



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.

Tesis que presenta

Melissa Andrade Molina

Para obtener el grado de Maestra en
Ciencias en la especialidad de Matemática
Educativa

Director de Tesis:

Dr. Ricardo A. Cantoral Uriza

México, D.F.

Septiembre, 2012

*Dedicado a todos los que
me acompañaron en este
camino.*

Agradezco muy especialmente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por sus programas de becas que apoyan la formación de científicos. Quienes, mediante el apoyo económico proporcionado, me permitieron realizar los estudios de maestría, en mi calidad de estudiante extranjera.

Melissa Andrade

N° de Becaria: 251765

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, por brindarme un apoyo incondicional en todas las locuras y proyectos que he tenido en el transcurso de mi formación académica, por la paciencia en escucharlas y por el esfuerzo y el tiempo que me han dedicado. Por comprender las noches de desvelo, las reuniones familiares a las que no pude asistir, los cumpleaños y celebraciones que me perdí, incluso la poca comunicación que tuvimos, todo por cumplir un sueño. En especial por aceptar mi opción de estudiar fuera del país por un período tan prolongado. Hemos vivido algunos momentos muy dolorosos y otros muy alegres, siempre hemos permanecido juntas, pero a pesar de la distancia que nos separó físicamente, siento que nos hemos acercado aún más...

A mi conejito, Alexis, por estar siempre junto a mí, por amarme y aceptarme tal cual soy, por apoyarme, por esperarme, por dedicarme palabras muy tiernas en los períodos más estresantes, por hacerme sonreír aún en los peores momentos, por entender que aunque nos separaron unos kilómetros los sentimientos no se desvanecen.

A mis amigos en Chile, por entender y valorar el tiempo que he dedicado a cumplir mis proyectos y metas, por faltar a las reuniones, cumpleaños, celebraciones y fiestas.

En especial a mis brujitas, Angela, Clivon, Sandy y Sofía, por acompañarme desde ya tanto tiempo, por escucharme, por aconsejarme, por entenderme, aún en los momentos más difíciles, agradezco su ayuda, paciencia y apoyo durante estos dos años. Y a Claudio, gracias por escucharnos y seguir nuestros consejos, tomaste una muy buena decisión, ¡aprovéchala al máximo!

A Alex y a Mario, por ser mis cómplices durante estos dos años. Alex, eres un apoyo incondicional, no sabría como agradecerte, nos conocemos hace años, compartimos muchas metas y sueños, ambos teníamos deseos de venir a estudiar al Cinvestav y compartir esta experiencia contigo, una más de todas las que hemos vivido, ha sido algo único... hemos tenido altos y bajos, pero nada que el tiempo y las buenas conversaciones no puedan solucionar. Mario, has sido un gran apoyo, sin ti no hubiese sido lo mismo, muchas gracias por compartir tus tradiciones yucatecas, por aceptarnos, a pesar de ser unos "chilenos raros".

A las personas que he conocido en estos dos años, especialmente a aquellos que se transformaron en algo que sólo puedo describir como una familia, por compartir sus experiencias, por entablar conversaciones interminables, por pasar momentos inolvidables, incluso por compartir buena comida. Son tantos nombres que sería difícil nombrarlos sin olvidar a uno, pero ya saben quiénes son, en especial a aquellos que nos han recibido con los brazos abiertos, muchas gracias a todos.

Finalmente al Dr. Ricardo, a la Dra. Asuman y a la Dra. Leonora, por los consejos que me han dado y por haber aceptado tan cordialmente acompañarme en este proceso.

Sé que queda muchísima gente afuera que desearía ver su nombre en estos agradecimientos, tantos doctores, compañeros y amigos, sin embargo saben que no los olvidaré, compartir esta experiencia con ustedes ha sido lo más gratificante de estos años y espero que sigamos en contacto sin importar donde nos lleven nuestros pies.

No me queda más que decir que sin ustedes no sería la persona que hoy soy, no pensaría de la forma que lo hago, no tendría nuevas metas que cumplir. Por todo esto...

MUCHAS GRACIAS.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo se direcciona en comprender el carácter sociocultural de la apropiación del espacio. Para ello se plantea, en primer lugar que la apropiación del espacio se ve influenciada por este escenario sociocultural, lo cual se logra corroborar mediante el planteamiento y posterior respuesta a dos preguntas de investigación, que se transforman en el eje articulador de este trabajo:

(1) ¿De qué manera las civilizaciones han logrado apropiarse del espacio a través del tiempo?

(2) ¿Cómo esta apropiación se ha visto influenciada por los escenarios socioculturales?

A fin de responder la primera pregunta (1), se caracterizó lo que será entendido por “*apropiación del espacio*”, estableciendo cuatro momentos, desprendidos de un análisis a los artículos considerados en una revisión, que ayudan a identificar cuándo reconoceremos que una civilización se apropió del espacio, los que son: Interacción con el entorno, extracción de propiedades del entorno, representación del entorno y manipulación mental del entorno.

En una segunda instancia se estudiaron las prácticas de una civilización en particular, el Antiguo Egipto, para identificar de qué manera se apropiaban del espacio y, de esta forma, descubrir elementos que nos den evidencia de ciertos tipos de influencias socioculturales, presentes al momento de apropiarse del espacio. En este análisis se identificaron cuatro factores: Aquellos que son mediadas por la cosmogonía de la

civilización, aquellos que son mediados por la visión del ser humano respecto de su entorno, aquellas que son mediadas por la información que se considera relevante difundir o transmitir mediante una imagen y aquellas que son mediadas por creencias de tipo religioso. Finalmente para responder (2) se contrastaron los resultados obtenidos anteriormente, sobre las prácticas en el Antiguo Egipto, con evidencia en otros escenarios socioculturales que dan cuenta de matices en el tipo de apropiación que logran.

Se concluye que el estudio confirma la hipótesis que se tenía inicialmente, es decir, que los escenarios socioculturales van a determinar cómo, los individuos inmersos en él, se apropiarán de espacio, siendo el tipo de representaciones que logran el portador de ésta información.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is directed to understand the socio-cultural nature of the appropriation of the space. Thus we believe that, first of all, the appropriation of space is influenced by the *escenario sociocultural* – socio-cultural scenario -. This was achieved by answering two research questions:

(1) How do civilizations have achieved the appropriation of space through time?

(2) How this appropriation has been influenced by the socio-cultural scenarios?

In order to answer the first research question (1), we characterized what we will understand by “*appropriation of space*”, establishing four moments, given by the analysis of the research papers that we considered, they helped us to identify when we will say that a civilization appropriated of the space. The four moments are: Interaction with the environment, extraction of the environment’s properties, representation of the environment and mental manipulation of the environment.

In a second part of this work, we studied the practices of a particular civilization, the Ancient Egypt, to identify how do they appropriated of the space and, in this way, discover elements that provide us the evidence of certain types of socio-cultural influences present at the time of appropriating of space. In this analysis we could identified four factors, which are: Those that are mediated by a civilization's cosmogony, those that are mediated by the vision of the human being from its environment, those that are mediated by the information that is relevant to transmit

and those that are mediated by the religious type of beliefs. Finally, to answer the second research question (2), we contrasted our result, about the practices of the Ancient Egypt, with the evidence in other socio-cultural scenarios.

We conclude that the study confirms the initial hypothesis; this means that the socio-cultural scenarios determine how we appropriate of the space, being the type of representations achieved the medullar focus of analysis.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN.....	1
1. INTRODUCCIÓN	7
1.1 PRECEDENTES	7
1.1.1 <i>Origen del tema a investigar.....</i>	7
1.1.2 <i>Primera Aproximación.....</i>	8
1.1.3 <i>La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano</i>	11
1.2 INTERÉS POR REALIZAR ESTA INVESTIGACIÓN	18
1.2.1 <i>El surgimiento de la perspectiva.....</i>	19
1.2.2 <i>La génesis de la geometría proyectiva.....</i>	20
1.2.3 <i>La representación del espacio</i>	22
1.2.4 <i>En síntesis</i>	23
1.3 <i>¿QUÉ SE ESTUDIARÁ?.....</i>	24
2. ¿QUÉ SE HA INVESTIGADO?.....	29
2.1 MÉTODO UTILIZADO PARA LA REVISIÓN.....	30
2.2 RESULTADOS DE LA REVISIÓN	31
2.3.1 <i>Influencia de aspectos culturales.....</i>	32
2.3.2 <i>Sobre el desarrollo de la habilidad espacial</i>	35
2.3.3 <i>Influencia de las habilidades espaciales en la matemática escolar</i>	41
2.3 EN SÍNTESIS.....	42

3. APROPIACIÓN DEL ESPACIO	47
3.1 FORMULACIÓN DE LA PRIMERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	49
3.1.1 <i>¿Qué se entiende por apropiación del espacio?</i>	50
3.1.2 <i>¿Qué relación existe entre la producción de conocimiento geométrico y lo cultural?</i>	51
3.2 <i>¿QUÉ RELACIÓN HAY CON LAS REPRESENTACIONES TRIDIMENSIONALES?</i>	54
3.2.1 <i>La capacidad creadora</i>	55
3.2.2 <i>Influencias culturales en el dibujo</i>	57
3.2.3 <i>Influencias culturales en las representaciones matemáticas</i>	58
3.2.4 <i>En síntesis</i>	60
3.3 <i>¿CÓMO SE APROPIAN LAS CIVILIZACIONES DEL ESPACIO?</i>	62
3.3.1 <i>Interacción con el espacio físico</i>	62
3.3.2 <i>Extracción de propiedades del entorno</i>	63
3.3.3 <i>Representación del entorno</i>	64
3.3.4 <i>Manipulación del entorno</i>	65
4. INFLUENCIAS DEL ESCENARIO SOCIOCULTURAL	69
4.1 SEGUNDA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	70
4.1.1 <i>Escenarios socioculturales</i>	71
4.2 UN ESCENARIO SOCIOCULTURAL: LOS EGIPCIOS	72
4.2.1 <i>La vida en el Antiguo Egipto</i>	72
4.2.2 <i>¿Podemos decir que los egipcios se apropiaron del espacio?</i>	75
4.2.3 <i>¿Qué influencias del escenario sociocultural pueden ser reconocidas?</i> 85	

5. CONCLUSIONES.....	95
5.1 SOBRE LO QUE SE HA INVESTIGADO.....	96
5.2 RESPUESTA A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.....	101
5.2.1 <i>Primera pregunta de investigación</i>	102
5.2.2 <i>Segunda pregunta de investigación</i>	103
5.3 APORTES DE LA INVESTIGACIÓN A LA MATEMÁTICA EDUCATIVA.....	106
5.4 APORTES DE LA INVESTIGACIÓN A LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA	107
5.4.1 <i>¿Qué es una práctica social?</i>	108
5.4.2 <i>¿Qué diferencia a una práctica social, a una práctica de referencia y a una práctica?</i>	109
5.4.3 <i>¿Qué relación existe entre una práctica social, una práctica de referencia y una práctica?</i>	110
5.4.4 <i>Propuestas de la Investigación</i>	111
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117

PRESENTACIÓN

El presente trabajo de investigación está enmarcado bajo la teoría socioepistemológica (Cantoral & Farfán, 2003), la cual permite abordar variables de tipo social y cultural, que forman una parte importante en la construcción del conocimiento matemático, es decir, lo considera como una construcción social.

El objetivo de este estudio se direcciona en comprender el carácter sociocultural de lo que se reconoce como *apropiación del espacio*, por tanto se pretende indagar acerca de la influencia que han tenido los escenarios socioculturales sobre ésta, mediante el análisis de las prácticas de una civilización.

Este escrito se compone de cinco capítulos:

En el Capítulo I: *Introducción*, se explicita el origen de la problemática que se abordó, en el que se dan a conocer los trabajos y resultados que precedieron a la presente investigación, además se profundiza sobre el interés por realizar esta indagación, finalmente se precisa el fenómeno a estudiar.

En el capítulo II: *¿Qué se ha investigado?*, se presenta una revisión de ciertas investigaciones relacionadas con la problemática abordada, describiendo cada una de ellas, destacando los elementos que nos llevaron a clasificarlas en tres grupos: Aquellas investigaciones que reconocen ciertas influencia de aspectos culturales, aquellas que justifican la necesidad de desarrollar, mediante reestructuraciones curriculares, las habilidades espaciales de los estudiantes y aquellas que señalan la influencia de las habilidades espaciales en la matemática escolar. Finalizando con una reflexión sobre la importancia y necesidad de

realizar investigaciones como ésta, es decir, bajo una mirada socioepistemológica.

