CINVESTAV

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA

"Enseñanza de la cuadrática, con alumnos de 3° de secundaria usando el Derive"

Tesis que presenta:

Sergio Aguilar Maldonado

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias
En la especialidad de Matemática Educativa

Director de tesis: Dr. Eugenio Filloy Yagüe

México, D.F. **Agosto, 2013**

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo está dedicado a mi familia **Naomi Shimizu, Kaori Aguilar**, y **Midori Aguilar**, que gracias a ellas me mantienen firme en superarme cada día, también, le agradezco a mi suegra **Masako**: siempre estuvo pendiente del trabajo e, insistiendo para concluirlo.

A mis padres **Bernardo Aguilar** y **Evelia Maldonado**, a mi familia en general por el apoyo que siempre me han brindado, en cada una de las decisiones que he tomado, en especial a mi hermana María del Carmen Aguilar.

Le agradezco al **Dr. Eugenio Filloy Yagüe**, su paciencia, tolerancia, consejos y compartir su sabiduría para poder realizar esta investigación y concluirla: para hacer un pequeño aporte en la matemática educativa en México.

Asimismo, quiero mostrar mi gratitud al **M. en C. Ignacio Garnica**, este trabajo adquiere un nivel de calidad, tomando en cuenta sus observaciones y sugerencias.

Del mismo modo, a la **Dra. Ana Ma. Ojeda** le agradezco profundamente su gran paciencia a hacía mi persona, compartir su lucidez durante el curso y en la revisión de la tesis. Las observaciones realizadas, sugerencias y correcciones sirvieron para que la tesis adquiriera una mejor calidad del escrito.

Por último al Departamento de Matemática Educativa por proporcionarme los materiales e instalaciones requeridas para hacer el trabajo. Al igual que el Cinvestav, por apoyarme, económicamente, para participar con una ponencia sobre la investigación en la 23 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme), realizada en la Universidad Autónoma de Santo Domingo en 2009 y al XLII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, realizada en Zacatecas, México

Resumen de tesis

Esta investigación concernió al desempeño de alumnos de tercer grado de secundaria al utilizar el programa de cómputo *Derive* como herramienta en la enseñanza de la solución de ecuaciones cuadráticas. En el marco de los **Modelos Teóricos Locales** (MTL), y aludiendo a los **Sistemas Matemáticos de Signos** (SMS), específicamente a los sistemas algebraicos y computacionales (SMSA y SMSC), la interrogante fue saber cuál es la consecuencia en la comprensión de los alumnos al utilizar dichos sistemas. El objetivo fue conocer cómo repercute en el desempeño de los alumnos, el uso del Sistema Matemático de Signos Computacionales (SMSC), lo cual implica una nueva simbología y sintaxis algebraica en la resolución de la cuadrática.

Realizamos un estudio de campo con un grupo de 28 alumnos de tercer grado de nivel secundaria. Primero se aplicaron cuestionarios 1 y 2 para comprobar, que el estudio de la cuadrática era digno de ser tratado con más detalle. Segundo, de los resultados obtenidos por los alumnos, se desarrollaron prácticas, P_1, P_2 y P_3. En dichas prácticas se uso el *Derive* en la enseñanza de la cuadrática. Recordemos que existen tres formas generales de poder diferenciar las ecuaciones cuadráticas: la forma completa ($ax^2 + bx + c = 0$) y las formas incompletas cuando bx = 0 ($ax^2 + c = 0$) y cuando c = 0 ($ax^2 + bx = 0$). Posteriormente, los alumnos fueron clasificados en estratos avanzado, intermedio o deficiente, según su resultado en la resolución del algoritmo de la cuadrática.

En lo referente a las 11 tendencias cognitivas consignadas por Filloy (1999), evidenciamos cinco de estos fenómenos en los alumnos de este nivel y estos fueron:1) La articulación de generalizaciones erróneas; 2) La necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones; 3) La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa; 4) La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias; y 5) La presencia de mecanismos inhibitorios. Luego se entrevistó a un alumno por estrato para identificar las características de su desempeño en la resolución de la cuadrática.

Las conclusiones fueron: 1) Con el uso del *Derive,* la atención de los alumnos se centralizó en el algoritmo e interés por el tema, elevando el índice de sus respuestas acertadas de la siguiente forma: P_1, 62%, P_2, 71.35% y P_3, 52.4%. 2) El profesor y los alumnos desarrollaron un ambiente de cooperación y comunicación. 3) Los alumnos discriminaron los SMSC al desarrollar el algoritmo usando lápiz y papel. En las entrevistas durante nuestro estudio de casos se observo lo siguiente: El alumno avanzado desarrolló primero el algoritmo en lápiz y papel y recurrió al *Derive* como verificador de resultados. El alumno intermedio interactuó al mismo tiempo con el programa y con lápiz y papel. Por último, el alumno deficiente manifestó una confusión entre los SMSA y los SMSC y exhibió mayor dificultad para desarrollar la sintaxis y algoritmo correctamente.

Summary of Thesis

This research concerned the performance of students in third grade of secondary school when they use the computer program Derive as a tool in solving quadratic equations. Under Local Theoretical Models (MTL) and citing Mathematical Systems of Signs (SMS) specifically algebraic and computational systems (SMSA and SMSC), the question was to know what was the consequence of using these systems in the student's comprehension. The objective was to determine how the student's performance is affected by the use of the Mathematical System of Computational Signs (SMSC), which implies the use of new algebraic symbols and syntax in the resolution of quadratic equations.

We conducted a field study with a group of 28 third grade students of secondary school. First, questionnaires 1 and 2 were administered to verify that the study of the quadratic was worthy of being treated in more detail. Second, from the results obtained by students, we developed practices, P1, P2 and P3. In these practice, we use Derive to teach the quadratic equations. Let's remember that there are three general ways that quadratic equations can be differentiated: The complete form (ax2 + bx + c = 0) and two incomplete forms: When bx = 0 (ax2 + c = 0) and when c = 0 (ax2 + bx = 0). Later, the students were classified in stratum advanced, intermediate or poor based on performance in solving the quadratic algorithm.

With regard to the 11 cognitive tendencies recorded by Filloy (1999), we found five of these phenomena in the students of this level and they were: 1 The articulation of erroneous generalizations; 2) The need to give way to networks of actions every time until they become more abstract operations; 3) The presence of obstructions coming from semantics about syntax and vice versa; 4) The generation of syntax errors due to the production of intermediate personal codes to provide concrete intermodal actions; and 5) The presence of inhibitory mechanisms. Following, a student from each stratum was interviewed to identify the characteristics of his/her performance in the solution of quadratic equations.

The conclusions were: 1) With the use of Derive, the student's attention was centralized on the algorithm and interest in the subject which raised the rate of successful responses as follows: P1, 62%, P2, 71.35%, and P3, 52.4%. 2) Teacher and students developed an environment of cooperation and communication. 3) The students discriminated the SMSC when the algorithm was developing using paper and pencil. In the interviews during our case studies, we observed the following: The advanced student first developed the algorithm using pencil and paper and turned to Derive as checker of his results. The intermediate student interacted simultaneously with the program and with pencil and paper. The poor student expressed confusion between SMSA and SMSC and exhibited the most difficult to develop the syntax and algorithm correctly.

Índice

Índice de tablas

Índice de figuras

Introducción

La presente investigación se desarrollo el desempeño de los alumnos de tercer grado de secundaría al utilizar el programa de cómputo *Derive*, considerada como herramienta en la enseñanza de la resolución de las ecuaciones cuadráticas.

Considerando que hoy en día los alumnos muestran un gran interés por *La Tecnología de la información y Comunicación (*Tic), debido a su fácil manipulación y aplicación en su vida cotidiana. Lo que antes percibíamos como algo lejano en la aplicación de la tecnología en el aula, actualmente el acelerado avance de los programas de computo enfocados a didáctica, hoy en día representa una exigencia en los programas de estudio y un gran reto para el docente hacer uso de está, dentro de su práctica docente. Es por eso que consideramos la relevancia de hacer dicha investigación con el uso del *Derive,* considerado como una herramienta útil para el estudiante en la comprensión de la matemática.

En los Programas de estudios de la SEP, la enseñanza del algebra, concluye con la enseñanza de la cuadrática, sin embargo en investigaciones realizas en matemática educativa, han demostrado, que en algunos casos estudiantes de niveles superiores siguen sin poder desarrollar el algoritmo de esta, utilizando algún método. Es por ello que el capítulo I de plantearon tres preguntas de investigación para conocer, que es lo que sucede con el alumno, cuando interactúa con el *Derive*, en el momento de representar el algoritmo en lápiz y papel.

Para dar sustento ha este estudio, en el capítulo II, nos basamos en la perspectiva teórica del los **modelos teóricos locales** (MTL), desarrollada por Filloy (1999), al considerar la importancia del Sistema Matemático de Signos (SMS), bajo una noción de significado del signo que cubra tanto el significado formal de la matemática como el significado pragmático. Sin embargo consideramos que también intervienen un SMS algebraico y un nuevo SMS computacional. También en este capítulo se encontrara una breve reseña historia de los primeros intentos del hombre con comprender y aprender la resolución de la cuadrática.

En el capítulo tres, se realizó un planteamiento de acción en el desarrollo de la investigación, auxiliándonos de tres esquemas, que resultaron de gran utilidad, primero, definir el tema a estudiar, delimitar la población a ser analizada, y llegar a las conclusiones. Todo esto llevado a cabo en cuatro etapas.

El estudio de campo considerado como la etapa más importante dentro de la investigación la dividimos en dos capítulos, esto por considerar que para antes de poder enseñar el tema con el Derive, era necesario conocer el nivel de conocimientos de temas relacionados con la cuadrática, con los alumnos a investigar, para ello se diseñaron los cuestionarios 1 y 2, en la cual se evidencio la necesidad de investigar el tema con más determinación, de acuerdo a los resultados recopilados. En el capítulo cuatro se puede observar con determinación todo este proceso.

El capítulo cinco, considerada también como estudio de campo segunda parte, fue la más interesante, debido a la aplicación de tres prácticas, derivadas de los cuestionarios 1 y 2, relacionadas en con el tema, hay que recordar que existen tres formas generales de la cuadrática: ecuación completa $ax^2 + bx + c = 0;$ ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$ y la forma $ax^2 + bx =0$, cada práctica se dividió en dos secciones donde primero se solicitaba al estudiante utilizar el *Derive*, posteriormente hacer el algoritmo en lápiz y papel, y viceversa en la segunda parte del la practica, teniendo como resultados importantes, los fenómenos cognitivos, encontrados por Filloy en investigaciones anteriores.

Con el fin de profundizar más sobre los resultados obtenidos se llevó a cabo un estudio de casos, desarrollado en el capítulo seis, con tres estudiantes previamente identificados y seleccionados en avanzado, intermedió y deficiente, para poder hacer una entrevista de forma individual y dar respuesta a nuestras preguntas de investigación.

Por ultimo en el capítulo siete, se llegaron a las conclusiones de la investigación, primero de forma grupal y posteriormente de forma individual en relación con las entrevistas realizadas, a tres estudiantes. También se propusieron nuevas interrogantes para seguir ampliando más el estudio de los efectos que se producen en el momento de utilizar programas de cómputo como mediador o herramienta didáctica en la enseñanza de la matemática dentro del aula.

CAPÍTULO I

1.1. Planteamiento

Hoy en día, el contacto que tienen los alumnos con *La Tecnología de la Información y Comunicación* (TIC) es de fácil acceso y un rápido desarrollo, en sus aplicaciones en la vida cotidiana. En la práctica docente, he observado en los alumnos el gran interés que despierta en ellos −cuando el profesor hace uso de ésta como herramienta didáctica, centrando su atención en la enseñanza. El desarrollo de las calculadoras y programas de cómputo, con orientación hacia a la enseñanza de las matemáticas, ha provocado su inclusión en los planes de estudio. De particular importancia es el sistema conocido como CAS, S**istema Algebraico Computacional,** derivado del inglés *Computer Algebra System*.

En estudios realizados en matemática educativa (ICMI, 2001); (SEP, 2006); (Martínez M., 2009) se ha evidenciado que, al hacer uso del sistema en cuestión en la práctica educativa, el alumno logra una comunicación con el docente; mejora la sintaxis algebraica; centra su atención en los procesos cognitivos y desarrolla estrategias de resolución de problemas y de comprobación.

En el estudio de la ecuación de segundo grado desde los niveles Secundaria, Preparatoria y Universidad, los alumnos no logran adquirir la competencia de los distintos métodos que hay en la resolución de problemas; incluso profesores, recién egresados de la normal en la especialidad de matemáticas, se limitan a resolver los problemas utilizando la fórmula general solamente (Martínez A. 2008).

1.1.1 Aplicación del CAS en la enseñanza de las matemáticas en educación

El uso del CAS en el aula es cada vez más común entre los jóvenes de nivel secundaria: les permite desarrollar una mayor capacidad para comprender los conceptos. Observaciones de proceder de mis alumnos, cuando se encuentran en la fase de exploración, durante el proceso de resolución de problemas en el aula, evidencian: a) la presencia del ensayo y error para encontrar las aplicaciones que tiene el CAS; b) la rápida adaptación a la sintaxis. Sin embargo, la mayoría de ellos se limitan al uso del medio para la validación de resultados. Lo anterior se puede derivar de la enseñanza: utiliza el medio con escasa reflexión de sus efectos en el aprendizaje.

1.1. 2 Sintaxis algebraica con el CAS

Ante la incomprensión de la sintaxis algebraica, en lápiz y papel, estudios relacionados con el tema (Oaxaca, 2000); (ICMI, 2001); (Martínez M., 2009) y el uso del CAS, concluyen: promueve que el alumno centre la atención en la sintaxis; se disminuyen los errores en el uso de conceptos, al momento de formular estrategias y conjeturas necesarias para la resolución del problema. Considerando que la simbología utilizada en matemáticas se encuentra establecida y aceptada, se pone de manifiesto una simbología matemática alterna con la que el alumno opera en la resolución de problemas.

1.1.3 El problema de investigación

En los años de servicio que llevo dentro de la docencia a nivel secundaria, el tema de la cuadrática se desarrolla utilizando los métodos gráficos; de factorización; uso de fórmula general. Éstos han presentado, con base en mis reflexiones como docente, serios obstáculos para la comprensión del concepto. Por ello, motivado por los resultados arriba descritos, relacionados con el tema, propongo llevar a cabo un estudio sobre la comprensión de los problemas que enfrenta el aprendizaje de la ecuación cuadrática mediante el uso del CAS en su enseñanza.

1.1.4 Objetivo específico

La presente investigación se refiere a la "Enseñanza de la cuadrática, con alumnos de 3° de secundaria usando el Derive", basada en la perspectiva de los **modelos teóricos locales** (Filloy, 1999, p.4), que alude a los sistemas matemáticos de signos (SMS).

1.1.5 Preguntas de investigación

¿Cuáles son las competencias formales manifestadas por el alumno, al utilizar el Derive en la resolución de la cuadrática?

¿Cómo relaciona el alumno el nuevo SMS computacional, con el SMS algebraico?

¿Cómo interpreta el alumno la información del Derive, contrastada con el algoritmo de la cuadrática en lápiz y papel?

1.1.6 Objetivo de análisis

Para dar respuestas a las interrogantes, se plantean siguientes objetivos:

Reconocer las competencias formales que muestra el alumno, al estar utilizando el Derive, en la resolución de la cuadrática.

Identificar la forma de relacionar el SMS computacional con el SMS algebraico.

Recabar la información de cómo utiliza el alumno el Derive 6.1 para el algoritmo de la cuadrática.

2.1 Perspectiva Teórica

La presente investigación consiste en la propuesta didáctica de la enseñanza de la cuadrática con alumnos de 3° de secundaria usando el Derive. Esta propuesta se sustenta en el marco teórico - metodológico de los **modelos teóricos locales**. Se utilizan las siglas **MTL,** para hacer referencia al modelo de investigación (Filloy, 1999, p. 3).

Este modelo nos permitirá observar fenómenos cognitivos que se presentan en el momento en que se interrelacionan alumno-profesor y alumno-Derive al estudiar el tema de la cuadrática. Dentro del aula ocurren a diario diversos fenómenos cognitivos en la relación profesor-alumno durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. En el aula, no siempre se dan las mismas circunstancias cuando el profesor y el alumno se encuentran diariamente al enseñar y aprender un contenido matemático específico.

Se consideran 4 componentes que a su vez están interrelacionadas:

- Modelos de enseñanza.
- Modelos de los procesos cognitivos.
- Modelos de competencia formal.
- Modelos de comunicación.

Estos componentes son locales y, a su vez, el enfoque es recursivo, en el sentido de comenzar un problema y, al final del proceso, volver a él.

2.1.1 Modelo en lenguaje matemático

Etimológicamente, la palabra Modelo, en un sentido matemático, toma en cuenta la definición del diccionario de las ciencias de la educación: "expresión de una realidad compleja en *lenguaje matemático* para facilitar su reproducción o su comprensión" (Santillana, 1998). La simbología matemática utilizada desde los primeros años hasta la actualidad se basa en un sistema matemático de signos (SMS) ─se desarrolla de una forma convencional, para poder explicar la realidad que hay dentro de nuestro entorno, así como resolver diversos problemas que nos rodean.

El acto de aprender la simbología y nueva simbología durante nuestra vida provoca una adquisición y desarrollo de un Modelo propio que, a su vez, es también convencional con el de otras personas, con el objetivo de desarrollar una comunicación. Este modelo propio podría ser diferente con las forma del uso de la sintaxis; pero llega a ser entendible para otras personas.

La palabra Modelo (Zimbardo, 1989, p. 105) se aplica a diversas ideas de acciones; sin embargo, en el campo científico, se relaciona con la construcción de un modelo: se seleccionan los elementos relevantes y sus interrelaciones —se sustituyen con representaciones isomórficas que facilitan la comprensión e investigación de un aspecto de la realidad.

2.1.2 El Modelo en lo social

Dado que las conductas humanas se adquieren por medio de la observación, son reproducidas para uno mismo. El lenguaje y otros símbolos capacitan a los humanos para procesar, almacenar y recuperar experiencias cognitivas que se convierten en guías para acciones futuras. Por ejemplo, el sujeto que aprende debe poner atención a ciertos aspectos del actuar del profesor; ser capaz de realizar, por su cuenta, lo enseñado: estar motivado para reproducir lo aprendido, bajo su propio desarrollo.

2.1.3 Lo Teórico

Es relativo a lo que se lleva a cabo en el aula, en la construcción intelectual que se desarrolla con el alumno —basado en un programa educativo y llevado a cabo por el profesor de aula—. El objetivo principal es desarrollar un tema de forma teórica sin llevar a cabo una hipótesis de la enseñado dando al alumno lo enseñado como un hecho aceptado. (Libro del maestro, 2000, p. 12).

2.1.4 Lo local del método teórico

Sobre lo local versus lo general, el porqué de lo local en nuestros modelos teóricos (Filloy.1999, p. 6). De acuerdo con las investigaciones de psicología cognitiva, la forma como se desarrolla la resolución de problemas es: los expertos, para descodificar una situación problémica, proceden de los datos a lo desconocido Un individuo altamente competente reconoce, inmediatamente, tipos de problemas, ––debido a que ha desarrollado internamente esquemas,— que con el tiempo se van almacenando e integrando en información; éstos son traídos, inmediatamente, cuando surge una situación problémica: reconoce cuáles son las relaciones centrales de la situación, comparándolas con las existentes en la memoria a largo plazo; ahí se encuentran ya estrategias para, finalmente, utilizar el lenguaje matemático o textos matemáticos; luego descodificar éstos y obtener la solución del problema.

Ahora bien, cuando un novato afronta la solución de problemas y el profesor experto su resolución, suele producirse un procedimiento que puede ir de lo desconocido hacia los datos o a la inversa: la competencia para descodificar la situación problémica estaría determinada por la posibilidad de realizar el esbozo lógico-semiótico (análisis/síntesis) de la situación problémica: más que por el reconocimiento de algún esquema previamente aprendido. También hay que considerar que el alumno se interrelaciona con otros alumnos y entre todos pueden llegar a la descodificación de la situación problémica.

Podemos decir que un usuario competente que realiza un esquema lógico-semiótico de una situación problémica, inmediatamente origina mecanismos cognitivos que permiten anticipar:

- Las relaciones centrales del problema.
- Tomar la decisión (en qué estrato del SMS): bosquejar, inmediatamente, todos los pasos de la resolución ―decidir entre un SMS u otro SMS más concreto.
- La descodificación de la situación problémica.

2.2 Modelos de enseñanza

El alumno se encuentra en un modelo de enseñanza establecido o institucionalizado, con un programa que contiene propósitos y objetivos específicos de temas matemáticos. Dividimos al modelo de enseñanza en dos posiciones:

El modelaje concreto: es decir, se *modela* en contextos más familiares para el alumno, considerando que, en preescolar y primaria, los primeros símbolos numéricos matemáticos se enseñan con la asociación de objetos y Figuras; posteriormente, las operaciones se realizan con los diversos conjuntos de números y a los nuevos objetos hay que dotarlos de significado ―como punto de partida, hay que construir los primeros elementos de la sintaxis matemática―. En la etapa de aprendizaje existe una serie de posiciones antagónicas a la experiencia anterior, se propone una traducción: se dota de sentido y significado, aún sin ser competentes en el uso del lenguaje matemático, en un contexto más "concreto" en resolución de operaciones.

El modelaje sintáctico del Sistema Matemático de Signo (SMS): después de aproximadamente 6 años de haber estado utilizando de forma constante el SMS aritmético y de considerar al alumno altamente competente en su uso y aplicación, en el nivel secundaria se le presenta un nuevo SMS (el algebraico); esto implica una nueva sintáctica en las operaciones. En el Álgebra, el tratamiento de resolución de ecuaciones y problemas se basa en los modelos sintáctico-viéticos (transposición de términos) y euleriano (adición y multiplicación de los inversos aditivos y multiplicativos).

Los alumnos del nivel secundaria se encuentran al aprender matemáticas con una nueva descodificación: toda situación requiere ser modelada en un Sistema Matemático de Signos (SMS), un nuevo sistema matemático de signos (el algebraico), lo cual implica la aplicación de nuevas reglas semánticas y sintácticas.

Si para desarrollar estrategias de enseñanza, en los inicios de la adquisición de las competencias de un SMS, se adopta el uso de la tecnología como mediador, es necesario saber qué procesos median entre las acciones que se realizan en un nivel "más concreto". ―A estos procesos los llamaremos "abstracción de las operaciones".

2.3 Modelos para los procesos cognitivos

Los procesos cognitivos que se ponen en acción para llevar a cabo el pensar matemático y su comunicación (con códigos socialmente establecidos) en cursos anteriores, son elementos que se van perfeccionando:

- Percepción.
- Direccionamiento de la atención y sus relaciones con los procesos de comprensión.
- El uso cada vez más intensivo de la memoria.
- El desencadenamiento de procesos de análisis y síntesis cada vez más entrelazados con el uso de la lógica.
- Las concepciones heurísticas utilizadas en la resolución de las situaciones problémicas.
- El aprendizaje ligado a los procesos de generalización y abstracción que requieren los usos de los SMS de la matemática escolar.

2.3.1 Sistemas Matemáticos de signos (SMS)

Cuando el aprendiz hace uso de la matemática en su forma simbólica para solucionar un ejercicio o un problema, acude a todo un SMS adquirido de una forma empírica, mediante el desarrollo proporcionado por la institución académica.

En Matemática Educativa, la observación de los SMS debe de ser más amplia, debido a la gran diversidad de signos utilizados en las distintas ramas de las matemáticas. El primer SMS al cual se hace referencia es al aritmético, como un sistema socialmente establecido.

Filloy señala que "el aprendiz utiliza sistemas de signos intermedios en los procesos de enseñanza-aprendizaje, cuyo uso tendrá que rectificar, de modo tal que al final del proceso de enseñanza el estudiante llegue a ser competente en el SMS deseado, que es la meta educativa del cualquier modelo de enseñanza" (Filloy, 1999, p.73).

Ahora bien, al considerar que se sigue un programa de matemáticas en la enseñanza de la cuadrática con alumnos de tercer grado de secundaria, se implica la utilización de dos SMS. El Sistema Matemático de Signos Algebraico (SMSA) y el Sistema Matemático de Signos Computacionales (SMSC) (Rojano, 2001), bajo una noción de significado del signo que cubra tanto el significado formal de la matemática como el significado pragmático.

Para la significación de los SMS tendremos cuatro tipos de significados:

- De transformaciones dentro de un SMS sin referencia a otro SMS.

- De traducciones a través de SMS distintos.

- De traducciones entre SMS, tales como el lenguaje natural, textos producidos con imágenes visuales y los sistemas de señales que utilizan los aprendices durante los procesos de enseñanza/aprendizaje.

- Los SMS intermedios creados durante el desarrollo de las secuencias de la enseñanza-aprendizaje, propuestas la componente de enseñanza del modelo teórico local bajo estudio; estos SMS intermedios evolucionan hacia un SMS nuevo más “abstracto”. —El nuevo SMS conduce a nuevas acciones, procedimientos y conceptos que tendrán como referentes todas las acciones anteriores pertinentes.

2.3.2 Tendencias cognitivas

En investigaciones realizadas con anterioridad en el Centro Escolar Hermanos Revueltas (Filloy, 1999, p. 81) se revelaron once fenómenos cognitivos:

- Un proceso de abreviación de los textos concretos para producir reglas sintácticas nuevas.
- La dotación de sentidos intermedios.
- El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.
- La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.
- Centración en lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problémica.
- La articulación de generalizaciones erróneas.
- Mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución.
- La presencia de mecanismos inhibitorios.
- La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.
- La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias.
- La necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.

