CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Departamento de Matemática Educativa

Unidad Zacatenco

ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: ÉNFASIS EN EL USO DE RECURSOS

Tesis

Que para obtener el grado de

Maestra en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Presenta:

Laura Angélica Albarrán Iturbe

Director de la tesis:

Dr. José Guzmán Hernández

México, Distrito Federal Enero de 2014

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) el apoyo financiero recibido a través de la beca otorgada para estudiar este posgrado en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Número de registro: 255224

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. José Guzmán Hernández quien me asesoró en este trabajo, mi más sincero agradecimiento por su apoyo a lo largo del proceso de construcción de esta investigación, por su orientación, su tiempo y su disponibilidad.

Agradezco también a mis sinodales, la Dra. Marta Elena Valdemoros Álvarez y la Dra. Martha Leticia García por su tiempo y sus valiosas observaciones.

A los profesores que enriquecieron la experiencia de trabajar en el Departamento de Matemática Educativa: al Dr. Gonzalo Zubieta, al Dr. Luis Moreno y al Dr. Ernesto Sánchez.

También quiero agradecer a Adriana Parra por todo su apoyo y su calidez humana, y a mis compañeros con los que compartimos gratos y estresantes momentos: David Páez, Elda, Eugenia, Miguel, Blanca, Rocío, Vicky, Freddy, Hugo, Alfredo, Mago y Arely.

Finalmente quiero plasmar mi agradecimiento a mi familia y a mis amigos que me ha apoyado en todo momento. Gracias por su confianza y cariño.

A los tres amores de mi vida que me han acompañado en cada momento, este trabajo es el culmen de un proceso que ha tomado tres años, y significa un paso más en la consecución de mis sueños y expectativas.

DEDICATORIAS

Para Hugo,

Ana Caro y Leonardo.

.

RESUMEN

El crecimiento de la investigación, sobre la práctica docente en las dos últimas décadas (c.f., Adler, 2010; Ball, 2000; Ball et al., 2008; Chevallard, 1999; Gueudet &Trouche, 2010, entre otros) muestra la importancia de conocer y comprender la problemática relacionada con los conocimientos didácticos y matemáticos que ponen en juego [acciones] los profesores en su práctica docente en el salón de clases, y el impacto que estos tipos de conocimientos [didácticos y matemáticos] tienen en el aprendizaje de sus estudiantes.

En la presente investigación se reporta un estudio de caso; en particular, ésta está centrada en la práctica de un profesor de matemáticas de tercer grado de secundaria. En este estudio de caso se pone énfasis en los recursos que usó el profesor para resolver un problema que involucra en su solución el uso de funciones no lineales; en particular, la función cuadrática, tanto de su representación gráfica como simbólica (problema tomado del libro de texto: Arriaga, Benítez & Cortes, 2008). Los recursos utilizados por el profesor de matemáticas en su práctica, y que son analizados en este estudio son: el libro de texto (ibídem), el plan de estudios de la SEP (2006), su conocimiento didáctico y matemático y la interacción con sus estudiantes en su práctica, al resolver este tipo de problema.

Para lograr los objetivos de esta investigación fue delimitado el método de investigación [Capítulo 3 de esta tesis]. En este método [Metodología] el marco conceptual adoptado en la presente investigación sobresalen conceptos de la teoría: *Aproximación Documental de lo Didáctico* propuesta Gueudet y Trouche (2009, 2010). Tal como es planteado por sus autores, esta teoría es una extensión de la Aproximación instrumental propuesta por Vérillon y Rabardel (1995), cuyos conceptos centrales son: artefacto, instrumento así como la génesis instrumental en la que subyacen los conceptos de: instrumentación e instrumentalización asociados con el concepto de esquema.

Así, en la *Aproximación Documental de lo Didáctico* propuesta Gueudet y Trouche (ibídem) son centrales los conceptos de: génesis documental [de manera similar a como es entendida la génesis instrumental en la Aproximación instrumental], el trabajo documental [de manera similar a como son entendidas, en la Aproximación instrumental, las acciones

que permiten transformar un artefacto en instrumento (mediante acciones llevadas a cabo por un usuario de artefactos) al llevar a cabo una tarea determinada] y la relación dialéctica entre recurso y documento [similar a los procesos de instrumentalización e instrumentación, en la Aproximación instrumental, necesarios para transformar un artefacto en instrumento].

Esta investigación es de corte cualitativo, la recopilación de los datos se llevó a cabo por medio de videograbaciones de las sesiones de la práctica del profesor. Los resultados de este trabajo muestran la falta de recursos matemáticos y didácticos del profesor para dar solución al problema discutido en el salón de clases; sin embargo, también jugaron un rol negativo los recursos físicos disponibles (libro de texto y programa de estudios oficiales) en los diversos tipos de errores que sobresalen en la práctica del profesor reportado en este estudio.

ABSTRACT

The growth of the research on the teaching practice in the last two decades (c.f., Adler, 2010;) Ball, 2000; Ball et al., 2008; Chevallard, 1999; Gueudet &Trouche, 2010, among others) demonstrates the importance of knowing and understanding the issues related to the teaching and mathematical knowledge which bring into play [actions] professors in their teaching in the classroom practice, and the impact of these types of knowledge [teaching and mathematical] in the learning of their students.

In the present study reports a case study; in particular, this is focused on the practice of a third grade high school math teacher. In this case study emphasis is on resources that the teacher used to solve a problem that involves your solution using non-linear functions; in particular, the quadratic function, both its graphical representation as symbolic (taken from the textbook problem: Arriaga, Benítez & cuts, 2008). The resources used by the Professor of mathematics in their practice, and which are analyzed in this study are: the text book (ibid), the curriculum of the SEP (2006), his teaching and mathematical knowledge and interaction with their students in their practice, to solve this kind of problem.

To achieve the objectives of this research was defined the method of research [Chapter 3 of this thesis]. In this method [methodology] the conceptual framework adopted in this research are concepts of the theory: approach documentary of the didactic proposal Gueudet and Trouche (2009, 2010). As it is raised by the authors, this theory is an extension of the instrument approach proposed by Vérillon and Rabardel (1995), whose central concepts are: artifact, instrument as well as the instrumental genesis that underlie concepts: the concept of schema-related instrumentation and instrumentalization.

Thus, in the documentary approach of the didactic proposal Gueudet and Trouche (ibid.) are central concepts of: documentary genesis [Similarly to as instrumental genesis in the instrument approach is understood], documentary work [Similarly to as they are understood, in the instrumental approach, actions that enable you to transform an artifact to instrument (through actions carried out by a user of artifacts) to carry out a particular task] and the dialectical relationship between resource and document [similar to the

instrumentalization and instrumentation, in the instrument approach, processes necessary to transform an artifact to instrument].

This research is qualitative cutting, the data collection was carried out by means of videotape recordings of the sessions of the practice of the teacher. The results of this work show the lack of mathematical and educational resources of the teacher to give solution to the problem discussed in the lounge of sorts; however, also played a negative role physical resources (text book and official curriculum) in the different types of errors that excel in the practice of the teacher reported in this study.

ÍNDICE DE CONTENIDO

Resumen **V**

Abstract **VII**

Introducción **XIII**

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Introducción **1**

1.2. Antecedentes generales sobre la problemática **3**

1.2.1. Enfoques teóricos sobre la práctica del profesor **4**

1.2.1.1. Introducción **4**

1.2.1.2. Teoría Antropológica de lo Didáctico **5**

1.2.1.3. Teoría apoyada en el uso de recursos **7**

1.3. Problema de investigación **8**

1.4. Preguntas de investigación **9**

1.5. Objetivos **10**

1.6. Importancia del estudio **10**

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1. Introducción **12**

2.2. Recursos **12**

2.3. Conceptualización de los recursos **14**

2.4. Aproximación Documental de lo Didáctico **18**

2.4.1. Antecedentes: Aproximación Instrumental **18**

2.4.2. Aproximación documental **19**

CAPÍTULO 3

MÉTODO

3.1. Introducción **24**

3.2. Tipo de estudio **24**

3.3. Recopilación de datos **26**

3.4. Participantes en la investigación **26**

3.5. Contenido matemático del estudio **27**

3.5.1. Programa de estudio de matemáticas, Tercer grado **27**

3.6. Contenido curricular **30**

3.7. Instrumentos utilizados en la recolección de información **31**

3*.7.1. Actividad implementada en la clase* **31**

3.8. Análisis del problema y de su solución **33**

3.8.1. Primera solución **34**

3.8.2. Segunda solución **35**

3.8.3. Gráfica de la función cuadrática **37**

3.8.4. Conclusión de la Actividad **38**

3.9. Comentarios **39**

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1. Introducción **40**

4.2. Análisis matemático y didáctico de los recursos usados por el profesor **40**

4.2.1. Programa de estudio (SEP, 2006) **40**

4.2.2. Libro de texto **43**

4.3. Análisis de la práctica del profesor en el salón de clases **46**

4.3.1. Estructura de los episodios **46**

4.3.2. Primer episodio: inicio de la Actividad **47**

4.3.2.1. Análisis del primer episodio **48**

4.3.3. Segundo episodio: exposición de los estudiantes **49**

4.3.3.1. Análisis del segundo episodio **52**

4.3.4. Tercer episodio: intervención del profesor **56**

4.3.4.1. Análisis del tercer episodio **58**

4.3.5. Cuarto episodio: explicación del profesor y solución final del Problema 2 **60**

4.3.5.1. Análisis del cuarto episodio **70**

4.3.6. Quinto episodio: conclusión por parte del profesor **73**

4.3.6.1. Análisis del quinto episodio **84**

4.3.7. Recapitulación en torno a los recursos utilizados por el profesor en su práctica docente **88**

4.3.7.1. Recursos físicos: Programa de estudios y libro de texto **88**

4.3.7.2. Recursos matemáticos y didácticos usados por el profesor **90**

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

5.1. Introducción **92**

5.2. Respecto a los objetivos de investigación **92**

5.2.1. Los recursos didácticos **93**

5.2.2. Los recursos matemáticos **94**

5.3. Respuestas a las preguntas de investigación **94**

5.4. Investigaciones futuras **99**

Referencias bibliográficas **101**

INTRODUCCIÓN

La práctica del docente de matemáticas, entendida ésta como el conjunto de actividades que él o ella llevan a cabo en el salón de clase, desde la planeación, la selección de métodos de enseñanza y estrategias de aprendizaje que potencialmente pueden emerger en los alumnos en el salón de clases, la resolución de problemas, hasta la evaluación con todo lo que ésta implica, ha sido fuertemente cuestionada por diversas investigaciones y por la sociedad en general, en función de los resultados de los procesos educativos. Dicho de otra forma, se discute sobre la calidad de la práctica docente y de la educación, entendiendo a esta última como los resultados obtenidos entre lo establecido en los propósitos del sistema educativo nacional y el logro de la población estudiantil.

En general, la práctica del docente ha sido estudiada por corrientes teóricas y reformas curriculares que promueven nuevas formas sobre cómo llevar a cabo dicha práctica. La mayor parte de los temas de investigación relacionados con la enseñanza de las matemáticas, provienen sin lugar a dudas de la práctica del profesor, ya que es en el salón de clases donde los profesores se enfrentan a una gran diversidad de factores y dificultades que obstaculizan y modifican constantemente dicha práctica.

Debido a que el profesor juega un papel importante en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, tal como ha sido reportado en diversas investigaciones (e.g., Shulman, 1986, Adler, 2000, Gueudet & Trouche, 2009, 2010, entre otros), la presente investigación pretende contribuir al campo educativo en cuanto a buscar explicaciones plausibles que sustenten el porqué un gran número de profesores fracasan en su práctica docente. Para lograr lo antes mencionado, el propósito es analizar la práctica del profesor en el salón de clases al interactuar con los estudiantes en torno a la adquisición de conocimiento matemático, relacionado con el estudio de funciones no lineales; más precisamente, sobre la función cuadrática. Respecto a la problemática de la enseñanza de las matemáticas, referida a la práctica del profesor, han surgido diferentes propuestas por parte de los investigadores educativos, quienes la han abordado desde distintas perspectivas teóricas. En esta investigación se analiza esta práctica desde la perspectiva de los recursos.

En el Capítulo 1, se presenta el problema de investigación, sus antecedentes, y se justifica su importancia, también se plantean los objetivos que se pretenden alcanzar así como las preguntas de investigación en torno a las cuales gira ésta.

En el Capítulo 2, se describe marco conceptual adoptado en esta investigación, y que permite analizar los datos obtenidos en el transcurso de ésta; se discuten conceptos teóricos asociados a la Aproximación documental de lo didáctico, como: recurso, documento, trabajo documental y génesis documental, entre otros

En el Capítulo 3, se justifica el porqué del método utilizado en la presente investigación para el análisis de los datos. En este capítulo sobresale la descripción de los participantes, la forma de trabajo, la recolección de los datos, el análisis de los recursos físicos disponibles por el profesor participante en este estudio. También, es discutida en este capítulo la solución del problema que el profesor discute con sus alumnos en el salón de clases, y que es parte central del análisis de la práctica de éste.

En el Capítulo 4, son analizados los datos obtenidos en las sesiones de trabajo del profesor. Del mismo modo, el análisis llevado a cabo con los datos obtenidos permite discutir los resultados y sus posibles implicaciones, tomando en cuenta el marco conceptual discutido en el Capítulo 2 de esta tesis.

En el Capítulo 5, se presentan las conclusiones a manera de síntesis de los resultados obtenidos en este trabajo. Se mencionan los resultados del estudio desde el punto de vista de los objetivos de esta investigación y se da respuesta a las preguntas de ésta, basándose en el marco conceptual adoptado en este estudio. También, se plantean otros posibles temas de investigación que se desprenden de ésta. Al final, se incluye la bibliografía en la que se apoyó esta investigación.

CAPÍTULO1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

Descripción de la problemática en nuestro país: En 1993 la educación secundaria en nuestro país fue declarada obligatoria (Educación Básica, Secundaria, Plan de Estudios, 2006, p.8).En nuestro medio educativo, desde (1993) las autoridades educativas de esa época se han dado a la tarea de impulsar reformas curriculares; en particular, la de 1993 puso énfasis en: "desarrollar habilidades, promover actitudes positivas y adquirir conocimientos matemáticos" (Libro para el maestro, p. 12). Para apoyar esta reforma curricular, las autoridades educativas (Secretaría de Educación Pública, SEP), dieron impulso a programas que permitieron apoyar la actualización de los maestros; también fueron llevadas a cabo acciones de mejoramiento de la dinámica escolar, tomando como base el planteamiento y resolución de problemas agrupados en cinco contenidos matemáticos: "Aritmética, Álgebra, Geometría y trigonometría (en tercer grado) y nociones de probabilidad" (ibídem, p, 14).

La reforma curricular de 2006 tomó como base todo el trabajo elaborado en la reforma de 1993. Además de rescatar la parte positiva de la reforma de 1993, en la de 2006 es notorio que las autoridades educativas dieron impulso a diversos mecanismos que promovieron la participación de maestros y directivos de las escuelas secundarias, de equipos técnicos estatales responsables de coordinar el nivel, y de especialistas en los contenidos de las diversas asignaturas que conforman el plan de estudios. Para justificar y apoyar la reforma curricular de 2006, se consideró importante dar continuidad a los planteamientos establecidos en la reforma curricular de 1993. Más precisamente, en esta nueva reforma [la de 2006] se resalta que:

> El Plan de Estudios de 1993 para la educación secundaria fue el resultado de un proceso de reforma global realizado cuando este nivel educativo se transformó en el último tramo de la educación básica obligatoria y se propuso establecer la congruencia y continuidad con el aprendizaje obtenido en la primaria. Los cambios de enfoque plasmados en los programas de estudio fueron, sin duda, una de las aportaciones más importantes de dicha reforma curricular. Estos enfoques centran la atención en las ideas y experiencias previas del estudiante, y se orientan a propiciar la reflexión, la comprensión, el trabajo en equipo y el fortalecimiento de actitudes para intervenir en una sociedad democrática y participativa. La gran apuesta de tales modificaciones fue reorientar la práctica educativa para que el desarrollo de capacidades y competencias cobrase primacía sobre la visión predominantemente memorística e informativa del aprendizaje. (Educación Básica, Secundaria, Plan de Estudios, 2006, p.17)

A pesar del cambio de enfoque, y del énfasis en lo básico de los conocimientos, así como en el desarrollo de habilidades y actitudes, propuesto en la reforma curricular de 2006, no se han obtenido los resultados esperados, ya que la gran cantidad de contenidos de los programas de estudio de las diferentes asignaturas han impedido la puesta en práctica de los enfoques pedagógicos introducidos desde 1993, pilares fundamentales de la nueva reforma curricular [de 2006, ahora se cuenta con la de 2011, cuyos cambios de enfoque y contenido de esta última no distan mucho de la reforma de 2006].

Una dificultad recurrente, detectada en las distintas reformas curriculares propuestas de 1993 a la fecha, es la operatividad de éstas. Los contenidos matemáticos que los profesores deben enseñar a sus alumnos, siguiendo el enfoque didáctico plasmado en las reformas curriculares [como las de 2006 y 2011] generan dificultades de enseñanza en la práctica del profesor de matemáticas. El origen de estas dificultades puede ser explicado a partir de diversas causas: por ejemplo, no es claro para el profesor cómo integrar los contenidos matemáticos a enseñar; en el programa de estudios, los contenidos matemáticos están *fragmentados*, y queda "casi a criterio" de cada profesor cómo abordar esos contenidos, aun contando con el libro de texto y los Planes y Programas de Estudio de matemáticas (SEP, 2006). Así, tanto para el profesor de la asignatura como para los alumnos, el trabajo en el salón de clases se da en función de la habilidad que tengan para

reconocer dicha fragmentación y el alcance de la integración de los contenidos. En la reforma curricular de 2006 se menciona:

> Así, el desafío de aplicar los enfoques propuestos en el Plan y los Programas de Estudio de 1993 sigue vigente. Contar con programas en los que se explicita lo que se espera que los alumnos aprendan, así como con propuestas claras de integración entre las asignaturas favorecerá la aplicación del enfoque y, lo que es más importante, contribuirá a que los alumnos comprendan y apliquen los conocimientos adquiridos.(Educación Básica, Secundaria, Plan de Estudios, 2006, p.18)

A pesar de las dificultades que conlleva la puesta en práctica de reformas curriculares, es loable reconocer que la de 1993; específicamente, lo referido al estudio de las matemáticas, marcó una diferencia importante respecto a las anteriores, porque sentaron las bases para dar un nuevo rumbo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, esta reforma mostró no ser tan suficiente [o eficiente] para obtener resultados favorables en el aprendizaje de esta disciplina, no por lo que en ella se propone y por los materiales de apoyo (e.g., Libro para el maestro, 1994/2001), sino por la problemática surgida a raíz de una falta de preparación matemática de los docentes, quienes serían los responsables de llevarla a la práctica. Es decir, no basta diseñar una buena propuesta de reforma curricular, de elaborar buenos ejemplos de problemas sugeridos a profesores, etc., sino tener presente qué tipo de preparación matemática (fuerte o débil) tienen los profesores encargados de llevarla a la práctica.

1.2. ANTECEDENTES GENERALES SOBRE LA PROBLEMÁTICA

Desde hace ya varias décadas, en educación matemática, se ha reconocido que en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas intervienen tres componentes básicos: el profesor, el estudiante y el conocimiento, conocidos en el medio educativo como triángulo didáctico (Steinbring, 2005). Desde inicios de las años 70, una línea de trabajo en educación matemática se ha centrado en investigaciones sobre la problemática del estudiante en torno al aprendizaje de las matemáticas (e.g., errores conceptuales y de ejecución, desarrollo es estrategias y de heurísticas, etc.).

La problemática antes descrita no ha sido agotada en términos de "olvidar" aquellas dificultades inherentes en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes en ambientes normales de clase; sin embargo, en la actualidad han entrado en escena el uso de herramientas computacionales para evitar o sobrepasar aquellas dificultades de aprendizaje detectadas en ambientes de papel-y-lápiz. En años recientes (desde inicios del año 2000), se ha puesto atención especial a la investigación de la práctica del profesor de matemáticas, considerándola como factor esencial en relación con la enseñanza.

En la actualidad es posible encontrar artículos de investigación (e.g., Ball, 2000; Ball et al., 2008, entre otros) en revistas especializadas o capítulos de libros en los que es discutida la problemática relacionada, ya sea con el futuro profesor de matemáticas o de aquel que está activo en sus salones de clase. Sobre el incremento de las investigaciones, cuyo eje de discusión es la práctica del profesor, Straesser (2007) comenta que las investigaciones en educación matemática comenzaron a centrar su interés en el análisis de la práctica del profesor de matemáticas a finales del siglo XX; dejando de lado, aunque no completamente, las investigaciones centradas en el alumno.

1.2.1. Enfoques teóricos sobre la práctica del profesor

1.2.1.1. Introducción

Respecto a la problemática de la enseñanza de las matemáticas, referida a la práctica del profesor, han surgido diferentes propuestas, por parte de los investigadores educativos, quienes la han abordado desde distintas perspectivas teóricas y pragmáticas. Una de las primeras propuestas de investigación ï sobre el conocimiento del profesor y la influencia que éste tiene en su prácticaï es la de Schulman (1986) quien discute cómo los conocimientos del profesor influyen en su práctica docente. Esta investigadora enfoca su trabajo de investigación en tres tipos de conocimientos: el conocimiento del contenido a enseñar (*Content Knowledge*); el conocimiento didáctico de ese contenido (*Pedagogical* Content *Knowledge*) y el conocimiento del currículo (*Curricular Knowledge*) (pp. 9-10).

En otro de sus artículos, Shulman (1987) amplía la lista dada inicialmente por ella ï sobre los conocimientos que debe tener el profesorï , de manera que su práctica sea eficiente. Los nuevos tipos de conocimiento que esta autora menciona, son: el conocimiento

pedagógico general; el conocimiento de los estudiantes y sus características; el conocimiento sobre los contextos de la educación; el conocimiento sobre los fines de la educación, sus propósitos y valores (p. 8).

Posterior a los trabajos de Shulman (1986, 1987) diversos investigadores en educación continuaron y ampliaron la propuesta de Shulman. Tratar de elaborar una lista exhaustiva de todos aquellos trabajos relacionados con la práctica del profesor es difícil de lograr de manera personal; más bien sería un trabajo de equipo; sin embargo, da Ponte y Chapman (2006) discuten diversas líneas de investigación sobre la práctica del profesor de matemáticas disponibles hasta ese año. En años recientes, es posible encontrar trabajos de investigación en los que se discute la práctica del profesor. Por ejemplo, Wilkins (2008) señala que la práctica del docente de matemáticas está estrechamente relacionada con el conocimiento matemático que éste posee, además de las actitudes y las creencias que él tiene sobre la enseñanza de las matemáticas, y de las matemáticas mismas como ciencia. De acuerdo con este autor, el conocimiento matemático, las actitudes y las creencias del profesor, tienen una fuerte influencia en su práctica docente; punto de vista compartido por diversos investigadores en esta problemática (c.f., Ball et al., 2008).

Un poco antes de Da Ponte y Chapman (2006), Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna (2005) llevaron a cabo una revisión exhaustiva sobre las publicaciones referentes a la práctica del profesor. De manera puntual, estos autores enfocaron su trabajo en la revisión de los distintos temas de investigación surgidos en relación con la forma en la que el profesor de matemáticas aprende de su práctica docente.

1.2.1.2. Teoría Antropológica de lo Didáctico

Usando la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Chevallard (1999) analiza y discute la práctica del profesor. La postura antropológica de Chevallard considera, como objeto de estudio, al profesor y no sólo las actividades de enseñanza y de aprendizaje que él o ella llevan a cabo en el salón de clases. De acuerdo con este autor, su postura antropológica: ñsitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio de las matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones socialesò (Chevallard, 1999, p. 221).

De acuerdo con Chevallard, la TAD está basada en el postulado de que toda actividad humana puede describirse con un modelo único, definido como praxeología [*praxéologie* de *praxis*, disciplina encargada de analizar la acción humana].La práctica del profesor de matemáticas en servicio es estudiada por la TAD de manera puntual, tomando en cuenta conceptos fundamentales de esta teoría, los cuales son discutidos en esta sección. Antes de entrar en detalle en la propuesta teórica de Chevallard (1999), se puede decir, de acuerdo con este autor, que las prácticas del profesor son explicadas y estudiadas a partir de las praxeologías u organizaciones matemáticas y didácticas. Más precisamente, para este autor, en la práctica del profesor subyacen dos tipos de praxeologías: la matemática y la didáctica. En seguida, son discutidos los componentes teóricos básicos de la TAD.

De inicio, se afirma, de acuerdo con Chevallard, que la praxeología es la ciencia que estudia la estructura lógica de la acción humana (praxis). En el contexto de la enseñanza; el conocimiento surge o se genera a partir de la práctica. La praxeología constituye la herramienta fundamental para modelar cualquier actividad asociada con el profesor de matemáticas y con las matemáticas mismas. En la TAD se identifican cuatro conceptos; los cuales son imprescindibles para construir cualquier tipo de praxeología, ya sea didáctica o matemática: la *tarea* (*t*) y el *tipo de tarea*s (*T*), la *técnica* (***Ű***, la *tecnología* (***É***) y La *teoría* (***Ū***).

Chevallard afirma que *la tarea* (*t*) es definida, regularmente, usando verbos. Por ejemplo, *resuelve* la ecuación cuadrática: $x^2 - 3x + 2 = 0$. El verbo "resolver", así como otros similares, puede ser usado para plantear otro *tipo de tarea* (*T*), y no sólo asociada con la solución de ecuaciones cuadráticas. La *técnica* (***Ű***) es la forma de llevar a cabo una tarea determinada. Chevallard afirma que la técnica de debe ser pensada de forma algorítmica, aunque regularmente, en matemáticas las técnicas institucionales son pensadas (y a veces aprendidas) como algoritmos. La *tecnología* (***É***) es aquella teoría que explica porqué una determinada técnica es correcta o no. De hecho, afirma Chevallard, no hay técnica sin algún germen de tecnología. Finalmente, la *teoría* (***Ū***) es aquella que explica el porqué de la tecnología; más precisamente, de acuerdo con Chevallard, la teoría es la tecnología de la tecnología.

En la TAD propuesta por Chevallard son mencionados seis momentos, para estudiar la práctica del profesor a través de lo que él llama *Los momentos didácticos* [cursivas en el original], estos *momentos* son:

> a) El primer momento o *primer encuentro* [ocurre] con la organización *O* que está en juego, b) El *segundo momento* es el de la *exploración* del tipo de tareas *Ti* y de la *elaboración* de una *técnica* t*i* relativa a este tipo de tareas, c) El *tercer momento* del estudio es el de la *constitución del entorno tecnológico-teórico*, d) El *cuarto momento* es el del *trabajo de la técnica*, e) El *quinto momento* es el de la institucionalización y f) El s*exto momento* es el de la *evaluación*. (pp. 22-25)

La propuesta de Chevallard, para analizar la práctica del profesor, es una teoría *robusta* y adecuada; sin embargo, ésta no satisface los requerimientos teóricos pretendidos en la presente investigación; por ello, se decidió hacer uso de otra teoría, la cual es explicitada someramente en el siguiente parágrafo, y más detenidamente en el Capítulo 2 de esta tesis.

1.2.1.3. Teoría apoyada en el uso de recursos

Otro enfoque teórico usado para explicar aquello que ocurre en la práctica del profesor es el estudio de los recursos utilizados por él en su práctica docente. Un trabajo significativo sobre este enfoque es el llevado a cabo por Adler (2000) quien plantea que los recursos inherentes en su práctica; por ejemplo, su conocimiento matemático sobre los conceptos o técnicas discutidos en su salón de clases y recursos físicos que provee la escuela (e.g., libros de texto, programas de estudio, pizarrón, etc.), van más allá de los recursos básicos entendidos como tales en el ambiente escolar. En un enfoque integral de los recursos, se incluyen los convencionales: evaluaciones, libros, material didáctico, tamaño de la clase, tiempo asignado; los recursos personales: la experiencia, la habilidad y los conocimientos del profesor; el ambiente y los recursos sociales; Instrucción proporcionada por el Estado, normas académicas, el liderazgo profesional y el apoyo a la familia.

Sobre el estudio de los recursos, Gueudet y Trouche (2009) plantean que los recursos no son solamente los materiales físicos que se utilizan en la enseñanza de las matemáticas: libros de texto, software educativo (e.g., Cabri-Geometry, Geogebra, entre

otros), hojas de trabajo, etc.; sino que además de estos recursos, hay otros factores que influyen en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como: los conocimientos del profesor, las reflexiones que él hace en el salón de clase, las discusiones que el profesor tiene con los estudiantes o con otros profesores, las actividades que él prepara para desarrollar en su clase, etc.

Gueudet y Trouche (2009) también señalan que los recursos por sí solos no impactan en la práctica del profesor; para que ocurran cambios significativos en su práctica es necesario que él o ella lleven a cabo un trabajo documental; que de acuerdo con estos autores, éste es el que da origen a la *génesis documental*, concepto inspirado en la Aproximación instrumental, propuesta por Vérillon y Rabardel (1995). Gueudet y Trouche afirman que el *trabajo documental*ï llevado a cabo por el profesor, a partir de sus recursos disponiblesï es fundamental en la transformación del recurso en documento. De forma resumida, estos autores plasman su propuesta en la ecuación simple: *Documento = Recursos + Esquemas de Utilización (p.205)*. La teoría sobre el uso de recursos en la práctica del profesor: *Aproximación documental de lo didáctico* (Gueudet & Trouche, 2009, 2010) es tomada como marco conceptual de esta investigación. Los conceptos fundamentales de esta teoría son discutidos en el Capítulo 2 de esta tesis.