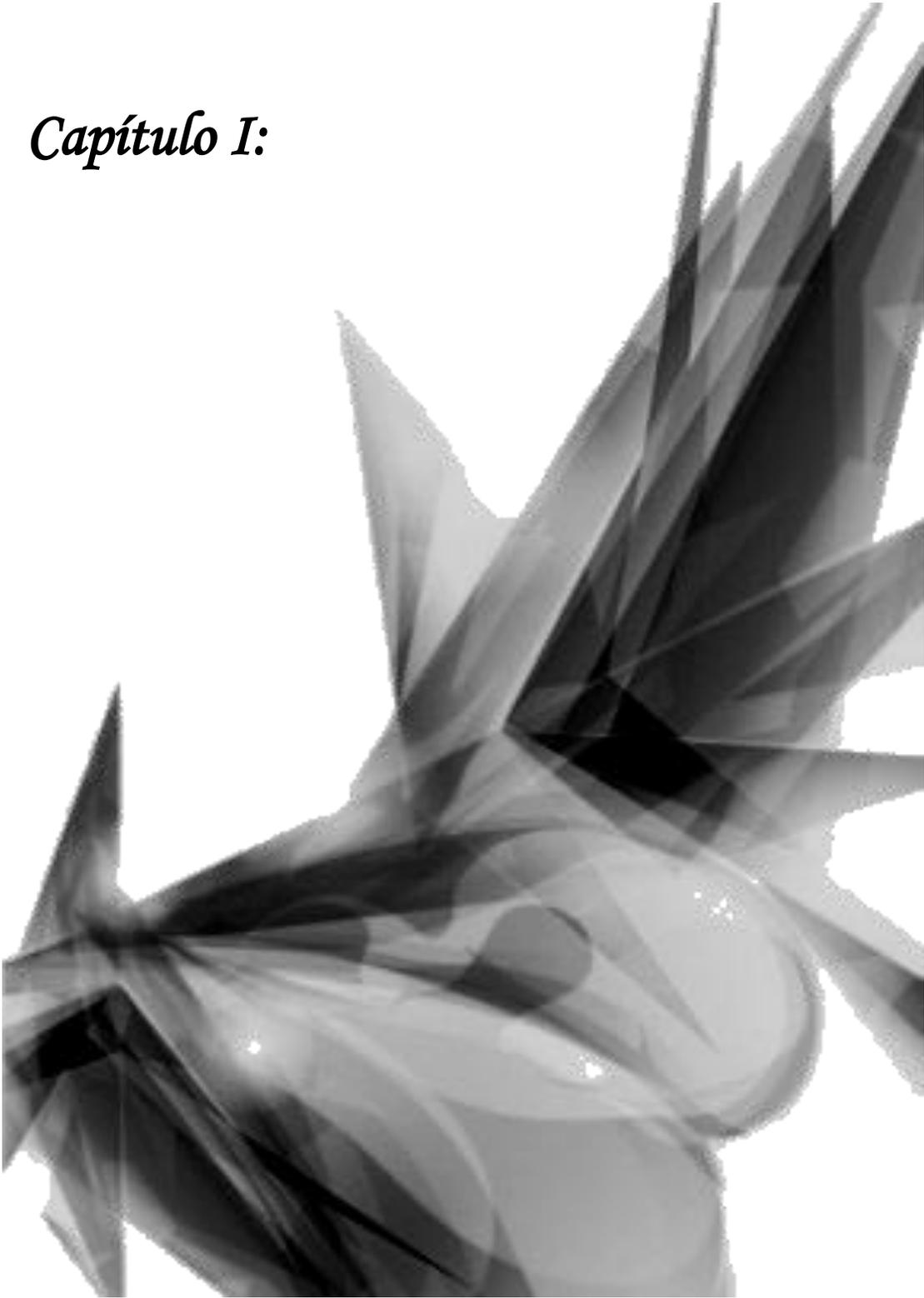
En el Capítulo III: *Apropiación del Espacio*, se brinda una caracterización sobre lo que se considerará por *apropiación del espacio*, teniendo como cimientos los planteamientos de Bishop (1999), que al ser complementados con la visión socioepistemológica conllevan al reconocimiento de cuatro momentos para concluir que una civilización se ha apropiado del espacio. Por otro lado, se hace una reflexión sobre tres teorías que logran explicitar los procesos que vive, en este caso un individuo, para realizar representaciones tridimensionales en el plano, la primera es netamente centrada en dibujos de objetos cotidianos y/o el entorno y las dos restantes, en la representación de objetos matemáticos.

En el Capítulo IV: *Influencias del escenario sociocultural*, se explicita, en primer lugar, qué se entiende por escenario sociocultural, desde la socioepistemología, y en segundo lugar, el escenario que se seleccionó para realizar el estudio, es decir, la civilización egipcia, más específicamente, del Antiguo Egipto. Este capítulo resulta medular, ya que luego del análisis de los datos recabados del escenario sociocultural seleccionado, se pudo identificar cuatro factores que inciden en la manera en que una civilización se apropiará del espacio, los que son: Aquellos que son mediados por la cosmogonía de la civilización, aquellos que son mediados por la visión del ser humano respecto de su entorno, aquellas que son mediados por la información que se considera relevante difundir o transmitir mediante una imagen y aquellas que son mediados por creencias de tipo religioso.

En el Capítulo V: *Conclusiones*, se realiza una síntesis y se presentan las reflexiones que se desprenden del trabajo. En primer lugar sobre lo que se ha investigado, contrastando las investigaciones consideradas en el *estado del arte* (capítulo 2) con nuestra mirada socioepistemológica. En segundo lugar se da

respuesta a las dos preguntas de investigación que articulan este trabajo: ¿De qué manera las civilizaciones han logrado apropiarse del espacio a través del tiempo? ¿Cómo esta apropiación se ha visto influenciada por los escenarios socioculturales? Finalmente se profundiza sobre los aportes, tanto a la Matemática Educativa como a la Teoría Socioepistemológica, proponiendo dos prácticas sociales que norman las prácticas de una civilización al momento de apropiarse del espacio.

Capítulo I:



1. INTRODUCCIÓN

1.1 Precedentes

A pesar de que el origen de la problemática no está directamente relacionado con el fenómeno a estudiar, se considera necesario explicitar éste a modo de contextualizar y dar continuidad a las investigaciones que se realizaron previamente. Puesto que proporcionará los cimientos para fundamentar y delimitar el presente trabajo.

1.1.1 Origen del tema a investigar

El tema a investigar deriva de una experiencia de aula vivida el año 2005, mientras cursaba la Asignatura de Cálculo II¹, de la Licenciatura en la Universidad Católica

¹ Contenidos: Integral indefinida; Métodos de integración; Integral definida; Aplicaciones de la integral definida; Integrales impropias; Integración Múltiple.

Silva Henríquez en Santiago de Chile. Un estudiante inició una discusión con el docente con respecto a qué es lo que se hace girar para conformar un sólido de revolución con hueco.

La dificultad que presentó el estudiante fue al momento de identificar la expresión que debía ser integrada para obtener, en este caso, el volumen del sólido, proponiendo una expresión que corresponde al cálculo del volumen de un sólido sin hueco, lo cual se puede apreciar en la siguiente figura.

Forma general:	Propuesta por del estudiante:
$\pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx$	$\pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$

Figura 1: Fórmulas para calcular el volumen de un sólido de revolución
(Andrade & Montecino, 2009, p. 28)

Este suceso develó ciertos conflictos que conllevaron a realizar un estudio en torno a identificar las dificultades que presentan los estudiantes al calcular el volumen de un sólido de revolución, mediante integrales definidas.

1.1.2 Primera Aproximación

Para abordar la problemática mencionada anteriormente, se diseñó un cuestionario que fue aplicado a estudiantes de segundo año del Programa de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de la Universidad Católica Silva Henríquez, en Chile, basado en el cálculo de áreas y volúmenes de diferentes sólidos de revolución (con y sin hueco), el que corroboró la presencia de dificultades, en primer lugar, al identificar la “expresión algebraica” que debía ser integrada para obtener el valor

numérico del volumen del sólido y en segundo lugar, al formular imágenes mentales del sólido que se forma.

En una pregunta del cuestionario, se le pidió a los estudiantes que calcularan el área de la región comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, lo cual se resuelve mediante la integral definida $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$. Posteriormente, se les pidió que calcularan el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer rotar esa región en torno a $y = 0$, obteniendo en la mayoría de los casos $\pi \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]^2 dx$. Sin embargo, al pedirles que graficaran dicho sólido se obtuvo la siguiente respuesta:

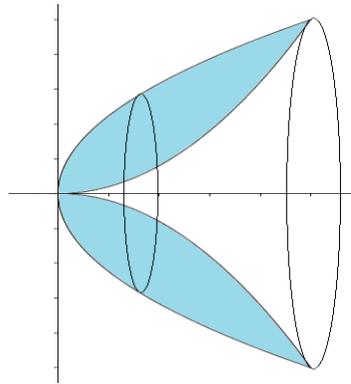


Figura 2: Gráfica propuesta del sólido.

Se puede observar que la integral que corresponde al sólido de la figura 2 es $\pi \int_0^1 [\sqrt{x}]^2 - [x^2]^2 dx$, lo que se contrastó con el sólido con el que realmente estaban trabajando los estudiantes, es decir, el correspondiente a la integral $\pi \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]^2 dx$ (figura 3).

Esto llevó a concluir que generar mentalmente los sólidos de revolución no es un proceso inmediato, ya que, lo que produce mayores conflictos es el traspaso entre dimensiones, tanto mental como escrito. Ante esta dificultad, Piaget (1970) señala que, como seres humanos, estamos limitados a visualizar la abstracción de la matemática en dos dimensiones, lo cual, claramente es diferente a nuestra cotidianidad.

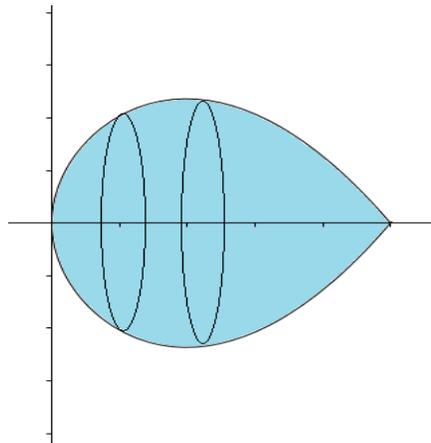


Figura 3: Sólido que obtuvieron los estudiantes

Además se identificó que las herramientas que actualmente están inmersas en los salones permiten hacer dibujos bidimensionales que representen un objeto tridimensional o cuerpo geométrico, mediante el uso de perspectiva. Sin embargo, algunas de estas herramientas, tales como calculadoras graficadoras, softwares matemáticos, entre otras, permiten otorgar una visualización dinámica, pero no asegura el logro en la representación mental del cuerpo. Una de las causas es la ausencia del eje z , en el plano cartesiano, al hacer rotar una región en torno a un eje, dificultando la visualización del sólido que se conforma (figura 4). Artigue (2004) advierte que el uso de estos recursos se torna insuficiente si no existe un adecuado resguardo por la dimensión epistemológica del objeto a enseñar.

Lo anterior permite suponer que el no realizar o proponer actividades que involucren un cambio de registros entre los diferentes tipos de representaciones semióticas, puede conllevar a conflictos cognitivos al momento de cambiar dimensiones, o más específicamente, en el *salto del plano al espacio* (Andrade & Montecino, 2009).

De este estudio se desprenden las siguientes interrogantes: ¿Los estudiantes recurren a la tridimensionalidad para enfrentarse a problemas que requieran de ésta? ¿cómo ha evolucionado históricamente la representación de lo tridimensional y cómo esto

influye en la construcción de herramientas matemáticas que propicien el desarrollo de la visualización espacial? ¿cómo son abordados aquellos contenidos que propician una visualización espacial en los Planes y Programas del Ministerio de Educación de Chile y en los textos de Enseñanza Escolar inmersos en el sistema educativo chileno? ¿es viable construir una propuesta de trabajo, aplicable al aula, que logre potenciar la visualización espacial en los estudiantes?

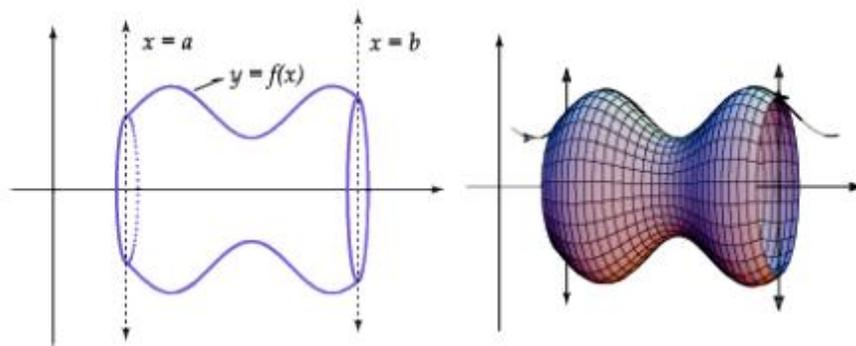


Figura 4: Representación de un sólido de revolución mediante un software matemático.

(Andrade & Montecino, 2009, p. 35)

1.1.3 La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano

En el año 2009, como trabajo de tesis para obtener el grado de Licenciatura, se retomó el trabajo previo y se realizó un estudio² que permitió indagar, entre otras cosas, cómo ha evolucionado históricamente la representación de lo tridimensional y

² El que tenía como objetivos: Efectuar una reseña del devenir histórico de la construcción y estructuración de los saberes matemáticos involucrados en el desarrollo de la visualización espacial; Identificar posibles dificultades o conflictos derivados del tratamiento de contenidos que requieran representaciones mentales en el espacio, presentes en textos escolares y los planes y programas del MINEDUC; Distinguir falencias que emergen como consecuencia de invisibilizar el cambio de dimensiones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos que involucren el uso de visualización espacial; Elaborar una propuesta de planificación que contribuya a desarrollar la visualización espacial en estudiantes de NM4.

cómo esto influye en la construcción de herramientas matemáticas que propician el desarrollo de habilidades espaciales.