2.4 Modelos de competencia formal

El modelo de competencia formal hace referencia al esquema del currículo escolar en el cual el profesor basa su programa de acción en la enseñanza de las matemáticas. Este modelo se fundamenta en las investigaciones realizadas con anterioridad y es un modelo a seguir, con una secuencia didáctica de los contenidos a ser enseñados y delimitado, de acuerdo al grado escolar del estudiante. El estudiante debe poseer la competencia formal de manera general.

2.4.1 Las caracterizaciones básicas de competencia en México

En esta parte no pretendemos desarrollar el tema de competencia (Perrenoud, 1997, p.23–25) de forma general, debido a la gran diversidad que hay de acepciones y la problemática existente en el concepto de competencia; sin embargo, citaremos una definición más amplia, de la cual se sustraerá lo más esencial que se interrelacione con la competencia matemática alcanzada en un SMS general.

"La competencia es integración de conocimiento (saber), habilidades (saber hacer), actitudes (querer hacer) y aptitudes (poder hacer), en el desarrollo de las actividades de la vida general" (Monzó, 2006, p.33).

Durante la enseñanza de un conocimiento matemático, podemos observar cómo se pueden resolver problemas matemáticos usando el SMS empleado para crear textos matemáticos, sin importar la velocidad en la cual procesamos la información. La actitud se presenta cuando surge una estrategia ó diversas estrategias para resolver un problema; la aptitud es el logro cuando se llega al resultado para ser comunicado (en otro texto matemático).

2.4.2 Aspectos básicos de la formación basada en competencias

"El entendimiento de las competencias, en la educación, debe ser dirigido como un enfoque y no como un modelo pedagógico" (Tobón, 2006, P. 1). Las competencias deben enfocarse en aspectos específicos de la docencia, del aprendizaje y de la evaluación y no como un modelo a seguir para mejorar la educación en México. Para Tobón son tres los enfoques, de los cuales el que a nosotros nos concierne es el primero, citado así:

- La integración de los conocimientos, los procesos cognitivos, las destrezas, las habilidades, los valores y las actitudes en el desempeño ante actividades y problemas.
- La construcción de los programas de formación acorde con los requerimientos disciplinares, investigativos, profesionales, sociales, ambientales y laborales del contexto.
- La orientación de la educación por medio de estándares e indicadores de calidad en todos sus procesos.

2.4.3 Competencia formal

La competencia formal: a partir del planteamiento de un programa fijo de carácter institucional donde nos marca una serie de objetivos a desarrollar con el alumno. Éste, al ingresar a la primaria, se interna un modelo de símbolos más complejos: pasa de lo concreto (desarrollado en preescolar) a lo abstracto. ―En consecuencia, el alumno, a medida que va progresando y avanzando en los grados académicos, tiende a la necesidad de crear nuevos textos matemáticos (modelo de enseñanza), usando un SMS más abstracto que le permita descodificar todos los textos que se producen en clase en un intercambio de mensajes en los que los ejecutantes (alumnos y profesor) tienen diversos grados de competencia de uso de los SMS (aritmético y algebraico) utilizados.

Un ejemplo para clarificar lo expuesto: cuando utilizamos los números naturales (SMS) y sus operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). Si bien existe la controversia entre los que afirman que a partir de la cardinalidad se construye el orden y los que sostienen lo contrario. La construcción de Von Newman (Filloy, 1999. P.8) procede con una definición de número natural que parte de las propiedades de orden, permitiéndole, después, contar con la propiedades de inducción infinita: a partir de ello, se define la noción de conteo, cardinalidad y las operaciones aritméticas.

2.5 Modelos de comunicación

La competencia comunicativa se presenta, en los adolescentes, cuando el sonido, "el significado y los sistemas gramaticales ya están bien desarrollados" (Meece, 2000, p. 222), para representar, por medio de un SMS, el conocimiento de textos matemáticos. Éstos son producidos en un intercambio de mensajes, en el que los sujetos presentan diferentes niveles de SMS, adquirido a través de un proceso de construcción del conocimiento matemático, haciendo al sujeto competente en este nivel. En la actualidad, surge nueva simbología, considerada como sistemas matemáticos computacionales (SMSC), para hacer de su uso en los "software" matemáticos−. Con la nueva simbología, los usuarios adquieren (con una rápida adaptación) sin presentar impedimento en su aceptación; por ejemplo, * (multiplicación) asterisco ,^ acento circunflejo (potenciación), etc: Lograr que el alumno sea altamente competente en el SMS, y así adquirir un nuevo SMS más abstracto en el cual emprenderá nuevas acciones y procedimientos para ser comunicados.

2.5.1 La competencia lingüística

Sin duda alguna, el gran logro que el ser humano ha logrado, que nos diferencia de las demás especies: el *lenguaje*. Gracias al uso del lenguaje podemos comunicarnos con cualquier persona; ya sea de una región del país o, inclusive, con otras personas de otros países: Las matemáticas es un idioma universal con el cual uno se puede comunicar en base a los textos matemáticos. −Con el lenguaje, se puede producir una cantidad infinita de mensajes; en base a sonidos, letras y gestos.

La competencia *lingüística* se divide en cuatro tipos de conocimiento, *la fonología, semántica, sintaxis y pragmática* (Meece, 2000); (Shaffer, 2000). A continuación, mencionaremos, sin profundizar, enfocando en el aspecto del pensamiento matemático.

2.5.2 Componentes del lenguaje

Fonología. Se refiere a las unidades básicas del sonido, o fonemas, que se usan en un lenguaje y las reglas para combinarlos. Si lo situamos en un contexto matemático, los fonemas, utilizados en el lenguaje matemático, son de vital importancia; estamos habituados a ellos desde la infancia. En el nivel universitario el grado de complejidad derivada de los sinónimos y el lenguaje, utilizado por los adolescentes, lleva recurrir a un algoritmo, sin llegar a utilizarlo apropiadamente.

Semántica. La semántica se refiere a los significados expresados en las palabras y enunciados. La interpretación de los signos o textos matemáticos que da el alumno a la simbología matemática, puede llevar a un error de significado: desea entender para, posteriormente, comunicarse con el profesor. Es un fenómeno muy recurrente en los alumnos que deben de adquirir un grado más de abstracción en el conocimiento matemático.

Sintaxis. El lenguaje también implica la sintaxis, o las reglas que especifican cómo deben combinarse las palabras para formar frases y oraciones significativas. En matemáticas es la principal vía de comunicación en la adquisición del pensamiento matemático; con ella, desde muy temprana edad, nos orientamos con reglas preceptivas, un método para resolver problemas. Los enunciados en español se traducen como textos matemáticos. Por lo general, los grandes errores, de procedimiento y análisis son, básicamente, debidos a la sintaxis, ya sea de índole aritmético o algebraico.

Pragmática. Los aprendices del lenguaje deben dominar también el conocimiento de la forma en que el lenguaje podría usarse para *comunicarse eficazmente* (Shaffer, 2000). Sin duda, es uno de los fenómenos más difíciles de ser observados, algunos adolescentes les resulta difícil de explicar las dudas, planteamientos, razonamientos, etc., que ellos tienen con respecto a x tema de matemáticas y así, poder comunicarse con el profesor o compañero que tiene un nivel de competencia: empleando su propio lenguaje pragmático para comunicarse.

Concluyo citando que para Noam Chomsky (Citado por Meece, 2000, P.209), todos los seres humanos estamos biológicamente programados para adquirir el lenguaje, esto conlleva a poder comunicarnos de una forma general.

2.6 Marco de referencia en la solución de problemas

―La habilidad para solucionar problemas es una manifestación muy importante del pensamiento humano y otro gran logro en la evolución del ser humano—.

En la vida cotidiana nos enfrentamos a diversas situaciones que conllevan a la necesidad de solucionar un problema. De manera interna se desarrolla todo un proceso: la percepción, lenguaje, secuencia de acciones, memoria, categorización, juicio y selección, consideradas importantes en la solución de problemas. Hay que recordar que solucionar problemas y forma parte de las características de la inteligencia.

2.6.1 Naturaleza de solución de problemas

Un problema surge cuando tenemos una situación problémica, aún cuando no tenemos bien claro el camino a seguir para llegar a la meta. Se dice que el proceso de análisis está íntimamente conectado con el *aprendizaje.*

Para Newell y Simon (1972) (citado en el libro de La enseñanza de las matemáticas en la secundaria: lecturas, p. 100), la formulación de espacio de un problema tiene cuatro elementos:

- La descripción del estado inicial del problema.
- La descripción del estado final a ser alcanzado el problema.
- Las acciones que se realizaran para cambiar el estado del problema.
- La trayectoria que impone el problema para obtener una ruta exitosa.

Definimos el espacio del problema como el conjunto de los diversos operadores disponibles con los que contamos. Estos, los operadores, son la solución; la meta y el método. Cuando, en ocasiones, utilizamos algún método de solución brillante, a esto se le conoce como Heurística de indagación (investigación), y los procesos son:

- Comparar el estado común con el estado meta.
- Elegir un operador que reducirá una de las diferencias.
- Si el operador puede ser aplicado en algo.
- Durante la solución de problemas, se considera que ocurren errores, los cuales se clasifican en:
  - Error ignorable. Desconoce una posible solución.
  - Error recuperable. Se puede solucionar con los factores que hay en su entorno y se corrige.
  - Error irrecuperable. Una vez seleccionada una ruta de solución no se puede corregir o modificar la solución.

2.6.2 Desarrollo de la pericia

Se considera que existen dos tipos de individuos en el momento de resolver un problema: los expertos y los novatos. Los expertos tienen una gran habilidad para solucionar problemas, y los novatos no han desarrollado la habilidad para resolver un problema. Una investigación encontró que cuando se enfrenta a estos dos sujetos en un juego de ajedrez, las personas expertas desarrollan muy pocos caminos para solucionar un problema; en cambio, un novato desarrolla diversos caminos para llegar a la solución.

La pericia se desarrolla siguiendo los siguientes pasos:

- Experiencia en la resolución de problemas.
- Instrucción en el tema del problema que soluciona.
- Exposición de problemas resueltos.
- Un novato que sigue estos pasos tiende a hacerse un experto: pero, si un novato no lleva estos procesos —siempre será un novato.

2.6.3 Definición de un problema

Muchos problemas están mal definidos en las presentaciones de uno o más de los componentes básicos. Problemas mal definidos usualmente son complicados y poco entendibles, a pesar de tener la posibilidad de tener una solución sencilla.

2.6.4 Limitaciones paralelas de satisfacción

Newell y Simon (1972), (citado en el libro de La enseñanza de las matemáticas en la secundaria: lecturas, p. 105)hicieron énfasis en que al solucionar un problema típico, se le descompone en subproblemas y, luego, cada submeta es resuelta una por una. Para cualquier submeta, en particular, la operación alternativa es ejecutada secuencialmente, en la búsqueda del camino para una solución. El procesamiento paralelo no debe de ser excluido; en particular, el proceso debe unir los diversos estados de problemas, hechos contra las condiciones de control de producción: asumimos que están en paralelo. De todas maneras, el aspecto serial de la solución de los procesos, teóricamente es central.

También es posible que la manera en que la información activa usada para construir una solución, a veces, puede involucrar integración en paralelo de conocimiento, en vez de procesamiento secuencial.

2.7 Habilidades del pensamiento matemático

Si consideramos que todo ser humano posee una aptitud innata, en el desarrollo del proceso cognitivo, para realizar diversas tareas. En investigaciones realizadas con estudiantes se encontró que "las mujeres están propensas a subestimar sus habilidades en matemáticas y en ciencias; por su parte, los varones subestiman sus habilidades verbales y de lectura" (Meece, 2000, p. 291). Carol Dweck y Elaine Elliot (1983) (citado en Meece, 2000, p.291), comentan que los estudiantes se sirven de concepciones diferentes **teoría fija de habilidades y teoría incremental de habilidades,** en la primera concepción el estudiante tiene la noción que su nivel de habilidades esta fijo sin que pueda mejorar con la práctica, en la segunda concepción, es lo contrario, a medida que se adquiere la práctica van mejorando sus estrategias de proceso en cualquier algoritmo. Piaget sostiene que los procesos de las diferentes estructuras de cognitivas, van desde el razonamiento simple a lo complejo (Piaget,1987, p.

385). Esto también lo comprobó el experimento de razonamiento combinatorio con alumnos de diferentes edades, (Meece, 2000, p.118) (Ausbe, 2012, p. 131).
Según, Sánchez “La observación es un proceso mental que implica la identificación de las características de los estímulos (objetos o situaciones) y la integración de estas características en un todo que represente la imagen mental del objeto o situación” (Sanchez, 1995, p. 7). Es cierto que el alumno en la última estadía de las operaciones formales, hace un uso intenso de de la vista para percibir la información a través de la observación, Sánchez propone tres fases para el desarrollo de las habilidades de pensamiento y matemáticas:

a) Organizar las características de acuerdo a las preguntas planteadas
b) Formular la descripción.
c) Verificar los resultados.

Consideramos que para adquirir una habilidad matemática se necesitan de diversos componentes que se ponen en juego en el momento de resolver un problema, la abstracción, razonamiento y problematización.

2.7.1 Abstracción, razonamiento y problematización.

La capacidad de poder pensar de forma abstracta se da en el período de las operaciones formales, cuando el pensamiento del alumno comienza a distinguir entre lo real (concreto) y lo posible (abstracto), se considera 4 características fundamentales:

a) Lógica proposicional. Es la capacidad de inferir un resultado a partir de la relación de premisas.
b) Razonamiento científico. A medida que se utiliza la lógica proporcional, se comienza a abordar los problemas de una modo más sistemático, llegando a la formulación de hipótesis, compararlas, para excluir las falsa, a esto Piaget le dio el nombre de pensamiento **hipotético-deductivo**
c) Razonamiento combinatorio. Se caracteriza por la capacidad de obtener distintas combinaciones para poder abordar en causas múltiples, dicho de otra forma, es el empleo de diversos procedimientos para llegar al mismo resultado.
d) Razonamiento sobre las probabilidades y las proporciones. Esto lo aplicamos en el momento de ir al tienda a comprar X producto y comenzamos a comparar proporción (contenido) con el precio y otros productos similares, en ocasiones al no poder utilizar las operaciones básicas con la habilidad necesaria en un problema real, se elige resolverlo por la experiencia de gustos, sabor, marca o algún cálculo mal aplicado.

La problematización, es el proceso que realizamos, al desarrollar nuevas conjeturas a partir de un problema determinado, y así llegar a la toma de decisión en la solución de este.

2.7.2. Aprendizaje significativo

El aprendizaje significativo toma un papel importante dentro del salón de clase ya que cuando percibimos el conocimiento, almacenamos (memoria) una vasta información e ideas para ser reutilizadas en su momento. “El aprendizaje significativo comprende la adquisición de nuevos significados y, a la inversa, son producto del aprendizaje significativo” (Ausbel, 2012, p. 48), partiendo de nuevas simbologías utilizadas en matemáticas. Pero para que se de las condiciones idóneas para un aprendizaje significativo, depende de la actitud de estudiante y la presentación de material a presentar. En este caso la utilización de un programa de computo (Derive), utilizado como herramienta, en la enseñanza como medio cognitivo, hace una atracción potencial al alumno, para tener una relación con el tema a estudiar y sea dirigido a ser un aprendizaje significativo. En investigaciones realizadas el aprendizaje significativo no determina el grado de conocimiento pero si influye en la motivación del estudiante para seguir aprendiendo.

2.7.3. Pensamiento matemático

Un ejemplo claro sería en comparar el pensamiento físico con el pensamiento matemático, en el cual el primero indaga sobre el resultado exacto de un fenómeno a ser estudiado, en comparación con el pensamiento matemático, se puede llegar a más de un resultado ya que la concepción de número cardinal o cantidad de elemento de un conjunto, sea esta cantidad finita o infinita. Si consideramos que pensamiento matemático, es la actividad interna que realizamos para resolver un problema, de forma independiente al integrar los distintos saberes del conocimiento matemático, utilizando cualquier método, podremos afirmar que se ha concebido una habilidad del pensamiento matemático.

2.8 Breve reseña histórica de las ecuaciones de segundo grado

El fenómeno del comercio y las guerras de expansión que se dieron en Europa, Asía y África a lo largo de la historia dieron una gran evolución y aporte al pensamiento matemático (Struik, 1994).

En el siglo XVIII a. C., Babilonia fue una civilización que se desarrolló ampliamente en distintos temas. Situada en lo que hoy conocemos como Irak, la primera dinastía Babilónica se conoce como Hammurabi (alrededor de 1950 a. C.): una población semítica había subyugado a los primeros sumerios (primeros pobladores de Babilonia). En los textos, encontrados en unas tablillas, se percibe una aritmética desarrollada dentro de un álgebra. Los egipcios de este mismo período fueron capaces de resolver ecuaciones lineales simples. Los babilónicos de los días de Hammurabi estuvieron en completa posesión de la técnica de manejo de ecuaciones cuadráticas: resolvieron ecuaciones lineales y cuadráticas con dos variables y bicuadráticas.

En el debate de la antigüedad de la matemática china, según Struik, “no hay textos matemáticos en existencia que puedan ser fechados definitivamente para la era precristiana debido a que, en época de la dinastía Qin, el emperador Qin Shi Huang ordenó quemar todos los libros de conocimiento científico. Sin embargo, existe un texto"; *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático* (*Chiu ch´ang Sua~shu*, o con corrección de escritura, *Jiu Zhang Suan shu*), escrito 300 a. C. a 200 a.C. (Maza, 2000, P.2). En ese texto se plantearon diversos métodos para resolver una ecuación lineal y una cuadrática; un ejemplo de ello es el método de la *falsa posición.* Hay que resaltar que en el libro *Chóu~pei*, escrito 1105 a. C., este cálculo se desarrolló en la fecha de la muerte del emperador Qin Shi Huang (210 a. C.) (Texas University, 2011). Incluye una discusión sobre el teorema de Pitágoras. Entre otros libros se encuentran el de cuadro mágico, matrices y, sobre todo, ya tenían la posibilidad de representar los números positivos y negativos.

Sin duda, las guerras surgidas y la expansión de los imperios en Europa, trajeron en sí el intercambio del pensamiento matemático en Grecia. La victoria griega fue la expansión y hegemonía de Atenas. Bajo el mando de Pericles en el año 430 a. C., (a este período se le conoce como la Edad de Oro de Grecia). Los mercaderes griegos llegaron a familiarizarse con la matemática oriental a lo largo de sus rutas del comercio. Por primera vez en la historia, un grupo de hombres críticos, los "sofistas", abordaron los problemas de naturaleza matemática con el espíritu de entendimiento, como los Pitagóricos. Esta escuela fue fundada por Pitágoras de Samos, donde se acuña el descubrimiento del teorema de Pitágoras, ternas Pitagóricas, números triangulares, las propiedades de los polígonos regulares y cuerpos regulares, etc.

Posteriormente, Diofanto de Alenjandría en el año 250 d. C., trataría de manera rigurosa, en su *Aritmética*, las ecuaciones de primer y de segundo grados. Cabe aclarar que existieron diversos pensadores griegos que impulsaron, de manera importante, el avance de la matemática. También hay que resaltar que la mayoría de los textos matemáticos de la época eran descritos de forma textual, utilizando muy poca de la simbología que, actualmente, usamos en la matemática.

Después de la caída del Imperio Griego, y el repentino crecimiento del Islam sobre Arabia, Asia Occidental, norte de África y España, se traen los estudios realizados por los árabes, influenciados por el desarrollo de la escuelas hindúes (a partir del siglo V d. C.). La gran aportación fue la del sistema posicional decimal. Esta simbología llega a simplificar de manera considerable la escritura matemática. Regresando a los matemáticos árabes, Al~Mansur (754-775) y Harum al~ Rashid (776-809) promovieron la astronomía y la matemática; Al~Mamum (813-833) organizó en Bagdad una "Casa de Sabiduría", con una biblioteca y un observatorio (Struik, 1994). Además, ingresaría un gran matemático, nacido en Khiva, lo que hoy es Uzbekistan, de nombre Al Khwarizmi (780 -850), quien entró en el estudio de las obras griegas e hindúes; escribió diversos libros sobre la matemática y la astronomía. El libro *Algoritmi de numero Indorum*, se agregó al término algorithmus a la latinización del lenguaje además de la aplicación del sistema decimal, pero, sin duda, el libro al~jabr wa~al~muqabala (literalmente, "ciencia de la reducción y la confrontación", significando, probablemente, "ciencias de las ecuaciones"). Traducido el latín *jabr* como álgebra, contiene la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas, pero aún el simbolismo es "retórico" en cuanto se plantean ecuaciones para resolver problemas de la vida real. Sin duda, este texto produjo un gran efecto inmediatamente en Europa: se le introdujo vía España, después de la invasión Árabe en el año 711 d. C.

En Europa, durante la edad media, período histórico de la civilización occidental, comprendido entre el siglo V y el siglo XV, el pensamiento matemático occidental sufrió un retroceso debido al auge y prioridad de la fe católica en la vida artística, intelectual y científica. Sin embargo, hubo clérigos que tenían interés por las matemáticas, tal es el caso de Anicio Manlio Severino Boecio, quien escribió textos matemáticos que fueron imperantes en el mundo occidental por más de mil años (a pesar de ser pobres en contenidos matemáticos). Otro fue Gerberto, un monje francés que fue a España e hizo estudios de la matemática del mundo árabe.

El desarrollo de las villas feudales en ciudades provocó que cada vez surgiera una autonomía de los ciudadanos e interés por las nuevas tecnologías —traídas por la apertura del comercio con oriente, en ciudades de Italia, Francia y Europa Central. Sin embargo, cuando Toledo fue recuperada por los cristianos, diversos estudiantes de distintas naciones de Europa se enfocaron en el estudio de la ciencia matemática transmitida por los árabes. Era, también, volver a divulgar el conocimiento matemático, desarrollado por las distintas escuelas griegas y abandonadas en la época feudal. El nuevo sistema de numeración, creado por los hindúes, llegó a ser prohibido a los comerciantes: Dominado bien, el nuevo sistema era de mejor aplicación que el sistema de numeración romana. De toda esta evolución, surge Leonardo de Pisa, llamado también Fibonacci, mercader que viajó a Oriente. A su retorno escribió su *Liber Abaci* (1202), que contenía información aritmética y algebraica. Vale resaltar que Fibonacci cita a *Al~Khuwarizmi* como ejemplo, en la discusión de la ecuación $x^2 + 10x = 39$. El problema que conduce a la "serie de Fibonacci", 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,……. y también su demostración, notablemente perfecta, de que las raíces de la ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ no pueden expresarse por medio de los irracionales euclidianos: Leonardo lo demostró verificando cada uno de los quince casos, tratados por Euclides, de esta ecuación, encontrando seis cifras sexagesimales (Struik, 1994).

La publicación del *Liber Abaci* fue el medio que introdujo el sistema indo~árabigo a Europa occidental; en consecuencia, se le ha utilizado en todo el mundo, hasta nuestros días. Dicho sistema fue importado por los mercaderes, embajadores, peregrinos y soldados provenientes de España —el manuscrito más antiguo que contienen estos numerales es el *Codex Vigilianus* (976). Dicho cambio fue muy lento: existe un documento francés, donde se encuentran los diez símbolos, que data de 1275. Las numeraciones griega y romana prevalecieron durante muchos siglos. Sin embargo, a principios del siglo XVI, los matemáticos italianos comenzaron a desarrollar nuevas teorías que los antiguos griegos y árabes habían omitido. Esta teoría condujo a Scipio del Ferro a la solución general de la ecuación cúbica, con sus alumnos en la Universidad de Bolonia. Sin duda, en vísperas del Renacimiento, el interés de los pintores por la geometría euclidiana se popularizó, lo cual es el caso de Alberti y Piero della Francesca, (considerado como matemático y geómetra), quien escribió volúmenes sobre sólidos regulares. Los maestros como Luca Pacioli, quien imprimió en 1494 su obra "Summa de Arithmetica", donde los numerales indo~árabigos ya estaban bien establecidos. También la astronomía, utilizada en la Universidad de Bolonia, Pacioli, Albretch Dürer y Copérnico. Para el año de 1484, Nicolás Chuquet, matemático francés redactó, pero no publicó, "Triparty en la Science des nombres", donde describía el uso de los números negativos y la forma en que operan con los positivos. Posteriormente, Ettiene de la Roche publicó "Larismatique", basado en la obra de Nicolás Chuquet, tal y como lo había redactado. No fue sino hasta el año de 1880, que el erudito Aristide Marre descubrió el manuscrito de Chuquet y lo publicó, señalando tal aportación a su principal descubridor.

También del descubrimiento de América en el año de 1492 y de la creación de la imprenta en el siglo XV por Gutenberg surgió una nueva matemática para el comercio y la necesidad de desarrollar la ingeniería para la construcción de obras públicas que comenzaban a desarrollarse en las grandes ciudades. No deseamos descartar las grandes aportaciones, de distintos matemáticos, publicadas en su momento. Seguimos enfocando el estudio hacia la cuadrática; llegando a François Viète, abogado francés: fue el primero en proponer el uso de las letras en el álgebra: representar números por letras; esto condujo a un gran progreso en el desarrollo de la teoría de ecuaciones. —En su libro "In Artem analyticam isagoge", publicado en 1591, desarrolla una serie de reglas para ser aplicadas en el álgebra, derivada de la aritmética. Gerolamo Cardano, matemático italiano en 1545, publica "Ars Magna", donde utiliza el método geométrico para justificar el algebraico: de entre los problemas que plantea con este método, está la resolución completa de las ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y de las ecuaciones de tercer grado de la forma $x^3 + ax = b$ donde con a y b positivos. No deseamos excluir a los grandes pensadores matemáticos, que a partir de Vièta, hicieron una aportación al estudio y uso de la actual álgebra que se enseña en el aula en educación básica.

