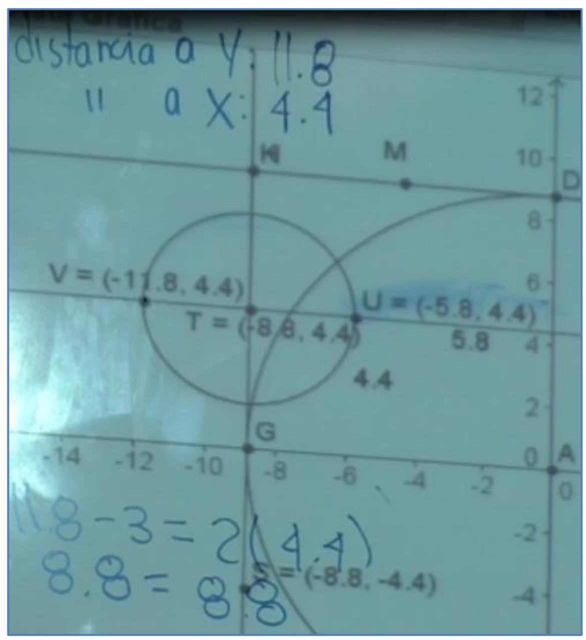



***Figura 4.22.*** El punto V cumple con las condiciones del problema

La construcción final no consideraba el dominio de las rectas solución (cuestión que abordó el profesor en el salón de clases), sin embargo, un avance significativo fue que los estudiantes pudieron visualizar que la solución del problema eran cuatro rectas y no solo una (Figura 4.23), como se había encontrado algebraicamente. En esta etapa, el AGD fue determinante, pues sirvió como un medio de validación empírica para relaciones matemáticas, además, encontrar la representación algebraica de dichas soluciones estuvo soportado por un bagaje empírico (visual y numérico). En la Tabla 4.4 se muestra el resumen de los acercamientos implementados por los estudiantes para resolver la segunda extensión del problema.

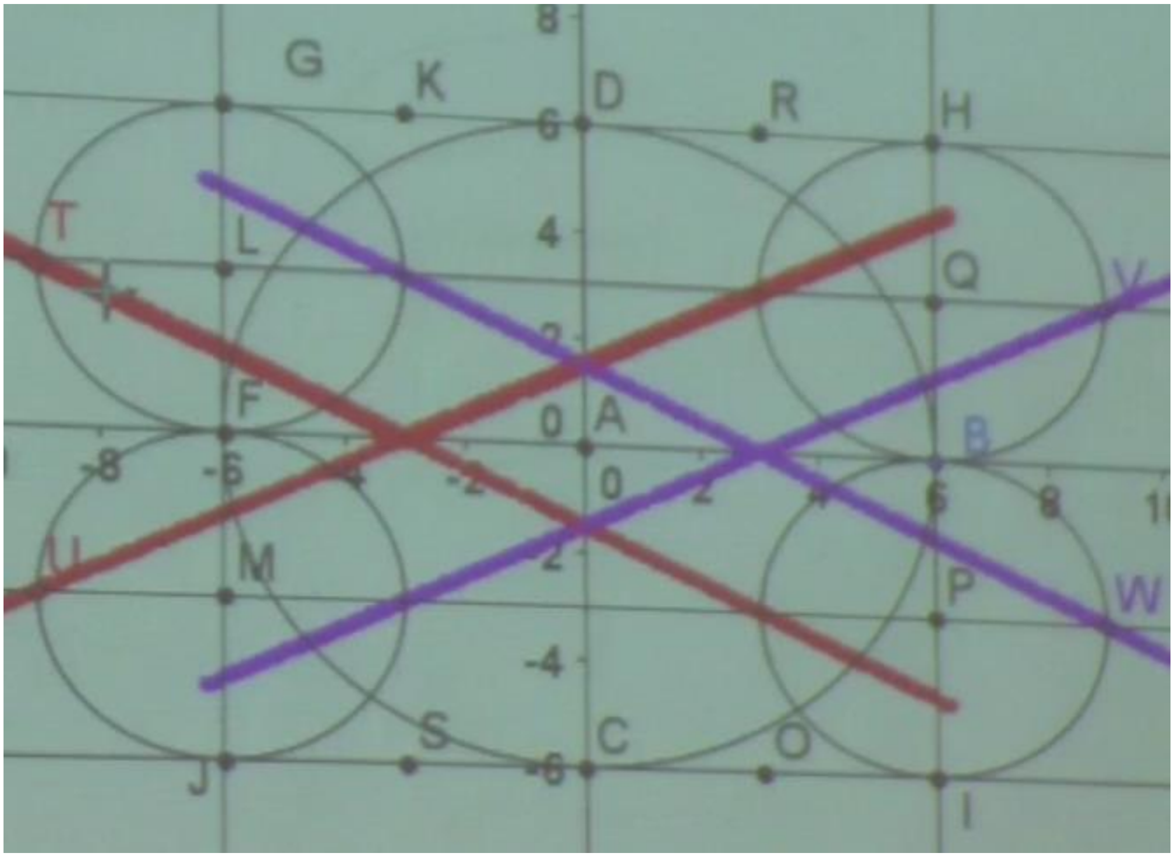



***Figura 4.23.*** Representación dinámica de la solución del problema (sin restricciones sobre el dominio).

***Tabla 4.4.*** Resumen de los acercamientos a la solución de la segunda extensión del problema.

| **Acercamiento** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Acercamiento algebraico* Grupo Figs. 4.36 y 4.37 | Plano cartesiano, coordenadas rectangulares, punto, distancia entre punto y recta, ecuación, variable. | Trazar un lugar geométrico introduciendo su ecuación en la barra de comandos | Expresar una relación geométrica en términos de una ecuación.<br>Usar el software dinámico para probar si una ecuación corresponde a un lugar geométrico con ciertas propiedades. | Suponer que un punto $P(x, y)$ cumple con las condiciones del problema. | Generalizar el problema, suponer el problema resuelto, verificar el resultado.<br>Arrastre enlazado, arrastre de prueba y medición para validar (Contraste) |
| *Acercamiento dinámico* (usando circunferencia de radio constante) Alexandra 4.42 | Punto, distancia entre punto y recta, recta, recta perpendicular, circunferencia, radio, plano cartesiano, punto de intersección. | Localizar punto de intersección, trazar rectas perpendiculares, trazar circunferencia con radio constante. | Trazar una circunferencia de radio variable, aprovechar las características geométricas del plano cartesiano, usar circunferencia para construir un cuadrado. | Usar una circunferencia para trasladar una distancia a todo el plano, considerar el lugar geométrico en el segundo y cuarto cuadrante, usar una circunferencia de radio constante para representar geométricamente una transformación aditiva de distancias. | Explorar casos particulares, considerar una familia de casos, generalizar el resultado.<br>Arrastre atado, movimiento dependiente, variación dependiente, activar rastro de objetos móviles (Fusión) |

### *4.3.2 Resultados del Problema 4*

*Un punto se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual a su distancia del punto* $A(4{,}0)$*. Hallar la ecuación de su lugar geométrico (Lehman, 2001, p.52).*

*Entendimiento del problema*

Las dificultades, relacionadas con el entendimiento del problema, estuvieron asociadas con la interpretación geométrica de las relaciones matemáticas involucradas. Alexandra trazó una recta perpendicular al eje $X$ por el punto $A(4{,}0)$ y mencionó que dicha recta resolvía el problema, es decir, encontró el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan cuatro unidades a la derecha del eje $Y$. La mayoría de los estudiantes exploraron casos particulares que cumplían con las condiciones del problema

*Implementación de un plan de solución*

Fernanda, Alexandra e Itzia usaron circunferencias de radio cuatro para encontrar dos puntos que cumplían con la condición del problema (Figuras 4.24 y 4.25).

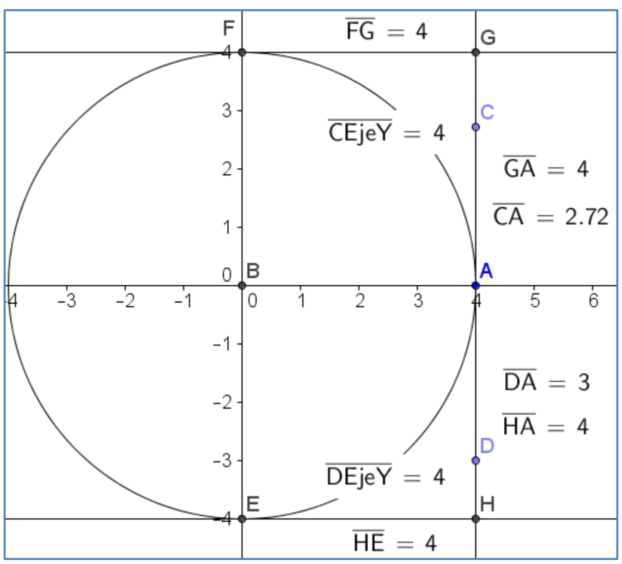



***Figura 4.24.*** Acercamiento discreto de Fernanda e Itzia.

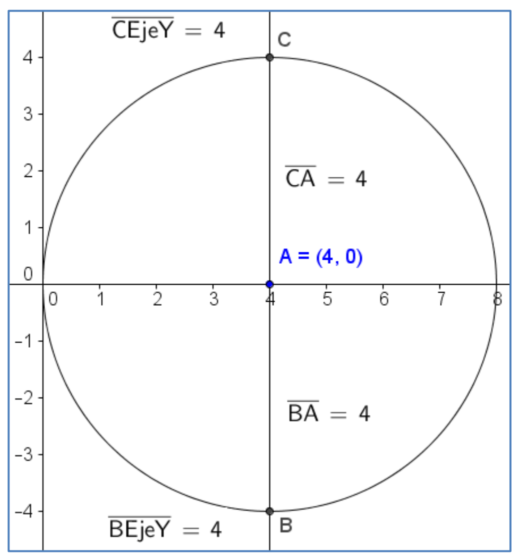



***Figura 4.25.*** Acercamiento discreto de Alexandra.

Diego trazó circunferencias con centro en el origen para colocar puntos móviles sobre ellas (arrastre atado), luego, midió las distancias de los puntos al eje $Y$ y al punto $A$

(medición guiada) para arrastrar los puntos móviles (arrastre guiado) hasta que cumplieran con la condición del problema (Figura 4.26). Diego, notó que para cada circunferencia trazada existía un punto que cumplía la relación buscada, lo cual es evidencia de un puente entre razonar el problema de forma discreta a razonarlo de forma continua. Esta construcción le permitió a diego descartar a la recta como solución (Transcripción 7.18), pues trazó la recta por dos puntos encontrados y se dio cuenta que no pasaba por los demás puntos. Además, colocó un punto $P$ móvil sobre dicha recta (arrastre enlazado)  y verificó que las distancias de dicho punto al eje $Y$ y al punto $A$ no eran iguales (arrastre de prueba y medición para validar).

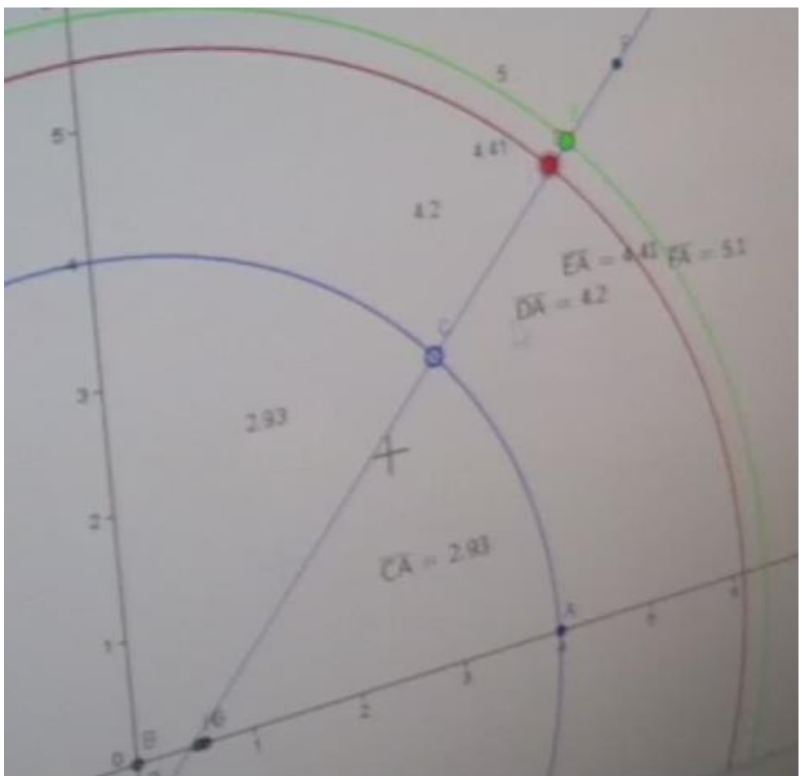



***Figura 4.26.*** Acercamiento discreto de Diego.

César colocó los puntos $A(4,0), B(0,4)\ y\ C(0,0)$ dando clic sobre los ejes coordenados y trazó el triángulo $ABC$. Luego, localizó el punto medio $D$ de su hipotenusa $AB$, trazó la recta $CD$ y colocó un punto $E$ sobre dicha recta (arrastre atado), como se observa en la Figura 4.27. Finalmente, midió la distancia del punto $E$ al eje Y y al punto $A$ (medición guiada) para arrastrar el punto $E$ (arrastre guiado) hasta que cumpliera con la condición del problema (función cognitiva de contraste). Cesar traza la mediatriz del segmento $AB$, sin embargo, su construcción funciona únicamente para triángulos $ABC$ isósceles.

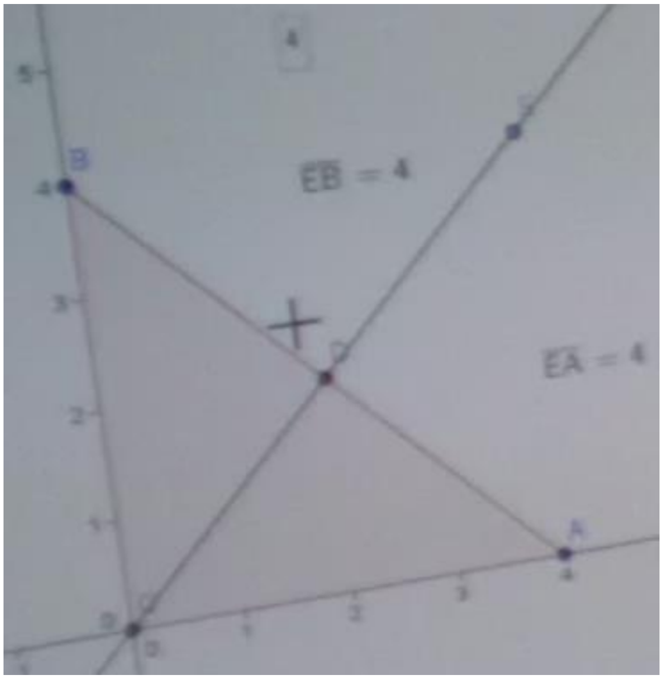



***Figura 4.27.*** Acercamiento de César usando, de manera intuitiva, mediatriz.

Carlos, David y Miguel colocaron, mediante la barra de comandos, los puntos $A(4,0)\ y\ B(0,4)$ por los cuales trazaron rectas perpendiculares a los ejes coordenados y localizaron el punto $C$ de intersección entre dichas rectas para trazar el triángulo $ABC$. Posteriormente Carlos y David trazaron la recta perpendicular al segmento $AB$ por su punto medio (mediatriz), como se observa en la Figura 4.28. Miguel (quién no estaba cerca de Carlos y David) trazó la mediatriz del segmento $AB$ directamente con el comando, pues relaciona la condición de igualdad de distancias con el concepto de mediatriz. Aunque Carlos, David y Miguel, tenían los conceptos esenciales para resolver el problema, la generalización (enlazar el punto $B$ al eje Y) a partir de un caso particular (vértice del cuadrado) no fue fácil; de hecho, de estos alumnos, únicamente Miguel logró resolver el problema dinámicamente.

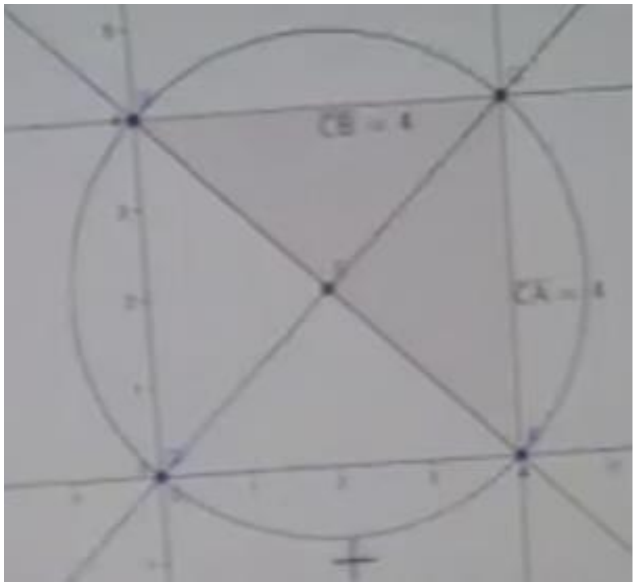



***Figura 4.28.*** Acercamiento usando rectas perpendiculares a los ejes y mediatriz para un caso particular.

Honorine colocó los puntos $A(4{,}0)$ $y$ $B(0{,}4)$ dando clic sobre los ejes coordenados, trazó la mediatriz del segmento $AB$ y una circunferencia de radio cuatro con centro en el punto $A$ (Figura 4.29). Finalmente, colocó un punto $C$ sobre la mediatriz (arrastre atado), midió las distancias de dicho punto al eje $Y$, al punto $A$ y al punto $B$ (medición guiada) y observó que la distancia del punto $C$ al eje $Y$ no era igual a las otras dos.

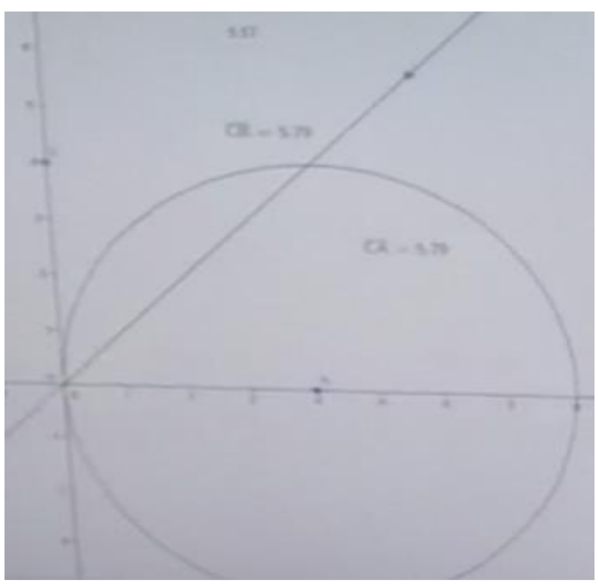


***Figura 4.29.*** Acercamiento de Honorine usando mediatriz.

La construcción de Carla es muy parecida a la de Honorine, aunque ella no traza la circunferencia (Figura 4.30). Lo que distingue el razonamiento de Carla es que no centró su atención en un caso particular, pues es la única estudiante que movió el punto *B* para analizar el comportamiento de una familia de mediatrices. Carla relacionó la distancia de un punto a una recta como la distancia entre dos puntos, siempre y cuando uno de ellos pertenezca a la recta, es decir, ignoró que el punto sobre la recta debe ser el pie de una recta perpendicular que pase por el otro punto (Transcripción 7.19).

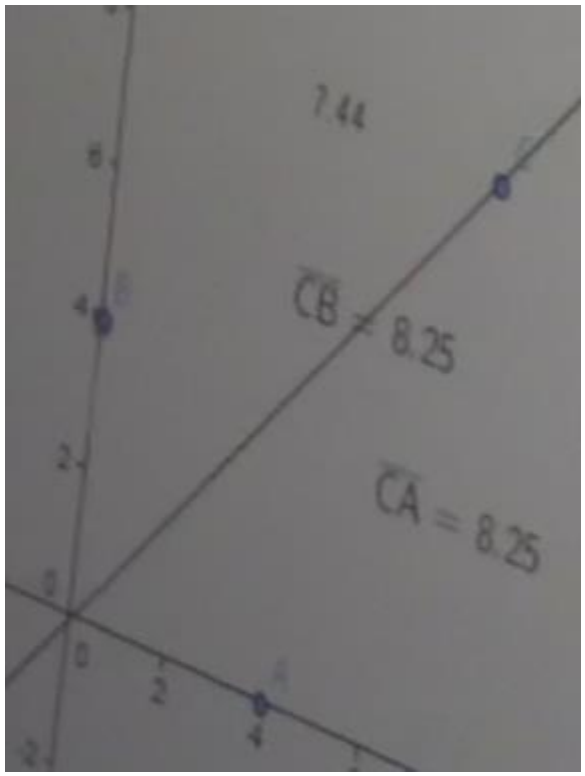



***Figura 4.30.*** Acercamiento de Carla usando mediatriz.

***Tabla 4.5.*** Recursos y heurísticas usados en la etapa de implementación de un plan de solución para el problema 4.

| **Construcción** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Acercamiento discreto aproximado* (usando puntos sobre circunferencias) Diego Fig. 4.45 | Punto, distancia entre puntos, distancia entre punto y recta, circunferencia, plano cartesiano. | Trazar circunferencias con radio constante, medir distancia entre puntos y entre punto y recta. | Colocar punto móvil sobre circunferencia y comprara distancia entre puntos con distancia entre punto y recta. | Reconocer el carácter continuo del lugar geométrico, descartar una recta como solución del problema. | Exploración de casos particulares, considerar una familia de casos, verificar el resultado. Arrastre guiado y medición guiada (Contraste) |
| *Acercamiento discreto exacto* (usando una circunferencia) Fernanda, Itzia y Alexandra. Figs. 4.43 y 4.44 | Punto, circunferencia, recta perpendicular, punto de intersección, radio, plano cartesiano, distancia entre puntos. | Trazar circunferencia dados su centro y uno de sus puntos, trazar recta perpendicular, medir distancias, localizar puntos de intersección. | Encontrar puntos que cumplen con la condición del problema de forma exacta usando circunferencia y aprovechar las características geométricas del plano cartesiano. | Usar una circunferencia para trasladar una distancia a todo el plano. | Búsqueda de simetría, explorar casos particulares. Medición para validar (contraste) |
| *Acercamiento discreto aproximado* (usando mediatriz de forma intuitiva) César Fig. 4.46 | Punto, triángulo rectángulo isósceles, punto medio, mediatriz, plano cartesiano, distancia entre puntos. | Trazar triángulo como polígono, colocar puntos dando clic sobre el eje coordenado, localizar punto medio, trazar recta que pasa por dos puntos. | Localizar punto móvil sobre recta, encontrar punto sobre la mediatriz que cumple con la condición del problema, aprovechar las características geométricas del plano cartesiano. | Asociar el problema con un triángulo rectángulo isósceles de lado 4 unidades. Asociar (intuitivamente) las condiciones del problema con el concepto de mediatriz. | Explorar casos particulares. Arrastre guiado y medición guiada (contraste) |

***Tabla 4.5.*** Recursos y heurísticas usados en la etapa de implementación de un plan de solución para el problema 4.

| **Construcción** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Acercamiento discreto exacto* (usando mediatriz) Carlos, David, Miguel Fig. 4.47 | Punto, punto de intersección, recta perpendicular, triángulo rectángulo isósceles, mediatriz, plano cartesiano, distancia entre puntos. | Colocar puntos dando usando la barra de comandos, trazar triángulo como polígono, trazar mediatriz de un segmento, trazar rectas perpendiculares, localizar punto de intersección. | Encontrar punto que cumple con la condición del problema de forma robusta, aprovechar las características geométricas del plano cartesiano. | Asociar el problema con mediatriz y perpendicularidad para un caso específico. | Explorar casos particulares. Medición para validar (contraste) |
| *Acercamiento discreto aproximado (usando mediatriz)* Honorine Fig. 4.48 | Punto, segmento, mediatriz, distancia entre puntos. | Colocar un punto específico sobre el eje Y dando clic, trazar segmento, trazar mediatriz. | Localizar punto que cumple con la condición del problema sobre la mediatriz. | Asociar el problema con el concepto de mediatriz. | Explorar casos particulares. Arrastre guiado y medición guiada (contraste) |
| *Acercamiento discreto aproximado (usando familia de mediatrices)* Carla Fig. 4.49 | Punto, segmento, mediatriz, distancia entre puntos y distancia entre punto y recta. | Medir distancia entre puntos y entre punto y recta, trazar mediatriz | Colocar punto móvil sobre eje Y, colocar punto sobre la mediatriz | Comparar distancias (entre dos puntos con distancias entre punto y recta) de objetos móviles. Asociar con el problema el concepto de mediatriz y distancia entre punto y recta. | Explorar casos particulares, explorar una familia de casos, Arrastre atado, arrastre guiado y medición guiada (Separación) |

*Búsqueda de patrones y una solución general*

La mayoría de los estudiantes identificaron a la mediatriz como un concepto clave para resolver el problema, sin embargo, una dificultad generalizada fue la representación geométrica de la distancia entre un punto y una recta. En ese momento la intervención del profesor fue necesaria pero no suficiente.  Por ejemplo Carlos y David tuvieron dificultad en identificar el triángulo isósceles de su construcción y aunque la ayuda del profesor estuvo orientada para que relacionaran el problema con una familia de triángulos isósceles, dichos alumnos no pudieron generalizar su construcción. Finalmente, Carlos y David usaron medición guiada y arrastre guiado para encontrar cinco puntos que cumplían (aproximadamente) con la condición del problema, posteriormente, usaron el comando “Cónica dados Cinco de sus Puntos” para trazar la cónica asociada a dichos puntos (Figura 4.31).

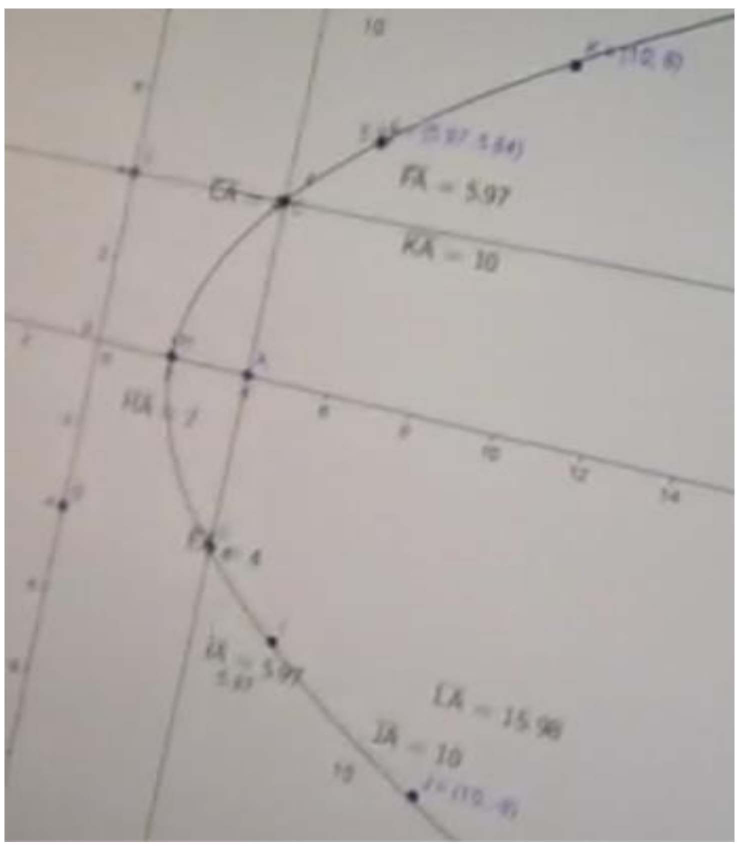



***Figura 4.31.*** Acercamiento de Carlos y David usando el comando “Cónica dados Cinco de sus Puntos”.

Es importante mencionar que Carlos y David usaron el punto $H(2,0)$ (vértice de la parábola) para verificar que el lugar geométrico era correcto (estrategia de control), además, colocaron un punto móvil sobre dicho lugar (arrastre enlazado y arrastre de prueba) para medir la distancia del punto al eje $Y$ y al punto $A$ (medición para validar). Este acercamiento no fue exacto debido a la naturaleza libre de algunos de los puntos encontrados y los estudiantes se dieron cuenta que había una pequeña variación entre las distancias al eje $Y$ y al punto $A$. En este sentido, y teniendo en cuenta que este tipo de acercamiento puede ser común cuando se utiliza un AGD, la aproximación es un factor que hay que considerar; debido al redondeo automático (con dos decimales), las cantidades mostradas pueden provocar que los alumnos encuentren construcciones inexactas.

Honorine, quien tuvo un acercamiento inicial similar al de Carla, no logró asociar la distancia de un punto a una recta con un segmento perpendicular (Transcripción 7.20). Dicha alumna abandonó su primer acercamiento y exploró casos particulares junto con Itzia. Posteriormente, el profesor logró que Itzia y Honorine, quienes estaban juntas, asociaran la distancia de un punto a una recta con un segmento perpendicular, sin embargo, esto no fue suficiente para que las alumnas resolvieran el problema dinámicamente. Una idea interesante es que Honorine logró reconocer el carácter simétrico del lugar geométrico buscado (Transcripción 7.20).

Miguel mencionó que el lugar geométrico buscado era una parábola, por lo que estudiantes como Honorine, Itzia, Fernanda, Alexandra y Diego resolvieron el problema usando el comando “Parábola” de Geogebra. Aunque este método de resolución del problema no era el esperado por el profesor, se debe tomar en cuenta que el AGD ofrece una variedad de caminos para abordar una tarea. Dichos alumnos colocaron un punto móvil sobre la parábola generada (arrastre enlazado) y midieron las respectivas distancias para verificar (medición para validar) que el punto cumpliera siempre (arrastre de prueba) con las condiciones del problema. Mediante este acercamiento, los alumnos identificaron que los elementos esenciales para trazar una parábola son una recta y un punto, además, con ayuda de la medición, pudieron centrar su atención en las propiedades de una parábola como lugar geométrico; lo que en sí ya es una forma distinta de acercarse al objeto matemático. La construcción de Honorine, Itzia, Fernanda y Alexandra es similar a la mostrada en la Figura 4.32. Para este problema, Alexandra y Fernanda reconocen, de forma intuitiva, que la distancia de un punto a una recta tiene que ser un segmento horizontal, sin embargo, lo expresan en términos de paralelismo en vez de perpendicularidad (Transcripción 7.21).