Para ello se efectuó una reseña del devenir histórico de la construcción y estructuración de los saberes matemáticos involucrados en el desarrollo de las habilidades espaciales, con el fin de establecer una línea cronológica respecto a la evolución de lo tridimensional.

Esta revisión histórica dio cuenta de ciertos acontecimientos que, a lo largo del tiempo, han jugado un papel primordial para la construcción de la tridimensionalidad y el desarrollo de las habilidades espaciales, debido a que los énfasis puestos en la representación del espacio en el plano han sido mediados por las necesidades y/o prácticas de cada época.

1.1.3.1 Cultura Egipcia

En el estudio se logró observar, por ejemplo, que en el Papiro de Moscú se hace alusión al cálculo del área de una superficie y al volumen de un tronco de pirámide, problemas 10 y 14 respectivamente. En éste último se explicita el cálculo del área de una figura, la que visualmente pareciera ser un trapecio isósceles, pero que en realidad es una pirámide truncada de base cuadrada (figura 5).

Esto lleva a cuestionar cuál era la representación del espacio que los egipcios utilizaban, ya que la imagen anterior proporciona evidencia para suponer que la realidad, o al menos los cuerpos que estudiaban, la plasmaban en dos dimensiones. Por esta razón se torna necesario profundizar sobre el tipo de representación que ellos emplearon.

El entendimiento de la tridimensionalidad y el concepto de espacio que ellos tenían eran muy diferentes al actual, ya que el artista debía ubicar todos los objetos, paisajes

y figuras sobre un único plano, paralelo al que observaría la imagen, de esta forma podría ser apreciado todo lo que no se vería en una representación realista de la misma situación.

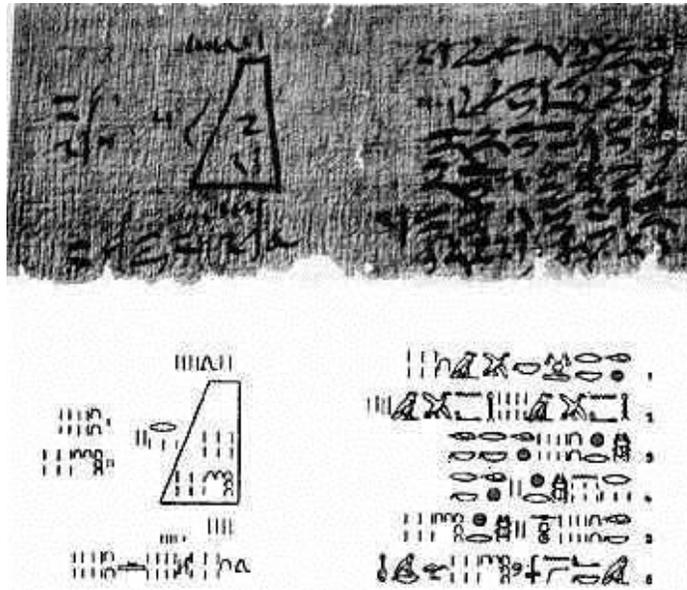


Figura 5: Representación egipcia de una pirámide truncada de base cuadrada.

(Andrade & Montecino, 2009, p. 33)

Por lo tanto, no disponía la realidad tal cual la veía, ni tampoco creaba efectos de profundidad y tridimensionalidad (figura 6), sino que plasmaban en el plano sólo la información que consideraban necesaria para dar a conocer lo que estaban observando.

Andrade y Montecino (2009) concluyen que luego de familiarizarse con la representación de la realidad se logra comprender por qué los egipcios dibujaban una pirámide truncada de base cuadrada como un trapecio, ya que, tal como se señaló anteriormente, ellos ponen el énfasis en aquella información que es considerada relevante para el entendimiento de la problemática del cálculo del área de la superficie.

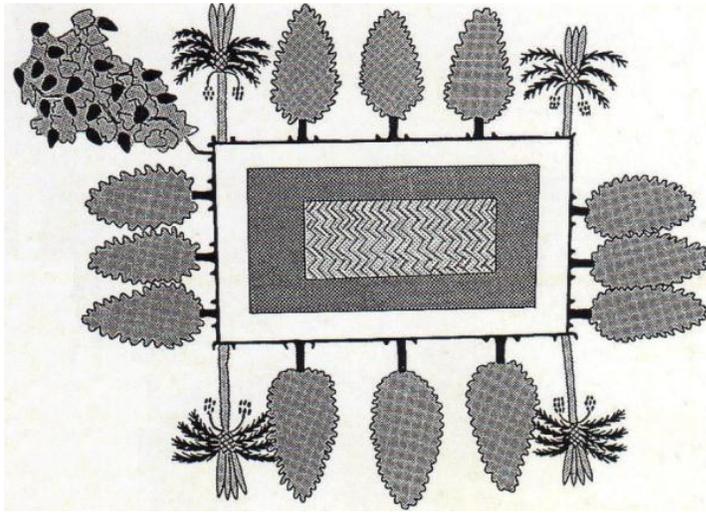


Figura 6: Representación egipcia de la realidad.

(Andrade & Montecino, 2009, p. 29)

1.1.3.2 Cultura Griega

La geometría griega tuvo su auge en el siglo III a. C., época en la cual se desarrollaron los trabajos de Apolonio; Arquímedes, quien descubrió 13 sólidos semirregulares³; y, Euclides, quien escribió un tratado sistemático de geometría elemental, “*Los Elementos*”, en los que se identifica la primera aproximación al estudio de cuerpos geométricos.

En el Libro XI “Geometría de los sólidos”, se presentan 28 definiciones en las que se precisan objetos y relaciones de la geometría del espacio, por ejemplo paralelismo y perpendicularidad; en el Libro XII: “Medición de figuras”, se aboca al cálculo de áreas de círculos y volúmenes de sólidos *más corrientes* y, finalmente, el Libro XIII: “Sólidos regulares” se centra en la construcción de los cinco sólidos regulares de Platón.

³ Un sólido regular tiene como caras polígonos regulares del mismo tipo, mientras que un sólido semirregular es un poliedro convexo cuyas caras son también polígonos regulares, pero no del mismo tipo.

Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.

Con respecto a la representación griega de lo tridimensional, el foco estaba puesto en el cálculo, mediante fórmulas, que en la visualización espacial (Andrade & Montecino, 2009). Lamentablemente no es fácil hallar representaciones de cómo los griegos plasmaban el espacio al estudiar sus propiedades (obra matemática).

1.1.3.3 Renacimiento

Es en el renacimiento donde se da gran importancia al estudio de la perspectiva, lo que conllevó a un estrecho vínculo entre la matemática y el arte, “*un aspecto importante en el que se diferenciaba el arte del Renacimiento del de la Edad Media era el uso de la perspectiva para representar de una manera plana los objetos situados en el espacio real tridimensional*” (Boyer, 1999, p. 375). Sin embargo la mayor parte de los artistas que utilizaban la perspectiva (Figura 7) no estaban familiarizados con la matemática rigurosa (Andrade & Montecino, 2009).



Figura 7: Representación Renacentista de la realidad.

(Andrade & Montecino, 2009, p. 31)

En la obra de Durero se descubre un interés por relevar el carácter geométrico de la matemática más que el aritmético. Su trabajo se caracterizó principalmente por el estudio de nuevas curvas, que pueden ser observadas en su obra titulada

“Investigación sobre la medida de figuras planas y sólidas por medio de círculos y líneas rectas”.

Posteriormente Fermat y Descartes descubrieron la posibilidad de una geometría analítica de más de dos dimensiones.

“Hay ciertos problemas en los que intervienen una única incógnita, a los que podemos llamar determinados para distinguirlos de los problemas relativos a lugares geométricos. Hay otros en los que intervienen dos incógnitas que no pueden reducirse nunca a una sola; estos son los problemas de lugares geométricos. En el primer tipo de problemas buscamos un único punto, mientras en el segundo una curva. Pero si el problema propuesto involucra a tres incógnitas, entonces hay que encontrar, para satisfacer la ecuación, no sólo un punto o una curva, sino una superficie completa. De esta manera aparecen los lugares geométricos que son superficies, etc.” (Boyer, 1999, p. 439).

Lo que conllevó al inicio de una geometría de multidimensional, es decir, de más de tres dimensiones.

1.1.3.4 Siglo XVIII

Durante este período, de acuerdo a Boyer (1999), se formaliza y se comienza a trabajar la geometría analítica tridimensional, viendo sus primeros frutos en la *École Polytechnique* a manos de Morgan, quien en una de sus publicaciones, *Feuille d'analyse* (1795), elabora un manual para estudiantes sobre geometría analítica tridimensional, específicamente las aplicaciones del cálculo relativas al estudio de curvas y superficies en tres dimensiones, convirtiéndose en un estudio sistemático de las rectas en el espacio.

Además, en este siglo se propicia la separación entre el álgebra y la geometría, por ejemplo, Lacroix sostenía que éstos, álgebra y geometría, “*deberían ser tratadas separadamente, tan separadas una de las otras como sea posible, y que los resultados en cada una sirvan para una clasificación mutua correspondería a la relación entre un libro y su traducción a otro idioma*” (Boyer, 1999, p. 602)

Gauss establece una rama de la geometría, la que se conoce como geometría diferencial, centrando su atención en las propiedades de una curva o una superficie en las proximidades de uno de sus puntos, es decir, en una vecindad de dicho punto (propiedades locales de las curvas y superficies). A su vez Euler y Monge habían aplicado sistemáticamente el cálculo al estudio de curvas planas, en otra palabras, un estudio analítico de las curvas y superficies (Andrade & Montecino, 2009).

Todo esto constituye la base o sustento sobre el cual se levantarán y construirán las diferentes aristas que tomará la Geometría desde aquí en adelante, como fue el caso de la geometría diferencial, geometría proyectiva, la geometría n-dimensional, entre otras. La geometría había empezado a florecer desde el siglo XVIII y XIX como nunca en la historia desde la antigua Grecia (Boyer, 1999).

1.1.3.5 Síntesis

En los apartados anteriores se da evidencia de cómo una problemática que emerge de un ámbito escolarmente normado, como el cálculo del volumen de un sólido de revolución mediante integrales definidas, conlleva a reflexionar sobre la concepción y representación del espacio con respecto a lo tridimensional y el desarrollo de las habilidades espaciales de ciertas civilizaciones a lo largo del tiempo.

La indagación histórica revela, en primer lugar, la evolución que ha sufrido la representación del espacio, particularmente dentro de la obra matemática, en la que se logran identificar dos facetas de su desarrollo: el tratamiento de lo tridimensional; y

cómo éste interviene en la construcción de herramientas matemáticas, además, la evolución de la perspectiva, a fin de identificar cómo se han ido constituyendo las representaciones matemáticas del espacio a través de la historia.

Con respecto a lo cual cabe preguntarse por ejemplo: ¿Qué representaciones utilizaron los egipcios para la construcción de las pirámides? ¿Utilizaron la misma técnica que está representada en la figura 2?, en este sentido ¿existe evidencia de alguna obra escrita que dé cuenta de cómo abordaron la construcción de las pirámides?, entre otras de la misma índole.

De esta manera, las experiencias previas resumidas en este apartado, han ido delimitando y estableciendo cierto camino, el cual conlleva al interés por realizar esta investigación, más específicamente, a la problemática que se desea abordar.

1.2 Interés por realizar esta investigación

En este apartado se profundizarán tres elementos, identificados como centrales, que conllevarán a la delimitación del fenómeno a estudiar. En primer lugar establecer de qué manera emerge la perspectiva como método para representar el espacio tridimensional en el plano, en segundo, el impacto que tuvo ésta, la perspectiva, en la obra matemática, es decir, cómo el representar lo tridimensional de una manera más realista permeó en la construcción y/o producción de conocimiento matemático, caracterizado mediante la obra de Desargues y finalmente, identificar cómo es concebida la representación del espacio.

1.2.1 *El surgimiento de la perspectiva*

El desarrollo de la *perspectiva*⁴ ha evolucionado a lo largo de la historia del ser humano, su apogeo se dio en el Renacimiento al momento en que los artistas lograron obtener una representación real de los espacios cotidianos, por consiguiente, es posible identificar un salto desde una búsqueda científica a una problemática artística, en otras palabras, de la ciencia de la visión a la ciencia de la representación. (Borrás, 1996)

La teoría de la perspectiva renacentista tuvo tal magnitud que durante siglos nunca se cuestionó que la construcción de la perspectiva correcta pudiese no corresponder exactamente con la visión real. Por el contrario, el proceso utilizado en el Renacimiento, según Kvasz (1998), era netamente abstracto, en otras palabras, para conseguir la coincidencia visual, se suponía un punto de observación fijo a una distancia determinada con visión de un sólo ojo perfectamente inmóvil. Técnica que será apropiada luego por Desargues y que puede ser reconocida como un fundamento de la Geometría Proyectiva.

Más precisamente, Kvasz (1998) señala que un pintor debía seguir tres principios básicos de la perspectiva, para lograr representar la realidad tal cual como la veía:

- La perspectiva de los objetos posicionados a los costados del objeto principal debían ser pintados más pequeños.
- Los colores de los objetos que están posicionados a los costados del objeto principal se deben atenuar.