1.3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Debido a que el profesor de matemáticas juega un papel importante en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de esta disciplina, esta investigación se enfoca en el análisis y la reflexión sobre la práctica de un profesor en acción. La práctica del profesor en acción es entendida, en este trabajo, como la actividad que él lleva a cabo en el salón de clases. Dado que la enseñanza de las matemáticas recae en gran medida en las actividades que propone el profesor en el salón de clase, así como en la didáctica que éste utiliza para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, en esta investigación es analizada la forma en que un profesor de matemáticas, de tercer grado de secundaria, utiliza los recursos que tiene a su disposición y cómo estos recursos le ayudan u obstaculizan su práctica docente.

Los contenidos matemáticos que el profesor, participante en este estudio, aborda en su clase, pertenecen al plan de estudios oficial (SEP, 2006). A partir de estos contenidos,

que indican los temas a desarrollar y el tiempo asignado a cada unidad, el profesor estructura su clase, desde la planeación didáctica hasta el diseño de las estrategias de enseñanza y de aprendizaje que utiliza en la implementación de cada unidad temática, propuesta en el currículo escolar.

En esta investigación interesa identificar y analizar los recursos que utiliza el profesor de matemáticas en la enseñanza del manejo de la información; de manera específica, la representación gráfica de las funciones no lineales (e.g., la función cuadrática). El profesor de matemáticas en acción involucra un conjunto de recursos: matemáticos, didácticos, materiales, etc., para presentar los contenidos que aborda en su clase de matemáticas. Por lo anterior, la presente investigación está enfocada en el:

ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: ÉNFASIS EN EL USO DE RECURSOS

Los recursos son considerados como todos aquellos artefactos físicos y conceptuales que involucra el profesor de matemáticas en el diseño y ejecución de su clase; por ejemplo, la planeación didáctica, el programa de estudios, el tiempo asignado a cada lección, etc.

1.4. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En esta investigación es analizada la forma en la que el profesor de matemáticas de tercer grado de secundaria usa los recursos disponibles en su práctica docente. El análisis de la práctica del profesor se lleva a cabo mediante la observación de su práctica en el salón de clases, poniendo énfasis en el tipo de conocimiento matemático y didáctico que éste pone en juego. Por ello, la pregunta general que motiva esta investigación es:

¿Qué influencia tiene el uso de recursos matemáticos y didácticos del profesor de matemáticas en su práctica docente?

Para dar respuesta a esta pregunta, son analizados los diferentes recursos que involucra el profesor de matemáticas en su práctica docente; particularmente, al abordar la temática relacionada con la representación gráfica de las funciones no lineales. Así, para dar respuesta a la pregunta general de esta investigación, se han planteado las siguientes preguntas, que se derivan de la pregunta general.

A. ¿Cómo utilizan los profesores de matemáticas los recursos disponibles en la enseñanza de las funciones no lineales?

B. ¿Qué papel juega el currículo y el plan de estudios (como recursos) para que el profesor de matemáticas ponga en juego otros recursos en la enseñanza de la representación gráfica de las funciones no lineales?

C. ¿Cuáles son las Tareas y Actividades que propone el profesor de matemáticas durante sus clases para lograr el aprendizaje de los alumnos?

Para dar respuesta a las preguntas de investigación precedentes, se propone identificar y analizar los recursos que utiliza el profesor de matemáticas de tercer grado de secundaria, en la enseñanza de la representación gráfica de las funciones no lineales, y cómo los implementa en su práctica. Los recursos sobre los cuales se pone atención son: el libro de texto que utiliza el profesor con los estudiantes; el plan de estudios de matemáticas de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2006) para el tercer grado de secundaria, y la didáctica con la que el profesor aborda las temáticas en el salón de clase.

1.5. OBJETIVOS

Con la finalidad de dar respuesta a las preguntas de investigación, anteriormente planteadas, se definen los siguientes objetivos que guían la investigación: a) identificar y analizar los recursos didácticos y matemáticos que usa el profesor en su práctica docente, b) analizar los recursos físicos disponibles en su práctica docente (e.g., libro de texto, plan de estudios, etc.), c) analizar los recursos del profesor (conocimientos matemáticos) puestos en acción durante la discusión con sus estudiantes.

1.6. IMPORTANCIA DEL ESTUDIO

Esta investigación se ubica en el marco del uso de recursos del profesor de matemáticas; esta línea de investigación ha cobrado gran interés en los últimos años (e.g., Adler 2005; Chevallard & Cirade, 2010; Gueudet & Troche, 2009, 2010; Guzmán & Kieran, 2013, entre otros). Lo relevante de esta investigación es que aporta evidencias de cómo un profesor usa y transforma los recursos existentes en su práctica, y cómo estos influyen en el aprendizaje de sus estudiantes. Los recursos del profesor en los que se centra esta investigación son: el libro de texto; el programa de estudios de matemáticas (SEP, 2006), la discusión que él

tiene cuando trabaja con sus alumnos la solución de un problema de matemáticas referente a la función cuadrática, representado en su forma simbólica y gráfica; los conocimientos que él tiene sobre este contenido matemático y cómo los usa en su práctica docente.

Es innegable que se debe poner atención en los recursos usados por los profesores en su práctica docente, pues de ellos depende, en gran medida, que esa práctica sea exitosa. Los cambios curriculares, frecuentes en nuestro país, conllevan problemáticas inherentes a ellos; por ejemplo, no se sigue inmediatamente que los profesores encargados de implementar la reforma curricular en turno posean los recursos adecuados y suficientes, de modo que garantice el aprendizaje de sus alumnos. No es posible asegurar que los contenidos curriculares en esas reformas adolezcan de errores potenciales, pues con frecuencia también en ellos ocurren errores de planteamiento. Así, el análisis de los recursos usados por el profesor de matemáticas en su práctica docente debe ser prioritario para darse cuenta si hacen falta recursos para llevar a buen término los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1. INTRODUCCIÓN

Para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas, en esta investigación, se toma en cuenta el enfoque teórico concerniente a los *recursos* usados por los profesores de matemáticas. El concepto de recurso no es nuevo; sin embargo, en trabajos recientes; sin embargo, investigadores como Adler (2000) han contribuido al esclarecimiento de este concepto. Recientemente, Gueudet y Trouche (2009, 2010) propusieron una aproximación teórica, para analizar la práctica del profesor, tomando como base la Aproximación instrumental (Vérillon & Rabardel, 1995); cuyos conceptos básicos son: artefacto, instrumento, génesis instrumental, entre otros. Así, Gueudet y Trouche proponen y discuten el enfoque teórico por ellos llamado como: *Aproximación documental de lo didáctico*. En este capítulo son explicitados aquellos conceptos de la Aproximación documental tomados como base en esta investigación. Antes de hacerlo, es pertinente situar la investigación en el concepto central de este trabajo: el de *recurso.*

2.2. RECURSOS

He aquí la definición que da el diccionario de la Real Academia Española de recurso: del latín *Recursus* "Acción y efecto de recurrir: medio de cualquier clase que, en caso de necesidad, sirve para conseguir lo que se pretende; conjunto de elementos disponibles para resolver una necesidad o llevar a cabo una empresa: *Recursos naturales, hidráulicos, forestales, económicos, humanos*"(cursivas en el original, DRAE, vigésima segunda edición, 2001, p. 1920). En términos educativos, los recursos se entienden comúnmente como el conjunto de materiales físicos o humanos de los que dispone el profesor para llevar a cabo su práctica docente. Más precisamente, los recursos pueden ser: materiales de apoyo,

como: papelería, libros, u otros tipos de materiales; también lo son el personal de apoyo en la práctica docente.

En el ámbito de la investigación educativa existen diversos trabajos que discuten el concepto de recurso; uno de ellos es el de Adler (2000). Esta autora analiza el concepto de recurso desde la composición misma de la palabra; para ello, la descompone como *re-curso* (*re-source*). Adler afirma que la re-conceptualización del término recurso es necesaria para entender lo que implica en el proceso de enseñanza de las matemáticas y, sobretodo, el papel que juega el profesor, a partir de los recursos de los que dispone.

De acuerdo con Adler (2000), los recursos utilizados en educación matemática se pueden analizar desde la verbalización de los recursos, considerando a estos como objetos y como acciones; es decir, como *recursos en uso* en el contexto de educación matemática, los recursos como sustantivo (objetos) y como verbo (acciones), en la práctica y en la formación del profesor de matemáticas. Adler también aborda la formación de los profesores y las actividades relacionadas con esta formación, enfatizando que ésta debe estar centrada en la conceptualización de los recursos, como una extensión de la práctica docente en relación con la enseñanza de las matemáticas.

En este sentido, la formación de los profesores de matemáticas tendría que abordar los recursos que usan, en dos direcciones: en primer lugar, ampliando el concepto de recurso más allá de lo que implica este término en el sentido común; que considera como recursos a aquellos objetos materiales que forman parte del ambiente de la enseñanza y el aprendizaje y ampliar este concepto, incluyendo los recursos humanos y los culturales (e.g., los conocimientos previos del profesor) que intervienen en el proceso educativo. En segundo lugar, incluir en la formación de los profesores de matemáticas, una reflexión sobre cómo estos recursos son una extensión del profesor de matemáticas, en el sentido de que estos forman parte del profesor en su práctica docente, y que inciden en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje.

Adler (ibídem) afirma que las matemáticas escolares (i.e., aquellas enseñadas en las instituciones educativas) son una mezcla *híbrida* de conocimiento a ser aprendido y enseñado. Por un lado, en el proceso educativo se da énfasis al aprendizaje de las matemáticas a utilizar en la vida cotidiana y, por otro, también deben ser tratadas por el

profesor, en el ambiente educativo, las matemáticas institucionales. Pero también, la práctica de los docentes en el aula es *híbrida*, porque mezcla las estrategias de enseñanza centradas en el alumno y el profesor mismo aprende de sus estudiantes, al momento de interactuar con ellos en su práctica educativa. Adler utiliza el concepto de transparencia y su doble función de visibilidad e invisibilidad, con el fin de examinar los *recursos en uso* del profesor en su práctica de las matemáticas escolares.

2.3. CONCEPTUALIZACIÓN DE LOS RECURSOS

Para Adler (2000), el enfoque más común que se da a los recursos en educación está centrado en los materiales físicos y los recursos humanos. Estos recursos básicos son fundamentales para el funcionamiento de la institución escolar; sin embargo, no son suficientes para entender la dinámica que se da en el salón de clases; por ello, es necesario extender el concepto básico de recurso. Esta autora hace una categorización de los diversos tipos de recursos que intervienen en la práctica del profesor.

Los recursos humanos: están vinculados directamente con los docentes que enseñan matemáticas y con los procesos (acciones) que utilizan en la práctica educativa. El profesor de matemáticas es obviamente un recurso humano fundamental, y la importancia de este recurso no es sólo en función de su capacitación formal. La investigación y el debate en la formación de los profesores de matemáticas continúan explorando la base del conocimiento del profesor de matemáticas en sus componentes y su profundidad: ¿qué tipo de conocimiento matemático conoce? ¿Qué conocimiento didáctico tiene del contenido matemático que enseña? ¿Cuál es la relación entre estos dos tipos de conocimientos? ¿Qué conocimientos posee de la teoría y la práctica educativa, en general? Estas y otras preguntas pueden ser planteadas respecto a los recursos humanos que intervienen en la práctica docente.

Los recursos materiales y no materiales: los recursos materiales son referidos a los objetos físicos que ayudan en el proceso de enseñanza; por ejemplo, las tecnologías y los materiales escolares usados en la enseñanza de las matemáticas. Los recursos no materiales se refieren a los símbolos matemáticos usados normalmente en los cursos de matemáticas; por ejemplo: x, *y*, *z*.

Entre los recursos materiales, se encuentra el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas, que incluyen: los pizarrones electrónicos; las calculadoras; las computadoras y el software especializado, como el software de geometría dinámica; por mencionar algunos. Los recursos materiales de matemáticas en la escuela, incluyen, por ejemplo: libros de texto y materiales didácticos escritos, específicamente, para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares, como: las calculadoras, los geoplanos, y las reglas graduadas; por mencionar algunos.

Los objetos matemáticos, como recursos no materiales, son amplios; van desde sucesiones numéricas simples hasta teoremas complejos, incluyendo una amplia gama de objetos matemáticos; por ejemplo, una expresión algebraica, una representación del triángulo en el plano cartesiano, las funciones y su representación gráfica, etc. El contexto es el que determina la utilización de los objetos cotidianos, ya que en sí mismos no tienen ninguna relación directa con la clase de matemáticas que se desarrolla en el aula, sino que estos objetos están constituidos por las prácticas culturales cotidianas, como comprar y vender, medir y comunicar.

Los recursos culturales: son menos visibles, pero son creados y desarrollados culturalmente, y forman parte del contexto de la enseñanza; estos son el lenguaje y el tiempo. El lenguaje es un recurso cultural y social que incluye la verbalización de los estudiantes durante la clase, así como el intercambio de ideas con y entre los alumnos. El tiempo se puede considerar como un recurso cultural; utilizado de maneras diferentes en las zonas urbanas y en las rurales. La función del tiempo en la escuela es a través de los horarios de clase y de los tiempos para llevar a cabo las actividades de aprendizaje, tanto en la estructura que da el profesor a la clase como a las tareas.

Muchos de estos recursos provocan en los profesores y los alumnos, en la clase de matemáticas, significados y sentidos de las prácticas en otros contextos; en particular, las prácticas cotidianas. Lo que hay entre los recursos y las matemáticas escolares en la práctica, es su transparencia. Para Lave y Wenger (1991), el acceso a la práctica de una comunidad implica el acceso a sus recursos, sus objetos y sus relaciones sociales. Además, está asociado con el concepto de transparencia, con su doble función de visibilidad e invisibilidad. Estos autores afirman:

> Si hay que acceder a una práctica, entonces los recursos tienen que ser transparentes. Deben ser visibles; de modo que puedan ser utilizados y así extender la práctica. Pero ellos también deben ser invisibles, para que permitan la entrada sin dificultades en la práctica [docente]. (p. 103)

Los recursos en la práctica de las matemáticas escolares necesitan ser vistos para ser usados (*visibles)*, se tiene que ver a través de ellos para percibir las matemáticas (*invisibles*). La transparencia no es una característica inherente del recurso, sino una función de su uso en la práctica, en el contexto de éste. Cómo los recursos son aprovechados para apoyar y facilitar el aprendizaje en una práctica híbrida; cómo las matemáticas de la escuela, su transparencia llega a ser más compleja. Como resultado, estos pueden activar o bloquear el acceso al conocimiento matemático. La siguiente tabla muestra la categorización de los recursos para la enseñanza de las matemáticas en la escuela.

Tabla 1

Recursos básicos para el funcionamiento de la escuela (Adler, 2000, pp. 212-213)

Recursos	*Ejemplos*	*Observaciones*
Materiales	Edificio para la escuela, salones de clase, servicios sanitarios, electricidad, escritorios, pupitres, silla, pizarrones, lápices, plumas, plumones, gises, papel, etc.	Indispensables para el buen funcionamiento de la estructura escolar.
Humanos	Relaciones profesor-alumno, tamaño del grupo de clase, criterios de evaluación, alcance y contenido de la calificación.	
Otros recursos y su Transparencia		
Humanos	*Personas*: los conocimientos del profesor y los padres. *Procesos*: colegialidad	En cuanto al alcance, el contenido, y la orientación no hay consenso. Para asegurar la continuidad de la práctica, así como los cambios que surjan.
Materiales	*Tecnologías:* pizarrones, calculadoras, computadoras, fotocopiadoras, etc. *Materiales de matemáticas de la escuela:* libros de texto, otros textos, geoplanos, software didáctico, etc. *Objetos matemáticos:* pruebas, rectas numéricas, cuadrados mágicos, etc. *Objetos cotidianos:* dinero, periódicos, cuentos, calculadoras, reglas, etc.	Es necesaria la invisibilidad para que la práctica se vea a través de la tecnología. Los significados matemáticos no son evidentes en sí; las posibilidades pedagógicas son construidas en la acción, la pedagogía centrada en el aprendizaje puede llegar a hacerlos visibles. Son objetos específicamente matemáticos, pero con contexto social, asimismo deben ser visibles e invisibles. Fuera de las matemáticas, también deben ser visibles e invisibles.
Sociales y Culturales	*Idioma:* verbalización y comunicación. *Tiempo:* calendario, duración de los períodos de clase, tareas, etc.	La estructuración del tiempo necesita ser visible e invisible, con nuevas pedagogías o cuando la escolarización se rompe, puede ser demasiado visible.

El uso de los recursos materiales, ya sean el pizarrón, los libros de texto, la computadora u otros objetos matemáticos o cotidianos, necesitan ser tanto visibles como invisibles. Si un recurso es utilizado en clase y se vuelve objeto de atención, entonces éste llega a ser visible, pero si el recurso es para mejorar, facilitar o permitir el aprendizaje matemático, entonces en algún momento se vuelve invisible, ya no es el objeto de la atención en sí mismo, sino un medio para las matemáticas.

La transparencia no es una propiedad del recurso, sino una función de cómo el recurso es usado y comprendido dentro de la práctica. La mayoría de los recursos que los profesores utilizan en la práctica de las matemáticas de la escuela *híbrida* traen el desafío de la transparencia; es decir, de establecer el equilibrio entre la visibilidad y la invisibilidad.

2.4. APROXIMACIÓN DOCUMENTAL DE LO DIDÁCTICO

2.4.1. Antecedentes: Aproximación Instrumental

En esta aproximación teórica, un *artefacto* es un objeto físico o simbólico con significados sociales y culturales, cuya finalidad es dar sustento a la actividad humana en la ejecución de ciertas tareas: una calculadora, el lenguaje o una computadora, son ejemplos de *artefactos*; mientras que un *instrumento* es lo que un sujeto construye a partir del uso que le da al artefacto. Dicho de otro modo, un *artefacto* llega a ser un *instrumento* a través de un proceso que depende de las características del *artefacto* y de la actividad del sujeto, con sus conocimientos y métodos de trabajo. Al proceso de cambio de artefacto a instrumento se le llama *Génesis Instrumental*.

En la Génesis Instrumental, el sujeto se apropia y transforma el *artefacto* en *instrumento* para resolver una situación determinada; es decir, un sujeto construye (mentalmente) un *instrumento* con la finalidad de ejecutar cierto tipo de tarea; la elaboración de un instrumento tiene lugar durante su uso, y puede llevar al mejoramiento del artefacto o a su subutilización;así, el *instrumento* consta de una parte del *artefacto* y de los esquemas de utilización desarrollados por el sujeto en relación con dicha tarea. Drijvers y Trouche (2008) representan esta relación como: *Instrumento = artefacto + esquema de utilización* (p.368)

De acuerdo con Drijvers y Trouche (2008), los esquemas de utilización no se pueden observar en los sujetos, sólo se manifiestan en su práctica; es decir, cuando los

sujetos resuelven algún problema utilizando los artefactos. Los autores también señalan que los esquemas de utilización no son fáciles de construir, ya que las personas pueden elaborar esquemas no apropiados para resolver la situación, o basarse en concepciones erróneas.

De acuerdo con Rabardel (1995), la *Génesis Instrumental* consta de dos procesos dialécticos y dinámicos, relacionados entre sí: *La Instrumentalización* y *la Instrumentación* del artefacto. La *Instrumentalización* está dirigida hacia el artefacto; el sujeto guía la forma en que el artefacto se utiliza, debe conocer sus propiedades y su funcionamiento. Mientras que *la Instrumentación* está dirigida hacia el sujeto; las posibilidades y limitaciones del artefacto influyen o modelan la actividad del sujeto. En el proceso de instrumentación juegan un papel importante los esquemas de utilización que están estructurados por los invariantes operatorios del usuario.

Los procesos de instrumentalización y de instrumentación regulan la actividad de los sujetos en cuanto a que son usuarios de los artefactos, y contribuyen a que estos transformen los artefactos en instrumentos. Este proceso dialéctico es iterativo, ya que los nuevos instrumentos, en un momento dado se convierten en artefactos y cuando el sujeto interactúa con ellos, se da nuevamente la construcción de instrumentos y así sucesivamente.

2.4.2. Aproximación documental

Gueudet y Trouche (2009, 2010) abordan el significado y uso de los recursos desde la práctica del profesor. Estos autores consideran que los recursos utilizados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas abarcan tanto los materiales básicos para la enseñanza; por ejemplo, materiales físicos: pizarrón, reglas, papel, gises o plumones, etc.; como los conocimientos del profesor, las discusiones de ellos con los alumnos, las reflexiones que el profesor lleva a cabo al interactuar con otros profesores, al preparar las actividades a implementar en su salón de clase, etc.

Tomando como base teórica la Aproximación Instrumental, Gueudet y Trouche (2009, 2010) proponen la *Aproximación documental de lo didáctico*, para analizar los recursos del profesor; en particular, cómo se apropia de ellos y los transforma en documentos.En la *Aproximación Documental de lo Didáctico*, Gueudet y Trouche (2009, 2010) plantean que los recursos por ellos mismos no cambian la práctica del profesor, sino que los cambios significativos se dan cuando el profesor lleva a cabo un *Trabajo*

Documental. Este tipo de *Trabajo* es explicado por estos autores de manera similar a como en la *Aproximación Instrumental* los sujetos interactúan con los artefactos al llevar a cabo una tarea con estos. En el trabajo documental, el profesor interactúa e interacciona con los recursos disponibles, tanto físicos como intelectuales (e.g., sus conocimientos) para transformarlos en documentos.

Gueudet y Trouche (ibídem) distinguen el significado de los recursos y de los documentos, del mismo modo que Vérillon y Rabardel (1995) distinguen en la *Aproximación Instrumental* el significado entre *artefactos* e *instrumentos*. Para estos autores, los recursos que utilizan los profesores son artefactos (en el sentido de la Aproximación Instrumental), relacionados con su práctica. De acuerdo con Gueudet y Trouche (2010), los profesores en su práctica docente interactúan con recursos físicos o materiales; por ejemplo, libros de texto, planes de estudio, calculadoras, etc., como con recursos no materiales que pueden ser objetos simbólicos o no simbólicos, por ejemplo, el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico, las discusiones académicas con los estudiantes, o con sus colegas, etc.

A esta interacción que tiene el profesor en su práctica docente con los recursos materiales y no materiales (recursos humanos y socioculturales en el sentido de Adler, 2000) se le conoce como *trabajo documental*; es decir, el profesor *trabaja* con estos recursos, los revisa, los adapta, los transforma, etc. Es en el trabajo documental, donde el profesor transforma esos recursos, en el que se da el proceso dinámico de la *génesis documental*; proceso mediante el cual los recursos son transformados en documentos por los usuarios de estos.

Gueudet y Trouche (2009) plantean que ñlos documentos pueden ser considerados en la forma del verbo *documentar*: para apoyar algo (en este caso, la actividad profesional del profesor) con los documentosò (p.205). Del mismo modo que en la génesis instrumental, la génesis documental involucra los procesos de Instrumentalización, que es la apropiación y transformación de los recursos, y la instrumentación que se refiere a la influencia de los recursos sobre la práctica del profesor. Este proceso dialéctico y dinámico también es iterativo, ya que los recursos son transformados en documentos, posteriormente

se vuelven otra vez recursos, que son sujetos al proceso del trabajo documental por parte del profesor. Gueudet y Trouche (2009) proponen entonces que:

Documento = Recursos + esquemas de utilización (p.205).

Para estos autores ñel documento es mucho más que una lista de ejercicios, éste está saturado con la experiencia de los profesoresò (p. 205). El siguiente esquema es una representación que hacen los autores acerca de la génesis documental.

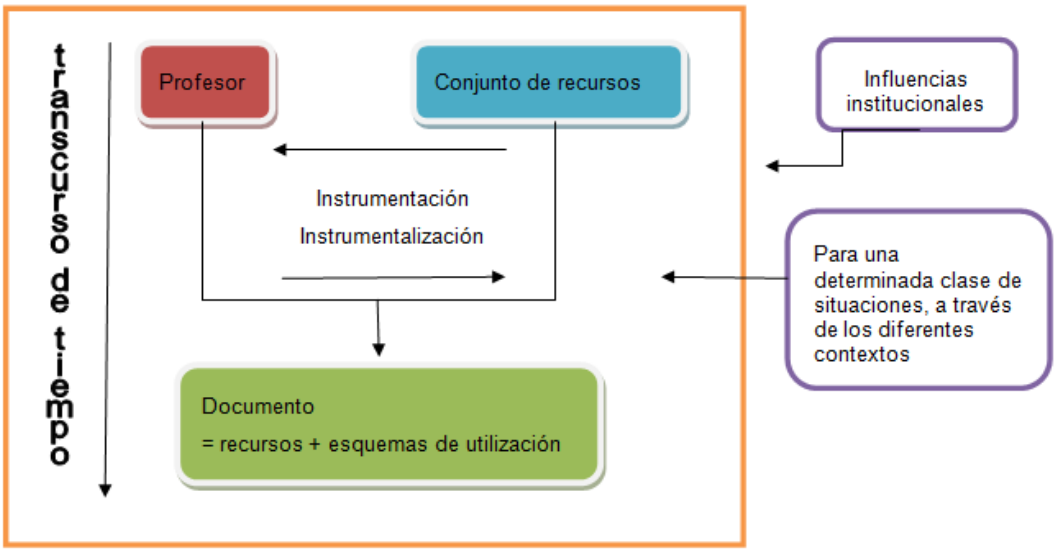


Figura2.1. Esquema de representación de la génesis documental, tomado de Gueudet y Trouche (2009, p.206).

En la génesis documental, el profesor construye *esquemas de utilización* de los recursos al resolver una situación determinada. Estos esquemas de utilización sólo pueden ser observados en la práctica del profesor y están compuestos por acciones e *invariantes operatorios*; estos invariantes son los conocimientos que guían la actividad del profesor en su práctica docente. De acuerdo con Gueudet y Trouche (2009, 2010), estos conocimientos pueden ser de carácter general o estar vinculados con el conocimiento matemático.

Así, la génesis documental tiene un carácter dialéctico y dinámico, ya que la interacción que efectúa el profesor con los recursos disponibles lo llevan a crear un primer tipo de documento, que a su vez se constituye en un nuevo recurso; de tal modo que cuando

el profesor interactúa con este nuevo recurso lo lleva a la creación de otro nuevo documento, y así sucesivamente. De acuerdo con Gueudet y Trouche (2009):

> La génesis documental no debe ser considerada como una transformación de un conjunto de recursos como entrada, y un documento como salida. Es un proceso continuo. Consideramos aquí que un documento generado por un conjunto de recursos proporciona nuevos recursos, lo que conducirá a un nuevo documento, etc. Debido a este proceso, hablamos de la *relación dialéctica* entre los recursos y los documentos. (p. 206)

Estos autores representan este proceso mediante una hélice que gira alrededor del eje X que representa el tiempo.

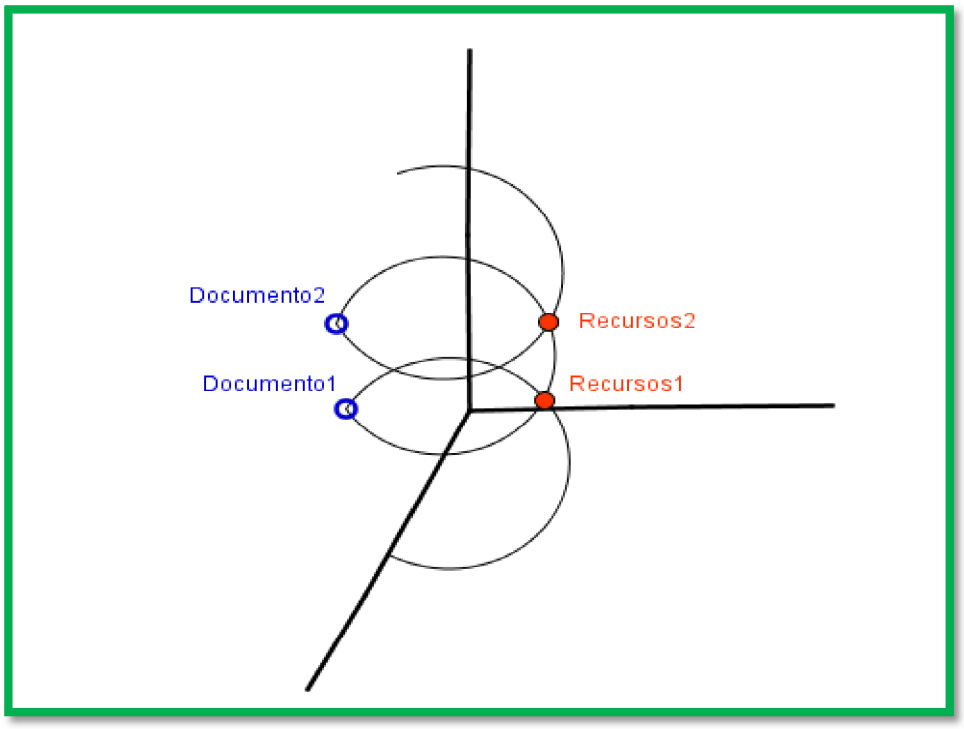


Figura 2.2. La relación dialéctica entre los recursos y los documentos, tomada de: Gueudet y Trouche (2009, p. 206).