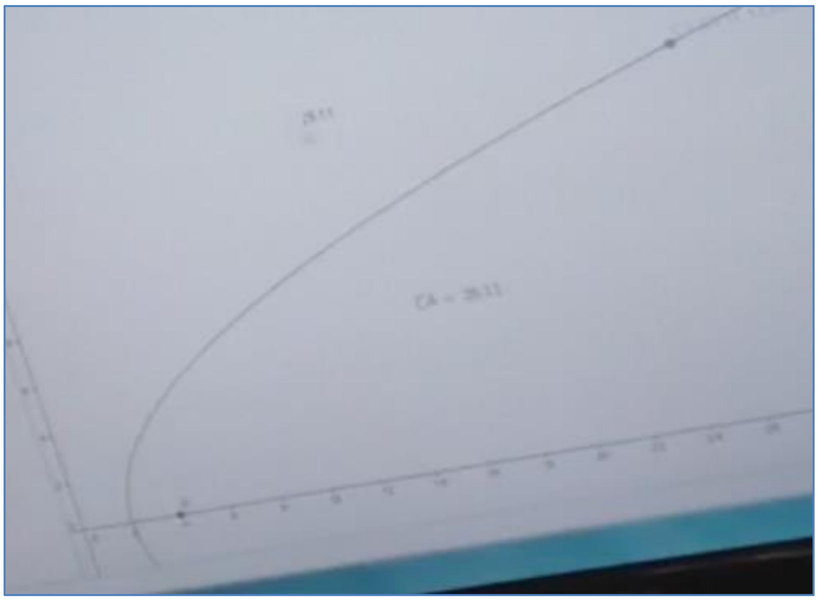


***Figura 4.32.*** Solución usando el comando “Parábola”.

Diego, quien también resolvió el problema con el comando “Parábola”, logró relacionar el problema con una familia de triángulos isósceles y las mediatrices de sus bases, aunque una dificultad persistente fue representar la distancia de un punto a una recta en términos de perpendicularidad y no de paralelismo. Diego comprueba que cualquier punto en la parábola cumple con la condición del problema (estrategia de control). La construcción de Diego se muestra en la Figura 4.33. A diferencia de Alexandra, Itzia, Honorine y Fernanda, la solución del problema le sirvió a Diego como punto de partida para explorar (por su propia cuenta) otros contenidos y relaciones matemáticas como la mediatriz y triángulos isósceles. En este sentido, Diego muestra una forma de pensar acorde con la disciplina en donde resolver el problema no es el fin de la actividad matemática (Transcripción 7.22).

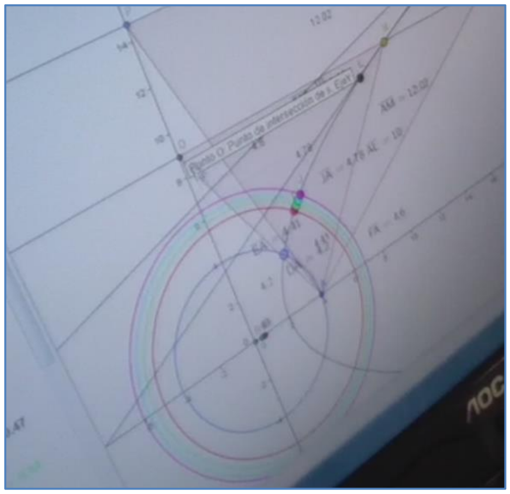


***Figura 4.33***. Relación de triángulos isósceles con la solución del problema (Diego).

Después de una serie de preguntas planteadas por el profesor (Transcripción 7.23), Carla logró asociar la distancia de un punto a una recta con la longitud de un segmento paralelo, sin embargo, en un principio trazó la recta paralela al eje $X$ pero por el punto $C$ móvil sobre la mediatriz (no por el punto $B$ móvil sobre el eje $Y$), como se observa en la Figura 4.34. El trazar la recta paralela por el punto sobre la mediatriz y no por el punto sobre el eje Y, permitió a Carla detectar que la solución del problema se encontraba cuando los puntos estaban a la misma altura.

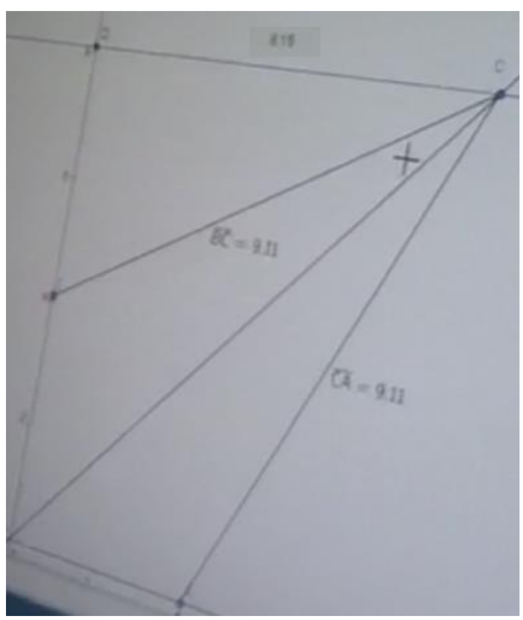


***Figura 4.34.*** Acercamiento dinámico de Carla.

Carla resolvió el problema mediante una función cognitiva de contraste y separación que evolucionó a una función cognitiva de generalización y fusión. De contraste y separación porque comparó las distancias del punto $C$ (sobre la mediatriz de $AB$) al punto $B$ y del punto $C$ al eje $Y$ lo que le permitió reconocer que el problema se resolvía para posiciones específicas de los puntos $B$ (móvil sobre el eje $Y$) y $C$. Además, identificó que el punto importante era $B$ y que $C$ dependía de la posición de $B$. De generalización y fusión porque logró plasmar la dependencia entre los puntos $B\ y\ C$ de forma robusta, es decir, encontró el punto $C$ en función del punto $B$ mediante la recta paralela al eje $X$ por el punto $B$ (Figura 4.35). La explicación de Carla sobre el razonamiento usado para resolver el problema aparece en la Transcripción 7.24. De esta transcripción es evidente que el AGD fue determinante para que Carla pudiera resolver el problema, pues mediante una medición y arrastre guiados se dio cuenta de la dependencia entre dos puntos móviles que determinaban dos relaciones matemáticas (mediatriz y distancia de punto a recta), lo cual la condujo a plasmar geométricamente dicha dependencia y resolver el problema.

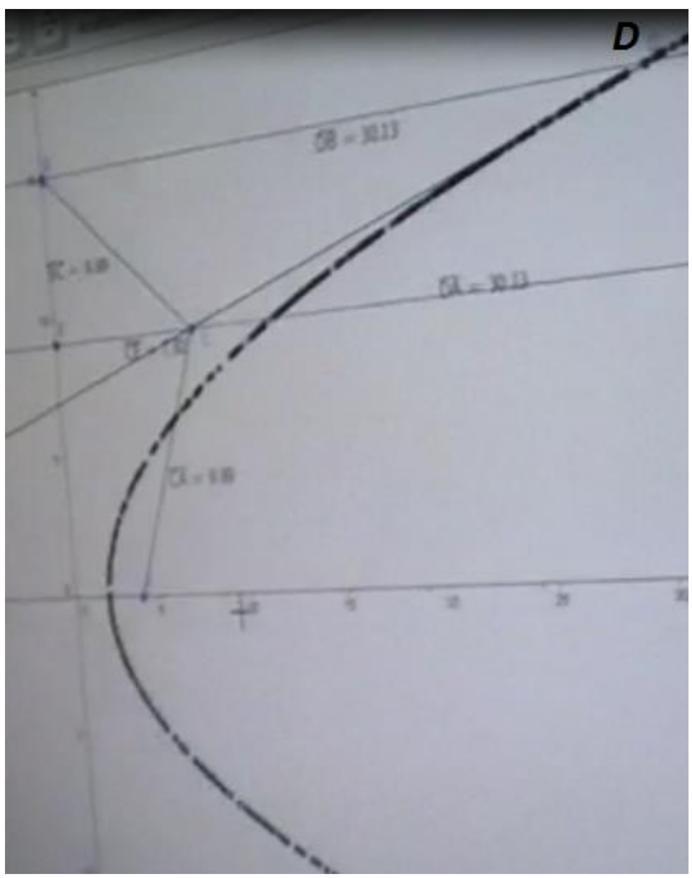



***Figura 4.35***. Solución dinámica de Carla.

Miguel trabajó con una familia de triángulos isósceles libres, es decir, uno de sus vértices era el punto $A$, otro de sus vértices era un punto libre que Miguel movía hacia el eje $Y$ y el último vértice también es un punto libre que mueve hacía la mediatriz de la base. Miguel midió las distancias entre los puntos libres (medición guiada) para encontrar puntos que cumplen con la condición (arrastre guiado) mediante una función cognitiva de contraste. Miguel repite este procedimiento para varios casos particulares, lo que le permite detectar dos patrones (función cognitiva de separación); el primero, detecta que el vértice opuesto a la base del triángulo debe estar en la mediatriz de dicha base; el segundo, que los vértices móviles del triángulo deben estar a la misma altura (Figura 4.36).

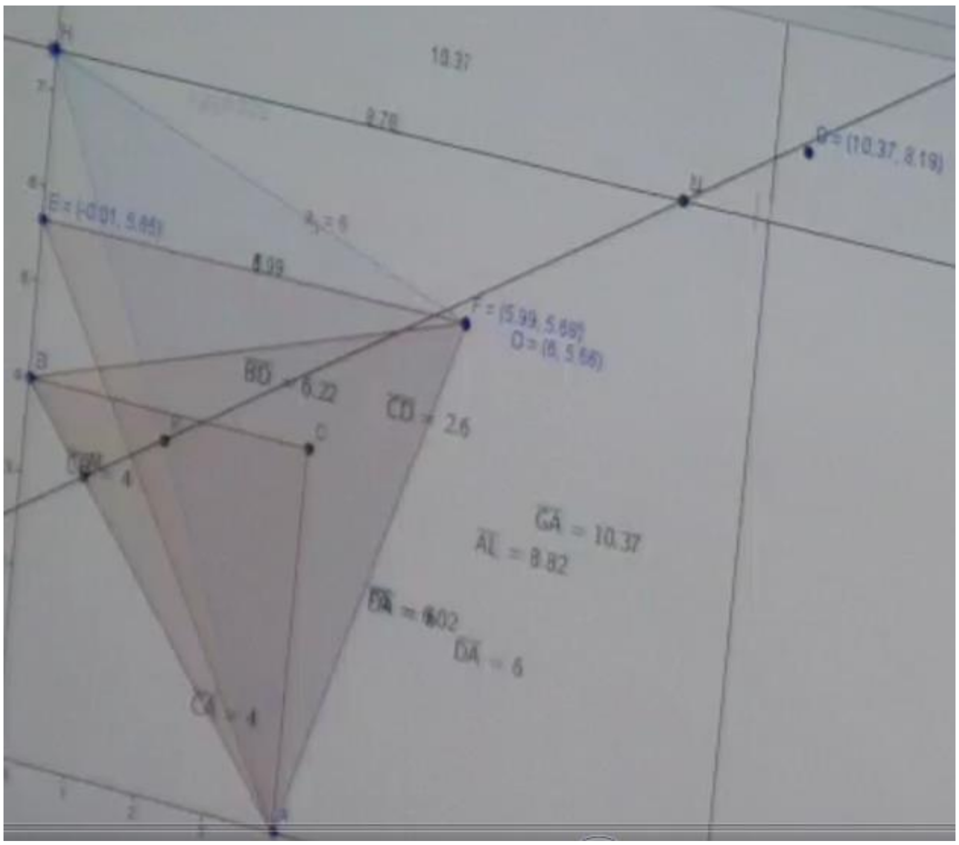



***Figura 4.36***. Acercamiento dinámico de Miguel.

El movimiento controlado o el arrastre atado/enlazado es una heurística, relacionada con el AGD, fundamental para resolver problemas en este ambiente. En este camino Miguel detecta los conceptos y representaciones geométricas esenciales del problema, sin embargo, en un principio su construcción es libre (no mantiene las relaciones matemáticas ante el movimiento) pues no implementa un arrastre atado (controlado) del punto $H$ (Miguel usa un arrastre siguiendo un lugar, pues mueve el punto $H$ simulando el eje $Y$), posteriormente, Miguel robustece su construcción (función cognitiva de generalización y fusión) colocando el punto móvil sobre el eje Y (arrastre enlazado), trazando la mediatriz del punto $A$ y el punto móvil y trazando la recta paralela al eje $X$ por el punto móvil en el eje $Y$ (Transcripción 7.25) . Su construcción final se muestra en la Figura 4.37.

***Figura 4.37.*** Solución dinámica de Miguel.

Es claro que para este grupo el concepto de paralelismo resultó más familiar que el concepto de perpendicularidad. En este sentido, el profesor necesitó centrar su atención en el eje $Y$ para obligarlos a construir la recta perpendicular al eje $Y$, lo cual es esencial si se trabaja con la distancia de un punto a una recta. La apropiación de la heurística de movimiento controlado o arrastre atado no es inmediata y es posible que algunos alumnos requieran de más tiempo para usarla en la resolución de problemas; en este problema, algunos alumnos colocaron un punto sobre el eje $Y$, sin embargo, su intención fue localizar un punto específico y no un punto móvil; Carla y Miguel muestran evidencia de la génesis del uso de esta heurística en la resolución de este problema. Finalmente, entre todo el grupo y guiados por el profesor, se hizo una lista de pasos para construir la solución dinámica del problema.

***Tabla 4.6.*** Recursos y heurísticas usados en la etapa de búsqueda de patrones y una solución general para el problema 4.

| **Construcción** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Solución aproximada* (usando el comando "Cónica dados cinco de sus puntos") Carlos, David Fig. 4.50 | Punto, cónica, distancia entre puntos y distancia entre punto y recta. | Colocar puntos libres sobre el plano, medir distancia entre puntos y entre punto y recta. | Encontrar puntos que cumplen con la condición del problema (aproximados), usar el comando cónica para trazar un lugar geométrico. | Relacionar cónica con la necesidad de cinco puntos para trazarla. | Explorar casos particulares, explorar una familia de casos, verificar el resultado. Arrastre guiado, medición guiada, arrastre de prueba, arrastre enlazado, medición para validar. (Contraste) |
| *Solución exacta* (usando el comando "Parábola") Honorine, Itzia, Fernanda, Alexandra Fig. 4.51 | Punto, recta, parábola, distancia entre puntos y distancia entre punto y recta. | Trazar una parábola dada su directriz y su foco. | Reconocer los elementos necesarios para trazar una parábola. | Asociar a la parábola con sus propiedades geométricas. | Generalizar el resultado, explorar una familia de casos. Arrastre de prueba, arrastre enlazado, medición para validar. (Contraste) |
| *Solución aproximada* (usando el comando "Parábola") Diego Fig. 4.52 | Punto, cónica, distancia entre puntos y distancia entre punto y recta, triángulo isósceles, recta paralela, mediatriz. | Colocar puntos libres sobre circunferencias, medir distancia entre puntos y entre punto y recta. | Encontrar puntos que cumplen con la condición del problema (aproximados), trazar parábola con el comando "Parábola" | Asociar el problema con el concepto de mediatriz y una familia de triángulos isósceles, relacionar distancia entre punto y recta con paralelismo. | Explorar casos particulares, explorar una familia de casos, verificar el resultado, generalizar el problema, búsqueda de conexiones. Arrastre guiado, medición guiada, arrastre de prueba, arrastre enlazado, medición para validar. (Contraste) |

***Tabla 4.6.*** Recursos y heurísticas usados en la etapa de búsqueda de patrones y una solución general para el problema 4.

| **Construcción** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Solución dinámica* Carla Fig. 4.54 | Punto, segmento, mediatriz, recta paralela, punto de intersección, distancia entre puntos y distancia entre punto y recta. | Trazar un segmento, trazar una mediatriz, trazar recta perpendicular, localizar punto de intersección. | Colocar punto móvil sobre eje $Y$, trazar mediatriz y recta paralela móviles. | Usar de forma conjunta una familia de mediatrices y rectas paralelas para resolver el problema. | Explorar casos particulares, explorar una familia de casos, verificar el resultado, generalizar el problema. Arrastre enlazado, movimiento dependiente, arrastre de prueba, medición para validar (Fusión) |
| *Solución dinámica* Miguel Fig. 4.56 | Punto, segmento, mediatriz, recta paralela, punto de intersección, distancia entre puntos y distancia entre punto y recta, triángulo isósceles. | Trazar un segmento, trazar una mediatriz, trazar recta perpendicular, localizar punto de intersección, trazar triángulo isósceles. | Colocar punto móvil sobre eje $Y$, trazar una familia de mediatrices, rectas paralelas y triángulos isósceles. | Usar en forma conjunta de una familia de mediatrices y rectas paralelas para resolver el problema, asociar una familia de triángulos isósceles con la solución del problema. | Explorar casos particulares, explorar una familia de casos, verificar el resultado, generalizar el problema, búsqueda de conexiones. Arrastre enlazado, movimiento dependiente, arrastre de prueba, medición para validar (Fusión) |

*Conexiones y extensiones*

¿Qué ocurre si en vez de buscar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta y un punto se busca el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una circunferencia y de un punto? A los alumnos se les pidió que modificaran la construcción obtenida anteriormente para substituir el eje $Y$ por una circunferencia con centro en el punto $D(-4{,}0)$ y radio variable. La variación de la circunferencia fue propuesta por el profesor mediante un punto $E$ móvil sobre el eje $X$ que determinaba su radio. La mayoría de los alumnos no tuvieron dificultad en colocar un punto móvil $B$ sobre la circunferencia (arrastre atado) y en trazar la mediatriz del segmento determinado por el punto $A(4{,}0)$ $y$ $B$. Las interpretaciones de la recta perpendicular a una circunferencia, para determinar la distancia de un punto a la circunferencia, fueron variadas y produjeron diferentes acercamientos. La intervención del profesor fue necesaria para guiar a los estudiantes hacia la construcción de la hipérbola y elipse. En este episodio fue claro que algunos alumnos relacionaron la perpendicularidad sobre un punto de la circunferencia con el trazo de rectas tangentes.

David trazó la mediatriz del segmento determinado por el punto el punto $D(-4{,}0)$ y el punto $F$ móvil sobre la circunferencia. Luego trazó la recta perpendicular al eje $X$ por el punto $F$ para localizar su punto de intersección con la mediatriz (Figura 4.38). Aunque David no logró empatar las dos construcciones adecuadamente, es claro que el AGD permite explorar una amplia variedad de trazos dinámicos, lo cual puede convertirse en una heurística para resolver problemas.

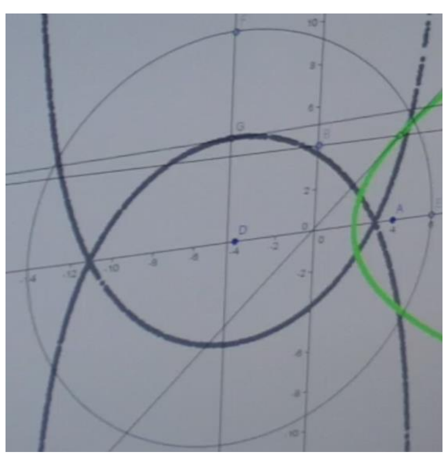


***Figura 4.38.*** Acercamiento de David.

Itzia trazó la recta perpendicular al eje $X$ por el punto $B$ móvil sobre la circunferencia y encontró su punto de intersección con la mediatriz de $AB$, como se observa en la Figura 4.39.

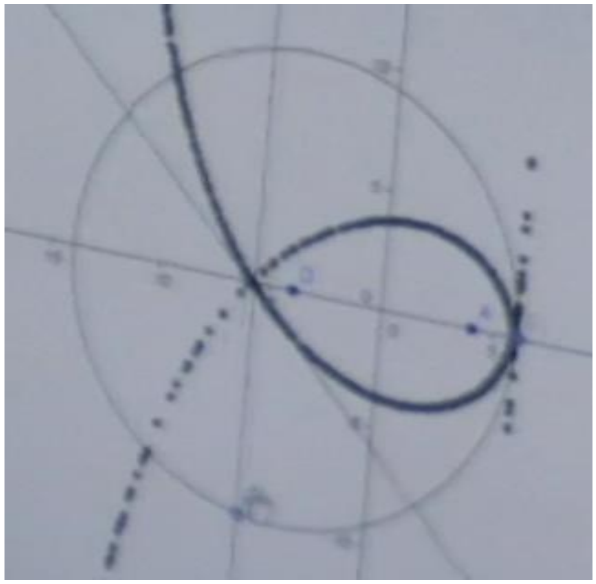


***Figura 4.39.*** Acercamiento de Itzia.

Carla Y Miguel, trazaron la recta perpendicular al eje $Y$ por el punto móvil sobre la circunferencia y localizaron su punto de intersección con la mediatriz (Figura 4.40). Finalmente, Carla pudo encontrar la construcción deseada mediante la exploración del enfoque infinitesimal[2].

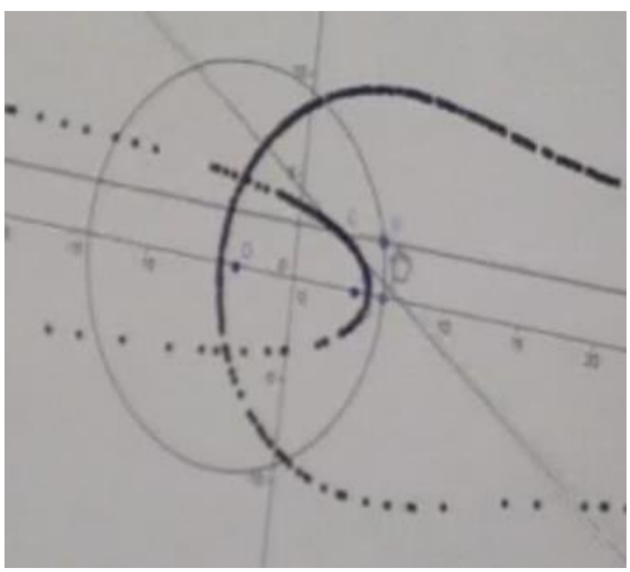


***Figura 4.40.*** Acercamiento de Carla y Miguel.

[2] Una curva continua, puede considerarse como una recta en vecindades infinitamente pequeñas.

Un enfoque infinitesimal del problema, en donde la circunferencia puede ser considerada como una recta para vecindades muy pequeñas (Transcripción 7.26) resultó útil para que varios estudiantes lograran construir la configuración correcta. En un principio Itzia argumenta que la recta perpendicular a la circunferencia por el punto *B* es su recta tangente en dicho punto, por lo que el profesor sugirió usar la herramienta “Zoom” del AGD para observar el comportamiento de la circunferencia y la recta tangente. Con esta idea, Itzia se da cuenta que la recta tangente sería la recta paralela  a la circunferencia, por lo que traza la recta perpendicular a la tangente por el punto *B* para resolver el problema. Tanto Itzia como Virginia detectaron que la recta perpendicular a la circunferencia por el punto B es la recta que pasa por su centro. Las construcciones de Itzia, Virginia y Honorine son similares a la mostrada en la Figura 4.41.

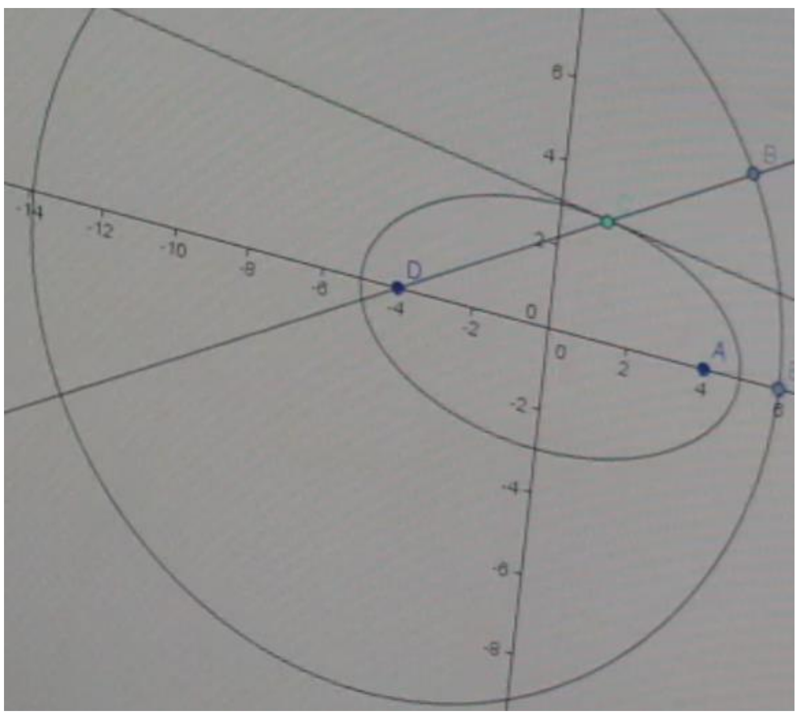



***Figura 4.41.*** Solución de Itzia, Virginia y Honorine.

Karen no asoció la recta perpendicular a una circunferencia con una recta tangente, por lo que el profesor decidió usar argumentos de tipo empíricos para guiarla; el profesor ejecutó un zoom a la circunferencia centrando el punto *B* por donde debería pasar la recta perpendicular, luego, sugirió a Karen que colocara un punto C sobre la circunferencia (que ya parecía una recta) para trazar la recta BC (Figura 4.42); Karen notó que la circunferencia se parecía a la recta $BC$ a medida que aumentaba el zoom y por ello trazó la recta perpendicular a $BC$ por $B$. Posteriormente, invirtió el zoom y se dio cuenta que la recta perpendicular aproximada parecía pasar por el centro de la circunferencia. Con esta información Karen no requirió de la recta tangente para resolver el problema.

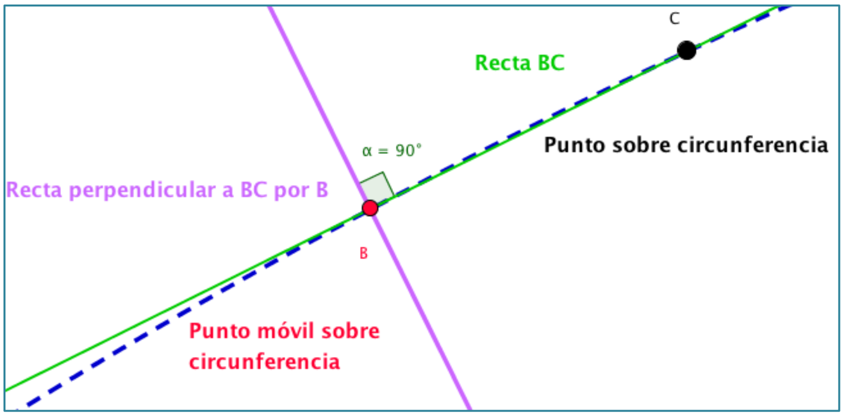



***Figura 4.42***. Uso del zoom como heurística para trazar recta perpendicular a una circunferencia.

Karen activó la animación del punto móvil sobre la circunferencia lo que le permitió observar una familia de elipses e hipérbolas que dependían del radio de la circunferencia (Figura 4.43).

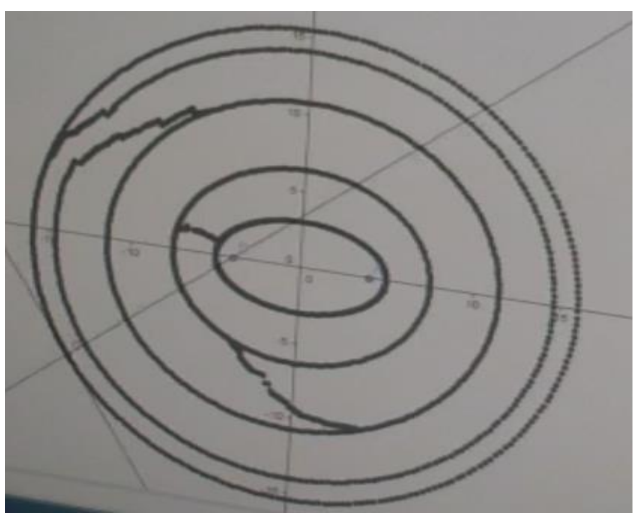


***Figura 4.43***. Identificación de una familia de cónicas.

Alexandra logró conseguir la construcción deseada sin dificultad y sin ayuda del profesor mediante la recta tangente a la circunferencia. Es importante mencionar que el uso de los comandos del AGD está determinado por los recursos con los que cuenta cada estudiante;

los recursos matemáticos de Alexandra le permitieron identificar que el comando "Tangente" le podía ayudar a resolver el problema, la argumentación de su construcción se puede observar en la transcripción 7.27.

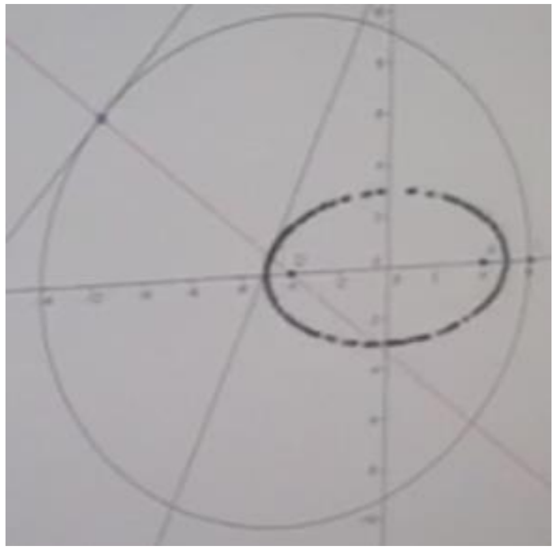


***Figura 4.44.*** Construcción de Alexandra.

Miguel, quien si requirió de la orientación del profesor, también uso el comando tangente para resolver el problema. El análisis de puntos de intersección móviles que dependen del movimiento de trazos auxiliares, es una heurística fundamental para resolver problemas en este ambiente, en esta dirección, Miguel encuentra el punto de intersección de la mediatriz con la recta tangente a la circunferencia y encuentra que dicho punto describe una recta perpendicular al eje $X$, como se muestra en la Figura 4.45.

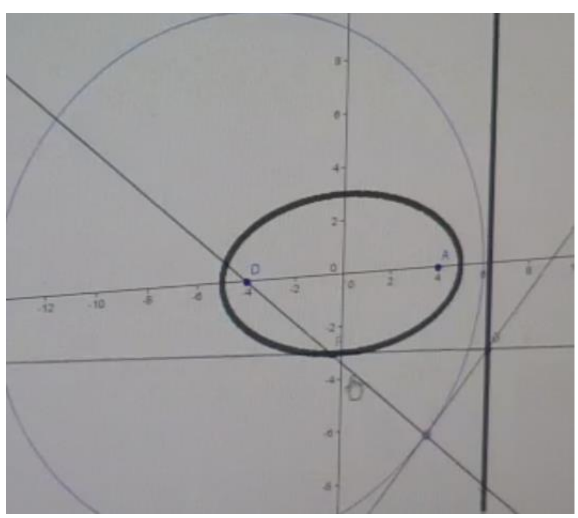


***Figura 4.45.*** Construcción de Miguel.

En esta etapa, el uso de una característica del AGD como el zoom, se convirtió en una heurística para resolver problemas. Evidentemente, esta heurística fue sugerida por el profesor, es decir, no fue una idea de los estudiantes, sin embargo, para que un alumno use este tipo de heurísticas requiere, en primera instancia, conocerlas. Algunos alumnos llamaron ovalo al lugar geométrico elipse y la mayoría de los alumnos afirmaron que el lugar geométrico generado, cuando el radio de la circunferencia era mayor a ocho, era una parábola. En primera instancia, los alumnos concluyeron que dicho lugar geométrico no era una parábola basándose en información empírica; algunos alumnos trazaron parábolas con el comando “Parábola” experimentando con diferentes focos y directrices; otros alumnos usaron los comandos de cónicas del AGD para trazar elipses e hipérbolas y compararlas con los lugares geométricos encontrados. En segunda instancia, esta extensión del problema sirvió como plataforma para definir a la elipse e hipérbola en términos de sus propiedades geométricas, que posteriormente fueron transformadas en sus representaciones algebraicas.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este capítulo se presentan las respuestas a las preguntas de investigación y algunas reflexiones finales con respecto a los resultados del estudio.