3.1 Planeación y desarrollo de la investigación

Para realizar a profundidad y delimitar el estudio de la comprensión de la cuadrática en el tercer grado de secundaria, se desarrolló un diseño experimental en función de los modelos teóricos locales. De forma general, presentamos el esquema del desarrollo de la experimentación (véase el Esquema 1):

3.1.1 Diseño de la experimentación

Los componentes de los modelos teórico locales se especifican y organizan como lo muestra la Figura 3.1.

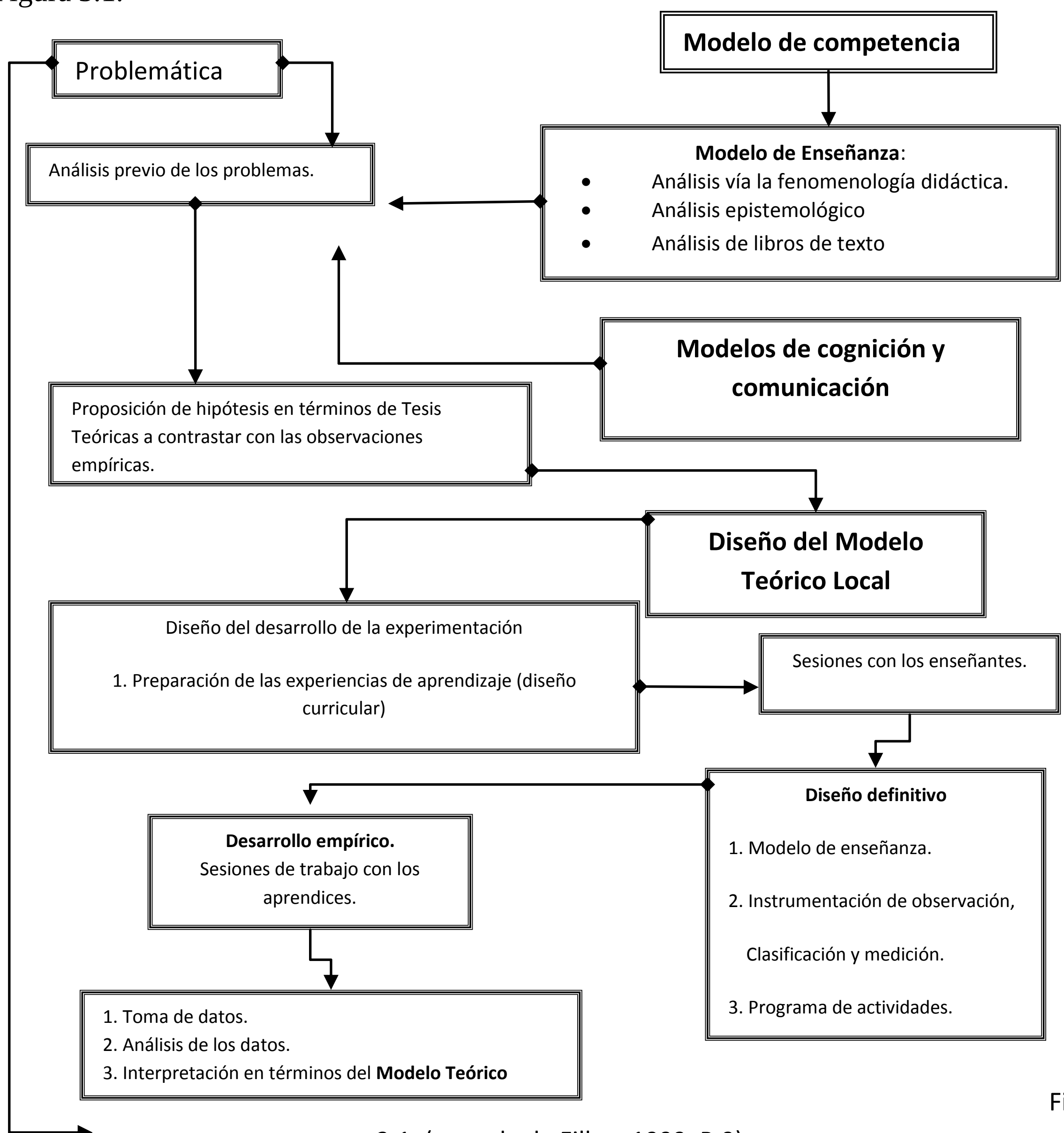


Figura 3.1. (tomada de Filloy, 1999, P.9).

3.1.2 Diseño del desarrollo empírico de la experimentación

El desarrollo empírico llevado a cabo en nuestro estudio se resume en el siguiente diagrama (véase el Esquema 2):

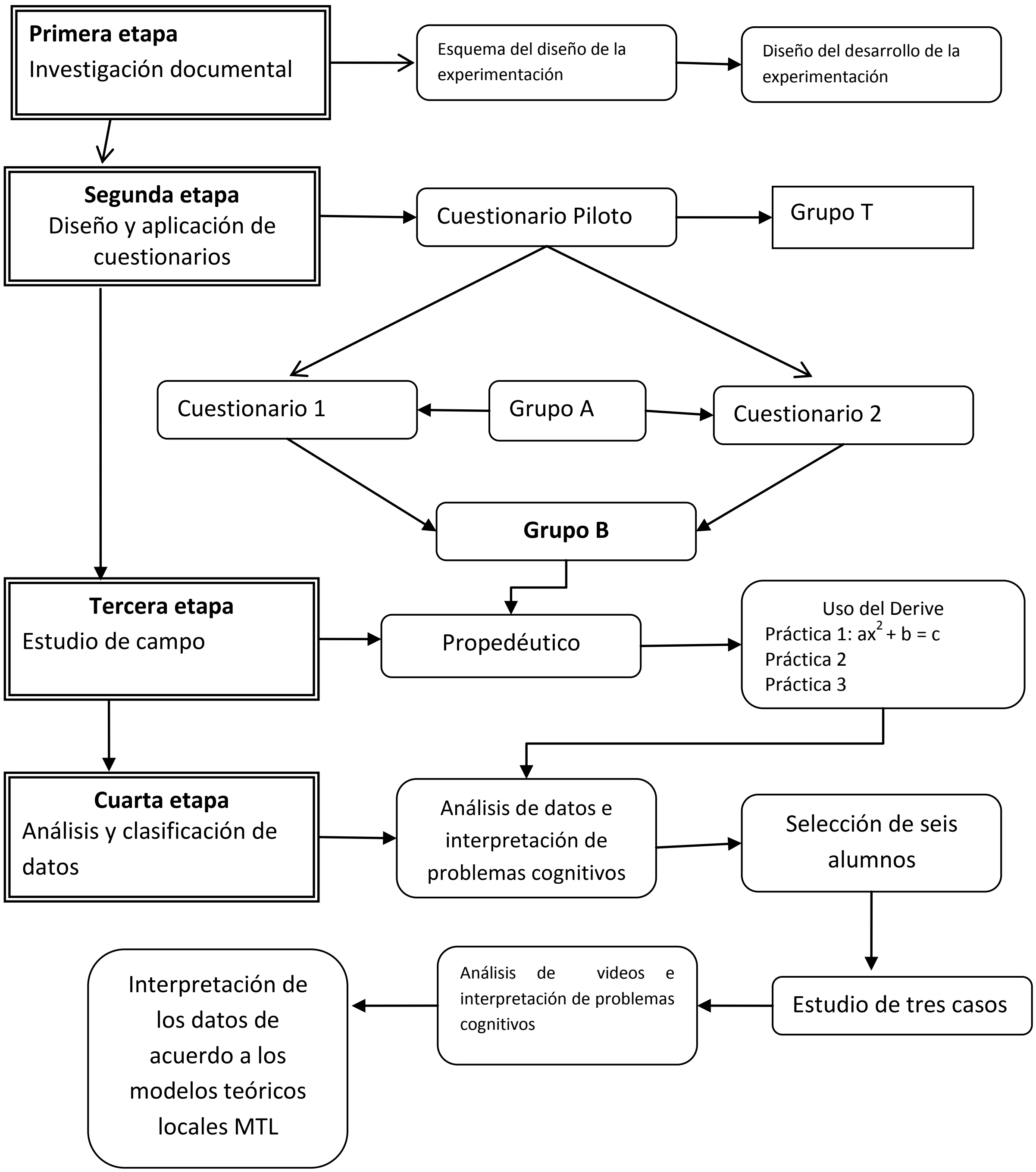


Figura 3.2. Esquema general de la investigación.

3.1.3 Esquema del diseño del estudio de casos

Para caracterizar nuestras observaciones y clasificar a los alumnos, nos basamos en el siguiente esquema, el cual resume el procedimiento hasta la realización de tres entrevistas (véase la Figura 3.3).

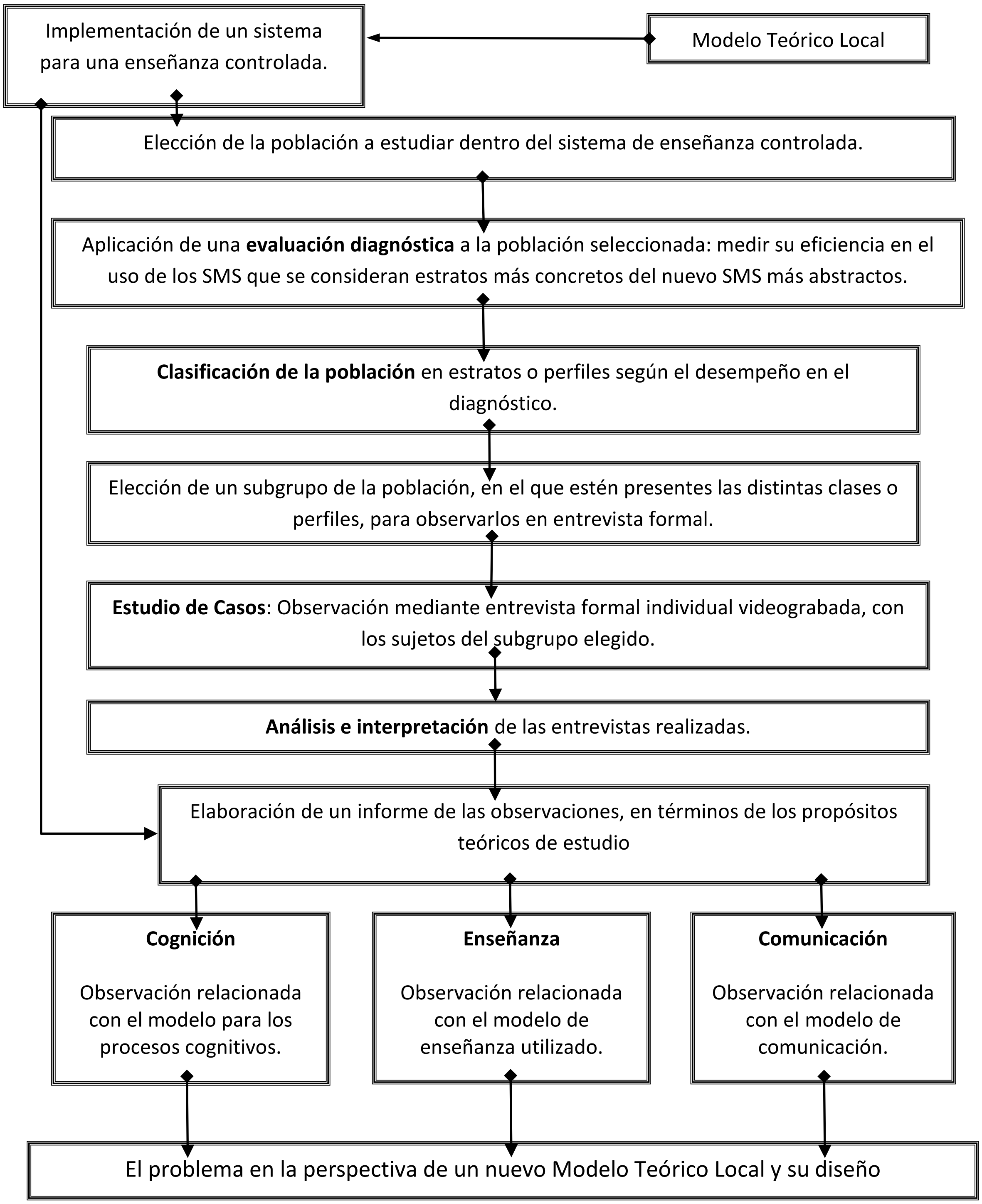


Figura 3.3. (tomada de Filloy, 1999, P.10).-

3.2 Etapas del desarrollo de la experimentación

Nuestro estudio se realizó en cuatro etapas:

Primera etapa

De acuerdo a la propuesta metodológica de los MTL, se elaboró lo siguiente:

- Esquema del diseño de la experimentación.
- Diseño del desarrollo empírico de la experimentación.
- Esquema del diseño del estudio de casos.

Segunda etapa

Para identificar y delimitar nuestro campo de acción se realizó el siguiente ejercicio:

a) Se implementó un cuestionario exploratorio con un grupo piloto (Apéndice 1), de carácter informal, con alumnos de una escuela que no es seleccionada para la investigación, con el fin de tener un acercamiento a los fenómenos cognitivos que se manifiestan, pero también con el de sopesar algunas preguntas de investigación iníciales y mejorarlas o descartarlas.

b) Con el grupo seleccionado para realizar la investigación, del resultado de la experiencia bosquejada en el inciso a) previa a la enseñanza de la cuadrática en el aula, se derivaron dos cuestionarios.

c) A petición del docente titular del grupo participante, se determinó que los dos cuestionarios se aplicaran también a dos grupos de alumnos de tercero. En consecuencia, los grupos se clasificaron como grupo *A* y grupo *B*. El grupo *A,* lo usamos para probar los instrumentos, y conocer todos los errores de la metodología al aplicar los cuestionarios y prácticas. El grupo *B*, el **de estudio**, proporcionó la información y evidencias de los aspectos cognitivos resultantes de la aplicación del *Derive*, utilizado como medio de aprendizaje.

d) De los resultados arrojados por los cuestionarios 1 y 2, al ser estudiados bajo el aspecto teórico de los **MTL**, se desarrolló un propedéutico, con el fin de nivelar, y homogeneizar el conocimiento de los estudiantes necesario para el estudio de la cuadrática.

Tercera etapa

En esta etapa, considerada la más delicada e importante para nuestro estudio de campo, se realizaron las siguientes acciones:

- Selección de la sede del desarrollo de la investigación.
- Conocimiento de los grupos a tratar, al igual que la designación de los grupos *A* y *B*.

- Implementación del diseño del Modelo Teórico Local en la enseñanza de la cuadrática usando el Derive.
- Aplicación de los cuestionarios 1 y 2.
- Escritura de los resultados.
- Elaboración de un propedéutico.
- Aplicación de las prácticas a desarrollar con el Derive.

Cuarta etapa

Análisis exhaustivo de la información recabada y sustento de la investigación, mediante las siguientes acciones:

- Toma de datos, su análisis e interpretación en términos del Modelo Teórico Local.
- Clasificación y selección de tres alumnos para realizar el estudio de casos.
- Entrevista videograbada a cada uno de los alumnos seleccionados.
- Interpretación de los fenómenos cognitivos, (Filloy, 1999, p. 43).
- Conclusiones de la investigación.

3.3 Identificación de dificultades cognitivas

En la segunda etapa de la experimentación (véase el la Figura 3.2), con el cuestionario piloto aplicado al grupo T (véase el Apéndice 1), el fin fue informar acerca de: 1) el desempeño de un grupo común de tercer grado de secundaria, 2) la importancia de los problemas o preguntas de los temas a enseñar y 3) definir el objetivo de cada problema. El carácter del cuestionario fue informal. De esta exploración se obtuvieron los siguientes resultados (véase la Tabla 1):

No.	Alumno	Problemas										Total
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	Abraham	C	C	E	C	C	C	E	C	C	C	8
2	Mauricio	C	C	C	C	E	C	C	E	C	E	7
3	Miriam	E	C	C	C	E	C	C	C	C	E	7
4	César	E	C	E	E	C	C	E	C	C	C	6
5	Hugo	E	C	E	E	C	C	E	C	C	C	6
6	Armando	C	C	C	C	E	N	N	E	E	C	5
7	Nicol	C	E	C	E	C	N	N	E	C	C	5
8	Sbeydi	C	C	C	C	E	N	N	E	E	C	5
9	Armando	E	E	E	E	C	C	E	C	C	C	5
10	Alexis	E	E	C	C	E	E	E	E	C	C	4
11	Mariana	E	E	C	C	E	C	E	E	C	E	4
12	Paola	E	E	C	C	E	E	N	E	C	C	4

C: Correcto E: Error N: No contestó

Tabla 1. Respuesta al cuestionario piloto.

Análisis de los resultados

El siguiente análisis se realizó con cada uno de los problemas, en orden cronológico; solamente se tomaron en cuenta los cuestionarios de los alumnos que cometieron errores en el procedimiento.

El error más frecuente fue con el signo, cometido por siete alumnos de 12, al colocarlo negativo; además, en un caso los paréntesis se privilegiaron como producto, por sobre el signo de suma (véase la Figura 3.1):

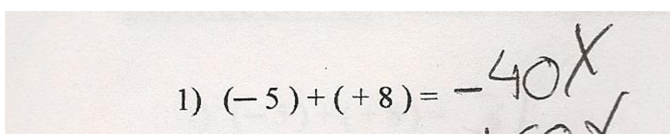


Figura 3.1

Existió una confusión en la sustracción en las respuestas de cinco alumnos de 12, al sumar los números negativos sin realizar el simétrico del sustraendo, pero sí tomaron en cuenta el signo al realizar la multiplicación (véase la Figura 2):

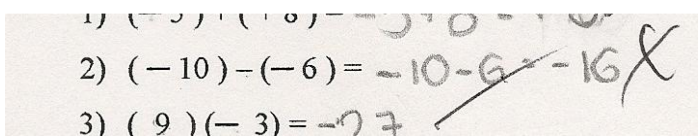


Figura 3.2

Inversamente, en la multiplicación de signos, cuatro de 12 alumnos suprimieron los paréntesis y realizaron en lugar del producto una diferencia de números con signo (véase la Figura 3.3):

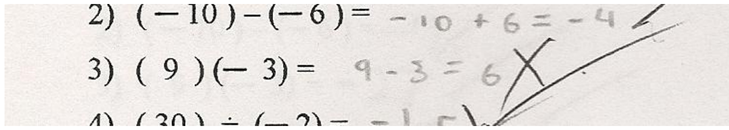


Figura 3.3

En la división de números con signo, cuatro alumnos de 12 no observaron el valor posicional, utilizaron números decimales en el resultado (véase la Figura 3.4):

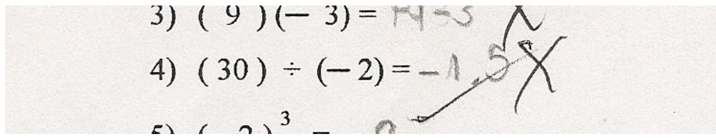


Figura 3.4

Para las potencias de números con signo, siete de 12 alumnos multiplicaron dos veces el dos por sí mismo y por último por 3 para llegar a 12 (véase la Figura 3.5):

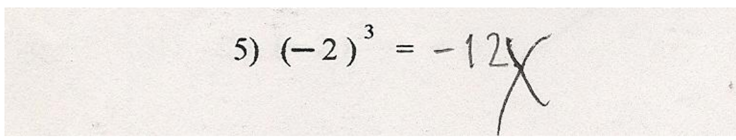


Figura 3.5

Para la raíz cuadrada, dos de 12 alumnos realizan el cálculo mental sin desarrollar el algoritmo, (véase la Figura 3.6):

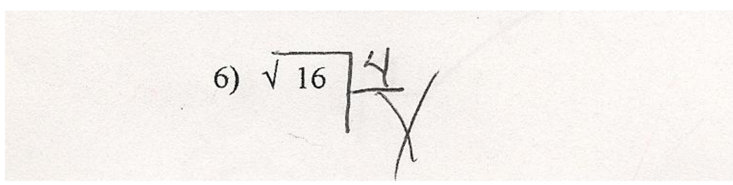


Figura 3.6

Para la raíz cuadrada con dos dígitos, siete alumnos de 12 solamente ejecutaron la mitad del algoritmo, mientras que cuatro de 12 no lo recordaron (véase la Figura 3.7):

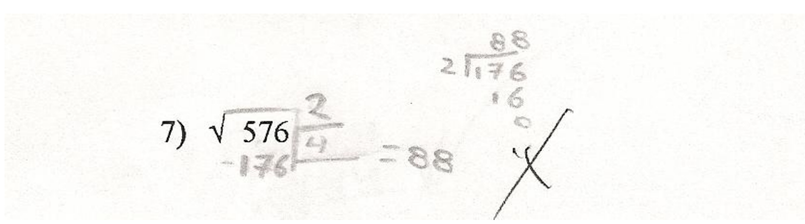


Figura 3.7

En problemas verbales de números con signo, siete de 12 alumnos sumaron todos los términos, sin considerar los signos (véase la Figura 3.8):

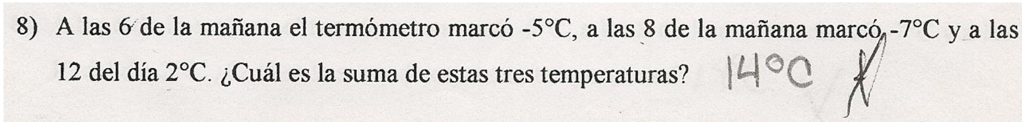

8) A las 6 de la mañana el termómetro marcó -5°C, a las 8 de la mañana marcó -7°C y a las 12 del día 2°C. ¿Cuál es la suma de estas tres temperaturas? 14°C

Figura 3.8

En problemas aritméticos, dos alumnos de 12 sumaron las cantidades en lugar de restarlas (véase la Figura 3.9):

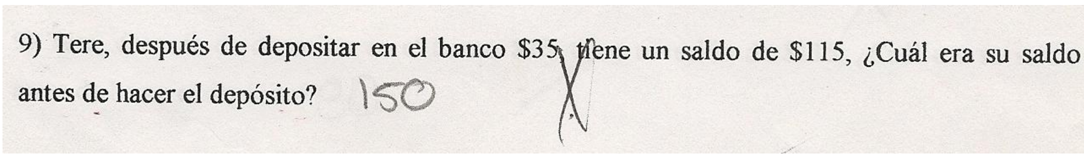
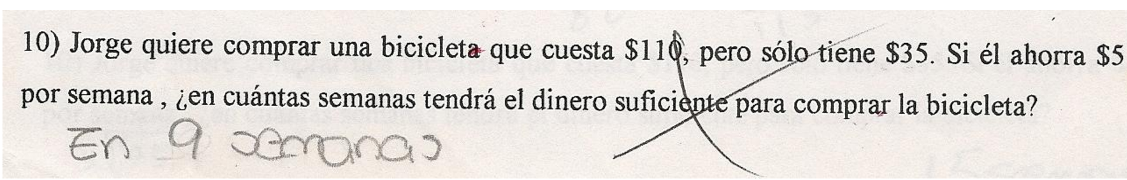

9) Tere, después de depositar en el banco $35, tiene un saldo de $115, ¿Cuál era su saldo antes de hacer el depósito? 150

Figura 3.9

En otro problema aritmético, tres alumnos de 10 cometieron el error de no desarrollar la división. Es interesante que algunos alumnos, en lugar de dividir el resultado del cálculo de la diferencia entre la cantidad neta y la poseída, lo resolvieron por tanteo, es decir, adivinaron la cantidad y multiplicaron para comprobar si realmente se cumplía con la condición del problema (véase la Figura 3.10): Esto se pudo observar en el momento en el cual el alumno hacia los cálculos para llegar al resultado pero lamentablemente los borro inmediatamente su procedimiento, al sentir la presencia del profesor que estaba a su lado.


10) Jorge quiere comprar una bicicleta que cuesta $110, pero sólo tiene $35. Si él ahorra $5 por semana , ¿en cuántas semanas tendrá el dinero suficiente para comprar la bicicleta?