Gueudet y Trouche (2009, 2010) afirman que los recursos juegan un papel importante en el estudio de la práctica del profesor de matemáticas. Tomando en cuenta la Aproximación documental de lo didáctico, en esta investigación son analizados los recursos (materiales y no materiales) que utiliza el profesor de matemáticas de tercer grado de educación secundaria, y cómo él se apropia de estos recursos haciendo uso de sus esquemas de utilización y los transforma en documentos por medio del trabajo documental. Más

precisamente, el trabajo documental es entendido como el proceso mediante el cual el profesor trabaja con los recursos, los transforma, los adapta, y los reorganiza antes y durante su práctica docente.

De acuerdo con Gueudet y Trouche (2010) ñel trabajo documental del profesor es el motor de una génesis documental que desarrolla conjuntamente un nuevo recurso (compuesto por un conjunto de recursos seleccionados, modificados, recombinados) y un esquema de utilización de este recursoò (p.59).

En este trabajo se discuten y documentan los recursos que utiliza el profesor de matemáticas de tercer grado de educación secundaria para resolver problemas relacionados con funciones no lineales. Los conceptos teóricos de la *Aproximación documental de lo didáctico* (ADD) que se han bosquejado en este Capítulo: el recurso, el documento, el trabajo documental y la génesis documental; así como la relación entre ellos, son utilizados en el análisis de los datos. Estos conceptos permiten entender cómo se apropia el profesor de los recursos al hacer uso de sus esquemas de utilización y los transforma en documentos, en el sentido de la ADD. En el siguiente capítulo se describen la metodología utilizada para recabar los datos de esta investigación.

CAPÍTULO 3

MÉTODO

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe el método de análisis utilizado en la presente investigación. En la primera parte, son descritas las características del estudio; incluyendo la población participante. En la segunda parte, se abordan los instrumentos utilizados en la recopilación de los datos de esta investigación, y se analiza el Problema, en términos de la información que éste contiene, y su posible solución.

3.2. TIPO DE ESTUDIO

Esta investigación es de corte cualitativo, ya que tiene como objetivo entender e interpretar datos y discursos que involucran a un grupo de participantes. La investigación cualitativa señala que el conocimiento es el resultado de la interacción entre el individuo y su entorno, por tanto, la finalidad de este tipo de investigación consiste en describir cómo es construido el conocimiento matemático de los estudiantes mediante la utilización de recursos, por parte del profesor de matemáticas, en su práctica docente.

Taylor y Bogdan (1984) señalan que la metodología cualitativa se refiere a una investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable. Estos autores también, señalan diez características de la investigación cualitativa:

1. La investigación cualitativa es inductiva;
2. En la metodología cualitativa, el investigador ve el escenario y a las personas en una perspectiva holística; las personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo;
3. Los investigadores cualitativos son sensibles a los efectos que ellos mismos causan sobre las personas, objeto de su estudio;
4. Los investigadores cualitativos tratan de comprender a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas;

5. El investigador cualitativo suspende o aparta sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones;
6. Para el investigador cualitativo, todas las perspectivas son valiosas;
7. Los métodos cualitativos son humanistas;
8. Los investigadores cualitativos dan énfasis a la validez en[de] su investigación;
9. Para el investigador cualitativo, todos los escenarios y personas son dignos de estudio;
10. La investigación cualitativa es un arte. (pp.7-9)

Godino (1999), en su estudio sobre investigaciones de tipo cualitativo, afirma:

> Tienen como principios básicos de su forma de entender la educación que los estudiantes son diferentes y que su comportamiento o su éxito en el aprendizaje no sólo depende de su habilidad o capacidad, sino que están relacionados con una serie de variables de tipo social que deben ser tenidas en cuenta (entorno familiar, escolar,é). Por su forma de interpretar el aprendizaje de las Matemáticas, los métodos cualitativos se utilizan preferentemente en aquellos estudios centrados en el análisis de la formación de conceptos y que, en general, tratan de indagar sobre cómo se desarrolla un proceso cognitivo o de entender el proceso completo y la influencia de los diferentes elementos que intervienen en él. (p. 171)

La investigación cualitativa puede ser llevada a cabo en el marco del estudio de caso. El estudio de caso es un método de investigación cualitativa, utilizado para comprender a profundidad la realidad social y educativa. Los estudios de caso, de acuerdo con Cohen, Manion y Morrison (2004) son ejemplos específicos que frecuentemente están diseñados para ilustrar un ñprincipio más generalò (p.253), y con ellos pueden investigar situaciones, no necesariamente, susceptibles de análisis cuantitativo.

Para Yin (1989), el estudio de caso consiste en una descripción y análisis detallados de unidades sociales o entidades educativas únicas. Para Stake (1998), es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas. Por su parte, Godino (1999) considera que, en algunas ocasiones, la investigación cualitativa requiere de un seguimiento continuo, completo y detallado de los procesos que tienen lugar en un determinado contexto, y este hecho hace que sea necesario centrar las actividades de experimentación en pocos individuos, y a este tipo de trabajo se le conoce como estudio de caso.

Tomando en cuenta la información precedente, respecto de las características de los estudios cualitativos, esta investigación está centrada en un estudio de caso. El interés está centrado en los recursos matemáticos y didácticos que el profesor de matemáticas pone en juego para enseñar a sus estudiantes temas de funciones no lineales y su representación gráfica, en tercer grado de educación secundaria (SEP, 2006).

3.3. RECOPILACIÓN DE DATOS

La recopilación de datos en esta investigación fue por medio de la observación no participativa. Por medio de la aplicación de este instrumento, durante el acopio de datos: ñel investigador trata de pasar lo más desapercibido posible y no tiene ningún tipo de relación con los miembros del aulaò (Godino 1999, p.172). Además, se utilizaron video-grabaciones de las sesiones en el aula, en las que el profesor aborda los temas, motivo de interés de esta investigación; también, se tomaron grabaciones de audio para reforzar los datos recabados del video.

3.4. PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN

La investigación tuvo lugar en el escenario de clase, con un grupo de tercer grado de educación secundaria, perteneciente a una zona escolar del Distrito Federal. En el desarrollo de esta investigación, se trabajó con profesores que laboran en secundaria pública. Una de las características que tiene el profesor que participó en esa investigación, es que en el desarrollo de sus clases utiliza el libro de texto autorizado por la SEP para usarse en tercer grado de secundaria, y que aceptó ser observado (previa autorización del director del plantel) en el desarrollo de sus clases en donde aborda las temáticas que conciernen a esta investigación.

En la selección del profesor, no fueron factores a considerar: la edad, la experiencia docente y tampoco la formación académica previa. El profesor Alejandro (pseudónimo) tiene más de 20 años ejerciendo como profesor de matemáticas en educación secundaria. El grupo que participó en esta investigación estuvo conformado por 54 estudiantes. Al profesor Alejandro se le pidió autorización para observar su clase, cuando abordó el contenido temático de*: la representación gráfica y algebraica de las funciones lineales y no lineales*. Este contenido matemático se ubica en el Programa de Estudios de Matemáticas de Educación Secundaria (2006), y forma parte de los contenidos del libro de

texto (Arriaga et al., 2008) utilizado por el profesor. Se debe señalar que el profesor Alejandro no recibió ninguna orientación [entrenamiento] previa sobre cómo desarrollar su clase. Para no incidir en la programación didáctica del profesor, las observaciones se llevaron a cabo desde que él inició la sesión hasta que terminó el trabajo de cada lección, en el desarrollo de esta temática el profesor Alejandro empleo dos sesiones de su clase con este grupo de estudiantes. En esta investigación se analiza la práctica del profesor de matemáticas (Alejandro), de tercer grado de educación secundaria, quien trabajó con el libro de texto (Arriaga et al., 2008).

3.5. CONTENIDO MATEMÁTICO DEL ESTUDIO

El contenido matemático que se trabaja en esta investigación está relacionado con la interpretación y representación gráfica y algebraica de las funciones no lineales; en particular, la función cuadrática. El libro de texto, con el que trabaja el profesor, está estructurado de acuerdo con el Plan de Estudios de matemáticas (2006). En el Plan de Estudios de matemáticas de tercer grado de educación secundaria, el contenido curricular está dividido en cinco bloques; en cada uno de estos, se abordan tres temáticas:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico.
2. Espacio y medida.
3. Manejo de la información. (SEP, 2006, p. 7)

El contenido matemático analizado en esta investigación se ubica en el Bloque 3 de la temática correspondiente al manejo de la información; el tema principal es la representación de la información y el subtema es la graficación de funciones no lineales. La elección de este contenido matemático es importante para esta investigación, porque relaciona el contenido algebraico de las funciones cuadráticas con su representación gráfica. En este nivel educativo (tercer grado de educación secundaria) los estudiantes tienen un primer acercamiento a los conceptos algebraicos involucrados en las funciones no lineales; en particular, las funciones de segundo grado y su representación gráfica.

3.5.1. Programa de estudios de matemáticas, Tercer grado

En seguida son comentadas las tres temáticas contenidas en cada uno de los Bloques del Plan de Estudios de matemáticas (SEP, 2006, p. 7).

Sentido numérico y pensamiento algebraico: hace referencia a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y del álgebra. Por un lado, encontrar el sentido del lenguaje matemático, ya sea oral o escrito; por otro, tender un *puente* entre la aritmética y el álgebra, en el entendido de que los contenidos aritméticos que se abordan en el nivel básico de primaria, se profundizan y consolidan con el álgebra en el siguiente nivel educativo, la secundaria.

Forma, espacio y medida: encierra los tres aspectos esenciales alrededor de los cuales gira el estudio de la geometría y la medición en educación básica. Es claro que no todo lo que se mide tiene que ver con formas o espacio, pero sí la mayor parte; las formas se trazan o se construyen, se analizan sus propiedades y se miden.

Manejo de la información: tiene un significado amplio. En estos programas se ha considerado que la información puede provenir de situaciones deterministas, definidas ï por ejemplo, por medio de funciones lineales ï , o aleatorias, en las que se puede identificar una tendencia a partir de su representación gráfica o tabular. En estos programas, la vinculación se favorece mediante la organización en bloques temáticos que incluyen contenidos de los tres ejes.

Para una mejor comprensión de lo que se pretende estudiar en el área de matemáticas, estos ejes se desglosan en temas, subtemas y conocimientos y habilidades. Los temas y subtemas son en torno a conceptos matemáticos específicos, mientras que los conocimientos y habilidades presentan una descripción detallada de lo que se propone estudiar y aprender. En la siguiente figura, se presenta un esquema que muestra, de manera general, la organización de los contenidos curriculares del programa de Estudios (SEP, 2006).

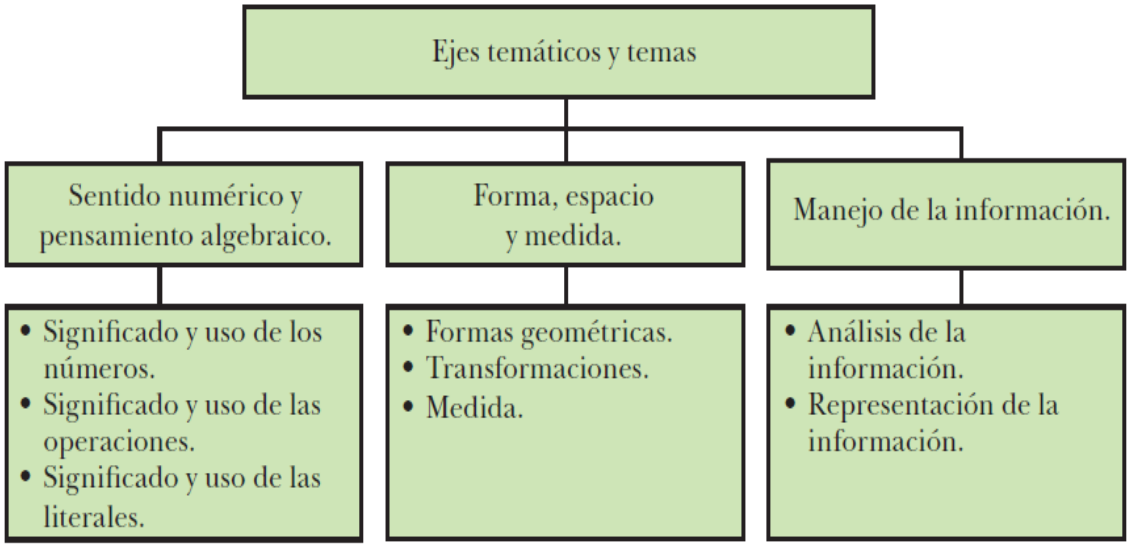


Figura 3.1. Esquema de la organización de los contenidos curriculares, tomado de : Reforma de la Educación Secundaria, Fundamentación Curricular, Matemáticas, 2006, p.18.

De acuerdo con el Plan de Estudios de educación secundaria, el estudio de las matemáticas se orienta a lograr que los alumnos aprendan a plantear y resolver problemas en distintos contextos, así como a justificar la validez de los procedimientos y resultados y a utilizar adecuadamente el lenguaje matemático para comunicarlos. Por ello, la escuela debe garantizar que los estudiantes:

- Utilicen el lenguaje algebraico para generalizar propiedades aritméticas y geométricas;
- Resuelvan problemas mediante la formulación de ecuaciones de distintos tipos;
- Expresen algebraicamente reglas de correspondencia entre conjuntos de cantidades que guardan una relación funcional;
- Resuelvan problemas que requieren el análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos provenientes de diversas fuentes;
- Resuelvan problemas que implican realizar cálculos con diferentes magnitudes;
- Utilicen las propiedades geométricas para realizar trazos, para establecer su viabilidad o para efectuar cálculos geométricos;
- Identifiquen y evalúen experimentos aleatorios con base en la medida de la probabilidad;

- Utilicen de manera eficiente diversas técnicas aritméticas, algebraicas o geométricas, con o sin el apoyo de tecnología, al resolver problemas. (SEP, 2006, p.34)

El contenido matemático con el que se trabaja en esta investigación fue elegido, porque en el primer curso de matemáticas de bachillerato se requiere que los estudiantes tengan un buen manejo del lenguaje algebraico para plantear y resolver problemas matemáticos. El álgebra que se aborda en educación secundaria representa la transición entre la aritmética y la geometría elementales de la primaria y las matemáticas de grados superiores.

3.6. CONTENIDO CURRICULAR

En esta investigación se trabajó con los contenidos temáticos del Bloque 3, en el tema de la representación de la información. El programa de Estudios de la SEP (2006), de tercer grado de educación secundaria, propone que en el estudio de los contenidos del Bloque 3, se espera que los alumnos:

1. Interpreten y representen, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y no lineales;
2. Utilicen adecuadamente la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado;
3. Resuelvan problemas geométricos que implican el uso del teorema de Tales;
4. Conozcan las condiciones que generan dos o más figuras homotéticas, así como las propiedades que se conservan y las que cambian. (p.126)

En este Bloque, los objetivos de aprendizaje son:

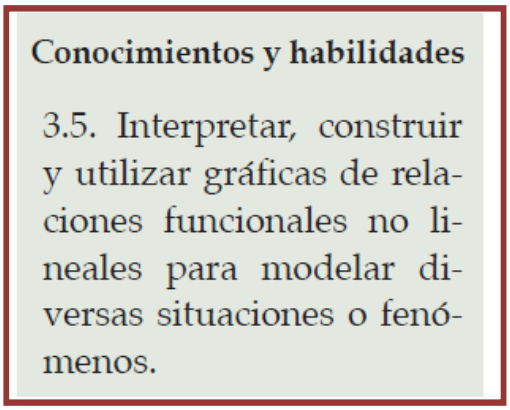


Figura 3.2. Objetivos de aprendizajepropuestos en el Programa de Estudios de matemáticas de Educación Básica secundaria, 2006, p.126.

En cuanto a las estrategias de enseñanza, para este tema, se proponen las siguientes orientaciones didácticas a los profesores:

> El desarrollo de ideas más sólidas sobre la relación funcional se logrará mediante la observación de que la dependencia entre una magnitud y otra puede darse de distintas maneras, las cuales generan distintas expresiones algebraicas y diferentes gráficas. Para iniciar el estudio se sugiere plantear aquellas situaciones que den origen a expresiones lineales y no lineales, con la intención de que los alumnos las grafiquen y analicen sus características. Por ejemplo:
>
> Asignen valores a las variables que intervienen en las siguientes situaciones y tracen las gráficas correspondientes. En los casos en que sea posible, asignen valores negativos y decimales.

Figura 3.3. Orientaciones didácticas propuestas en el Programa de Estudios de matemáticas de Educación Básica secundaria, 2006, p.126.

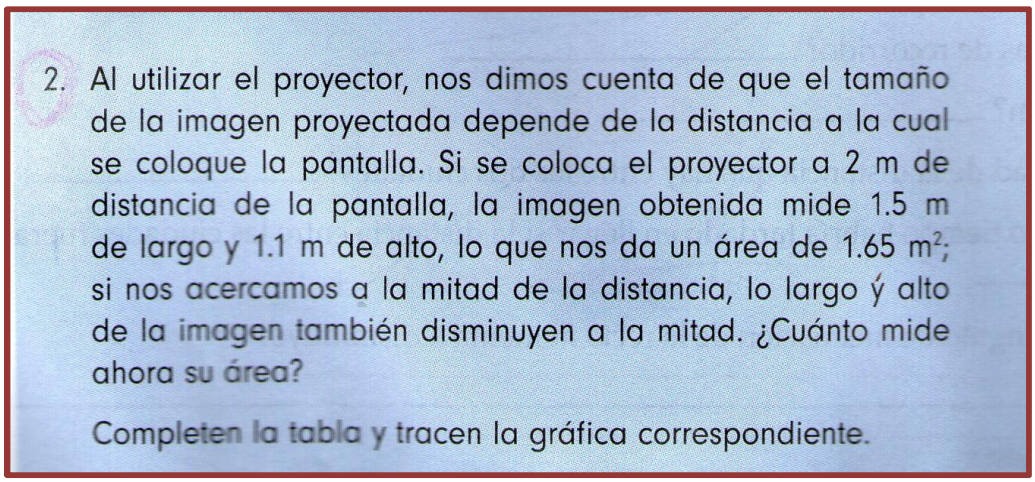
En el desarrollo de la presente investigación se analiza si estos objetivos de enseñanza y de aprendizaje se cubren total o parcialmente, y principalmente se analiza cuáles son los recursos con los que cuenta el profesor Alejandro para llevar a cabo su práctica docente.

3.7. Instrumentos utilizados en la recolección de información

Los instrumentos utilizados fueron las videograbaciones del desarrollo de la clase del profesor Alejandro; en particular, la clase en la que trabajó con su grupo el Problema 2 del Bloque 3 propuesto en el libro de texto de Arriaga (2008) (véase Figura 3.4).

3.7.1. Actividad implementada en la clase

La Actividad analizada en esta investigación es la Resolución del Problema 2 de la Actividad 5.1, correspondiente al Bloque 3.El enunciado del Problema 2 es el siguiente:

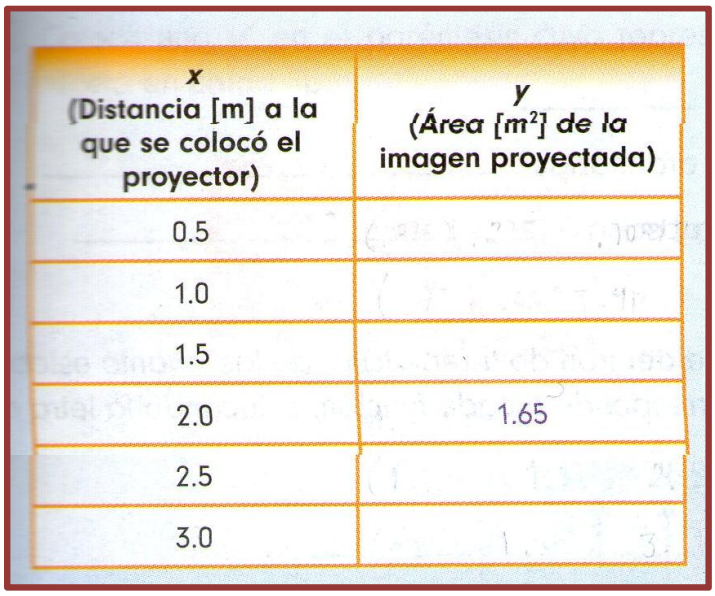


2. Al utilizar el proyector, nos dimos cuenta de que el tamaño de la imagen proyectada depende de la distancia a la cual se coloque la pantalla. Si se coloca el proyector a 2 m de distancia de la pantalla, la imagen obtenida mide 1.5 m de largo y 1.1 m de alto, lo que nos da un área de 1.65 m^2; si nos acercamos a la mitad de la distancia, lo largo y alto de la imagen también disminuyen a la mitad. ¿Cuánto mide ahora su área?

Completen la tabla y tracen la gráfica correspondiente.

Figura 3.4. Enunciado del Problema 2 que se trabaja en la clase.

En el libro de texto se propone, como parte de la Actividad, que conlleva la resolución del Problema: completar la tabla de valores, usando números asignados a la variable independiente; bosquejar la gráfica en un Plano Cartesiano, en el que están asignados valores determinados a los ejes coordenados, y contestar individualmente tres preguntas relativas a la gráfica, que posteriormente deben discutirse grupalmente. Las siguientes figuras 3.5., 3.6. y 3.7 son tomadas del libro de texto (ibídem, pp. 232-233).



x (Distancia [m] a la que se colocó el proyector)	*y* (Área [m^2] de la imagen proyectada)
0.5	
1.0	
1.5	
2.0	1.65
2.5	
3.0	

Figura 3.5. Tabla de valores dada en el libro de texto para resolver el Problema 2.

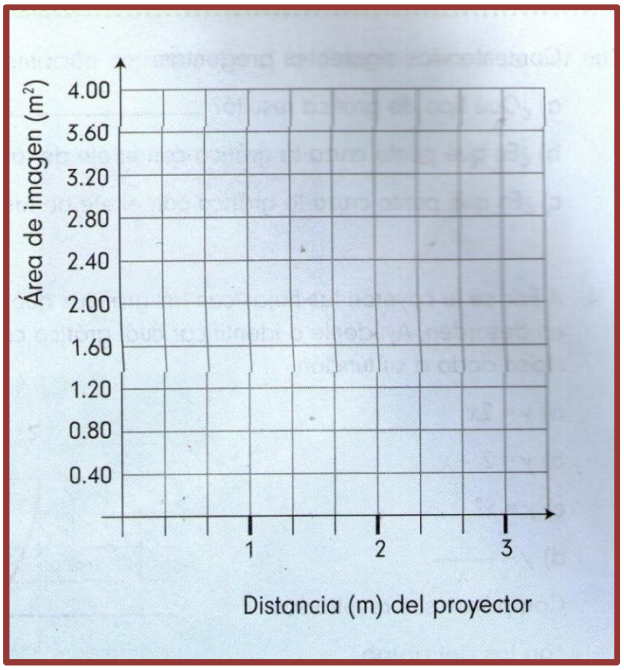


Figura 3.6. Plano Cartesiano dado en el libro de texto para bosquejarla gráfica del Problema 2.

Para concluir esta Actividad, en el libro de texto se proponen tres preguntas para ser contestadas por los estudiantes; después de completar la tabla de valores y la gráfica; estas preguntas deben ser discutidas en el grupo.

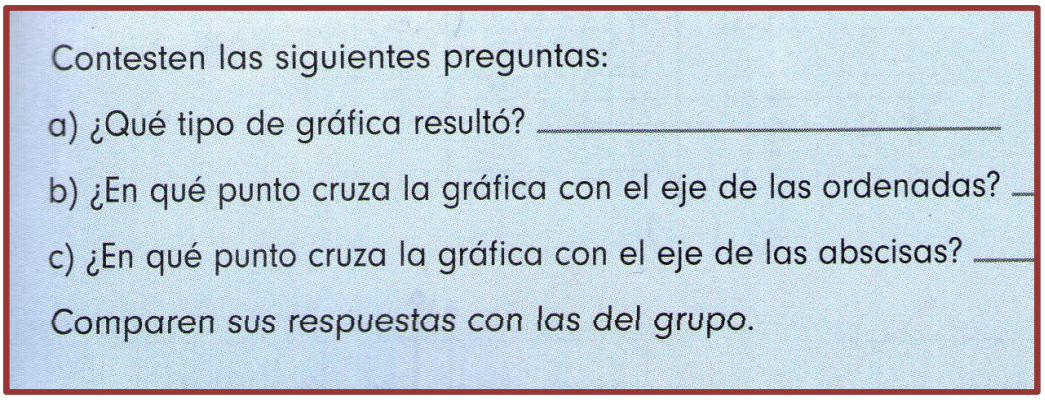


Figura 3.7. Preguntas sugeridas en el libro de texto para resolver el Problema 2.

3.8. ANÁLISIS DEL PROBLEMA Y DE SU SOLUCIÓN

En esta parte del trabajo, son discutidas dos formas de resolver el Problema propuesto a los estudiantes. Más adelante, en el Capítulo 4 de esta investigación, es analizado el Problema desde el punto de vista de los recursos que utiliza el profesor al resolverlo junto con sus estudiantes en el ambiente del salón de clases. En la solución de todo problema, es

pertinente distinguir los datos y la o las incógnitas de éste, plasmadas en su redacción. He aquí la identificación de los datos e incógnita del problema que interesa resolver. En éste se distingue información explícita e implícita; por ejemplo, "el proyector se coloca a una distancia de 2 metros de la pantalla"; "la imagen proyectada de inicio mide 1.5 metros de largo por 1.1metros de alto, y su área es 1.65 m^2 (la información precedente es explícita).

Información implícita: se trata de una imagen de figura rectangular, pues se habla de "largo y alto" en la redacción; más aun, el dato de la medida del área de esa figura (rectangular) corrobora la afirmación precedente, pues: $1.5m \times 1.1m = 1.65m^2$.

Incógnita del Problema: ésta puede ser identificada a través de la condición: "Si nos acercamos a la mitad de la distancia, lo largo y lo alto de la imagen también disminuyen a la mitad". Esta información es ambigua, pues ¿quién se acerca? ¿El proyector, la pantalla o la persona? ¿Qué o quién se mueve y qué o quién está fijo? La interpretación de esta condición queda a criterio de quien lo resuelve. Al plantear la pregunta: ¿Cuánto mide ahora su área? Pareciera que se trata de un área particular (un número), y no una expresión surgida de un proceso de "irse acercando *cada vez* a la mitad de la distancia entre dos objetos". La información dada por los autores del texto (de donde fue extraído el problema) no es precisa; sin embargo, tratan de enmendar su falta de claridad (en la redacción del problema) al dar "pistas" o "sugerencias" de solución a los alumnos al proponerles que completen una tabla de valores y que contesten algunas preguntas. Bien, intentando comprender a los autores del problema, se dan en seguida dos formas de resolverlo.

3.8.1. Primera solución

Una primera aproximación a la solución de este problema es considerar la tabla de valores propuesta por los autores del libro de texto (véase Figura 3.5). las medidas de lo largo y lo ancho de la pantalla proyectada "cuando va cambiando la distancia" a la que se encuentra el proyector, suponiendo que uno de los objetos está fijo (el proyector o la pantalla) y el otro se mueve.

Tabla 2

Solución que incluye el cálculo del largo y ancho de la pantalla en la que es proyectada la imagen de la figura

Distancia a la que se coloca el proyector en metros: *m* *x*	Largo de la pantalla en metros: *m*	Ancho de la pantalla en metros: *m*	Área de la imagen proyectada en metros cuadrados: m^2 *y*
0.5	0.375	0.275	0.103125
1.0	0.75	0.55	0.4125
1.5	1.125	0.825	0.928125
2.0	1.5	1.1	1.65
2.5	1.875	1.375	2.578125
3.0	2.25	1.65	3.7125

Una vez que la tabla de valores está completa, con las medidas del largo y del ancho de la pantalla, se calculan las áreas que se obtienen a partir de éstas. Una ventaja que tiene esta forma de hallar solución, es que permite visualizar la variación de las longitudes de la pantalla, tanto a lo largo como a lo ancho según las especificaciones del Problema. Con estas medidas se facilita el cálculo del área proyectada por el proyector sobre la pantalla.

3.8.2. Segunda solución

Otra forma de abordar este Problema es determinar una expresión algebraica que facilite su generalización, a partir de las medidas de lo largo y delo ancho de la pantalla al variar la distancia. En esta solución, *b* denota la medida delo ancho de la pantalla, cuando el proyector está a un metro de distancia, y *h* representa la medida delo largo de la pantalla.

Tabla 3

Solución usando expresiones algebraicas

Distancia en metros (*m*) a la que se coloca el proyector: *x*	Largo de la pantalla (*m*)	Ancho de la pantalla (*m*)	Expresión algebraica para representar el área de la pantalla: *y*
0.5 $=\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{b}{2}=0.375$	$\frac{h}{2}=0.375$	$\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{bh}{4}$ $=\left(\frac{1}{4}\right)(bh)$ $=\left(\frac{1}{2}\right)^2(bh)$
1.0	b= 0.75	h= 0.55	$(b)(h)$ $=1^2(bh)$
1.5 $=\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3b}{2}=1.125$	$\frac{3h}{2}=0.825$	$\left(\frac{3b}{2}\right)\left(\frac{3h}{2}\right)=\frac{9bh}{4}$ $=\left(\frac{9}{4}\right)(bh)$ $=\left(\frac{3}{2}\right)^2(bh)$
2.0	$2b=1.5$	$2h=1.1$	$(2b)(2h)=4bh$ $=(2)^2(bh)$
2.5 $=\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{5b}{2}=1.875$	$\frac{5h}{2}=1.375$	$\left(\frac{5b}{2}\right)\left(\frac{5h}{2}\right)=\frac{25bh}{4}$ $=\left(\frac{25}{4}\right)(bh)$ $=\left(\frac{5}{2}\right)^2(bh)$
3.0	$3b=2.25$	$3h=1.65$	$(3b)(3h)=9bh$ $=(3)^2(bh)$

Como se observa, en la tabla de valores precedente, las expresiones algebraicas que resultan en cada fila, tienen como constante el producto *bh;* de aquí se tiene que la expresión algebraica que representa esta función está dada por: $y = bhx^2$. Ahora, como bh es una constante y se conocen sus valores: $b = 0.75$ y $h = 0.55$, el producto $bh = 0.4125$, por tanto, la expresión algebraica se expresa como:

$$y = 0.4125x^2$$
$$= \frac{33}{80}x^2$$

En esta solución, es posible darse cuenta de que al usar la expresión algebraica de ésta, que el Problema está relacionado con una función cuadrática.