⁴ La etimología de la palabra perspectiva derivada del latín *perspicere* significa ver claramente y derivada del griego *skele* significa ciencia de la visión. De esta manera, la perspectiva puede ser definida como el estudio de los fenómenos de la visión, está relacionada al funcionamiento del ojo en la percepción visual, por lo que el término perspectiva alude a problemas de representación bidimensional de la realidad observada. (Andrade & Montecino, 2009)

Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.

- Las líneas de los objetos que están posicionados a los costados del objeto principal deben ser más suaves.

En la siguiente imagen se presentan tres pinturas en las que está representada la misma situación, la Última Cena, en las cuales se observa claramente la evolución que ha sufrido la perspectiva desde la primera figura hasta la última, la que corresponde a una visión actual de las nociones básicas del dibujo en perspectiva.

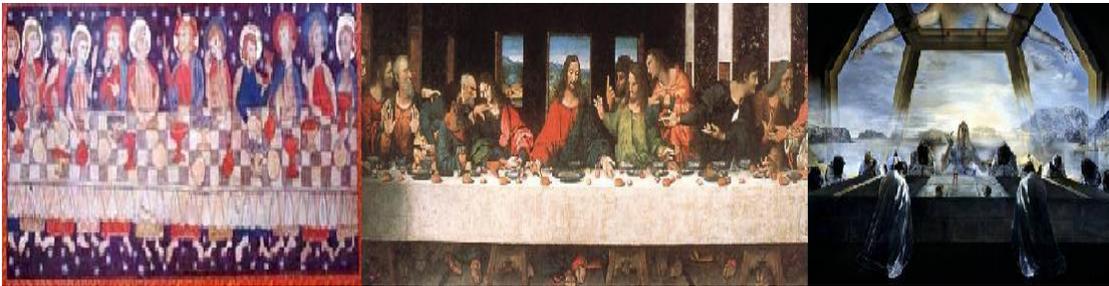


Figura 8: Desarrollo evolutivo de la Perspectiva

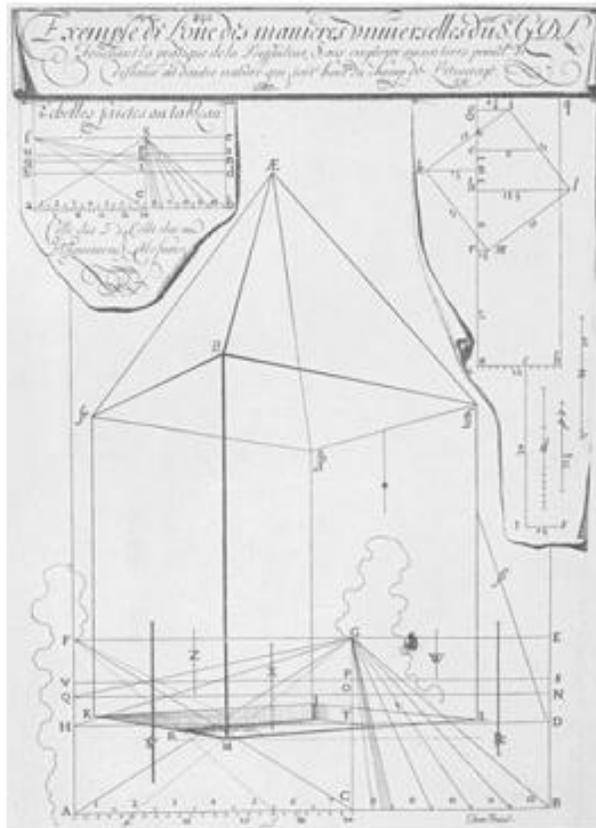
(Andrade & Montecino, 2009, p. 37)

1.2.2 *La génesis de la geometría proyectiva*

Existe un fuerte debate sobre quién fue el precursor de la perspectiva, por una parte Kvasz (1998) señala que los pintores de la época del Renacimiento, en 1639, descubrieron los principios de la perspectiva y que además podían evocar la ilusión de paralelismo, por ejemplo, al dibujar los lados opuestos del suelo. Para ello trazaban dos líneas convergentes a un punto, denominado punto de fuga, sin embargo, no podían explicar el motivo de este suceso.

Por otra parte, Crannell y Douglas (2012) señalan que Gérard Desargues escribió un tratado de perspectiva, de doce páginas, donde describía cómo dibujar un objeto de ciertas dimensiones para evocar la ilusión de tridimensionalidad, pero que él no esperaba que los artistas, de ese entonces, utilizaran este tratado como un manual,

aplicando las técnicas a sus obras de arte, en objetos más generales. Esto les lleva a concluir que Desargues dio inicio al surgimiento de la perspectiva.



*Figura 9: Dibujo sobre la perspectiva de Desargues
(Crannell & Douglas, 2012, p. 2)*

La Geometría Proyectiva se conforma bajo dos principios:

- i) Dos puntos definen una recta;
- ii) Todo par de rectas se cortan en un punto, cuando dos rectas son paralelas se dice que se cortan en un punto del infinito, conocido como punto impropio (Gray & Field, 1987).

En otras palabras, emerge cuando miramos desde un único punto fijo, lo cual puede ser entendido de la siguiente manera: si miramos una línea ésta parece ser sólo un punto en el plano proyectivo, ya que el ojo no puede ver los puntos que hay detrás.

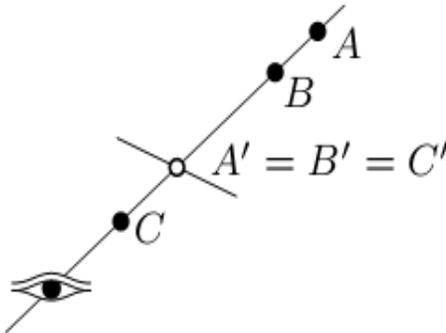


Figura 10: Visión de una recta desde un punto fijo

Finalmente, podemos señalar que el precursor de la Geometría Proyectiva fue Desargues, pues fundamentó matemáticamente los métodos de la perspectiva que habían desarrollado los artistas durante el Renacimiento, sin embargo esta geometría no tuvo mayor influencia en la geometría de ese momento (euclidiana) hasta que Einstein, en el siglo XX, demostró que, a gran escala, el universo podía ser interpretado mejor con estas *nuevas geometrías* que con el “rígido” espacio euclidiano.

1.2.3 *La representación del espacio*

La perspectiva, en pintura, conlleva a una representación ilusoria y ficticia del espacio, Borrás (1996) señala que el espacio en arquitectura es un elemento *plástico* modelado y creado por el arquitecto; en escultura, constituye a la envoltura real del objeto, sin embargo, en pintura sólo puede representarse, es decir, el espacio se debe fingir, por consiguiente no es real.

Es mediante la perspectiva que las superficies planas, dimensionadas, que disponen formas representadas, son, según Borrás (1996), negadas visualmente como tales superficies “*de este modo un cuadro se transforma en una "ventana" a través de la cual nos parece estar viendo el espacio*” (Op. Cit., p. 104).

Además, sostiene que a lo largo de la historia no se han utilizado las mismas técnicas para representar la perspectiva, ya que sus presupuestos son variables y dependen del conocimiento del mecanismo de la visión, de la concepción del espacio y de los objetivos de la representación; más específicamente, que las técnicas de la perspectiva se encuentran estrechamente relacionadas:

- i) Con la ciencia y con la técnica, especialmente con la evolución de los conocimientos en óptica, geometría y matemáticas.
- ii) Con la cultura de cada época, ya que cada momento está condicionado por unos parámetros culturales distintos (los modos de ver, las concepciones del espacio y del tiempo, y, en definitiva, la situación misma del hombre en relación con el mundo que le rodea).

Es así como la representación del espacio, para Borrás (1996), se concibe como un signo visible y “simbólico” de las actitudes culturales y filosóficas de un determinado periodo histórico.

1.2.4 *En síntesis*

El interés por realizar esta investigación se conlleva del estrecho lazo que une a las matemáticas y al arte, es decir, cómo a través de la pintura en perspectiva se logran comprender y plasmar los principios de la geometría proyectiva.

Un ejemplo de esta relación se desprende de un estudio realizado por Blanco (2009), el que da cuenta que en la escuela surge la necesidad de representar cuerpos

geométricos en el plano y que su resolución conduce al trabajo con perspectiva, ya que se pretende reproducir un cuerpo tridimensional de la manera más fiel posible, utilizando esta representación con la finalidad de construir conocimiento geométrico o resolver un problema a través de ella.

Sin embargo, en esta interacción, entre los estudiantes y el conocimiento matemático, no se puede soslayar la existencia de una influencia desde lo cultural, la cual incidirá directamente sobre el tipo de representaciones que logren los estudiantes, en las que se reflejará o se encontrará inmersa la identidad, para Borrás (1996), de un determinado período histórico.

Por lo que incorporar saberes matemáticos al sistema educativo plantea una serie de problemas y desafíos de carácter tanto teórico como práctico que necesitan acercamientos teóricos y metodológicos adecuados (Crespo, 2007). Es por ello que se torna necesario estudiar *“los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza”* (Farfán, 2003, p.5).

1.3 ¿Qué se estudiará?

Lo anterior pone en manifiesto que es necesario comprender la relación que tiene una determinada sociedad con el saber matemático construido, específicamente el que atañe a este estudio. En otras palabras, se considera que la matemática no surge aislada de la sociedad, sino que inmersa en ella y por lo tanto recibe influencias fuertemente basadas en el pensamiento, las necesidades y características del escenario en que se desarrolla (Crespo, 2007).

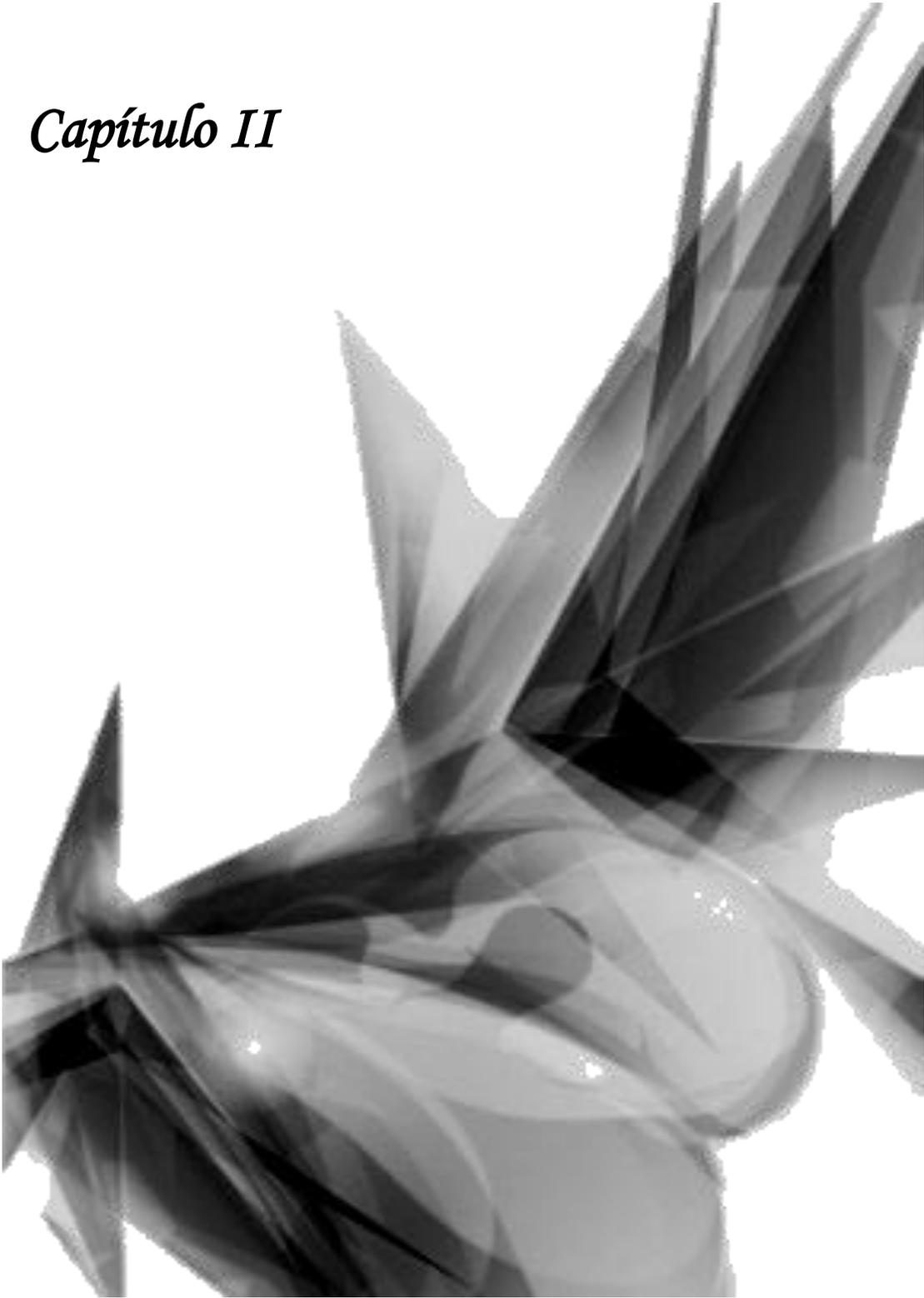
La teoría socioepistemológica, reconoce que el contexto social, cultural e históricamente determinado actúa como parte indiscutible de este proceso,

enfaticando que el conocimiento no surge en escenarios escolares, por consiguiente este planteamiento debiese ser considerado en la construcción del discurso Matemático Escolar (dME).