Una de las principales características de los AGD es la experimentación, que conduce al planteamiento de preguntas y a la búsqueda de información para responderlas. Esta constante búsqueda y exploración de relaciones matemáticas dentro de configuraciones dinámicas es una actividad matemática que puede desarrollar el pensamiento matemático y la adquisición de conocimiento novedoso. Por ejemplo, ¿qué propiedades tiene la recta encontrada por Miguel en su configuración dinámica de la Figura 4.45? Una exploración empírica muestra que la razón entre la distancia de cualquier punto de la elipse a la recta y la distancia de dicho punto al foco es constante y coincide con su excentricidad (una demostración geométrica se muestra en el Apéndice D). La recta encontrada por Miguel, conserva sus propiedades también cuando la cónica es una hipérbola, lo cual puede ofrecer los elementos necesarios para definir las cónicas en función de su excentricidad. Esta forma de trabajar la excentricidad es distinta a la usual (estática) en donde están involucrados sus elementos; en este acercamiento dinámico, la excentricidad se encuentra mediante una razón constante entre dos distancias variables.

Por otro lado, algunas cuestiones importantes que surgieron a partir de este estudio están relacionadas con los enunciados de los problemas y la evaluación. Con respecto a la primera cuestión, responder a las preguntas específicas de los enunciados de los Problemas 1, 2, 3 y 4 fue una tarea secundaria. En otras palabras, lo importante de abordar este tipo de problemas dentro de un AGD no fue resolverlos sino conseguir una representación dinámica robusta de la situación. En este sentido, resulta necesario repensar y reformular los problemas rutinarios para que lo perseguido no sea una pregunta particular.

Con respecto a la segunda cuestión, dentro del actual diseño curricular de bachillerato está implícito un criterio de evaluación de las competencias del estudiante, donde se resaltan los contenidos. En la implementación de secuencias didácticas a partir de la resolución de problemas y el uso sistemático de tecnologías digitales, la evaluación es un tema que requiere más investigación, pero sobre todo requiere de un rediseño curricular.

**¿Cuáles son los recursos, estrategias o heurísticas y tipos de razonamiento que pueden desarrollar estudiantes de tercer semestre de bachillerato como resultado de usar, sistemáticamente, un ambiente de geometría dinámica en actividades de aprendizaje?**

En todas las actividades y problemas del presente estudio, los alumnos usaron sistemáticamente las heurísticas de arrastre guiado y medición guiada para encontrar puntos específicos que cumplieran con las condiciones de los problemas. Esta combinación de heurísticas evolucionó, de forma gradual, a la heurística de arrastre formando un patrón, donde un acercamiento discreto permitió a la mayoría de los alumnos detectar patrones que eventualmente los llevaron a trabajar el problema de forma continua. Una vez resuelto el problema, los estudiantes usaron arrastre enlazado, arrastre de prueba y medición para validar como estrategias de control para verificar sus resultados. En resumen, se detectó la evolución de razonar los problemas de forma discreta a razonarlos de forma continua en tres etapas (principalmente en las Actividades 1, 2, 4 y en los Problemas 3 y 4):

1) *Exploración.* Los alumnos exploraron el problema de forma discreta mediante arrastre guiado de puntos libres y medición guiada de diferentes atributos, en especial distancias.
2) *Detección de patrones y conjeturas*. Los alumnos detectaron invariantes y generaron conjeturas mediante un arrastre formando un patrón, es decir, encontraron varios puntos que cumplían con las condiciones del problema, para hacer visible (de forma discreta) un patrón o relación matemática.
3) *Generalización.* una vez detectado el patrón, resolvieron el problema de forma continua y verificaron que el resultado era correcto usando heurísticas de arrastre enlazado, arrastre de prueba y medición para validar.

El arrastre guiado, el arrastre formando un patrón y la medición guiada fueron heurísticas del AGD que permitieron a los estudiantes no solo detectar patrones, sino también hacerlos explícitos mediante lugares geométricos. Así, la concepción de lugar geométrico como una infinidad de puntos que cumplen cierta propiedad fue fundamental.

La transición de razonar un problema de forma estática a razonarlo de forma dinámica no fue sencilla, pues en general, la mayoría de los alumnos tuvieron dificultades en la construcción de configuraciones dinámicas. Esta transición, depende de tres factores; el primero, la experiencia de los estudiantes en el AGD; el segundo, los recursos y orientaciones con los que cuenta cada estudiante; y el tercero, la participación del profesor para hacer evidente la necesidad de una configuración dinámica. La obtención de construcciones dinámicas por los estudiantes, en la mayoría de los casos, siguió la siguiente ruta:

1. *Construcciones libres:* los estudiantes conseguían configuraciones libres, es decir, construcciones que al arrastrar alguno de sus elementos no conservaban las propiedades o condiciones del problema.
2. *Prueba del arrastre:* hacer evidente la necesidad de una configuración robusta que mantuviera sus propiedades aunque se movieran sus elementos.
3. *Construcciones robustas:* realizar las modificaciones a una configuración libre para que mantenga sus propiedades ante el arrastre de sus elementos.

Aunque no todos los estudiantes lograron obtener soluciones dinámicas de los problemas, el arrastre atado, arrastre de prueba y medición para validar fueron algunas heurísticas utilizadas sistemáticamente por todos los alumnos para soportar o refutar conjeturas y para comprobar resultados (lo que en si ya es una característica de la actividad matemática).

El movimiento controlado, la variación dependiente (co-variación) y su explicitación, por medio de lugares geométricos, son heurísticas importantes para resolver problemas en este ambiente. En la solución de los Problemas 2, 3 y 4 hay evidencia que sugiere que algunos alumnos lograron usar la heurística de movimiento controlado. La heurística de variación dependiente fue menos común (únicamente un estudiante la utiliza para resolver los Problemas 2 y 3), pues además de involucrar un movimiento dependiente, involucra la variación instantánea de los atributos de un objeto móvil en función de la variación de los atributos de otro objeto móvil (por ejemplo cuando se traza una circunferencia con radio que depende de la longitud de un segmento variable). El uso del rastro para explicitar la trayectoria de objetos móviles dentro de la construcción fue una heurística que se usó principalmente en la Actividad 1 y 4 (por el profesor) y en los Problemas 3 y 4 (por los estudiantes).

Además de las heurísticas particulares del AGD antes mencionadas, es claro que en los acercamientos dinámicos a los problemas se usaron, de manera implícita, heurísticas generales para resolver problemas como la exploración de casos particulares, detectar simetría en el problema, considerar una familia de casos, generalizar el resultado, verificar el resultado, búsqueda de conexiones y extensiones y usar problemas similares. Se resalta la importancia de la heurística de exploración de casos particulares, pues es fundamental en el proceso de generalización en matemáticas.

En cuanto a los recursos, se recuperó el carácter dinámico del concepto de lugar geométrico, es decir, los alumnos pudieron trabajar con objetos matemáticos a partir de sus propiedades geométricas desde el punto de vista de la variación. En este camino, trabajaron con los conceptos de mediatriz, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola partiendo de sus propiedades como lugar geométrico; propiedades que posteriormente se exploraron algebraicamente. La representación algebraica de relaciones geométricas es una competencia relevante en Geometría analítica y el uso del AGD permitió enfrentarse a esta etapa de forma distinta, es decir, se partió de representaciones empíricas (visual, numérica, geométrica, dinámica), que funcionaron como soporte, para conseguir representaciones simbólicas o algebraicas. Así, la relación entre un lugar geométrico y su ecuación estuvo determinada por relaciones dinámicas, numéricas y geométricas.

Aprovechar las características geométricas del plano cartesiano (utilizar el origen como punto inicial de algunas configuraciones) fue uno los procedimientos rutinarios adoptados (del profesor) por los estudiantes. El uso de circunferencias para trasladar distancias es una competencia importante en geometría, y es difícil que un estudiante la desarrolle en un ambiente estático de lápiz y papel. Esta competencia relevante es una de las estrategias más importantes cuando se resuelven problemas en un AGD y su uso, de forma autónoma por los estudiantes, es mostrado en la solución de los Problemas 2 y 3 y en la solución de las Actividades 3 y 4.

**¿Cuáles son los resultados, ventajas y desventajas de implementar una secuencia didáctica, a partir de resolución de problemas y uso de software dinámico (Geogebra), para la representación dinámica de conceptos asociados con Geometría Analítica por estudiantes de bachillerato?**

Claramente, algunos estudiantes desarrollaron más habilidades que otros en cuanto a la resolución de las actividades y problemas en este ambiente. Sin embargo, uno de los objetivos de cuestionar y promover discusiones grupales fue equilibrar la participación y avances de los estudiantes. En la Actividad 1 se construyó la representación dinámica de la proposición 37 del libro 1 de Euclides trazando la recta paralela a la base de un triángulo por su vértice opuesto. El uso de un AGD fue determinante en varios aspectos de la resolución del problema:

1. Exploración: el arrastre guiado y medición guiada para encontrar puntos que cumplieran con la condición del problema fue determinante para explorar el problema.
2. Búsqueda de patrones: explorar una familia de casos (arrastre formando un patrón) fue clave para que los estudiantes detectaran un patrón.
3. Verificación: Una vez resuelto el problema, los alumnos verificaron el resultado enlazando un punto sobre la recta paralela y construyendo una familia de triángulos para obtener su área.
4. Conexiones y extensiones: Los alumnos detectaron la simetría del problema, es decir también encontraron la familia de triángulos con la misma área localizados en el tercer y cuarto cuadrantes.
5. Argumentación: los estudiantes lograron ofrecer un argumento geométrico para la relación matemática encontrada, apoyándose en información empírica ofrecida por el software.

Para los Problemas 1 y 2, se requirió de la participación activa del profesor, y las construcciones conseguidas dependieron en gran medida de su intervención; los alumnos lograron construir de forma robusta una familia de rectángulos y trapecios, sin embargo, lograr que sus lados conservaran siempre una relación específica no fue inmediato.

En la actividad 2, se explicitó la relación geométrica de la distancia entre dos puntos con la circunferencia, es decir, se construyó la circunferencia como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de otro punto. Esta actividad fue crucial para asociar el concepto de distancia entre dos puntos con el concepto de circunferencia, lo que se tradujo en una competencia relevante: usar una circunferencia para trasladar distancias.

En la Actividad 3 se obtuvo una representación geométrica de la distancia entre un punto y una recta como la longitud de un segmento perpendicular, además, se definió en términos de la mínima distancia entre el punto y la recta. En esta Actividad, el AGD fue determinante para que los alumnos compararan el valor numérico (ofrecido por la herramienta) de la distancia entre un punto y una recta con la mínima longitud de una familia de segmentos (determinados por el punto dado y un punto cualquiera sobre la recta).

En la actividad 4 se construyó el concepto de mediatriz a partir de sus propiedades como lugar geométrico. Es decir, se logró relacionar el concepto de mediatriz con una familia de triángulos isósceles (relación que es necesaria para resolver el Problema 4). El uso de un AGD fue clave en la exploración de esta actividad, pues permitió evolucionar de un razonamiento discreto a uno continuo; empezando por una cantidad finita de puntos que cumplían con la condición del problema, pasando por una cantidad infinita de puntos sobre un segmento y generalizando la relación matemática a una infinidad de puntos sobre una recta. En esta actividad ya se muestra el uso, por parte de los estudiantes, de una circunferencia para trasladar una distancia. La representación dinámica de la mediatriz requirió de la intervención el profesor, pero partió de una idea obtenida por el grupo. Otro resultado importante en esta actividad fue la argumentación ofrecida por algunos alumnos para la relación entre una familia de triángulos isósceles y el concepto de mediatriz.

El AGD permitió extender el Problema 3 rutinario de libro de texto. Surgieron representaciones dinámicas que no requirieron de la intervención del profesor, las cuales evidenciaron el uso intuitivo de la distancia de un punto a una recta y el uso sistemático de circunferencias para trasladar distancias. El AGD sirvió para superar un primer acercamiento algebraico limitado, pues permitió a los estudiantes encontrar los lugares geométricos en cada cuadrante. Así, en un futuro acercamiento algebraico los alumnos sabían de antemano que tenían que encontrar más de una recta solución. Además, en este problema se trabajó con el concepto de razón o proporción, pues los alumnos usaron construcciones dinámicas para obtener relaciones proporcionales.

Finalmente, el Problema 4 se resolvió de diferentes maneras. La principal dificultad para que los estudiantes resolvieran el problema de forma dinámica fue la representación geométrica de la distancia entre un punto y una recta, lo que sugiere que la fase de construcción de recursos para este concepto no fue suficiente. Únicamente dos estudiantes lograron resolver el problema dinámicamente. Dicha construcción, obtenida por Carla y Miguel, sirvió como plataforma para definir a la parábola, elipse e hipérbola en términos de sus propiedades geométricas, que luego fueron exploradas de forma algebraica.

En general, en los acercamientos se destaca que los alumnos desarrollaron formas distintas de abordar los problemas, en donde la exploración del problema, la búsqueda de patrones y relaciones matemáticas, la generación de conjeturas, la argumentación empírica y geométrica para soportar o refutar conjeturas, la conexión entre distintos contenidos matemáticos, la extensión de procedimientos y generalización de resultados fueron actividades matemáticas esenciales. Evidentemente, existieron algunas ventajas y desventajas referentes al uso de un AGD para desarrollar la secuencia didáctica durante el desarrollo del estudio. Algunas de las desventajas detectadas fueron las siguientes:

- La disponibilidad del equipo de cómputo necesario fue limitada.
- El papel del profesor fue determinante para el éxito o fracaso de este tipo de actividades, pues la actividad en el aula involucra una constante toma de decisiones que repercuten en los resultados obtenidos. Además, la planeación de las actividades no fue una tarea sencilla.
- La constancia y disposición de los alumnos fue clave para el desarrollo de características de un pensamiento matemático. Sin embargo, el sistema de creencias de algunos estudiantes (como Fernanda, Giovanny y Virginia) impidió que se engancharan en las actividades, pues su concepción de las matemáticas como un conjunto de ejercicios que deben ser resueltos con un repertorio de fórmulas, ocasionó que las actividades no tuvieran sentido para ellos.
- El uso de un AGD fue un obstáculo para algunos estudiantes (como César y Carlos) para evolucionar de un razonamiento empírico, es decir, los alumnos no percibieron la necesidad de construir razonamientos más generales.
- Adquirir experiencia en el uso del AGD, es un proceso largo que requiere de la adaptación del estudiante, lo cual es una seria dificultad dentro del actual sistema curricular, y en especial si el grupo nunca se ha enfrentado a este tipo de actividades.
- El profesor debe tener en cuenta que el AGD ofrece varias posibilidades para abordar una tarea y debe considerar algunas características específicas (y sus efectos) como el redondeo, atracción de cuadrícula y el repertorio de comandos que tiene al alcance el estudiante. Por lo tanto, el profesor debe tener varias rutas de acción previstas para varios tipos de acercamientos.

Algunas de las ventajas fueron:

- Permitió a los estudiantes el estudio de conceptos matemáticos mediante distintas representaciones.
- El proceso de generalización, mediante representaciones algebraicas, no se hizo de manera abrupta, pues el AGD ofreció información empírica para soportar dicho proceso.
- Permitió desarrollar algunas habilidades en los estudiantes que van más allá de la simple memorización de fórmulas o procedimientos.
- El proceso de acción reacción fue motivante para algunos estudiantes, es decir, consideraron interesante el poder experimentar con objetos matemáticos.
- Facilitó el uso de heurísticas generales y particulares para resolver problemas.
- El estudiante fue un miembro activo en su proceso de aprendizaje.
- La fase de exploración del problema recibió especial atención lo que comúnmente se tradujo en una mayor comprensión del problema.
- Permitió la búsqueda de patrones y generación de conjeturas que posteriormente fueron soportadas o refutadas mediante información numérica o geométrica.
- El AGD fue una herramienta útil para contrastar diferentes acercamientos del mismo problema.
- Permitió transformar un problema rutinario en una actividad matemática cercana a las matemáticas como disciplina.
- Permitió la transición de razonar los problemas de forma discreta y estática a razonarlos de forma continua y dinámica, centrando la atención en la variación.

# Capítulo 6

# Investigación Futura

## 6. Investigación Futura: Un estudio con profesores de bachillerato

### *6.1 Introducción*

En el presente estudio, el uso de un AGD permitió transformar problemas rutinarios en actividades que promueven diferentes aspectos del razonamiento matemático. Se observó además que el uso de la herramienta estuvo mediado por la experiencia del profesor para resolver problemas en este ambiente. En otras palabras**,** la experiencia del profesor en el uso de la tecnología resulta determinante no solo para el diseño de rutas de aprendizaje, sino también en la toma de decisiones durante el desarrollo de las actividades en la clase. Un ejemplo claro de esto fue la Actividad 1 donde el profesor decidió enfocar la atención hacia el lugar geométrico del ortocentro de la familia de triángulos de área y base constantes. ¿Por qué el profesor se fijó en el ortocentro y no en el baricentro, circuncentro o incentro? Claramente, la decisión del profesor estuvo mediada por su experiencia para trabajar este problema con la herramienta. En este camino, una evolución natural de este estudio contempla la formación de profesores de bachillerato, con el objetivo de que desarrollen cierta experiencia en el uso de algunas herramientas digitales para resolver problemas que ayude con algunos aspectos de su práctica docente.

### *6.2 Antecedentes*

Las distintas formas de representar objetos matemáticos que ofrece el creciente desarrollo y disponibilidad de diversas herramientas digitales son temas de interés de la agenda de investigación en educación matemática. Actualmente se acepta que el uso de dichas herramientas puede jugar un papel determinante en el desarrollo de conocimiento matemático.

> Se argumenta que el uso sistemático de tecnologías digitales no solo mejora lo que profesores y estudiantes hacen con el uso de lápiz y papel; sino también extiende y abre nuevas rutas y formas de razonamiento de los estudiantes y profesores para desarrollar conocimiento matemático. (Santos & Ortega, 2013, p. 196).

En México, existen una gran cantidad de estudios que reportan los resultados de usar sistemáticamente herramientas digitales en escenarios de resolución de problemas con profesores de bachillerato y estudiantes de posgrado (Espinosa (2012), Reyes (2009), Ortega (2010), Santos y Ortega (2013), Santos, Espinosa y Reyes (2005, 2008), Santos, Reyes y Espinosa (2007), Santos y Reyes (2011), Santos y Espinosa (2010), etc.). El objetivo de dichas investigaciones fue documentar los recursos, heurísticas y formas de razonamiento que emergen como resultado de resolver problemas matemáticos con ayuda de herramientas digitales. Este tipo de investigaciones influyen en la formación disciplinar de los profesores, pero no en la formación para incorporar las herramientas en su práctica docente.

Así, la formación de profesores para la incorporación de distintas herramientas digitales en su práctica docente que favorezca el desarrollo de un pensamiento matemático en los estudiantes es fundamental. En este sentido, Hegedus y Moreno (2009) comentan que el uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza demanda al profesor una nueva forma de pensar y estrategias pedagógicas distintas a las actuales (además de una reformulación de los escenarios de enseñanza y el currículo). En otras palabras, el profesor requiere desarrollar una serie de recursos, heurísticas y formas de pensar que estén mediadas por las herramientas digitales.

### *6.3 El problema de investigación*

En los últimos años, las propuestas de currículos para bachillerato en México sugieren el uso de distintas herramientas digitales para apoyar el aprendizaje y la enseñanza. Sin embargo, los avances en la formación de profesores en este rubro han sido aislados y se relacionan más con el interés individual de cada profesor que con un programa institucional que promueva el uso sistemático de distintas herramientas. Como consecuencia de lo anterior, resulta necesario orientar y realizar estudios sobre las maneras de usar herramientas digitales en escenarios de enseñanza y aprendizaje de matemáticas en bachillerato. Para esto, se requiere trabajar primero en la formación de profesores.

En matemáticas, la formación de profesores para la incorporación de herramientas digitales en su práctica docente debe contemplar no solo conocimientos relacionados con su uso eficiente (comandos, funciones, etc.), sino también contemplar el desarrollo, mediado por dichas herramientas, de recursos y heurísticas de resolución de problemas que le permitan estructurar y diseñar rutas de aprendizaje. Además, los profesores del bachillerato deben no solamente conocer el potencial que ofrece la tecnología digital en su práctica, sino también analizar las formas de razonamiento matemático que se promueven con el uso sistemático de las herramientas.

En este camino, se propone un estudio que apunte hacia la formación de profesores de bachillerato que destaque el desarrollo de recursos y heurísticas mediados por diversas herramientas digitales. En este contexto, también resulta importante analizar los procesos de apropiación de las herramientas que los profesores muestran al usarlos en la resolución de problemas.

### *6.4 Preguntas de investigación*

Algunas preguntas de investigación que resultan importantes para el estudio son:

1) ¿Cómo un profesor de bachillerato puede usar distintas herramientas digitales para trasformar un problema rutinario en una actividad de reflexión matemática? Interesa documentar el tipo de cuestionamientos que puede motivar el uso específico de una herramienta digital en la resolución de problemas.
2) ¿Cuál es la relación entre el nivel de apropiación de las herramientas y la capacidad para diseñar rutas de enseñanza alrededor de la resolución de problemas? Es importante analizar como los recursos, heurísticas y formas de razonamiento (mediados por las herramientas) permiten al profesor detectar oportunidades para diseñar rutas de aprendizaje.

### *6.5 Elementos de un marco conceptual*

De acuerdo con Mishra y Koehler (2006) históricamente los programas de formación de profesores se han centrado en el conocimiento del contenido matemático. Recientemente la formación de profesores en cuanto al conocimiento pedagógico ha recibo especial interés. Sin embargo, dichos autores comentan que, en general, estos programas de formación conciben al conocimiento matemático y al conocimiento pedagógico como cuestiones separadas. En esta dirección, Shulman (1986) introdujo la idea del conocimiento pedagógico del contenido (PCK) donde se resalta la interacción que existe entre el contenido matemático y aspectos pedagógicos del mismo, es decir, las formas en que un contenido matemático es tratado con el objetivo de hacerlo accesible para los estudiantes.

Con el actual desarrollo de distintas herramientas tecnológicas y su potencial para transformar los escenarios de enseñanza y aprendizaje actuales, surge la necesidad de saber cuáles son los conocimientos necesarios para que un profesor incorpore eficientemente el uso de dichas herramientas en su práctica docente. Mishra y Koehler (2006) proponen el marco: conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPCK), el cual parte de la idea del (PCK) de Shulman. El TPCK enfatiza las conexiones e interacciones entre contenido, pedagogía y tecnología caracterizando los siguientes tipos de conocimiento:

I. *Conocimiento del contenido.* Los profesores deben dominar el contenido matemático que buscan enseñar como conceptos, procedimientos, teoremas, definiciones, etc.
II. *Conocimiento pedagógico.* Es el conocimiento relacionado con los procesos de aprendizaje y las prácticas de enseñanza.
III. *Conocimiento pedagógico del contenido.* El profesor debe conocer cuestiones pedagógicas relacionadas con contenidos específicos.
IV. *Conocimiento tecnológico.* Son las habilidades para manejar eficientemente herramientas tecnológicas.
V. *Conocimiento tecnológico del contenido.* Diferentes herramientas tecnológicas ofrecen diferentes formas de acercase a los contenidos matemáticos.
VI. *Conocimiento tecnológico pedagógico.* ¿Qué transformaciones sufren los escenarios de enseñanza y aprendizaje cuando se introducen herramientas tecnológicas? ¿Cuáles son los aspectos didácticos que se ven afectados o favorecidos con el uso de herramientas tecnológicas?
VII. *Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido.* El profesor debe conocer diferentes formas de representar objetos matemáticos con distintas herramientas tecnológicas, técnicas pedagógicas para que distintas representaciones de objetos matemáticos sean accesibles para los estudiantes, dificultades asociadas con el aprendizaje de contenidos matemáticos y formas en que la tecnología puede ayudar a superarlas, conocimientos previos del estudiante y la influencia de las herramientas en cuestiones epistemológicas del contenido.

### *6.6 Elementos metodológicos*

Se trata de un estudio cualitativo, pues se busca analizar el proceso de apropiación de herramientas digitales, por parte de profesores de bachillerato para la resolución de problemas y para el desarrollo de rutas de aprendizaje. Por lo tanto, el diseño de problemas que promuevan el uso sistemático de diversas herramientas en procesos de resolución es fundamental.

### *6.6.1 Diseño de los problemas*

Un objetivo central del diseño de los problemas es que los profesores puedan plantear y explorar preguntas en términos de las herramientas digitales, pues es posible que esta actividad conduzca a un tratamiento novedoso de relaciones matemáticas que eventualmente podría ser útil para diseñar rutas de enseñanza. Para ejemplificar el tipo de problemas que se trabajaran y la forma de trabajo que se busca motivar en los profesores, se presenta el desarrollo y extensión de la Actividad 1 y del Problema 4 del presente estudio.

*Actividad 1*

> *Dado el triángulo de vértices $A(-2{,}0), B(2{,}0)$ y $C(0{,}2)$ encontrar triángulos que tengan la misma base AB y la misma área que el triángulo dado.*

i) El uso de un AGD para extender y generelizar un problema rutinario

La solución de esta actividad (presentada de forma profunda en el Apéndice C) involucra la identificación de una familia de triángulos que tienen su vértice sobre la recta paralela a la base $AB$ que pasa por el punto $C(0{,}2)$. En este caso, el uso de un AGD es útil para plantear una serie de preguntas sobre el comportamiento de la familia de triángulos. Por ejemplo: ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos notables (ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro) de la familia de triángulos con área y base constantes? La exploración de estas preguntas iniciales con ayuda del AGD permite observar que el ortocentro de la familia de triángulos genera una curva interesante (Figura 6.1). Además, la actividad se puede generalizar por medio de un punto móvil $C$ sobre el eje $Y$, un punto A móvil sobre el eje X y su reflexión $B$ con respecto al eje Y (base y altura, de la familia de triángulos, variables).

ii) Búsqueda de argumentos con las herramientas para soportar o refutar conjeturas

De acuerdo con la información visual presentada por el AGD se puede conjeturar que el lugar geométrico del ortocentro de la familia de triángulos es una parábola. Una actividad matemática importante es buscar argumentos para soportar dicha conjetura y así determinar sus elementos y propiedades. En esta etapa, algunas preguntas que se podrían plantear son las siguientes: ¿El lugar geométrico descrito por el ortocentro de la familia de triángulos es una parábola? En caso de ser una parábola ¿El vértice $C$, del triángulo isósceles $ABC$, opuesto a la base es el vértice de la parábola? ¿Los extremos $A$ y $B$ de la base fija de la familia de triángulos pertenecen a la parábola?

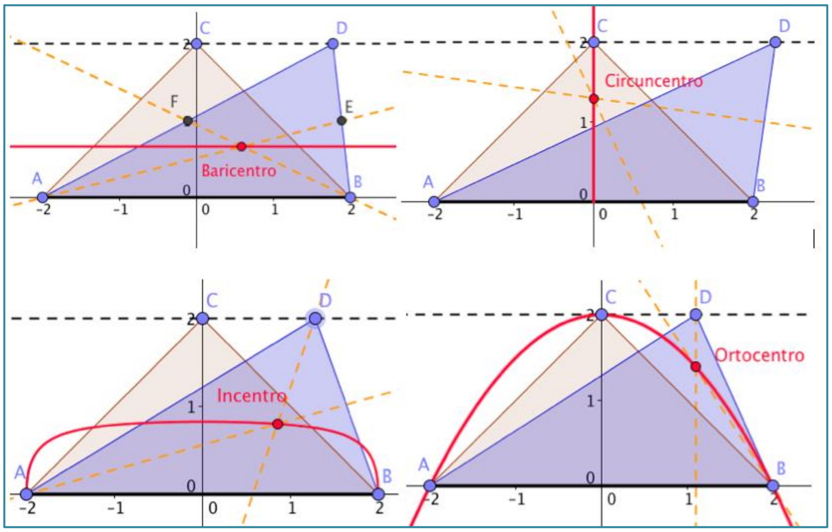



***Figura 6.1.*** Lugares geométricos de los puntos notables de la familia de triángulos de base y áreas constantes.

Se observa que por la simetría de la familia de triángulos, el eje focal de la supuesta parábola es la mediatriz de la base $AB$ (eje $Y$ en este caso), por lo que su vértice sería el ortocentro del triángulo isósceles $ABC$. Si el triángulo isósceles $ABC$ es rectángulo, entonces su ortocentro coincide con el punto $C$. Además, los extremos de la base $AB$ siempre pertenecen a la parábola, pues existen dos triángulos rectángulos $ABD'$ y $ABD''$ tales que sus ortocentros son los puntos $B$ y $A$ respectivamente (Figura 6.3).