3.8.3. Gráfica de la función cuadrática

La representación gráfica de la función $y = 0.4125x^2$ es una parábola con vértice en el origen y concavidad hacia arriba.

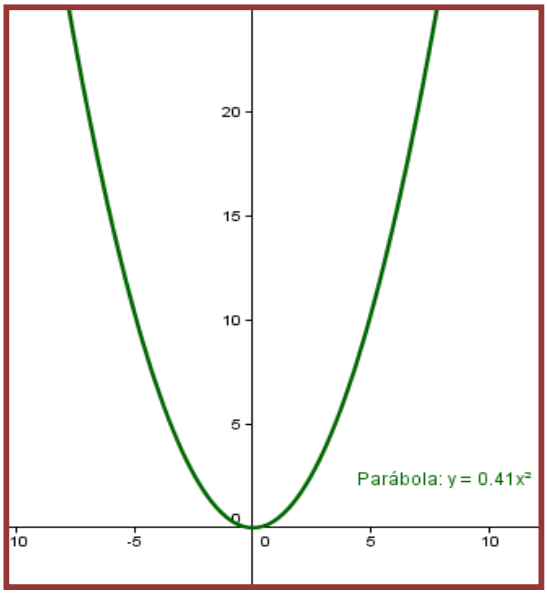


Figura 3.8. Gráfica de la función cuadrática, cuya representación simbólica es $y = 0.41\ x^2$.

Usando el Plano Cartesiano que propone el libro de texto, el ñsegmento de gráficaò (sólo la parte contenida en el Primer cuadrante del Plano), que se espera que los estudiantes dibujen es:

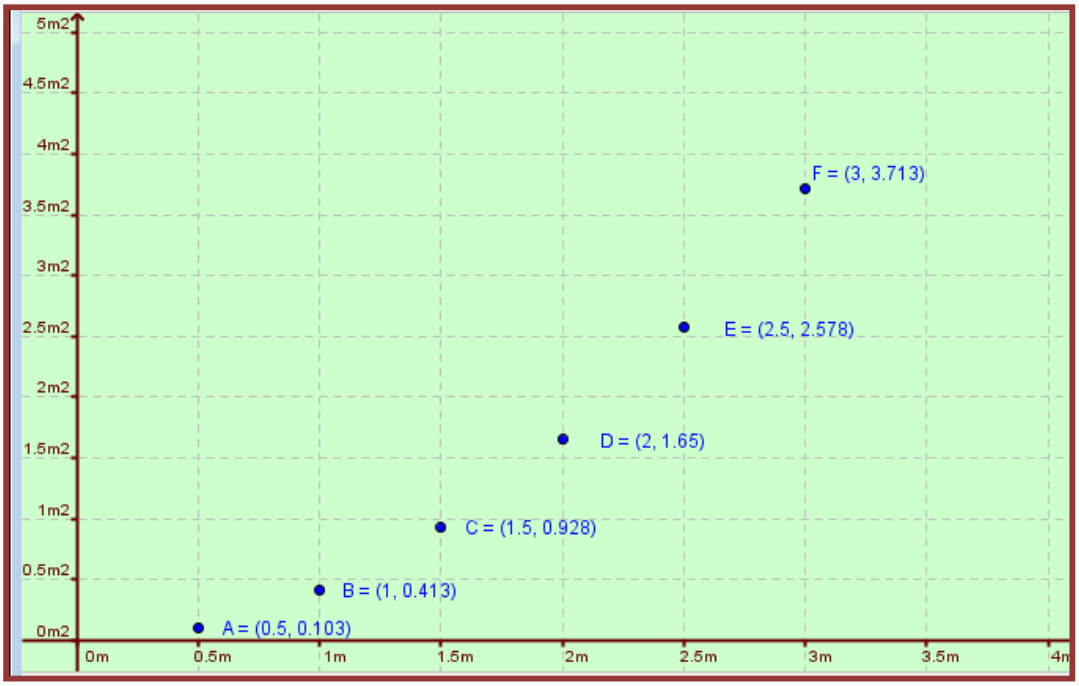


Figura 3.9. Gráfica correspondiente a las medidas de los ejes del Plano Cartesiano propuesto en el libro de texto.

3.8.4. Conclusión de la Actividad

Para finalizar, la Actividad que corresponde a la resolución del Problema, en el libro de texto se propone a los estudiantes que contesten tres preguntas relacionadas con la gráfica:

1. ¿Qué tipo de gráfica resultó?

La respuesta esperada es que la gráfica que se obtuvo es una parábola, o dicho mejor, un segmento de parábola.

2. ¿En qué punto cruza la gráfica con el eje de las ordenadas?

De acuerdo con la Figura 3.8, la gráfica interseca al eje Y, o eje de las ordenadas, en el punto $(0,0)$, es decir, $x = 0$, $y = 0$.

3. ¿En qué punto cruza la gráfica con el eje de las abscisas?

Para dar respuesta a esta pregunta, como se observa en la Figura 3.8, la gráfica interseca al eje X, o eje de las abscisas, en el punto $(0,0)$, es decir, $x = 0$, $y = 0$. De estas tres preguntas, se puede concluir entonces, que la gráfica que se obtiene al resolver el Problema, es una

parábola, cuya intersección con los ejes coordenados es el origen, o el punto de coordenadas $O(0,0)$.

3.9. COMENTARIOS

Las sesiones de trabajo video-grabadas, en la presente investigación, fueron de acuerdo con el desarrollo de la Actividad de enseñanza y de aprendizaje, propuesta en el libro de texto, utilizado por el profesor de matemáticas. Los contenidos del libro de texto son acordes con el programa de estudios de la SEP de Educación secundaria (2006). En la presente investigación, los datos recabados permiten analizar los recursos matemáticos y didácticos del profesor de matemáticas en su práctica docente. El análisis de estos datos se presenta en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analizan las video-grabaciones de la Actividad implementada en la clase del profesor Alejandro. Se presentan y analizan partes de la clase en la que se discuten los recursos didácticos y los conocimientos matemáticos utilizados por el profesor en su práctica. El análisis de los datos se presenta en episodios, los cuales son tomados a partir de la clase en que fueron grabados.

4.2. ANÁLISIS MATEMÁTICO Y DIDÁCTICO DE LOS RECURSOS USADOS POR EL PROFESOR

El Programa de estudios (SEP, 2006) y el libro de texto (Arriaga et al., 2008) son los recursos físicos usados por el profesor Alejandro para resolver problemas, construir e interpretar gráficas de funciones no lineales; en particular, los que se refieren a la función cuadrática. Estos recursos no le proporcionan la suficiente ayuda al profesor para abordar estos conceptos. En seguida, se presenta un análisis de la información que estos recursos le ofrece al profesor Alejandro acerca de las funciones no lineales.

4.2.1. Programa de estudios (SEP, 2006)

En el Programa de estudios (SEP, 2006) se introduce el estudio de las funciones no lineales como sinónimo de ecuaciones no lineales (Figura 4.1). En ese programa se proponen como una opción para ñmodelar situacionesò, aunque no especifica cuáles son las funciones no lineales (ecuaciones no lineales en la redacción del Programa de estudios), es decir, cuáles son sus características y cuántos tipos de funciones no lineales existen. Además, se específica el método de solución que propone, ya que no se plantea resolverlas, usando procedimientos personales, y en este punto surge la pregunta, ¿a qué tipo o tipos de

procedimientos personales se refieren quienes elaboraron el Plan de estudios? Y ¿a qué operaciones inversas se refiere el programa? (véase Figura 4.1).

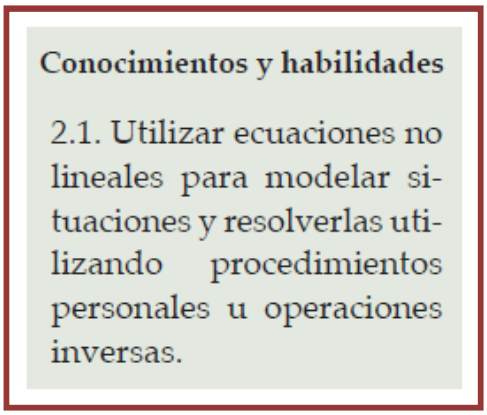
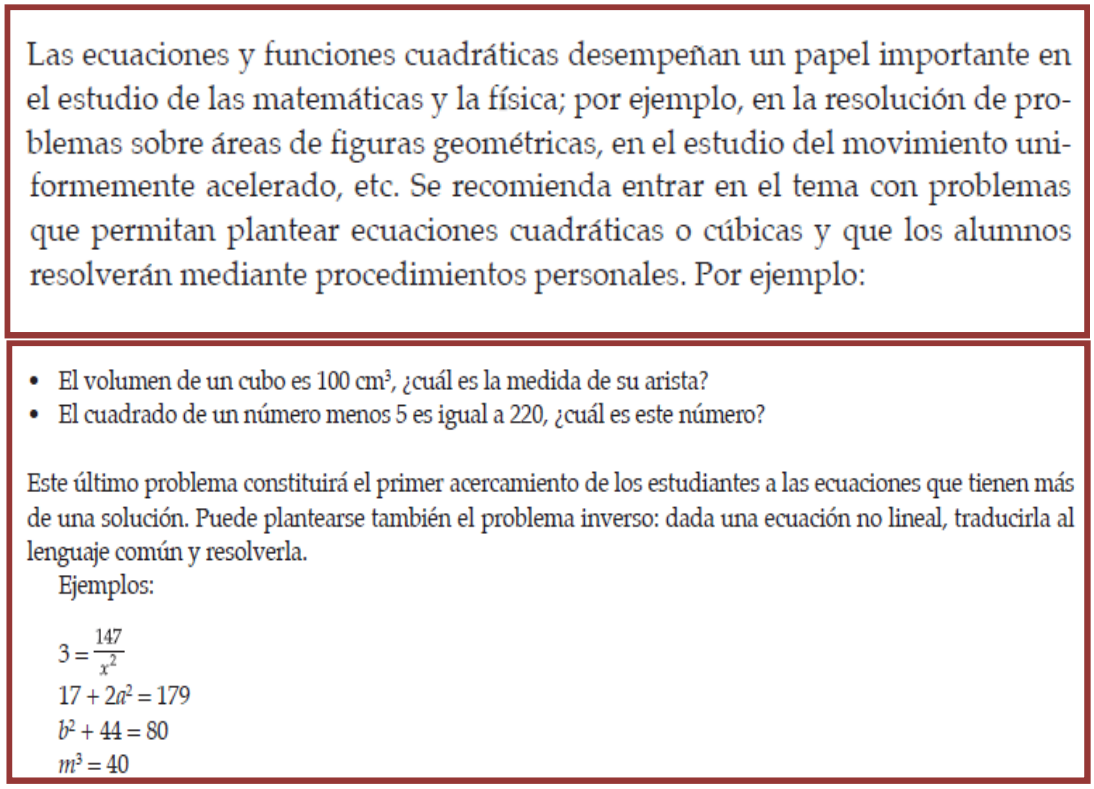


Figura 4.1. Conocimientos y habilidades esperadas en los estudiantes al estudiar ecuaciones no lineales (SEP, 2006, p. 115).

En las orientaciones didácticas del Plan de estudio, se propone el manejo de las funciones cuadráticas o cúbicas para resolver algunos problemas pertinentes a esta temática; sin embargo, no se especifica la diferencia entre el concepto de ecuación, que propone en los conocimientos y habilidades (Figura 4.1) y el concepto de función; particularmente, el de función cuadrática. Además, las *ecuaciones no lineales* son presentadas como sinónimo de *ecuaciones y funciones cuadráticas* (Figura 4.2). A manera de conjetura, esta confusión se debe a que el Programa de estudio sólo propone introducir a los estudiantes a la resolución de ecuaciones cuadráticas para posteriormente asociarlas con el concepto de función cuadrática y su correspondiente representación gráfica.



Las ecuaciones y funciones cuadráticas desempeñan un papel importante en el estudio de las matemáticas y la física; por ejemplo, en la resolución de problemas sobre áreas de figuras geométricas, en el estudio del movimiento uniformemente acelerado, etc. Se recomienda entrar en el tema con problemas que permitan plantear ecuaciones cuadráticas o cúbicas y que los alumnos resolverán mediante procedimientos personales. Por ejemplo:

- El volumen de un cubo es 100 cm^3, ¿cuál es la medida de su arista?
- El cuadrado de un número menos 5 es igual a 220, ¿cuál es este número?

Este último problema constituirá el primer acercamiento de los estudiantes a las ecuaciones que tienen más de una solución. Puede plantearse también el problema inverso: dada una ecuación no lineal, traducirla al lenguaje común y resolverla.

Ejemplos:

$3 = \frac{147}{x^2}$

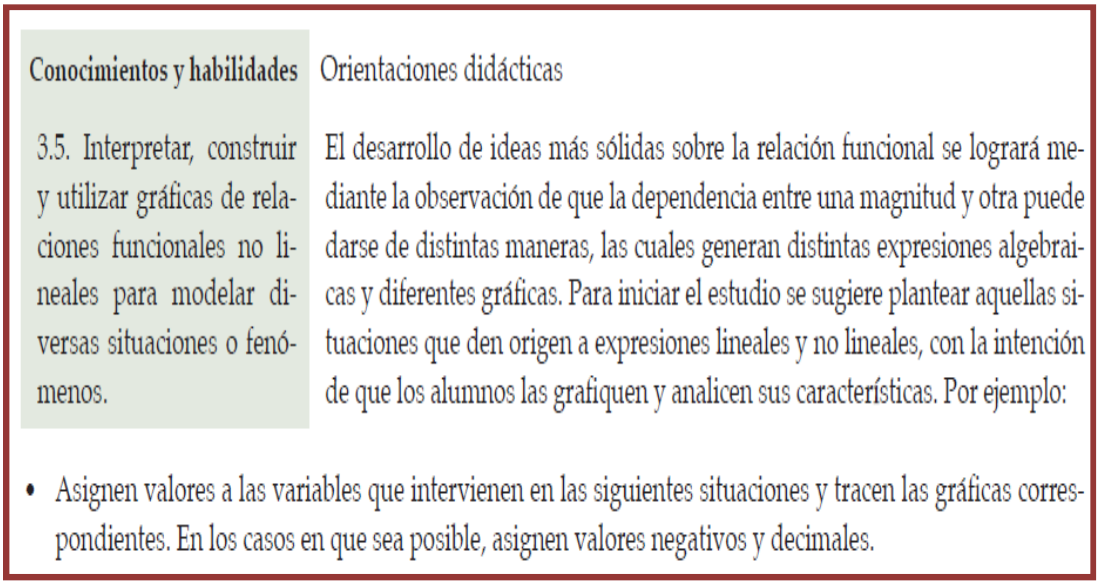
$17 + 2n^2 = 179$

$b^2 + 44 = 80$

$m^3 = 40$

Figura 4.2. Orientaciones didácticas para la enseñanza de las ecuaciones no lineales (SEP, 2006, p. 115).

Más adelante, en el Programa de estudios se propone resolver ecuaciones cuadráticas (en este sentido, las ecuaciones no lineales se han centrado en las cuadráticas), utilizando los métodos de factorización y la fórmula general. Posteriormente, en el Bloque 3 se utiliza el concepto de *relaciones funcionales no lineales*, aunque el Programa de estudios no plantea dar una definición de función, ni aborda la clasificación de las funciones para contextualizar el lugar en que se ubican las funciones no lineales; en particular, las funciones cuadráticas (véase Figura 4.3).



Conocimientos y habilidades	Orientaciones didácticas
3.5. Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos.	El desarrollo de ideas más sólidas sobre la relación funcional se logrará mediante la observación de que la dependencia entre una magnitud y otra puede darse de distintas maneras, las cuales generan distintas expresiones algebraicas y diferentes gráficas. Para iniciar el estudio se sugiere plantear aquellas situaciones que den origen a expresiones lineales y no lineales, con la intención de que los alumnos las grafiquen y analicen sus características. Por ejemplo:

- Asignen valores a las variables que intervienen en las siguientes situaciones y tracen las gráficas correspondientes. En los casos en que sea posible, asignen valores negativos y decimales.

Figura 4.3. Orientaciones didácticas del Programa de Estudios, sobre la representación gráfica de las funciones no lineales (SEP, 2006, p. 126).

Una falta de consistencia en el Programa de estudios se refiere al hecho de que no distingue entre los conceptos de: ecuación, función y relación funcional. Se puede conjeturar que no profundiza en estos conceptos, debido a que el interés sólo está en presentar un primer acercamiento a estos; sin embargo, la poca claridad y su uso indistinto generan confusión. Otra falta de consistencia se observa en la redacción de los objetivos de aprendizaje propuestos en los conocimientos y habilidades, ya que señala: ñInterpretar, construir y utilizar gráficasé ò, y la indicación adecuada sería: Construir, interpretar y utilizar gráficas.

El Programa de estudios como recurso presenta varias carencias que no le permiten al profesor Alejandro desarrollar el uso del conjunto de recursos a su alcance, para elaborar el trabajo documental (en el sentido de Gueudet & Trouche, 2009) en su práctica.

4.2.2. Libro de texto

El siguiente análisis se enfoca en los aportes del libro de texto para la práctica del profesor Alejandro, cuando trabaja con sus estudiantes el tema de la interpretación y representación gráfica de las funciones no lineales. A diferencia del Programa de estudios, los autores del libro de texto (ibídem), sí dan una definición de función:

> Función *f*(*x*): Es una relación que asocia a cada valor de la variable ñ*x*ò (*independiente*), **un único valor** ñ*y*ò (*dependiente*). Si encontramos que ñ*y*ò está en función de ñ*x*ò, entonces $y = f(x)$ [cursiva, negritas y comillas en el original].(Arriaga et al., 2008, p.196)

Esta definición es poco clara respecto a los términos que utiliza, ¿qué significan variable dependiente y variable independiente? No hacen ninguna aclaración sobre el papel que tienen ñ*x*ò y ñ*y*ò dentro de la definición. Los autores del libro de texto no aclaran cuándo una relación es una función, y cuándo no; tampoco vincula este concepto de función con la representación algebraica y gráfica de las funciones, y que utiliza en los ejemplos y problemas propuestos. En cuanto al Problema que trabaja el profesor Alejandro con sus estudiantes, la tabla de valores, el plano cartesiano y las preguntas que componen la Actividad, también tienen carencias en cuanto al contenido y los datos que proporcionan para resolver dicho Problema.

La tabla de valores tiene siete de ellos pre-asignados: seis en la columna de la variable independiente: la distancia en metros a la que está colocado el proyector de la pantalla, y un valor en la columna de la variable dependiente, que corresponde al área en metros cuadrados de la imagen proyectada. Los estudiantes deben completarla a partir de las condiciones dadas en el enunciado del problema. Sin embargo, el texto de éste no proporciona sugerencias o indicaciones sobre la manera de completar la tabla de valores; además, los valores asignados no permiten ñdetectarò la continuidad lógica que plantea el enunciado del problema al proponer que el proyector se acerca a la mitad de la distancia.

Una tabla de valores que satisface esta condición, de variar la distancia de tal modo que disminuya a la mitad de la anterior, es la siguiente:

Tabla 4

Valores que satisfacen las condiciones dadas en el enunciado del Problema

Distancia en metros (*m*) a la que se coloca el proyector *x*	Área de la imagen proyectada (m^2) *y*
4.0	
2.0	
1.0	
0.5	
0.25	
0.125	

Como parte del Problema, el libro de texto propone construir la gráfica que corresponde a la solución de éste; para su construcción, en el libro texto se proporciona un plano cartesiano con valores asignados para que los estudiantes bosquejen la gráfica, aunque el diseño del plano no facilita integrar los datos obtenidos en la tabla de valores, debido a que no hay correspondencia entre la distribución de las unidades en el plano, con la secuencia propuesta en la tabulación.

Para concluir el Problema, en el libro de texto se propone tres preguntas para que los estudiantes las respondan de manera individual y, posteriormente, comenten las respuestas con el grupo. Estas preguntan tienen la intención de analizar las características de la gráfica obtenida (véase Figura 4.3), sin embargo, éstas solamente exploran las intersecciones de la gráfica con los ejes coordenados, aunque realmente no hay intersecciones, pues la gráfica ñtocaò [aceptando que la gráfica es aquella que resulta de unir, con una curva *suave*, los puntos obtenidos al completar la tabla de valores] ambos ejes coordenados en el punto O (0,0). El tipo de gráfica que se obtiene es parte de una parábola, aunque en el libro de texto no se proporciona alguna referencia sobre el nombre que reciben

las gráficas de las funciones cuadráticas, y tampoco se da la definición de gráfica de una función. De acuerdo con Oteyza (2006), la gráfica de una función está definida por:

> Cualquier colección de puntos en el plano es llamada una gráfica. Entre éstas nos interesan especialmente las llamadas gráficas de funciones. Consideremos una función real de variable real $f:A\to B$. Al localizar en el plano los puntos correspondientes a las siguientes parejas
>
> $$\{(x, f(x))|\ x\in A\}=\{(x,y)|\ x\in A,\ y=f(x)\}$$
>
> obtenemos la *gráfica de la función f*. Observamos que para que el punto (x,y) del plano esté en la gráfica se requieren dos cosas:
>
> a) *x* es un punto del dominio de *f*, que en este caso es *A*
>
> b) *y* es el asociado de *x*, o sea, $y=f(x)$.(p. 14)

Dado que la organización temática y los contenidos del libro del texto se adecúan al Programa de estudios, se puede, inferir a manera de conjetura, que la carencia de profundización de los conceptos, contenidos en el libro de texto, se debe a los lineamientos que marca el Plan de estudios.

4.3. ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR EN EL SALÓN DE CLASES

4.3.1. Estructura de los episodios

Para cubrir los objetivos de aprendizaje del Programa de estudios, relacionados con el hecho de que los estudiantes construyan e interpreten gráficas de funciones no lineales, en particular, las funciones cuadráticas, el profesor Alejandro trabajó con sus estudiantes la Actividad 5.1 del libro de texto (Arriaga et al., 2008). El desarrollo de esta Actividad y el análisis de los recursos de profesor Alejandro se presentan en cinco episodios.

Los episodios están formados por extractos de las transcripciones de la Actividad analizada en esta investigación. Cada episodio contiene información que aporta evidencias sobre los recursos que utiliza el profesor en el desarrollo de la clase. En cada uno de los episodios, la interacción del profesor con los alumnos durante la clase está codificada en líneas (e.g., L1, L2, etc.), para efectos de un mejor análisis de los datos. Cada una de éstas

indica el momento en que interviene el profesor o alguno de los estudiantes (e.g., E1, E2, etc.).

En las líneas, los comentarios aparece en letra cursiva y entre corchetes ([é]) si la intervención del profesor o de los estudiantes está acompañada de alguna expresión gestual o señal visual; así como las palabras o frases aclaratorias que ayudan a dar coherencia a las participaciones y que en la video-grabación son poco audibles. Los puntos suspensivos [é] se utilizan para indicar las pausas que hace el profesor o los estudiantes en el desarrollo de la clase.

4.3.2. Primer episodio: Inicio de la Actividad

En la solución de este Problema [p. 49 de este documento], el profesor Alejandro usó el recurso didáctico de la exposición del Problema por parte de los alumnos; previamente, los organizó por equipos. En esta exposición estos estuvieron formados por los alumnos que integran las filas en las que se organizan las bancas del salón de clase. Para dar inicio a la clase, el profesor (P: en los extractos de la entrevista) solicitó a los estudiantes que prepararan su material para la exposición, haciendo uso de los recursos materiales de los que disponen: pizarrón, material escrito en papel bond y cinta para pegar. He aquí el primer extracto de la entrevista, concerniente al inicio de la práctica del profesor.

[L1] P: Gael, si traes *diurex*, ¿sí? para pegar, entoncesé

[L2] E1: No, no traigo el material, es que no lo traigo resuelto. [*Se refiere a la solución del Problema.*]

[L3] P: Necesitamos la lámina. [*Se refiere a aquella en la que debe estar resuelto el Problema*.]

[L4] P: Entonces, no hay exposición. Adolfo, asegúrate de eso antes de que llegue tu hora. Tú también asegúrate. [*El profesor le indica al equipo de alumnos que no prepararon la exposición que se suspende su participación y cambia a la exposición de otro equipo.*]Bien, Fila dos ¿quién es el que le toca hoy? Problema 2.

[L5] E2: Era para mi fila, pero... [*La estudiante señala que es parte del equipo al que le suspendieron la exposición.*]

[L6] P: Esa fue la confusión. Ya tenemos algo.[*La estudiante regresa a su lugar.*]Fila tres. ¿Su material? [*El estudiante señala el pizarrón para indicar que su material ya está pegado.*] Es éste, ok, fila cuatroé [*La respuesta del estudiante es poco audible*] Pues, a ver qué pueden hacer, peguen su material, ¿sale?é Acá, ayúdenle a pegar.

[L7] P: [*El estudiante hace una aclaración sobre su exposición; no se escucha con claridad*]. A lo mejor pueden defender algo, ya casi está ¿no? Ayúdenle hijos, fila, hojas sueltas aquí, órale. Aquíé

[L8] E3: Yo, pero es que si se me olvidó mié

[L9] P: Nos quedamos con dos exposiciones. Voy a pedir que los dos expositores hagan la exposición, que se vayan complementando ambos. Saray Emilio [*seudónimos*], probablemente eso nos ayude.[*Los estudiantes de los dos equipos terminan de colocar el material en el pizarrón y se preparan para comenzar la exposición; le muestran al profesor en el libro de texto el problema que van a exponer.*]

4.3.2.1. Análisis del primer episodio

La forma de trabajo elegida por el profesor es reconocida por Drijvers y Trouche (2008) como configuración didáctica; donde los modos de explotación de esa configuración corresponden a los estudiantes con una participación mínima o nula del profesor. En toda configuración didáctica, los artefactos (recursos físicos) son colocados de manera que los modos de explotación de ella (i.e., como se trabaja) sean óptimos para los participantes de la clase.

En la solución del Problema no interviene el profesor, ya que los estudiantes lo resuelven solos. Este tipo de proceder (por parte del profesor) es característico de una situación a-didáctica, de acuerdo con la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau. Es decir, el alumno asume la responsabilidad de resolver el problema y, de esa manera, logra el aprendizaje. La participación del profesor Alejandro, en este primer episodio, consiste en revisar que los equipos a los que les fue asignada la presentación del Problema 2 hayan preparado el material correspondiente y tengan la información que necesitan para presentarlo. En este primer momento de la Actividad, el profesor Alejandro descarta de la exposición a los estudiantes que no tienen completo el material o que no

resolvieron el Problema para presentarlo en la clase. Después de esta reorganización, la exposición del Problema queda a cargo de dos equipos. Los recursos que utiliza el profesor Alejandro en la preparación de la clase son el libro de texto (Arriaga, et al., 2008) y el programa de estudios (SEP, 2006), en los cuales se dan los lineamientos del contenido que se aborda en la clase.

4.3.3. Segundo episodio: exposición de los estudiantes

En este episodio se muestra la participación de los estudiantes en la Actividad que organizó el profesor Alejandro. La intervención del profesor durante la exposición fue muy poca, ya que la presentación del Problema 2, así como la solución estuvieron completamente a cargo de los estudiantes.

[L11] P: En este momento empezamos, adelante Emilio.