De esta manera, surge el interés por estudiar la incidencia de los escenarios socioculturales en la manera en que cada individuo identifica ciertas propiedades de su entorno y logra representarlas bidimensionalmente. Esperando develar la herencia que deja la dimensión sociocultural -el *medio* donde estamos inmersos- en la forma en la que percibimos el mundo, tales como las concepciones del espacio y tiempo, ideologías, cosmovisiones, creencias, entre otros.

Finalmente, luego de hacer una reseña del trabajo previo y algunos aspectos sobre el surgimiento de la perspectiva y posteriormente de la geometría proyectiva, surge la siguiente inquietud: *¿Qué papel ha jugado el desarrollo sociocultural en la apropiación del espacio y lo tridimensional?* Se considera necesario precisar que esta es una primera aproximación al trabajo que se realizará, por lo tanto se concibe como una idea inicial con la cual se dará comienzo a la problemática de investigación.

Capítulo II



2. ¿QUÉ SE HA INVESTIGADO?

Son variadas las investigaciones que postulan que las *habilidades espaciales*⁵ de los estudiantes pueden ser desarrolladas mediante ciertas técnicas, métodos y/o herramientas, por lo tanto se han abocado en estudiar cómo pueden ser desarrolladas, identificando ciertas dificultades al representar o visualizar el espacio, habilidades para comunicar información espacial, estudiando y analizando lo *cognitivo* que conlleva lo tridimensional (Smith, 1964; Ben-Haim, Lappan y Hougang, 1985, 1989; Gutiérrez, 1996; Blanco, 2009; Andrade & Montecino, 2009; Prieto & Velasco, 2010). Clasificando sus resultados según el tipo de tarea, nivel educativo de los estudiantes, género, cultura, entre otros. Y finalmente han propuesto soluciones que,

⁵ Se entenderá a las *habilidades espaciales* según Pittalis y Christou (2010), esto es, como un constructo teórico definido por tres factores: visualización espacial, orientación espacial y relación espacial. Lo que implica que se concebirá a la visualización espacial como un elemento que forma parte de las habilidades espaciales.

para esos investigadores, se traducirán en aportes a la enseñanza de la geometría, plana y espacial, esperando lograr una reestructuración del currículum escolar.

Por otra parte, algunos investigadores se han interesado en la herencia de la cultura en el tipo de *habilidad espacial* que tienen los estudiantes inmersos en diversos escenarios o contextos (Bishop, 1977, 1979; Mitchelmore, 1980a, 1980b; Lancy, 1981; Clements, 2008), en los que proponen que ciertos factores culturales determinan el tipo de desempeño que tendrán los estudiantes frente a acciones que involucren actividades tridimensionales.

Por lo que, en este apartado se expone el estado del arte de este proyecto de investigación, en primer lugar presentando una síntesis del método utilizado para la selección de los artículos e investigaciones revisadas; en segundo lugar, una recapitulación de tales trabajos y finalmente, una reflexión que se desprende del análisis de la revisión.

2.1 Método utilizado para la revisión

Para comenzar, es necesario delimitar los artículos que se considerarán en la revisión, es decir, qué características deben tener las investigaciones que serán analizadas. La pregunta que se presentó en el capítulo anterior, cabe señalar que aún no ha sido precisada, se torna en el eje articulador de esta revisión, es decir, el interés de este estudio es identificar la influencia sociocultural en la apropiación espacial de los individuos inmersos en una cultura determinada.

Por lo tanto, la revisión se dividió en tres etapas: La primera pretendió detectar aquellos artículos que den evidencia sobre la apropiación de espacio y las habilidades espaciales desde diferentes contextos; la segunda, los que se centran en el desarrollo

de las habilidades espaciales; finalmente, la tercera, aquellos que develen la importancia (o influencia) de la visualización espacial en el aula.

Los artículos se clasificaron en categorías afines a las investigaciones analizadas, es decir:

- i) Sobre la influencia de aspectos culturales;
- ii) Sobre el desarrollo de las habilidades espaciales (mediante materiales concretos, reestructuras curriculares, introducción de clases de dibujo técnico);
- iii) Sobre la influencia de las habilidades espaciales en la matemática escolar.

2.2 Resultados de la revisión

Diversos estudios han puesto en evidencia la relevancia que tiene la visualización espacial, en particular, en el entendimiento de la geometría y el “estatus” que tiene en el currículum, por ejemplo, considerar que la visualización es el núcleo de gran parte de la dificultad del aprendizaje de la Geometría (Bishop 1980; Gal y Linchevski, 2010)

Otras investigaciones (Presmeg, 1986; Vinner, 1989; Eisenberg & Dreyfus, 1990) revelan que el currículum escolar de matemáticas favorece al pensador no visual y, en la mayoría de los salones de clase, la enseñanza enfatiza los métodos no visuales y, además, consideran la existencia de un predominio del pensamiento algorítmico por sobre el visual, señalando que existe una resistencia por parte de los estudiantes posiblemente porque pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente.

Blanco (2009), luego de efectuar un estudio sobre los libros de texto escolar de México, realiza una crítica al sistema educativo mexicano señalando que el principal

problema es que éste está limitado al estudio de métodos algorítmicos, sin insistir en las descripciones y las argumentaciones respecto a las características de los cuerpos geométricos, ni cómo podrían obtenerse. Concluye que el estudiante no construye el conocimiento manejándose con figuras y construcciones que ayuden a la comprensión de un problema, sino con “recetas” que se aplican para obtener resultados.

Finalmente, Andrade y Montecino (2011) dan evidencia de que gran parte de los estudiantes, inmersos en el sistema educativo chileno, presentan dificultades en el trabajo y representación de problemas que requieran el uso de habilidades espaciales, en otras palabras, no acuden a la tridimensionalidad para solucionar una determinada situación que requiera de ésta.

Con respecto a lo anterior, se torna necesario indagar, además, sobre cómo interactúa lo sociocultural en el aprendizaje de “lo geométrico”, es decir, de qué manera las diferencias transculturales, tales como la cultura o el entorno social del estudiante, se reflejan en el uso de modelos espaciales.

2.3.1 *Influencia de aspectos culturales*

Bishop (1977) demostró cómo mucho de lo que trata de comunicar una imagen depende del bagaje cultural *-cultural background-* de quien está tratando de “leer” la imagen. Por ejemplo, un niño inmerso en una cultura no occidental no crece (no es educado) para darse cuenta que las líneas punteadas en un bosquejo de un cubo pueden indicar bordes “en el fondo” que no pueden ser vistos desde una vista frontal (Clements, 2008).

Es así como una de las primeras investigaciones que se centraban en los aspectos visuales y espaciales de la matemática fue presentada por Bishop en 1979, enfocada en identificar fortalezas y debilidades en el campo de lo espacial, estableciendo una

relación con los diferentes bagajes culturales, lingüísticos y ambientales (entorno) de estudiantes indígenas, de Papúa Nueva Guinea, que participaron de sus estudios.

Clements (2008) comenta que Bishop, en una conversación acerca de la información recogida en Papúa Nueva Guinea, señala que nunca se había dado cuenta que la cultura y el entorno social del estudiante, lenguaje y preferencias espaciales pudieran interactuar tan profundamente con las formas en las cuales la matemática es presentada, enseñada y entendida.

Lo anterior puede ser ejemplificado en una de sus experiencias vividas en Papúa Nueva Guinea, donde se hace explícita la influencia de lo cultural en el razonamiento de un estudiante ante una situación escolar y una situación planteada en un contexto cotidiano.

“Le pregunté a un estudiante:

I: ¿Cómo puedes encontrar el área de esta pieza (rectangular) de papel?

E: Multiplicando el largo por el ancho.

I: Tú tienes jardines en tu pueblo. ¿Cómo juzga tu gente el área de sus jardines?

E: Sumando el largo por el ancho.

I: ¿Es tan difícil de entender?

E: No, en casa sumo, en la escuela multiplico.

I: Pero ambos se refieren al área.

E: Sí, pero uno es sobre el área de un pedazo de papel y el otro sobre un jardín.

I: (Entonces dibujé dos jardines (rectangulares) en un papel, uno más grande que otro). Si estos fuesen dos jardines, ¿Cuál preferirían tener?

E: Depende de muchas cosas, no puedo decirlo. El suelo, la sombra...

I: (Cuando estaba a punto de preguntar la siguiente cuestión “Si, pero si tuviesen el mismo suelo, sombra...” fue cuando me di cuenta de lo absurdo

que sonaría en ese contexto. Claramente su preocupación se refería a dos problemas: al tamaño de jardines, un problema inmerso en un contexto rico en tradición, folclore y habilidades de sobrevivencia. El otro problema, al área de piezas rectangulares de papel, inmerso en un contexto totalmente diferente” (Bishop, 1979, p. 117).

De los argumentos del estudiante se puede observar que a pesar que se trate de llevar la matemática escolar a situaciones particulares de la vida diaria, ésta no deja de ser escolar, percibida como ajena a lo cotidiano, es decir, independiente de lo que ocurra en el aula, en la práctica se hace uso de las herramientas que se heredan de lo cultural: “...*en casa sumo, en la escuela multiplico”*.”

En consecuencia, Bishop (1979) realiza una crítica a los trabajos que hasta ese momento reportaban que los estudiantes inmersos en culturas no occidentales tenían habilidades espaciales más débiles o menos desarrolladas, con respecto a los estudiantes occidentales, ya que él considera que los instrumentos utilizados en tales estudios hacen uso de “convenciones” asumiendo una universalidad de conocimiento. Por ejemplo, Lancy (1981) reporta que la mayoría de los estudios previos a 1975, usando instrumentos basados en la teoría piagetiana, concluyeron que los niños de Papúa Nueva Guinea están mucho más retasados, con respecto a niños occidentales, en la adquisición de habilidades de conservación.

A pesar de la crítica de Bishop (1979), se continuaron realizando ese tipo de investigaciones, Lancy (1981) evidenció, mediante un estudio que tenía por objetivo documentar la relación entre el ambiente, las características culturales y el desarrollo cognitivo, que la conservación de masa aparece mucho más tarde en estudiantes “indígenas” (no occidentales) en comparación a los estudiantes de occidente, y que la conservación de longitud es lograda por menos de la mitad de la población, aún durante la adultez.

Por otro lado, Mitchelmore (1980a) realizó un estudio para identificar diferencias en las habilidades espaciales entre estudiantes de Kingston, Jamaica; Columbus, Estados Unidos y Bristol, Inglaterra, tomó como muestra a 64 estudiantes por país, de tercer, quinto, séptimo y noveno grado. Mediante el análisis de las representaciones bidimensionales de situaciones tridimensionales dadas, concluye que los estudiantes de Inglaterra poseen una mayor habilidad espacial, con una diferencia de tres años, que los de Estados Unidos, que a su vez superan a los estudiantes de Jamaica, es decir, los estudiantes de Jamaica tienen una diferencia de 6 años en comparación con los de Inglaterra.

Poniendo en evidencia que las diferencias observadas en las habilidades espaciales y para dibujar reflejan las diferencias transculturales en la actitud a pensar utilizando modelos espaciales, actitud que es parcialmente revelada por el grado de profundización que se le da a la geometría en el currículum escolar y además, por factores socioculturales, como por ejemplo que en Jamaica la escuela primaria está orientada principalmente al álgebra, o que sólo el 40% de las casas y el 25% de las escuelas tienen una televisión que funciona Mitchelmore (1980a, p. 213).

Así, la investigación de Mitchelmore (1980a) revela diferencias en la habilidad espacial que pueden ser atribuidas al contexto sociocultural en el que se encuentren inmersos los estudiantes, reconociendo esta influencia en la forma en la que percibimos el mundo y nuestro entorno, por ende, en cómo lo representamos.

2.3.2 *Sobre el desarrollo de la habilidad espacial*

Ciertas investigaciones han demostrado que se deben incorporar materiales concretos (tangibles) a los salones de clases, o se deben introducir clases de dibujo técnico o bien realizar adaptaciones o reestructuraciones curriculares para que de esta manera se desarrollen las habilidades espaciales de los estudiantes.

Otras investigaciones surgen para llamar la atención de los profesores con respecto al tipo de representaciones que logran sus estudiantes, por ejemplo Gutiérrez (1998) considera como necesario que los estudiantes aprendan a dibujar y leer representaciones planas de cuerpos tridimensionales, así podrán mejorar su capacidad para comprender la geometría espacial y facilitar el aprendizaje de ésta, ejecutándose mediante instrucciones específicas por parte del profesor

En este apartado se profundizará sobre aquellas investigaciones que pretenden potenciar el desarrollo de las habilidades espaciales de los estudiantes, separándolas en tres grupos: Mediante la introducción de material concreto al aula, Mediante reestructuraciones en torno al currículum de matemáticas, Mediante el mejoramiento de las técnicas de dibujo.

2.3.2.1 *Habilidad espacial y materiales concretos*

Smith (1964, citado en Clements, 2008) afirmó que las habilidades espaciales y matemáticas están estrechamente correlacionadas y que sus investigaciones indicaban que estas habilidades podían desarrollarse mediante materiales estructurados y cuidadosamente seleccionados.