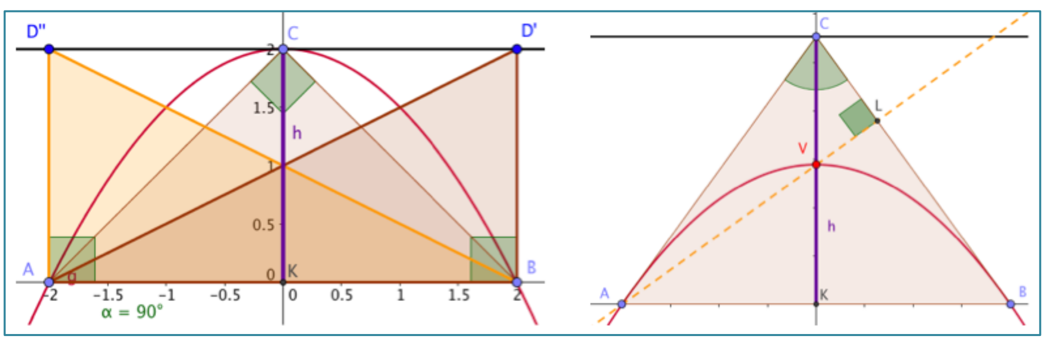
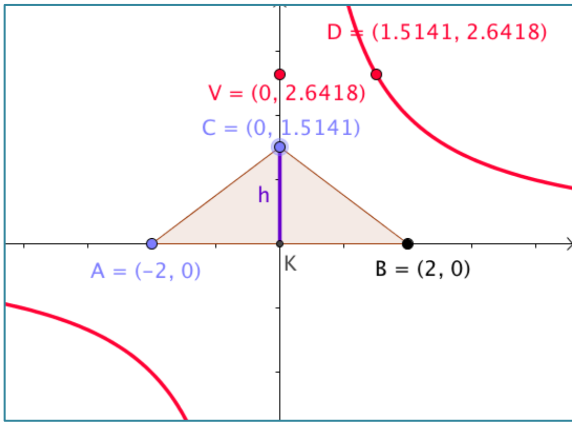



***Figura 6.3.*** Los puntos $A$ y $B$ pertenecen siempre a la parábola. El vértice de la parábola es el ortocentro del triángulo isósceles $ABC$.

iii) Uso de AGD y hoja de cálculo para analizar relaciones en términos de la covariación

¿Qué ocurre si varía longitud de la altura o la base de la familia de triángulos? En este camino, la búsqueda de patrones o invariantes entre los elementos dentro en una configuración dinámica puede ser útil para detectar relaciones matemáticas. ¿Cuál es la relación que existe entre la altura y base de la familia de triángulos y la posición del vértice de la parábola? Con la herramienta se puede explorar el comportamiento de dicha relación, pues se puede crear un punto dinámico $D$ con abscisa la altura del triángulo (ordenada del punto $C$) y con ordenada la altura del vértice de la parábola (con respecto a la horizontal, ordenada del punto $V$), para observar el comportamiento de la relación a partir del arrastre del punto $C$ (Figura 6.4). Además, las coordenadas del punto D se pueden registrar en una hoja de cálculo para un análisis numérico (Figura 6.5).




| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | h=x(D) | v=y(D) | h*v | AB |
| 2 | 1.7877 | 2.2376 | 4 | 4 |
| 3 | 1.7767 | 2.2514 | 4 | |
| 4 | 1.7548 | 2.2794 | 4 | |
| 5 | 1.7329 | 2.3082 | 4 | |
| 6 | 1.7111 | 2.3377 | 4 | |
| 7 | 1.7001 | 2.3528 | 4 | |
| 8 | 1.6782 | 2.3834 | 4 | |
| 9 | 1.6454 | 2.431 | 4 | |
| 10 | 1.5907 | 2.5146 | 4 | |
| 11 | 1.5141 | 2.6418 | 4 | |

***Figura 6.4.*** Existe una relación inversamente proporcional entre la altura del triángulo y la altura (con respecto a la base) del vértice de la supuesta parábola, la columna $C$ contiene el producto de la altura del triángulo y la altura del vértice.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | h=x(D) | v=y(D)" | h*v | AB |
| 2 | 1.3723 | 0.7287 | 1 | 2 |
| 3 | 1.3852 | 0.7219 | 1 | |
| 4 | 1.3917 | 0.7186 | 1 | |
| 5 | 1.4046 | 0.712 | 1 | |
| 6 | 1.411 | 0.7087 | 1 | |
| 7 | 1.4175 | 0.7055 | 1 | |
| 8 | 1.4239 | 0.7023 | 1 | |
| 9 | 1.4304 | 0.6991 | 1 | |
| 10 | 1.4368 | 0.696 | 1 | |
| 11 | 1.5 | 0.6667 | 1 | |

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | h=x(D) | 6.6217 | h*v | AB |
| 2 | 1.5267 | 5.8951 | 9 | 6 |
| 3 | 1.5057 | 5.9771 | 9 | |
| 4 | 1.4848 | 6.0614 | 9 | |
| 5 | 1.4639 | 6.1481 | 9 | |
| 6 | 1.4429 | 6.2373 | 9 | |
| 7 | 1.422 | 6.3292 | 9 | |
| 8 | 1.401 | 6.4238 | 9 | |
| 9 | 1.401 | 6.4238 | 9 | |
| 10 | 1.3801 | 6.5213 | 9 | |
| 11 | 1.3592 | 6.6217 | 9 | |

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | h=x(D) | v=y(D) | h*v | AB |
| 2 | 4.7393 | 3.376 | 16 | 8 |
| 3 | 4.7168 | 3.3921 | 16 | |
| 4 | 4.7168 | 3.3921 | 16 | |
| 5 | 4.6943 | 3.4084 | 16 | |
| 6 | 4.6719 | 3.4248 | 16 | |
| 7 | 4.6494 | 3.4413 | 16 | |
| 8 | 4.6269 | 3.458 | 16 | |
| 9 | 4.6044 | 3.4749 | 16 | |
| 10 | 4.582 | 3.492 | 16 | |
| 11 | 4.5595 | 3.5092 | 16 | |

***Figura 6.5.*** Variación de la posición del vértice en función de la altura del triángulo para distintas longitudes de la base $AB$. La relación entre la posición del vértice de la parábola y la altura de los triángulos es $h * v = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$.

iv) Uso de las herramientas para explorar diferentes formas de resolver un problema

¿Cómo encontrar el foco y directriz de la supuesta parábola con ayuda de las características dinámicas de la herramienta? Se puede colocar un punto móvil sobre el eje focal que será el supuesto foco y trazar la directriz correspondiente, para luego representar la propiedad que define una parábola en términos dinámicos usando el punto $A$ que pertenece al lugar geométrico. En las Figuras 6.6. 6.7 y 6.8 se muestra como encontrar el foco $F$ y directriz de la parábola a partir de un posible foco F' móvil usando lugares geométricos y el concepto de triángulo isósceles.

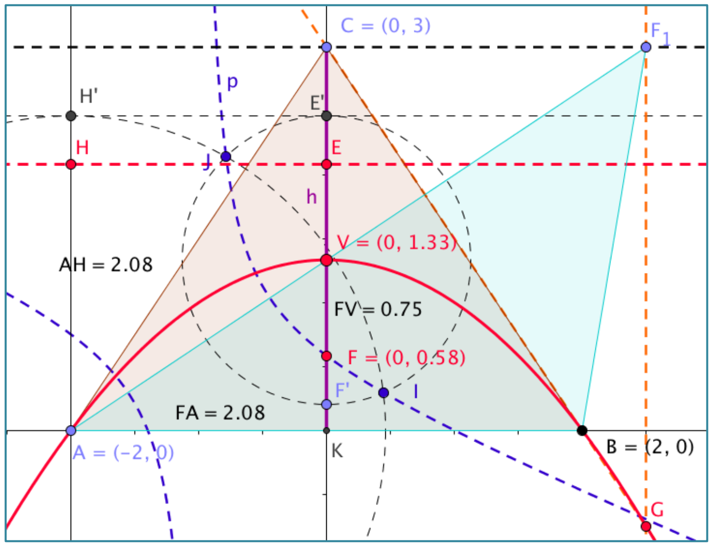



***Figura 6.6.*** Método dinámico (usando un lugar geométrico) para encontrar el foco F y directriz de la parábola ($h = 3\ y\ AB = 4$) a partir de un posible foco F' móvil.

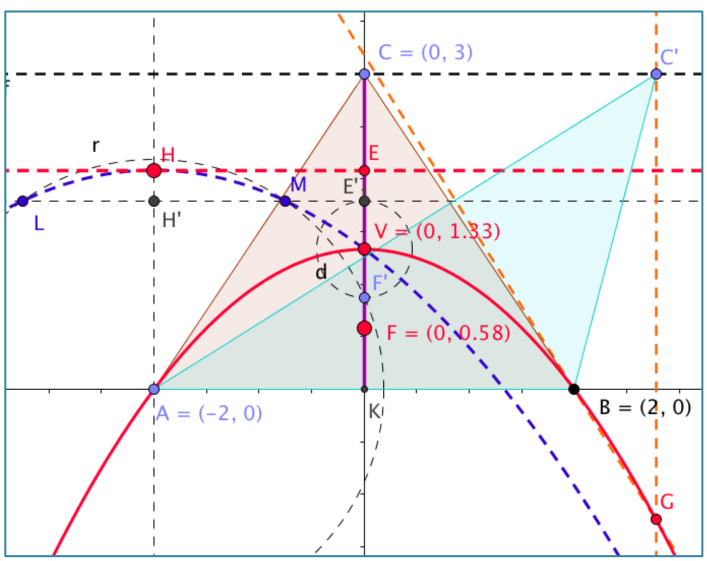



***Figura 6.7.*** Método dinámico (usando otro lugar geométrico) para encontrar el foco y directriz de la parábola ($h = 3\ y\ AB = 4$) a partir de un posible foco F' móvil.

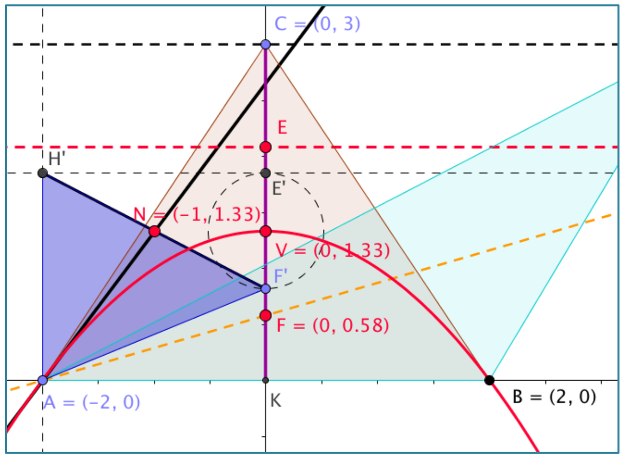



***Figura 6.8.*** Método para encontrar el foco de la parábola detectando invariantes (punto $N$ y recta $AN$) y el concepto de triángulo isósceles.

¿Cómo podría usarse una hoja de cálculo (Excel) para encontrar los elementos de la parábola? En la Tabla 6.1 se muestra un tratamiento numérico para encontrar los elementos de la parábola en función de la altura y base de la familia de triángulos de área constante. El acercamiento gira alrededor del concepto de límite, pues se prueban distintos focos mediante un refinamiento hasta encontrar el foco que cumpla con la condición de la parábola como lugar geométrico (usando el punto $A$ sobre ella).

***Tabla 6.1.*** Acercamiento numérico para encontrar los elementos de la parábola en función de la altura de los triángulos y longitud de su base ($h = 2, AB = 4$).

| Altura | Vértice | Foco (F) | Directriz (l) | Distancia Focal | Distancia AF | Distancia Al | Diferencia | Variación |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1.6 | 2.4 | 0.4 | 2.56124969 | 2.4 | 0.1612497 | 0.1 |
| Base | | 1.5 | 2.5 | 0.5 | 2.5 | 2.5 | 0 | 0.1 |
| 4 | | 1.4 | 2.6 | 0.6 | 2.44131112 | 2.6 | -0.158689 | 0.1 |
| | | 1.3 | 2.7 | 0.7 | 2.38537209 | 2.7 | -0.314628 | 0.1 |
| | | 1.2 | 2.8 | 0.8 | 2.33238076 | 2.8 | -0.467619 | 0.1 |
| | | 1.1 | 2.9 | 0.9 | 2.28254244 | 2.9 | -0.617458 | 0.1 |
| | | 1 | 3 | 1 | 2.23606798 | 3 | -0.763932 | 0.1 |
| | | 0.9 | 3.1 | 1.1 | 2.19317122 | 3.1 | -0.906829 | 0.1 |
| | | 0.8 | 3.2 | 1.2 | 2.15406592 | 3.2 | -1.045934 | 0.1 |
| | | 0.7 | 3.3 | 1.3 | 2.11896201 | 3.3 | -1.181038 | 0.1 |
| | | 0.6 | 3.4 | 1.4 | 2.0880613 | 3.4 | -1.311939 | 0.1 |
| | | 0.5 | 3.5 | 1.5 | 2.06155281 | 3.5 | -1.438447 | 0.1 |
| | | 0.4 | 3.6 | 1.6 | 2.03960781 | 3.6 | -1.560392 | 0.1 |
| | | 0.3 | 3.7 | 1.7 | 2.02237484 | 3.7 | -1.677625 | 0.1 |
| | | 0.2 | 3.8 | 1.8 | 2.00997512 | 3.8 | -1.790025 | 0.1 |

Claramente, el AGD y la hoja de cálculo permiten transformar la Actividad 1, que inicialmente es rutinaria, en una actividad de reflexión matemática. Esta forma de trabajar el problema, por parte del profesor, le ayudó a considerar la actividad como parte de una secuencia didáctica en donde una parábola es vista como el lugar geométrico de un elemento (ortocentro) de figuras geométricas básicas dinámicas (triángulos).

*Extensión del Problema 4*

> *Dada una circunferencia y un punto encontrar el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de la circunferencia y del punto dado.*

v) Uso de un AGD para desarrollar conocimiento matemático novedoso

Los recursos y heurísticas mediados por el AGD permiten no solo detectar oportunidades para diseñar rutas de aprendizaje sino también pueden facilitar el desarrollo de conocimiento matemático novedoso. Un ejemplo de esto es la extensión del Problema 4 donde se pedía a los estudiantes una modificación de la construcción de la parábola para generar la elipse e hipérbola (usando la distancia de un punto a una circunferencia), la cual permite conectar la construcción de las cónicas con el concepto de excentricidad. La solución presentada por un estudiante (Miguel) se muestra en la Figura 6.9. Además de la cónica, Miguel encontró una recta como el lugar geométrico de la intersección entre la mediatriz (del segmento determinado por el foco y un punto móvil sobre la circunferencia) y la recta tangente a la circunferencia.

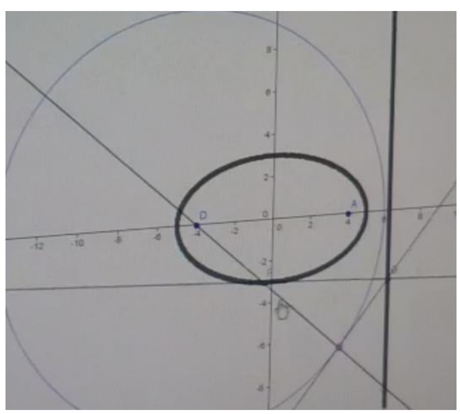


***Figura 6.9.*** Construcción de Miguel.

¿Qué propiedades cumple la recta encontrada por Miguel? Una exploración con ayuda del AGD, permite observar que la razón entre la distancia de un punto sobre la cónica al foco y la distancia de dicho punto a la recta es constante (Figura 6.10). Dicha constante coincide con la excentricidad de la cónica (la demostración geométrica de esto se presenta en el Apéndice C). Lo anterior, da los elementos para diseñar una secuencia didáctica a partir de un AGD en donde la conexión entre la construcción de las cónicas y su excentricidad esta basada en patrones e invariantes novedosos que dependen de relaciones variables.

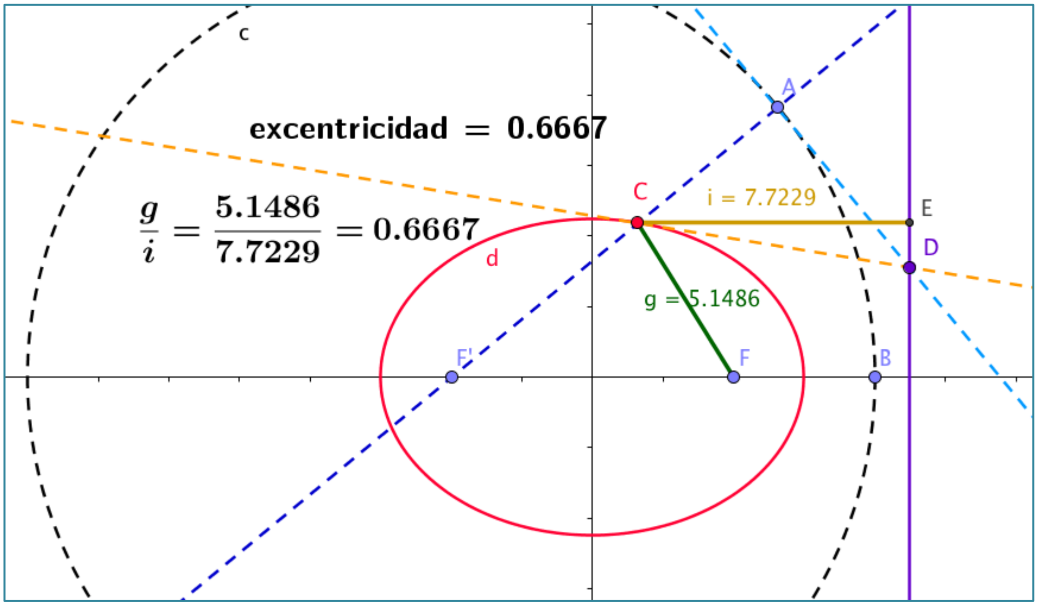



***Figura 6.10.*** Visualización de la excentricidad de la elipse a partir de la razón constante de la longitud variable de dos segmentos.

En resumen, se intentó mostrar una posible estructura del desarrollo de una actividad, donde el planteamiento y seguimiento de diversas preguntas, mediadas por algunas herramientas digitales, puede ofrecer una reflexión matemática importante. La idea es que el profesor, eventualmente, sea capaz de plantear este tipo de reflexiones que le sean útiles para el diseño y uso de actividades de enseñanza en su práctica docente.

### *6.7 Recolección de datos y formas de analizarlos*

Los datos para la investigación se obtendrán por medio de hojas de trabajo de los problemas, entrevistas personales, archivos electrónicos del tratamiento de los problemas con las herramientas digitales y videograbaciones de las sesiones de resolución de problemas. Algunas rutas y lineamientos para el análisis de los datos son los siguientes:

1) Análisis de los episodios de resolución de problemas por medio del marco propuesto por Santos y Camacho (2009). Se busca hacer una caracterización de las preguntas importantes relacionadas con cada episodio.

2) El marco propuesto por Schoenfeld (1985, 2011) se usará para analizar los recursos, estrategias y formas de razonar de los profesores en cada episodio de resolución de problemas.

3) Finalmente, el marco TPCK (Mishra & Koehler, 2006) se usará para describir las conexiones e interrelaciones entre aspectos didácticos, tecnológicos y disciplinares de la actividad de los profesores.

***6.8 Lineamientos generales para el desarrollo del estudio***

En general, la ruta a seguir para el desarrollo de la investigación se compone de tres fases:

A. *Revisión de la literatura.* En el primer año de la investigación se pretende hacer una revisión minuciosa de los estudios relacionados con la formación de profesores y el uso de herramientas digitales en escenarios de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

B. *Diseño de actividades y trabajo con profesores.* Tomando en cuenta la revisión de la literatura efectuada, se diseñaran actividades de resolución de problemas para conformar grupos de trabajo con profesores de bachillerato (se considera un tiempo aproximado de 2 años para esta etapa).

C. *Reporte de la investigación.* En el último año de la investigación se elaborará un trabajo de tesis donde se documentarán los resultados del estudio.

# Referencias Bibliográficas

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 34(3), 66–72.

Baccaglini, A., & Mariotti, M. (2010). Generating Conjetures in Dinamyc Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), pp. 225-253.

Contreras, J. (2011). Using Technology to Unify Geometry Theorems About the Power of a Point. *The Mathematics Educator*, 21(1), pp. 11-21.

Flavell, J.H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist* , 34(10), 906-911. doi: 10.1037/0003-066X.34.10.906

González, G., & Herbst, P. (2009). Student's Conceptions of Congruency Through the Use of Dynamic Geometry Software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14(2), pp. 153-182.

Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. ZDM: The International Journal on Mathematics Education: Transforming Mathematics Education through the Use of Dynamic Mathematics Technologies, 41(4), 399-412.

Jiménez, S. (2011). El uso de un software dinámico en los procesos de comprensión y resolución de problemas de geometría analítica. Tesis de Maestría. Cinvestav, México.

Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3), pp. 283–317.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamics geometry environments. In Proceedings of the Tenth Asian Technology Conference in Mathematics. Korea National University of Education, Cheong-Ju, South Korea, pp. 22–35.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry enviroment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 13, pp. 135-157.

Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics, 44, 25–53.

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Suevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 81-86). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno, L., & Ímaz, C. (2010). *LA GÉNESIS Y LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO Las trampas del rigor*. México: Trillas.

Mishra, P., & Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record, 108(6)*, pp. 1017-1054.

Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(2), 135–156.

Ortega (En revisión). *Resolución de problemas de geometría analítica en un ambiente de geometría dinámica.* Tesis Doctoral. Cinvestav, México.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Reyes, I. (2012). El diseño de un libro interactivo que incorpore la resolución de problemas y el uso coordinado de tecnología. Tesis de Maestría. Cinvestav, México.

Santos, M. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. Boletín dela Asociación Matemática Venezolana. Vol X, No2. pp. 195-212.

Santos, M. (2004). Exploring the triangle inequality and conic sections using interactive software for geometry. En Mathematics Teacher , Vol. 97 No. 1, (pp. 68-72). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. USA.

Santos, M. (2004a). The role of dynamic software in the identification and construction of mathematical relationships. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 23, 399–413.

Santos-Trigo, M. (2007) La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática, 8 (6), pp. 35-54.

Santos, M. (2007a). *Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* México, DF: Trillas.

Santos, M. (2007b). Mathematical problem solving: An evolving research and practice domain. ZDM-The international Journal on Mathematics Education, pp.523-536.

Santos, M. (2008). La Resolución de problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. *Memorias del seminario Resolución de Problemas: 30 años después del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.*

Santos, M, (2008a). An inquiry approach to construct instructional trajectories based on the use of digital technology, Eurasia J. Math. Sci. Technol. Ed. 4, pp. 347–357.

Santos, M. & Camacho, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal whit routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS*, ISSN:1051-1970, 19(3): 260-279.

Santos, M., Espinosa, H. & Reyes, A. (2005). Constructing a Parabolas' World Using Software to Expolore Properties and Meanings. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 12(3), pp. 125-134.

Santos, M., Espinosa, H., & Reyes, A. (2008). Conecting dynamic representations of simple mathematical objets whit the construcción and exploraction of conic sections. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39(5), pp. 657-669.*

Santos, M. & Espinosa, H. (2010). High School Teacher´s use of dynamic software to generate serendipitous mathematical relations. *The Montana Mathematics Enthusiast*, Vol. 7 (1), pp.33-46. Montana Council of Teachers of Mathematics & information age Publishing.

Santos, M., Reyes, A. & Espinosa, H. (2007). Musing on the use of dynamic software and mathematics epistemology. Teaching Mathematics and Its Applications.

Santos, M. & Reyes, A. (2011): Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(3), pp. 313-336.

Santos, M., & Ortega, F. (2013). Digit technology, dynamic representations, and mathematical reasoning: extending problem solving frameworks. *International Journal of Learning Technology*, 8(2), pp. 186-200.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (2011). *How We Think. A Theory of Goal-oriented Decision Making and its Educational Application*, Routledge, NY.

Selden, J., Mason, A., & Selden, A. (1989). Can Average Calculus Students Solve Nounroutine Problems?. *Journal of Mathematical Behavior*, 8(1), 44-50.

Simon, M., and R. Tzur.(2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. Mathematical Thinking and Learning. 6(2): 91–104.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), pp. 4-14.

# Apéndice

## Apéndice A

## Descripción de las fases de introducción y construcción de recursos en el AGD

### Fase de introducción al AGD

#### *Resultados de la Actividad 1*

> *Dado el triángulo de vértices $A(-2{,}0), B(2{,}0)$ y $C(0{,}2)$ encontrar triángulos que tengan la misma base AB y la misma área que el triángulo dado.*

En un principio, la intervención del profesor fue necesaria para esclarecer que la base del triángulo $AB$ debía permanecer fija pues Miguel propuso rotar el triángulo $ABC$ y Fernanda construyó triángulos moviendo la base, aunque conservando la misma área (Figura 7.1).

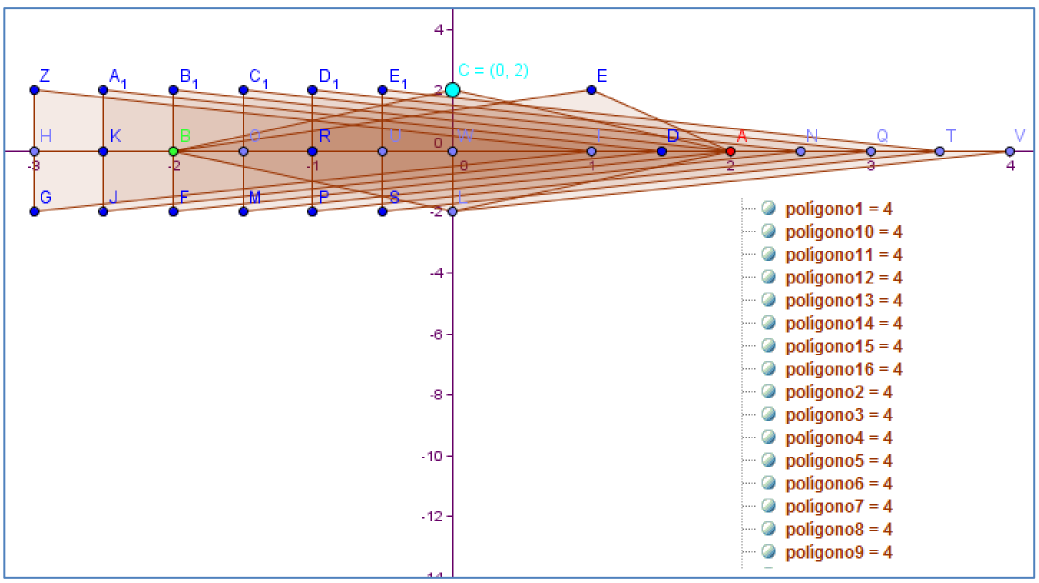



***Figura 7.1*** Construcciones de triángulos  sin base fija conseguidas por Fernanda.

Para resolver el problema, los alumnos usaron las heurísticas de arrastre guiado y medición guiada (contraste), pues movieron un punto libre hasta lograr que el área, del triángulo formado, fuera de cuatro unidades. Posteriormente, el arrastre guiado se transformó en arrastre formando un patrón (acercamiento discreto), pues los alumnos encontraron una familia de triángulos que cumplían con la condición del problema (separación), como se observa en la Figura  7.2.

Es necesario resaltar tres aspectos importantes presentes en este episodio: 1) los alumnos detectaron simetría en el problema, pues a cada triángulo construido arriba del eje $X$ le correspondía un triángulo simétrico debajo del eje, 2) los alumnos tuvieron dificultad en percatarse de que existían una infinidad de triángulos con la misma área (Transcripción 7.1) y 3) la característica particular del AGD de atracción de puntos a coordenadas enteras (característica que puede deshabilitarse) permitió encontrar, de forma exacta, vértices de triángulos con coordenadas enteras. Sin embargo, algunos alumnos encontraron vértices con abscisa en forma decimal que formaban triángulos con el área buscada.

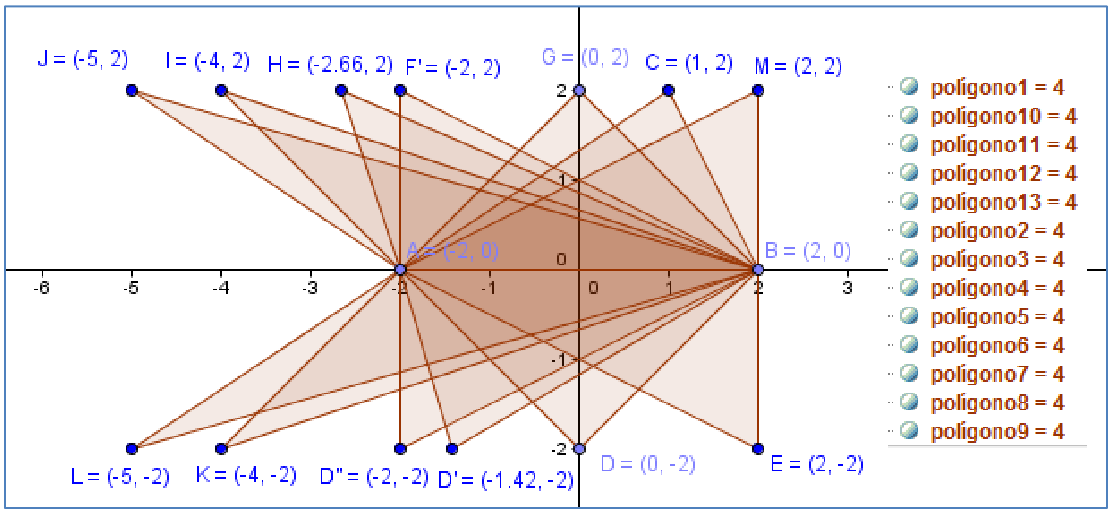


***Figura 7.2.*** Acercamiento discreto (arrastre formando un patrón) a la solución del problema.

*Transcripción 7.1.* Dificultad para concebir el problema de forma continua.

2.21:00 Profesor: la base $AB$ se conserva, ¿en dónde pondrían el tercer vértice?
2.21:03 Alexandra: ¿mover el punto $C$ hacia uno?
*(Alexandra arrastra el punto libre $C(0,2)$ hasta convertirlo en el punto $C(1,2)$ y el profesor le pide que muestre las coordenadas del punto $C$ y construya el triángulo* anterior con vértice en el punto $F(0,2)$)
2.22:33 Profesor: a ver, otro diferente.
*(Alexandra arrastró el punto $D(0,2)$ (que no tenía sus coordenadas visibles) hacia el punto $D(-1.42,-2)$ y lego hacia el $D(-2,-2)$)*
2.23:05 Profesor: ¿cuántos triángulos creen que puedan obtener con la misma área?
2.23:10 Diego: (susurra) un buen!
2.23:12 Miguel: cuatro por lado (refiriéndose a la parte de arriba y abajo del eje $X$).
2.23:14 David: son ocho por lado!!!
2.23:17 Profesor: ¿solamente?
2.23:22 Miguel: pero son más

Después de trabajar el problema de forma discreta, los alumnos lograron generar una conjetura: dado un triángulo, para encontrar triángulos con la misma área y con la misma base que el triángulo dado se debe trazar una recta paralela a la base que pase por el vértice opuesto. Cualquier punto sobre esa línea paralela determina un triángulo con la misma área que el triángulo dado (Transcripción 7.2).  En este sentido, se exhibe un proceso cognitivo de generalización, pues se hacen los ajustes necesarios a una construcción libre para transformarla en robusta, es decir se hacen las modificaciones para que la construcción mantenga, ante el arrastre, la relación matemática encontrada. El arrastre guiado se transformó en arrastre enlazado y arrastre de prueba. Enlazado porque los vértices de la familia de triángulos se colocaron intencionalmente sobre la recta paralela para que cumplieran con la condición del problema. De prueba porque dichos vértices sobre la recta paralela fueron movidos para verificar que el área de los triángulos era constante (medición para validar). En este caso, el arrastre de prueba y medición para validar se convierten en estrategias de control que aportaron información empírica suficiente para validar la conjetura. La construcción conseguida se muestra en la Figura 7.3.