[L12] Emilio: A mí me tocó el Problema 2, y les quiero leer el Problema: "Al utilizar el proyector nos dimos cuenta de que el tamaño de la imagen proyectada depende de la distancia a la cual se coloque la pantalla. Si se coloca el proyector a 2 m de distancia de la pantalla, la imagen obtenida mide1.5 m de largo y mide 1.1 m de alto, lo que nos da un área de $1.65m^2$; si nos acercamos a la mitad de la distancia, lo largo y lo alto de la imagen también disminuye a la mitad. ¿Cuánto mide ahora su área?"Bueno, aquí en la página 226 viene la imagen de un proyector. [*La referencia al ejercicio que se presenta en esta página se comentará en el tercer episodio.*]

[L13] E4: Es la 233. [*Este estudiante aclara que la página del libro donde está el Problema 2 es la 233, aunque Emilio ignora su comentario debido a que él quiere comparar el Problema 2 con el que aparece en la página 226.*]

[L14] P: Abran su libro en la página que él dice, 226, algo quiere señalar él, 226. Dice que hasta abajo está una imagen de un proyector que es idéntico a lo que quieren exponer ellos. Bien, entonces ya se dieron cuenta [d]el tipo de problema que es, adelante.[*El problema que Emilio utiliza como modelo y que aparece en la página 226 es un problema de homotecia (véase Figura 4.7)*]

[L15] Emilio: Bueno, yo aquí hice una imagen con el proyector y el tamaño de la imagen. [*El estudiante bosquejó el dibujo en una hoja de papel milimétrico y señala donde se ubican el proyector y la pantalla.*]

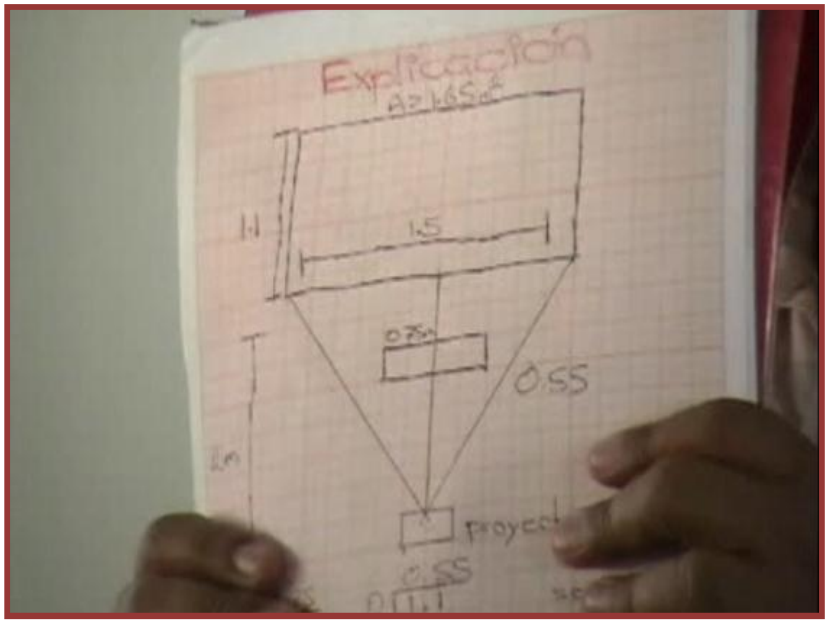


Figura 4.4. Representación gráfica del estudiante: muestra el proyector y la pantalla de la imagen proyectada, con los datos del Problema 2.

[L16] P: ¿La alcanzan a ver? [*El profesor se refiere a la representación gráfica del Problema mostrada por el estudiante*.] Me hubiera gustado que la hubieran hecho en grande, eso te hubiera ayudado a trabajarlo, correcto. O la que acaban de ver en el libro, [*el profesor se refiere a la imagen de la página 226 del libro de texto*] también nos da una idea, sale pues. Idea nada más. [*El profesor toma el dibujo del estudiante y se lo muestra al resto del grupo*.]

En esta parte de la exposición, el estudiante hace algunos cálculos para completar la tabla de valores (véase Figura 4.5), la cual tiene ya completada y escrita en una de las láminas que pegó en el pizarrón, como parte del material que él elaboró para su exposición. Los resultados que el estudiante presentó a sus compañeros de grupo los leyó de sus apuntes y mostró los resultados que tenía escritos en la lámina.

[L17] Emilio: Yo lo que hice para sacar la medida 0.75 y 0.55, para sacar la medida dividí 1.52 metros [*entre 2*] y sale 0.75, y 1.1 entre 2 sale 0.55, y los dos resultados se

multiplican y sale 0.4125 en la segunda área. [*Estos datos los da al grupo, leyendo de sus apuntes.*]. Entonces 1.65, que es el área original dividida entre 2, sale 0.625, pero tiene que coincidir con la segunda área, entonces se divide 0.825 entre 2 y sale 0.4125, esa es el área de un metro.

El estudiante muestra, en la lámina que está pegada en el pizarrón, el resultado que obtuvo y que se supone que coincide con el resultado que acaba de darle al grupo, aunque no es así.

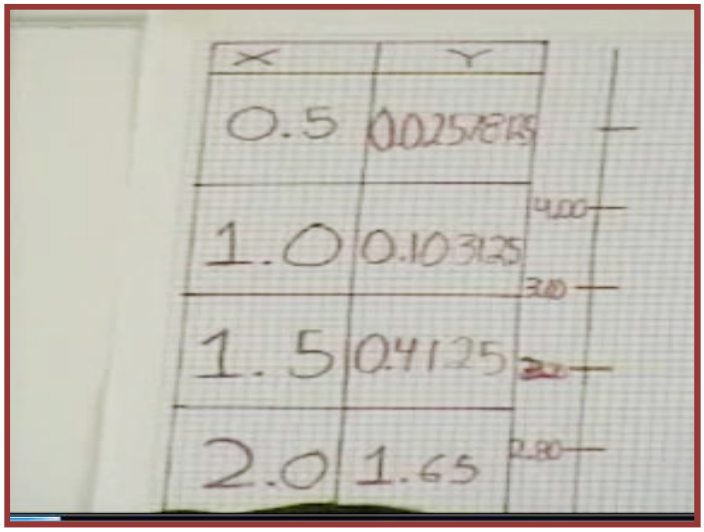


Figura 4.5. Tabla de valores presentada por el estudiante a sus demás compañeros de clase durante la resolución del Problema 2.

[L18] P: ¿De un metro?

En este momento, el profesor reafirma (en forma de pregunta) con el estudiante que los datos que acaba de dar corresponden a un metro (distancia del proyector a la imagen), aunque los datos que muestra la lámina del estudiante no corresponden con los que menciona en la exposición.

[L19] Emilio: Sí, de un metro. Ahora para sacar el área de 0.5 se toman en cuenta las medidas de 0.75 y 0.55 que son de lo largo y de lo alto, ahora se divide entre dos .75 entre 2, nos sale .375 y .55 entre 2 da .275. Si los dos resultados se multiplican, y sale el área de: 0.103,125, que eso da el área de 0.5.

[L20] P: OK., ahí te voy a interrumpir. Sara ¿ya está lista? A ver hija, escuchemos algo de tu aportación.

[L21] Sara: [*Explicación inaudible sobre los procedimientos de obtención de los resultados numéricos, aunque del mismo modo que Emilio, ella también lee de sus apuntes las operaciones y los cálculos que realizó*.]

Esta estudiante está complementando la exposición de Emilio; ambos forman parte del mismo equipo de trabajo. Ella muestra al grupo los resultados que aparecen en la tabla (véase Figura 4.6) para los valores de: 1.5, 2.5 y 3 metros, aunque no explica cómo llegó a ellos.

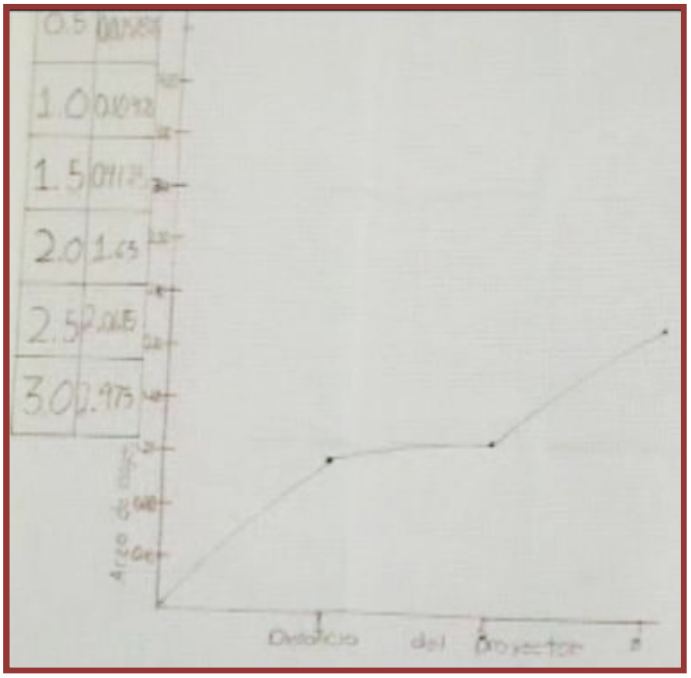


Figura 4.6. Tabla de valores y gráfica presentada por Sara a sus demás compañeros de grupo durante la exposición de la solución del Problema 2.

[L22] P: Ahí te voy a detener tantito [é] con tu equipo. Bien, quiero que leas otra vez el problema, y otro día. Emilio[a] tu lámina dale más tamaño a la letra, eso no se alcanza a ver. Te pedí, es más, milimétrica [*se refiere al tipo de papel recomendado*]. Pero lee de favor tu problema. Y quiero que estén atentos, porque todo el grupo creo que se está distrayendo. Adelante.

4.3.3.1. Análisis del segundo episodio

En este episodio, de la redacción del Problema se infiere que:

a) La pantalla (donde se proyecta la imagen de un objeto) está fija.

b) Esa imagen proyectada está completamente contenida en una figura rectangular, pues en el Problema se habla de ñlargoò y ñaltoò.
c) El problema solamente plantea acercarse a la mitad de la distancia (se infiere que la distancia inicial es de 2 metros), y a partir de la información de que lo largo y lo alto de la imagen también disminuyen a la mitad, se pregunta cuánto mide el área de la nueva imagen (contenida en la pantalla rectangular). Esta pregunta genera una sola respuesta; sin embargo, como parte de la actividad [resolución del Problema2] se propone completar una tabla de valores y bosquejar una gráfica, aunque en la redacción de éste no hay indicación que sugiera realizar estas actividades complementarias que conduzcan a la solución del problema propuesto en el libro de texto.

El lenguaje utilizado por los autores del libro es poco claro en la redacción del problema. Una representación (gráfica) del enunciado del Problema ayudaría en su comprensión y, en consecuencia, en su solución.

En cuanto a la exposición de los estudiantes: se observa que no cuentan con una guía sobre la didáctica con la que deben presentar una exposición en la clase de matemáticas; aunque no es requisito que la tengan, pues es responsabilidad del profesor sugerir a sus alumnos cómo debe ser llevada a cabo la exposición de la solución de un problema frente a un grupo. La afirmación precedente surge a partir de la forma en la que se aborda la solución del Problema 2 por parte de los estudiantes. Por un lado, no se presentan o discuten los elementos de la Actividad que involucran la resolución del Problema, a saber: tabla de valores y gráfica y, por otro, los estudiantes solamente leen los resultados que obtuvieron para completar la tabla de valores, pero no efectúan los cálculos durante la exposición. En este extracto de la exposición se observa una carencia del uso de los recursos didácticos del profesor en la falta de orientación que muestran los estudiantes al exponer el Problema sin involucrar a todos los elementos que permiten llegar a la solución del problema.

En L17 y L19, el estudiante (Emilio) proporciona un conjunto de datos que lee de sus apuntes; estos datos se refieren a las áreas que se obtienen de la imagen proyectada; específicamente, cuando el proyector está a un metro de distancia y, posteriormente, a 0.5

metros de distancia. Para encontrar estas áreas, el estudiante utiliza las medidas de lo largo y de lo alto de la imagen proyectada en cada caso, aunque no da la información sobre cómo deduce estas medidas, o de dónde las obtiene.

En esta parte de la Actividad, el profesor Alejandro no hace ninguna aclaración o sugerencia sobre la didáctica de la exposición de sus estudiantes, aunque no es necesario desde el punto de vista de los recursos matemáticos que ellos deben utilizar en la solución del Problema 2. A pesar de ello, se observa que los recursos matemáticos y didácticos del profesor son limitados, ya que durante la exposición no les da a los estudiantes (Emilio y Sara), indicación alguna sobre el modo en el que están presentando la información y tampoco les sugiere algún recurso que les permita exponer de manera adecuada la solución del Problema; tampoco lleva a cabo, junto con los estudiantes, discusión alguna sobre la localización de los datos e incógnita del Problema 2.

En L22 se observa que la forma de exponer la solución del Problema 2, por parte de los estudiantes, genera distracción y poco interés por parte del grupo, ya que se distraen, platican (se escucha mucho ruido en el salón de clase cuando los estudiantes están exponiendo) y no prestan atención a la exposición de sus compañeros. Desde el punto de vista del trabajo documental, que el profesor debiera llevar a cabo antes de la exposición de sus alumnos, se ve desfavorecido, pues es notorio que el profesor no conduce adecuadamente el tipo de trabajo que él eligió [forma de explotación de los recursos matemáticos y didácticos, Drijvers & Trouche, 2008] llevar a cabo con sus estudiantes en el salón de clases.

En el episodio precedente, respecto a la falta de recursos matemáticos del profesor: es notoria, dada la forma en la que los alumnos presentan la solución del Problema 2. Se puede notar que el profesor tiene poca claridad sobre los resultados que están presentando los estudiantes. Por ejemplo, en L18 es evidente que el profesor Alejandro no tiene claridad respecto al valor al que se está refiriendo el estudiante; incluso, como se percibe en la Figura 4.6 los datos escritos en la lámina no corresponden con los que enuncia Emilio.

A manera de conjetura, se puede inferir que si el profesor notó la discrepancia en los valores mostrados en la Tabla, por sus estudiantes y, no hizo ninguna aclaración al respecto, entonces el profesor no es consciente de que este modo de proceder puede crear

confusión en el grupo, en cuanto a los contenidos matemáticos surgidos de la solución del problema. Esta falta de recursos puede estar influenciada por el hecho de que el profesor Alejandro no llevó a cabo un trabajo previo con el Problema [trabajo documental], de tal manera que el conocimiento de la solución de éste, le permitiera orientar a los estudiantes sobre los resultados erróneos; o bien, de aquellas estrategias que los condujeran a la solución correcta de ese problema.

También, en el episodio precedente hay una situación [ejercicio] que orienta; o bien, que influye en la respuesta del profesor Alejandro sobre la solución de este Problema. En L15, el alumno (Emilio), quien expone la solución del Problema, hace una comparación entre el Problema que se está exponiendo, que plantea hallar el área de la imagen proyectada con un proyector, y otro problema que se resolvió en clases anteriores a ésta, cuyo enunciado es: *Un proyector da estas dos imágenes dependiendo de la distancia a la que se coloque la pantalla. Efectúa las mediciones necesarias para determinar la constante*. Este problema se ubica en el libro de texto, en el tema de transformaciones y movimientos en el plano: Homotecia, del bloque 3, en la Actividad 4.1.

En la siguiente figura, se observa la imagen del libro de texto que plantea este problema.

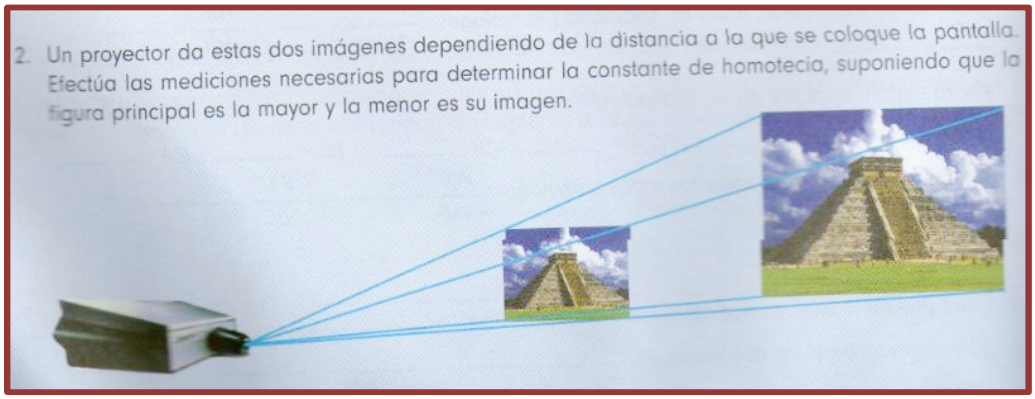


Figura 4.7. Problema de homotecia dado en el libro de texto (ibídem, p. 226).

Como se mencionó líneas arriba, este episodio es importante porque como es discutido más adelante, el profesor relaciona el Problema que se está tratando en la clase, con un problema de homotecia, y a partir de la vinculación que él hace entre estos problemas, el profesor Alejandro da al Problema de la clase, un enfoque de solución similar

al problema de homotecia contenido en la página 226 del mismo libro de texto. Esta forma de proceder, por parte del profesor, en cuanto a relacionar dos problemas "similares", aun colocados (en el mismo libro de texto) en temas diferentes) puede deberse a que los recursos materiales con los que cuenta, en particular el libro de texto, tiene una estructura temática un tanto confusa en relación con el planteamiento de problemas, atendiendo a las diferentes contenidos matemáticos a implementar con estudiantes de tercer grado de educación secundaria.

4.3.4. Tercer episodio: intervención del profesor

En este episodio, el profesor continúa la Actividad involucrando a los estudiantes del grupo para retroalimentar la exposición, cuestionándoles sobre si se entendieron, o no el Problema que han venido discutiendo, así como los resultados presentados en la exposición de Emilio y Sara. Nuevamente, a petición del profesor [L23], Emilio lee el enunciado del Problema 2 de la página 232 del libro de texto.

[L23] Emilio: "Al utilizar el proyector nos dimos cuenta de que el tamaño de la imagen proyectada depende de la distancia a la cual se coloque la pantalla. Si se coloca el proyector a 2 *m* de distancia de la pantalla, la imagen obtenida mide1.5 *m* de largo y mide 1.1 *m* de alto, lo que nos da un área de $1.65m^2$; si nos acercamos a la mitad de la distancia, lo largo y lo alto de la imagen también disminuye a la mitad. ¿Cuánto mide ahora su área?"

[L24] P: Hijos, ¿sí lo escucharon? ¿Sí? [*El profesor está sentado en medio del salón y esta pregunta la hace a todos los estudiantes del grupo*.]

[L25] E: Bueno, más o menos. [*Es la respuesta que dan algunos de los estudiantes*.]

[L26] P: Hijo, ¿qué entendiste del problema? ¿Qué pasa? ¿O están tratando de estar aquí sin poner mayor concentración? [*Aquí el profesor se dirige a un estudiante que está sentado cerca de él y que parece estar distraído durante la exposición de Sara y Emilio.*]

[L27] E5: Qué dice [*se refiere a la redacción del Problema*], que mientras más lejos esté el proyector, más grande es la imagen.[*Es la respuesta que da uno de los estudiantes*.]

[L28] P: Pero da una información, a ver hija. [*Le da la palabra a otra estudiante.*]

[L29] E6: Por ejemplo, aquí dice que a dos metros el área de la figura es de 1.65. Y si fuéramos a la mitad de dos metros sería un metro, y también se tomaría la mitad de 1.65 para sacar el valoré

En L29, la estudiante interpreta de manera errónea la información que se da en la redacción del Problema:

> [é] Si se coloca el proyector a 2 *m* de distancia de la pantalla, la imagen obtenida mide 1.5 *m* de largo y mide 1.1 *m* de alto, lo que nos da un área de 1.65m^2; si nos acercamos a la mitad de la distancia, lo largo y lo alto de la imagen también disminuye a la mitad.(Ibídem, p.232)

El Problema plantea que al acercar el proyector a la mitad de la distancia, entonces las dimensiones de la imagen proyectada también disminuyen a la mitad, tanto en lo largo como en lo alto. De aquí, la estudiante transforma estas condiciones del problema e interpreta que al acercar el proyector a la mitad de la distancia, es el área de la imagen proyectada la que disminuye a la mitad, y no las dimensiones de la imagen.

[L30] P: Ahí detente, eso que dice el autor, ¿es correcto? [*Le pregunta al grupo sobre si la afirmación que hizo E6 es correcta, e infiere que ésta es una afirmación del autor del libro de texto*.]

[L31]E: No. [*Respuesta a coro de varios estudiantes.*]

[L32]P: Así como lo dijo su compañera. Así lo dice el autor, ¿es correcto?

En esta intervención, se observa que a partir de la interpretación de los datos que hace la estudiante en [L29], el profesor afirma frente al grupo que esta interpretación es una afirmación del autor del libro de texto; sin embargo, no explicita la razón por la cual hace esta aseveración. Esta confusión puede ser explicada en términos de una falta de trabajo documental por parte del profesor.

[L33] E: Pues, noé [*La respuesta la dan varios estudiantes y entre murmullos poco audibles intentan dar una explicación.*]

[L34] E4: Tiene que sacar la mitad de 1.5 que es 0.75, y 1.1 la mitad es 0.55, y si se suman... no, se multiplican 0.75 por 0.55, y estos valores son la mitadé

[L35] P: [é] A ver, el valor ya dividido a la mitad. Decías tú, Emilio, el 1.1 se dividió a la mitad y quedó .55, ¿así dijiste no? Y el otro, ¿cómo quedó? [*El valor de 1.1 corresponde a la medida de lo alto de la imagen proyectada, este dato es explícito en el enunciado del problema.*]

[L36] Emilio: 1.5 entre 2, sale 0.75.[*El valor de 1.5 corresponde a la medida de lo largo de la imagen proyectada, este dato es explícito en el enunciado del problema.*]

[L37] P: Ahí tenemos que multiplicar a las dos, ¿no? Es un simple cálculo [*con un gesto les indica a los estudiantes que hagan la operación.*]Calculadoras por favor. Multiplícale .55 por 0.75, igualé

[L38] E: 0.4125

[L39] P: Te preguntoé , Esa cantidad, repítela fuerte.

[L40] E: 0.4125

[L41] P: ¿Esa es la mitad de 1.65? [*Hay que recordar que el valor de 1.65 se refiere al área de la imagen proyectada; es un dato explícito en las condiciones iniciales del Problema.*]

[L42] E: No. [*Respuesta a coro de varios estudiantes.*]

[L43] P: Entonces, ¿quién está mal, el autor o quién está mal? [*El profesor hace esta pregunta a todos los estudiantes de la clase*.]

[L44] E: El autor. [*Respuesta a coro de varios estudiantes.*]

4.3.4.1. Análisis del tercer episodio

En la primera parte de este episodio, se observa que el profesor Alejandro utiliza sus recursos didácticos en la continuación del trabajo de los estudiantes con lo expuesto por Emilio y Sara, dado que el grupo parece disperso. Llama su atención preguntándoles si entendieron el Problema y sus condiciones. Dado que obtiene respuestas ambiguas, pregunta de manera directa a algunos estudiantes en particular; de esta manera vuelve a tener la atención de todos los estudiantes del grupo.

En [L29] se observa que la respuesta que le da una de las estudiantes moviliza en el profesor una acción directa sobre su aportación en la clase. Ahora, a partir de ese momento,

el profesor Alejandro centra su atención en las condiciones del problema; sin embargo, interpreta de manera equivocada estas condiciones. Es posible que, dada la comparación que hizo Emilio en el episodio anterior, el profesor se queda con la idea de que el Problema 2es de homotecia, y a partir de ésta interpreta las condiciones dadas en el enunciado del Problema 2 como si se tratase de un problemas de homotecia; lo cual es correcto desde el punto de vista de una estrategia que lo conduce a la solución del Problema 2. De nuevo, la falta de trabajo documental por parte del profesor lo conduce a la confusión respecto a interpretar adecuadamente el enunciado del Problema 2, ya que los recursos físicos con los que él dispone, en particular el libro de texto y el Problema mismo que discute con sus estudiantes, no los utiliza de forma adecuada para transformarlos en un documento, en el sentido de Gueudet y Trouche (2009, 2011).

Como se explicó en L29, el Problema 2 plantea que al reducir a la mitad la distancia del proyector a la pantalla, entonces las dimensiones de la imagen también se reducen a la mitad; sin embargo, se nota que el profesor Alejandro interpreta que lo reducido a la mitad es el área de la imagen proyectada; interpretación influenciada por la participación de la estudiantes [L29]. Esta interpretación del profesor Alejandro es atribuida por él al autor del libro de texto, lo cual es incorrecto. Es evidente que una práctica de este tipo no propicia construcción alguna de esquemas de utilización que conduzcan a la utilización y transformación de los recursos para desarrollar un trabajo documental adecuado que le permita (al profesor) transformar los recursos disponibles en documentos.

Con apoyo en este segundo momento, de este episodio, se puede decir que los recursos (conocimientos) matemáticos del profesor, respecto a este problema, son escasos o limitados. Una razón posible es que él no haya preparado o resuelto el problema con anticipación (ausencia de trabajo documental), es decir, antes de la exposición de los estudiantes en la clase. Además, el lenguaje que utiliza con los estudiantes es impreciso en cuanto a lo que les quiere preguntar.

A partir de esta interpretación errónea, el profesor Alejandro, pide al estudiante que expuso (Emilio) que nuevamente le diga las operaciones que realizó para encontrar el área de la imagen proyectada: Emilio dividió entre dos (porque se recorre el proyector a la mitad de la distancia entre el proyector y la pantalla) las dimensiones de la imagen y

posteriormente las multiplicó para obtener el área de la imagen que está a un metro de distancia del proyector; esto es:

$$1.1 \div 2 = 0.55$$
$$1.5 \div 2 = 0.75$$

Por lo tanto, el área de la nueva imagen proyectada es:

$$0.55 \times 0.75 = 0.4125\, m^2$$

Sin embargo, después de la respuesta de Emilio, el profesor pregunta a los estudiantes si esta cantidad (0.4125) corresponde a la mitad de 1.65; ellos respondieron que no. Como se observa, el profesor no se toma el tiempo para aclarar con los estudiantes la diferencia entre las dos cantidades, ni el significado que tiene cada una de ellas, ya que son producto de distintos cálculos aritméticos: *Largo* x *Alto* para el área de la imagen proyectada sobre una pantalla. El ñerrorò que hay en la cantidad obtenida por Emilio, lo atribuye al autor, e induce a los estudiantes a concluir con él, que el autor del libro de texto está equivocado. Este tipo de error (por parte del profesor) evidencia que él no lleva acabo (regularmente) un trabajo documental que le permita poner en juego los recursos de que dispone y por medio de sus esquemas de utilización, transformarlos para obtener nuevos recursos, aunque sean ñincipientesò.

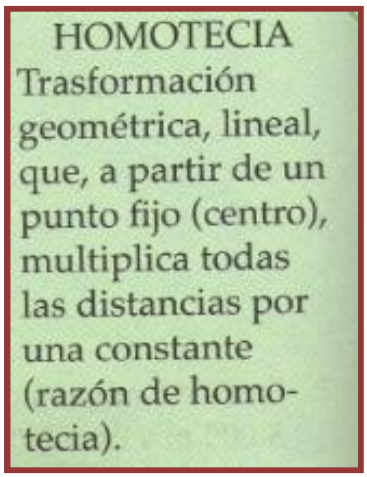
4.3.5. Cuarto episodio: explicación del profesor y solución final del Problema 2

En este episodio, se observa cómo el profesor Alejandro aborda y resuelve el Problema 2, cuando el proyector es colocado a una distancia de un metro de distancia uno del otro, sin especificar cuál de los dos objetos (la pantalla o el proyecto) se mueven. En la solución del Problema 2, el profesor Alejandro hace referencia a un tema visto anteriormente, el de homotecia. Este tema, anterior al que se aborda en esta investigación; está incluido en el Bloque 3 del Programa de estudios, en el eje temático correspondiente a: forma, espacio y medida, con el tema de transformaciones y movimientos en el plano. La estrategia de solución utilizada por el profesor Alejandro es tomar como referente el tema de homotecia, dado que el área de la imagen proyectada (no especifica cuál) está enmarcada completamente en un rectángulo cuya área es: *A= Largo* x *alto,* y en el desplazamiento de la pantalla, el proyector se puede considerar como centro de homotecia.

[L45] P: El autor está mal. Acabamos de ver homotecia, ¿o no es un problema de homotecia? [*Se dirige a todos los estudiantes del grupo.*]

[L46] E: Sí [*Respuesta a coro de varios estudiantes.*]

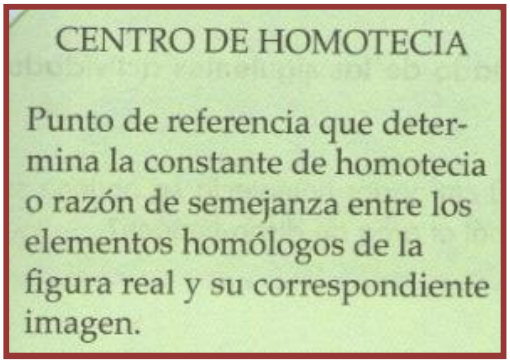
En estas líneas, el profesor Alejandro reafirma que el libro tiene un error atribuido al autor, y les plantea a los alumnos que este Problema se resuelve con los recursos usados cuando resolvieron problemas de homotecia. Respecto a este tema, el libro de texto define como homotecia:


HOMOTECIA

Trasformación geométrica, lineal, que, a partir de un punto fijo (centro), multiplica todas las distancias por una constante (razón de homotecia).

Figura 4.8. Definición de homotecia dada en el libro de texto (ibídem, p.224).

También en el libro de texto, se define el centro de homotecia:


CENTRO DE HOMOTECIA

Punto de referencia que determina la constante de homotecia o razón de semejanza entre los elementos homólogos de la figura real y su correspondiente imagen.

Figura 4.9. Definición de centro de homotecia dada en el libro de texto (ibídem, p.225).

Estas dos definiciones están acompañadas de un conjunto de ejercicios, cuyo objetivo es permitir al estudiante practicar y apropiarse de estos conceptos. Haciendo referencia a estos conocimientos previos, el profesor Alejandro propone a los estudiantes hacer uso de ellos para resolver el Problema 2. Sin embargo, estas definiciones, dadas en el

libro de texto, no son adecuadas, ya que no definen con exactitud los conceptos involucrados en la homotecia, que pueden prestarse a confusión respecto a los componentes de ésta. Por ejemplo, en la definición de homotecia dice ñé se multiplican todas las distancias por una constanteé ò, y no especifica a qué se refiere con "todas las distancias", ¿cuáles distancias?, ¿cómo se obtiene la razón de homotecia?