Ben-Haim, Lappan y Hougang (1985) ponen en evidencia que los estudiantes de quinto, sexto, séptimo y octavo grado, que participaron en sus estudios, presentaron dificultades al momento de: *identificar* por ejemplo ¿cuántos cubos se necesitan para construir un sólido rectangular (ilustrado)?, incluso estudiantes de niveles superiores presentan las mismas dificultades (Ben-Haim, Lappan & Hougang, 1985); y en *comunicar información espacial*, a pesar de estar familiarizados con varios tipos de modos de representación verbal, gráfica, icónica, entre otros, (Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989).

Es así como proponen que una experiencia con material concreto ayudará a mejorar, de manera significativa, el rendimiento de los estudiantes y que además, se deben incluir experiencias concretas con cubos en el currículum escolar de escuela secundaria *-middle school-*, mediante la representación y comunicación de información en la construcción de edificios.

2.3.2.2 *Habilidad espacial y reestructuras curriculares*

Se pueden encontrar investigaciones (Blanco, 2009; Andrade & Montecino, 2009) que consideran primordial que para propiciar un desarrollo de las habilidades espaciales de los estudiantes es necesario realizar reestructuraciones curriculares. Se reconoce inmerso, en éstas, el planteamiento de Gutiérrez (1996, citado en Kospentaris, Spyrou & Lappas, 2011), en el que considera a la visualización en matemáticas como un tipo de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos espaciales o visuales, tanto mentales como físicos, utilizado para resolver problemas o comprobar propiedades. Por lo que estos estudios abordarán estas reestructuras con forme a potenciar la visualización espacial.

Blanco (2009) estudió las representaciones visuales, de los cuerpos poliédricos en el plano, que dibujaron los estudiantes que participaron en su trabajo, realizando una propuesta de aplicación de geometría dinámica. Su objetivo fue indagar de qué factores depende la representación de cuerpos geométricos y explorar la influencia del estudio y aplicación de elementos de perspectiva sobre la visualización de objetos tridimensionales en alumnos de escuela media.

Para abordar esta problemática realizó una recopilación de antecedentes e investigaciones orientadas a poner de manifiesto las falencias observadas en el aula de matemática respecto de las representaciones bidimensionales de configuraciones tridimensionales, las cuales se apoyaron sobre algún conocimiento de la geometría bidimensional y los motivos por lo que estas habilidades no se han desarrollado y que

Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.

traen aparejados muchos inconvenientes al momento de tener que aplicarlos a situaciones que involucren un manejo geométrico.

Sus resultados evidenciaron la presencia de representaciones prototipos de cuerpos tridimensionales, como de un cubo o de una pirámide, por estudiantes de bachillerato que tomaron un curso de perspectiva (figura 11) y además, la presencia de figuras planas para representar un cubo y una pirámide por parte de estudiantes que no tomaron cursos de perspectiva (figura 12).

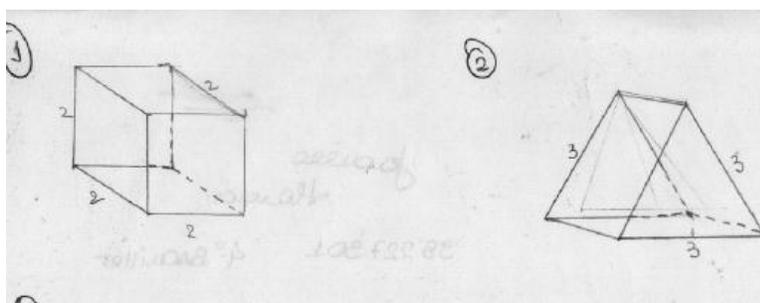


Figura 11: Representación de cuerpos tridimensionales de estudiantes que tomaron cursos de perspectiva
(Blanco, 2009, p. 92)

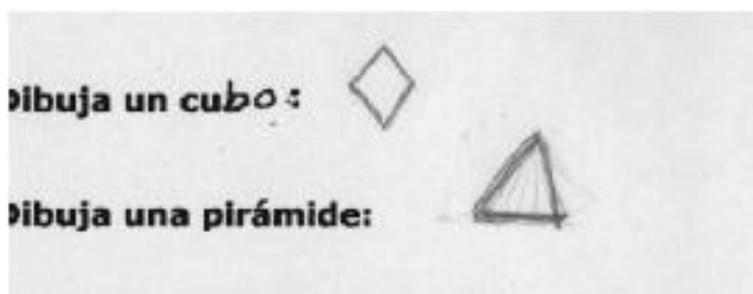


Figura 12: Representación de cuerpos tridimensionales de estudiantes que no tomaron cursos de perspectiva
(Blanco, 2009, p. 93)

Andrade y Montecino (2009) realizaron un estudio que permitió indagar si los estudiantes recurrían a la visualización espacial o tridimensionalidad al enfrentarse a situaciones que pusiesen en juego sus conocimientos, pero que a la vez no involucraran fórmulas algebraicas o patrones de solución. Este estudio reveló que los estudiantes utilizan la tridimensionalidad luego de agotar todas las posibles soluciones en el plano.

En primer lugar, se analizaron los textos escolares y planes y programas del Ministerio de Educación de Chile, evidenciando que se priorizan los contenidos que serán evaluados en las pruebas SIMCE⁶ y PSU⁷, poniendo especial énfasis en desarrollar las competencias necesarias en los estudiantes para que logren desenvolverse exitosamente en pruebas estandarizadas a las cuales deberán enfrentarse durante su formación escolar. Por consiguiente concluyen que no se profundiza en las representaciones bidimensionales de cuerpos tridimensionales, lo cual implicaría que los estudiantes no desarrollen sus habilidades para la manipulación de lo tridimensional. En las actividades que se centran en el trabajo con cuerpos geométricos o sus representaciones en el plano, se remiten al cálculo de áreas y volúmenes, identificación de redes, descomposición de cuerpos, entre otros.

En segundo lugar, se aplicaron dos problemas, que involucran el uso de la tridimensionalidad, a una muestra de 76 estudiantes de enseñanza escolar. Los

⁶ El Sistema de Medición de la Calidad de la Educación, es el sistema de evaluación educacional más antiguo de Latinoamérica; ha funcionado en forma ininterrumpida desde 1988. Evalúan el logro de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios (OFCMO) del Marco Curricular de Enseñanza Básica o del Marco Curricular de Enseñanza Media, (Tomado de <http://saladehistoria.com/wp/2009/06/16/que-es-el-simce/>)

⁷ Las Pruebas de Selección Universitaria se emplean desde el año 2003, por las Universidades que componen el Consejo de Rectores, para seleccionar a los alumnos que ingresan a sus carreras. Se compone de cuatro pruebas que son desarrolladas, administradas, aplicadas y reportadas por el DEMRE (Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional). Las PSU son instrumentos de evaluación educacional que miden la capacidad de razonamiento de los postulantes egresados de la Enseñanza Media, teniendo como medio, los contenidos del Plan de Formación General de Lenguaje y Comunicación, de Matemática, de Historia y Ciencias Sociales y de Ciencias. Esta última incluye a Biología, Física y Química. (Tomado de <http://www.demre.cl/psu.htm>)

resultados obtenidos pusieron en manifiesto ciertas falencias respecto a hacer uso de la tridimensionalidad como recurso para la solución de una situación problemática, ya que sólo surge ésta luego de agotar todas las posibles soluciones en el plano, lo que, proponen, se debe a que durante la enseñanza escolar los problemas, ejemplos y trabajos se entrelazan con el contenido que está siendo institucionalizado.

En esta investigación se pone en evidencia la necesidad de establecer un trabajo interdisciplinario con el Subsector de Artes Visuales, para que los estudiantes desarrollen sus capacidades y habilidades en torno a trazar en el plano la realidad que los rodea, con lo que se pretende que será más fluido el visualizar las representaciones bidimensionales de cuerpos geométricos.

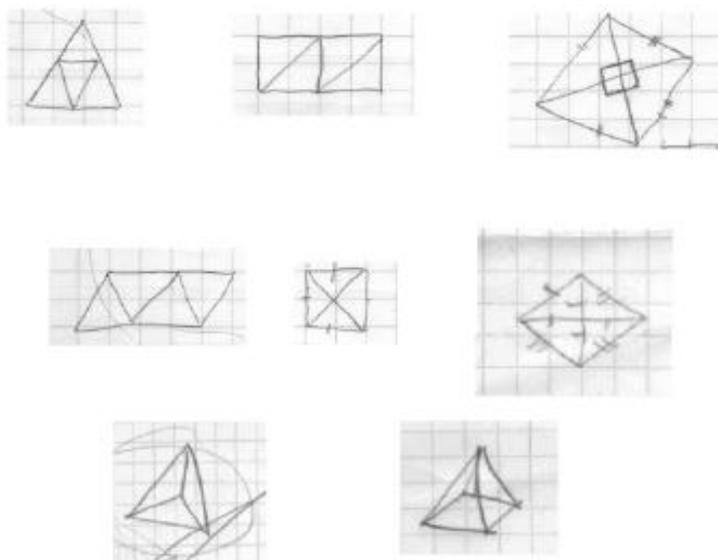


Figura 13: Construcciones de algunos estudiantes sobre la actividad: “Construir cuatro triángulos congruentes con seis segmentos de igual medida”.

(Andrade & Montecino, 2009, p. 107).

2.3.2.3 Habilidad espacial y dibujo técnico.

Prieto y Velasco (2010) realizaron un estudio para analizar de qué manera mejoraba la habilidad espacial luego del aprendizaje del dibujo técnico. Aplicaron dos pruebas, de razonamiento visual e inductivo, al inicio y al final de un curso de dibujo técnico, a estudiantes de primer año de ingeniería. En ambos estudios se observó que un porcentaje moderado de estudiantes mejoró la prueba visual, siendo, esta mejora, similar en hombres y en mujeres. Finalmente, los autores concluyen que la habilidad de visualización espacial puede mejorar luego de un “entrenamiento”, en este caso, el curso de dibujo técnico.

2.3.3 Influencia de las habilidades espaciales en la matemática escolar

Algunas investigaciones recientes ponen en evidencia la necesidad de estudiar este fenómeno, ya que actualmente se observa que en el aula se favorece un pensamiento algebraico por sobre las representaciones visuales, tanto bidimensionales como tridimensionales, a pesar de que están presentes en el aula. Eisenberg y Dreyfus (1990) señalan que éste fenómeno ocurre posiblemente porque pensar visualmente exige mayores demandas cognitivas, además de dar evidencia que lo visual se considera más difícil de comprender (cognitivo), más difícil de enseñar (sociológico) y finalmente, no se considera perteneciente a la matemática como tal.

Wu, Ma y Hsieh (2006) señalan que la representación ha sido uno de los focos de estudio de la educación en matemáticas y además, mencionan que es uno de los cinco procedimientos estándar reconocidos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Taiwán, plasmado en los principios y estándares de la Matemática Escolar en el año 2000.

En estos principios y estándares se refieren a la representación como el acto de capturar conceptos matemáticos o relación en una forma, donde el estudiante sea

capaz de utilizar la representación para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Bråting y Pejlar (2008) realizaron una revisión sobre el rol de la intuición y la visualización en matemáticas, desde una perspectiva histórica y didáctica, principalmente entre los siglos XVII y XIX y lo que la visualización puede lograr en el aprendizaje de las matemáticas, proponiendo que la visualización, al ser utilizada de manera apropiada puede incrementar el entendimiento o comprensión de las matemáticas. Dando evidencia de ello, luego de realizar una indagación sobre las conclusiones matemáticas, que realizan estudiantes universitarios, basándose en la visualización.

2.3 En síntesis

De la revisión anterior se puede concluir que la investigación en este campo se centra en abordar problemáticas sobre cómo realizar mejoras para que los estudiantes logren una mayor comprensión sobre la representación geométrica del espacio. De esta manera se distinguen dos categorías, una que se enfoca en realizar mejoras estructurales en el currículum escolar de matemáticas y otra que atiende hacia destacar la importancia que tiene el desarrollar las habilidades espaciales en los estudiantes.

La primera categoría, las que dan cuenta de la necesidad de realizar mejoras estructurales en el currículum escolar, pone en evidencia que, por un lado es necesario que este currículum favorezca al desarrollo de habilidades espaciales en los estudiantes (Smith, 1964; Ben-Haim, Lappan & Hougang, 1985, 1989; Gutiérrez, 1996; Blanco, 2009; Andrade & Montecino, 2009; Prieto & Velasco, 2010) y por

otro, que este currículum reconozca la cultura y el entorno social del estudiante (Bishop, 1977, 1979; Mitchelmore, 1980a, 1980b; Lancy, 1981; Clements, 2008).

Sin embargo, se reconoce que el foco de atención de éstas radica en la forma en que los estudiantes comprendan los objetos matemáticos involucrados, en otras palabras, el fondo está en el objeto matemático, a pesar de que algunas reconozcan la importancia de factores externos en su desarrollo, como el lenguaje. Es así como se logra identificar que estas investigaciones reconocen, implícitamente, que el papel del estudiante en el proceso educativo es de un mero consumidor de un conocimiento que permanece estático o acabado, es decir, él es quien aprende, descubre o reproduce, pero no quien construye.