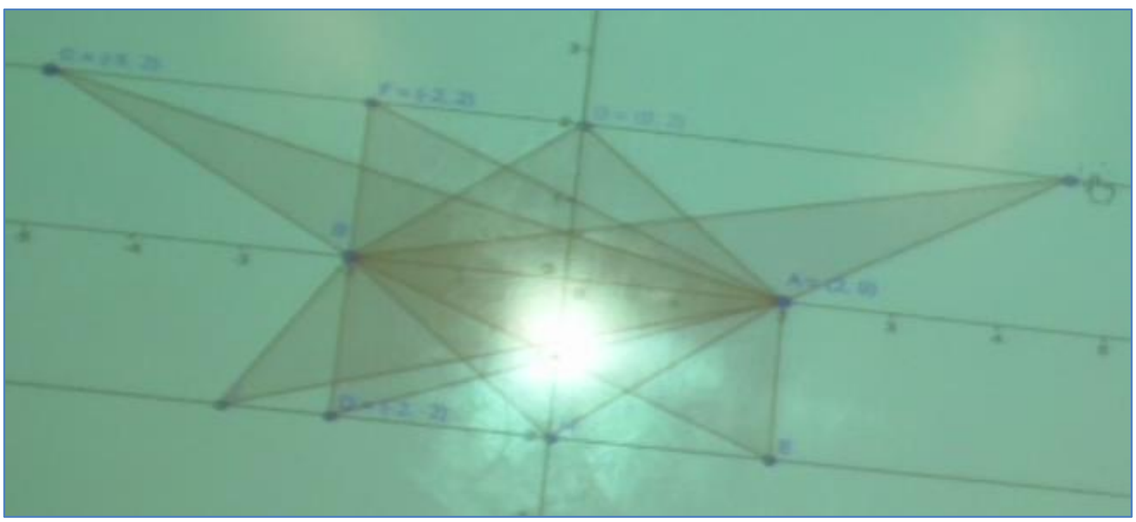


***Figura 7.3.*** Construcción robusta de una familia de triángulos con misma base y áreas iguales.

*Transcripción 7.2.* Identificación de un patrón.

2.27:22 Profesor: ¿a alguien se le ocurre?
2.27:23 Alexandra: son como líneas rectas ¿no? osea por ejemplo, si trazo una línea recta así (mueve su mano de forma horizontal)  y trazo todos los triángulos pues todos van a ser de área cuatro.
2.27:21 Profesor: a ver hazlo

2.27:23 Alexandra: es que no se
2.27:39 Profesor: ¿por dónde tendría que pasar la línea recta? ¿Qué debería de cumplir?
2.27:47 Alexandra: como una perpendicular … pasar por….
2.27:49 Profesor: ¿perpendicular a quién?
*(Alexandra no pudo contestar y el profesor planteo otras preguntas)*
2.28:06 Profesor: ¿cómo tendría que ser esa recta? ¿por dónde tendría que pasar?
2.28:11 Alexandra: por cada uno de los puntos, por el punto $C$ por el punto $F$
2.28:20 Profesor: ¿entonces perpendicular a quien tendría que ser?
2.28:23 Alexandra: pues al centro ¿no? no, a cada uno de los puntos
*(Debido a la dificultad de los estudiantes con el concepto de perpendicularidad, el profesor decidió desviar su atención en las coordenadas de los puntos)*
2.28:11 Karen: todos los puntos tienen que pasar por el dos o por el menos dos, osea porque si lo subes a tres te va a dar seis (refiriéndose al área del triángulo)
2.29:28 Alexandra: entonces tiene que ser perpendicular al punto A ¿no?
2.29:33 Profesor: ¿cómo iría la recta más o menos? osea ahí tienes la herramienta que puede pintar una recta ¿cómo iría más o menos la recta en la que estás pensando?
2.30:51 Alexandra: pero más bien sería una paralela ¿no?
2.30:52 Profesor: ¿a quién?
2.30.53 Alexandra: a $X$

La necesidad de un argumento más poderoso que el empírico fue manifestada por el profesor. Karen afirmó que para construir triángulos de misma área y misma base entonces se debía mantener en $2$ o $-2$ la ordenada del vértice del triángulo. Dicha estudiante comenta que si la ordenada del vértice fuera de 3 o -3 entonces el área sería de 6 unidades. Alexandra afirma que todos los triángulos deben tener la misma altura (Transcripción 7.3).

*Transcripción 7.3.* Argumentación de la relación.

2.33:57 Profesor: entonces ¿cuántos triángulos pudo construir su compañera?
2.34:00 Grupo: no pues un montón
2.34:04 Profesor: ¿cuál es la condición que necesitamos para que el triángulo conserve el área?
2.34:08 Grupo: tener una base fija
2.34:10 Profesor: ¿qué más?
2.34:16 Alexandra: la misma altura
2.34:17 Karen: que $Y$ siempre valga dos

Diego, presentó una construcción de una familia de casos (ya no el triángulo particular con vértice en el punto (0,2)) al considerar los triángulos con vértice móvil $C$ sobre el eje $Y$ por donde traza la recta paralela a la base. Además, Diego contempla los triángulos simétricos con respecto al eje $X$, pues con la herramienta “Refleja objeto en Recta” refleja el punto $C$ con respecto al eje $X$ para encontrar el punto $C'$ por donde construye la familia de triángulos simétricos (Fusión) (Figura 7.4).

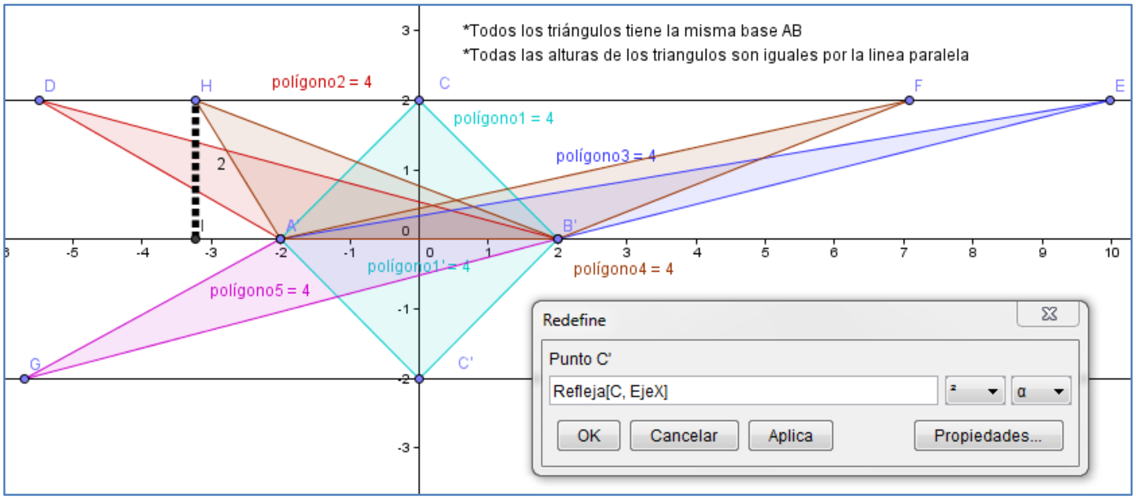


***Figura 7.4.*** Ejemplo de argumentación ofrecida por los estudiantes.

La altura (longitud) de un triángulo y la distancia de un punto a una recta están íntimamente relacionadas, pues el valor numérico de la altura corresponde a la mínima distancia entre la recta determinada por la base del triángulo y el vértice opuesto a dicha base; este hecho se trabajó de manera explícita en esta actividad (Transcripción 7.4). La relación entre el valor numérico de la altura de un triángulo y la distancia entre una recta y un punto no fue fácilmente percibida por los estudiantes. Posteriormente, los estudiantes detectaron de forma visual el valor numérico (constante ante la variación del punto móvil sobre la paralela) de la altura como la longitud de un segmento perpendicular a la base.

*Transcripción 7.4.* Visualización de una altura (valor numérico) de la familia de triángulos.

> 3.20:34 Profesor: ¿cuál sería la altura de este triángulo? (el profesor selecciono el triángulo móvil de área constante)
> 3.20:36 Miguel: dos
> 3.20:42 Profesor: ¿pero cómo la visualizamos aquí? (señalando la vista gráfica de Geogebra) ¿cómo se traza la altura?
> 3.20:46 Miguel: en línea recta ¿no?
> 3.20:50 Profesor: ¿línea recta por donde y recta a quién?
> 3.20:52 Miguel: con la base

*(El profesor comenta que el concepto relacionado con lo que quiere decir Miguel con "línea recta" es la perpendicularidad)*
3.20:56 Grupo: perpendicular a la base
*(El profesor recuerda a todo el grupo que la altura de un triángulo está asociada a un lado del triángulo y al vértice opuesto. Los alumnos trazan la altura asociada con la base fija y el vértice móvil)*
3.23:04 Profesor: la altura, decía el compañero que midió dos, ¿cómo vemos esa distancia aquí? (señalando la vista geométrica del Geogebra)
*(El grupo tiene dificultades para contestar y el profesor cambia la pregunta)*
3.23:20 Profesor: ¿de dónde a donde va a medir dos?
3.23:22 Miguel: ahhh del punto I (vértice móvil) al…..
3.23:28 Carla: del punto $I$ al cruce de la recta (refiriéndose al pie de la perpendicular en la base) con el eje $X$.
*(El profesor localiza el punto de intersección y mide la distancia entre dicho punto y el punto $I$)*

Finalmente, mediante el trazado de rectas perpendiculares para encontrar las alturas (rectas) y el ortocentro del triángulo móvil de área constante, el profesor mostró a los estudiantes las heurísticas de movimiento dependiente, rastro y lugar geométrico. El profesor pidió al grupo que centraran su atención en el movimiento del ortocentro del triángulo en función del arrastre del vértice móvil (heurística de movimiento dependiente). En este momento se introdujo la heurística de visualizar el rastro que deja un punto cuando se mueve otro objeto de la configuración (Figura 7.5). Al ver el rastro del punto de intersección de las dos alturas, los estudiantes afirmaron que era una parábola.

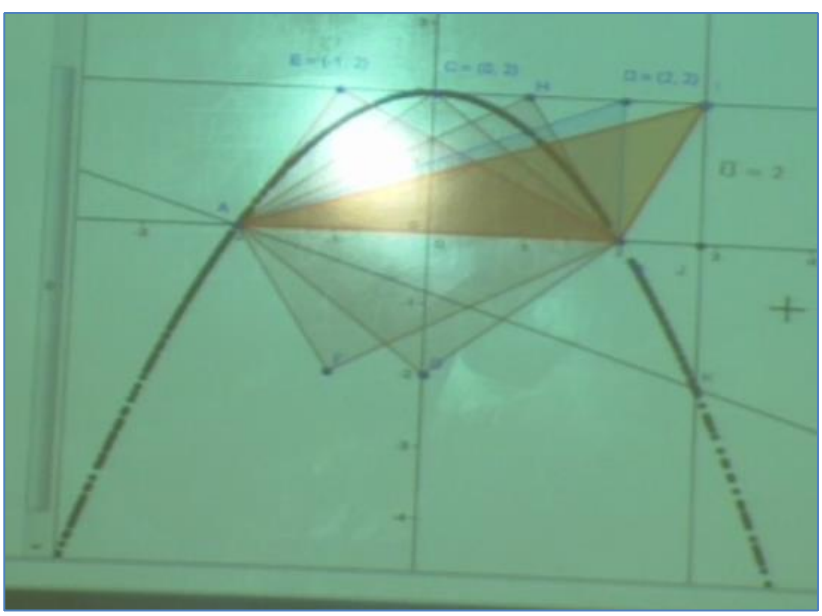


***Figura 7.5.*** Introducción a la heurística particular de rastro.

***Tabla 7.1.*** Resumen de Recursos y Heurísticas usados en la Actividad 1, las características novedosas, con respecto al episodio anterior, se resaltan con negrita.

| **Episodio** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Implementación de un plan de solución* (Construcción libre de la Figura 7.1) | Punto, segmento, triángulo, área y base de triángulo, polígono, sistema de coordenadas rectangulares | Colocar puntos libres en el plano, trazar triángulos con herramienta “Polígono”. | Asociar coordenadas variables a puntos móviles, asociar área variable a triángulos móviles, aprovechar las características del plano cartesiano. | Detectar simetría en el problema | Simetría del problema, exploración de casos particulares.<br>Arrastre guiado y medición guiada (Contraste)<br>Arrastre formando un patrón y medición guiada (Separación) |
| *Búsqueda de patrones y una solución general* (construcción robusta de la Figura 7.3) | **Recta paralela,** punto, segmento, triángulo, área y base de un triángulo, polígono, sistema de coordenadas rectangulares | **Trazar recta paralela,** trazar triángulos con herramienta “Polígono”. | **Colocar punto móvil sobre recta**, asociar área variable a triángulos móviles, aprovechar las características del plano cartesiano. | Detectar simetría en el problema | **Generalizar el problema, comprobar el resultado. Arrastre enlazado, arrastre de prueba y medición para validar Generalización** |
| *Conexiones y extensiones* (construcción de Figura 7.5) | **Alturas de un triángulo, ortocentro,** área y base de un triángulo, punto, segmento, triángulo, polígono, sistema de coordenadas rectangulares | **Localizar punto de intersección entre dos rectas, trazar rectas perpendiculares** | **Trazar las alturas de un triángulo** | **Asociar el área constante de una familia de triángulos de misma base con las coordenadas del vértice opuesto y con una altura constante** | Arrastre enlazado **y movimiento dependiente (Ortocentro)**<br>**Rastro de un punto móvil dependiente (fusión)** |

***Resultados del Problema 1***

> *El perímetro de un rectángulo es de 18 cm, y sabemos que su base es 5 cm más larga que su altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?*

Los alumnos ya habían resuelto problemas de este tipo en el salón de clases, mediante la resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. El trazado de rectángulos y la representación dinámica de la variación dependiente, entre su base y altura, fueron dos actividades primordiales para resolver este problema. Es importante señalar que el profesor sugirió a los estudiantes apoyarse de los ejes coordenados para construir los rectángulos, es decir, propuso que sus lados estuvieran sobre los ejes. Así, surgieron dos propuestas por parte de los estudiantes para trazar rectángulos; la primera, consistía en introducir mediante la barra de comandos puntos con coordenadas específicas (el origen del sistema coordenado sería uno de los vértices del rectángulo); la segunda, propuesta por Honorine consistió en trazar rectas paralelas a los ejes (Transcripción 7.5).

*Transcripción 7.5.* Propuestas para trazar rectángulos en el AGD.

5.04:10 Profesor: ¿cómo dibujaríamos un rectángulo?
5.04:22 Giovanni: con cuatro puntos
5.04:25 Profesor: podemos poner un punto, por simplicidad, ¿aquí en los ejes no? (colocó el punto $A(0,0)$ de intersección de los ejes coordenados)
5.04:27 Giovanni: aja!
5.04:33 Profesor: ¿luego otro punto donde?
5.04:34 Giovanni; en el dos (sugiriendo al profesor el punto $B(0,2)$)
5.04:42 profesor ¿y luego?
5.04:49 Giovanni; en el cuatro, ¡no! menos cuatro, umm... en el cuatro de ahí (señalando el punto $C(4,0)$)
5.05:10 Profesor: bueno ¿y el otro?
5.05:12 Giovanni: pues ¡ahí! ahí arriba (refiriéndose al primer cuadrante)
5.05:17 Profesor: ¿y cómo le hacemos? yo puedo ponerlo ahí ¿no? (el profesor colocó un punto arbitrario en el primer cuadrante)
5.05:28 César: con las coordenadas
5.05:33 Profesor: ¿y si no supieras las coordenadas que harían?
5.05:43 Honorine: ¡ahh! que los uniéramos con rectas perpendiculares
*(En este momento Honorine no supo cómo trazar las rectas perpendiculares, por lo cual el profesor regresó a la idea de las coordenadas)*
5.06:06 Profesor: Este es un lado y este es otro lado del rectángulo (*el profesor trazó los segmentos sobre los ejes determinados por los puntos $A(0,0), B(0,2)$ y $C(4,0)$ y explicó que dichos lados ya cumplían con la condición de ser lados perpendiculares por estar sobre los ejes coordenados)*

5.06:34 Profesor: entonces ¿cómo encuentro el otro vértice del rectángulo si esta es la base y esta la altura? (*seleccionando los segmentos trazados*)

5.07:28 Carla: podemos hacer que el punto $C$ este en el cuatro (el punto C había sido movido) y $B$ que este en el tres y luego marcamos el ¿tres coma cuatro?

El profesor colocó el punto $D(3,4)$ por indicación de Carla

5.08:05 Honorine: entonces es cuatro coma tres ¿no?

*El profesor corrigió el punto D trazó el polígono determinado por los cuatro puntos, pero el profesor comentó al grupo que ese era un rectángulo particular y que la idea era aprovechar el dinamismo del software para trazar una familia de rectángulos, así, movió los puntos* $A, B, C$ *y mostró a los alumnos que no se conservaba un rectángulo.*

5.08:30 Honorine: ¿o no sería con una línea paralela a Y y una paralela a X?

5.09:10 Profesor: ¿paralelas como Honorine?

5.09:13 Honorine: una recta paralela a $X$ y lo pones ahí en el punto $B$ y luego una paralela a $Y$ y en el punto $C$

Posteriormente, el objetivo fue representar dinámicamente la variación dependiente entre la base y altura del rectángulo (la base cinco unidades más grande que la altura). En primera instancia, los alumnos exploraron casos particulares, pues arrastraron los dos vértices móviles (sobre los ejes) hasta conseguir rectángulos que cumplían con la condición del problema (arrastre y medición guiados), es decir, implementaron una función cognitiva de separación entre las dimensiones del rectángulo. En segunda instancia, la actividad se transformó en encontrar una familia de rectángulos que siempre cumplieran con la condición del problema y que su variación dependiera del movimiento de un solo punto. En este camino, la relación entre la base y la altura del rectángulo fue introducida, por el profesor, en la barra de comandos con la ecuación $altura = b - 5$ donde $b$ era el parámetro asociado con la longitud de la base del rectángulo construido.

Una vez calculado el valor numérico de la altura (en la vista algebraica) el reto fue trazarla. Esta dependencia entre la variación de la base y la variación de la altura (función cognitiva de fusión) no fue fácilmente percibida por los estudiantes, debido principalmente a su poca experiencia con el uso de relaciones variables (variación dependiente) dentro del AGD. En ese momento, el profesor decidió mostrar el comando de “Circunferencia dados su Centro y Radio” y Karen no tardó en afirmar que el radio de la circunferencia tendría que ser la “altura” y dicha circunferencia se utilizó para encontrar el tercer vértice del rectángulo (punto de intersección de la circunferencia con el eje Y), como se observa en la Figura 7.6)

Finalmente, el perímetro del rectángulo se obtuvo sumando todas las longitudes variables (parámetros) de sus lados. Una dificultad persistente en la mayoría de los alumnos fue el transitar de casos particulares al caso general mediante el uso de parámetros o variables; Itzia colocó 0.86 (valor numérico de "altura" en ese instante) en vez de introducir "altura" para el radio de la circunferencia. También, fue claro que el considerar a una circunferencia como una forma de trasladar una distancia a todo el plano cartesiano es una competencia relevante geométrica que, mediante el AGD, puede ser asimilada por los estudiantes; para encontrar el último vértice, algunos estudiantes trazaron otra circunferencia con centro el punto móvil $C$ y radio "altura". Ya con la construcción robusta de los rectángulos (base cinco unidades mayor a la altura), los alumnos resolvieron el problema mediante una función cognitiva de contraste, es decir, cambiaron las dimensiones del rectángulo (arrastre y medición guiados) hasta que el perímetro del rectángulo fuera el deseado de 22 unidades (Figura 7.6).

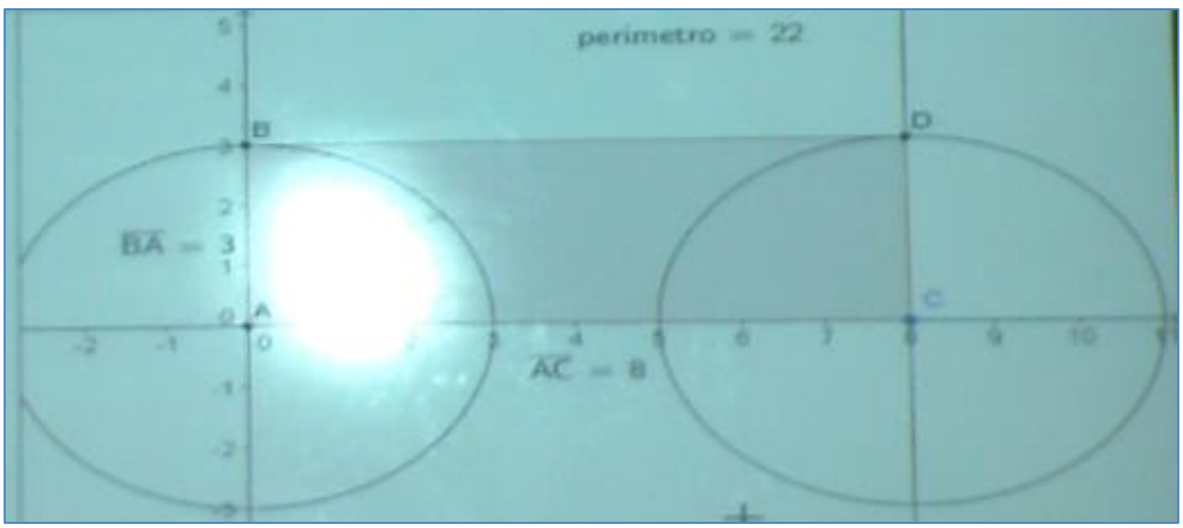



***Figura 7.6.*** Construcción robusta para resolver el problema con el arrastre de un solo punto (C).

***Tabla 7.2*** Análisis de las construcciones usadas para resolver el Problema 1.

| **Construcción** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimiento algorítmico*** | ***Procedimiento de rutina*** | ***Competencia relevante*** | |
| *Construcción de rectángulo estático.* Tipo: libre. Carla, Carlos, David, Miguel, César, Virginia, Giovany, Alan | Punto, coordenadas rectangulares, plano cartesiano, ejes coordenados, segmento, longitud, distancia, polígono, rectángulo, vértice. | Insertar puntos por medio de la barra de comandos. Trazar polígono dado sus vértices. | Aprovechar las características geométricas de los ejes coordenados. | Relacionar las coordenadas de un punto con el vértice de un rectángulo. | Uso del plano cartesiano, explorar casos particulares, relajar condiciones del problema.<br>Arrastre guiado y medición guiada (contraste). |
| *Construcción de rectángulo dinámico.* Tipo: robusta. Diego, Honorine, Fernanda, Itzia, Alexandra, Karen | **Rectas paralelas, punto de intersección,** punto, plano cartesiano, coordenadas rectangulares, ejes coordenados, segmento, longitud, distancia, polígono, rectángulo, vértice. | **Trazar rectas paralelas. Encontrar punto de intersección de rectas.** Trazar polígono dados sus vértices. | Aprovechar las características geométricas de los ejes coordenados. | **Relacionar rectas paralelas a los ejes coordenados con coordenadas rectangulares.** Relacionar las coordenadas de un punto con el vértice de un rectángulo. | **Analizar una familia de objetos,** uso del plano cartesiano, explorar casos particulares<br>Relajar condiciones del problema.<br>Arrastre atado, medición guiada **y movimiento dependiente** (separación) |
| *Construcción de rectángulos con base cinco unidades mayor a la altura.* Tipo: robusta. (Figura 7.6) Profesor | **Circunferencia,** recta paralela, punto de intersección, punto, plano cartesiano, coordenadas rectangulares, ejes coordenados, segmento, longitud, distancia, polígono, rectángulo, vértice. | **Encontrar punto de intersección entre recta y circunferencia.** Trazar rectas paralelas. Encontrar punto de intersección de rectas. Trazar polígono dados sus vértices. | **Introducir una relación en la barra de comandos $\boldsymbol{altura = b - 5}$ y trazar circunferencias con radio "altura" que depende del movimiento del punto $\boldsymbol{C}$.** | **Utilizar una circunferencia para trasladar una distancia a todo el plano cartesiano.** Relacionar las coordenadas de un punto con el vértice de un rectángulo. Relacionar rectas paralelas a los ejes coordenados con coordenadas rectangulares. | Analizar una familia de objetos, uso del plano cartesiano, explorar casos particulares.<br>Arrastre atado, **arrastre de prueba y medición para validar** (Generalización)<br>Movimiento dependiente **y variación dependiente** (Fusión). |

***Resultados del Problema 2***

> *La base mayor de un trapecio mide el triple que su base menor. La altura del trapecio es de 3 cm y su área es de 12 $cm2$ .Calcula la longitud de sus dos bases.*

Las interpretación de las características geométricas de un trapecio variaron de estudiante en estudiante; la única característica geométrica común, mencionada por los estudiantes, fue el paralelismo de sus bases, lo cual resultó en varias propuestas de solución diferentes. Incluso después de resolver el Problema 1 de forma dinámica y robusta, algunos estudiantes intentaron resolver este problema con un acercamiento libre, es decir, colocaron el punto $A$ de intersección de los ejes coordenados como uno de los vértices y cuatro puntos $B, C$ $y$ $D$ libres sobre el plano que arrastraron (arrastre y medición guiados) para conseguir trapecios específicos (contraste), como se observa en la Figura 7.7. Algunos alumnos, como Cesar y Carlos mostraron dificultades para usar la heurística de arrastre atado, pues el punto $D$ que determinaba la base de sus trapecios (junto con el origen del plano cartesiano) fue arrastrado hasta el eje $X$, en vez de colocarlo directamente sobre dicho eje.

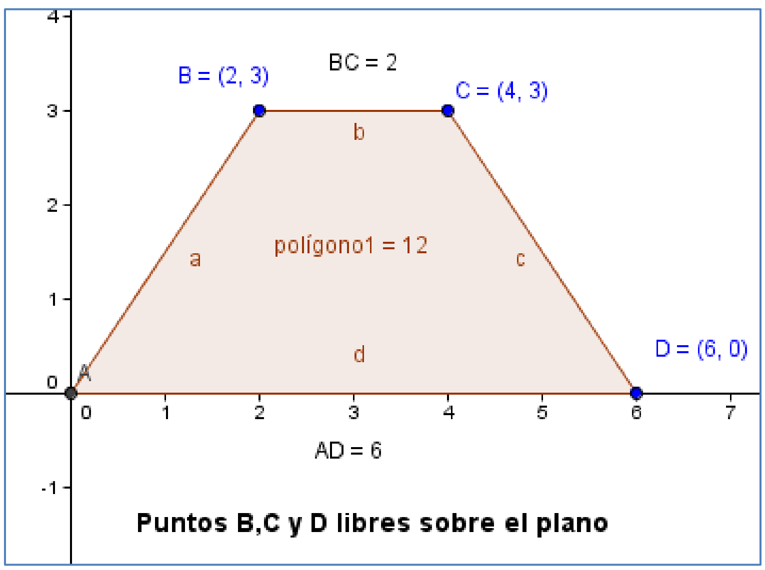



***Figura 7.7.*** Construcción libre del trapecio.

La mayoría de los estudiantes (Fernanda, Honorine, Itzia, Alexandra, Carla, Miguel, David) construyeron trapecios con altura de tres unidades de forma robusta, es decir, construyeron una familia de trapecios con base mayor y menor variables pero con altura constante usando una recta paralela al eje $X$ (Figura 7.8).

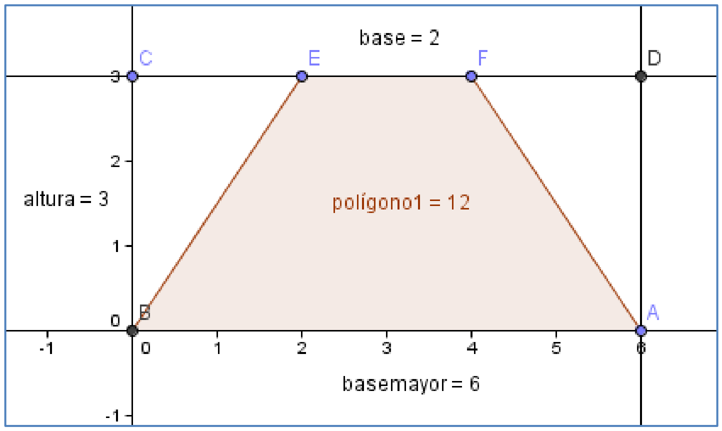



***Figura 7.8.*** Ejemplo de trapecio con bases variables.

El primer uso de una circunferencia para trasladar una medida por parte de un estudiante fue mostrado por Honorine, quién detectó que la base mayor tenía que medir seis unidades y a partir de eso trazó la base menor de dos unidades con el comando de "Circunferencia dados su Centro y su Radio (Figura 7.9).

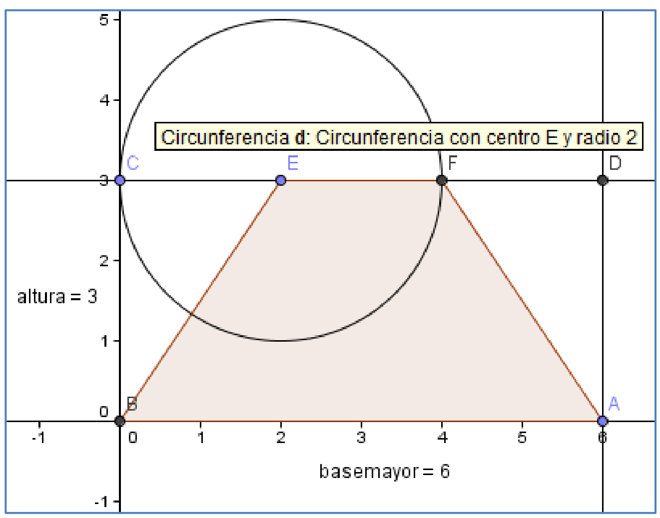



***Figura 7.9.*** Construcción de trapecio con base menor fija de 2 unidades.

En un principio, todos los alumnos a excepción de Karen, intentaron construir trapecios isósceles para resolver el problema. Karen, por otro lado, uso un trapecio rectángulo y fue la primera estudiante que lo construyó conservando siempre la relación entre sus bases. Karen es la primera estudiante que usa una circunferencia para trasladar una distancia variable en función de un parámetro (longitud de la base mayor) dentro de la construcción (Figura 7.10).