En este momento, hay que recordar que en el primer episodio, en las líneas: L12, L13 y L14 (p. 52 de este documento) durante la exposición del Problema, Emilio hace referencia a otro problema que aparece en la página 226, del mismo libro de texto; el problema que se presenta en esa página corresponde al tema de homotecia. Ahora bien, aun cuando otro estudiante corrige sobre la página en la que se encuentra el Problema 2, el profesor no aclara el sentido de la referencia que hace Emilio y se queda *anclado* en que el problema que se está exponiendo es similar al de la página 226, que corresponde al tema de homotecia. De ahí, el ñsesgoò que le da el profesor Alejandro a la solución del Problema 2.

Aunque el procedimiento que utiliza el profesor Alejandro para resolver el Problema 2 es correcto, la interpretación que él hace de las condiciones dadas en el Problema es incorrecta, y este ñerrorò genera confusión en él respecto a las distintas formas de dar solución al Problema. En el Capítulo 3 de esta tesis son discutidas dos formas de resolverlo, diferentes de las utilizadas por el profesor Alejandro.

El siguiente extracto de la video-grabación evidencia los comentarios previos.

[L47] P: ¿No tenemos una fórmula para las figuras e imagen? Claro, cuando estás a un metro, estás a la mitad de la ñrealò, de los dos [...] metros [*La condición dada en el problema es que el proyector está colocado a 2 metros de distancia*; *a esta distancia es a la que el profesor Alejandro llama* ***ñ****real****ò***.] A la mitad [é], ahí la razón es uno es a dos, un medio.

[L48] E5: Uno es a dos cuando *x* sobreé [*El estudiante intenta seguir la idea del profesor, pero éste no le permite terminar*.]

[L49] P: Cuando estás a .5 de metro, ¿cuál es la razón?

[L50] E6: Uno es a cuatro.

[L51] P: Uno es a cuatro, es un cuarto. [*Este cálculo, el profesor Alejandro lo hace verbalmente; es decir, no lo escribe en el pizarrón, ni tampoco refuerza con los estudiantes la construcción y el significado de esta razón.*] Es lo que me estabas diciendo ahorita.

[L52] P: A él le quedó bien, pero no hizo el material. [*Se refiere a E5, que no preparó el material para exponer*.] Se fue el tiempo en razonar, yo creo. Ya lo vi está bien en su libro [*La solución del estudiante al Problema 2*].De hecho, ese es un error que nos sucede común[mente]. Vamos a un examen y leemos de corrido, porque nos lleva el tiempo. Apúrate, apúrate, no te detienes mucho a pensar si en realidad estás haciendo lo correcto [*Este comentario del profesor Alejandro es en referencia a que los estudiantes no leen de manera adecuada el problema (según su criterio) y debido a esto cometen errores al obtener la solución de éste*].

[L53] P: Aquí el autor, te dijo: si divides las longitudes largo y ancho a la mitad, el área también la tienes que dividir a la mitad. [*Esta afirmación no aparece en el texto del Problema 2, es la interpretación que hace el profesor Alejandro, influenciado por la intervención la alumna (L29.*] Pero de casualidad ¿no sacamos la fórmula nosotros? [*En esta referencia a la fórmula no hay información hacia los estudiantes sobre el origen de ella y el contexto; es decir, en qué tipo de problema fue deducida.*]

[L54] E: Sí [*Responden sólo algunos estudiantes, otros empiezan a buscar información en su libro de texto, respecto a la pregunta planteada por el profesor.*]

[L55] P: No, ahorita, él trae la información que viene bien. [*El profesor se refiere a Emilio.*] Entonces no tenemos por qué irnos con esa tontería. [*El profesor se refiere a lo que él entiende como una indicación del libro.*]: ***ñ***si divides las longitudes largo y ancho a la mitad, el área también la tienes que dividir a la mitadò (L53). Tu gráfica, la tuya Emilio, es más o menos lo que estamos esperando. Más o menos, se hubiera visto mejor en tu milimétrica [*Se refiere al tipo de papel que él les sugirió utilizar*].

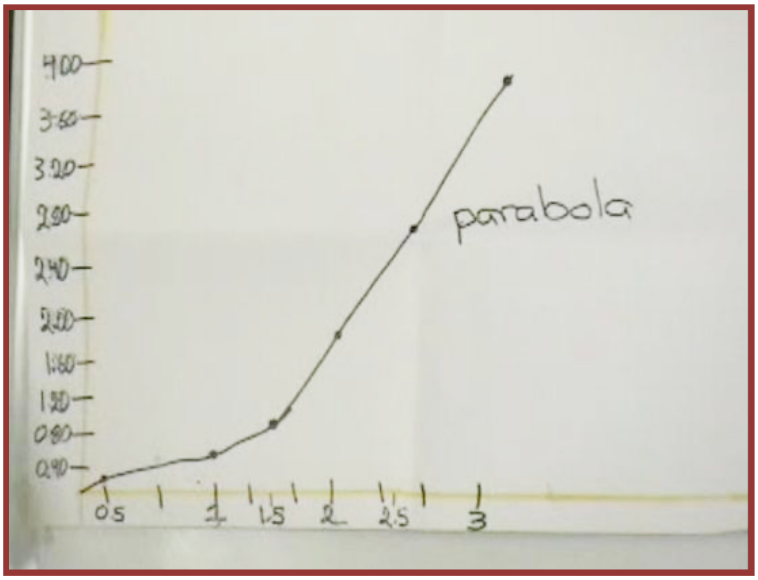


Figura 4.10. Gráfica mostrada durante la exposición de Emilio al resolver el Problema 2.

Esta gráfica es a la que hace referencia el profesor; forma parte del material que prepararon Emilio y Sara para exponer la forma en la que solucionaron el Problema 2.Sin embargo, la construcción de la gráfica (véase Figura 4.10) no se lleva a cabo frente al grupo; es decir, no se construye con los estudiantes como parte de la dinámica de la exposición. Tanto las tablas de valores como las gráficas que presentan los estudiantes en su exposición, son estáticas, o dicho de otro modo, no se construyen con el grupo, sino que las presentan ya elaboradas. Aun cuando el profesor Alejandro centra la atención en esta gráfica, no da al grupo alguna explicación, ni interpretación sobre ésta. La gráfica (véase Figura 4.10) no es ñexactamenteò una parábola, dado que el conjunto de puntos obtenidos es discreto.

[L56] P: Muéstrales la tuya allá a ellos. [*El profesor se dirige al estudiante que tiene la gráfica trazada en su libro de texto, y este estudiante por petición del profesor, le lleva el libro a Emilio y Sara para mostrarles la gráfica; aunque el resto del grupo no puede verla.*]

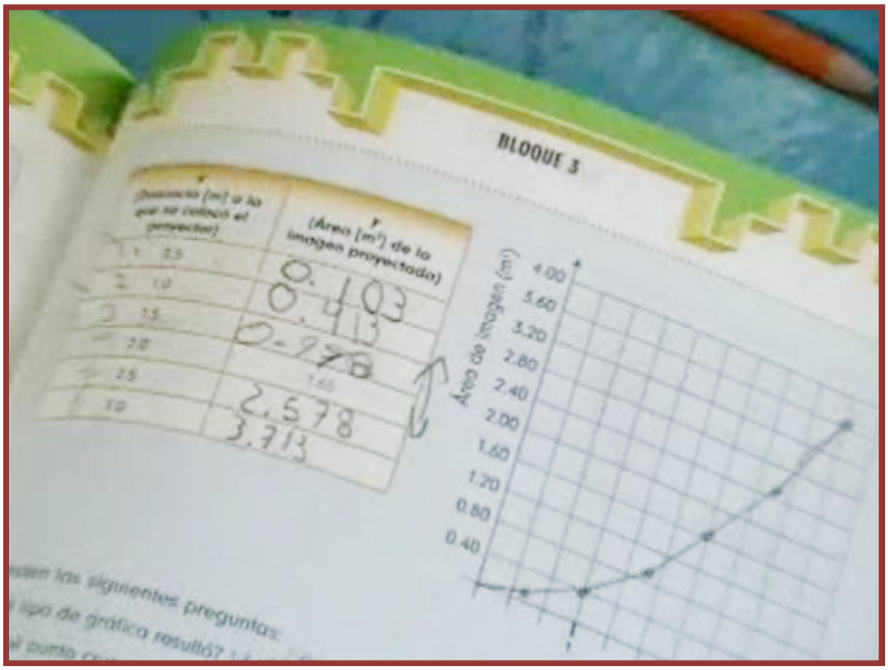


Figura 4.11. Imagen del libro del estudiante donde muestra a Emilio y a Sara el Problema 2 resuelto.

Este Problema está resuelto en el libro de uno de los estudiantes, y no se le muestra [la solución] al resto del grupo. Tampoco se hacen comentarios, por parte del profesor o del estudiante que lo resolvió, sobre el método que él utilizó para resolverlo, ni cómo esta solución contrasta o complementa la que presentaron Emilio y Sara en sus respectivas exposiciones. Después de este intercambio de información entre el profesor y el alumno que resolvió el Problema 2 en su libro, el profesor cambia la dinámica de la clase, comenzando con la asignación de calificaciones para los expositores y, posteriormente, resuelve el Problema utilizando la fórmula de la que habló antes, y obtenida cuando fue abordado en clases el tema de homotecia.

[L57] P: Hija [*se dirige a Sara*] por ahí tuvimos problemas de cálculo, ¿ya viste? [*La respuesta de Sara es inaudible.*]

[L58] P: Si también te escuché, pero vi tristemente que no tenemos ni 15 días de haber visto la fórmula y no la tomaron en cuenta. Ya se han dado cuenta de que un tema tiene que ver con el anterior, y el anterior. No lo desperdicien. No crean que las cosas se deben soltar [é] una para allá y otra para acá. Muchas de ellas tienen que ver unas con otras. Yo pensé que estaba fresco el conocimiento y que podían sacarlo.

[L59] P: Bien, de las calificaciones. Calificación para Emilio: la gráfica está favorable, el trabajo lo calculaste más o menos, pero no detectaron a tiempo lo de la fórmula. ¿Te sabes la fórmula? [*Dirigiéndose a Emilio.*] Sara ¿te sabes la fórmula? Hijo, ¿te sabes la fórmula? [*Pregunta a otro estudiante del grupo.*]

[L60] E5: No, yo la saqué nada más así, viendo peroé

[L61] P: Si, si, pero ¿te la sabes?

[L62] E: Es razón igual a *x* sobreé [*Inaudible*]

[L63] P: No es cierto.

[L64] E: Sí, porque es la razón; por ejemplo, aquí sería: uno es a cuatro igual a *x* sobre 1.65 [é] [*El estudiante efectúa las operaciones en su libro de texto y el profesor no deja que termine su idea.]*

[L65] P: No, no, es: área imagen es igual al producto del área original por la razón al cuadrado. Aquí está, la acabamos de ver, hijos. [El profesor *Alejandro se dirige al pizarrón para explicar la fórmula a los estudiantes, y aplicarla para resolver el Problema.*]

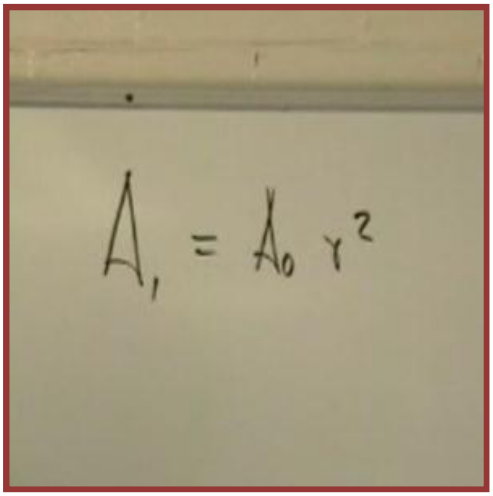


Figura 4.12. Fórmula que escribe el profesor Alejandro en el pizarrón; sugerida por él para resolver el Problema 2.

[L66] P: El área de una imagen es igual al producto del área original por la razón al cuadrado. [*No se tiene referencia de la procedencia de esta fórmula y tampoco del contexto en el que se genera; tampoco hay explicación alguna por parte del*

profesor, de la razón por la cual esta fórmula es pertinente para dar solución al Problema que presentan los estudiantes.]Vamos a sacar ahorita la de 1. [*El profesor hace la operación con el valor de 1, porque el Problema 2 plantea que se obtenga el área de la imagen proyectada al acercar el proyector a la mitad de la distancia, que inicialmente es de 2 metros.*]Uno es la mitad de dos, entonces aquí uno es un medio, la razón es un medio. [*Está tomando la razón: 1 a 2, es decir, ½.*]

[L67] P: [El] Laárea original es 1.65, de ahí tomamos los datos. Así lo captamos acá y nos queda entonces, el área imagen de 1 es a 2 es igual a 1.65 metros cuadrados por la razón, ¿quién es la razón? [*Pregunta a los estudiantes.*] Un medio elevado al cuadrado.Esto nos lleva a 1,65 metros cuadrados por el cuadrado de 1, que es 1, y de 2 que es 4. Calculadora, multipliquen 1.65 por 1 entre 4.

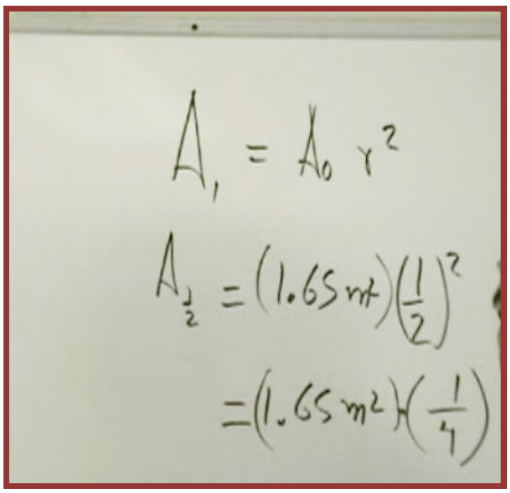


Figura 4.13. Operaciones que realiza el profesor Alejandro en el pizarrón, utilizando la fórmula que sugirió para resolver el Problema 2.

[L68] E: 0.4125 [*Respuesta a coro de los estudiantes.*]

[L69] P: Veamos, es lo que tiene su compañera, pero no ahí lo tiene adelante. [*Se refiere a que el valor que obtuvo Sara en la tabla de valores no corresponde con el valor que acaban de obtener utilizando la fórmula.*]

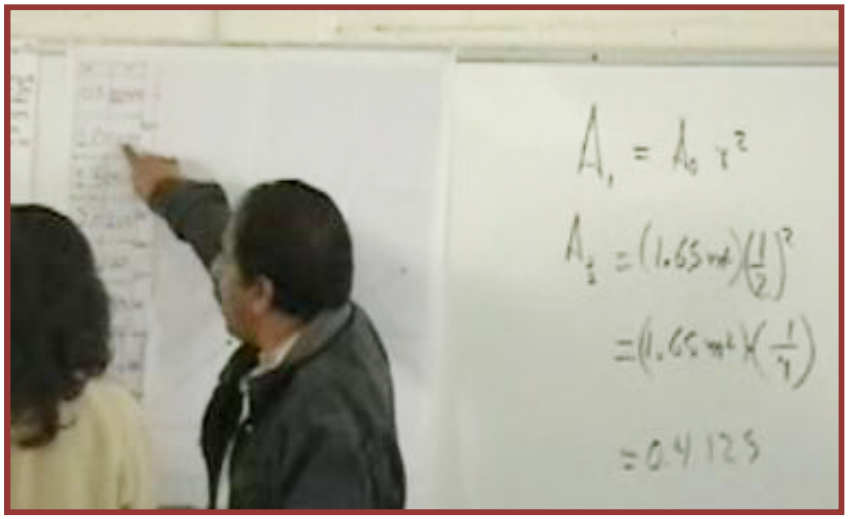


Figura 4.14. El profesor muestra a los estudiantes el resultado obtenido en la lámina que presentó Sara durante su exposición.

[L70] E: Pero, está mal el cálculo ¿no?

[L71] E:Está mal, porque el resultado lo tiene en otro lado [é] [*En este momento, varios estudiantes comparan sus resultados y se los muestran al profesor*.]

[L72] P: ¿El tuyo dónde está? [*Se acerca a revisar las notas de Emilio*.] Él sí lo tiene bien. Él está en la posición correcta. [*El profesor afirma que el valor que calculó Emilio para el valor de 1 metro es correcto. Se acerca a revisar el libro de otro de los estudiantes*] ¿El tuyo, hijo? ¿Lo redondeaste? [*El profesor Alejandro revisa el libro del estudiante y compara su resultado con el obtenido en el pizarrón.*] Está bien, estás en 0. 413. Es el correcto, ya me había dado cuenta de su valor. Estaban bien.

[L73] P: Entonces, debieron de haber aplicado la fórmula. De todas maneras nos va a dar una gráfica parecida a esta, aquí se ve un poquito mejor, aunque es de otra cosa, pero es una parte de la parábola.

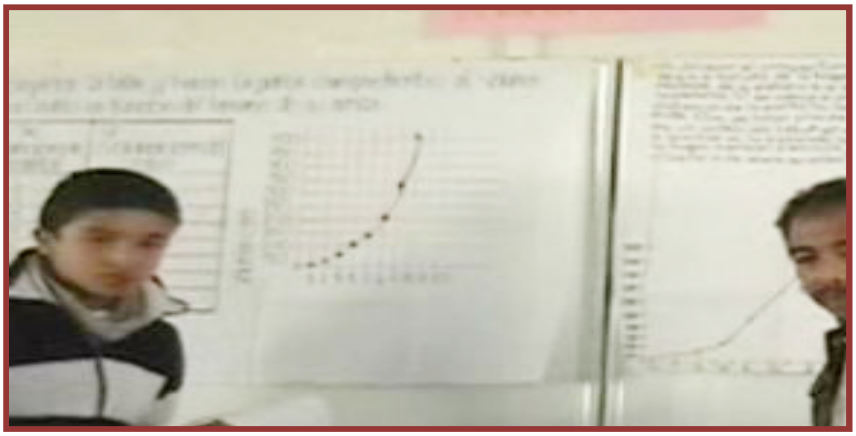


Figura 4.15. Gráficas que presenta el profesor Alejandro como ejemplo de la que se obtiene en la solución del Problema 2.

Aquí, el profesor Alejandro muestra al grupo las gráficas que están en el pizarrón y señala las dos que se observan en la Figura 4.15, aunque no precisa cuál de ellas es la correcta. De hecho, su afirmación es ambigua respecto a la gráfica que corresponde a la solución del Problema 2.Cuando está hablando de las gráficas, al concluir la solución del Problema 2, una de las estudiantes interviene:

[L74] E7: O simplemente igual tendrían que haber dividido lo del área entre dos y habría salido la real, que es 0.825. [*Esta cantidad es el resultado de dividir 1.65 entre 2, donde 1.65 es el área de la imagen en las condiciones originales del Problema 2.*]

En la línea precedente, se observa cómo aun cuando el profesor Alejandro ya hizo la aclaración sobre la interpretación errónea de los datos del Problema, en L53 y L55 esta estudiante no la tiene clara y mantiene la interpretación incorrecta.

[L75] P: No hija, ese es el gran error. No por dividir las longitudes de una figura a la mitad, las áreas se comportan a la mitad. Ese es el gran error que le estoy atacando a ese libro. Y ahora que venga mi jefe de enseñanza, le voy a decir: oye, ¿qué pasó?, precisión. Porque un libro no lo hace un maestro, lo hace como cinco o seis. Claro uno lleva la idea, pero no pasa por una revisión nomás de él, pasa como por cinco, seis o diez maestros, hasta que sale bien. Entonces aquí se le pasó a más de uno.

Aquí, se observa que aun cuando el profesor Alejandro aclara a la estudiante que está cometiendo una equivocación, él se mantiene en el entendido de que esta afirmación es del libro de texto y atribuible a sus autores.

[L76] P: Ahora, no ya lo comprobamos eso de la fórmula, no trazamos y medimos y calculamos, entonces ¿cuál es la falla? Que no recordamos nuestras fórmulas. Esa es la gran falla. Bien, calificaciones entonces. Tu calificación hijo es 8 [*Emilio*]. Tu calificación Sara, no nos quedó muy bien, te vamos a dar un 7. Hijo, aunque no trajiste el material, pero si lo hiciste bien te vamos a dar un6, para que no se quede tu nota sin nada. Si lo hiciste, si lo vi, pero hazlo a tiempo. [*El estudiante que participó desde su lugar, E5.*]Recojan sus materiales.

Al término de esta clase, el profesor no completó la Actividad, ya que faltó calcular los valores no dados en la tabla, sugerida por los autores del libro de texto para resolver el Problema 2; hace falta también bosquejar la gráfica, tomando en cuenta los valores de la tabla; contestar las preguntas que indica el libro de texto (véase Figura 4.3) y con ellas analizar la gráfica trazada a partir de los valores faltantes calculados.

4.3.5.1. Análisis del cuarto episodio

En este episodio, se observa la intervención del profesor Alejandro para resolver el Problema 2 que se está trabajando en el grupo. Aquí, el profesor manifiesta una confusión respecto a las condiciones dadas en la redacción el Problema 2, como se indicó anteriormente. El Problema indica que al acercar el proyector a la mitad de la distancia entre el proyector y la pantalla que es fija [esta podría ser una inferencia de la redacción del Problema 2, pero no es evidente] lo largo y lo alto de la imagen también disminuyen a la mitad (véase L23), y la confusión del profesor Alejandro (propiciada por la intervención de una estudiante, L29) es que al acercar el proyector a la mitad de la distancia, el área también disminuye a la mitad, como es interpretado por el profesor Alejando(véase L53). A partir de esta confusión, el profesor Alejandro se concentra en enfocar la solución del problema utilizando una fórmula que obtuvo con los estudiantes en una clase anterior sobre el tema de homotecia.

También, en este episodio, se puede observar cómo el profesor utiliza sus recursos matemáticos sobre la homotecia: su definición, el cálculo del área de la imagen proyectada y la razón de homotecia. Esta fórmula ($A_i = A_o r^2$), que él utiliza para resolver el Problema 2, es uno de sus recursos más importantes, para resolverlo, aunque no aclara a los estudiantes el significado de cada uno objetos matemáticos que intervienen en la fórmula

por él propuesta para resolver el Problema 2, y tampoco aclara a los estudiantes el porqué este problema puede ser interpretado como uno de homotecia.

En este método de solución que propone el profesor Alejandro, se nota que su lenguaje tiene varias imprecisiones: una de ellas es referirse al área dada en las condiciones iniciales del Problema 2 como el *área real* (véase L47). Esta falta de precisión en el lenguaje matemático utilizado por el profesor Alejandro no permitió que los estudiantes tuvieran una adecuada comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en el Problema 2. Otra de las imprecisiones del lenguaje utilizada por el profesor se observa en L47, cuando habla de la fórmula que deben aplicar para resolver el Problema 2, llamándola como: *fórmula para las figuras e imagen*. Este término es poco claro para los estudiantes respecto a los elementos involucrados para encontrar el área de la imagen proyectada. Además, en el libro de texto, donde se aborda el tema de homotecia, no hay evidencia de esta fórmula. Sin embargo, este es un recurso fundamental para el profesor Alejandro, ya que le permite resolver el Problema 2.

En cuanto a los recursos didácticos del profesor Alejandro, también se observan carencias: una de ellas es respecto a la orientación que debe dar a los estudiantes sobre la forma y el contenido de las exposiciones, aunque esta forma de proceder (por parte del profesor) no es fundamental en términos del trabajo documental que todo profesor de matemáticas está obligado a llevar a cabo a fin de que su práctica sea eficiente. Como se había mencionado, cuando se llevó a cabo el análisis del tercer episodio, los estudiantes no tienen lineamientos acerca de las características que debe tener una exposición de un problema matemático, pues si bien el material didáctico (las láminas de papel bond utilizadas por ellos durante su exposición), previamente elaborado es pertinente en otras disciplinas, en matemáticas es importante para la comprensión de los contenidos; que los procedimientos y la resolución de los problemas o ejercicios se construyan dentro de la dinámica de la clase.

Respecto al material didáctico sugerido por el profesor Alejandro, para que construyan sus gráficas (se refiere al papel milimétrico) tampoco les hace a los estudiantes observaciones sobre el contenido que presentan, como se observa en las diferentes gráficas presentadas, ya que éstas carecen de particiones homogéneas y tampoco indican los datos

que representan los ejes coordenados (véase Figura 4.10).Esta falta de componentes didácticos no le permite al profesor Alejandro tener un trabajo documental adecuado que lo lleve a transformar los recursos en documentos. De acuerdo con Gueudet y Trouche (2009), un conjunto de recursos o un documento requiere tener en cuenta tres componentes interrelacionados: el componente material, el contenido matemático y el componente didáctico.

Otra de las carencias de los recursos didácticos y matemáticos del profesor Alejandro, se presenta en el momento en el que resuelve el Problema 2 utilizando la fórmula $A_i = A_o r^2$. En ese momento didáctico, el profesor no discute con el grupo para que todos los estudiantes recuerden cuál es la fórmula que les está mencionando, ni les aclara una vez escrita en el pizarrón, cuáles son los componentes de dicha fórmula. En L65, el profesor Alejandro enuncia verbalmente la fórmula que va a utilizar: *área imagen es igual al producto del área original por la razón al cuadrado.* Y, posteriormente, la escribe en el pizarrón(véase Figura 4.10), aunque no aclara cuáles son los componentes que se tomarán en cuenta del Problema 2 para aplicar dicha fórmula, posiblemente porque él espera que los estudiantes la tengan presente, dado que días antes la obtuvieron en el grupo.

Posteriormente, aplica esta fórmula para resolver un problema particular, a saber: cuando el proyector se recorre a la mitad de la distancia inicial, y concluye la clase sin resolver el Problema 2 completo, considerando todos los valores de la tabla de valores que se proponen en texto(véase Figura 4.2). También, el libro de texto incluye tres preguntas sobre la gráfica que se obtiene con los datos de la tabla de valores; las preguntas enfocan el análisis de la gráfica en cuanto a su tipo, y las intersecciones de ésta con los ejes coordenados. Este análisis, provocado por las respuestas de las preguntas es importante, porque el objetivo del tema es: *Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos* (Arriaga et al., p. 321).

Dado que el profesor Alejandro no concluye la solución del Problema 2, y tampoco hace el ñcierreò que se propone en el libro, los estudiantes no pueden lograr el objetivo que se plantea en la actividad. A manera de conjetura se puede afirmar que el profesor Alejandro no llevó a cabo el trabajo documental debido a que los componentes

interrelacionados en la producción de un documento: el componente material, el contenido matemático y el componente didáctico, son deficientes a lo largo del desarrollo de la Actividad.

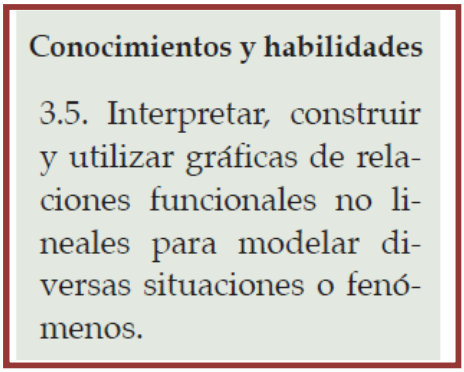
4.3.6. Quinto episodio: conclusión por parte del profesor

En este episodio se observa al profesor Alejandro, en una clase posterior, que recapitula con los estudiantes sobre los objetivos de aprendizaje que se pretenden para el tema que se está estudiando. La dinámica de esta clase se da con el profesor Alejandro en el centro del salón de clase y los estudiantes están sentados en su lugar escuchándole. He aquí el inicio de la intervención del profesor.

[L77] P: [é]la forma de representar a un fenómeno de representar a una situación problemática, de las que hemos hecho. Recuerden que hicimos algunas, como la del área, calcular el área de polígonos en el geoplano, con su *n* y con su *p*, o la suma de ángulos interiores de un polígono, o la distancia entre dos puntos del geoplano, que después repercute también en el área a través de Pitágoras. Así, hay muchas otras que también trasciendené [*En la introducción sobre los objetivos de aprendizaje, el profesor les da a los estudiantes ejemplos en los que han trabajado estas situaciones problemáticas.*]

[L78]P: Los conocimientos que nos piden que manejemos sería[n]: interpretar, construir y utilizar gráficas de funciones no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos. Ahorita nos piden enfocarnos un poco más hacia las no lineales, o sea cuadráticas, cúbicas, principalmente, pero podemos citar a otras más, ya de cuarto o de quinto grado, o la inversa, las trigonométricas, y hay un mundo tan enorme ahié , pero posiblemente no hay que ser tan ambicioso en querer abarcar mucho, ahorita sería importante que quedarán firmes cuatro o cinco: la lineal, aunque no nos la pidan; las cuadráticas o parábolas; las cúbicas [*funciones*]; posiblemente por ahí una cuarta ñperdidonaò, pero si no, no; las recíprocas si nos hacen falta mucho, y las trigonométricas tenemos base de donde sacarlas. [*El profesor lee a los estudiantes los objetivos de aprendizaje propuestos en el Plan de estudios de Matemáticas, SEP, 2006, p.126.*]

En estas líneas, el profesor Alejandro utiliza como recurso el programa de matemáticas (SEP, 2006, véase Figura 4.16), para reafirmar con los estudiantes los objetivos que se han estado buscando en el estudio de las funciones no lineales.


Conocimientos y habilidades

3.5. Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Figura 4.16. Objetivos de aprendizaje, Programa de estudios (SEP, 2006, p.126).