Por ejemplo Bishop (1988) identificó cinco factores que no pueden ser soslayados en la enseñanza de las matemáticas, entre ellos ubicó lo cultural y lo social, argumentando que la educación debe ser considerada como un proceso social, por lo tanto la educación matemática también debería ser reconocida como tal. Asimismo se logra observar que la cultura y el entorno social de un estudiante, no quedan excluidos de la escuela sino que forman parte del proceso de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, aún al considerar factores de tipo sociocultural, el conocimiento matemático no se trastoca.

De esta manera cabe preguntar si esta influencia, reconocida del entorno sociocultural, interviene sólo en procesos educativos, claramente la respuesta es “no”, ya que se sostiene que la problemática va más allá de aspectos curriculares, por ejemplo, si se considera que el conflicto, para que los estudiantes desarrollen habilidades espaciales que les permitan un mayor entendimiento sobre la geometría espacial, radica en la visualización y representación espacial, Borrás (1996) evidenció que la existencia de ciertos factores, desprendidos directamente del entorno sociocultural, intervienen en la forma en la que representamos lo que nos rodea.

Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.

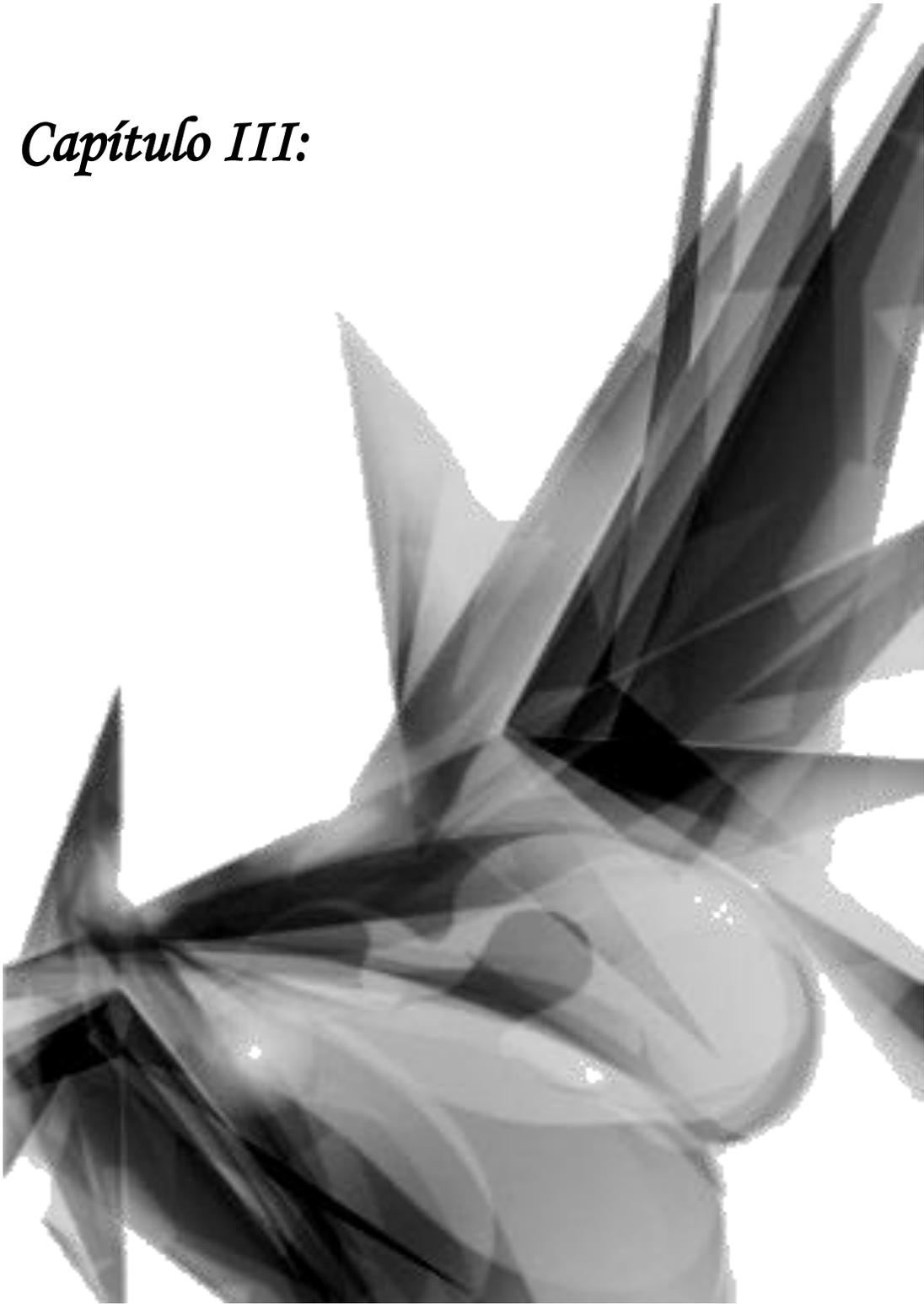
En otras palabras la herencia sociocultural va a mediar la manera en la que se comprende el espacio físico. Entonces parece lógico estudiar lo que ocurre dentro de un escenario sociocultural, a fin de reconocer estos factores, en lugar de proponer una reestructuración curricular o actividades. Con preguntas como ¿de qué manera esta influencia, que interviene en el modo de representar nuestro entorno, repercute en la construcción de conocimiento matemático?

Consiguientemente se torna evidente estudiar cómo surgen ciertas nociones que conllevan a construir conocimiento, específicamente de geometría.

Con respecto a ello se postula que el entorno sociocultural incide en el desarrollo de las habilidades espaciales que permiten a una civilización construir o desarrollar ideas matemáticas. De esta forma, no se consideran las interacciones ocurridas dentro de un ambiente escolarmente regulado, sino que el foco está en las relaciones humanas que ocurren dentro de una civilización, dando respuesta a las siguientes preguntas que orientarán esta investigación

- i) ¿De qué manera las civilizaciones han logrado apropiarse del espacio a través del tiempo?
- ii) ¿Cómo ésta apropiación ha sido influenciada por su entorno sociocultural?

Capítulo III:



3. APROPIACIÓN DEL ESPACIO

Diferentes investigadores reportan cómo los seres humanos somos capaces de observar y luego representar el espacio, identificando propiedades que, en algunos casos, van de acuerdo a nuestra edad o a la intervención de aspectos socioculturales (Lowenfeld & Brittain-Lambert, 1980, Mitchelmore, 1980b, Gutiérrez, 1998; Ives & Gardner, citado en Cabezas, 2007), distinguiendo que no todas las culturas representan de la misma manera los objetos tridimensionales en el plano.

Un ejemplo de esto es que el cuerpo humano no se dibuja de igual forma en todos los países. Wilson (1985) logró evidenciar que la influencia de tipo cultural condiciona el desarrollo gráfico de los niños. Es así como constató ciertos rasgos predominantes en los dibujos infantiles de niños occidentales: *Cuerpos en forma de botella*, de los niños ingleses a finales del siglo XIX; figuras humanas con *brazos que arrancan de la espalda*, típicas de los niños italianos de finales del siglo XIX (figura 14); *piernas en*

forma de rectángulo en diagonal, frecuentes entre los niños mexicanos que vivían en Los Ángeles en 1920.



Figura 14: Figuras humanas con brazos desde la espalda.

(Wilson, 1985, p. 94).

Otras investigaciones hablan sobre cómo las culturas se orientan en el espacio, en otras palabras, cómo logran estudiar las propiedades del terreno o territorio que habitan. Bishop (1999), luego de realizar estudios interculturales, logró identificar y proponer seis actividades relacionadas con el entorno y la cultura matemática que revelan, de cierta manera, cómo las civilizaciones han reconocido y estudiado propiedades de su entorno, a fin de construir o desarrollar ideas matemáticas. Estas actividades son: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar.

En este trabajo se tornan de interés dos de estas seis actividades, *localizar* y *diseñar*, ya que se refieren a tipos de estructuración espacial que para Bishop (1999) conducen a dos clases de ideas geométricas, como lo son: destacar aspectos topológicos y cartográficos del entorno; y conceptualizar objetos y artefactos, conllevando a la idea de forma.

Por lo tanto, el centrarse en estas actividades da respuesta a preguntas que resultan medulares con respecto a la justificación de la misma investigación, por ejemplo ¿qué

importancia tiene el entorno espacial en la construcción de conocimiento matemático? Y por ende ¿qué relevancia tiene el investigar este tipo de cuestiones?

Bishop (1999) señala lo importante que es el mundo espacial desde la perspectiva de las ideas matemáticas, no sólo por las nociones geométricas evidentes, sino también por las nociones de dirección, orden, finitud, convergencia, distancia, movimiento, continuidad, horizontalidad, profundidad, entre otras.

3.1 Formulación de la primera pregunta de investigación

En consecuencia, es posible distinguir dos líneas de investigación, en primer lugar se identifican estudios que se centran en las construcciones cognitivas individuales sobre la representación del espacio, soslayando lo sociocultural y, en segundo lugar, estudios que distinguen que las ideas matemáticas se desarrollan producto de que las civilizaciones, para lograr su sobrevivencia, recogen ciertos elementos de su entorno, sin embargo no atienden a explicar la naturaleza de esta práctica, es decir, sólo reconocen la génesis de las ideas matemáticas.

Es por ello que consideramos necesario dar respuesta al planteamiento anterior, sobre la naturaleza de esa práctica, es decir, ¿cómo distintas civilizaciones logran generar conocimiento y nociones matemáticas a partir de la recolección de diversos elementos del entorno? ¿cuáles son estos elementos? ¿cómo los reconocen? ¿cómo conllevan a nociones matemáticas?

De esta manera se delimita la siguiente pregunta de investigación:

- (1) **¿ De qué manera las civilizaciones han logrado apropiarse del espacio a través del tiempo?**

Esta pregunta nos llevará a identificar, tal como se señaló, la manera en que las civilizaciones reconocen elementos del entorno que habitan, para así *apropiarse del espacio*, pero al plantear esta primera pregunta surgen interrogantes como: ¿Qué significa apropiarse del espacio? ¿Cuándo se dice que una civilización se apropió del espacio?, bien es sabido que no es un término que se utilice en la disciplina, es decir, no es propio de la Matemática Educativa, por lo tanto, debido a que se considera un elemento medular en este trabajo, se torna primordial establecer una caracterización para éste.

En el presente apartado nos abocaremos a responder ciertos cuestionamientos a fin de precisar esta pregunta de investigación, tales como ¿qué es apropiación del espacio? ¿cuál es la relación existente entre la producción de conocimiento matemático y lo “cultural”?

3.1.1 ¿Qué se entiende por apropiación del espacio?

Podemos decir que una civilización se *apropia del espacio* cuando se reconoce una producción de conocimiento, no necesariamente matemático, desprendido al momento que quienes forman parte de esta civilización cuestionan y hacen un intento por comprender su entorno. En este caso, resultan de interés las prácticas que posteriormente llevarán a desarrollar ideas matemáticas, lo cual se identificará mediante ciertas producciones, tales como la orientación que establecieron del espacio, el avance de las construcciones arquitectónicas, el desarrollo del arte, entre otros.

Para este estudio, no será relevante el tipo de nociones matemáticas desarrolladas, es decir, la que se puede encontrar en la producción matemática de una civilización, por ejemplo de tipo geométrico. Sino más bien, lo que se considera esencial es dar evidencia de la manera en la que construyeron estas nociones, identificando

elementos relevantes, mediante el análisis de las visiones del mundo, las necesidades y características del entorno.

En otras palabras, lo que se pretende es dar evidencia de ciertas prácticas que lleven a una epistemología que propició el surgimiento de conocimiento matemático. Considerando esta idea de epistemología como parte de las cuatro dimensiones de la construcción social del conocimiento matemático. Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra (2006) reconocen que esta epistemología no está centrada en develar la génesis o evolución de los conceptos, sino que más bien se direcciona en identificar elementos relevantes que están presentes en la construcción de conocimiento matemático, que a su vez son normados por lo social, lo político y lo cultural, de esta manera el conocimiento se vuelve situado, es decir la organización de los grupos humanos lleva a construir el conocimiento de una forma y no de otra.

3.1.2 *¿Qué relación existe entre la producción de conocimiento geométrico y lo cultural?*

Se busca establecer la manera en que las civilizaciones logran apropiarse del espacio, Bishop (1999) explicó, desde una perspectiva cultural, la relación entre la matemática y las culturas, planteando seis actividades de las cuales serán consideradas sólo dos, tal como se mencionó anteriormente, *localizar* y *diseñar*.

A continuación se presenta una síntesis de las ideas de Bishop (1999) sobre estas dos actividades, de modo que se transformen en los cimientos que nos permitirán entender y explicar cómo las civilizaciones se apropian del espacio.

3.1.2.1 *Localizar*

Bishop (1999) denominó *localizar* a una actividad que hace alusión a la situación de uno mismo y de otros objetos en el entorno espacial, en otras palabras, se refiere a

identificar ciertos elementos característicos del territorio, por ejemplo, debido a la necesidad de buscar alimento o de conocer el tipo de suelo para el cultivo, se descubren aspectos diferentes para lugares geográficos distintos. Es así como algunos pueblos de Papúa Nueva Guinea, que habitan en sectores montañosos, existían palabras para denotar diversos grados de inclinación, sin embargo no les era inmediato poder describir la horizontalidad, ya que en su lenguaje no tienen una palabra incorporada para lo “horizontal”.