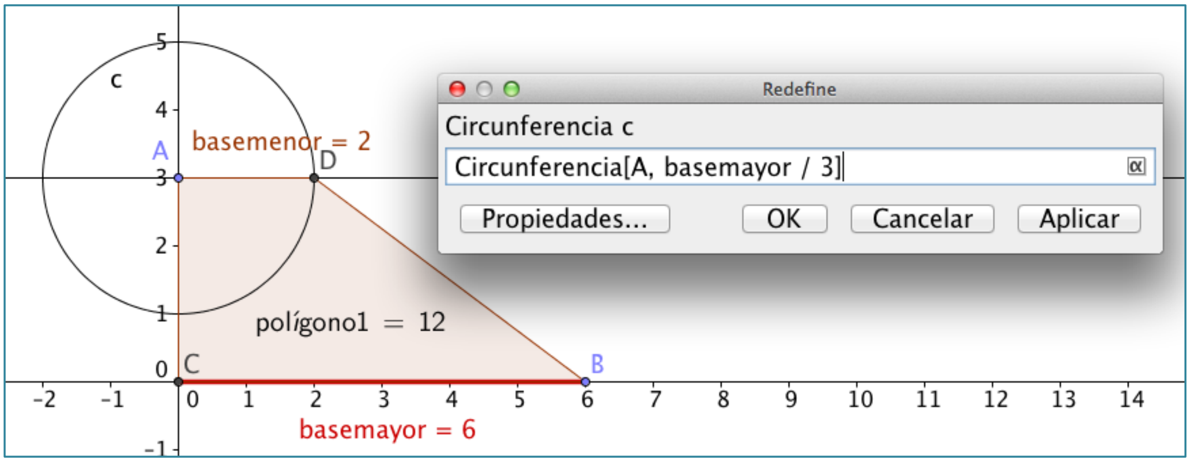



***Figura 7.10.*** Construcción de trapecios rectangulares que conservan la relación entre sus bases.

Los alumnos no reconocieron la figura presentada por Karen como un trapecio, debido a su idea de trapecios simétricos (isósceles) (Figura 7.11). Este hecho originó una discusión grupal que permitió la exploración de otros acercamientos a la solución del problema.

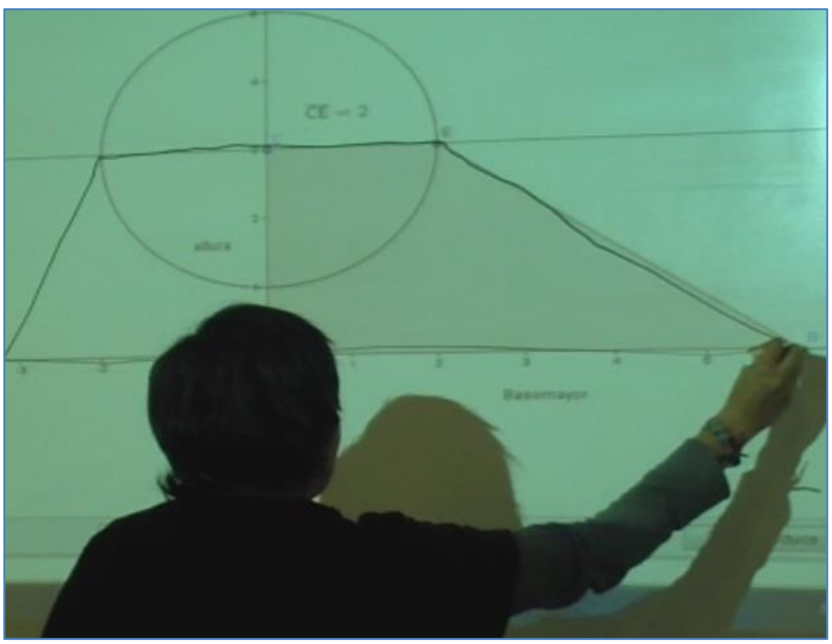


***Figura 7.11.*** Carla pasa a mostrar al grupo lo que ella entiende por trapecio.

La atención se centró en aprovechar la construcción de Karen para construir trapecios isósceles. Itzia propuso usar dos circunferencias de radio variable dependiente a partir de un rectángulo de base $AB$ y altura tres (Figura 7.12).

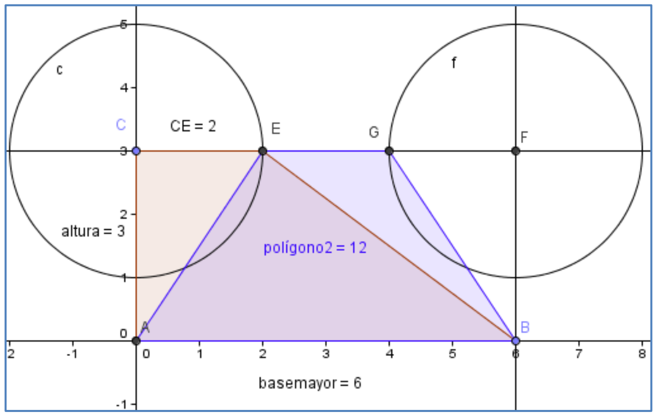



***Figura 7.12.*** Construcción de trapecios isósceles.

Esta construcción es válida para resolver este problema específico, es decir, la construcción cumple con la razón $\frac{base\ mayor}{base\ menor} = 3$, sin embargo, si la razón fuera distinta, por ejemplo si $\frac{base\ mayor}{base\ menor} = 5$, entonces el razonamiento aplicado por Itzia producería una construcción de trapecios con razón $\frac{base\ mayor}{base\ menor} = \frac{5}{3}$, pues la base menor mediría tres quintas partes de lo que mediría la base mayor (ya que se restaría una quinta parte de cada lado del rectángulo).

Finalmente, Diego propuso una forma de generalizar la construcción de trapecios mediante una base menor móvil sobre la recta $y = 3$ paralela al eje $X$, en otras palabras, Diego propuso construir una familia de trapecios escalenos que por medio de un arrastre guiado se podían transformar en un trapecio rectangular o isósceles. La construcción es similar a la de Karen, aunque la circunferencia de radio “basemayor/3” se trazó con centro en un punto móvil $D$ sobre la recta paralela al eje $X$ (Figura 7.13).

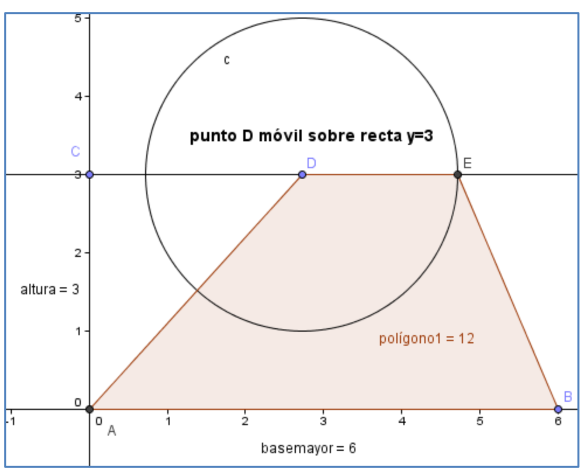



***Figura 7.13.*** Construcción de trapecios escalenos.

***Tabla 7.3*** Análisis de las construcciones usadas para resolver el Problema 2.

| **Construcción** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimiento algorítmico*** | ***Procedimiento de rutina*** | ***Competencia relevante*** | |
| *Construcción de trapecio isósceles estático.* Tipo: libre. César, Carlos Fig. 7.7 | Punto, coordenadas rectangulares, plano cartesiano, ejes coordenados, segmento, longitud, distancia, polígono, trapecio isósceles, paralelismo | Insertar puntos por medio del comando Nuevo Punto. Trazar polígono dado sus vértices. | Encontrar puntos en el plano que estén a la misma altura y aprovechar las características geométricas de los ejes coordenados. | | Uso del plano cartesiano. Explorar casos particulares. Relajar condiciones del problema. Arrastre guiado y medición guiada. (Contraste) |
| *Construcción de trapecio escaleno dinámico.* Tipo: robusta. Fernanda, Honorine, Itzia, Alexandra, Carla, Miguel, David Fig. 7.8 | **Rectas paralelas, punto de intersección** punto, coordenadas rectangulares, plano cartesiano, ejes coordenados, segmento, longitud, distancia, polígono, **trapecio escaleno**. | **Trazar rectas paralelas**. **Localizar puntos de intersección.** Trazar polígono dados sus vértices. | Aprovechar las características geométricas de los ejes coordenados. | **Relacionar altura con perpendicularidad**. | **Analizar familia de objetos**, uso del plano cartesiano, explorar casos particulares, relajar condiciones del problema. Arrastre atado, arrastre guiado, medición guiada y **movimiento dependiente** (Separación) |
| *Construcción de trapecio escaleno dinámico con base menor de longitud fija.* Tipo: robusta. Honorine Fig. 7.9 | **Circunferencia,** rectas paralelas, circunferencia, punto de intersección, punto, coordenadas rectangulares, plano cartesiano, ejes coordenados, segmento, longitud, distancia, polígono, trapecio. | **Trazar circunferencia con radio constante.** Trazar rectas paralelas. Trazar polígono dados sus vértices. Localizar puntos de intersección. | Aprovechar las características geométricas de los ejes coordenados. | **Utilizar una circunferencia para trasladar una distancia a todo el plano.** Relacionar altura con perpendicularidad. | **Analizar familia de objetos**, uso del plano cartesiano, explorar casos particulares, relajar condiciones del problema. Arrastre atado, arrastre guiado, medición guiada y movimiento dependiente (Separación) |

***Tabla 7.3*** Análisis de las construcciones usadas para resolver el Problema 2.

| **Construcción** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimiento algorítmico*** | ***Procedimiento de rutina*** | ***Competencia relevante*** | |
| *Construcción de trapecio rectángulo dinámico con relación entre base mayor y menor*<br>Tipo: robusta.<br>Karen<br>Fig. 7.10 | Punto, plano cartesiano, ejes coordenados, segmento, longitud, distancia, polígono, **trapecio rectángulo**, rectas paralelas, circunferencia, punto de intersección. | Trazar rectas paralelas. Trazar polígono dados sus vértices. Localizar puntos de intersección. | Aprovechar las características geométricas de los ejes coordenados. **Trazar circunferencia con radio que depende del atributo de otro objeto.** | Relacionar altura con perpendicularidad. **Utilizar una circunferencia para trasladar una distancia variable a todo el plano.** | Explorar casos particulares. Relajar condiciones del problema. Analizar familia de objetos. Uso del plano cartesiano<br>Arrastre atado, medición guiada y **variación dependiente**<br>(Generalización) |
| *Construcción de trapecio escaleno dinámico con relación entre base mayor y menor*<br>Tipo: robusta.<br>Diego<br>Fig. 7.13 | Punto, plano cartesiano, ejes coordenados, segmento, longitud, distancia, polígono, trapecio, rectas paralelas, circunferencia, punto de intersección. | Trazar rectas paralelas. Trazar polígono dados sus vértices. Localizar puntos de intersección. | Aprovechar las características geométricas de los ejes coordenados. Trazar circunferencia con radio que depende del atributo de otro objeto. | Relacionar altura con perpendicularidad. Utilizar una circunferencia para trasladar una distancia variable a todo el plano. | Explorar casos particulares, relajar condiciones del problema, analizar familia de objetos, uso del plano cartesiano. Arrastre atado, **arrastre guiado, Arrastre de prueba,** medición guiada, m**edición para validar y** variación dependiente.<br>(Fusión) |

**Fase de  construcción de recursos**

***Resultados de la Actividad 2***

*Encontrar puntos que estén a dos unidades de distancia del punto* $A(1{,}0)$.

Cuando se aplicó esta actividad, los alumnos ya habían estudiado algebraicamente la distancia entre dos puntos, la distancia entre un punto y una recta y la ecuación de la recta. Los primeros puntos encontrados por los estudiantes fueron los vértices de un cuadrado, como se observa en la Figura 7.14. Estos puntos fueron introducidos por medio de la barra de comandos, lo cual indica que los alumnos sabían de antemano que cumplirían la condición del problema. Una vez colocados los puntos, los estudiantes midieron su distancia al punto $A$ para verificar que fuera de dos unidades (medición para validar). Posteriormente, todos los estudiantes, a  excepción de Miguel, colocaron puntos libres sobre el plano, midieron la distancia (medición guiada) de dichos puntos al punto $A$ y los arrastraron (arrastre guiado) hasta que estuvieran a dos unidades de distancia del punto $A$, es decir, ejecutaron una función cognitiva de contraste para encontrar puntos que cumplieran con la condición del problema (Figura 7.14).

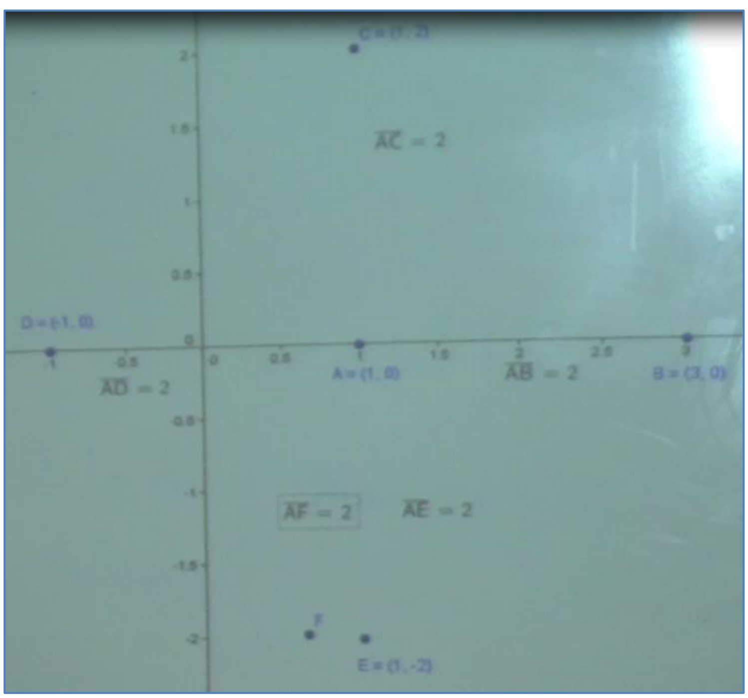



***Figura 7.14.*** Función cognitiva de contraste para encontrar puntos a dos unidades de distancia del punto $A$.

Miguel trazó la circunferencia con centro en el punto $A$ de radio dos unidades y pasó a exponer su idea al grupo (Transcripción 7.6). Es importante mencionar que Miguel comprobó que el círculo cumplía con las condiciones del problema mediante un acercamiento discreto, es decir, colocó varios puntos sobre la circunferencia y midió su distancia al punto $A$, en vez de colocar un solo punto y moverlo para detectar la invariancia de dicha distancia. Lo anterior demuestra que la adquisición de la heurística de movimiento controlado (arrastre atado) no es inmediata. Después, con la intervención del profesor, los estudiantes tuvieron la oportunidad de colocar un punto móvil sobre la circunferencia propuesta por Miguel, medir la distancia entre el punto $A$ y el punto móvil para comprobar que la distancia fuera constante (Figura 7.15). En resumen, en esta construcción se implementó una función cognitiva de generalización pues una construcción libre se transformó en una robusta, además, se utilizaron las heurísticas de arrastre de prueba y arrastre enlazado en conjunto con una medición para validar como soporte de la relación matemática.

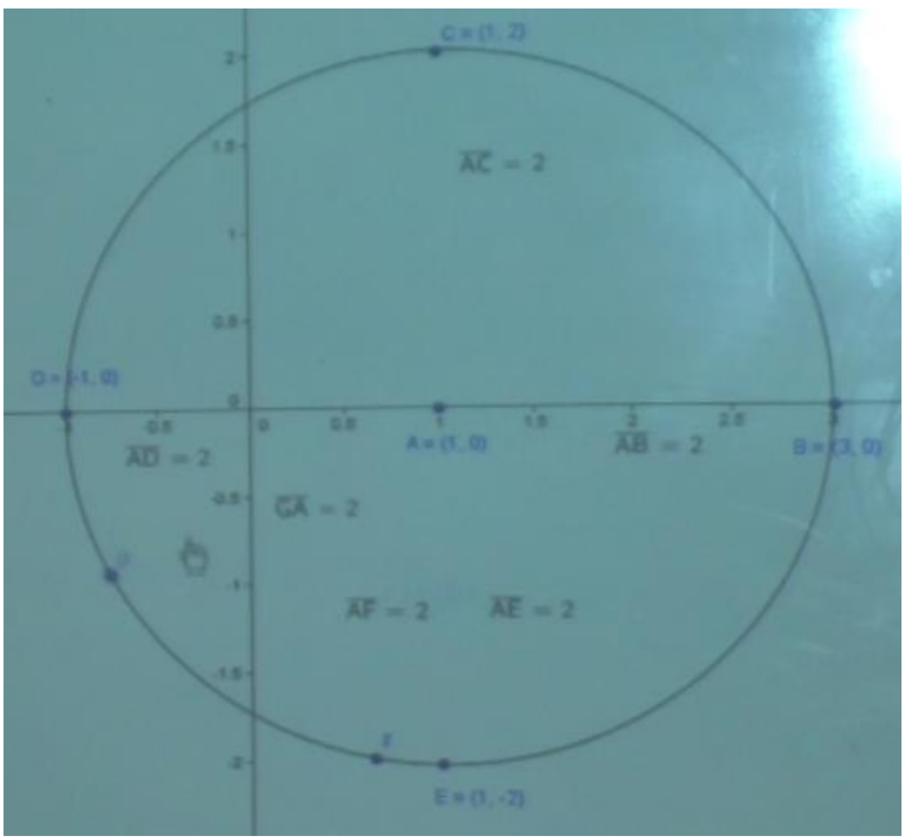



***Figura 7.15.*** Función cognitiva de generalización para encontrar puntos a dos unidades de distancia del punto $A$.

*Transcripción 7.6.* Identificación y argumentación del patrón involucrado.

14.3:06 Miguel: profe ¿así estoy bien? son muchos puntos
14.3:13 Profesor: ¿por qué dices que son muchos?
14.3:17 Miguel: porque aquí puede haber uno, aquí otro, aquí otro… (Señalando varias posiciones sobre la circunferencia)
14.3:18 Profesor: a ver muestra uno
14.3:20 Miguel: bueno aquí hay uno (coloca un punto sobre la circunferencia) marcamos un segmento (traza el segmento determinado por el centro y el punto que colocó, luego muestra su nombre y valor) y aquí puede haber otro y así ¿no?
14.3:47 Profesor: ¿por qué?
14.3:48 Miguel: porque es la misma distancia, es del radio ¿no?... es un radio y están a la misma distancia
*(Miguel pasa al frente a exponer su construcción)*
14.9:40 Profesor: ¿entonces todos los puntos que están ahí *(el profesor señala la circunferencia)* cumplirían con la condición?
14.9:44 Miguel: pues si porque pasan por el…
14.9:49 Alexandra: tienen dos de radio
14.9:50 Profesor: ¿todos están de acuerdo con esto?
14.9:52: Grupo: si
14.9:54 Profesor: ¿hay otros puntos además de estos que están en la circunferencia *(el profesor señala la circunferencia)*?
14.10:03 Miguel: nada más los que están sobre la línea
14.10:06 Honorine: solo los que están sobre la circunferencia
14.10:09 Profesor: son los únicos ¿ya no hay más por acá de este lado o adentro (*el profesor señala la sección exterior e interior de la circunferencia)*?
14.10:13 Alexandra: no porque o son más cortas o son más grandes *(refiriéndose a las distancias)*

Finalmente, se definió a la circunferencia como lugar geométrico partiendo de la distancia entre dos puntos y se hizo un tratamiento algebraico.

***Resultados de la actividad 3***

*Dado el punto* $A(3{,}5)$ *y una recta cualquiera, encontrar la distancia del punto a la recta.*

La mayoría de los estudiantes usaron el comando “Distancia o Longitud” para obtener dicha distancia. Además, algunos estudiantes mencionaron que su construcción era incorrecta porque su distancia era distinta a la de sus demás compañeros, lo que requirió una explicación del profesor. Algunos alumnos comenzaron a sugerir ideas para visualizar geométricamente la distancia de un punto a una recta. Por ejemplo Miguel sugirió trazar un triángulo, pues relacionó la distancia de un punto a una recta con la altura de un triángulo; colocó dos puntos $B\ y\ C$ arbitrarios sobre la recta dada y trazó el triángulo $ABC$, luego trazó la recta perpendicular a la recta $BC$ que pasa por el punto $A$ y localizó el punto de intersección de las rectas perpendiculares, como se observa en la Figura 7.16. Finalmente, Miguel observó que el valor numérico dado por el AGD para la distancia buscada y la distancia entre los puntos $A\ y\ E$ era la misma (medición para validar). Aun cuando Miguel había dado una idea esencial para representar geométricamente la distancia de un punto a una recta, la mayoría de los alumnos no reconocieron a la perpendicularidad como un elemento esencial del problema.

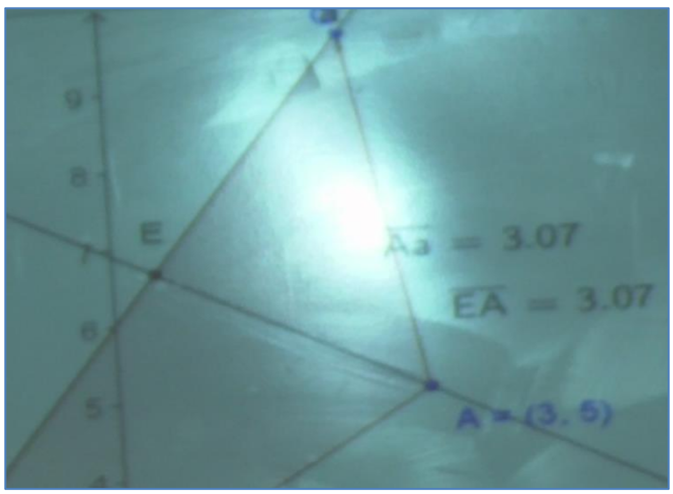



***Figura 7.16.*** Relación entre la distancia entre un punto y una recta con la altura de un triángulo.

Por un lado, Alexandra reconoció que no se requería de un triángulo para localizar geométricamente la distancia entre un punto y una recta (Transcripción 7.7), sin embargo, únicamente trazó la recta perpendicular a la recta dada por el punto dado; a diferencia de Karen, no se le ocurrió localizar el punto de intersección entre las rectas perpendiculares. Karen localizó el punto de intersección entre las perpendiculares y medio la distancia entre dicho punto y el punto dado para verificar que fuera igual al proporcionado por la herramienta (Figura 7.17).

*Transcripción 7.7.* Discusión sobre la necesidad de un triángulo para representar geométricamente la distancia entre un punto y una recta.

15.10:00 Profesor: ¿es esa la distancia que hay de un punto a una recta (señalando la longitud del segmento $AE$)?
15.10:04 Grupo: si
15.10:11 Profesor: ahora, yo hago una pregunta ¿es necesario trazar el triángulo?
15.10:12 Itzia: si
15.10:13: Alexandra: no
15.10:14: Profesor: a ver si Itzia ¿por qué?
15.10:16 Itzia: no pero es más fácil ¿no?
15.10:33 Profesor: tú dices no ¿por qué Alexandra?
15.10:36 Alexandra: pues porque ya está el punto A y ya está la recta, entonces, pues ya nada más trazas la perpendicular del punto $A$ a la recta ¿no?

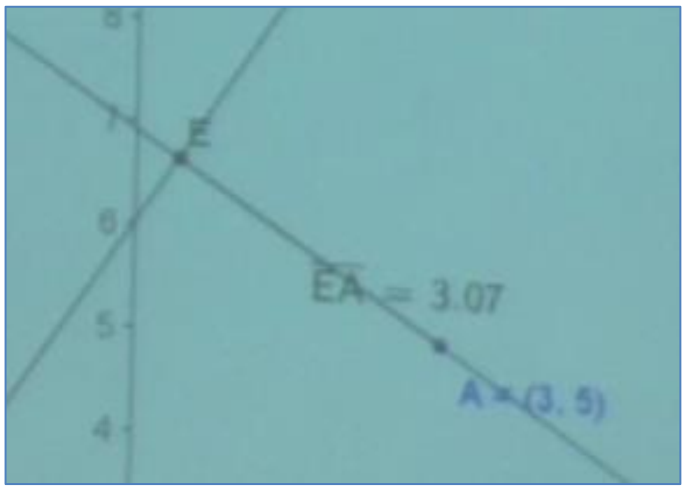


***Figura 7.17.*** Representación geométrica de la distancia de un punto a una recta.

Miguel paso a exponer otra idea relacionada con el trazo de una circunferencia; seleccionó el comando "Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos" y trazó la circunferencia con centro en el punto $A$ y con radio $AE$, donde $E$ era un punto móvil sobre la recta dada. Después, midió la distancia entre los puntos $AE$ y verificó que era mayor que la distancia dada por la herramienta, así, mediante una función cognitiva de contraste (arrastre y medición guiados) movió el punto $E$ hasta que las distancias fueran iguales (véase Figura 7.18). Este acercamiento permitió trabajar con el concepto de recta tangente a una circunferencia. La representación geométrica de la distancia de un punto a una recta y la relación entre dicho concepto con la mínima longitud de cualquier segmento determinando por el punto y la recta son competencias relevantes geométricas. En este sentido la propuesta de Miguel sirvió como plataforma para explorar dicha relación. En esta etapa, el uso de un AGD fue determinante, pues gracias a un arrastre atado y guiado junto con una medición guiada los alumnos lograron detectar que existía una distancia (determinada por el punto dado y un punto en la recta) con longitud mínima (función cognitiva de contraste) (Transcripción 7.8).

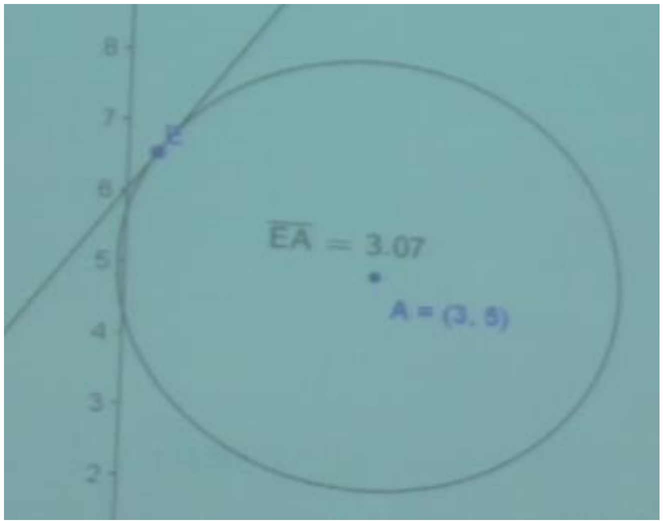



***Figura 7.18.*** Uso de una circunferencia para visualizar la distancia entre un punto y una recta.

*Transcripción 7.8.* Relación entre la distancia de un punto a una recta y circunferencia tangente.

15.24:15 Profesor: ¿cómo es la distancia ahí comparada con las demás (el profesor se refiere a la posición donde la circunferencia es tangente a la recta)?

15.24:27 César: ese punto es… hasta ahí llega por que si se mueve hacia arriba vuelve a subir y si se mueve hacia abajo vuelve a subir (refiriéndose al valor de las distancias entre los puntos $A\ y\ E$)

15.24:46 Profesor: lo que dijo su compañero es que si ese punto ($E$) lo mueves para arriba o para abajo esa distancia crece, entonces exactamente en esa posición cuando la circunferencia es tangente ¿cómo sería la distancia?

15.24:27 César: sería como el menor

***Tabla 7.4*** Recursos y heurísticas utilizados para resolver la Actividad 3.

| **Etapa** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos Algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Implementación de un plan de solución* (Acercamiento usando altura de triángulos) Miguel Figura 7.16 | Triángulo, altura, recta, rectas perpendiculares, punto de intersección, distancia entre dos puntos y entre punto y recta. | Medir distancia entre dos puntos y entre punto y recta, trazar recta perpendicular a otra por un punto fuera de ella, localizar punto de intersección y trazar triángulo como polígono. | Colocar punto móvil sobre una recta y asociar distancia entre punto y recta con la altura de una familia de triángulos con base en la recta dada y vértice opuesto en el punto dado. | Relacionar la distancia entre punto y recta con la longitud de un segmento perpendicular. | Movimiento dependiente y medición para validar (Separación) |
| *Búsqueda de patrones y una solución general* (Solución usando recta perpendicular y pie de perpendicular) Alexandra, Karen Figura 7.17 | Punto, recta, distancia entre puntos y entre recta y punto, segmento, longitud, rectas perpendiculares y punto de intersección. | Trazar recta perpendicular a otra por un punto fuera de ella, localizar pie de perpendicular (punto de intersección), trazar segmento, medir distancia entre puntos y entre punto y recta. | | Relacionar la distancia entre punto y recta con la longitud de un segmento perpendicular. | Medición para validar Generalización |
| *Conexiones y extensiones* (Comparación de distancias) César, Miguel Figura 7.18 | Circunferencia, punto, recta, distancia entre puntos y entre punto y recta. | Trazar una circunferencia dado su centro y uno de sus puntos, medir la distancia entre puntos. | Colocar punto móvil sobre una recta, trazar una circunferencia de radio variable. | Relacionar la distancia entre un punto a una recta con la mínima longitud de cualquier segmento determinado por la recta y el punto dados. | Explorar casos particulares. Movimiento dependiente, arrastre atado y medición guiada (Contraste) |

***Resultados de la Actividad 4***

Los estudiantes empezaron explorando el problema de forma discreta mediante una función cognitiva de contraste, pues colocaron puntos libres en el plano, midieron las distancias de dicho punto a los puntos $A$ $y$ $B$ y arrastraron el punto hasta que las dos distancias se aproximaran. Esta actividad involucra heurísticas particulares de medición guiada y arrastre guiado. Posteriormente, Itzia pasó al frente a mostrar su construcción (Transcripción 7.9) que involucró la construcción robusta (exacta) de dos triángulos equiláteros (Figura 7.19).

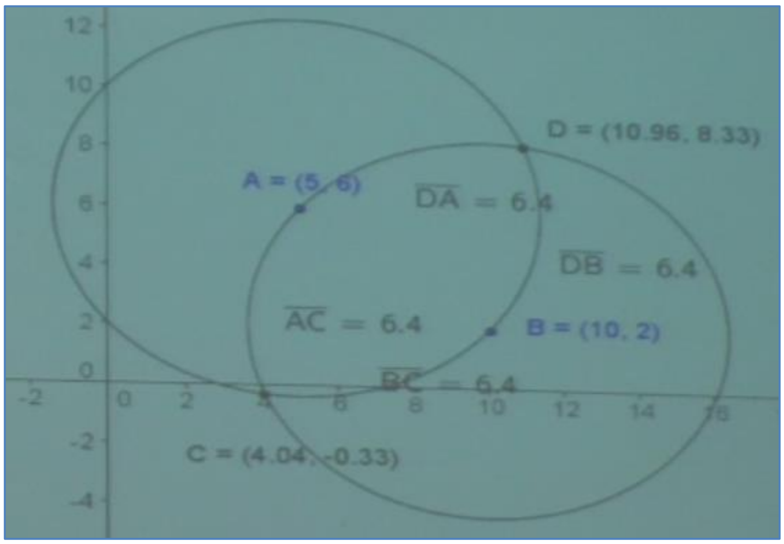



***Figura 7.19.*** Construcción de triángulos equiláteros.

Transcripción 7.9. Identificación de triángulos equiláteros para resolver la Actividad 4.