En 9 semanas

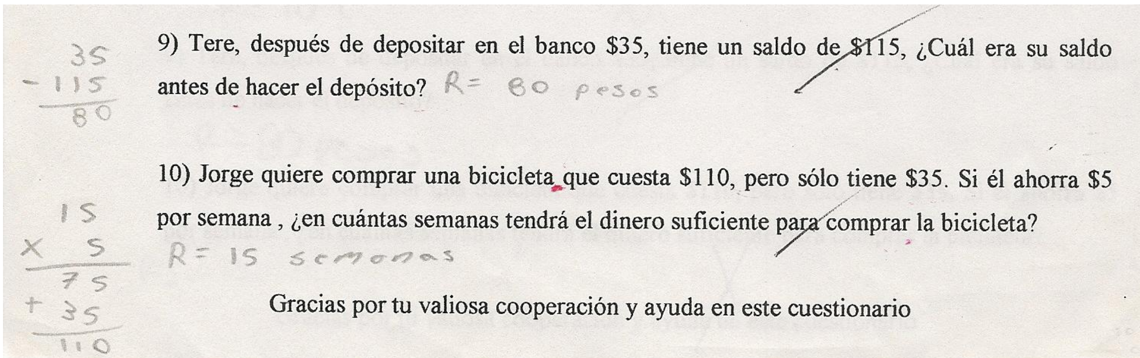
Figura 3.10

3.4 Conclusión del cuestionario piloto

De la aplicación del cuestionario piloto y de la revisión de las respuestas proporcionadas resultó lo siguiente:

- Errores de presentación del instrumento para tratar los datos obtenidos, como:
  - Salvaguardar la identidad de los alumnos, sin anotar el nombre con apellidos.
  - Fijar el tiempo de aplicación.
  - Proporcionar espacio suficiente entre cada problema, para que el alumno pueda mostrar su procedimiento.
  - Obligar al uso de pluma para evitar que el alumno borre las evidencias de su procedimiento.
- Identificación de qué buscar en el desempeño de los alumnos en los temas que se relacionan con la cuadrática.

- Delimitación de los temas a tratar en los siguientes cuestionarios 1 y 2.
- Identificación del caso de dos alumnas que presentaron el "síndrome inverso de la multiplicación": el alumno se basa en la multiplicación para llegar al algoritmo de división, ya detectado en alumnos de 6° grado de nivel primaria y que indica un retroceso en las edades al presentar este fenómeno (véase la Figura 3.11):


35
− 115
80

9) Tere, después de depositar en el banco $35, tiene un saldo de $115, ¿Cuál era su saldo antes de hacer el depósito? R= 80 pesos

15
× 5
75
+ 35
110

10) Jorge quiere comprar una bicicleta que cuesta $110, pero sólo tiene $35. Si él ahorra $5 por semana , ¿en cuántas semanas tendrá el dinero suficiente para comprar la bicicleta?
R= 15 semanas

Gracias por tu valiosa cooperación y ayuda en este cuestionario

Figura 3.11

3.5 Organización: espacios y sujetos

El estudio se enfocó en la enseñanza de la cuadrática en el tercer grado de secundaria, tema de los programas de estudio (SEP, 2006), específicamente en los bloque 2, bloque 3, bloque 4 y bloque 5.

Para de limitar más nuestro estudio del grupo B, se realizó una selección de seis alumnos, conforme a los resultados obtenidos de los instrumentos aplicados (Practicas 1,2 y 3) para la realización de entrevistas clínicas, esto con la intensión de clasificar en subgrupos:

- Alumnos avanzados.
- Alumnos intermedios.
- Alumnos insuficientes.

Después de lo anterior, se aplicaron dos cuestionarios, 1 y 2, siguiendo el mismo procedimiento: se trabajaba con dos grupos *A* y *B*, el primero como grupo piloto, en el que se probaba el cuestionario y las condiciones para su aplicación en el grupo *B*, el cual nos proporcionaría las evidencias del estudio en cuestión.

El estudio se desarrolló con alumnos de tercer grado de secundaria. Considerada dentro del esquema de educación básica. Participaron dos grupos (Grupo A y Grupo B), de 25 alumnos cada uno. La estrategia a seguir fue tomar un grupo A como piloto para afinar los instrumentos y las condiciones de su aplicación, mientras que el grupo B nos proporcionaría la información para responder las preguntas de investigación.

4.1 Estudio de campo

Después de haber delimitado nuestro estudio en la población seleccionada de 28 alumnos, procedimos a la aplicación de los cuestionarios 1 y 2 (previstos en la segunda y tercera etapas), con la finalidad de recopilar datos de la población seleccionada respecto a su uso del SMS y de sus estrategias seguidas para llegar a la solución de problemas.

4.1.1 Evaluación diagnóstica

Del cuestionario piloto con carácter informal (para nuestro estudio), se derivaron dos cuestionarios: Cuestionario 1 y Cuestionario 2 —probados primero en el grupo *A* y refinados para ser aplicados en el grupo *B*, al igual que su análisis.

4.2. Cuestionario1

Para el cuestionario 1 (véase en el Apéndice 2), se optó por 17 problemas relativos a los siguientes temas:

- Sumas y restas de números con signo.
- Elementos de un término algebraico.
- Reducción de términos semejantes.
- Eliminación de paréntesis.
- Sustitución de términos.
- Lógica.
- Problemas verbales aritméticos.

Consideramos estos temas por estar relacionados con la solución de la cuadrática, utilizando el método sintáctico-viético o Euleriano.

El cuestionario 1 se aplicó en el mes de octubre a 25 alumnos que asistieron (de un total de 28 alumnos). Con los datos recopilados, se elaboró una tabla para su análisis.

4.2.1. Clasificación de los datos de los cuestionarios aplicados

Para la captura de datos de cada problema se utilizaron colores por tema, para identificar qué alumno lo contestó correctamente y si logró desarrollar el algoritmo implicado. Cada tema se dosificó en tres o dos ejercicios clasificados en *a*, *b*, y *c*. Se usó un contador del número de aciertos por problema. Por último, en la columna de observaciones se indicó la clasificación en avanzado, intermedio y Insuficiente, con el objetivo de seleccionar a tres alumnos, uno por nivel, aunque como medida de precaución se amplió el rango a seis alumnos, en prevención de que se presentaran dificultades de disposición a la entrevista, alumnos irregulares, etc. Esto incumbió directamente a nuestra última pregunta de investigación.

Para determinar el nivel del alumno en avanzado, intermedio e Insuficiente, se tomó en cuenta el mayor puntaje, del total de los datos; es decir, no se consideraron los 17 aciertos. El mayor puntaje fue de 11 aciertos y se le tomó como el nivel avanzado (de 9 a 11); el intermedio sería de 5.5, pero se le amplió a un rango de tres puntos (de 4 a 6). Esto debido a que, en cada apartado de un tema, en general se pusieron en juego tres puntos (fijando el rango de +1 a —1), el caso de intermedios. El caso del nivel Insuficiente el menor dato fue de 2 puntos (el rango es de + 3 puntos). Éste fue el criterio para seleccionar a los alumnos para la entrevista, para el estudio de casos de la cuarta etapa.

4.2.2 Resultados del Cuestionario 1

La Tabla 2 resume los resultados del grupo *B* en la aplicación del Cuestionario 1.

Nombre	Temas y problemas																								Total individual	Observación
	Números con signo				Reducción de términos semejantes				Productos algebraicos				Sustitución algebraica				Lógica				Problemas Verbales					
	a	b	c	T	a	b	c	T	a	b	c	T	a	b	c	T	a	b	c	T	A	b	T			
Alejandra				F				F				F				F				F			F			No asistió
Brando E.				3				1				0				2				2			0		8	
Brenda				3				0				0				0				1			2		6	Intermedio
Brenda D.				0				0				0				0				1			1		2	Insuficiente
Carla K.				F				F				F				F				F			0			No asistió
Carlos D.				1				1				2				2				2			1		9	Avanzado
Carlos U.				2				0				0				0				1			0		3	Insuficiente
Daniel				2				0				0				0				2			0		4	Insuficiente
Daniela E.				0				0				0				0				2			0		2	Insuficiente
Doris				3				0				0				1				2			1		7	
Edwin U.				0				1				0				1				1			2		5	Intermedio
Erick				F				F				F				0				F			0			No asistió
Erick A.				3				2				0				2				2			2		11	Avanzado
Francisco E				2				1				0				3				2			1		9	Avanzado
Francisco R.				2				0				0				1				1			1		5	Insuficiente
Gabriel A.				2				0				0				1				3			0		6	
Héctor A.				1				0				0				0				3			1		5	Intermedio
Jorge				2				3				0				1				2			2		10	Avanzado
JoséA.				3				0				0				0				2			2		7	
José L.				2				0				0				1				1			1		5	Intermedio
Juan				2				0				0				0				1			2		5	Intermedio
Julio C.				1				1				0				3				2			1		8	
Karla G.				0				2				0				1				0			1		4	Deficente
Marin				0				0				0				0				2			2		4	Insuficiente
Miriam M.				2				0				0				1				2			1		6	Intermedio
Monserrat				0				0				0				0				1			0		1	Insuficiente
Nayeli M.				0				0				0				0				2			1		3	Insuficiente
Víctor M.				1				3				0				0				0			2		5	Insuficiente
Totales				**37**				**15**				**2**				**20**				**40**			**27**		**141**	

Tabla 2. Resultados del Cuestionario 1. Grupo B.

4.2.3 Resultados generales del cuestionario 1

Del grupo de tercer grado se contabilizó un total de 25 alumnos de los 28 en lista. Del cuestionario 1, el cual constó de 17 problemas, tomando en cuenta sólo el número de aciertos resultó lo siguiente: media, 5.6; mediana, 5; moda, 5.

Del total de problemas del cuestionario 1 que lograron resolver los alumnos en forma general, 32.70% del grupo contestó correctamente . En consecuencia, existió un 67.3% de insuficiencias en el conocimiento de los temas previos a la enseñanza de la cuadrática.

4.2.4 Identificación de tendencias cognitivas, cuestionario 1

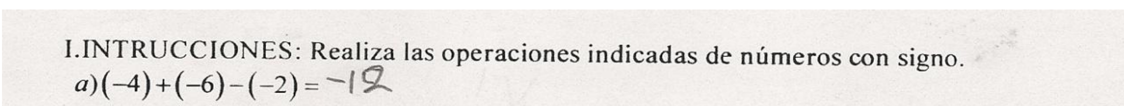
Este apartado presenta las observaciones de los fenómenos cognitivos, desde la perspectiva de los aspectos teóricos (con base en los MTL).

Tema: Números con signo.

Pregunta: $(-4) + (-6) - (-2) =$

Tres de 25 alumnos sumaron los tres términos sin tomar en cuenta los signos intermedios.

Comentario: **La articulación de generalizaciones erróneas**. Héctor aplicó la regla de signos iguales, discriminando los signos intermedios (véase la Figura 4.1):



I.INTRUCCIONES: Realiza las operaciones indicadas de números con signo.

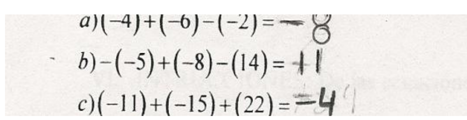
$a)(-4)+(-6)-(-2) = -12$

Figura 4.1

Pregunta: $-(-5) + (-8) - (14) =$

Tres de 25 alumnos realizaron la suma de los dos términos (–5) y (–8), obteniendo –13, luego le restaron (14) para obtener 1.

Comentario: **La articulación de generalizaciones erróneas**. Carlos sumó los primeros dos términos y restó, discriminando los signos intermedios (véase la Figura 4.2):



$a)(-4)+(-6)-(-2) = -8$

$b)-(-5)+(-8)-(14) = +1$

$c)(-11)+(-15)+(22) = -4$

Figura 4.2

Pregunta: $(-11) + (-15) + (22) =$

Tres de 25 alumnos sumaron los tres términos para obtener el resultado.

Comentario: **La dotación de sentidos intermedios.** Edwin se enfocó en los signos intermedios positivos y sumó los tres términos desconociendo los signos entro de los paréntesis (véase la Figura 4.3):

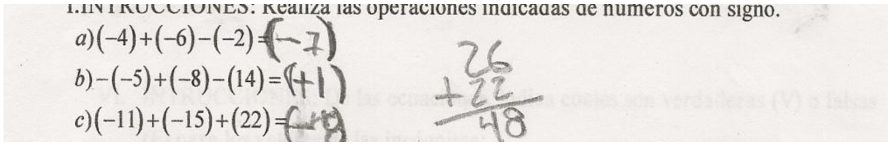


Figura 4.3

Tema: Reducción de términos algebraicos

Pregunta: $x + 2x =$

Dos de 25 alumnos multiplicaron coeficientes y sumaron exponentes.

Observación: **La articulación de generalizaciones erróneas.** Al multiplicar los coeficientes y sumar los exponentes de la literal, Brenda pareció reconocer el coeficiente 1 y el exponente 1 (véase la Figura 4.4):

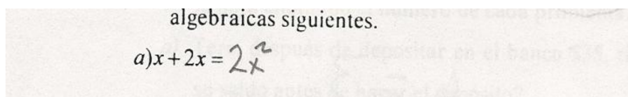


Figura 4.4

Pregunta: $7a^2 - 3a + a^2 - 6a =$

Uno de los 25 alumnos agrupó los términos para elevarlos al cuadrado y simplificar.

Observación: **Presencia de mecanismos inhibitorios.** Para cada término, Saúl multiplicó el exponente de la literal por su coeficiente y determinó así el coeficiente de la literal del factor; después redujo a términos semejantes (véase la Figura 4.5):

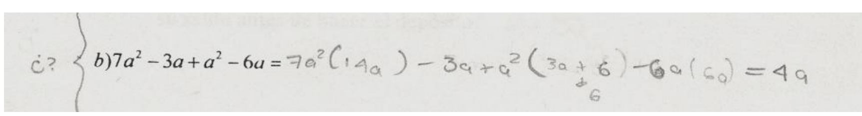


Figura 4.5

Pregunta: $2xy - 3y + 2x - y + 4x + 5xy =$

Uno de los 25 alumnos multiplicó los coeficientes, y sumó los exponentes de las literales.

Observación: **La articulación de generalizaciones erróneas.** Brenda toma el primer termino como base para realizar una resta con el segundo termino y discriminar la literal y signo (2xy – 3y = 1x), vuelve a tomar el primer termino y suma el tercer termino y discrimina “Y” (2xy + 2x= 4 x), toma el primer termino y le resta “y” (2xy – y = 2x) el sexto termino lo traspasa tal sin cambios, por ultimó multiplica los coeficientes 1 × 2 × 4 = 8 y los exponentes de x los suma,(véase la Figura 4.6):

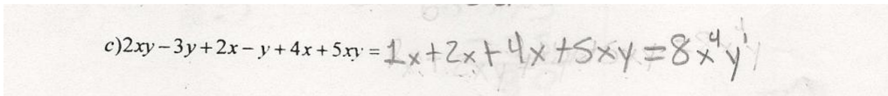

$c)\ 2xy-3y+2x-y+4x+5xy = 1x+2x+4x+5xy = 8x^4y^1$

Figura 4.6

Tema: Productos de expresiones algebraicas

Pregunta: 3(x + 4) =

Nueve de 25 alumnos ejecutaron bien la multiplicación de los términos, sin embargo, realizaron una simplificación errónea dentro del paréntesis.

Observación: **La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución.** Los alumnos primero suman los términos internos del paréntesis, la literal con el coeficiente y, posteriormente, lo multiplican con el coeficiente externo (se considera que aún no pueden aplicar la propiedad distributiva) (véase la Figura 4.7):

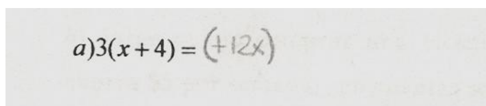

$a)\ 3(x+4) = (+12x)$

Figura 4.7

Pregunta: −3 [2x (4 – 1)] =

Seis de los 25 alumnos resolvieron los paréntesis internos para después restar el número externo.

Observación: **La generalización de errores sintácticos, debido a la producción de códigos personales intermedios**. Los alumnos dotan así de sentido a sus acciones concretas intermedias. Jorge ignoró a la literal y desarrolló bien las operaciones internas de los paréntesis, para eliminarlos; sin embargo, los corchetes nada significaron (véase la Figura 4.8):

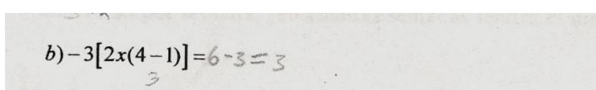

$b)\ -3[2x(\underbrace{4-1}_{3})] = 6-3=3$

Figura 4.8

Pregunta: (x + 5) (x − 5) =

Tres de los 25 alumnos eliminaron los paréntesis para simplificar los términos numéricos.

Observación: **La necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.** Brenda dio sentido a la situación de dos paréntesis eliminándolos e ignorando a la literal para operar los signos numéricos (véase la Figura 4.9):

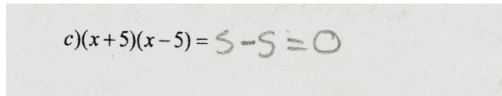


Figura 4.9

Tema: Sustitución Algebraica

Pregunta: 7ab =

13 de los 25 alumnos solamente realizaron la sustitución de las literales.

Observaciones: **La articulación de generalizaciones erróneas.** La mayoría de los estudiantes comprendieron bien que hay que sustituir las literales por los valores numéricos; pero desconoce que hay que multiplicarlos (véase la Figura 4.10):

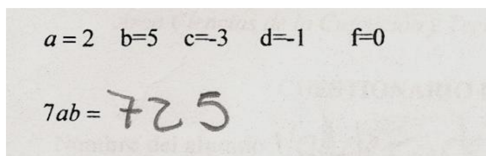


Figura 4.10

Pregunta c^3 =

Tres de los 25 alumnos realizaron la sustitución y a su vez suman los factores.

Observación: **La articulación de generalizaciones erróneas.** José Luis, realiza una multiplicación de la base con la potencia, (véase la Figura 4.11):

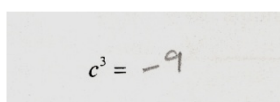


Figura 4.11

Pregunta: $c + d + f =$

Cuatro de los 25 alumnos sustituyeron bien los valores dados, pero no llegan al resultado.

Observación: **La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.** Monserrat realizó bien la sustitución respetando los signos; pero enfrentó la dificultad de los signos + y − consecutivos: ante esta obstrucción cognitiva, le fue difícil llegar al resultado (véase la Figura 4.12):

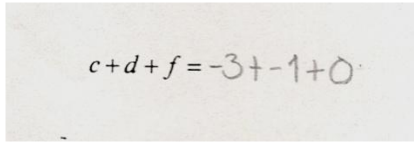


Figura 4.12

Tema: Lógica con ecuaciones lineales

Pregunta $3x - 4 = 8$ para $x = 3$

Nueve de los 25 alumnos contestaron que la proposición era falsa.

Observación: Resultó que los alumnos desconocían el concepto de igualdad en una ecuación lineal y cómo comprobarla (véase la Figura 4.13):

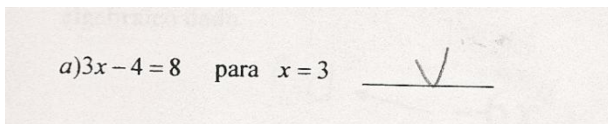


Figura 4.13

Pregunta: $2 + 5x = 12$ para $x = 2$

Ocho de los 25 alumnos calificaron la proposición como falsa.

Observación: La misma que en el caso anterior (véase la Figura 4.14):

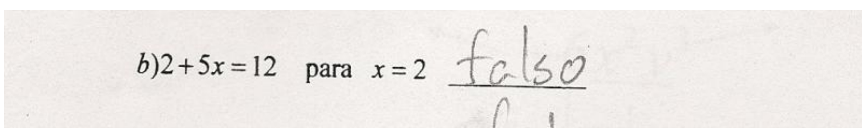


Figura 4.14

Pregunta: $2x + 5 = 3$ para $x = -1$

16 de 25, contestaron que es Falsa la proposición

Observación: Al igual que en el caso anterior, los alumnos desconocían el concepto de igualdad en una ecuación lineal y cómo comprobarla (véase la Figura 4.15):

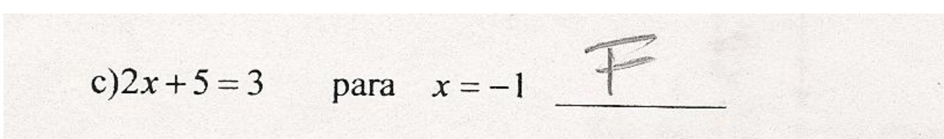


Figura 4.15

Tema: Problemas verbales

Pregunta: Tere, después de depositar en el banco $35, tiene un saldo en su cuenta de $115. ¿Cuál era su saldo antes de hacer el depósito?

Dos de los 25 alumnos realizaron una suma.

Observación: **Centración en lecturas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problémica.** La dificultad de Miriam al considerar al problema verbal como fácil, deja de centrarse la tarea principal pudo deberse a la semántica de la palabra saldo, es decir el haber y tener en consecuencia suma las cantidades (véase la Figura 4.16):

Problema

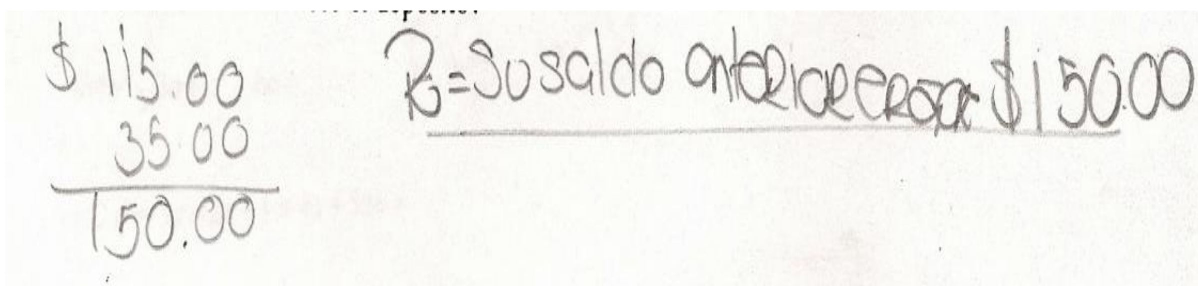


Figura 4.16

Pregunta: Jorge quiere comprar una bicicleta que cuesta $110, pero sólo tiene $35. Si ahorra $5 por semana, ¿en cuántas semanas tendrá el dinero suficiente para comprar la bicilceta?

Cinco de los 25 alumnos, realizaron el tanteo para encontrar la respuesta.

Observación: La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de

procesos errores de resolución. Karla utiliza el tanteo para llegar a la aproximación del resultado, claramente recurre a la multiplicación, debido a que no tiene la competencia de realizar una división para llegar al resultado de uno forma directa. (véase la Figura 4.17):

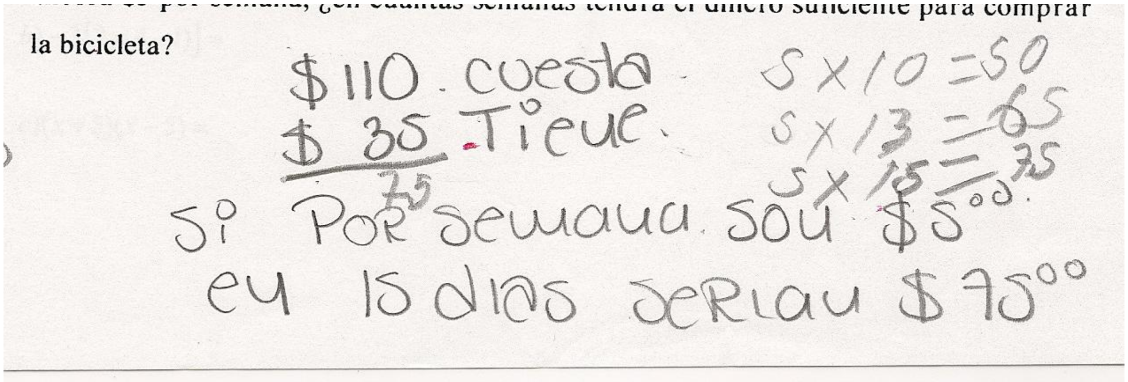


Figura 4.17

4.3 Cuestionario 2

En el cuestionario 2 (véase en el Apéndice 3), se plantearon 15 preguntas referidas a los siguientes temas:

- Ecuaciones lineales.
- Lenguaje algebraico.
- Producto de binomios.
- Factorización.
- Cuadrática.

Al igual que el cuestionario anterior, estos temas están implicados en la solución de la cuadrática. Hay que resaltar de este cuestionario 2 su apartado de la cuadrática —evidenciamos que el alumno no tiene la capacidad de resolver un problema de la cuadrática bajo algún método.

4.3.1 Clasificación de las respuestas

Se realiza nuevamente el mismo procedimiento en la tabla 3, se utilizan distintos colores por cada tema, con el fin de diferenciarlos y no confundir los datos, cada respuesta correcta en cada alumno, se rellena en cada cuadro, lo cual nos indica que estuvo bien, de acuerdo al número de aciertos son clasificados en en: avanzado, intermedio e Insuficiente. Avanzado e tomando encuesta al de mayor puntuación, intermedio fue con el dato medio del mayor e insuficiente fue el alumno de menor puntuación, en la columna de observación se fueron anotando esta clasificación realizada (véase tabla3)

ombre	Temas y problemas																					Total individual	Observaciones
	Ecuaciones lineales				Lenguaje algebraico					Producto de binomios				Factorización				Cuadrática					
	a	b	c	T	A	b	c	d	T	a	b	c	T	a	b	c	T	a	b	c	T		
Alejandra				2					1				0				0				0	3	Intermedio
Brando E.				F					F				F				F				F		No asistió
Brenda				F					F				F				F				F		No asistió
Brenda D.				2					2				1				0				0	5	Avanzado
Carla K.				2					2				1				0				0	5	Avanzado
Carlos D.				2					2				1				0				1	6	Avanzado
Carlos U.				2					2				0				0				0	4	
Daniel				F					F				F				F				F		No asistió
Daniela E.				F					F				F				F				F		No asistió
Doris				3					2				0				0				0	5	Avanzado
Edwin U.				0					0				0				0				0	1	
Erick				2					0				1				0				0	3	Intermedio
Erick A.				2					0				0				0				0	2	Insuficiente
Francisco E				2					2				1				0				0	5	Avanzado
Francisco R.				3					0				0				0				0	3	Intermedio
Gabriel A.				1					2				1				0				1	5	Avanzado
Hector A.				3					2				0				0				0	5	Avanzado
Jorge				2					0				0				0				0	2	Insuficiente
Jose A.				F									F				F				F		No asistió
Jose L.				F									F				F				F		No asistió
Juan				F									F				F				F		No asistió
Julio C.				2					0				1				0				0	3	Intermedio
Karla G.				3					2				1				0				0	6	Avanzado
Marin				3					2				1				0				0	6	Avanzado
Miriam M.				F					F				F				F				F		No asistió
Monserrat				2					0				0				0				0	2	Insuficiente
Nayeli M.				2					2				1				0				1	6	Avanzado
Victor M.				F					F				F				F				F		No asistió
Totales	**40**				**23**					**10**				**0**				**3**				**76**	

Tabla3. Resultados del Cuestionario 2. Grupo B.