En el discurso del profesor, se observa nuevamente que su lenguaje es impreciso y ambiguo, cuando se refiere a la clasificación de las funciones, ya que no distingue entre las algebraicas, las polinomiales y las funciones trascendentes. Él habla de las funciones cuadráticas, las cúbicas, así como las de cuarto y quinto grado, y las funciones trascendentes (aunque no las llama así), de modo particular él habla de las trigonométricas. Para ninguna de estas funciones hace referencia a su representación gráfica.

[L79] P: Como intención pedagógica quedaría establecida de esta manera: que los alumnos, mediante la investigación y exposición [é] por filas, elaboren, caractericen e interpreten a estas gráficas. De eso se trata que mediante su equipo fila, investiguen, construyan y caractericen a estas gráficas, de eso se está tratando. [M*ientras el profesor habla, los estudiantes no toman nota ni hacen preguntas sobre esta intención pedagógica que él describe.*] La vez pasada ya vimos actividad previa y el problema uno, que eran lineales ¿si te acuerdas? Que uno inclinaba a la derecha y el otro a la izquierda. El Problema 2 este, ya se refería a este [é] a el área ¿no? El área, ya lo expusimos ¿qué pasó con él?, ¿qué pasó con el 2? el [del] proyector, acuérdenmeé [*El profesor Alejandro se refiere al Problema 2, de la Actividad 5.1 del Bloque 3.*]

[L80] E: El autor se había equivocadoé [*Respuesta de algunos estudiantes.*]

[L81] P: El autor se había equivocado, dijimos no, que el área no correspondía exactamente al doble o a la mitad, siempre y cuando la razón de proporción se moviera a la mitad o al doble o el que haya sido, sino que ya habíamos obtenido nosotros una fórmula, días pasados en homoteciaé [*Pausa por una interrupción.*] El Problema número 2 ya nos lleva por un camino de una función cuadrática, el área siempre se va a expresar en unidades cuadradas, luego entonces ahí esperamos una función cuadrática, ya no va a ser lineal desde luego, acuérdense que las lineales son las que relacionan a primer grado, pues ésta nos va llevar por otro camino y habíamos elaborado ella [*la gráfica del Problema 2 bosquejada en la clase anterior*] y nos había quedado un tanto mal, bueno nos había quedado mal por indicación del autor, no por otra cosa, por el autor mismo. Biené Por favor, todos regresen a su libro en la página donde está el [*Problema*] número 2é [*Pausa, mientras revisa sus notas*] Ya elaboré esta parte, no sé si alguien más lo hizoé

[L82] E:¿Cuál? [Se p*reguntan los estudiantes entre ellos.*]

[L83] P: La del [*Problema*] número 2, la del proyector. ¿Alguien más lo hizo?

[L84] E: Ya lo habíamos hechoé [*Comentario de alguno de los estudiantes*.]

[L90] P: Pero no había quedado bien, quiero corregir esa parte, pues para que quede.

De acuerdo con este extracto de la video-grabación de la clase, el profesor Alejandro mantiene aún, frente al grupo, el argumento de que el libro de texto tiene un error en el planteamiento del Problema 2, a pesar de que en el momento de esta video-grabación ya ha pasado un tiempo, en el cual él pudo revisar el Problema 2 en el libro de texto utilizado. De hecho, como se discute más adelante, sí hay un trabajo del profesor en cuanto a la solución de éste, pero no advierte el error en su interpretación (véase [L81]).

[L91] P: Por favor, están en la tablita, van corrigiendoé [*Se refiere a la tabla de valores que aparece en el libro.*] En la tablita [*tabla de valores*] del [*Problema*] número 2é

[L92] P: Bien, Carlos (pseudónimo) haces favor de leer el Problema número 2, [en la] página 232.

[L93] Carlos: "Al utilizar el proyector nos dimos cuenta de que el tamaño de la imagen proyectada depende de la distancia a la cual se coloque la pantalla. Si se coloca el proyector a 2 metros de distancia de la pantalla, la imagen obtenida mide1.5 metros de largo y mide 1.1 metros de alto, lo que nos da un área de 1.65m^2; si nos acercamos a la mitad de la distancia, lo largo y lo alto de la imagen también disminuye a la mitad. ¿Cuánto mide ahora su área?"

[L94] P: Bien, ahora ubiquen su atención en el cuadro [*la tabla de valores*], en la tabulación, ahí tenemos ya contestado el 2.0 metros de distancia en [*la columna que corresponde a*] *x* con el área 1.65 m^2. [*Estos valores corresponden a los iniciales del Problema.*]Entonces, póngale ahí donde dice 1.65, área original, $A_{o,}$ de acuerdo con la fórmula que habíamos manejado, A subíndice o, área original. Bien, ¿qué quiere decir eso? Que de ahí partimos como área original, y el valor, este [é] 2, nos está indicando la distancia de separación que hay del proyector [*a la imagen*], entonces la razón [*de homotecia*] de esta distancia ahí se tomaría como 1, la razón 1. A la izquierda de ese 2.0, a la izquierda de él, ponle 1, que sería la razón, ponlo con lápiz, 1. [*Estas indicaciones las da el profesor Alejandro leyendo sus notas y caminando entre los pasillos del salón, viendo que los estudiantes escriban lo que les está indicando.*]

[L95] P: Hacia arriba, viene 1.5 y viene 1.0, ubíquense en 1.0

[L96] E: Ya. [*Respuesta de varios estudiantes.*]

[L97] P: 1.0, ¿qué razón sería con respecto a 1?

[L98] E: La mitad. [*Respuesta de varios estudiantes.*]

[L99] P: Entonces, ponle 1 es a 2, 1 sobre 2, o ½, ¿verdad?, 1 es a 2. Donde dice 0.5, ¿qué le corresponde?

[L100] E: La mitadé [*Respuesta de una estudiante*.]

[L101] P: Noé

[L102] E: Un cuartoé [*Respuesta de algunos estudiantes.*]

[L103] P: Un cuarto de 2, ¿no?, ponle ahí un cuarto. ¿Y dónde dice 1.5?

[L104] E: Tres cuartosé

[L105] P: 3/4, muy bien, o 3 es a 4. [*Verifica con algunos estudiantes que estén escribiendo los datos correctamente.*]

[L106] P: Esas razones [*las cantidades que acaban de dar los estudiantes son las razones de homotecia, véase Tabla 4*] son menores que 1, son de disminución o de reducción. Hacia arriba [*en la tabla de valores*], o hacia abajo en este caso [*porque la tabla de valores del libro de texto está en orden ascendente*], vendría 2.5 y 3. ¿[El número] 3 qué sería?

[L107] E: 6 es a 4, o 3 es a 2 [*Respuesta de un estudiante.*]

[L108] P: Pónganle [*La razón*], 3 es a 2, en el 3 [*3 es el valor en la columna de la tabla que corresponde a la variable x.*] Y la que nos falta, ¿2.5?

[L109] E: Cinco cuartosé

[L110] P: 5 es a 4, sí, pónganle 5 es a 4.

En el extracto precedente de la video-grabación de la clase del profesor Alejandro, es patente la forma en la que él aborda la solución del Problema. El profesor involucra a los estudiantes en la deducción de las razones que corresponden a cada valor asignado en la tabla de valores. Sin embargo, estas deducciones no las escribe en el pizarrón, solamente las enuncia verbalmente. Aun cuando él se ubica físicamente entre los pasillos de las filas del salón de clase, varios estudiantes se encuentran fuera de su alcance visual y, por tanto, el profesor no se puede asegurar de que todos sus estudiantes tengan la información que él les está dando. En el siguiente extracto de la video-grabación de la clase, el profesor Alejandro termina de resolver el Problema calculando las áreas correspondientes a las imágenes proyectadas en cada valor asignado a la distancia del proyector a la pantalla (véase Tabla 4).

[L111]P: Bien, ahora hay que calcular las áreas con respecto a esas razones, ¿alguien recuerda la fórmula [*se refiere a la fórmula que utilizó en el tercer episodio, véase Figura 4.12*] que habíamos obtenido?

[L112]E: Área total, es igual a área original por razón [*de homotecia*] al cuadrado.

[L113]P: No, por ahí vaé [*El alumno usa la expresión* ***ñ****área total****ò*** *y el profesor le llama* ***ñ****área imagen****ò****, por esta diferencia es que el profesor da esta respuesta al estudiante.*]

[L114] E: Área original por radio al cuadrado [$A_o r^2 = A$]é

[L115] P: No, a ver otro másé

[L116]E: Área igual aé

En este momento de la clase el profesor Alejandro, a través de la discusión con los estudiantes facilita el surgimiento de nuevas ideas para recuperar la fórmula que presentó en la clase anterior, así lleva a cabo una transformación del conocimiento matemático de los estudiantes en documento, aunque también este tipo de interacción del profesor con los estudiantes favorece el desarrollo del recurso [conocimiento matemático] del profesor en el sentido de transformarlo en indicios de documento.

[L117] P: Área imagen es igual a área original por razón al cuadrado, bien, en letras, ¿cómo se ve?: Ahí es igual a *Ao* por *r* cuadrada. [*El profesor no escribe la fórmula, sólo la enuncia verbalmente.* L*a expresión matemática que corresponde a la fórmula es:* $A_i = A_o r^2$] Bien, saquen calculadora por favor. Si alguien trae una, adelante [é] vamos a ir llenando esto rápidamente. [*Se refiere a la tabla de valores propuesta por los autores del libro de texto del cual fue extraído el Problema 2.*]

[L118]P: ¿Cómo inicio en el primer cálculo, el de 0.5? ¿Cómo inicio? [*Se refiere a cómo se calcula el área para el valor de 0.5, a partir de la fórmula dada.*]

[L119] E: [*Respuesta inaudible*]

[L120] P:¿Cómo les dio en la calculadora? ¿Quién es *Ao*?

[L121] E: 1.65 [*Respuesta de un estudiante.*]

[L122] P: 1.65, dile a [*marca en*] la calculadora 1.65 poré [*Pausa para indicar a los estudiantes, cómo usar la calculadora para realizar la operación.*] Abran ahí un paréntesis y le ponemos ahí un cuarto, con el ABC [*es la tecla de la calculadora para llevar a cabo operaciones con fracciones*], un cuarto. Cierra tu paréntesis y

eleva al cuadrado, igual. ¿Nos da cuánto? Hijaé [*Se dirige a una de las estudiantes que tiene a un lado.*]

[L123] E: 0.1

[L124] P: Lo correcto es 0.10355 [*este valor es incorrecto, después de realizar la operación, el resultado es: 0.103125*], pero vamos manejarle un fix [*FIX es un modo (mode) que tienen las calculadoras científicas y que permite elegir el número de decimales en pantalla, de 0 a 9.*]Sin que lo borres hija pónganle fix 1, vámonos con fix 1.

[L125] E: 0.1

[L126] P: 0.1, correcto. Pónganle ahí [*en la tabla de valores*] en el área es 0.1, ¿qué? [*Unidades de medida*.]

[L127] E: Metros cuadrados.

[L128] P: Bien, podríamos seguir calculando los otros. A ver, intenten el segundo, [*Es el valor de 1.0 en la tabla de valores*]. 1.65 por 1/2 al cuadrado, igualé

[L129] E: 0.4 [*Respuesta de algunos estudiantes.*]

[L130] P: 0.4, es correcto. El que sigueé [*El valor que corresponde en la tabla de valores es 1.5y cuya razón es 3/4.*]

[L131] E: [*Los estudiantes calculan el siguiente valor, se escucha solamente el murmullo*].

[L132] E: 0.9 [*Respuesta de un estudiante*.]

[L133] P: ¿Cuánto hijo? A ver,é

[L134] E: 0.9

[L135] P: 0.9 es correcto, muy bien. El que sigue [*el valor que corresponden la tabla de valores es 2, que es la distancia inicial, cuya razón es 1.*] Lo confirmamos nada más, a ver si es cierto, pero en vez de 2,¿qué sería?

[L136] E: 1

[L137] P:1, entonces, sería 1.65 por 1 al cuadrado, y nos va a daré

[L138] E: 1.7 [*El resultado es:* $(1.65)(1)^2 = 1.65$]

[L139] P: 1.7, por el redondeo, ponle 1.7.

[L140] P: Abajo, ¿el de 2.5? [*Para este valor la razón es 5/4*.]

[L141] E: 2.57 [*Es el resultado de:* $(1.65)\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 2.578125$].

[L142] P: 2.6, es correcto, ¿y el último? [*El valor que corresponde a 3 y cuya razón es 3/2*.]

[L143] E: 3.7 [*Es el resultado de:* $(1.65)\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3.7125$].

[L144] P: ¿Cuánto?

[L145] E: 3.7 [*Responde una estudiante que está cerca del profesor*.]

[L146] P: 3.7, correcto.

Durante esta parte de la clase, el profesor conduce al grupo para calcular las diferentes áreas de la pantalla que se obtienen al cambiar la distancia a la que ésta se encuentra del proyector. Nuevamente, la dinámica que establece el profesor Alejandro para obtener las áreas es verbal; no utiliza el pizarrón como un recurso visual y didáctico que le permita al grupo de estudiantes dar seguimiento a las operaciones indicadas o de corroborar que los resultados que ellos están obteniendo son los correctos. Aun cuando el profesor va dando los resultados, se percibe en el video que no todos los estudiantes están siguiendo las indicaciones, y no están obteniendo los resultados anunciados.

La siguiente tabla muestra los resultados que se obtuvieron hasta este momento de la sesión.

Tabla 5

Resultados obtenidos por los estudiantes a sugerencia del profesor Alejandro

Distancia en metros (m) a la que se colocó el proyector x	Razón	Fórmula $A_i = A_o\, r^2$	Área (m^2) de la imagen proyectada y
0.5	$\frac{1}{4}$	$A_i = (1.65)\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0.103125$	0.1
1.0	$\frac{1}{2}$	$A_i = (1.65)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.4125$	0.4
1.5	$\frac{3}{4}$	$A_i = (1.65)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.928125$	0.9
2.0	1	$A_i = (1.65)(1)^2 = 1.65$	1.7
2.5	$\frac{5}{4}$	$A_i = (1.65)\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 2.578125$	2.6
3.0	$\frac{3}{2}$	$A_i = (1.65)\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3.7125$	3.7

En esta última parte del episodio, el profesor da indicaciones sobre la gráfica y los valores que se deben asignar a los ejes coordenados.

[L147] P: Ahora, yéndonos al Plano Cartesiano, nuestras medidas del valor *x* [*Eje X*] siguen siendo las que tiene ahí: 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5 y 3, esas son. Ya las anotaron, o si las tiene.

[L148] P: Y en [*el eje*] Y, vamos a poner el redondeo, 0.1, de uno en uno: 0.1, 0.2, [*En cuanto a los valores que se le asignan al eje Y, el profesor no precisa porqué toma la escala de 0.1, o de décimos.*] ¿Hasta dónde?

[L149] E: Hasta el 4 [*Repuesta de una estudiante.*]

[L150] P: Hasta el 4, entonces necesitamos una tablita [*Plano Cartesiano*] más grande todavía, esa tablita si nos alcanza ¿no? [*Se refiere al Plano Cartesiano que propone el libro, aunque la escala del eje Y en éste, es diferente de la que propone el profesor Alejandro.*] Intenten localizar esas coordenadas, las que acaban de tener ahorita, aunque sea de carácter un tanto aproximado.

[L151] E: Ya [*Algunos estudiantes empiezan a responder en cuanto terminan de graficar*].

[L152] P: Les pregunto, ¿les está dando una línea recta, o curva? [*En realidad no se trata ni de una recta ni de una curva de forma continua, sino de puntos en el plano que al unirlos, si se desea "ver" la gráfica resultante, resulta la curva que el profesor quiere que los alumnos "descubran".]*

[L153] E: Curva. [*Respuesta orientada, o bien, inducida por la práctica escolar*.]

[L154] P: Curva, ok.

[L155] E: Parábola [*Un estudiante dice el nombre de la curva*].

[L156] P: ñQuiere llegar a ser una parábolaò,é es un tanto incompleta ¿no?, incompleta. [*Afirmación*]

En esta reflexión que hace el profesor Alejandro sobre el tipo de curva hay un planteamiento erróneo, dado que las parejas ordenadas obtenidas en la tabla de valores son puntos ñdiscretosò en el plano y no son suficientes para determinar si la gráfica corresponde a una línea recta o a una curva, particularmente una parábola. En la siguiente figura, se muestran los puntos en el plano que se obtiene con la tabla de valores.

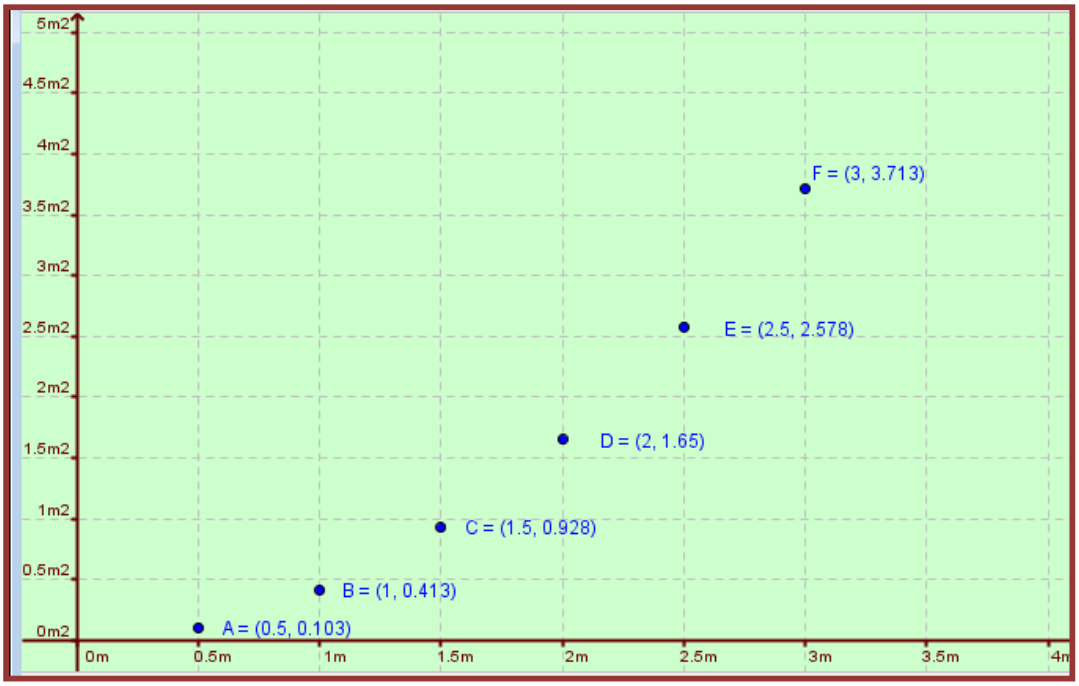


Figura 4.17. ñGráficaò obtenida a partir de la tabla de valores sugerida en el libro de texto.

En este momento, el profesor deja de lado el tema de la gráfica sin dar más datos o explicaciones sobre las parábolas y sus características.

[L157] P: Lo que quiero enfatizar ahorita es más que nada el uso de esa fórmula no en balde la habíamos calculado antes [*no hay recordatorio explícito sobre cómo se obtuvo esta fórmula*]. Hace ocho días la ñsacamosò apenas, no tenían ustedes porque perderla, sino con toda seguridad usarla en ese momento. Es más, decirme: el autor de este libro está incorrecto [*equivocado*] porque ya lo habíamos trazado, y después de trazado, calculado, demostrado qué fórmula teníamos que usar.

En esta parte del discurso del profesor, se observa nuevamente que mantiene la idea de que hay un error en el libro de texto, en torno a la redacción del Problema 2, e insiste en señalarlo a los estudiantes, y se desvía de la reflexión que hacía previamente acerca de la gráfica trazada por los estudiantes, haciendo uso de los valores contenidos en la tabla.

[L158] P: Bien, de preferencia si se pudiera trabajar en una hoja milimétrica, esa [*la gráfica de la parábola*] estaría mucho mejor puesto que daría la curva un poco más definida, como va a ir dando. Ya habíamos dicho que era parte de una parábola

que nos daba un ala nada más. [*No explica a qué se refiere con ala de la gráfica, pero se entiende de forma implícita que es una parte de la gráfica.*]

[L159] E: ¿Un ala? [*Rumor de los estudiantes.*]

[L160] P: Bien, vuelvo a regresar a los conocimientos y a la intención [*se refiere a los objetivos señalados en el Plan de estudios de este contenido matemático*]. La intención que indique que los alumnos elaboren, caractericen e interpreten a estas gráficas, entonces [a] la persona que le toca esto tiene que investigar, cuál es la forma de la gráfica, qué características tiene. La parábola tiene ciertas características, tiene, preocúpense por buscarlas ¿no? Hay libros, hay diccionarios matemáticos. Los invito a que terminen bien su exposición en las que siguen. Bien hijos, en la siguiente clase quiero calculadora todos.

4.3.6.1. Análisis del quinto episodio

Este último episodio es interesante porque muestra al profesor Alejandro abordando en la sesión, el Problema 2 que en una clase anterior quedó sin terminar, ya que la solución que se encontró fue poco satisfactoria, e incluso, causó confusión, tanto para el profesor como para los estudiantes, respecto a las condiciones que plantea el Problema. De acuerdo con la Aproximación Documental de lo didáctico, es evidente que el profesor no llevó a cabo un trabajo documental previo a la exposición de los estudiantes sobre la solución del Problema 2. Durante el desarrollo de toda la Actividad, propuesta por el libro de texto, el profesor no evidencia tener información que indique tener clara comprensión en torno a la relación entre los datos y la incógnita del Problema 2. En este sentido, con la práctica de este profesor no es posible percibir la espiral que mencionan Gueudet y Trouche (2009), respecto a cómo los recursos son transformados por los usuarios de estos en documentos; que a su vez vuelven a ser recursos (véase Figura 2.2).

A lo largo de este episodio se han redactado varias notas [comentarios] sobre el desarrollo de la sesión y de la participación del profesor durante la solución del Problema 2. En esas notas se destaca el lenguaje poco preciso y ambiguo que utiliza el profesor para explicar los conceptos involucrados, tanto en la redacción como en la solución del Problema 2; el lenguaje es un recurso no material importante para la comunicación. En la Tabla 1 presentada en el Capítulo 2 de esta tesis, se señala que el lenguaje es un recurso

social que facilita la verbalización de los conceptos y la comunicación de los implicados en el proceso educativo. Como se ha señalado a lo largo de este capítulo, la falta, o limitación de este recurso en el profesor, dejó imprecisiones, en cuanto a los conceptos matemáticos que desea enseñar a los estudiantes.

También, se observa que los conocimientos (recursos) matemáticos del profesor son insuficientes para explicar a los estudiantes las características que tienen las funciones cuadráticas, el tipo de gráfica que se obtiene de éstas, y las características que tienen dichas gráficas. En este sentido, en L156 y L158 se puede observar que sus conocimientos (recursos) sobre la gráfica de la parábola son un tanto deficientes, o al menos el lenguaje que utiliza no le ayuda a expresar sus ideas de manera adecuada. En esas líneas menciona que la gráfica resultante está incompleta, pero, ¿según qué, o en referencia a qué? ¿Cuándo se puede dibujar una parábola ñcompletaò? El profesor, también dice que la gráfica que se obtiene con la tabulación da ñun alaò de la parábola, ¿a qué se refiere con esta expresión? ¿Matemáticamente significa algo? Más bien, la expresión de "ala" de la parábola se refiere de manera implícita a una parte de esa gráfica, sin precisar a qué parte de esa gráfica se hace mención.

Para enfocar la atención de algunas características de la gráfica (tipo de gráfica e intersecciones con los ejes), en la Actividad que incluye al Problema 2, se proponen tres preguntas [en el libro de texto] para ser discutidas en el grupo (véase Figura 3.7), sin embargo, en el desarrollo de esta clase, el profesor Alejandro fue el protagonista de la resolución del Problema 2 y los estudiantes solamente siguieron sus indicaciones, y la discusión con los estudiantes estuvo *ausente*.

Durante el desarrollo de este episodio, se puede observar que la *Configuración didáctica* (Drijvers & Trouche) en la que están involucrados el profesor Alejandro y los estudiantes, tiene un enfoque tradicional, a pesar de que el profesor funge como conductor de la Actividad. En la relación que se establece durante la clase, entre el profesor y los estudiantes, el profesor se convierte en el proveedor, o depositario, del conocimiento y de los contenidos matemáticos que conciernen a la resolución del Problema 2. Al mismo tiempo, los estudiantes son sujetos pasivos, cuyo papel se limita a recibir y reproducir los contenidos que les fueron proporcionados.

En este sentido, el Contrato Didáctico que rige la dinámica de la clase, está marcado por el protagonismo del profesor Alejandro al resolver el Problema 2. Dentro de las interacciones que se presentan en esta Actividad, se presenta un efecto, que de acuerdo con Brousseau, inhibe o interrumpe, la construcción del conocimiento que deberían lleva a cabo los estudiantes dentro del medio didáctico en el que ésta se desarrolla.

Aún cuando el profesor resolvió el Problema2 y llegó a la solución correcta, la vía que utilizó para plantear la solución fue a partir del concepto de homotecia. Sin embargo, no logró relacionar la solución que él propuso con el enunciado de ese Problema. Esta confusión puede tener su fundamento en la estructura que tiene el libro de texto, ya que como se mencionó en el tercer capítulo de este trabajo, la organización de este libro consta de 5 Bloques y en cada uno de ellos se abordan temáticas referentes al sentido numérico y pensamiento algebraico; a la forma, espacio y medida, y al manejo de la información. Esta organización no permite que haya continuidad conceptual entre algunos temas. En la siguiente tabla, se muestra el contenido y la organización del Bloque 3 presentado en el libro de texto.

Tabla 6

Organización temática del Bloque 3, tomado de Arriaga et al.(2008, p. 7).

Bloque 3
Entrada del bloque (introducción)
SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO Tema: Significado y uso de las literales Apartado 1: Relación funcional (Funciones) Apartado 2: Ecuaciones III (Fórmula general de las ecuaciones cuadráticas)
FORMA, ESPACIO Y MEDIDA Tema: Formas geométricas Apartado 3 : Semejanza III (Teorema de Tales) Tema. Transformaciones Apartado 4: Movimientos en el plano (Homotecia)
MANEJO DE LA INFORMACIÓN Tema: Representación de la información Apartado 5: Gráficas III (Gráficas de funciones no lineales) Apartado 6: Gráficas IV (Familia de gráficas de funciones no lineales) Apartado 7: Gráficas V (Gráficas formadas por rectas y curvas)
Aplicación de aprendizajes Exploración de recursos tecnológicos ¿Cuánto aprendí?

Como se observa en esta tabla, el concepto de función cuadrática aparece en el Apartado 2, con la ecuación de segundo grado. En los apartados 3 y 4 se abordan otras

temáticas relacionadas con formas geométricas y transformaciones, y es hasta el Apartado 5 que nuevamente se abordan las funciones cuadráticas con la gráfica de estas funciones; mediante esta organización del contenido se pierde la continuidad de los conceptos. En este sentido, los recursos físicos que utiliza el profesor Alejandro para construir e interpretar gráficas de funciones no lineales, el Programa de estudios (SEP, 2006) y el libro de texto (Arriaga et al., 2008), no le proporcionan la ayuda suficiente para abordar y trabaja estos conceptos con los estudiantes.

4.3.7. Recapitulación en torno a los recursos utilizados por el profesor en su práctica docente

4.3.7.1. Recursos físicos: Programa de estudios y libro de texto

Aunque ya se ha mencionado en varias partes de esta tesis, conviene subrayar que los recursos físicos utilizados por el profesor durante la Actividad implementada con sus estudiantes fueron el Programa de estudios y el libro de texto. Estos recursos no proporcionan al profesor información suficiente que le permita desarrollar la Actividad en la clase. Por un lado, en el Programa de estudios, las orientaciones didácticas de éste son un tanto confusas y poco entendibles; por otro, la redacción de los objetivos es imprecisa y poco explícita; por ejemplo, en la redacción de los conocimientos y habilidades que se pretende desarrollen los estudiantes (véase Figura 4.16), se indica, primero: interpretar y después construir y utilizar las gráficas, cuando debiera ser recomendado un orden de tratamiento, como: construir y después interpretar las gráficas construidas a partir de los puntos generados al resolver algún problema.

En el mismo Programa de estudios, hay confusión o información poco precisa en cuanto a los conocimientos y habilidades que deben desarrollar los estudiantes al abordar el tema sugerido; por ejemplo, en el Programa (SEP, 2006), se lee: *Utilizar ecuaciones no lineales para modelar situaciones y resolverlas utilizando procedimientos personales u operaciones inversas*(p. 115). Aunque en el Programa de estudios no se explicita el significado de "situación" se entiende que se trata de "problema"; sin embargo, el problema o situación no puede ser modelado, sino el proceso (resolución) que conduzca a su solución. Es confuso cuando en el Programa se sugiere que sean utilizados "procedimientos personales" para resolver esas situaciones, ¿qué debe entender un profesor cuando le

sugieran que utilice esos tipos de "procedimientos" para resolver un problema? ¿No debería mejor decir: "procedimientos institucionales" en el sentido de Chevallard (1999)? Dado que esta sugerencia de procedimiento es confusa, en su práctica, los profesores de este nivel educativo, al momento de resolver algún problema "echen mano" de cualquier recurso disponible para resolver el problema propuesto en los libros de texto oficiales o en algún otro libro de matemáticas.