16.4:52 David: yo ya encontré uno
16.5:11 Alexandra: nada más hay en una línea recta
16.5:12 Itzia: si ya encontré dos
16.5:53 Profesor: ¿cómo le hiciste?
16.5:54 Itzia: con dos círculos
*(El profesor le pide a Itzia que pase al frente explicar su construcción).*
16.6:05 Itzia: tienen que tener la misma distancia de $A$ a $C$ y de $B$ a $C$ ¿no?
*(Itzia traza dos circunferencias de radio $AB$ y centros en los puntos $A$ $y$ $B$, luego localiza los puntos de intersección $C$ $y$ $D$ de las dos circunferencias y toma las distancias de dichos punto s a los puntos $A$ $y$ $B$ para probar que son iguales).*
16.7:11 Profesor: ¿por qué esos puntos están a la misma distancia, cuál sería tu justificación?
16.7:22 Itzia: porque es el punto medio entre las dos, am… la misma distancia… es como si tomando esos tres puntos, uniendo esos tres puntos tienes un triángulo equilátero
16.7:33 Profesor: ¿equilátero?

16.7:34 Itzia: aja, es lo mismo de $A$ a $D$ de $D$ a $B$ y de $B$ a $A$ (Itzia mide la distancia entre A y B muestra que son iguales).

En este acercamiento propuesto por Itzia se observa el uso de la heurística de medición para validar, pues se utiliza para apoyar una relación matemática detectada, además, se observa el uso de circunferencias para trasladar una distancia a todo el plano (competencia relevante) y la relación de una igualdad de distancias con un triángulo equilátero (procedimiento de rutina). Con ayuda de algunas preguntas, los estudiantes pasaron de trabajar la actividad de forma discreta a trabajarla de forma continua (Transcripción 7.10). Al principio Itzia afirmó que los dos puntos encontrados eran los únicos que cumplían con la condición del problema, pero después descubrió que todos los puntos sobre el segmento $CD$ equidistaban de los puntos $A$ y $B$ (Figura 7.20). En esta etapa, Itzia utiliza arrastre enlazado, arrastre de prueba y medición para validar.

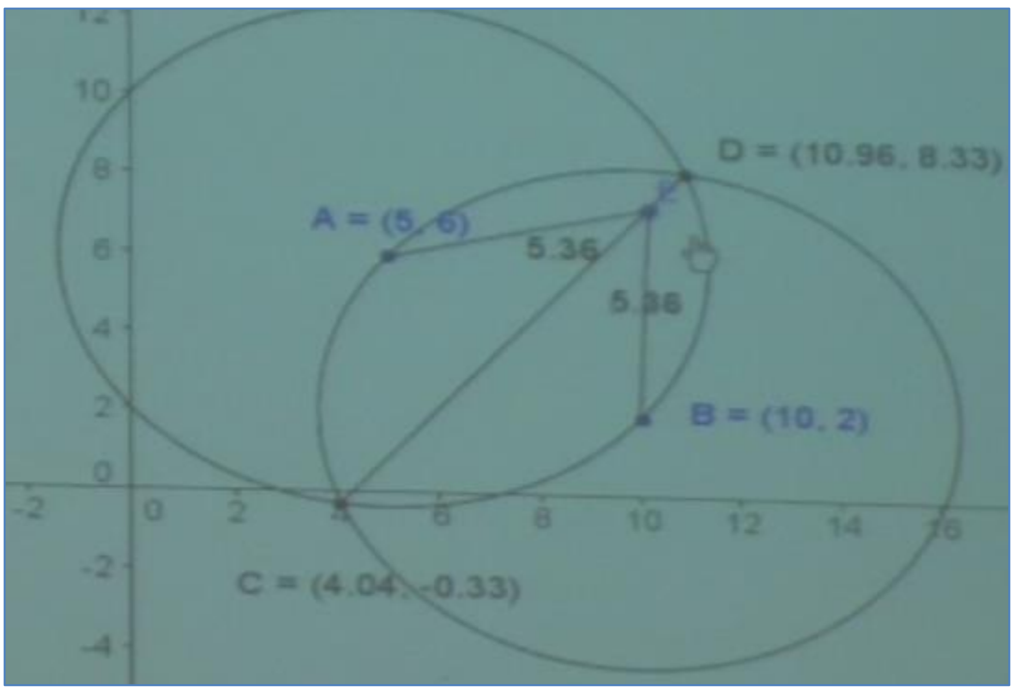



***Figura 7.20.*** El conjunto de puntos sobre el segmento CD equidistan de los puntos A y B.

Transcripción 7.10. Acercamiento continuo a la solución de la Actividad 4.

16.8:40 Profesor: ¿solo serían esos dos Itzia? El chiste es encontrar todos los puntos que equidistan del punto A y el punto B.
16.8:51 David: si si
16.8:52 Carla: ¿si no?
16.8:54: Itzia: no sé, pues sí, o tal vez hacia abajo

16.8:56 Profesor: a ver explórenle
16.9:35 Itzia: ya sé que pasa
16.10:00 Profesor: ¿qué pasó Itzia?
16.10:01 Itzia: tracé la línea $CD$ y todos los puntos que están ahí son iguales.
*(Itzia pasa al frente y traza el segmento $CD$, luego coloca un punto E móvil sobre el segmento, toma las distancias de dicho punto a los puntos A y B y mueve dicho punto para verificar su idea).*

Posteriormente, el análisis del grupo se centró en los triángulos isósceles formados por los puntos $A, B\ y\ E$ (punto móvil sobre segmento $CD$), por lo que la relación entre la mediatriz de un segmento y la familia de triángulos isósceles fue determinante en el proceso de búsqueda de patrones, pues permitió a los estudiantes detectar triángulos isósceles que tenían su vértice fuera del segmento $CD$ pero sobre la recta determinada por dicho segmento (Transcripción 7.11). La construcción final de Itzia es de tipo robusta, pues un punto sobre la línea $CD$ conserva la propiedad de ser equidistante a los puntos $A\ y\ B$ (Figura 7.21). Este tipo de construcción exhibe un razonamiento cognitivo de generalización ya que Itzia logró identificar el patrón involucrado e hizo las modificaciones necesarias a su construcción para obtener el lugar geométrico buscado. Las heurísticas particulares usadas son la medición para validar, arrastre de prueba y arrastre enlazado.

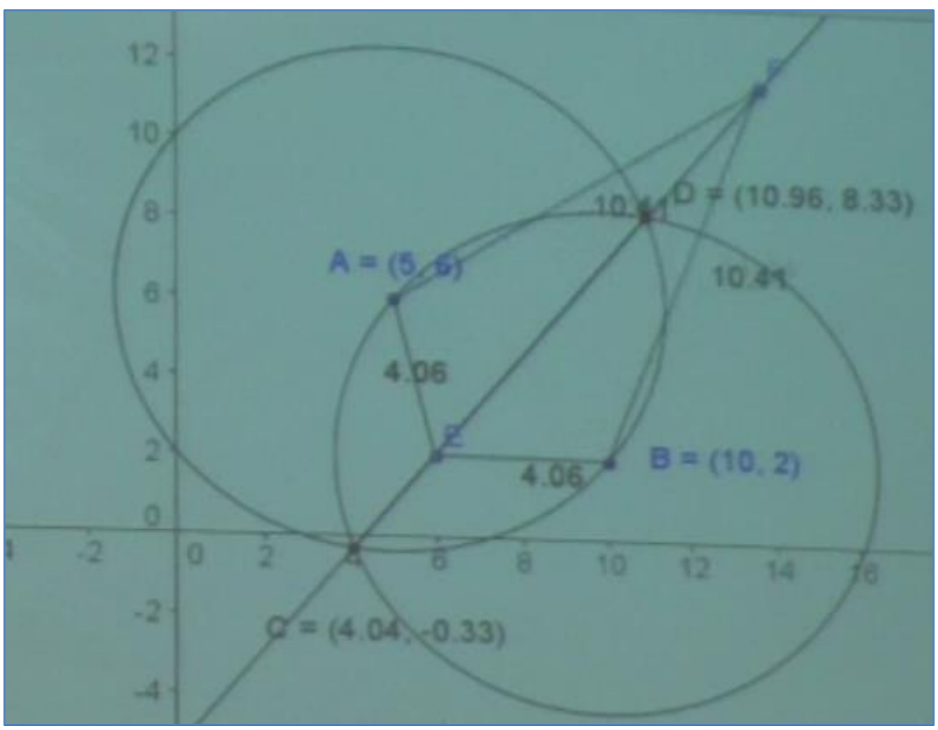



***Figura 7.21.*** El conjunto de punto sobre la recta CD equidistan de los puntos A y B.

Transcripción 7.11. Relación de la mediatriz con una familia de triángulos isósceles.

16.12:25 Profesor: con el punto A, el punto B y el punto E estas formando triángulos ¿de qué tipo? ¿siguen siendo equiláteros?
16.12:31 Grupo: no
16.12:41 Itzia: isósceles ¿no?
16.12:46 Profesor: ¿por qué son isósceles? a ver Carla ¿por qué el triángulo $AEB$ es isósceles?
16.13:10 Carla: tiene dos lados iguales y uno diferente
16.14:26 Profesor: ¿solamente serían esos (triángulos)? ¿no podría haber más? ¿podría haber más puntos?
16.14:28 Grupo: no
16.14:30: Profesor: a ver exploren
16.15:33 Itzia: púes sería…bueno nada mas… ahí sí sería una recta y todos los puntos que estén sobre esa línea.
*(Itzia construye la recta $CD$ y pone un punto $F$ móvil sobre ella para medir la distancia de dicho punto a los puntos $A$ y $B$)*
16.16:45: Profesor: ¿osea que cuantos puntos hay que cumplen que están equidistantes del punto $A$ y $B$?
16.16:49: Grupo: infinito, una infinidad

Aunque los alumnos ya habían trabajado con el concepto usual de mediatriz (recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio), no lograron asociar la recta encontrada por Itzia con dicho concepto; la definición de mediatriz como lugar geométrico es poco usual, pues depende de concebir una recta como un conjunto infinito de puntos. Trabajar la mediatriz como lugar geométrico permitió a los estudiantes conectar distintos contenidos matemáticos como su relación con triángulos isósceles, sus propiedades geométricas y su percepción como una recta conformada por una infinidad de puntos que cumplen cierta propiedad.

La argumentación es considerada como una actividad cognitiva de alto nivel en donde el AGD puede ser de mucha ayuda, pero si no se trabaja de forma reflexiva, puede convertirse en un aspecto negativo, pues los alumnos tienden a considerar como suficientes argumentos empíricos, lo cual no permite evolucionar a un razonamiento más general. En esta etapa el profesor decidió construir con el grupo una argumentación geométrica (apoyada de información empírica) de porqué los triángulos trazados por Itzia en un principio eran equiláteros, lo cual condujo a una argumentación basada en las propiedades geométricas de una circunferencia y en la idea de que un punto de intersección entre dos objetos es un punto que pertenece a ambos objetos (Transcripción 7.12).

*Transcripción 7.12.* Argumentación de la relación matemática.

16.27:09 Profesor: Itzia comenzó trazando triángulos equiláteros, ahora lo que me gustaría es que me dieran una justificación de por qué ese punto de intersección de las circunferencias equidista de los puntos $A$ $y$ $B$ ¿por qué? ¿Qué función tienen ahí las circunferencias? ¿cuál es el papel que juegan esas circunferencias?

*(El profesor traza la circunferencia con centro en B y radio AB y coloca un punto móvil sobre ella)*

16.29:07 Profesor: ¿qué propiedad tienen todos los puntos en esa circunferencia?

16.29:58 Honorine que es la misma, siempre va a medir 6.4, es la misma distancia

16.30:24 Profesor: entonces yo ya encontré todos los puntos que están a una distancia de 6.4 unidades de $B$ ¿no? uno de ellos es $A$, después, que fue lo que hizo (itzia) trazó la circunferencia con centro en A y radio AB, ¿todos los puntos que están aquí que cumplen?

16.31:30 Honorine: pues lo mismo que en el otro

16.31:33 Profesor: estas circunferencias como son?

16.31:35 Alexandra: equidistantes a los centros

16.32:10 Profesor: todos los puntos en esta circunferencia están a 6.4 unidades de A y todos los puntos en esta están también a 6.4 unidades de B, entonces en particular, estos puntos…

16.32:37 Itzia: que están…. están a 6.4 de A y B.

16.32:39 Profesor: ¿por qué?

16.32:41 Itzia: porque sería como el centro de un círculo que pasa por $A$ y por $B$

16.32:49 Fernanda: ¿por qué los radios son iguales?

Ningún estudiante logró conseguir una construcción dinámica, sin embargo, Miguel entregó una construcción en donde se muestra el puente que puede conducir de un acercamiento estático a uno dinámico, pues considera varios pares de circunferencias con mismo radio, como se observa en la Figura 7.22.

Finalmente, el profesor sugirió una forma de construir una representación dinámica de la mediatriz partiendo de la idea de Itzia; en vez de utilizar dos circunferencias con radio constante $AB$, utilizó dos circunferencias de mismo radio variable, como se observa en la Figura 7.23. En ese momento, el objetivo del profesor era lograr que los alumnos argumentaran el por qué la familia de triángulos formados ABD y ABE eran isósceles. En la Figura 7.23 se observa el argumentó de Fernanda para asegurar que los triángulos eran isósceles.

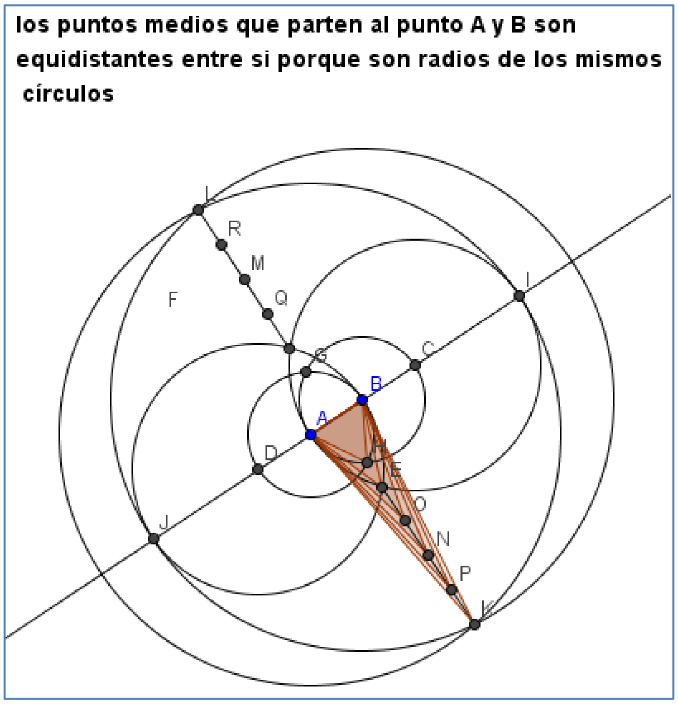



***Figura 7.22.*** Construcción presentada por Miguel.

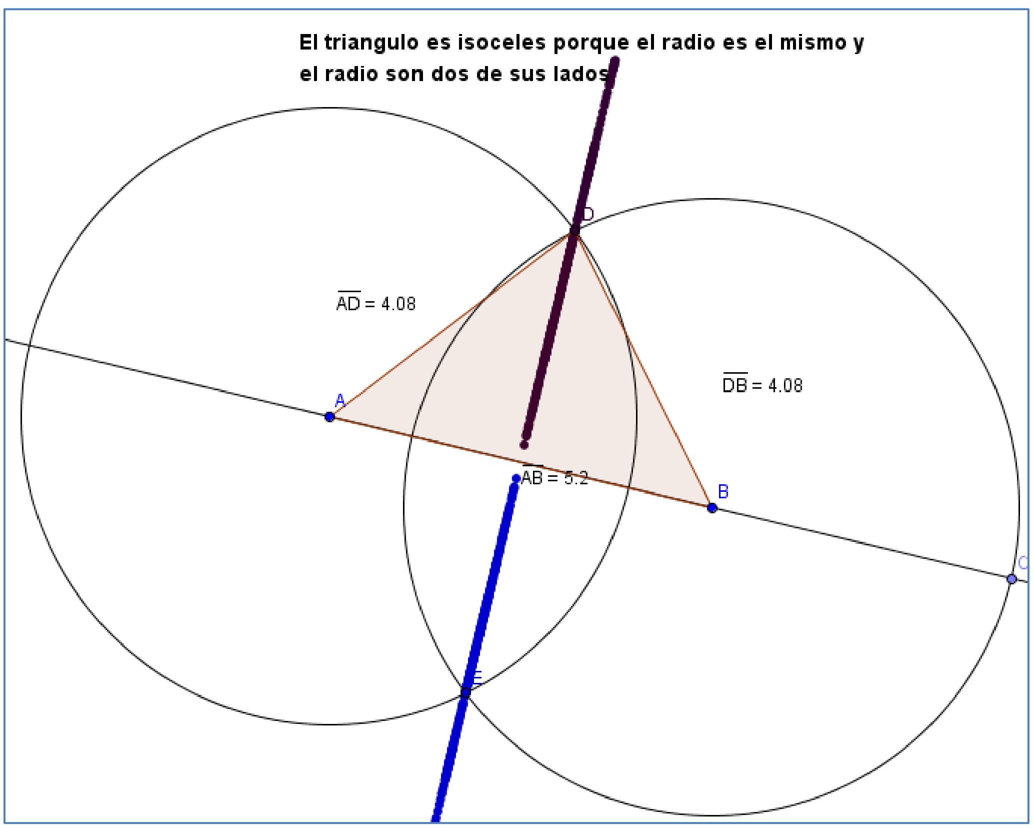



***Figura 7.23.*** Argumento, presentado por Fernanda, para soportar la relación matemática.

***Tabla 7.5*** Recursos y heurísticas utilizados para resolver la Actividad 4.

| **Etapa** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos Algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| *Implementación de un plan de solución* (Acercamiento discreto libre) David, César, Miguel, Carla, Fernanda, Honorine | Punto y distancia entre puntos. | Colocar punto libre en el plano y medir distancia entre dos puntos | Conseguir puntos específicos (por aproximación) que cumplen con la condición del problema. | | Arrastre guiado y medición guiada (Contraste) |
| *Implementación de un plan de solución* (Acercamiento discreto exacto) Itzia Fig. 7.19 | Punto, circunferencia, radio, segmento, punto de intersección, distancia entre puntos, longitud, triángulo equilátero. | Trazar circunferencia dados su centro y uno de sus puntos, localizar punto de intersección, medir distancia entre puntos. | | Usar circunferencia para trasladar una distancia a todo el plano y trazar triángulo equilátero usando circunferencias | Explorar casos particulares, Búsqueda de simetría y validar resultado. Medición para validar (Separación) |
| *Búsqueda de patrones y una solución general* (Acercamiento continuo usando segmento) Itzia Fig. 7.20 | Punto, circunferencia, radio, segmento, punto de intersección, distancia entre puntos, longitud, triángulo isósceles. | Trazar circunferencia dados su centro y uno de sus puntos, localizar punto de intersección, medir distancia entre puntos y trazar segmento. | Colocar punto sobre segmento | Asociar puntos que equidistan de dos puntos fijos con una familia de triángulos isósceles | Generalizar el resultado, trabajar con una familia de objetos y verificar el resultado. Arrastre enlazado, medición para validar, movimiento dependiente y arrastre de prueba (Generalización) |
| *Búsqueda de patrones y una solución general* (Acercamiento continuo usando recta) Itzia Fig. 7.21 | Recta, punto, circunferencia, radio, segmento, punto de intersección, distancia entre puntos, longitud, triángulo isósceles. | Trazar recta que pasa por dos puntos, trazar circunferencia dados su centro y uno de sus puntos, localizar punto de intersección, medir distancia entre puntos y trazar segmento. | Colocar punto sobre recta | Asociar puntos que equidistan de dos puntos fijos con una familia de triángulos isósceles | Generalizar el resultado, trabajar con una familia de objetos y verificar el resultado. Arrastre de prueba, arrastre enlazado, movimiento dependiente y medición para validar (Generalización) |

***Tabla 7.5*** Recursos y heurísticas utilizados para resolver la Actividad 4.

| **Etapa** | **Recursos** | | | | **Heurísticas** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***Conceptos*** | ***Procedimientos Algorítmicos*** | ***Procedimientos rutinarios*** | ***Competencias relevantes*** | |
| | | | | | |
| *Conexiones y Extensiones* (Uso de varias circunferencias) Miguel Fig. 7.22 | Recta, punto, circunferencia, radio, segmento, punto de intersección, longitud, triángulo isósceles. | Trazar circunferencia dados su centro y uno de sus puntos, localizar punto de intersección, trazar triángulo como polígono y trazar segmento. | Trazar circunferencias de mismo radio a partir de otras circunferencias y trazar una familia de triángulos isósceles | Asociar puntos que equidistan de dos puntos fijos con una familia de triángulos isósceles | Resolver el problema de forma diferente, generalizar el procedimiento y considerar una familia de objetos. |
| *Conexiones y Extensiones* (construcción dinámica) Profesor Fig. 7.23 | Lugar geométrico, Recta, punto, circunferencia, radio, segmento, punto de intersección, longitud, triángulo isósceles. | Trazar circunferencia dados su centro y uno de sus puntos, localizar punto de intersección, trazar triángulo como polígono. | Usar compas para trasladar una distancia y activar rastro de objetos. | Usar una circunferencia de radio variable para trasladar una distancia a todo el plano. | Resolver el problema de forma diferente, generalizar el procedimiento y resultado, considerar una familia de objetos, Arrastre enlazado, movimiento dependiente, variación dependiente, rastro de objetos móviles (Fusión) |

## Apéndice B

## Transcripciones de la fase de evaluación

***Transcripción 7.13. Episodio de entendimiento del Problema 3.***

18.00:32 Profesor: a ver las compañeras están trabajando con esta idea (el profesor coloca un punto $A$ sobre el eje $Y$ y traza una circunferencia con centro en dicho punto y radio dos unidades)
18.00:56 Profesor: ellas dicen que todos los puntos en la circunferencia están a dos unidades, (el profesor coloca un punto $B$ móvil sobre la circunferencia) osea esos puntos resuelven el problema ¿están de acuerdo?
18.01:09 David: no
18.01:10 Itzia: si
18.01:11 Profesor: ¿por qué no David?
18.01:12 David: porque por ejemplo si lo bajas (refiriéndose a una posición abajo del diámetro sobre la circunferencia) va a estar a menos de dos unidades del eje $Y$

***Transcripción 7.14. Búsqueda de patrones y una solución general del Problema 3.***

18.05:42 Profesor: aquí se pueden aprovechar hasta los errores, fíjense las compañeras colocaron un punto que se moviera sobre el eje $Y$… (el profesor reconstruye la idea propuesta por Itzia, Honorine y Fernanda, es decir, coloca un punto $A$ móvil sobre el eje $Y$ y traza una circunferencia con centro dicho punto y de radio dos unidades)
18.06:06 Profesor: bueno ella dijo en un principio que todos los puntos aquí (el profesor mueve el punto $A$) estaban a dos unidades del eje $Y$, ¿bueno no todos verdad? pero ¿si hay uno no? que está a la izquierda del eje $Y$ y que está a dos unidades de distancia ¿si hay uno no?
18.06:21 Grupo: si
18.06:24 Honorine: sería el que esta paralelo a….a $X$
18.06:30 David: paralelo al eje $Y$
18.06:43 Profesor: entonces como puedo encontrar el punto que me interesa, de todos los puntos en la circunferencia solo hay uno que me interesa, ¿cómo lo puedo encontrar? (el profesor traza la recta perpendicular al eje $Y$ por el punto $A$ y localiza el punto $C$ de intersección de dicha recta con la circunferencia en el lado izquierdo, después el profesor activa el rastro del punto $C$ y mueve el punto $A$)

***Transcripción 7.15. Uso de la bisectriz para resolver inciso c) del Problema 3.***

19.2:07 Profesor: ¿entonces cómo generarías la solución del problema?
19.2:09 Miguel: una línea… ¿la mediatriz de un ángulo? Con el ángulo de 90° ¿no? lo dividiríamos a la mitad y sería un ángulo de 45°

(Miguel construye un triángulo rectángulo isósceles con lados iguales sobre los ejes coordenados y traza la mediatriz de su hipotenusa)

19.4:47 Profesor: a ver ¿y si mueves el punto? (el profesor señala el punto móvil $B(0,4)$ sobre el eje $Y$)

19.4.49 Miguel: a ¡diablos! (Miguel se da cuenta que si mueve uno de los puntos móviles su construcción no se conserva)

19.5:00 Profesor: entonces tu propuesta ¿cuándo funciona?

19.5:02 Miguel: cuando son puntos fijos, deben ser fijos (refiriéndose a los puntos $B(0,4)\ y\ C(4,0)$)

19.5:08 ¿Pero qué características deben tener $B\ y\ C$?

19.5:24 Miguel: tienen que ser iguales las distancias $AB\ y\ AC$.

19.5:49 Profesor: ¿cómo es este triángulo? (señalando la construcción de Miguel)

19.5:52 César: rectángulo

19.5:56 Profesor: pero aparte de ser rectángulo ¿qué se cumple?

19.5:58 Miguel: es isósceles

(El profesor le pide a Miguel que verifique que en efecto un punto sobre la recta cumple con la condición del problema)

19.6:57 Profesor: ¿estos puntos (B y C) pueden estar en cualquier otro lugar o tienen que estar a fuerzas ahí?

19.7:05 Carla: no pero tienen que están en la misma coordenada, por ejemplo si los voy a cambiar si $B$ está en el tres entonces $C$ tendría que estar igual en el tres

***Transcripción 7.16. Itzia resuelve la primera extensión del Problema 3 y el problema contrario.***

19.57:42 Profesor: fíjense ella encontró esta solución (Itzia activó el rastro únicamente a los puntos que resolvían la extensión inicial) pero aparte ¿hay otros puntos ahí interesantes no Itzia? ¿qué ocurre con los puntos $R, Q$ y los puntos $M\ y\ N$ (refiriéndose a los puntos que cumplían la proporción contraria)?

19.57:57 Itzia: los que… es un punto que se encuentra tal que su distancia al eje $Y$ es el doble de su distancia al eje $X$.

***Transcripción 7.17. Uso de una circunferencia para resolver la segunda extensión del Problema 3.***

22.8:37 Profesor: esta construcción resuelve este (el profesor señala la construcción dinámica de los puntos tales que su distancia al eje $Y$ es el doble de su distancia al eje $X$)

22.8:46 Profesor: ¿cómo usarían eso para resolver este (señalando la extensión del problema)? fíjense que es este (muletilla)…¿qué pasa si yo le quito el disminuido en tres (el profesor borra la frase "disminuida en tres" del enunciado que estaba en el pizarrón)? ¿qué problema tenemos?

22.9:14 Miguel: es ese ¿no? (Miguel señala la construcción de Itzia)

22.9:17 Profesor: ahí esta ¿no? ya estaría resuelto este problema. Ahora como interpretan esto de (el profesor vuelve a escribir la frase "disminuida en tres" del enunciado) agreguen la condición disminuida en tres ¿cómo hacen esto (el profesor encierra en un círculo la frase "disminuida en tres")

22.9:44 Profesor: ahora entonces el objetivo es cómo del problema que ya resolvimos, del problema que ya está resuelto ¿cómo le pegamos esta condición nueva disminuido en tres?

22.10:05 Honorine: al punto medio ¿no? le tendrías que hacer una variación

22.11:17 Fernanda: pues disminuir en tres a $x$ ¿no? porque se supone que la distancia al eje $Y$ es la distancia… $x$

22.11:18 Alexandra: oh no, podríamos hacer una circunferencia en el punto $T$ (uno de los puntos medios encontrados por Itzia) con radio tres ¿no?

***Transcripción 7.18. Diego observa que el lugar geométrico del Problema 4 no es una recta.***

27.21:35 Profesor: ¿Qué has hecho?

27.21:36 Diego: ya encontré tres puntos

27.21:37 Profesor: ¿cómo?

27.21:39 Diego: de la misma manera (usando circunferencias y colocando puntos sobre ellas para arrastrarlos), pero no veo una recta que siga realmente la unión de los puntos derecho

27.22:03 Profesor: entones, ¿sería una recta el lugar geométrico que estamos buscando?

27.22:05 Diego: creo que no

***Transcripción 7.19. Dificultad de Carla para representar geométricamente la distancia entre un punto y recta.***

27.07:00 Profesor: todos estos puntos que están aquí (señalando la mediatriz del segmento $AB$ donde $B$ es un punto móvil sobre el eje Y) ¿qué cumplen?

27.07:06 Carla: la misma distancia al eje $Y$ y al punto $A$

27.07:14 Profesor: ¿si el eje $Y$?

27.07:16 Carla: digo… si ¿no? siempre tiene la misma distancia este punto (punto C móvil sobre la mediatriz) aunque mueva este (punto $B$), con el eje $Y$ y el punto $A$

27.07:32 Profesor: mira si tu usas el comando de distancia y mides la distancia del punto ($C$) al eje Y (Carla mide la distancia del punto $C$ al eje $Y$) ¿Qué pasa ahí?

27.07:47 Carla: ah pues hay un poquito de diferencia

27.07:49 Profesor: Ok entonces hay que explorar eso ¿no?

***Transcripción 7.20. Dificultad de Honorine para identificar geométricamente la distancia entre punto y recta.***

27.11:39 Profesor: para ese punto (refiriéndose al punto $C$ sobre la mediatriz) como localizas la distancia al eje $Y$, osea tú ya sabes que vale 5.17 ¿no? a partir de este punto como encuentras la distancia del punto al eje $Y$, imagínate que no tienes este comando (distancia entre dos objetos)

27.12:20 Honorine: con las coordenadas
27.12:27 Profesor: esa es una forma, pero geométricamente ¿cómo lo haces?
27.12:30 Honorine: con una circunferencia
(El profesor coloca un punto $H$ libre sobre el plano y los arrastra hasta que sus distancias al punto $A$ y al eje $Y$ sean guales)
28.19:05 Profesor: miren ahí le atine
28.19:11 Honorine: también aquí encontraría otro (Honorine señala la parte de abajo más menos a la misma distancia del eje $Y$)
28.19:21 Profesor: la distancia de este punto al punto $H$ es la longitud de este segmento ¿no? (el profeso señala el segmento $AH$) es 5.17 osea si ustedes trazan este segmento $AH$ (el profesor traza el segmento $AH$) ¿este segmento cuanto les mide?
28.19:31 Honorine: 5.17
28.19:35 Profesor: ¿cómo encuentran la distancia del punto $H$ al eje $Y$?
28.19:41 Itzia: con distancia ¿no? (Refiriéndose al comando "distancia" del software)
28.19:43 Profesor: imagínate que no tuvieras esa distancia de 5.17 ¿cómo le asocias un segmento a la distancia de $H$ al eje $Y$?
28.19:52 Itzia: con una reglita
28.19:53 Profesor: con una regla pero ¿cómo lo mides?
28.19:56 Itzia: recto ¿no? (Itzia mueve la mano de forma horizontal desde el punto $H$ hasta el eje $Y$)

***Transcripción 7.21. Relación del paralelismo con la distancia entre un punto y una recta.***

30.01:12 Profesor: ok ahorita lo que quiero que hagas es para este punto (el profesor señala el punto móvil sobre la parábola) localízame la distancia de este punto a la recta, al eje Y, ¿Cómo encuentras la distancia de este punto al eje $Y$ sin usar el comando? (Alexandra mueve su mano en forma horizontal desde el punto al eje $Y$)
30.01:27 Alexandra: hay no profe!
30.01:29 Profesor: ese es el objetivo para ti ahora, ¿Cómo la encuentras?
30.01:31 Fernanda: paralelita (Fernanda mueve su mano de forma horizontal del punto al eje $Y$) y paralelita (Fernanda mueve u mano de forma vertical del punto al eje $X$).