4.3.3 Resultados generales del cuestionario 2

Del grupo de tercer grado participaron 19 alumnos, de un total de 28. La tendencia central del número de aciertos en las 16 preguntas del cuestionario 2 fue: la media: 4.0; la mediana: 5; la moda: 5.

Del total de problemas que lograron resolver de forma general, el 25% del grupo proporcionó contestaciones correctas a algunas preguntas del cuestionario. En consecuencia, el porcentaje (de alumnos) que no contestó correctamente algún problema es de 75%. Esto evidenció su deficiencia en los conocimientos previos requeridos por la enseñanza de la cuadrática. Hacemos énfasis en las preguntas relativas a la cuadrática, de las que sólo a una contestaron tres de los 19 alumnos. Confirmamos que el tema de la cuadrática es digno de ser investigado.

4.3.4 Tendencias cognitivas encontradas, cuestionario 2

Tema: Ecuaciones lineales

Pregunta: $x + 9 = 12$

14 de 19, llegan al resultado, utilizando el método de despeje.

Observación: **Abreviación de los textos concretos para producir reglas sintácticas nuevas:** Francisco tenía la idea del procedimiento del despeje de los términos; sin embargo, no vigiló un orden en la sintaxis para identificar el procedimiento (véase la Figura 4.18):

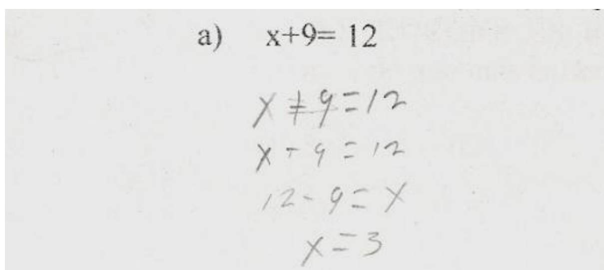


Figura 4.18

Pregunta: $7x = 49$

Dos de los 19 alumnos utilizaron el tanteo para sustituir la variable y obtener la igualdad.

Observación: **Mecanismos apelativos que desencadenan procesos erróneos de resolución.** Gabriel desarrolló el despeje basado en la multiplicación para llegar a la igualdad, pero no supo desarrollar la división (véase la Figura 4.19):

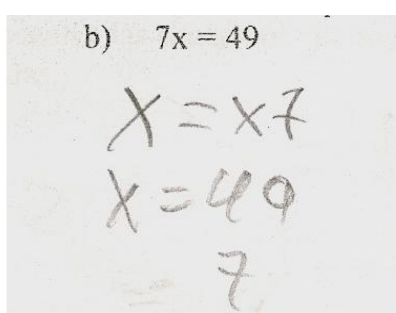


Figura 4.19

Pregunta: $4x - 2 = 3x + 8$

Cinco alumnos, de 19, desarrollaron la transposición pero suprimiendo uno de los signos.

Observación: **Necesidad de dotar de sentidos a redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.** Gabriel, ante la ecuación, consciente de la necesidad de despejar, respetó el signo sólo para las cantidades conocidas y, posteriormente, simplificó: desarrolló nuevas formas de tratar los términos por separado para reagruparlos y dotar de sentido a sus acciones cada vez más abstractas para llegar a la solución (véase la Figura 4.20):

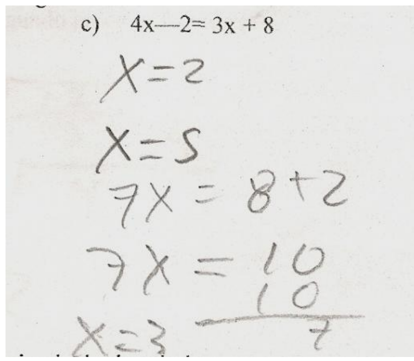


Figura 4.20

Tema: Lenguaje algebraico

Pregunta: El doble de un número

17 de los 19 alumnos representaron al doble como exponente.

Observación: **Obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa:** Es común que el alumno considere la potencia como el doble, y no como el cuadrado (véase Figura 21):

Figura 21

Pregunta: El triple producto de dos números.

11de 19, representan el triple como un exponente.

Observación: **La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa:** Brenda considera la potencia como el triple y no como al cubo, (véase la Figura 4.22):

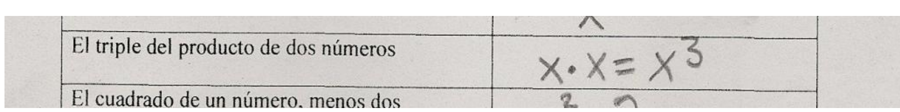
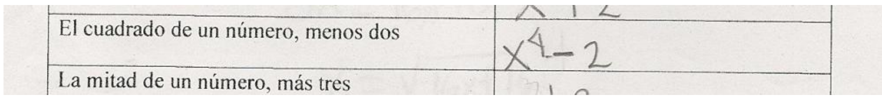


Figura 4.22

Pregunta: El cuadrado de un número, menos dos.

Cinco de los 19 alumnos realizaron la operación mental (2*2) para anotar como exponente al cuadrado de un número.

Observación: **Obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa** (véase la Figura 4.23):



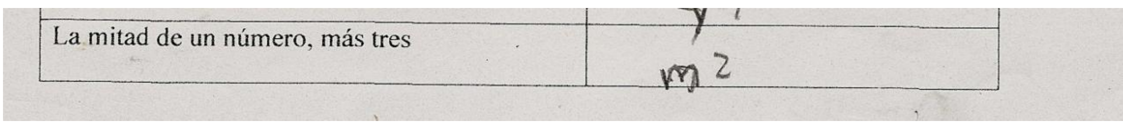
El cuadrado de un número, menos dos	x^4-2
La mitad de un número, más tres	

Figura 4.23

Pregunta: La mitad de un número, más tres.

Tres de los 19 alumnos representaron a la mitad como exponente.

Observación: **Obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa** (véase la Figura 4.24):



La mitad de un número, más tres	m^2

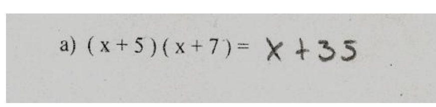
Figura 24.24

Tema: Producto de binomios

Pregunta: $(x + 5)(x + 7) =$

Cuatro alumnos de los 19 solamente multiplicaron los segundos términos, pasando el primer término al segundo miembro de la igualdad sin alteración alguna.

Observación: **Articulación de generalizaciones erróneas.** Eric desconoció totalmente el tema de multiplicación de binomos, al multiplicar solamente los coeficientes, dejando la literal sin ninguna alteración. (véase la Figura 4.25):



a) $(x+5)(x+7) = x+35$

Figura 4.25

Pregunta: $(a + b)^2 =$

Seis de 19 alumnos multiplicaron poir sí mismos los términos primero y segundo del binomio y excluyeron al producto cruzado.

Observaciones: **Articulación de generalizaciones erróneas.** Para Salomón, aplicar el algoritmo fue elevar cada variable al cuadrado (véase la Figura 4.26):

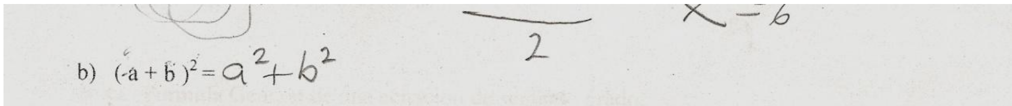


Figura 4.26

Pregunta: (4x + y) (4x − y) =

Dos de 18 alumnos sumaron los primeros términos del binomio y eliminaron los segundos términos, por ser de distinto signo.

Observación: **Articulación de generalizaciones erróneas.** La estrategia de Karla fue sumar el primer término del primer binomio con el del segundo binomio y restar las literales de signos contrarios (véase la Figura 4.27):

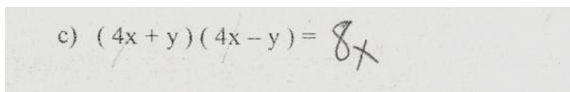


Figura 4.27

Tema: Factorización

Pregunta: $x^2 - 14x + 49 =$

Uno de los 19 alumnos sustrajo el primer término del segundo y pasa al tercer término al segundo miembro de la igualdad

Observación: **Articulación de generalizaciones erróneas:** Karla manifestó la confusión de resolver la factorización como si fuera una ecuación de primer grado (véase la Figura 4.28):

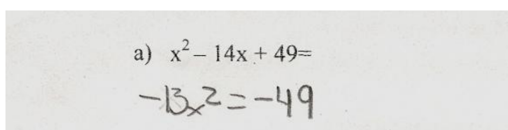


Figura 4.28

Pregunta: $16x^2 + 48x + 36 =$

Uno de los 19 alumnos sumó los dos primeros términos y pasó al segundo miembro al tercero, con signo contrario.

Observación: **Articulación de generalizaciones erróneas.** Karla trató de resolver la factorización como si fuera una ecuación de primer grado (véase la Figura 4.29):

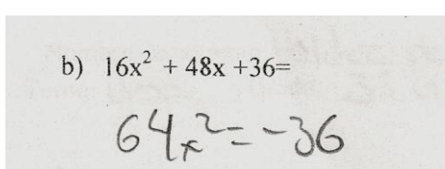


Figura 4.29

Tema: Ecuaciones de segundo grado

Pregunta: $3x^2 – 12 = 0$

Uno de los 19 alumnos realizó el despeje del segundo término y eliminó el coeficiente del término cuadrático, pasando a realizar la raíz cuadrada.

Observación: **Mecanismos inhibitorios.** Doris evidenció su noción de que una ecuación de segundo grado implica a la raíz cuadrada; sin embargo, en el tercer paso, suprimió el coeficiente y dejó a la literal solamente con el exponente cuadrático, al cual no eliminó durante todo el proceso (véase la Figura 4.30):

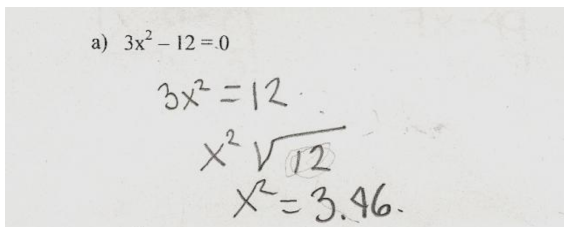


Figura 4.30

Pregunta: $x^2 - 14x + 49 =$

Uno de los 19 alumnos sustrajo el primer término del segundo, después despejó el término independiente para, posteriormente, hacer una división y obtener el valor de la variable.

Observación: **Articulación de generalizaciones erróneas.** Karla confundió la aplicación del procedimiento de una ecuación de primer grado con la de la cuadrática (véase la Figura 4.31):

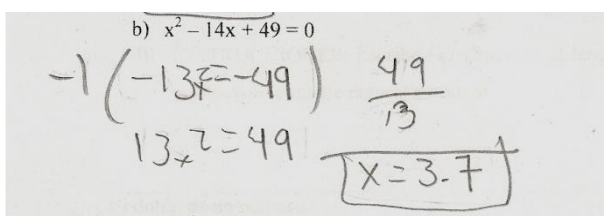


Figura 4.31

Pregunta: $3x^2 – 16x + 16 = 0$

Uno de los 19 alumnos sustrajo el primer término del segundo; pasó el término independiente al segundo miembro para dividirlo entre el coeficiente obtenido de la resta.

Observación: **Articulación de generalizaciones erróneas.** Karla nuevamente aplicó el procedimiento para una ecuación de primer grado a la cuadrática (véase la Figura 4.32):

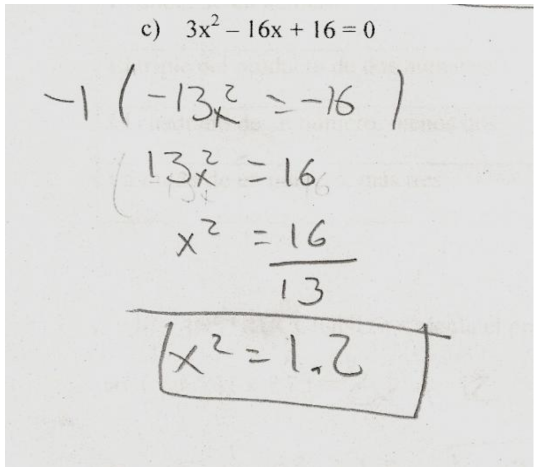


Figura 4.32

4.4. Conclusiones de los cuestionarios 1 y 2

El análisis realizado nos proporcionó datos importantes: observamos la gran deficiencia de los conocimientos de alumnos de temas algebraicos, previamente a la enseñanza de la cuadrática. Resultó que solamente tres de los 19 alumnos lograron un tratamiento satisfactorio de uno de los tres ejercicios planteados en el cuestionario 2 referidos al tema de la cuadrática. Cabe aclarar que se manifestaron los errores más importantes en los dos cuestionarios —en algunos casos, los alumnos no registraron todo su procedimiento para contestar las preguntas.

Sin embargo, se logró obtener la clasificación de los alumnos en avanzados, intermedios y Insuficientes, de donde seleccionar a tres de ellos para nuestro estudio de casos. También se acordó con el profesor titular de aula la necesidad de destinar cinco sesiones de 50 minutos cada una para impartir un curso propedéutico, con el fin de nivelar a los alumnos en los temas previos a la enseñanza de la cuadrática.

4.5. Propedéutico

De acuerdo con los resultados obtenidos de la aplicación de los cuestionarios 1 y 2, se realizaron tres sesiones de enseñanza en el aula para tratar los siguientes contenidos:

<u>Primera sesión</u>.

- Suma, multiplicación y división de números con signo.

<u>Segunda sesión</u>.

- Reducción de términos algebraicos.
- Ecuaciones lineales.

Tercera sesión.

- Ecuaciones lineales.
- Factorización.

Posteriormente, se realizaron dos sesiones en el laboratorio de cómputo, con el objetivo de que el alumno se familiarizara con los comandos del *Derive*. Los temas a tratar en estas sesiones fueron:

Primera sesión.

- Suma algebraica.
- Multiplicación algebraica.
- Ecuaciones lineales.

Segunda sesión.

- Ecuaciones lineales aplicando el método gráfico.
- Familia de rectas.
- Funciones.

5.1. Estudio de campo segunda parte

En este apartado, se realiza el estudio de la aplicación de las tres prácticas, cuyo contenido se identificó del resultado de la aplicación de los cuestionarios 1 y 2 al grupo *B*. Describimos la estrategia implementada en cada práctica.

5.1.1 Uso del *Derive*

Se diseñaron tres prácticas (Apéndices 4, 5 y 6) con el uso del *Derive*, para desarrollarlas con 25 alumnos del grupo B, en el aula de medios, con una computadora por alumno. Dividimos el tema de la cuadrática en tres secciones:

- Primera práctica: “Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$”.
- Segunda práctica: “Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$”.
- Tercera práctica: “Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$”.

Cada práctica constó de una columna por ejercicio: se dividen en tres, la “D” indicó que se realizó el algoritmo con el *Derive* y la “P” indicó que se solicitó el procedimiento del algoritmo; la columna “T” indicó el total de aciertos.

5.1.2. Indicaciones del uso de las prácticas con el *Derive*

Las indicaciones en las prácticas para el grupo *B* se implementaron en dos partes: la primera se resolvió utilizando el *Derive* para obtener el resultado de cada ejercicio y anotarlo en el recuadro asignado; posteriormente, se le resolvió con lápiz y papel y el procedimiento se debió desarrollar en un recuadro también asignado dentro de la práctica. La segunda parte se desarrolló primero con lápiz y papel y posteriormente se utilizó el *Derive*.

5.1.3. Estrategia desarrollada en la clase

Cada sesión, de 40 minutos, quedó dividida de la siguiente manera:

- En los primeros 5 minutos, el profesor explicó la forma de resolver la cuadrática con el *Derive* —ejemplificó con dos ejercicios.
- En los siguientes 5 minutos, se resolvieron con lápiz y papel los ejercicios anteriores. En los 30 minutos posteriores, se dejó que el alumno resolviera los cinco ejercicios restantes propuestos en la práctica.

5.2. Resultados de la práctica 1

La Tabla 4 presenta los datos por alumno, por ejercicio, obtenidos del desarrollo de la Práctica 1. Las celdas con color indican respuesta correcta.

Nombre	Problemas																		Total Individual	Observaciones
	$x^2 - 49 = 0$			$5x^2 - 45 = 0$			$6x^2 - 24 = 0$			$3x^2 - 75 = 0$			$x^2 - 81 = 0$			$2x^2 - 8 = 0$				
	D	P	T	D	P	T	D	P	T	P	D	T	P	D	T	P	D	T		
Alejandra			2			1			2			2			2			0	9	
Brando E.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Brenda			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Brenda D.			2			1			1			1			0			1	6	Intermedio
Carla K.			2			2			2			2			2			2	12	Avanzado
Carlos D.			2			2			0			2			2			1	9	
Carlos U.			2			2			1			2			0			0	7	Intermedio
Daniel			2			2			2			1			1			0	8	
Daniela E.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Doris			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Edwin U.			2			2			2			1			1			0	8	
Erick			2			2			2			2			1			0	9	
Erick A.			2			2			2			2			2			0	10	Avanzado
Francisco E			2			2			2			0			0			0	6	Intermedio
Francisco R.			1			1			2			1			1			1	7	Intermedio
Gabriel A.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Hector A.			2			1			0			0			0			0	3	Insuficiente
Jorge			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Jose A.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Jose L.			2			0			1			0			0			0	3	Insuficiente
Juan			2			0			1			0			0			0	3	Insuficiente
Julio C.			2			2			2			2			1			0	9	
Karla G.			2			2			2			1			1			1	9	
Marin			2			2			0			0			0			0	4	Insuficiente
Miriam M.			2			1			1			1			2			0	7	Intermedio
Monserrat			2			2			2			2			0			0	8	
Nayeli M.			2			2			2			2			2			2	12	Avanzado
Victor M.			2			1			2			1			1			1	8	
Total			41			32			31			25			19			9	157	

Tabla 4. PRÁCTICA 1. “Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$”.

5.2.1 Resultados generales de la práctica 1

Lamentablemente, el ausentismo prevaleció en el grupo *B*. Se contabilizaron 21 prácticas, de un total de 28 alumnos, con los siguientes resultados: ya que el cuestionario constó de 6 preguntas y que a cada pregunta se asignó doble puntaje debido al resultado con el *Derive* y al registrado con lápiz y papel, la tendencia central fue: moda: 8 y 9 aciertos; media: 7.4; mediana: 8.

Para el total de ejercicios en las prácticas se disponía de 252 puntos y solamente se obtuvieron 157 puntos, lo cual indica que el 62.3% de los alumnos obtuvieron bien un ejercicio. Ahora, si consideramos a los alumnos que utilizaron el *Derive* para llegar a la respuesta de la cuadrática, el porcentaje de ellos que obtuvo bien el resultado fue de 69% —dejando un 31% de alumnos que aún no dominaban la operatividad del programa. Sin embargo, con lápiz y papel el 55.5% desarrolló el algoritmo correctamente. En consecuencia, un 44.5% no logró comprender el algoritmo de la cuadrática.

5.2.2. Análisis de la práctica 1

Pregunta $x^2 - 49 = 0$

Mecanismos inhibitorios: Francisco, en lugar de desarrollar el procedimiento viético, mezcló en su contestación la sintaxis del programa de cómputo. Posteriormente, comenzó el desarrollo hasta plantear el radical sin saber cómo resolverlo, a pesar de que con el programa conocía la solución (véase la Figura 5.1).

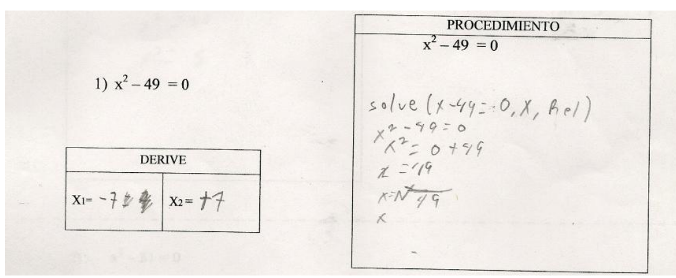


Figura 5.1

Pregunta: $5x^2 - 45 = 0$

Obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa. Saúl no utilizó el *Derive* y realizó la secuencia con la omisión de pasos que lo llevó a un resultado erróneo; posteriormente, rectificó y proporcionó una segunda respuesta, omitiendo nuevamente pasos y signos para llegar a la mitad de las solución (véase la Figura 5.2).

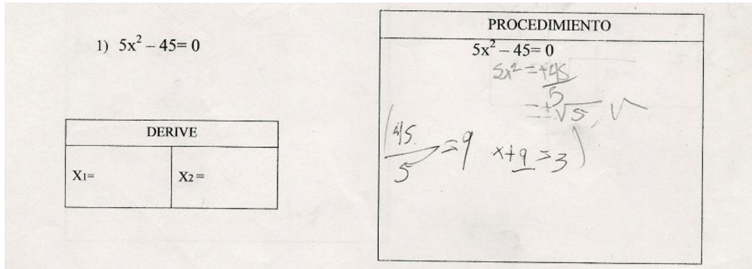


Figura 5.2

Pregunta: $6x^2 – 24 = 0$

Mecanismos inhibitorios: Saúl desarrolló un procedimiento lineal, en vez de vertical; elaboró el despeje de los coeficientes, se bloqueó al presentarse el radical, por lo que le faltó un paso para llegar a la solución del problema, a pesar de haberla obtenido con el *Derive* (véase la Figura 5.3):

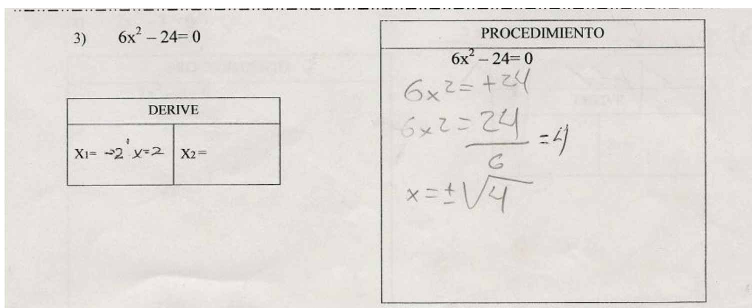


Figura 5.3

Pregunta: $3x^2 − 75 = 0$

Imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacer momentos antes. Miriam procedió en forma vertical; sin embargo, ante una fracción y su raíz cuadrada se inhibió e ignoró el 5 del denominador —que debía ser 3— para restringirse al numerador y extraer al 7 directamente del radical como el resultado. El uso del *Derive* no lo llevó a cabo, (véase la Figura 5.4):

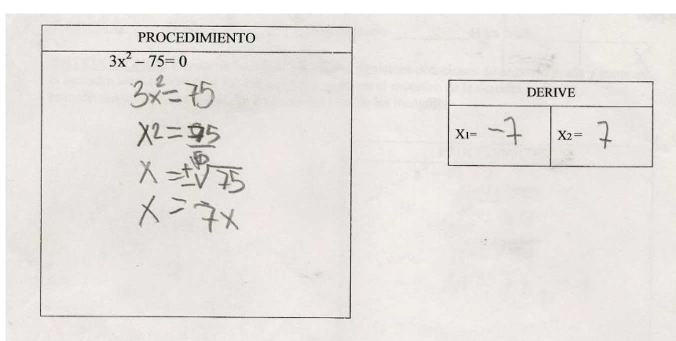


Figura 5.4

Pregunta: $x^2 – 81 = 0$

Necesidad de dotar de sentidos a redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones. Edwin combinó un procedimiento vertical con otro lineal, con el fin de dotar de sentido el radical, al relacionarlo con la división y comprobar con el *Derive* el resultado, sin registrarlo en lápiz y papel (véase la Figura 5.5):

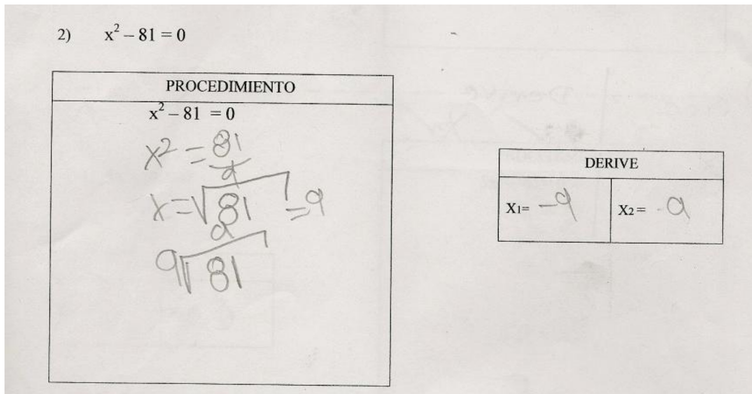


Figura 5.5

Pregunta $2x^2 − 3 = 0$

Mecanismos inhibitorios. Carlos desarrolló bien los procedimientos de despeje; pero al resolver el radical con un número decimal, se inhibió con el radical, regresando al despeje de la fracción, para elevarlas al cuadrado en las dos soluciones y así evitar hacer la raíz cuadrada, (véase la Figura 5.6):

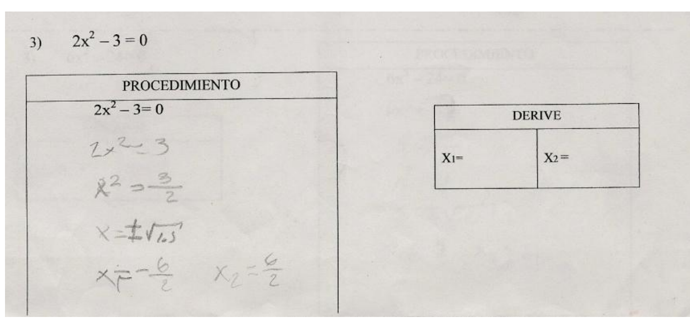


Figura 5.6

5.3 La práctica 2

La Tabla 4 resume los datos obtenidos de la Práctica 2.