La confusión es aún más evidente, cuando en el Programa de estudios (c.f., conocimientos y habilidades, p. 115) se afirma que sean utilizados *procedimientos personales u operaciones inversas* para resolver situaciones. ¿Qué significado tiene el hecho de sugerir el uso de *operaciones inversas*? ¿De qué objeto matemático? En la página 116 del mismo Programa, en conocimientos y habilidades, se lee: *Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización*. La "ecuaciones cuadráticas" no pueden ser utilizadas para modelar situaciones, sino más bien las "funciones cuadráticas"; de modo que de nuevo, no es clara la información dada al profesor en esta parte del Programa de estudios. La lista de inconsistencias contenidas en el Programa de estudios (SEP, 2006), en cuanto a las orientaciones didácticas, así como en los conocimientos y habilidades que se sugiere deben desarrollar los estudiantes, es notoria.

En cuanto al libro de texto utilizado por el profesor en su práctica (Arriaga, et al., 2008), hay carencias de información precisa en cuanto a las definiciones de conceptos; por ejemplo, el de homotecia. En el libro de texto se lee sobre este concepto: *Transformación geométrica, lineal que, a partir de un punto fijo (centro), multiplica todas las distancias por una constante* (*razón de homotecia*) (p. 224). En efecto, se trata de una transformación geométrica lineal (también llamada *afín*) con las demás características señaladas en la definición del libro de texto, sólo hace falta agregar que la constante mediante la cual son multiplicadas todas las distancias, a partir de un punto fijo, debe ser la *misma*.

Respecto al Problema 2 que resuelve el profesor Alejandro, junto con sus estudiantes, la redacción de éste poco clara, respecto a: la incógnita misma de éste, la tabla de valores, el plano cartesiano y las preguntas, sugeridas por los autores del libro de texto. Respecto a la incógnita del Problema 2, una vez establecidos los datos de éste, se dice: "[...] si nos acercamos a la mitad de la distancia, lo largo y lo alto de la imagen también

disminuye a la mitad. ¿Cuánto mide ahora su área?" De esta redacción surgen las preguntas: ¿qué objeto se mueve? ¿El proyector o la imagen que éste proyecta sobre la pantalla? La incógnita misma no parece representar una variable, pues no se percibe el proceso de irse acercando *cada vez* a la mitad de una cierta distancia.

La tabla de valores, el plano cartesiano y al final las preguntas que los autores sugieren que respondan los estudiantes y que las discutan con sus demás compañeros parecen más bien "completar" la información no dada en el Problema 2. Es decir, ellos [los autores] "obligan" a que los estudiantes sigan el proceso de solución por ellos sugerido, y no permiten que en ellos emerjan estrategias [propias] que les permitan resolver el problema propuesto. La sugerencia de los autores del libro de texto de usar una tabla de valores para bosquejar "la gráfica" desvirtúa el carácter continuo del proceso de "irse acercando cada vez a la mitad de la distancia" entre un objeto y otro. De esta forma, los autores transforman un proceso continuo en otro discreto, sin mediar discusión alguna. Pedir que los alumnos grafiquen en el plano cartesiano los puntos obtenidos, una vez completada la tabla de valores, y que después digan de qué gráfica se trata, y más aún que identifiquen dónde ésta interseca a los ejes coordenados X e Y, carece totalmente de sentido.

4.3.7.2. Recursos matemáticos y didácticos usados por el profesor

Aun cuando el profesor fue capaz de resolver el Problema 2, usando las sugerencias plasmadas en el libro de texto junto con la fórmula sugerida por él, no llevó a cabo una discusión en torno a: los datos del problema, sus condiciones y la incógnita misma. Una vez resuelto el problema por el profesor, éste no puso énfasis en la interpretación gráfica de la solución obtenida. Los recursos matemáticos (conocimientos, conceptos y tareas matemáticas involucrados) que usó para darle solución al problema fueron: el concepto de homotecia, razón de homotecia y área de una figura rectangular (largo por alto), así como la aplicación de la fórmula $A_i = A_o\, r^2$. Mediante el uso de este recurso, el profesor halló la expresión simbólica del área de la imagen proyectada en las diferentes distancias a las que se ubica el proyector de la pantalla. Este trabajo con los estudiantes fue dirigido por él, sin que mediara discusión alguna con ellos.

Los recursos didácticos utilizados por el profesor fueron: la exposición de los estudiantes y la solución que da él al problema utilizando la fórmula del área de la imagen $A_i = A_o\, r^2$ donde r es la razón de homotecia. La práctica docente de este profesor denota un trabajo documental deficiente o casi nulo; tal como es evidenciado a través del análisis de los distintos episodios de su práctica en el salón de clases. La falta de trabajo documental, por parte del profesor se ve reflejada en la incorrecta interpretación de las condiciones del problema, y en su lenguaje matemático impreciso al momento de plantear preguntas a los estudiantes, tendientes a la solución del problema en cuestión.

A manera de conjetura, se puede inferir que los esquemas de utilización del profesor Alejandro en torno a la los recursos están relacionados con lo algebraico, ya que utiliza este dominio de conocimiento para completar la tabla de valores propuesta en el libro de texto; usa la razón de homotecia para obtener el área de la imagen proyectada en las diferentes distancias a las que se coloca el proyector de la pantalla. Respecto a los recursos matemáticos, parece que los esquemas de utilización del profesor son limitados en cuanto a la interpretación gráfica de las funciones no lineales; en particular, la función cuadrática. Ello se debe posiblemente a las limitaciones o poca claridad en la redacción del Programa de estudios (SEP, 2006) y el libro de texto utilizado. Para finalizar este parágrafo, es pertinente la siguiente cita de Gueudet y Trouche (2010):

> Si la interacción de los profesores con los recursos es una constante internacional, los modos de trabajo tienen una gran variabilidad, en función de los factores intelectuales, culturales y económicos. Un último aspecto, crucial, las prolongaciones necesarias, referentes a las preguntas de la eficacia del trabajo documental. El recurso a ciertos recursos, el trabajo colectivo, ciertos invariantes operatorios [esquemas de utilización del conocimiento] de los profesores ¿favorecen el aprendizaje de los alumnos? El estudio de esta pregunta, directamente vinculada con la problemática de la calidad de los recursos y de su uso es un trabajo a emprender. (p. 72)

En el siguiente Capítulo se da respuesta a las preguntas de investigación propuestas en el Capítulo 1, así como de los objetivos propuestos en ésta.

CAPÍTULO5

CONCLUSIONES

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo, son dadas las conclusiones de la presente investigación. Estas conclusiones se obtuvieron a partir del análisis de los datos recolectados y de la discusión de los recursos utilizados por el profesor en su práctica docente. Al inicio de este capítulo, son retomados los objetivos de investigación, plasmados en el Capítulo 1 de esta tesis; posteriormente, se da respuesta a las preguntas de investigación que guiaron y condujeron este trabajo, y que fueron expuestas en el primer capítulo de esta tesis. Al final de este capítulo, son discutidas algunas reflexiones sobre futuras investigaciones relacionadas con la temática abordada en este trabajo.

5.2. RESPECTO A LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Los objetivos de esta investigación son: identificar y analizar los recursos didácticos y matemáticos que usa el profesor de matemáticas de tercer grado de educación secundaria en su práctica docente; los elementos teóricos y metodológicos que aporta el plan de estudios y el libro de texto utilizado por el profesor de matemáticas, y los recursos que utiliza el profesor en la planeación didáctica, así como las estrategias de aprendizaje planeadas y su impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

La presente investigación tiene como base el trabajo del profesor Alejandro, al discutir la solución de un problema con sus estudiantes en el salón de clases. Mediante el análisis de sus clases, utilizadas para resolver un problema del libro de texto, se pudo identificar que los recursos didácticos y matemáticos que pone en juego en la clase son limitados. Esta limitación del uso de recursos físicos y sus propios conocimientos sobre la temática que implica resolver el problema en cuestión, puede ser debida a la forma elegida para abordar la resolución del Problema, sin dejar de lado que tanto el Programa de estudio (SEP, 2006) como el libro de texto (Arriaga et al., 2008), carecen de información suficiente, y poco clara, lo que impide que el profesor lleve a cabo con éxito la Actividad.

5.2.1. Los recursos didácticos

La planeación de la clase y la organización de la Actividad; así como la resolución del Problema 2 fueron abordados de tal manera que en el transcurso de estas sesiones hubo una limitada participación de los estudiantes.

La configuración didáctica que, al inicio de la Actividad prometía establecer una buena forma de explotación de ella se transformó en una de tipo tradicional, en la que el profesor fue el protagonista y dispensador del conocimiento, y los estudiantes simples ejecutores de las indicaciones dadas. Durante el desarrollo de la Actividad es notoria la ausencia de estrategias de aprendizaje planeadas por el profesor para sus estudiantes, pues con frecuencia no daba oportunidad para que en ellos emergiera conocimiento matemático; por ejemplo, cuando el Profesor Alejandro resolvió el Problema, no incorporó el trabajo de los estudiantes, quienes expusieron a la solución de éste a sus demás compañeros.

Durante la solución del Problema 2, por parte del profesor, él no promueve la participación de los estudiantes en el ejercicio de reflexión sobre el método de solución. El profesor les indica qué fórmula utilizar y cómo obtener los resultados a partir de las operaciones aritméticas con los datos del Problema 2. Esta forma de interacción (profesorï estudiante) no beneficia el aprendizaje de los estudiantes respecto a las funciones no lineales, ya que el profesor soluciona el Problema 2, utilizando sus recursos matemáticos (conocimientos), y es a partir de sus esquemas de utilización que él interpreta la manera más adecuada de resolver ese problema.

En seguida, se da, de manera sucinta, información sobre la *participación* de los estudiantes durante las clases utilizadas por el profesor para resolver el Problema 2:

Primera clase: solamente participaron en las exposiciones dos estudiantes que llevaron el material preparado (láminas de papel bond). El resto del grupo, cerca de 50 estudiantes (el grupo estaba formado por 54 estudiantes) estuvieron sentados en su lugar escuchando a los expositores. Más adelante, cuando el profesor interpretó erróneamente los datos del Problema, influenciado por la participación de una de sus estudiantes, es él quien propone la forma de resolver el Problema 2. Así, en esta primera clase, el papel que jugaron los estudiantes es pasivo, ya que solamente se limitaban a escuchar las indicaciones del profesor.

Segunda clase: del mismo modo, en esta segunda clase el profesor Alejandro fue quien resolvió el Problema 2, y los estudiantes solamente siguieron las indicaciones que él les daba para llegar a la solución.

A manera de conjetura, se puede decir que el profesor Alejandro no aprovechó el discurso de los estudiantes de manera que los recursos (contenidos matemáticos inmersos en el Problema 2) fueran convertidos en documentos en el sentido que plantean Gueudet y Trouche (2009).

5.2.2. Los recursos matemáticos

En cuanto a los recursos (conocimientos) matemáticos del profesor, se nota un uso *débil* de ellos abordar el Problema con las condiciones dadas en el enunciado del mismo. La falta [o debilidad] de conocimiento del profesor en la solución del Problema 2 se ve reflejada en el lenguaje matemático impreciso e incorrecto al momento de resolver ese problema (e.g., la descripción de las funciones no lineales, la identificación clara de los datos e incógnita del Problema, etc.). La carencia de recursos [conocimientos matemáticos] del profesor puede deberse, de acuerdo con Chevallard y Cirade (2010), a cambios curriculares en los que aparecen nuevos temas o nuevas propuestas sobre cómo deben ser enseñados ciertos contenidos matemáticos, y que no han sido reflexionados por el profesor.

En este sentido, los contenidos teóricos y metodológicos presentes tanto en el Programa de estudios como del libro de texto, están organizados alrededor de tres ejes temáticos: *Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida y Manejo de la información*; distribuidos a lo largo de cinco bloques. Esta organización de contenidos dificulta el acceso adecuado del conocimiento matemático que se pretende aprendan los estudiantes, como se expuso en el capítulo anterior. En términos de la Aproximación documental de lo didáctico, se puede afirmar que los recursos que utiliza el profesor (el Programa de estudios y el libro de texto) no le proporcionan la ayuda necesaria para desarrollar el trabajo documental que le permita transformar sus recursos en documentos.

5.3. RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En este parágrafo se da respuesta a las preguntas que motivaron esta investigación, a partir del análisis de datos presentado en el capítulo anterior, así como en la discusión de resultados.

La pregunta principal de este estudio es:

¿Qué influencia tiene el uso de recursos matemáticos y didácticos del profesor de matemáticas en su práctica docente?

Para dar respuesta a esta pregunta, se analizaron los diferentes recursos que involucra el profesor de matemáticas para impartir su clase, y se plantearon tres preguntas secundarias.

A. ¿Cómo utilizan los recursos disponibles los profesores de matemáticas, en la enseñanza de las funciones no lineales?

Los recursos materiales [o físicos] involucrados por el profesor en su práctica: el Programa de estudios y el libro de texto (Arriaga et al., 2008), no le proporcionaron el soporte matemático adecuado para el desarrollo de su clase. Por ejemplo, respecto a las funciones no lineales, estos recursos no dieron al profesor una definición de función; no se explicita la diferencia entre una ecuación y una función lineal, tampoco dan una clasificación de funciones que ubique a las funciones no lineales en ese contexto. Una clasificación de las funciones respecto a la ubicación de las no lineales, corresponde al tipo de expresión matemática que las caracteriza; en este sentido, una rama de esta clasificación corresponde a las funciones algebraicas, que a su vez se subdividen en: polinomiales, racionales e irracionales.

Dentro de las funciones polinomiales se ubican las funciones lineales y las no lineales y como parte de las funciones no lineales [dentro de las polinomiales], se encuentran las de segundo, tercero, cuarto grado e incluso cualquier otro grado superior. A manera de resumen, la información precedente puede ser presentada como en la siguiente figura:

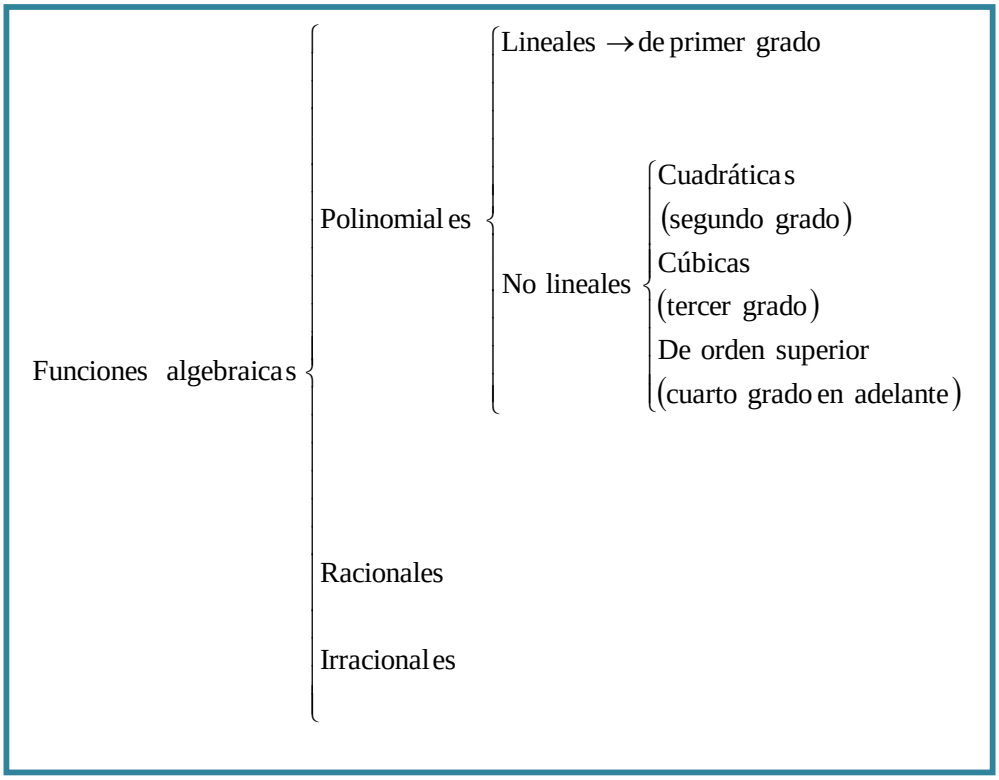


Figura 5.1. Clasificación de las funciones algebraicas.

Una vez ubicadas las funciones no lineales en la clasificación de acuerdo con su expresión simbólica, es posible afirmar que el profesor cuenta con pocos recursos matemáticos para abordar el estudio de las funciones no lineales; no solamente en su representación algebraica, sino también en cuanto a su representación gráfica. Las características de la parábola; que resultó ser la gráfica solución del problema resuelto por el profesor con sus alumnos, no fueron discutidas ampliamente por el profesor durante su práctica docente.

Por tanto, la respuesta a esta pregunta de investigación es que el profesor no pudo utilizar los recursos algebraicos pertinentes, ni los recursos geométricos, entendidos como el uso de las representaciones geométricas de las expresiones algebraicas, para abordar la enseñanza de las funciones no lineales. También fue evidente, durante su práctica en el salón de clases, que los recursos materiales utilizados no le proporcionaron el contenido matemático adecuado para el desarrollo de su clase, de modo que pudiera apropiarse de estos y transformarlos en documentos, en el sentido de la génesis documental (Gueudet & Trouche, 2009). Las evidencias mostradas en el Capítulo 4 de esta tesis, reafirman el

comentario anterior; a partir de estas evidencias, es pertinente la pregunta: ¿a qué se debe esta falta de recursos, por parte del profesor, y que son evidenciados en su práctica? Algunas respuestas posibles puedes encontrarse en la estructura del Programa de Estudios (2006), analizado en el Capítulo 3; otra es el tiempo asignado a cada clase no sólo los 50 minutos para la clase diaria, sino también el tiempo programado en las planeaciones didácticas, para abordar los temas del curso.

B. ¿Qué papel juega el currículo y el Plan de Estudios (como recursos) para que el profesor de matemáticas ponga en juego otros recursos en la enseñanza de la representación gráfica de las funciones no lineales?

Respecto a esta pregunta, se debe mencionar que el Plan de Estudios de Educación Secundaria (2006), acorde con los objetivos del currículo, plantea que en el área de matemáticas los conocimientos y las habilidades que se espera logren los estudiantes en cada bloque están organizadas de tal manera que ellos vayan teniendo acceso gradual a contenidos cada vez más complejos y a la vez que puedan establecer conexiones entre lo que ya saben y lo que están por aprender. En el Plan de Estudios, también se contempla que puedan darse otros criterios (aunque no especifica cuáles) para establecer la secuenciación de los contenidos, en cuanto a su enseñanza por parte del profesor.

La respuesta a esta pregunta de investigación puede ser sustentada por el hecho de que aun cuando el Plan de estudios contempla los contenidos para abordar la enseñanza de las funciones no lineales, no proporciona los fundamentos matemáticos que necesita el profesor y tampoco las orientaciones didácticas son lo suficientemente explícitas para que el profesor pueda integrar los contenidos teóricos de las funciones no lineales; en particular, los correspondientes a las funciones cuadráticas, y relacionarlos con su representación gráfica.

Gueudet y Trouche (2009 y 2010) afirman que los recursos por si mismos no cambian la práctica del profesor, la funcionalidad de un recurso en y para la enseñanza de las matemáticas reside en su uso en la práctica, más que es su simple presencia. Es decir, aun cuando el profesor Alejandro dispuso del Programa de estudios y de un libro de texto de matemáticas, estos recursos, esenciales para llevar a buen fin su práctica, no le

proporcionaron la ayuda necesaria para utilizar sus recursos matemáticos durante el proceso de transformación de recurso a documento apoyado por el trabajo documental.

Ante esta falta de uso de recursos, surge la interrogante: ¿a qué se debe que el profesor no use adecuadamente los recursos físicos disponibles? ¿Cuáles son las causas que originan la falta de conocimiento matemático de este profesor? A manera de conjetura es posible decir que un factor determinante de esta falta de recursos, o de su utilización, se debe a la falta de conocimiento de los nuevos contenidos curriculares o su organización, así como una deficiente capacitación como docente.

Otra explicación posible [de un uso inadecuado de recursos del profesor durante su práctica docente] es que la estructura [organización de contenidos] del libro de texto no facilita dar continuidad a las temáticas que aborda, dando como resultado que el profesor tenga dificultad en la tarea de *enlazar* los conocimientos matemáticos que el estudiante debe construir. En este sentido, Guzmán y Kieran (2013) describen esta situación como ñvacios matemáticosò del recurso del libro de texto, el proceso de toma de conciencia y la superación de estas deficiencias (p. 185).

C. ¿Cuáles son las tareas y Actividades que propone el profesor de matemáticas durante sus clases para lograr el aprendizaje de los alumnos?

En el desarrollo de la Actividad, central en esta investigación, el profesor utilizó pocas estrategias para lograr el aprendizaje de los estudiantes. La mayor parte del tiempo fue él quien se hizo cargo de la conducción de la clase, y de dar la palabra a los estudiantes en las intervenciones que tuvieron. Lo más importante, durante el desarrollo de la clase, fue que el profesor proporcionó una estrategia para resolver el Problema, poniendo en acción sus esquemas de utilización, haciendo referencia a un problema de homotecia y utilizando una fórmula específica ($A_i = A_o\ r^2$) que obtuvo en una clase previa con sus estudiantes, tal como él lo comenta con ellos. Aunque la solución obtenida por el profesor es correcta, él no llevó a cabo con sus estudiantes comentarios favorables respecto al método que ellos utilizaron para resolverlo, y tampoco les aclaró las razones por las cuales la respuesta que ellos obtuvieron era incorrecta.

Abarcando los aspectos que cubren estas tres preguntas, es posible concluir que la influencia que tienen los recursos matemáticos y didácticos del profesor en su práctica

docente es limitada, ya que el profesor no pudo integrar el conjunto de recursos (materiales, didácticos y conocimientos matemáticos, etc.), para llevar a cabo una apropiación de estos así como su transformación que le permita generar nuevos recursos para su práctica docente. Al respecto, Gueudet y Trouche (2009) enfatizan que:

> La génesis documental no debe ser considerada como una transformación de un conjunto de recursos como entrada y un documento de salida [é]un documento elaborado a partir de un conjunto de recursos proporciona nuevos recursos que pueden estar involucrados en un nuevo conjunto de recursos, lo que conduce a un nuevo documento, etc. Debido a este proceso, se habla de una relación dialéctica entre los recursos y documentos. (p. 206)

La falta de recursos, por parte del profesor, se hizo evidente en distintos momentos de las sesiones [dos clases]. Un recurso didáctico y matemático que estuvo ausente fue la discusión en torno al significado de la representación gráfica de las funciones no lineales; en particular, las funciones cuadráticas. En ambas sesiones, el profesor usó la gráfica a partir de la representación que hicieron algunos estudiantes en su libro de texto; en ninguna de estas sesiones elaboró la gráfica con sus estudiantes.

Respecto a la gráfica: ésta en ella misma es un recurso matemático importante, ya que proporciona información sobre el Problema, y sobre la relación que guardan entre sí las variables: Distancia (x) a la que se coloca el proyector y el área de la imagen proyectada (y), tomando en cuenta la condición explícita del Problema 2 resuelto en clase.

5.4. INVESTIGACIONES FUTURAS

La práctica del profesor ha sido objeto de varias investigaciones, debido a la importancia que ésta tiene en los procesos de enseñanza [por parte del profesor] y de aprendizaje [de los estudiantes] de las matemáticas. Autores como Adler, Ball, Watson, entre otros, señalan que es necesario saber cómo aprende el profesor de su práctica. En este sentido, dada la importancia de la práctica del profesor y del manejo que hace éste de los recursos a su disposición, se puede trabajar en una siguiente investigación, tomando como guía la siguiente pregunta: ¿qué sucede en la *reflexión durante la acción* de la práctica del profesor, analizando su práctica y reflexionando sobre ella?

Investigadores como Zodik y Zaslavsky (2008) proponen un modelo de investigación que permite identificar una conexión entre el conocimiento de los profesores

de matemáticas, la planificación de sus clases y sus interacciones en el aula. Estos autores también plantean que se puede dar cuenta del aprendizaje de los profesores de matemáticas a través de su propia práctica docente. De acuerdo con las investigaciones de Zaslavsky (2007) sobre la práctica del docente de matemáticas, el aprendizaje logrado por los profesores mediante su práctica es un proceso que puede llevar tiempo; sin embargo, hay una evolución de éste durante la práctica reflexiva.

Dado que la investigación casi siempre está alejada de la práctica del profesor, es pertinente la pregunta ¿cómo acercar los ñproductosò de la investigación a la práctica docente? Watson (2000) señala que, en los estudios sobre la práctica del docente se presenta una relación interesante entre la práctica del investigador y la práctica del profesor. En primer lugar, el profesor de matemáticas trata de averiguar lo que el estudiante sabe y puede hacer en matemáticas; es decir, busca comprender lo que sus alumnos conocen a través de la observación de sus clases. En segundo lugar, el investigador indaga lo que el maestro sabe y lo que hace al evaluar a los alumnos; en otras palabras, intenta comprender las acciones del profesor y las intenciones mediante las intervenciones.

Otra línea de trabajo que se desprende de esta investigación, para un trabajo posterior, es investigar cómo los profesores de matemáticas, se apropian de los recursos disponibles; cómo los transforman y crean nuevos *documentos*, a través del *trabajo documental*, como lo plantean Gueudet y Trouche (2010). Así de esta manera se podría desarrollar una investigación sobre la influencia que tienen, como recursos, el aprendizaje matemático y didáctico del profesor en su práctica y la reflexión que hace éste del uso de sus recursos durante su clase, y cómo se transforman a partir de esta reflexión.

Con estas líneas de investigación, en una interacción y reflexión con los profesores entre el estudio de su práctica y el producto de la investigación, se podría reflexionar sobre el trabajo que realizan como docentes y tener un mejor conocimiento, así como comprensión de sus recursos matemáticos y didácticos, de modo que la utilización de estos incida en la optimización del aprendizaje de las matemáticas, por parte de los estudiantes de cualquier nivel educativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adler, J. (2000). Conceptualizing resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 205-224.

Adler, J., Ball. D., Krainer, K., Lin, F-L. & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. Educational studies in mathematics, 60, 359-381.

Arriaga, A., Benítez, M. M. & Cortés, M. C. (2008). *Matemáticas 3. Introducción a las competencias*. México: Pearson.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In *J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, pp. 83-104.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bosch, M., Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Brousseau, G. (1997). *Didactique: what use is it to a teacher? Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Balacheff, N., Cooper. M., Sutherland, R. & Warfield, V. (Editores y traductores), 6, 253-274.

Brousseau, G., & Balacheff, N. (1997).*Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990* (p. 336). M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield (Eds.). Dordrecht: Kluwer academic publishers.

Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, Francia.

Brousseau G. (1999). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, México.

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2010). *Les ressources manquantes comme problème professionnel*. En Gueudet, G. &Trouche, L. (editores), Ressources vives; le travail documentaire des professeurs en mathématiques, 2, 41-55.

Chevallard, Y. (1999). Lôanalyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2)*, pp. 221-266.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2004). *Research methods in education*. USA: Routledge Falmer.

Da Ponte, J.P., Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En Gutiérrez, A., Boero, P. (*eds.*). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 461-494.

De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C. y Carrillo, A. (2006), *Conocimientos fundamentales de matemáticas, cálculo diferencial e integral*, UNAM-Pearson Education, México, 420 pp.

Drijvers, P. & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments. A theoretical framework behind the orchestra metaphor. *Research on Technology and the teaching and learning of mathematics: cases and perspectives*, Heid, M.K. & Blume, G.W. (Editores), Vol.2, 363-391.

Godino, J. D., Batanero, C. y Flores P. (1999). *El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores*. Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar, pp.165- 185.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in* Mathematics, 71, 199ï 218.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2010). *Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires*. Ressources vives; le travail documentaire des professeurs en mathématiques, Gueudet, G. &Trouche, L. (Editores), 3, 57-74.

Guzmán, J. & Kieran, C. (2013).Becoming aware of mathematical gaps in new curricular materials: A resource-based analysis of teaching practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10, 163- 190.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate peripheral participation*.Cambridge, UK: Cambridge, University Press.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes & les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Série Psychologie dirigée par Claude Bonnet et François Richard; Armand Colin (Editor), 239 pp.

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'enseignant comme gestion d'environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*, 343-388.

Secretaría de Educación Pública (1994/2001). *Libro para el maestro, Matemáticas secundaria, segunda edición*. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública (SEP).

Secretaría de Educación Pública (2006). *Programas de estudio, educación básica, secundaria, matemáticas*. Dirección General de Desarrollo Curricular, Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública (SEP).

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2),* 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57 (1),* 1- 23.

Stake, R.E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom interaction: An Epistemological Perspective*. Mathematical Education Library, Volume 38, 221 pp., Springer.

Straesser, R. (2007). Didactics of mathematics: more than mathematics and school! *ZDM Mathematics Education, 39*, pp. 165-171.

Taylor S. J. &Bogdan R.(1984). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Paidós, p. 301.

Vergnaud, G. (1996). *La théorie des champs conceptuels. Didactique des mathématiques*, Brun, J. (Editor), 3, 197-242.

Vérillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*, 77-103.

Watson, A. (2000). Mathematics teachers acting as informal assessors: Practices, problems and recommendations. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 69-91.

Wilkins, J.L.M. (2008). The relationship among elementary teachersô content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal in Mathematics Teacher Education, 11,* pp. 139-164.

Yin, R. K. (1989).*Case Study Research: Design and Methods, Applied social research Methods Series*, Newbury Park CA, Sage.

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related tasks, teacher education, and teacher educators. The dynamics associated with tasks in mathematics teacher education. *Journal in Mathematics Teacher Education, 10*, pp. 433-440.

Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachersô choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*, pp. 165-182.