***Transcripción 7.22. Relación entre la parábola y una familia de triángulos isósceles.***

30.02:02 Profesor: pero ¿cómo trazaste esa parábola?
30.02:03 Diego: del punto $A$ al eje $Y$
30.02:04 Profesor: ¿con el comando?
30.02:06 Diego: aja
30.02:13 Profesor: el objetivo sería entonces ¿cómo encuentras la distancia de un punto en la parábola al eje Y, cómo la encuentras?
30.02:20 Diego: puedo trazar un segmento y ya

30.02:22 Profesor: a ver ¿cómo lo trazas? (Diego selecciona el comando “Segmento” y da clic sobre el punto en la parábola y mueve el cursor hacia el eje Y)

30.02:26 Diego: pero tendría que trazarlo exactamente a la altura del punto (Diego señala el punto sobre la parábola en la vista algebraica)

30.02:30 Profesor: a la altura del punto ¿cómo logras eso? ¿cómo aseguras que este exactamente a la misma altura?

32.00:40 Diego: tracé una recta paralela del eje $X$ al punto y te da un punto digamos el punto O (Diego señala con el cursor el punto de intersección del eje Y con la recta paralela al eje X) luego trazas una recta del punto O al punto A (Diego realmente trazó un segmento) que es algo principal y la mediatriz, y la mediatriz siempre se iba a encontrar con la recta paralela porque iba a ser un triángulo isósceles y siempre se iba a cumplir esa condición con todos los puntos, se puede hacer lo mismo de todos los lados también se puede trazar acá triángulos (Diego señala la parte de debajo de la parábola).

***Transcripción 7.23. Identificación geométrica de la distancia entre un punto y una recta.***

27.07:59 Profesor: ¿cómo identificarías tú la distancia de este punto (punto sobre la mediatriz) al eje $Y$ ¿cómo la identificas? ¿Cómo es la distancia de un punto a una recta?

(Carla no sabe que contestar)

27.08:17 Profesor: porque aquí la distancia del punto a la recta es esta ¿no? (el profesor señala el valor numérico de la distancia del punto a l eje $Y$) y te das cuenta que no es la misma que tu encontraste (refiriéndose a la distancia entre el punto móvil sobre la mediatriz y el punto A) entonces ¿cómo identificas la distancia de un punto a una recta?

28.00:11 Profesor: fíjate la de arriba es la distancia del punto al eje $Y$ ¿no? y la de abajo ¿cuál es?

28.00:15 Carla: es la del segmento $BC$

28.00:19 Profesor: no siempre son iguales ¿verdad? osea si tú mueves el punto $C$ hay una variación ahí, siempre la distancia está asociada con un segmento ¿no?. Esta longitud 9.3 es la longitud que hay del punto $B$ al punto $C$, este 8.32 es la longitud que hay de ¿dónde a dónde?

28.00:51 Carla: del $C$ a la recta, al eje $Y$ (Carla señala con el mouse el pie de la perpendicular al eje $Y$ por el punto $C$)

28.00:57 Profesor: al eje Y pero ¿cómo?

28.00:59 Carla: paralelo, osea así (Carla mueve el cursor de forma perpendicular al eje $Y$)

28.01:07 Profesor: osea tú tienes una distancia o una longitud y hay un segmento que tiene esa longitud, aquí ¿cuál sería el segmento que te da la longitud de 8.32

28.01:12 Carla: podría poner acá un punto (Carla localiza el punto $D$ de intersección del eje $Y$ con la recta paralela al eje $X$)

***Transcripción 7.24. Explicación del razonamiento usado por Carla para resolver el problema 4.***

28.31:16 Profesor: que pasó ¿ya? ¿por fin?
28.31:17 Carla: creo que si
28.31:21 Profesor: a ver ¿qué paso?
28.31:23 Carla: a pues es que tenía anteriormente este punto (Carla mueve el punto $C$ móvil sobre la mediatriz de $AB$), entonces se supone que la distancia de aquí a aca es diferente (señala la distancia del punto $C$ al eje $Y$), osea esta es la distancia del de aquí a acá (Carla muestra la distancia del punto $C$ al punto $B$) y esta distancia es diferente (Carla señala la distancia del punto $C$ al eje $Y$) por eso no coincidían, entonces se me ocurrió que... bueno este punto (Carla mueve el punto $C$)osea esta recta dependía de este (señala la recta perpendicular al eje $Y$ por el punto $C$) bueno no se el chiste es que se me ocurrió ¿qué pasa si los volteo? y entonces quite la paralela y ahora la puse dependiente del punto $B$ y resulta que me trazó otro punto y lo trace (punto $D$ de intersección de la mediatriz del segmento $AB$ con la recta paralela al eje $X$ por el punto $B$) a ver que salía y ahora resulta que me salieron iguales estas y estas (mide las dos distancias involucradas) la característica es que esta siempre es perpendicular al eje $Y$ y ya no tengo que mover (se refiere al punto $C$ móvil sobre la mediatriz) osea ya está directo (Carla mueve el punto $B$ y toda su construcción depende del movimiento del punto $B$)
28.32:30 Profesor: ok puedes ponerle pinturita al punto (Carla activa el rastro del punto $D$ y mueve el punto $B$)
28.32:39 Carla: ahhhh waaaa!!!! (reacción de asombro) eso sí que está…. ¿una parábola?

***Transcripción 7.25. Preguntas que ayudaron a Miguel a resolver el Problema 4 de forma dinámica.***

33.00:12 Maestro: trazaste esa recta ¿no? por el punto medio ¿cómo se llama esa recta?
33.00:15 Miguel: segmento
33.00:16 Maestro: ¿cómo la trazaste? ¿por qué la trazaste? O ¿cómo la trazaste?
33.00:19 Migue: por el punto medio
33.00:20 Maestro: ¿entre quién y quién?
33.00:21 Miguel: entre $H\ y\ A$ (H es un punto libre que Miguel mueve cercano al eje $Y$)
33.00:22 Maestro: ¿y después?
33.00:24 Miguel: le puse una recta perpendicular
33.00:26 Maestro: y ¿Cómo se llama esa recta con respecto al…
33.00:28 Miguel: altura
33.00:30 Maestro: con respecto al segmento $HA$
33.00:33 Miguel: ¿punto medio?
33.00:36 Maestro: es una recta que pasa por el punto medio
33.00:39 Miguel: es una bisectriz

33.00:41 Maestro: ¿bisectriz?

33.00:43 Miguel: no perdón… una mediatriz

33.00:45 Maestro: la mediatriz de ¿quién?

33.00:46 Miguel: del ángulo $HA$ (Miguel señala el segmento $HA$)

33.00:52 Maestro: mueve $F$ (el punto libre $F$ es el vértice opuesto a la base del triángulo $AHF$ que está colocado cerca de la mediatriz de $AH$) muévelo para abajo

33.00:54 Miguel: pero me costó mucho trabajo encontrarlo

33.00:56 Maestro: muévelo que más o menos cumpla la condición, es más, pégalo con el $D$ (El punto $D$ es el vértice opuesto de la base de otro triángulo isósceles) ¿el punto $D$ cumple la condición no?

33.01:03 Miguel: aja (miguel arrastra el punto $F$ hacia la posición del punto $D$)

33.01:07 Maestro: ¿qué tienes que hacer con $H$ para que cumpla?

33.01:12 Miguel: poner una recta paralela aquí (Miguel traza una recta perpendicular al eje $Y$ por el punto $H$)

33.01:18 Maestro: ¿y después? Mueve $H$ a ver (Miguel mueve el punto libre $H$ encima del eje $Y$) ¿dónde colocas $H$ para obtener $F$?

33.01:36 Miguel: en $E$ (Miguel mueve el punto $H$ encima del punto $E$ que es un punto libre cerca del eje $Y$ a la misma altura del punto $F$)

33.01:45 Maestro: a ver mueve $H$ hacía arriba ¿cómo localizas otro punto?

33.01:52 Miguel: con la intersección (Miguel localiza el punto de intersección entre la mediatriz, del segmento $AH$, y la recta perpendicular al eje $X$ por el punto $H$)

33.02:00 Maestro: ¿ese punto cumplirá?

33.02:01 Miguel: voy a ver (Miguel mide las distancias del punto de intersección al eje $Y$ y al punto $A$) 8.13 y 8.13 igual

33.02:36 Maestro: a ver mueve $H$ ¿qué pasa? (Miguel mueve el punto $H$ siguiendo el eje Y pero el punto $H$ no está sobre el eje Y)

33.02:40 Miguel: es igual, ooooraleee!!!!!

33.02:56 Maestro: ¿dónde debe estar $H$?

33.02:58 Miguel: en el eje $Y$

***Transcripción 7.26. Enfoque infinitesimal para representar geométricamente la distancia de un punto a una circunferencia (usando una recta tangente).***

47.13:24 Profesor: a ver ¿qué hiciste ahí? trazaste la mediatriz de $AB$ ¿no?

47.13:32 Itzia: aja, mire tracé el circulito, puse A y pues B un punto movible en la circunferencia, y entonces ya donde dice que una perpendicular al eje $Y$ la puse (perpendicular) al eje $X$

47.13:47 Profesor: ¿por qué?

47.13:49 Itzia: pues porque me pareció propio, y ya el punto de intersección y a este le marque rastro y ya

47.14:00 Profesor: ok, fíjate el paso que tu hiciste aquí de trazar la perpendicular, dice: traza la recta perpendicular al eje $Y$, pero ahora el eje Y ya no es, ¿ahora que es?

47.14:15 Itzia: el círculo

47.14:17 Profesor: entonces ¿cómo trazas una recta perpendicular a un círculo? podemos hacer acá un experimento (el profesor traza un circulo arbitrario y coloca un punto $H$ móvil sobre el) si tú tienes este punto $H$ ¿cómo sería trazar una recta aquí que sea perpendicular al círculo en este punto?

47.14:55 Itzia: así ¿no? (Itzia mueve la mano sobre el circulo como sugiriendo una recta tangente) porque esta es una liniesita (Itzia señala el radio) y la recta sería así (repite el movimiento anterior)

47.15:09 Profesor: ¿cómo le harías?

47.15:10 Itzia: pues no se (Itzia traza la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto $H$ y traza una recta perpendicular a la misma por el punto $H$)

47.15:23 Profesor: ok, entonces tú dices que la perpendicular sería esta (el profesor señala la recta tangente trazada por Itzia)

47.15:25 Itzia: aja

47.15:30 Profesor: a ver si tú tienes una recta (el profesor traza una recta) y quieres trazar una recta perpendicular a ella (traza una recta perpendicular) ¿qué ángulo forman aquí?

47.15:54 Itzia: de 90 grados

47.16:06 Profesor: ok ahora fíjate aquí, (regresa al caso de la circunferencia) obviamente aquí es algo distinto porque esta no es una recta ¿verdad? esto es un círculo pero ¿qué pasa si tú haces un zoom? (el profesor hace un zoom a la circunferencia, hasta que parece una recta, sin perder de vista el punto $H$ sobre ella) ¿qué ocurre con el círculo cuando haces un zoom?

47.16:40 Itzia: se hace una línea

47.16:57 Profesor: mira la que tú dices que es perpendicular es esta (el profesor selecciona la recta tangente que casi se confunde con el círculo)

47.17:02 Itzia: ¿entonces no es esa?

47.17:04 Profesor: esa más bien parece paralela al círculo ¿no? ¿cuál parece perpendicular?

47.17:14 Itzia: esta (itzia señala la recta que pasa por el centro del círculo y el punto $H$)

***Transcripción 7.27. Argumentación presentada por Alexandra para su solución de la extensión del Problema 4.***

47.43:27 Alexandra: decía que hiciéramos la construcción anterior pero con la circunferencia como directriz en lugar del eje $Y$, pues entonces ya en lugar de poner un punto $B$ sobre el eje Y lo puse pero sobre la circunferencia

47.43:46 Profesor: que es el punto $F$ ¿no?

47.43:47 Alexandra: aja, y luego tracé la mediatriz del segmento $FA$

47.44:18 Alexandra: y luego dice que tracemos una recta perpendicular al eje Y, entonces tiene que ser perpendicular a la circunferencia, entonces, tracé una tangente de la circunferencia y el punto $F$ para poder trazar la perpendicular

47.44:39 Profesor: y eso ¿cómo se te ocurrió, por qué trazaste la tangente?

47.44:42 Alexandra: porque se supone que aquí son ángulos de 90 grados (Alexandra señala los ejes coordenadas) por donde cruzan las perpendiculares, y aquí no se puede trazar perpendiculares porque los ángulos no son iguales (Alexandra sugiere que no pudo usar el comando “Recta Perpendicular” para trazar la recta perpendicular a una circunferencia) , entonces examiné los comandos y se me ocurrió que podría usar ese (Alexandra señala el comando “Tangente”) y ya tracé la perpendicular por este punto (punto $F$) a la recta (tangente) y ya luego localice el punto de intersección de la mediatriz del segmento que era este y la que es perpendicular a la circunferencia, que es este (Alexandra señala el punto de intersección) y luego dice que actives el rastro y ya esta un óvalo

## Apéndice C

## Tratamiento geométrico y algebraico de la extensión de la Actividad 1

### *Análisis geométrico*

Se busca encontrar la posición del vértice de la parábola generada por el ortocentro de la familia de triángulos de área constante de la Actividad 1. En ocasiones un acercamiento geométrico puede ser útil para resolver problemas, pero también es útil para argumentar conjeturas sobre relaciones matemáticas. Sea $v$ la altura del vértice de la parábola (con respecto a la base AB), $2a$ la longitud de la base de los triángulos $AB = AK + KB$ y $h$ la altura del triángulo isósceles (Figura 7.24). Como el vértice $V$ de la parábola es el ortocentro del triángulo isósceles $ABC$ y la recta $KC$ es mediatriz del segmento $AB$, entonces por el teorema de Pitágoras se tiene que: $AC = CB = \sqrt{a^2 + h^2}$. Los triángulos $KCB\ y\ LCV$ son semejantes, pues comparten un ángulo y son rectángulos. Así:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \frac{KC}{LC} = \frac{CB}{CV} = \frac{BK}{VL} \Rightarrow \frac{h}{LC} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h-v} = \frac{a}{VL}$$

Similarmente, los triángulos $LBA\ y\ KBC$ son semejantes por lo que:

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \frac{LB}{KB} = \frac{BA}{BC} = \frac{LA}{CK} \Rightarrow \frac{LB}{a} = \frac{2a}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{LA}{h}$$

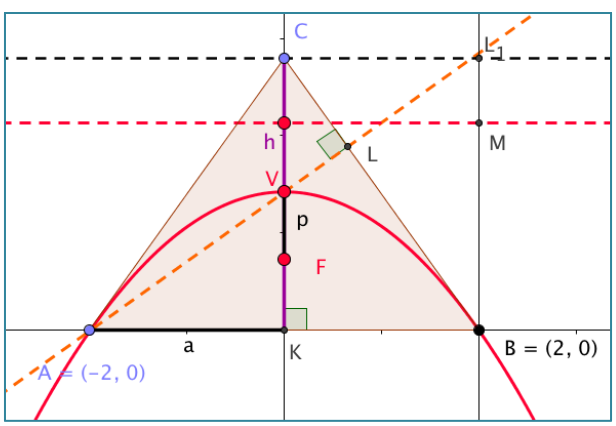



***Figura 7.24.*** Tratamiento geométrico para encontrar el vértice del lugar geométrico.

De (1) y (2) tenemos que:

$$\frac{h}{LC} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h-v} \quad y \quad \frac{LB}{a} = \frac{2a}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

Pero $LC + LB = \sqrt{a^2 + h^2}$ por lo tanto:

$$h(h - v) = \; LC * \sqrt{a^2 + h^2} = \left(\sqrt{a^2 + h^2} - LB\right) * \sqrt{a^2 + h^2}$$
$$h(h - v) = \left(\sqrt{a^2 + h^2} - \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right) * \sqrt{a^2 + h^2} = a^2 + h^2 - 2a^2 = h^2 - a^2$$

Despejando $v$:

$$\boldsymbol{h^2 - hv = h^2 - a^2 \;\Rightarrow\; v = \frac{a^2}{h} \Rightarrow \; v = \frac{\overline{AB}^2}{4h}}$$

Lo anterior prueba la relación entre la altura del vértice y los atributos (altura y base) de la familia de triángulos con área constante. Para la relación entre la altura de los triángulos y la distancia focal se puede usar la Figura 7.25. Probar que $\frac{p}{h} = \frac{1}{4}$ es lo mismo que probar los triángulos rectángulos $VNF \; y \; BAL$ son semejantes. Si los triángulos son semejantes, entonces $\frac{VF}{BL} = \frac{VN}{BA}$, luego como $VF = p$, $BL = h$ y $VN = \frac{BA}{4}$ se tiene que $\frac{p}{h} = \frac{1}{4}$. Para probar que dichos triángulos son semejantes, se puede usar la circunferencia $k$ y probar que el cuadrilátero $HLIA$ es un trapecio isósceles cíclico, por lo que los ángulos inscritos $AHI \; y \; ALI$ son crongruentes, pues comparten la misma cuerda $AI$ del círculo $k$.

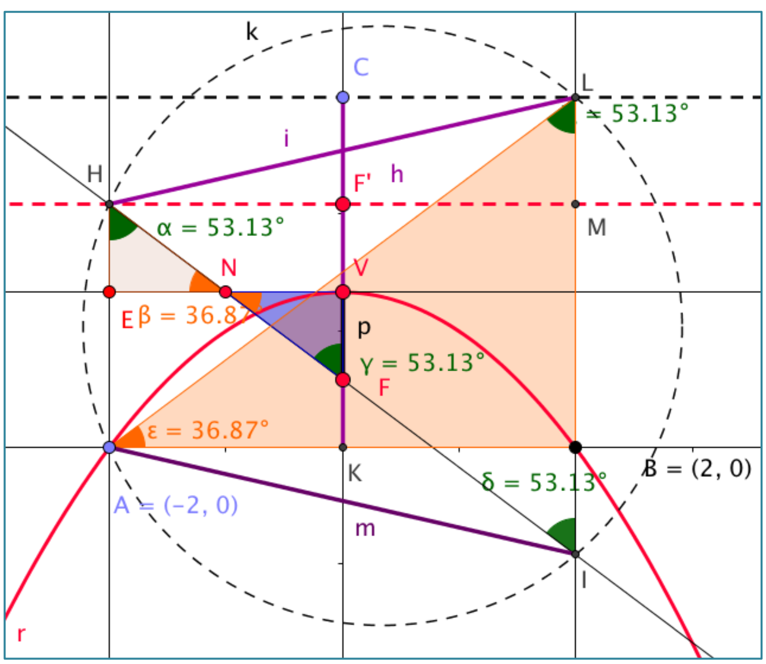



***Figura 7.25.*** Tratamiento geométrico para deducir la relación entre la distancia focal y la altura de os triángulos.

***Acercamiento analítico para encontrar los elementos de la parábola***

Sin pérdida de generalidad y dada la simetría del problema, se puede aprovechar las características del plano cartesiano para encontrar una representación algebraica del lugar geométrico descrito por el ortocentro de la familia de triángulos de área y lado constante. Como se observa en la Figura 6.12 el eje de simetría del lugar geométrico se puede colocar sobre el eje Y, por lo que la base AB de la familia de triángulos será simétrica con respecto al origen coordenado. En este camino, se puede trabajar el problema general; sea $h$ la altura de la familia de triángulos y $A = (-a, 0)$ , $B = (a, 0)$ las coordenadas de los vértices que conforman la base fija del triángulo (véase Figura 7.26).

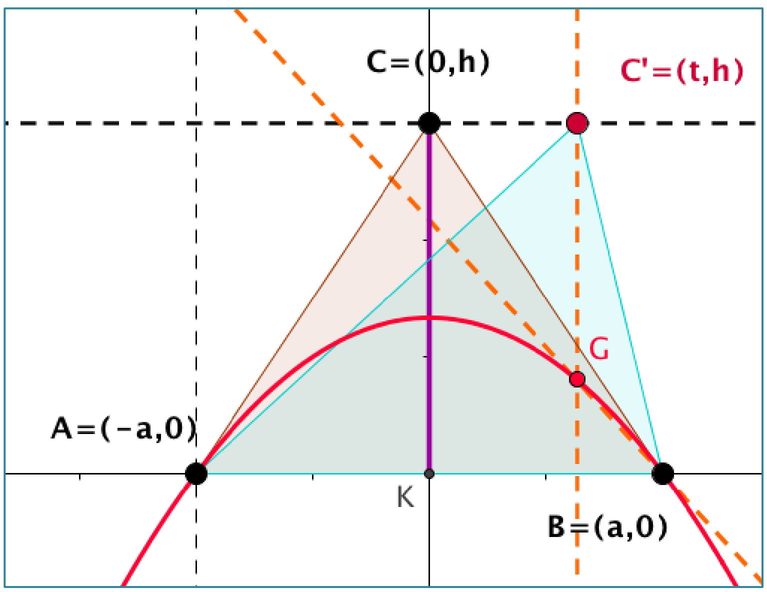


***Figura 7.26.*** Tratamiento analítico del problema.

El punto $G$ (ortocentro del triàngulo $ABC'$) genera el lugar geométrico buscado, por lo que el problema es encontrar sus coordenadas en función de una parametrización del vértice $C'$ variable. El punto $C'$ tiene coordenadas $(t, h)$ donde $t$ puede ser cualquier valor real. Así, la ecuación de la recta AC' es:

1) $\overleftrightarrow{AC}$: $\quad y - 0 = \dfrac{h-0}{t-(-a)}[x-(-a)] \quad \therefore \quad \boldsymbol{y = \dfrac{h}{t+a}(x+a)}$

La ecuación de la altura del triángulo asociada con la recta $AC$ y el vértice $B$ es:

2) $altura\ de\ \overleftrightarrow{AC}$: $\boldsymbol{y = -\frac{t+a}{h}(x-a)}$

La altura asociada con el lado AB y el vértice C' es perpendicular al eje X y como pasa por el punto C' su ecuación es:

3) $altura\ de\ \overleftrightarrow{AB}$: $\boldsymbol{x = t}$

El ortocentro G del triángulo es la intersección de las alturas, por lo que se tiene que resolver el sistema determinado por las ecuaciones 2) $y$ 3):

$$\boldsymbol{Si\ x = t\ entonces\quad y = -\frac{t+a}{h}(t-a) = -\frac{t^2-a^2}{h}}$$

Entonces el ortocentro tiene las coordenadas:

4) $$\boldsymbol{G = \left(t, -\frac{t^2-a^2}{h}\right) = \left(x, -\frac{x^2-a^2}{h}\right)}$$

La ecuación del lugar geométrico descrito por el ortocentro de la familia de triángulos es:

$y = -\frac{x^2-a^2}{h}$ $;transformando\ a\ su\ forma\ canónica$:

$$\mathrm{hy} = -\mathrm{x}^2 + \mathrm{a}^2 \Rightarrow -\mathrm{hy} + \mathrm{a}^2 = \mathrm{x}^2 \Rightarrow -\mathrm{h}\left(\mathrm{y} - \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{h}}\right) = \mathrm{x}^2$$

**5**) $$\mathbf{-h\left(y - \frac{a^2}{h}\right) = x^2}$$

La ecuación 5) corresponde a una parábola vertical cóncava hacia abajo con vértice en el punto $\left(0, \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{h}}\right)$, y distancia focal $p = \frac{h}{4}$.

## Apéndice D

### Tratamiento geométrico de la extensión del Problema 4

El problema 4 consistió en obtener una representación dinámica de la parábola mediante la igualdad geométrica de la distancia entre dos puntos y la distancia de un punto a una recta. Para la extensión del problema, se reemplazó la distancia de un punto a una recta por la distancia de un punto a una circunferencia. Este cambio permitió generar una representación dinámica de la elipse y la hipérbola que consiste de un punto móvil $F$ sobre una circunferencia con centro $A$, un punto $B$, la recta $AF$ y su intersección $G$ con la mediatriz de $FB$ (Figura 7.27). El lugar geométrico del punto $G$ describe una elipse o una hipérbola dependiendo de la posición del punto $B$. Los puntos $A$ $y$ $B$ son los focos de la cónica. Por otro lado, el lugar geométrico del punto de intersección I de la mediatriz de $FB$ y la recta tangente a la circunferencia por el punto $F$ es una recta $IT$ perpendicular al eje de simetría $AB$. Como se observa en la Figura 7.27, la razón entre la distancia del punto $B$ al punto $G$ y la distancia del punto $G$ a la recta $IT$ es constante y coincide con la excentricidad $e = \frac{c}{a}$ de la cónica.

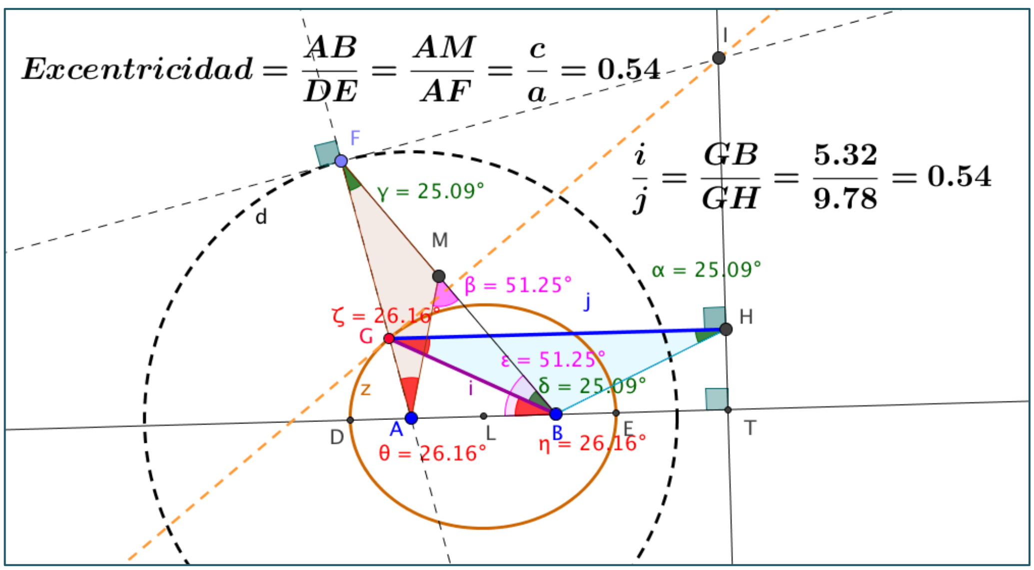



***Figura 7.27.*** Excentricidad de la elipse vista como una razón constante de longitudes variables.

Considerando el caso de la elipse (Figura 7.27), sea $M$ un punto sobre el segmento $FB$ tal que $AM = AB = 2c$. Se busca argumentar que los triángulos $GHB$ $y$ $AFM$ son semejantes, pues si esto ocurre entonces se tiene que:

$$\frac{BG}{GH} = \frac{MA}{AF} = \frac{AB}{AF} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = e$$

Para este fin se hacen las siguientes consideraciones:

1. El radio $AF$ de la circunferencia es igual al lado largo $2a = DE$ de la elipse.
2. Los puntos $A\ y\ B$ son los focos de la elipse, por lo que la distancia focal es igual a $2c = AB$.
3. La distancia del punto $G$ a la recta $IH$ es la longitud del segmento GH que es paralelo al eje de simetría $AB$, por lo que el ángulo $BGH$ es congruente con el ángulo $GBA$ (alternos internos a rectas paralelas).
4. Los ángulos $AMB\ y\ MBA$ son congruentes (ángulos de triángulo $BAM$ isósceles $AM = AB$).
5. Como el punto $G$ está sobre la mediatriz de $FB$, entonces los ángulos $AFM\ y\ GBM$ son congruentes (ángulos de triángulo isósceles $FGB$).

El ángulo $AFM$ es congruente con el ángulo $GHB$. En efecto, los puntos $G, F, I\ y\ H$ pertenecen a una circunferencia de diámetro $GI$, pues los triángulos $GFI\ y\ GHI$ son rectángulos y tienen como hipotenusa al segmento $GI$. Luego, el punto $B$ pertenece a dicha circunferencia (por ser el triángulo $BGF$ isósceles y con mediatriz el diámetro GI). Así, los ángulos $AFM$ y $GHB$ comparten la misma cuerda $GB$ (Figura 7.27).

Por un lado se tiene que $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AFM + \sphericalangle MAF$, pues el ángulo AMB es un ángulo externo del triángulo AFM. Por otro lado se tiene que $\sphericalangle MBA = \sphericalangle GBM + \sphericalangle GBA$. Por 3, 4 y 5 se concluye que los ángulos $MAF$, $GBA$ y $BGH$ son congruentes.

En resumen se tiene que $AFM = GHB\ y\ MAF = BGH$, por lo que los triángulos $GHB\ y\ AFM$ son semejantes. De forma similar se puede probar la relación para cuando la cónica es una hipérbola (Figura 7.28).

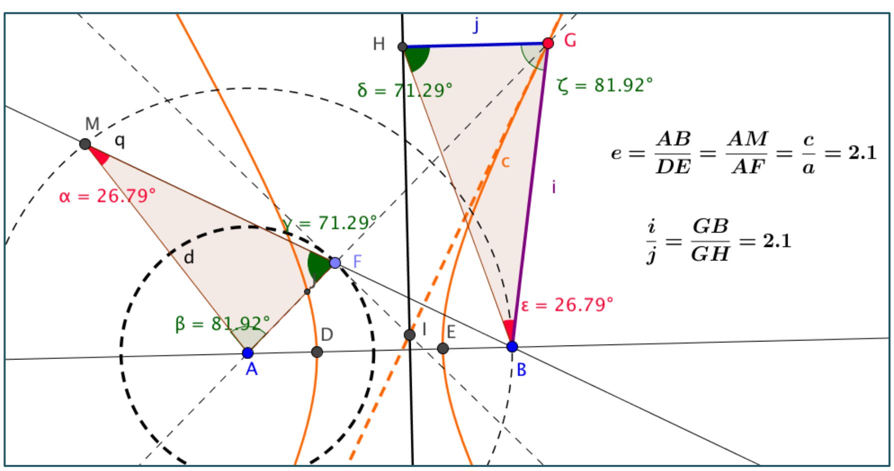



***Figura 7.28.*** Excentricidad de la hipérbola vista como una razón constante de longitudes variables.