5.3.1. Resultados generales de la práctica 2

Se contabilizaron 16 prácticas, de 28 alumnos que tiene el grupo, debido a que 13 alumnos no asistieron por diversas razones. La tendencia central de los datos recabados fue la siguiente: moda: 12; medía: 8.5; mediana: 9.5. (véase Tabla 5)

Nombre	Problemas																		Total Individual	Observaciones
	$x^2 - 2x = 0$			$4x^2 - 12x = 0$			$x^2 - 9x = 0$			$3x^2 + 9x = 0$			$x^2 - 5x = 0$			$2/3\, x^2 + 4/3\, x = 0$				
	D	P	T	D	P	T	D	P	T	P	D	T	P	D	T	P	D	T		
Alejandra			2			2			2			1			2			1	10	
Brando E.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Brenda			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Brenda D.			2			2			2			2			2			2	12	Avanzado
Carla K.			2			2			2			2			2			2	12	Avanzado
Carlos D.			2			2			2			2			2			2	12	Avanzado
Carlos U.			0			1			0			0			1			0	2	Insuficiente
Daniel			1			1			1			1			1			1	6	Intermedio
Daniela E.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Doris			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Edwin U.			1			2			1			2			2			2	10	
Erick			2			2			2			2			2			2	12	Avanzado
Erick A.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Francisco E			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Francisco R.			2			1			2			1			1			2	9	
Gabriel A.			2			2			1			2			2			1	10	
Hector A.			1			1			1			1			1			0	5	
Jorge			2			2			2			2			2			2	12	Avanzado
Jose A.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Jose L.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Juan			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Julio C.			2			2			1			2			2			0	9	
Karla G.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Marin			1			1		0				0			0			0	2	Insuficiente
Miriam M.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Monserrat			2			1			1			2			1			0	7	Intermedio
Nayeli M.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Victor M.			2			1			1			1			1			1	7	Intermedio
TOTAL			26			25			21			23			24			18	137	

Tabla 5. Resultados de la Práctica 2 “Ecuaciones de la forma $ax^2+bx = 0$”.

Nuevamente, ya que la práctica cuenta con seis ejercicios y cada uno vale dos puntos, para las 16 prácticas se disponía de 192 puntos, de los que se obtuvieron 137, lo cual indica que el 71.3% de los alumnos llegaron a la solución —utilizando cualquiera de los dos métodos para resolver la cuadrática. Si se comparan los puntajes de los alumnos que utilizaron el *Derive* (77.0%), 23% de ellos aún no lograron la operatividad del programa de cómputo. En comparación, en lápiz y papel el 65.6% desarrolló el algoritmo correctamente, pero 34.4% de los alumnos no lograron desarrollar el algoritmo de la cuadrática.

5.3.2. Dificultades cognitivas en la práctica 2

Pregunta: $x^2 - 2x = 0$

Proceso de abreviación de textos concretos para producir reglas sintácticas nuevas. Edwin, al utilizar primero el *Derive*, notó el resultado de la cuadrática; posteriormente, al desarrollar el procedimiento con lápiz y papel, enfrentó la dificultad de la factorización: sabía que había que utilizar el paréntesis para despejar los términos e igualarlos a cero: con su abreviación del procedimiento buscó la forma de llegar al mismo resultado (véase la Figura 5.7):

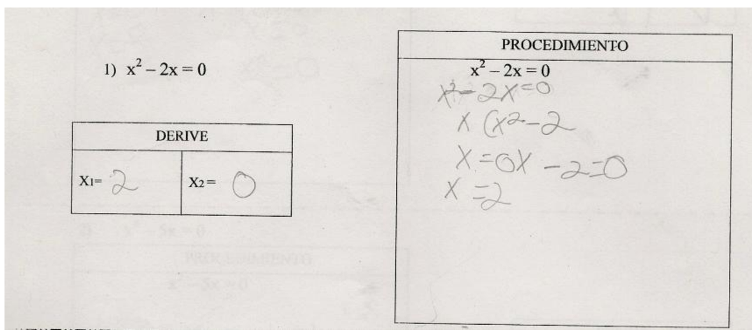


Figura 5.7

Pregunta: $4x^2 - 12x = 0$

Necesidad de dotar de sentidos a redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones. Héctor tiene bien definido el siguiente paso de la factorización; de hecho, en el momento de desarrollar la igualación a cero, llega al resultado a pesar de haber -suprimido el coeficiente 4 -. Sin embargo, tiene la intuición de la cuadrática de la forma ax^2 -bx= 0. El valor de la variable es el mismo; pero, ambos con signo contrario. Se observa que no utilizó el *Derive*, primero, para llegar al resultado: anota el valor de la variable en el recuadro destinado el mismo número, ambos pero con distinto signo, (véase la Figura 5.8):

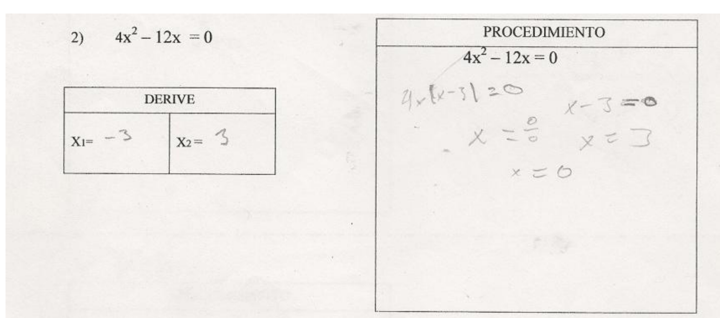


Figura 5.8

Pregunta: $x^2 + 9x = 0$

Generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias. Gabriel anotó la respuesta indicada por el *Derive*; sin embargo, en su procedimiento omitió la factorización y apuntó la igualación a cero con las ecuaciones, de ahí que reconsidera el ejercicio anterior para dotar de sentido a las acciones anteriores (véase la Figura 5.9).

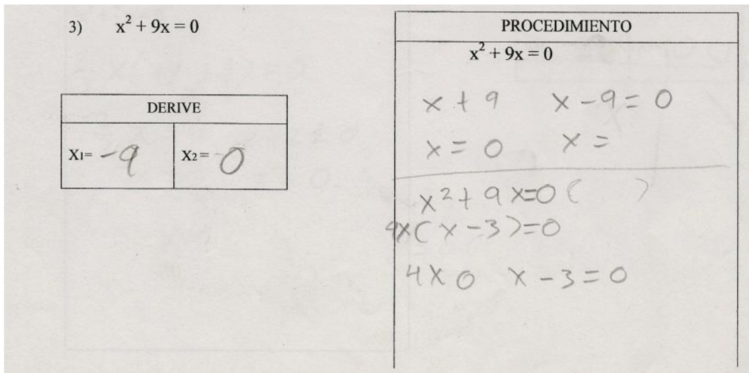


Figura 5.9

Pregunta: $3x^2 + 9x = 0$

Obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa. Víctor llegó al resultado; sin embargo, en su procedimiento omitió coeficientes y cambió signos; al final, los expresó de forma tal que fuera lo mismo que proporcionó el *Derive*. Por tanto, concluimos que primero utilizó el *Derive* (véase la Figura 5.10).

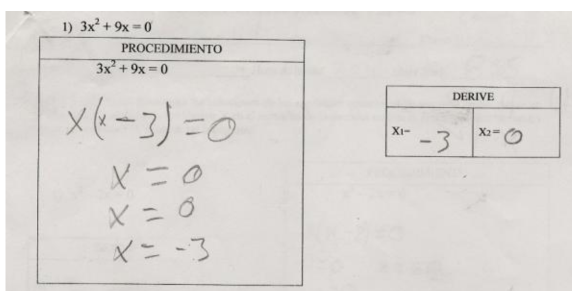


Figura 5.10

Pregunta: $x^2 - 5x = 0$

Articulación de generalizaciones erróneas. Daniel evidenció una idea general del procedimiento de factorización en las ecuaciones e igualación a cero; sin embargo, no factorizó, pero dotó de sentido al resultado proporcionado por el *Derive* (véase Figura 5.11).

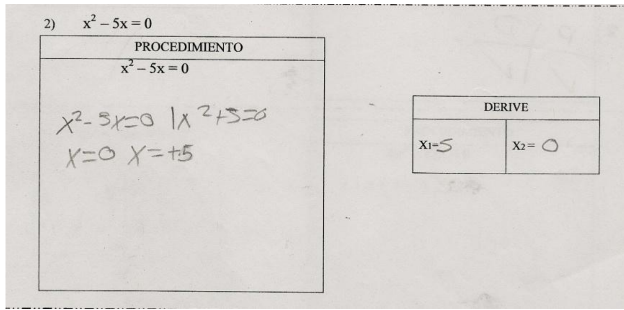


Figura 5.11

Pregunta: $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = 0$

La articulación de generalizaciones erróneas. Víctor, ante la imposibilidad de poder factorizar las fracciones, invirtió el mecanismo: primero encontró el resultado con el *Derive;* después, de la generalización adquirida de los ejercicios anteriores, dotó de sentido al procedimiento para proporcionar el resultado del *Derive*, (véase la Figura 5.12):

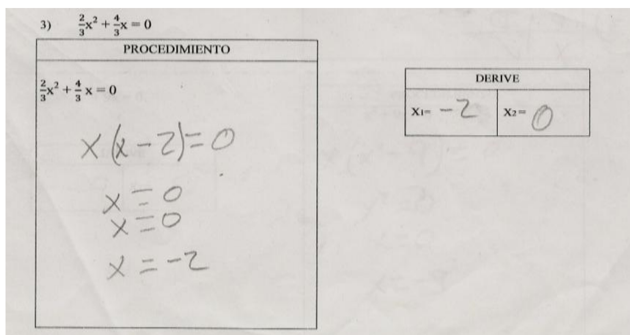


Figura 5.12

5.4. La práctica 3

La Tabla 5 resume los resultados del desarrollo de la Práctica 3. Dicha práctica es de la forma completa $ax^2+bx+c=0$, dividida en dos partes, primero utilizando el Derive para resolver en lápiz y papel, en la segunda parte primero en lápiz y papel, para terminar con el Derive.

5.4.1. Resultados generales de la práctica 3

Participaron sólo 17 de los 28 alumnos del grupo *B*, debido a la ausencia de 11 alumnos por causas que se desconocen. De los datos obtenidos con la práctica 3, la tendencia central fue la siguiente: moda: 9; medía: 6.2; mediana: 6. (véase Tabla 6).

Nombre	Problemas																		Total Individual	Observaciones
	$x^2-14x+49=0$			$4x^2-6x+9=0$			$x^2+14x-15=0$			$x^2-5x-14=0$			$x^2+9=6x$			$x^2+2x+7=0$				
	D	P	T	D	P	T	D	P	T	P	D	T	P	D	T	P	D	T		
Alejandra			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Brando E.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Brenda			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Brenda D.			2			2			2			2			1			0	9	Avanzado
Carla K.			2			2			2			2			1			0	9	Avanzado
Carlos D.			2			2			2			2			2			1	11	Avanzado
Carlos U.			2			2			1			2			1			1	9	
Daniel			1			1			1						1			0	4	
Daniela E.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Doris			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Edwin U.			1			1			1									0	3	Insuficiente
Erick			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Erick A.			1			1			1			1			1			0	5	Intermedio
Francisco E			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Francisco R.			2			2			1			2			1			0	8	
Gabriel A.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Hector A.			2			2			1			2			0			0	7	
Jorge			1			1			0			0			0			0	2	Insuficiente
Jose A.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Jose L.			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Juan			F			F			F			F			F			F	0	NO ASISTIO
Julio C.			1			2			0						0			0	3	Insuficiente
Karla G.			1			1			0			2			2			0	6	Intermedio
Marin			2			1			0			1			1			1	6	Intermedio
Miriam M.			1			2			0			2			1			1	7	
Monserrat			1			1			1			1			1			0	5	Intermedio
Nayeli M.			2			2			2			2			1			0	9	Avanzado
Victor M.			1			2						1			0			0	4	
Total			25			27			15			22			14			4	107	

Tabla 6. Práctica 3 "Ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$".

En la práctica se propusieron seis ejercicios y que cada uno con un valor de dos puntos, en las 17 prácticas desarrolladas, si el máximo es de 204 puntos, y se obtuvieron 107, nos indica que el 52.4% de los alumnos llegaron a la resolución de la cuadrática utilizando cualquiera de los dos métodos. Si se hace la comparación con los alumnos que utilizaron el *Derive*, 68.6 % de ellos aprendieron la operatividad del programa; mientras que del 31.4%

que no lograron aprender la operatividad del Derive, 36.2% desarrollaron el algoritmo correctamente a lápiz y papel pero el 63.2% no logra aun hacer el algoritmo.

5.4.2. Dificultades cognitivas en la práctica 3

Pregunta: $x^2 - 14x + 49 = 0$

Generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias. Míriam reconoció que este tipo de ecuación es de la forma completa y, al factorizar, tomó el primer término, lo utilizó para encontrar el factor numérico; posteriormente, dotó de sentido al binomio para llegar al resultado proporcionado por el *Derive*(véase la Figura 5.13):

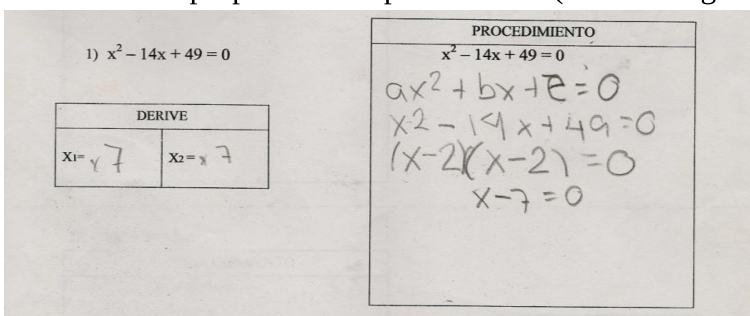


Figura 5.13

Pregunta: $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Necesidad de dotar de sentidos a redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones. Daniel, al realizar la factorización, suprimió los signos en los binomios; pero tuvo presente que los términos son negativos. Su dificultad para despejar los coeficientes, hizo que buscara la forma de igualar la respuesta del *Derive* (véase la Figura 5.14):

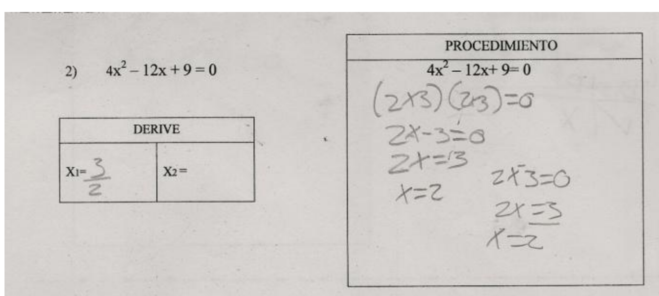


Figura 5.14

Pregunta: $x^2 + 14x – 15 = 0$

Necesidad de dotar de sentidos a redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones. Monserrat, ante su dificultad para factorizar y al tener el resultado proporcionado por el *Derive*, dotó de sentido a su propia factorización: para despejar, multiplicó los coeficientes 5 y 3 para obtener 15 y, como al despejar 5 cambió de signo, según ella obtuvo un valor de la variable (véase la Figura 5.15).

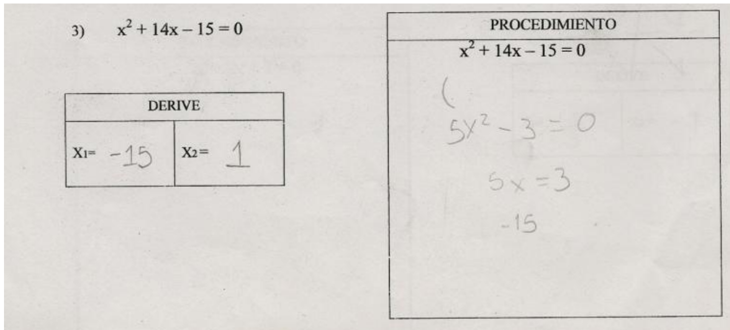


Figura 5.15

Pregunta: $x^2 - 5x - 14 = 0$

Obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa. Daniel primero utilizó el *Derive* para obtener la solución de la ecuación, debido a que lo copió detalladamente; sin embargo, al símbolo "∨" (operador lógico o), que el software utiliza para distinguir cualquiera de los resultados, lo anotó sin conocer su significado; posteriormente, factorizó para encontrar un valor de la variable; es decir, utilizó una operación inversa a partir del resultado (véase la Figura 5.16):

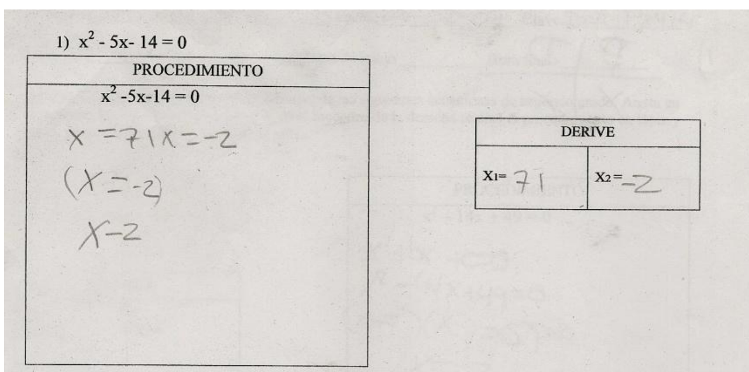


Figura 5.16

Pregunta: $x^2 + 9 = 6x$

Generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias. Para esta pregunta, Daniel sabía que era necesario pasar el término del segundo miembro al primer miembro, para considerar a la expresión como una ecuación completa; sin embargo, igualó los tres términos entre sí para utilizar la factorización y dotarla de sentido (véase la Figura 5.17):

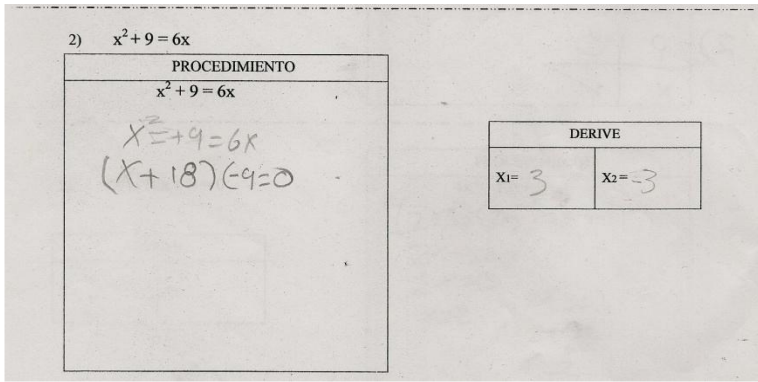


Figura 5.17

Pregunta: $x^2 + 2x + 7 = 0$

Este ejercicio es un caso muy particular, debido a que no tiene solución en el conjunto de los números reales. El *Derive* no lo marca como falso, no tiene solución. En cursos más avanzados, se le soluciona empleando los números imaginarios, tema que no se encuentra en los programas de nivel secundaria. Sin embargo, Daniel exhibió una estrategia con la que obtuvo los valores de la variable: a esto lo clasificamos como la **necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones** (véase la Figura 5.18):

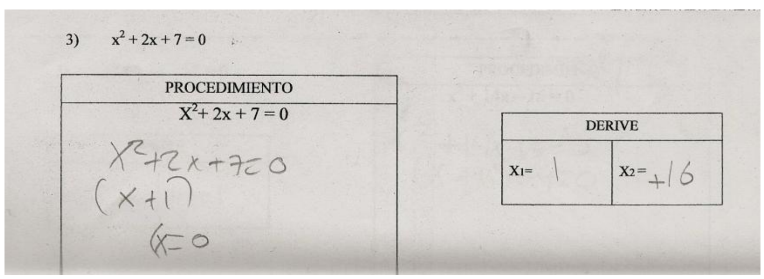


Figura 5.18

6.1 Estudio de casos

En esta quinta etapa de la investigación, se seleccionó a tres alumnos para realizar una entrevista en cada uno de los niveles identificados: avanzado, intermedio y Insuficiente. El fin fue entender algunas dudas que surgieron de los resultados obtenidos en las prácticas 1, 2 y 3.

6.1.1 Guión de observación

Se diseñó un guión de observación de la entrevista (Apéndice 7), para la cual se determinaron las preguntas en las cuales se rompía la comunicación y se pretendió identificar la razón de la ruptura.

6.1.2 Lugar de la entrevista

Las entrevistas se realizaron en la biblioteca de la escuela, después de haber transcurrido 4 meses de la aplicación de las tres prácticas. Se utilizó una computadora para referirse a las herramientas del *Deriv*e utilizadas. Las sesiones, con una duración máxima de 1 hora, se video grabaron con una sola cámara fija (lo cual constituyó una limitante para la recopilación de datos); los registros se analizaron y se transcribieron los pasajes considerados más importantes.

Se retomaron la dinámica de las practicas realizadas por los alumnos, es decir utilizando el Derive versus lápiz y papel dejando la libertad a los alumnos a que decidieran comenzar con cualquiera de los dos métodos, con la variante que los ejercicios son similares a los realizados en clase.

Para realizar el guión de observación de consultó el "Manual de prácticas de observación" (Anguera, 1985,p. 19), nos marca que para un registro no sistematizado esta en función de la fase o estado en que se encuentra el entrevistado y a su respuestas.

6.2 Nivel Insuficiente: Resultado de la entrevista

En el presente guión se realizaron las observaciones después de observar constantemente el video

No.	Habilidad del pensamiento	Observaciones
1	Analizar	No tiene idea de dónde comenzar, para resolver el algoritmo de la cuadrática.
2	Calcular	No logra aún la habilidad en las operaciones básicas.
3	Comparar	Sí puede comparar los procedimientos con los ejercicios anteriores.

4	Comunicar	Sí logra recordar el SMS computacional, con el SMS algebraico, al igual que logra recordar la operatividad del programa para ingresar la ecuación.
5	Clasificar	Sí comprende que una ecuación cuadrática tiene dos resultados a comparación de la ecuación lineal.
6	Deducir	Su forma de resolver el algoritmo es mecánica, teniendo que comparar su procedimiento con otro ejercicio de la práctica anterior y visualizar, constantemente, el procedimiento con el ya resuelto.
7	Evaluar	El resultado que le proporciona el *Derive* no le indica nada, en comparación con el algoritmo de la cuadrática.
8	Estimar	Puede estimar el resultado de la cuadrática.
9	Generalizar	No, considera que las reglas solamente se aplican a un solo ejercicio específico.
10	Imaginar	En el momento en que se le pregunta: ¿Tienes $50 y te gastas la mitad?, no logra imaginarse la situación problémica para llegar al resultado.
11	Inferir	No puede rescatar la información desarrollada con los otros ejercicios para el nuevo ejercicio.
12	Interpretar	En este caso, el alumno no sabe factorizar la cuadrática, en consecuencia, utiliza la aplicación de la factorización para terminar el algoritmo: sí logra interpretar el dato proporcionado por el medio en la resolución del algoritmo.
13	Inventar y crear	No se le planteó esta posibilidad con el *Derive*.
14	Ordenar	De acuerdo al ejemplo, sigue el mismo procedimiento: sí logra crear una nueva sintaxis o simplificación de pasos.
15	Organizar	Considera al *Derive* poco útil para el aprendizaje de la cuadrática.
16	Recuperar	Sí logra recuperar algunos procedimientos para la cuadrática en sus tres formas.
17	Resolver	No se llegó a plantear.
18	Representar	En las prácticas sí consideraba toda la simbología del *Derive* en el momento de copiar el resultado. En la entrevista no logra discriminar alguna simbología: (v) innecesaria, para el resultado.
19	Representar mentalmente	No se encontró evidencia de crear símbolos para estimular la imaginación.
20	Sintetizar	No realizó alguna omisión de procedimiento para llegar al resultado.
21	Transferencia	No se llegó a plantear.

6.2.1 Extractos del video de la entrevista

Tiempo 15"14' — 16"23'

P: Bueno, ¿sí recuerdas cómo ingresar la ecuación en el *Derive*?

A: No ….se me olvidó.

P: Bueno, escribe *x* al cuadrado ahí en esa barra,……..(está ingresando la ecuación y no sabe cómo ingresar al cuadrado).

P: ¿Te acuerdas que para elevarlo a la potencia hay un símbolo? (13:12)

A: ¡Ha, sí! un sombrerito (13:19)

P: Antes de la *x* y el dos lleva el símbolo.

P: Ya tenemos *x* al cuadrado menos treinta y seis igual a cero,…………… le damos enter.

P: Ya ingresamos en la pantalla, nos vamos a la barra de menú…………..donde está resolver,…….. expresión.

P: ¿Serán números complejos o reales?

A: Reales.

P: Bueno, ése es el resultado, anótalo aquí, el resultado, por favor.

P: ¿Qué significará esto? Señala al símbolo ˇ.

A: Es como la ecuación.

A: Se utiliza para separar los valores y se lee equis igual a menos seis (x = -6) y equis igual a seis (x = 6) …………… sí –asiente con la cabeza.

P: ¿Podrás resolver ahora la otra?

A: Sí.

Tiempo. 43'12"— 43' 52"

P: ¿Crees que el *Derive* te podría auxiliar para resolver una ecuación de segundo grado?

A: Sí.

P: ¿Recordaste el proceso?

A: Sí.

P: ¿Crees que te ayudaría mucho, poquito o nada?

A: Poquito.

P: ¿Qué necesitas para tener más dominio de la cuadrática?

A: …………no hay respuesta……

P: ¿Practicar más?

A: ……..hace un gesto de afirmación…….—si

P: ¿En lápiz y papel o con el *Derive*?

A: ……con los dos……

P: Bueno, gracias.

6.2.2. Nivel intermedio: Resultado de la entrevista

A continuación se presentan los resultados de la entrevista con el alumno intermedio.

No.	Habilidad del pensamiento	Observaciones
1	Analizar	No, se basa en la mecanización del procedimiento; es decir, observando solamente el ejemplo.
2	Calcular	Sí, tarda en hacer los cálculos de las multiplicaciones y números con signo.
3	Comparar	Sí, puede resolver el problema cuando hay un modelo a seguir para hacer el procedimiento.
4	Comunicar	No, logra discriminar los SMS computacionales, para convertirlos a

		SMS algebraicos, de forma correcta; confunde la simbología e interpreta "*y*" como "potencia".
5	Clasificar	No, logra entender la información del *Derive*, en el resultado proporcionado por el software.
6	Deducir	No, reconoce cuando se sustituye el valor de *x* cuál debe ser el resultado de la cuadrática.
7	Evaluar	No se logró evidenciar.
8	Estimar	No: para él, es necesario realizar el algoritmo para conocer el resultado.
9	Generalizar	No reconoce que una ecuación cuadrática tiene tres formas.
10	Imaginar	No se logró evidenciar.
11	Inferir	No logra deducir para plantear una hipótesis del procedimiento y el resultado.
12	Interpretar	Sí, logra interpretar el procedimiento de la factorización del *Derive*, para terminar el algoritmo en lápiz y papel.
13	Inventar y crear	No se le planteó la posibilidad de crear un problema.
14	Ordenar	Sí, procura alinear los términos algebraicos durante todo el procedimiento.
15	Organizar	Sí, utiliza el *Derive*, primero para obtener el resultado y realizar la factorización.
16	Recuperar	No, realiza el algoritmo, de forma independiente, tiene que consultar constantemente, el modelo para resolverlo.
17	Resolver	No, logra retener el conocimiento para poder resolverlo con lápiz y papel, tomando la iniciativa para utilizar el *Derive* primero.
18	Representar	No logra discriminar el SMS computacional, para plasmarlo en el SMS en lápiz y papel, considerando toda la sintaxis del programa como parte del procedimiento.
19	Representar mentalmente	No se logra evidenciar.
20	Sintetizar	Sí, asocia el resultado del *Derive* y factorización en el algoritmo de la cuadrática.
21	Transferencia	Sí, presenta la habilidad de operatividad del programa, para resolver los problemas posteriores.

6.2.3. Extractos del video más significativos en la entrevista

Tiempo 41''

P: Bueno, vamos a resolver algunos ejercicios parecidos a los de las prácticas 1, 2 y 3. ¿Sí recuerdas cómo ingresar la ecuación en el *Derive*?

A: No me acuerdo muy bien.

P: Bueno, lo que no recuerdes puedes consultarlo conmigo ….. ¿Qué ecuación es la que te estoy proponiendo en la hoja?

A: [Lee en voz alta la expresión] $x^2 – 36 = 0$.

P: Esta ecuación hay que ingresarla en la barra, aquí.

A. El cuadrado es éste (1:45)

P: ¡Ah! Sí es…….. pero hay un error de sintaxis: ahí está x^ – 36 = 0, falta escribir al cuadrado, es decir el dos (2:012)

A: ¿Entonces lo borro? (2:18)

P: Lo puedes ingresar de nuevo (2:19)

A: Para grabarlo (2:25)

P: Solamente da el enter o en el botón de la palomita …………. abrimos el menú ………el método es algebraico……… Bueno, ya te están dando dos valores. ¿Cuáles son esos dos valores? (3:12)

A: El de solve $x - 36 = 0$ … x real ……….. y el otro es x = –6 al cuadrado
$x = 6$ (3:29)

P: Bueno, este símbolo significa (v) y solamente que así lo representa la máquina (3:33).

A: ……hace un gesto de afirmación (3:34)

P: ¿Cuántos valores son? (3:35)

A: Seis (3:36)

P: Bueno, el seis es el valor de *x*, ¿pero cuántos son? (4:50)

A: Dos (4:53)

P: ¿Cuántos valores se buscan en una ecuación de segundo grado? (4:58)

A: Dos (4:00)

P: Quiere decir que si sustituyo el valor de 6 en la ecuación, ¿cuál va a ser el resultado? (5:05)

A: 6 (5:08)

P: Si sustituyo el valor de *x*, ¿cuánto me tiene que dar? (5:10)

A: *x*…………6……..(5:13)

P: Señala la ecuación en *x*……..(5:20)

A: ….. cero …….. [hace señal con la cabeza de comprender] (5:24)
sumado me de dos……….(6:24)

P: ¿Qué par de números te da 8? (6:30)

A: 4 por 2 (6:32)

P: Uno de ellos debe de ser positivo….. ¿Cuál crees que debe ser positivo? (6:33)

A: El cuatro (6:34)

P: Ya para terminar, ¿cómo crees que te puede ayudar el *Derive* para comprender el tema de la cuadrática? (7:08)

A: Sí me ayudaría en buscar el resultado de la ecuación………… antes de que la resuelva, para tener una idea de cómo resolverlo…………… Sí, a eso me ayudaría ...(7:23)

6.2.4. Nivel avanzado: Resultado de la entrevista

Por ultimo se presenta las observaciones recabadas con el alumno de nivel avanzado.

No.	Habilidad del pensamiento	Observaciones
1	Analizar	Reconoce cuándo se produce un error de sintaxis al utilizar el *Derive*.
2	Calcular	Tiene presente el procedimiento algorítmico de la cuadrática: tiene que obtener dos resultados con el *Derive* en cualquiera de las tres formas.
3	Comparar	Sabe distinguir la información proporcionada por el medio, cuáles son sus alcances y aplicaciones del *Derive*, y al realizarlo con lápiz y papel.
4	Comunicar	Expone bien el SMS algebraico con el SMS computacional, al realizar la operatividad del programa y hacerlo en lápiz y papel.
5	Clasificar	Sí comprende que una ecuación cuadrática tiene dos resultados en comparación con la ecuación lineal.
6	Deducir	Conoce bien cuál es el posible resultado de la cuadrática, antes de hacerlo en lápiz y papel.
7	Evaluar	El resultado que le proporciona el *Derive* le sirve de guía para llegar al resultado en el momento de realizar el algoritmo en lápiz y papel.
8	Estimar	Puede estimar el resultado de la cuadrática.
9	Generalizar	Reconoce que, en cualquiera de las tres formas de la cuadrática, se debe obtener dos resultados.
10	Imaginar	Sí, desarrolla las operaciones mentales en el caso del tema de números con signo.
11	Inferir	Sí, toma en cuenta al *Derive* como un auxiliar para comprobar los resultados, en el caso de hacerlo en lápiz y papel.
12	Interpretar	Sí: logra interpretar el procedimiento de la factorización del *Derive*, para terminar el algoritmo en lápiz y papel.
13	Inventar y crear	No se le planteó esta posibilidad con el *Derive*.
14	Ordenar	Sí: procura alinear los términos algebraicos durante todo el procedimiento.
15	Organizar	El *Derive* lo utiliza como verificador de resultados, tomando la iniciativa de primero realizar en lápiz y papel.
16	Recuperar	Sí logra recuperar algunos procedimientos que se hacen en la cuadrática en sus tres formas.
17	Resolver	Sí: manifiesta haber retenido el conocimiento del algoritmo de la cuadrática.
18	Representar	No logra discriminar el SMS computacional, para plasmarlo al SMS en lápiz y papel.
19	Representar mentalmente	No se encontró evidencia de crear símbolos para estimular la imaginación.
20	Sintetizar	Sí: asocia el resultado del *Derive* y factorización en el algoritmo de la cuadrática.
21	Transferencia	Sí: recupera, inmediatamente, el proceso a seguir en el algoritmo.

6.2.5. Extractos del video más significativos en la entrevista.

Tiempo40' — 10’23”

P: Bueno, ¿sí recuerdas cómo ingresar la ecuación en el *Derive*?
A: Sí.
P: Si hay algo que no recuerdes puedes consultar.
A: ¿Dónde está el igual? (1:37)
P: Aquí.
A. Así …..
P: Ahí nos indica algo,………. ¿qué dice? (2:11)
A: Sí, …….. error de sintaxis (2:13)
P: ¿Sabes qué es sintaxis? (2:20)
A: ¡Eeh!, la forma en que está escrita la operación (2:22)
P: ¿Estará bien escrita o mal escrita? (2:30)
A: Mal (2:31)
P: ¿Estaremos trabajando con puros números o letras? (3:05)
A: Con los dos (3:06)
P: Entonces que sería algebraico….. complejos o reales (3:08)
A: Reales (3:09)
P: ¿Cuántos valores estamos buscando en una ecuación de segundo grado? (3:46)
A: Dos (3:48)
P: ¿Qué significa eso? (4:50)
A: ¿Cuál? (4:55)
P: Esos resultados (4: 58)
A: Es el valor de *x* (5:01)
P: Y si los sustituyes, ¿cuánto te tiene que dar? ….(5:05)
A: 50 (5:09)
P: ¿50? (5:10)
A: Cero (5:11)
P: Ahí también hay que factorizar para encontrar el binomio (6:01)
A: Sí, pero en ésta es un número que multiplicado me dé más 8, menos 8 y sumado me dé dos……….(6:24)
P: ¿Qué par de números te da 8? (6:28)
A: 4 por 2 (6:29)
P: Pero uno de ellos debe de ser positivo….. ¿Cuál crees que debe ser positivo? (6:33)
A: El dos (6:34)
P: ¿El dos? (6:35)
A: No………….. el 4 (6: 42)

P: Ya para terminar, ¿cómo crees que te puede ayudar el *Derive* para comprender el tema de la cuadrática? (10:10)

A: Pues……. creo que sí…….me ayudaría más, con lápiz y papel, habrá momentos en que no le pueda entender al *Derive*, entonces yo tendré que hacer las ecuaciones, o simplemente como una forma de estudiar puedo hacerlo primero, tomar las ecuaciones, hacerlas y comprobar con el *Derive*…….(10:11)

7. Conclusiones

En la investigación, se analizó el tema de la cuadrática con alumnos de tercer grado utilizando el *Derive* y se observaron las consecuencias de utilizar un programa de cómputo como herramienta en la enseñanza de la cuadrática en el aula. De acuerdo a los resultados obtenidos, podemos dar respuesta a las tres preguntas de investigación planteadas al principio.

7.1. Preguntas de investigación

¿Cuáles son las competencias formales manifestadas por el alumno al utilizar el *Derive* en la resolución de la cuadrática?

Para dar respuesta a la pregunta, consideramos tres aspectos del desempeño en cada estudiante: aprovechamiento, interacción entre profesor-alumno, alumno-Derive.

- En el caso del aprovechamiento en la resolución de los ejercicios de la cuadrática, se elevaron los porcentajes de los alumnos que desarrollaron correctamente los ítems cuando el *Derive*. Práctica 1, 62%, práctica 2, 71.35% y práctica 3, 52.4%. Recordando que en el cuestionario 1, tres de 19 alumnos no desarrollaron el algoritmo.

- También los alumnos logran el reconocimiento del algoritmo de la cuadrática, por el cual debe obtener dos valores.

Esto lo resumimos con las medidas de tendencia central (veáse Tabla 7)

Prácticas	**Media**	**Mediana**	**Moda**
$ax^2+c=0$	6.6	7	7
$ax^2+bx=0$	7.5	7.5	10
$ax^2+bx+c=0$	5.9	5	5

Tabla 7. Medidas de tendencia central

En la parte profesor-alumno.

- Se desarrollo un ambiente de mutua comunicación, en el sentido de consultar el procedimiento con el profesor constantemente al igual, que la orientación de las interrogantes surgidas en el momento, centralizando el interés por el tema y consiguiendo el alumno desarrolle la atención del procedimiento para comprobar el resultado y sirva en algunos casos como estímulo u orientación para llegar al resultado. Podemos considerar que es estableció un aprendizaje significativo de dicho tema.

Por ultimo en la parte Alumno-Derive

Como el programa solamente muestra el resultado de la cuadrática.

- En consecuencia los alumnos se ven forzados a utilizar la memoria para desarrollar el algoritmo en lápiz y papel. Es decir los esquemas que se van almacenado y son recuperados cuando surge una situación problemica.
- La revisión de apuntes para, recordar el procedimiento de la cuadrática.
- Se desarrolla el trabajo colaborativo, cuando el alumno es incapaz de desarrollar el procedimiento. Resultó en la clase que muchos de ellos optan por consultar con su compañero de al lado su procedimiento —modelo social (Zimbardo, 1989) o revisan el ejercicio muestra. En cada práctica, a medida que se desarrollaban los primeros, los últimos ejercicios eran más rápidos de resolver; salvo en la tercera práctica, el ítem resulto ser de un grado de dificultad elevado para los alumnos de este nivel escolar.
- También se identifico una inmediata adaptación en la sintaxis del SMSC, en su aplicación, del programa
- Por ultimo se detecto el caso en el proceso de análisis por parte del alumno en cada ítem, se manifestó el uso de la lógica por parte de dos alumnos, al dejar el resultado idéntico al *Derive*: a lo que se llama **la generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias** (Filloy,1989, p. 45), (véase Figura 7.1**).**

  Las evidencias se encontraron en la práctica 1 y práctica 2.

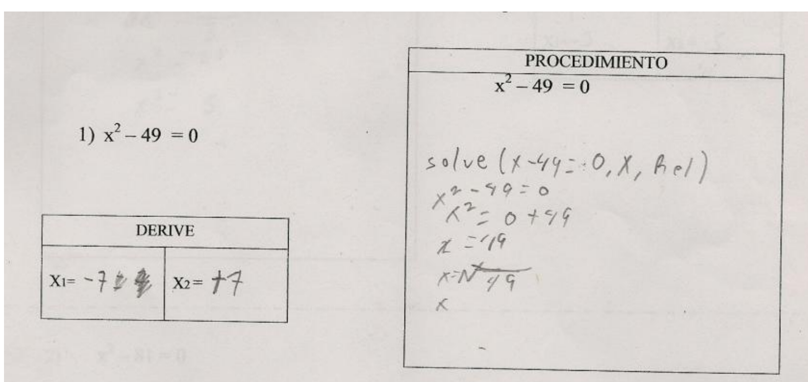


Figura 7.1

Conclusión.

La competencia es una habilidad desarrollada por todo individuo durante su enseñanza (Monzó, 2006), la operatividad que implica el uso del software hace que el alumno se centre en el procedimiento del algoritmo combinándolo la sintaxis del SMSA con el SMSC, sin dotar de sentido el procedimiento para llegar al resultado.

7.1.1. Conclusión de la primera pregunta en el estudio de caso

Para dar respuesta a las preguntas de investigación bajo el esquema del estudio de caso con los alumnos Insuficiente, intermedio y avanzado.

¿Cuáles son las competencias formales manifestadas, por el alumno al utilizar el *Derive* en la resolución de la cuadrática?

Alumno Insuficiente

- Aparentemente, se desarrolla, un olvido del tema al solicitarle resolver algunos problemas de la cuadrática en lápiz y papel o con el *Derive*:

1	Analizar	No tiene idea de dónde comenzar para resolver el algoritmo de la cuadrática.

Al solicitar que ingrese la ecuación en el *Derive* su respuesta fue:

P: Bueno, ¿sí recuerdas como ingresar la ecuación en el *Derive*?
A: No …. se me olvidó.

Sin embargo, al estarlo orientando, recupera el procedimiento para ingresar:

P: Bueno, escribe *x* al cuadrado ahí en esa barra,……..(está ingresando la ecuación, y no sabe cómo ingresar al cuadrado).
P: ¿Te acuerdas que para elevarlo a la potencia hay un símbolo? (13:12)
A: Así un sombrerito (13:19)

- En conclusión el alumno sí identifica que una ecuación de segundo grado tiene dos resultados, pero no logra la habilidad para desarrollar el algoritmo con plena seguridad, aún requiere de la asesoría del profesor.

- También el alumno no ha logrado desarrollar la competencia para llegar a la generalidad de la operación:

11	Inferir	No puede rescatar la información desarrollada con los otros ejercicios para el nuevo ejercicio
10	Imaginar	Cuando se le hace la pregunta “¿Tienes $50 y te gastas la mitad?”, no logra imaginarse la situación problémica para llegar al resultado.
9	Generalizar	No: considera que las reglas solamente se destinan a un solo ejercicio específico.

Alumno intermedio

- Al plantearle la actividad con los mismos ejercicios, presenta cierta inseguridad para resolver el problema:

  P: Bueno, vamos a resolver algunos ejercicios parecidos en las prácticas 1, 2 y 3 ¿Sí recuerdas cómo ingresar la ecuación en el *Derive*?
  A: No me acuerdo muy bien.

17	Resolver	No logra retener el conocimiento para poder resolverlo con lápiz y papel, tomando la iniciativa de utilizar el *Derive* primero.

- Al comenzar a orientarlo, muestra un ligero recordatorio en la sintaxis del programa:

  P: Bueno, lo que no recuerdes puedes consultarlo conmigo….. ¿Qué ecuación es la que te estoy proponiendo en la hoja?
  A: [Lee en voz alta la expresión] $x^2 - 36 = 0$.
  P: Esta ecuación hay que ingresarla en la barra, aquí.
  A. El cuadrado es éste (1:45)

- El alumno logra resolver los ejercicios solamente tomando un modelo para solucionarlos, sin poder llegar a una generalización.

  P: ¿Qué par de números te da 8? (6:28).
  A: 4 por 2 (6:29).
  P: Pero uno de ellos debe de ser positivo….. ¿Cuál crees que debe ser positivo? (6:33).
  A: El dos (6:34).
  P: ¿El dos? (6:35).
  A: No…………..el 4 (6: 42).

9	Generalizar	No reconoce que una ecuación cuadrática tiene varias formas.

- No logra llegar a la generalización de la cuadrática.

Alumno avanzado

- Evidencia una seguridad para comenzar una estrategia para resolver la ecuación tomando la iniciativa primero para hacerlo en lápiz y papel y, posteriormente, con el *Derive*.

P: Bueno, ¿sí recuerdas cómo ingresar la ecuación en el *Derive*?
A: Sí.

15	Organizar	Utiliza al *Derive* como verificador de resultados, tomando la iniciativa de primero realizar en lápiz y papel.

- Recuperación inmediata del tema o subtemas que implica resolver el problema:

P: Ahí también hay que factorizar para encontrar el binomio (6:01)
A: Sí, pero en ésta es un número que multiplicado me dé más 8, menos 8 y sumado me dé dos……….(6:24)
P: ¿Qué par de números te da 8? (6:28)
A: 4 por 2 (6:29)
P: Pero uno de ellos debe de ser positivo….. ¿Cuál crees que debe de ser positivo? (6:33)
A: El dos (6:34)

- Se logra llegar adquirir una habilidad en la resolución de la cuadrática, es decir a una generalización del método, en donde primero resuelve en lápiz y papel **Para** posteriormente verificarlo con el *Derive*:

5	Clasificar	Sí comprende que una ecuación cuadrática tiene dos resultados a comparación de la ecuación lineal.
9	Generalizar	Reconoce que en cualquiera de las tres formas de la cuadrática, se debe de obtener tres resultados.
12	Interpretar	Sí logra interpretar el procedimiento de la factorización del *Derive*, para terminar el algoritmo en lápiz y papel.

Conclusión

De los tres alumnos, el alumno avanzado logra desarrollar la competencia para resolver el algoritmo de la cuadrática, utilizando al *Derive* solamente como verificador de resultados. Los alumnos insuficiente e intermedio aún no logran desarrollar la competencia necesaria para resolver, de forma autónoma, el algoritmo de la ecuación cuadrática.

7.2. ¿Cómo relaciona el alumno el nuevo SMS computacional con el SMS algebraico?

La simbología utilizada por el *Derive* es muy diversa en cuanto al sistema operativo del ordenador. Retomando las observaciones de Rojano (2001) sobre la importancia de la utilización de un **nuevo Sistema Matemáticos de Signos Computacionales**, por parte del profesor y alumnos, se tiene solamente la evidencia de tres alumnos que en el recuadro del procedimiento anotan la sintaxis del *Derive*.

Los símbolos que consideramos como relevantes son:

^ Acento circunflejo, que se utiliza para representar una potencia.

/ Diagonal, que nos indica la fracción o división.

* Asterisco, nos indica una multiplicación.

Observaciones realizadas durante las prácticas.

Al instalar el software del *Derive* en los procesadores, que tenían la versión de Windows 98, la simbología computacional se vio alterada por otra que la máquina utilizaba. En los procesadores, como son Windows XP, la simbología no se altera; en consecuencia, se realizó la aclaración con los alumnos para no alterar su descodificación del SMSC, con el que estaban familiarizados. También está la aplicación de palabras en inglés (Solve) en la pantalla, para indicar que la solución está en proceso, a pesar de que el software se encuentra en versión en español.

Reiteramos que existe la evidencia de tres alumnos que reinscribieron la sintaxis algebraica tal y como la presentaba el software, en el recuadro del procedimiento, (véase Figura 7.2).

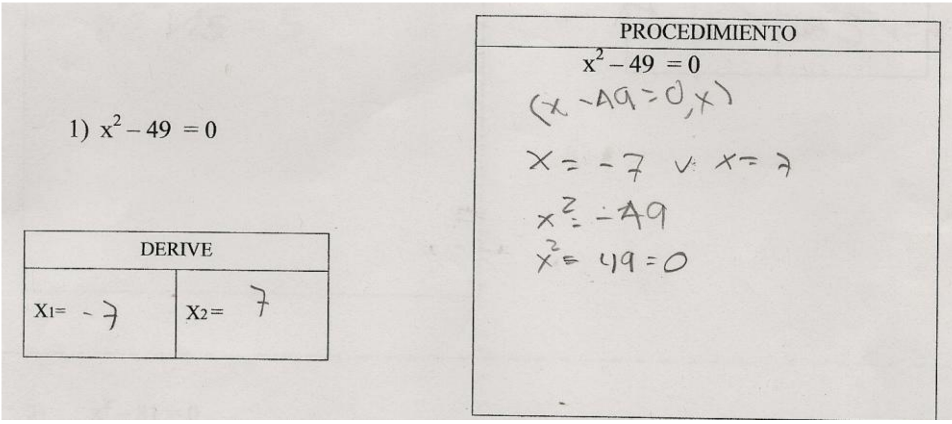


Figura 7.2

- Estas evidencias indican que los alumnos consideran los símbolos computacionales como parte del procedimiento y sintaxis para llegar a la resolución de la cuadrática. Si el profesor no es observador del **Sistema Matemático de Signos Computacionales (SMSC),** va a identificar el registro de los alumnos como error de sintaxis, a pesar de estar bien en la resolución del problema.

- También podemos concluir que, en general, existe una inmediata adaptación interna cognitiva a los nuevos SMSC y a su operatividad con los SMS establecidos, llevada a la práctica, sin ningún problema de interferencia en la semántica y sintaxis cada vez más abstractos para su uso y aplicación. Podemos justificar este hecho: en la práctica 1 y 2.

7.2.1. Conclusión en el estudio de casos de la segunda pregunta

¿Cómo relaciona el alumno el nuevo SMS computacional con el SMS algebraico?

Alumno Insuficiente

- La simbología del SMS computacional, presentada por el *Derive*, no logra asociarse con el SMS algebraico, sin llegar a una conclusión del resultado:

4	Comunicar	Sí logra recordar el SMS computacional, con el SMS algebraico; al igual que logra recordar la operatividad del programa para ingresar la ecuación.
7	Evaluar	El resultado que le proporciona el *Derive* no le indica nada, en comparación con el algoritmo de la cuadrática.

Alumno intermedio

- Evidencia que el resultado del programa lo toma como parte de la sintaxis del resultado:

P: Solamente en el botón de la palomita ………….abrimos el menú ………el método es algebraico……… bueno, ya te están dando dos valores. ¿Cuáles son esos dos valores? (3:12)

A: El de solve $x^2 – 36 = 0$ … x real ……….y el otro es $x = –6$ al cuadrado $x = 6$ (3:29)

P: Bueno, este símbolo significa (v) y solamente que así lo representa la máquina (3:33)..

A: ……hace un gesto de afirmación (3:34)

Alumno avanzado

Logra discriminar el SMS computacional del SMS algebraico, sin tomar en cuenta otra simbología presentada por el programa:

P: Ahí nos indica algo,………. ¿qué dice? (2:11)
A: Sí, …….. error de sintaxis (2:13)
P: ¿Sabes qué es sintaxis? (2:20)
A: ¡Eeh!, la forma en que está escrita la operación (2:22)
P: ¿Estará bien escrita o mal escrita? (2:30)
A: Mal (2:31)
P: ¿Estaremos trabajando con puros números o letras? (3:05)
A: Con los dos (3:06)
P: Entonces qué sería algebraico…..complejos o reales (3:08)
A: Reales (3:09)

Conclusión

En el caso de los alumnos Insuficientes intermedios se puede asegurar que los SMS computacionales son parte del proceso de la sintaxis del SMS algebraicos. A comparación, el alumno avanzado a esto lo consideró como "**La transferencia de sintaxis por discriminación inmediata de la SMS computacional a aun SMS algebraico**", para desarrollar el algoritmo sin alterar la sintaxis.

7.3 ¿Cómo el alumno percibe la información del *Derive* con el algoritmo de la cuadrática en lápiz y papel?

- En general, podemos interpretar la información recabada de las prácticas realizadas (por los alumnos) como un verificador de resultados solamente: en algunos casos, los jóvenes encuentran la resolución de los problemas sólo utilizando el *Derive*. En la siguiente tabla 8, los alumnos que no desarrollan el procedimiento y solamente encuentran el resultado por considerarlo fácil para ellos:

Prácticas	I T E M S					
1	$x^2 — 49 = 0$	$5x^2 — 45 = 0$	$6x^2 — 24 = 0$	$3x^2 — 75 = 0$	$x^2 — 81 = 0$	$2x^2 — 3 = 0$
Comparación		6:21	4:21	6:21	4:21	3:21
2	$x^2 — 2x = 0$	$4x^2 — 12x = 0$	$x^2 — 9x = 0$	$3x^2 + 9x = 0$	$x^2 – 5x = 0$	${}^2/_3\, x^2 + {}^4/_3 x = 0$
Comparación	1: 16	4:16	7:16	4:16	3:16	3:16
3	$x^2 — 14x+49 = 0$	$4x^2 — 12x+9=0$	$x^2+14x–15=0$	$x^2 – 5x–14= 0$	$x^2+9=6x$	$x^2 + 2x + 7 =0$
Comparación	7:17	6:17	7:17	3:17	10:17	4:17

Tabla. 8. Concentrado general de los ITEMS

- No existe algún caso en el cual el alumno utilice la aplicación de la factorización para auxiliarse y desarrollar el procedimiento y resolver la cuadrática. Podemos deducir que el pensamiento analítico y reflexivo del alumno aún se limita a un solo procedimiento.

- Tampoco existe la evidencia de algún alumno que utilizara el método gráfico para resolver la cuadrática. También deducimos la limitación del pensamiento analítico y reflexivo de los alumnos.

Conclusión.

La actitud de apatía por el tema de la cuadrática hace que el alumno muestre una colaboración con las indicaciones del profesor y compañeros de clase, realizando consultas sobre el desarrollo del procedimiento de la cuadrática, cuando la información recibida no es de su comprensión.

7.3.1. Disolución en el estudio de caso en la tercera pregunta

¿Cómo el alumno percibe la información del *Derive* con el algoritmo de la cuadrática en lápiz y papel?

Nivel Insuficiente

- Durante la entrevista, demuestra que el procedimiento lo realiza de forma mecánica y bajo un razonamiento; en consecuencia, la información del derive no le proporciona nada.

¿Crees que con el *Derive* te podría auxiliar para resolver una ecuación de segundo grado?

A: Sí.
P: ¿Recordaste el proceso?
A: Sí.
P: ¿Crees que te ayudaría mucho, poquito o nada?
A: Poquito.
P: ¿Qué necesitas para tener más dominio de la cuadrática?
A: …………[no hay respuesta]……
P: ¿Practicar más?
A: ……..[hace un gesto de afirmación]…….—Sí.

Nivel intermedio

- Muestra un interés por seguir utilizando el programa.

P: Ya para terminar, ¿Cómo crees que te puede ayudar el *Derive* para comprender el tema de la cuadrática? (7:08)

A: Sí me ayudaría para buscar el resultado de la ecuación…………antes de que lo resuelva, para tener una idea de cómo resolverlo……………sí, a eso me ayudaría...(7:23)

Nivel avanzado

- Muestra la intensión de primero, desarrollar el algoritmo por sus conocimiento, dejando al Derive en segundo término.

P: Ya para terminar, ¿Cómo crees que te puede ayudar el *Derive* para comprender el tema de la cuadrática? (10:10)

A: Pues…….creo que sí…….me ayudaría más: con lápiz y papel, porque habrá momentos en que no le pueda entender al *Derive*, entonces yo tendré que hacer las ecuaciones, o simplemente como una forma de estudiar puedo hacerlo primero, tomar las ecuaciones hacerlas y comprobar con el *Derive*…….(10:11)

Conclusión

En el caso de los alumnos Insuficiente e intermedio, se considera que la información del programa, en el caso de la aplicación de la factorización y el resultado de la ecuación, les ayudaría: por centrar la información, para comprender el tema de la cuadrática. Buscando el interés por el algoritmo y, en el caso del alumno avanzado, se toma al *Derive* como verificador de resultados, teniendo la iniciativa de resolver la cuadrática primero por sus conocimientos cognitivos.

7.4. Conclusiones con respecto a la reseña histórica de la cuadrática

Considerando que desde tiempos muy antiguos el estudio de la resolución de la cuadrática asido de gran interés ya sea en Oriente Medio (Babilonicos), Europa (griegos, italianos, etc.) y Oriente (arabes o chinos), aún en nuestros días es de suma importancia su enseñanza en el aula utilizando diversos métodos. Recordando que la enseñanza de la cuadrática en sus distintas épocas, era considerada exclusivamente para aquellos alumnos que podían desarrollar un gran intelecto para comprender el algoritmo que era suma mente complicado; hoy en día se tiene la gran posibilidad de poder aprender el algoritmo con distintos métodos, para el uso y aplicación en las distintas de ramas del conocimiento, inclusive en las últimas décadas de fin de siglo y principio de esta era, el uso de la Tic en la matemática, han provocado nuevas simbologías y sintaxis algebraica en la resolución de la cuadrática. Ante este panorama se debe de seguir realizando investigaciones sobre los posibles problemas cognitivos que puedan surgir, en las próximas generaciones de estudiantes consideradas como sociedades del conocimiento (UNESCO, 2005,p. 61), a cualquier nivel académico, en pro del pensamiento matemático .

7.5. Líneas de investigación

Considerando que la enseñanza de la cuadrática, en la mayoría de los centros educativos del país, se realiza en lápiz y papel, para desarrollar el algoritmo es de interés hacer entrevistas clínicas con los alumnos, enseñando con un software computacional como herramienta para la enseñanza del álgebra y estudiar las siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son los esquemas de información que se almacena en la memoria en el algoritmo de la cuadrática al utilizar lápiz y papel o un software matemático?
- ¿Por qué los alumnos considerados como avanzados toman, al software como verificador de resultado y no cómo herramienta de aprendizaje?
- ¿Conocer cuál, es el pensamiento matemático que se desarrolla con el uso de las operaciones en el SMSA?
- Con la aplicación del SMSC, ¿Cómo se desarrollara una nueva sintaxis en la resolución de la cuadrática?

Ante una nueva generación, que se desarrolla con el uso continuo de las Tecnologías de la Información (Tic) y la relación que esto tiene entre la psicología e inteligencia artificial (Adarraga, 1994), es de vital importancia seguir desarrollando investigaciones que permitan la transformación que se está dando en los alumnos de hoy en día.

Apéndice 1

PRUEBA DE EXPLORACIÓN

Nombre:____

Edad:____________ Fecha:_________________ Grado________________

I. INSTRUCCIONES: Realiza las siguientes operaciones indicadas de números con signo

$(-5) + (+8) =$

$(-10) - (-6) =$

$(9)\ (-3) =$

$(30) \div (-2) =$

$(-2)^3 =$

II. INSTRUCCIONES: Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números.

$\sqrt{16}$

$\sqrt{576}$

III.INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas en la parte de atrás de la hoja anotando el número de cada problema.

A las 6 de la mañana el termómetro marcó —5°C, a las 8 de la mañana marcó —7°C y a las 12 del día 2°C. ¿ Cuál es la suma de estas tres temperaturas?

Tere, después de depositar en el banco $35, tiene un saldo de $115, ¿Cuál era su saldo antes de hacer el depósito?

Jorge quiere comprar una bicicleta que cuesta $110, pero sólo tiene $35. Si el ahorra $5 por semana, ¿en cuántas semanas tendrá el dinero suficiente para comprar la bicicleta?

Gracias por tu valiosa cooperación y ayuda en este cuestionario

Apéndice 2

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Departamento de Matemática Educativa

Área Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicada

CUESTIONARIO 1

Nombre del alumno:____

Turno: __________ Grado:________________________ Fecha:___________________

I. INSTRUCCIONES: Realiza las operaciones indicadas de números con signo.

$a)(-4)+(-6)-(-2)=$

$b)-(-5)+(-8)-(14)=$

$c)(-11)+(-15)+(22)=$

II. INSTRUCCIONES: Anota el nombre de cada uno de los elementos del término algebraico dado.

$$-6x^2y^3$$ ______

III. INSTRUCCIONES: Reduce los términos semejantes en cada una de las expresiones algebraicas siguientes.

$a)x+2x=$

$b)7a^2-3a+a^2-6a=$

$c)2xy-3y+2x-y+4x+5xy=$

IV. INSTRUCCIONES: Calcula los productos y las operaciones indicadas

$a)3(x+4)=$

$b)-3\left[2x(4-1)\right]=$

$c)(x+5)(x-5)=$

INSTRUCCIONES:. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, sustituyendo el valor asignado a cada literal.

$a=2$ b=5 c=-3 d=-1 f=0

$7ab=$

$c^3=$

$c+d+f=$

INSTRUCCIONES: De las ecuaciones, indica cuales son verdaderas (V) o falsas (F) para los valores de las incógnitas.

$a)3x-4=8$ para $x=3$ ___________

$b)2+5x=12$ para $x=2$ ___________

c)$2x+5=3$ para $x=-1$ __________

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas en la parte de atrás de la hoja anotando el número de cada problema.

Tere, después de depositar en el banco $35, tiene un saldo de $115, ¿Cuál era su saldo antes de hacer el depósito?

b) Jorge quiere comprar una bicicleta que cuesta $110, pero sólo tiene $35. Si él ahorra $5 por semana, ¿en cuántas semanas tendrá el dinero suficiente para comprar la bicicleta?

Gracias por tu valiosa cooperación en este cuestionario

Apéndice 3

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemática Educativa
Área Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicada

CUESTIONARIO 2

Nombre del alumno:____

Turno: __________ Grado:________________________ Fecha:___________________

INSTRUCCIONES: Resuelve las ecuaciones de primer grado

$a) x+9=12$

$x=$ ________

$b) 4x-2=3x+8$

$x=$ _______

$c) 7x=49$

$x=$ ______

INSTRUCCIONES: Escribe la traducción al lenguaje algebraico de los enunciados escritos en lenguaje natural o común.

El doble de un número	
El triple del producto de dos números	
El cuadrado de un número, menos dos	
La mitad de un número, más tres	
Seis veces el cuadrado de un número más el doble de otro	

INSTRUCCIONES: Expresa mediante una ecuación los siguientes enunciados de problemas.

a) Si a un número “m” le sumo veinte, obtengo 405

b) La diferencia entre 301 y b es 207

c) La suma de tres números consecutivos es igual a 66.

INSTRUCCIONES: Calcula el producto de dos binomios.

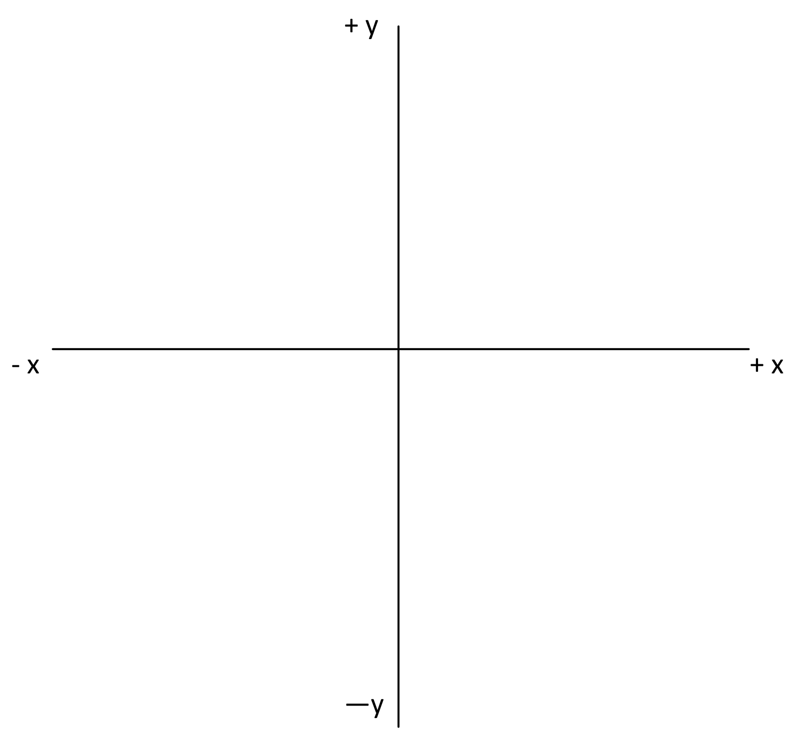
a) $(3m + n)(3m + m) =$

b) $(5a + 4)(5a - 8) =$

c) $(4x + y)(4x - y) =$

INSTRUCCIONES: Grafica las siguientes expresiones algebraicas.

a) $y = x + 3$



Gracias por tu valiosa cooperación en este cuestionario

Apéndice 4

PRACTICA 1

ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + c = 0$

Nombre:_____________________________________Fecha:_____________________Clave:_______ ____________

Edad:_________________________ Grado_________ Hora de inicio________________ Hora final ______________

INSTRUCCIONES: Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado y anota en el recuadro las soluciones del *Derive*, posteriormente en el recuadro de la derecha realiza el procedimiento en lápiz y papel, para obtener el valor de las incógnitas.

1) $x^2 - 49 = 0$

DERIVE	
X_1=	X_2=

PROCEDIMIENTO
$X^2 - 49 = 0$

2) $5x^2 - 45 = 0$

DERIVE	
X_1	X_2

PROCEDIMIENTO
$5X^2 - 45 = 0$

3) $6x^2—24=0$

DERIVE	
X_1	X_2

PROCEDIMIENTO
$6X^2—24=0$

I INSTRUCCIONES: Ahora primero desarrollar el procedimiento y después comprueba el resultado con el *Derive*.

PROCEDIMIENTO
$3X^2—75=0$

4) $3x^2$

DERIVE	
X_1	X_2

PROCEDIMIENTO
$X^2—81=0$

5) $x^2—81=0$

DERIVE	
X_1	X_2

PROCEDIMIENTO
$2x^2 — 3=0$

6) $2x^2 — 3=0$

DERIVE	
X_1	X_2

Apéndice 5

PRACTICA 2

ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + bx = 0$

Nombre:_______________________________________Fecha:______________________Clave:_______
____

Edad:__________________________ Grado_________ Hora de inicio_________________ Hora final
____

<u>INSTRUCCIONES</u>: Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado y anota en el recuadro las soluciones del *Derive*, posteriormente en el recuadro de la derecha realiza el procedimiento en lápiz y papel, para obtener el valor de las incógnitas.

1) $x^2 - 2x = 0$

DERIVE	
$X_1=$	$X_2=$

PROCEDIMIENTO
$X^2 - 2x = 0$

---

2) $4x^2 - 12x = 0$

DERIVE	
X_1	X_2

PROCEDIMIENTO
$4X^2 - 12x = 0$

3) $x^{2}-9x=0$

PROCEDIMIENTO
$X^{2}-9x=0$

DERIVE	
X_1	X_2

I INSTRUCCIONES: Ahora primero desarrollar el procedimiento y después comprueba el resultado con el *Derive*.

PROCEDIMIENTO
$3X^{2}-9x=0$

4) $3x^{2}-9x=0$

DERIVE	
X_1	X_2

PROCEDIMIENTO
$X^2 - 5x = 0$

5) $x^2 - 5x = 0$

DERIVE	
X_1	X_2

PROCEDIMIENTO
$\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x = 0$

6) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x = 0$

DERIVE	
X_1	X_2

Apéndice 6

PRACTICA 3

ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + bx+c = 0$

Nombre:_______________________________________Fecha:______________________Clave:_______
____

Edad:__________________________ Grado_________ Hora de inicio________________ Hora final
____

INSTRUCCIONES: Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado y anota en el recuadro las soluciones del *Derive*, posteriormente en el recuadro de la derecha realiza el procedimiento en lápiz y papel, para obtener el valor de las incógnitas.

1) $x^2 — 14x+49=0$

DERIVE	
X_1=	X_2=

PROCEDIMIENTO
$X^2—14x+49=0$

---

2) $4x^2 —12x+9=0$

DERIVE	
X_1	X_2

PROCEDIMIENTO
$4X^2—12x+9=0$

3) $x^2 — 14x — 15=0$

PROCEDIMIENTO
$X^2 — 14 — 45=0$

DERIVE	
X_1	X_2

I INSTRUCCIONES: Ahora primero desarrollar el procedimiento y después comprueba el resultado con el *Derive*.

PROCEDIMIENTO
$X^2 — 5x — 14=0$

4) $x^2 — 5x — 14=0$

DERIVE	
X_1	X_2

PROCEDIMIENTO
$X^2+9=6x$

5) $x^2+9=6x$

DERIVE	
X_1	X_2

PROCEDIMIENTO
$x^2+2x+7=0$

6) $x^2+2x+7=0$

DERIVE	
X_1	X_2

Apéndice 7

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Departamento de Matemática Educativa

Área Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicada

Guión de observación

Nombre:____Fecha:______________
__________Hora:______________________

No 1	HABILIDADES DEL PENSAMIENTO	Criterios		Capacidades mentales que permiten construir y organizar los conocimientos par aplicarlos con eficacia en diversas situaciones	Observaciones
		Si	No	Conceptualización	
1	Analizar			Dividir un todo en partes y separarlas para estudiarlas. Cómo desarrollar una actitud crítica, cómo razonar deductivamente, cómo evaluar, cómo evaluar ideas e hipótesis, etc.	
2	Calcular			Distingue que operación se esta realizando, suma resta, multiplicación, resta.	
3	Comparar			Utiliza criterios de semejanza con ejercicios anteriores	
4	Comunicar		.	Utiliza la simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información	
5	Clasificar			Relaciona el ejercicio con otras categorías de otro tipo de ecuaciones	
6	Deducir			Establece hipótesis	
7	Evaluar			Establece criterios de valor para expresar juicios	
8	Estimar			Puede calcular el valor numérico de la variable	
9	Generalizar			Es capaz de usar las variables para representar regularidades aritméticas, algebraicas o geométricas.	
10	Imaginar			Idear trazos, formas y transformaciones geométricas planas y espaciales. Los alumnos deben ser capaces de establecer	

				correspondencias entre desarrollos planos y los cuerpos, anticipar la superficie que se forma al cortar un cuerpo Idea trazos, formas y transformaciones geométricas planas	
11	Inferir			Utiliza información para plantear hipótesis y derivar conclusiones lógicas.	
12	Interpretar			Comprende la información determinada, asociándola con otros datos o situaciones y encontrar significados mas amplios.	
13	Inventar y crear			Puede plantear ejercicios nuevos con la misma forma de ecuaciones de primer grado y cuadrática	
14	Medir			Establece relaciones de medición: longitud, áreas, volumen	
15	Observar			Utiliza los sentidos para conocer un objeto	
16	Ordenar			Aplica las normas para acomodar grupo de datos.	
17	Organizar			Cómo establecer prioridades, cómo disponer de recursos,	
18	Recuperar			Reintegración de datos guardados en la memoria.	
19	Resolver			Aplica el conocimiento previo a nuevas situaciones no familiares	
20	Representar			Imagen, imitación o símbolo de algo.	
21	Representar Mentalmente			Creación de imágenes mentales o representaciones simbólicas para estimular la imaginación y la creatividad	
22	Sintetizar			Asociación de elementos, operaciones o conceptos para integrarlos en un todo significativo de modo breve	
23	Transferencia			Recuperación de conocimientos previos y de estrategias para aplicarlos a la solución de situaciones desconocidas	

Referencias bibliográficas

- Angera. Ma. T.:1985. *Manual de prácticas de observación,* Editorial Trillas, México, D.F.
- Adarraga, P.:1994. Psicología e Inteligencia Artificial. Editorial Trotta, S.A. España.
- Ausubel, P.,Novak, J.D.;Anesián, H.:2012, Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Trillas, México.
- Bortolussi, J.; Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T.; Quintero, R.: 2000, Libro *para el Maestro. Educación secundaria*, SEP, México.
- Blaxter, L.:2000, ¿Cómo se hace una investigación?, editorial gedisa, España
- Filloy, E. & Rojano, T.:1989, Solving equations: the transition from Arithmetic to Algebra, For the Learning of Mathematics, Vol.9, Num. 2, pp. 19-25, 1989.
- Filloy, E.:1999, *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*, Grupo editorial Iberoamérica, México, pp.3.
- García, M.:2008, Cas: estudio centrado en los profesores desde las dimensiones cognitiva, epistemológica y didáctica, Tesis de Doctor en Ciencias, CINVESTAV-IPN, MÉXICO, pp. 123-127
- http://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_(matem%C3%A1tica)#Historia
- http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/icmi-algebra/.: (2001).*The Future of the Teaching and Lerning of Algebra, The International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)*, pp.4. Tomada el día 31 de Enero del 2010.
- http://www.math.tamu.edu/~dallen/history/1000bc/1000bc.html
- Huesca, M.B.:2007, *Resolución de Problemas Verbales Aritméticos-Algebraicos con el Uso del CAS (Computer Algebra Systems)* como Manipulador Simbólico Estudio Clínico sobre la Relación Sintaxis-Semántica Algebraicas, Tesis de Maestría en Ciencias. CINVESTAV-IPN. México, pp.246.
- Martínez A.:2008, "*Significados Personales de la ecuación de segundo grado en la formación inicial de profesores de matemáticas",* Universidad Pedagógica Experimental Libertador Maracay, Venezuela.

- Martínez, M.:2009 "*De la modelación concreta a la sintaxis algebraica: Estudio con alumnos de secundaria sobre la resolución de ecuaciones lineales utilizando el modelo virtual de la balanza*", CINVESTAV-IPN pp. 118.
- Maza, C.: Las matemáticas de la Antigüedad y su contexto histórico. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla. pp. 2 Capítulo 3 2000 (http://www.sectormatematica.cl/Regalos2/china.PDF)
- Meece, J.:2000, *Desarrollo del niño y del adolescente*, compendio para educadores, Mc Graw Hill, México.
- Monzó, R.:2006, *CONCEPTO DE COMPETENCIA EN LA EVALUACIÓN EDUCATIVA*, Publicaciones Cruz O., S. A., México, p. 33.
- Newell & Simon .:1972. *Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall*.
- Oaxaca J.Guadalupe.:2000, El papel que desempeña la calculadora en la adquisición de conceptos matemáticos en alumnos de segundo grado de secundaria, Tesis de Maestría en Ciencias, CINVESTAV-IPN, México, pp. (sánchez, 2000)
- Perrenoud, P.:2006, *CONSTRUIR COMPETENCIAS Desde la Escuela*, J.C. SÁEZ editor, Chile, p.p. 23-25.
- Piaget, J.:1987, La formación del símbolo en el niño, Fondo de cultura económica, México.
- Sánchez, M.:1985, Desarrollo de habilidades del pensamiento: Procesos básicos del pensamiento, Trillas, México.
- Sánchez, S.:1995, DICIONARIO DE LAS CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, Santillana, México.
- Semenov, A.:2005, *"LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN EN LA ENSEÑANZA",* UNESCO, Uruguay, p.p. 197-1999.
- SEP.: 2006 , "Reforma de la Educación Secundaria, Fundamentación Curricular, Matemáticas", México. pp. 14.
- SEP.:2006, *Matemáticas, Educación Básica. Secundaria Programas de Estudio* 2006, México. pp.7
- SEP.:2000, Libro del maestro: Educación secundaria, México. p.p. 12
- SEP.:2001, La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria: Lecturas, México, p. 100

- Shaffer, D.:2000, *Psicología del desarrollo, Infancia y Adolescencia*, INTERNARIONAL THONSON EDITORES, México, p.p. 352-354.
- Tobón, S.:2006, ASPECTOS BÁSICOS DE LA FORMACIÓN BASADOS EN COMPETENCIAS, ECOE, Bogotá, Colombia.
- UNESCO.:2005, *Hacia las sociedades del conocimiento*, Impreso por Jouve, Mayene, France.
- Zimbardo, P.:1989, *Psicología y vida*, Editorial Trillas, México, p.p. 105-106.