Otro ejemplo se explicita en un estudio, realizado por Littlejohn (1963, citado en Bishop 1999), en el que se comunican los significados espaciales empleados por un pueblo de Sierra Leona. De estos significados se desprende una comparación entre las prácticas actuales occidentales y las prácticas de un pueblo como los Temme, en occidente se considera que para nosotros, lo que vivimos inmersos en una cultura occidental, los puntos cardinales son coordenadas fijas que establecen una localidad (norte, sur, este y oeste), por el contrario para los Temne nuestro *este* y *oeste* no son sólo direcciones opuestas, sino que las reconocen como opuestos existenciales, el *este* es la dirección que sustenta la vida y el *oeste* la destructiva, por consiguiente la orientación de los Temne es hacia el *este* y no hacia el norte, como los occidentales.

Es en este sentido donde, para Bishop (1999), la orientación resulta primordial en la conceptualización de *localizar*. Evidenciándose en un estudio realizado por Lewis (1976, citado en Bishop 1999) sobre la capacidad de orientación en el espacio de los aborígenes australianos, señalando que para ideas específicas de localización ellos recurren a su intrincado conocimiento detallado no sólo del paisaje topográfico, sino que también relacionado a sus mitos e historia dentro del paisaje

3.1.2.2 Diseñar

Bishop (1999) consideró por *diseño* a la tecnología, los artefactos y objetos manufacturados que son confeccionados para la vida doméstica de una cultura o con

finés comerciales, como adornos, elementos religiosos, incluso para la guerra. Es así como este *diseño* puede ser aplicado al entorno espacial como la construcción de casas o aldeas, huertos, campos, carreteras o ciudades.

Se reconoce que la esencia del diseño es la transformación, lo cual implica la imposición de una estructura particular a la naturaleza, destacando ciertos aspectos por encima de otros. Un ejemplo de esta idea, propuesto por Bishop (1999), es que si encontramos una rama podemos quitarle lo que consideramos innecesario y construir un bastón, reconociendo que a pesar de tener diferente longitud todos serán similares, ya que tenemos un “diseño” en mente de una vara rígida que nos brinde apoyo al caminar.

Luego de analizar este ejemplo se podría concluir que todas las culturas diseñarán algo de características similares, sin embargo la variedad de formas diseñadas depende directamente de las necesidades de una cultura y además del material disponible, ya sea madera, piedra o fibras como la lana, etc. A pesar de estas diferencias se pueden identificar similitudes en el tipo de construcciones de las casas, chozas o cabañas, las que suelen ser de forma circular o rectangular, con materiales pesados como madera o ladrillo en la estructura y materiales ligeros como hierbas en el techo. Es así como las necesidades crean una demanda de ideas matemáticas relacionadas con la forma, el tamaño, la medida, entre otros conceptos geométricos.

3.1.2.3 En síntesis

Las consideraciones de Bishop (1999), al reconocer que una sociedad desarrollará ideas matemáticas a partir de las necesidades que se vayan presentando en su camino para lograr la sobrevivencia y el entendimiento de lo que los rodea, del mundo, convergen a lo que se denominó como enculturación matemática, la cual tiene como objetivo final iniciar a los niños en las simbolizaciones, las conceptualizaciones y los

valores de la cultura matemática, respetando la individualidad y la personalidad de cada niño, además de las características de la cultura.

Sin embargo, a pesar de reconocer a las matemáticas como una producción social, emergida de la necesidad de comprender ciertos fenómenos situados, Bishop (1999) propone introducir al currículum estas ideas, pero con un objeto matemático ya construido, acabado, previamente establecido.

Es así como el *localizar* se refiere a: descripciones de recorridos; orientación con brújula; reconocimiento de arriba/abajo, izquierda/derecha y delante/atrás; líneas rectas y curvas, rotaciones, sistemas de localización; entre otras, estableciendo que esta actividad, el *localizar*, enfatiza la geometría espacial de la posición y del movimiento controlado. El *diseñar* hace referencia a: figuras, forma y estética; comparación de propiedades de la forma; semejanza y congruencia; redes; simetría; proporción, entre otros, donde el *diseño* es entendido como lo que establecerá conexiones perceptivas más evidentes e inmediatas con el entorno.

Por otro lado Bishop (1999) evidencia la importancia de las representaciones del entorno, señalando que existen diversas formas para describir y representar localizaciones, pero éstas portan, implícitamente, las raíces de gran parte de las ideas geométricas de una sociedad. Pero no distingue a ésta como una actividad en sí, entonces ¿qué papel juegan las representaciones del entorno?

3.2 ¿Qué relación hay con las representaciones tridimensionales?

De lo anterior, se hace necesario realizar una revisión sobre las investigaciones que se han generado en torno a la representación del entorno, en su mayoría de carácter cognitivo, reconociendo el progreso de cada individuo de acuerdo a ciertos elementos que lo sitúan como parte de una etapa o estadio.

3.2.1 *La capacidad creadora*

En primer lugar se considerará el desarrollo de la capacidad creadora donde se emerge lo tridimensional desde la construcción de la perspectiva. En el año 1980 Lowenfeld y Brittain-Lambert demostraron que los individuos pasan por ciertas etapas para lograr representar la realidad (lo tridimensional) en el plano las cuales se ven intervenidas por todo lo que nos rodea, es así como la capacidad creadora puede entenderse como aquella fluidez de ideas o flexibilidad del pensamiento que permite pensar diferente a los demás, Lowenfeld y Brittain-Lambert (1980) la consideran como un comportamiento constructivo y productivo, que se manifiesta a través de la acción o realización, en el que interactúan distintos factores implícitos en todos los procesos de creación, por ejemplo los ambientales, los sociales, entre otros, por lo tanto se reconoce como un proceso continuo.

Una de las características fundamentales de la capacidad creadora es la habilidad de pasar de un tipo de pensamiento a otro, es decir, la flexibilidad de los esquemas de pensamiento, el cual se desarrolla a lo largo del proceso de maduración del niño.

Lowenfeld y Brittain-Lambert (1980) distinguen algunas etapas en el desarrollo de la capacidad creadora, en la cual subyace la formación o surgimiento de lo tridimensional o representación del espacio, que está íntimamente ligado a las expresiones de los estudiantes, mediante el arte: Etapa del garabateo, Etapa pre-esquemática, Etapa esquemática o del esquematismo, Edad de la pandilla, Etapa pseudonaturalista, Etapa de la decisión, Desarrollo de la conciencia estética.

- **Etapa del garabateo:** ocurre a partir de los dos a los cuatro años, en ella se pueden distinguir los comienzos de la autoexpresión, se caracteriza por ser “desordenada”, ya que los niños no poseen coordinación motriz.

- **Etapa pre-esquemática:** ocurre a partir de los cuatro a los siete años, aquí se ven reflejados los primeros intentos de representación. Las representaciones del espacio se establecen según su significado emocional y sus dibujos son carentes de orden.
- **Etapa esquemática o del esquematismo:** ocurre a partir de los siete a los nueve años, en esta etapa se produce la obtención de un concepto de forma, los que se convierten, posteriormente en esquemas, mediante la repetición. Aún no son capaces de representar la realidad como tal, sino que es más bien subjetiva. Son capaces de distinguir las formas que constituyen parte de su entorno, por lo que aparece el primer concepto espacial definido: las líneas de base.
- **Edad de la pandilla:** ocurre a partir de los nueve hasta los doce años, los niños tienen mayor conciencia del yo, se alejan de las líneas geométricas, se entiende como una etapa de transición en el desarrollo de la capacidad creadora, debido a la crisis de la pre-adolescencia. Lowenfeld y Brittain-Lambert (1980) señala que en este período el niño se aísla de su entorno y comienza a demostrar actitudes egocéntricas, por lo que aparecen dificultades para establecer relaciones espaciales, sin embargo empieza a descubrir el plano, dando paso al comienzo del realismo
- **Etapa pseudonaturalista:** ocurre desde los doce años a los catorce años, se conoce como la edad del razonamiento. En este período se comienza a desarrollar la inteligencia y la inclinación a lo dramático, por lo que surge la necesidad de expresiones tridimensionales, sin embargo sólo algunos son capaces de apreciar en el espacio estas cualidades, ya que descubren que pueden realizar dibujos con ilusión de profundidad. Es en esta etapa que los individuos distinguen la relación entre distancia y tamaño de los objetos. Lowenfeld y Brittain-Lambert (1980) sostiene que las reglas de perspectiva, para los jóvenes, se vuelven mecánicas y no tienen relación con el mundo de su experiencia. Además identifica dos tipos de

individuo: *El tipo visual*, tiene cualidades tridimensionales, distingue luces y sombras y es capaz de representar el espacio en perspectiva; *El tipo háptico*, no logra apropiarse del concepto de perspectiva, lo cual debe adquirir a través de mera repetición y mecanización, es de carácter muy emocional así que este proceso puede resultarle una experiencia frustrante.

- **Etapa de la decisión:** ocurre a partir de los catorce hasta los diecisiete años, en esta etapa surge la conciencia crítica hacia el medio. Lowenfeld y Brittain-Lambert (1980) caracteriza a los jóvenes como autocríticos, introspectivos, idealistas y con preocupación por su realidad social. Es por ello que en esta etapa el arte les brinda una oportunidad para expresar sus sentimientos y emociones y el concepto de perspectiva y profundidad subyace inconsciente en su arte.
- **Desarrollo de la conciencia estética:** cada joven desarrolla sus propios conceptos sobre los estándares de belleza, no resulta como algo impuesto, sino que resulta del proceso de desarrollo total del niño, de la conciencia sobre sí mismo y la sensibilidad hacia su propio ambiente. En la representación del espacio, la perspectiva y la profundidad intervienen en los pensamientos, en los sentimientos y en la percepción de la realidad.

3.2.2 *Influencias culturales en el dibujo*

Ives y Gardner (Citado de Cabezas, 2007) realizan un análisis en torno a identificar las influencias culturales en el desarrollo del dibujo infantil que los lleva a proponer tres etapas por las que pasa un individuo: Dominio de los patrones universales; Florecimiento del dibujo y Apogeo de las influencias culturales.

- **Dominio de los patrones universales** (hasta los 5 años de edad): donde los dibujos se presentan como garabatos, trazos más definidos, figuras y objetos, comunes a cualquier tipo de cultura.

Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.

- **FloreCIMIENTO del dibujo** (de los 5 a los 7 años): se considera como un período de transición, en el cual los niños han adquirido a través del lenguaje el dominio de las formas simbólicas dominantes de su cultura. Dependiendo de las normas vigentes en la escritura los niños comienzan a dibujar desde la izquierda o a la inversa, y desde arriba hacia abajo.
- **Apogeo de las influencias culturales** (de los 7 y los 12 años de edad): el niño tiende a adoptar las características propias de su cultura, como esquemas, modelos y clasificaciones, y la característica común es la búsqueda de un realismo visual.

3.2.3 *Influencias culturales en las representaciones matemáticas*

Mitchelmore (1976, 1980b) realiza un estudio, similar al trabajo de Ives y Gardner (Citados de Cabezas, 2007), el cual pretende describir la representación tridimensional, estableciendo ciertas influencias culturales en la educación matemática. Proponiendo cuatro etapas por las que pasa un individuo: Esquemática plana; Esquemática espacial; Pre.realista; y Realista.

- **Esquemática plana:** en esta etapa se representan objetos de manera plana, es decir, mediante el dibujo de una de sus caras ortogonales.
- **Esquemática espacial:** en esta etapa se hace un intento por representar varias de las caras ortogonales de un objeto, sin embargo no se da una sensación de profundidad.



Figura 15: Representaciones de la etapa esquemática espacial

(Gutiérrez, 1998, p. 204)

- **Pre-realista:** en esta etapa se intenta representar cuerpos de una manera más realista posible, tratando de dotarlos de profundidad, sin embargo no se logra completamente. Se pueden identificar dos etapas que son distinguidas en la precisión y/o perfección de los dibujos con respecto a lo tridimensional.

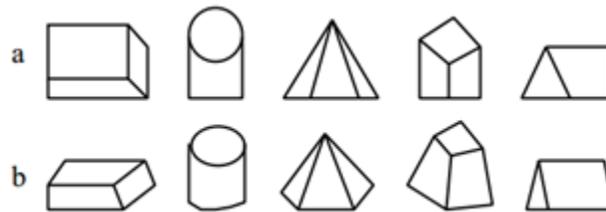


Figura 16: Representaciones de la etapa pre-realista.

(Gutiérrez, 1998, p. 204).

- **Realista:** en esta etapa se explicita la noción de profundidad, logrando dibujos más realistas, en los cuales se puede identificar los principios básicos de la representación en perspectiva.

Gutiérrez (1998) realiza un estudio en el cual verifica que otras investigaciones (Gaulin, 1985; Ben-Chail, Lappan y Houang, 1989; Woodrow, 1991) han logrado validar o confirmar los resultados obtenidos por Mitchelmore (1980b). Además en este mismo estudio, que pretende que los estudiantes aprendan a dibujar y leer representaciones planas de cuerpos tridimensionales, Gutiérrez (1998) da evidencia de estos resultados, mediante la experimentación sobre las habilidades de los estudiantes de primaria.

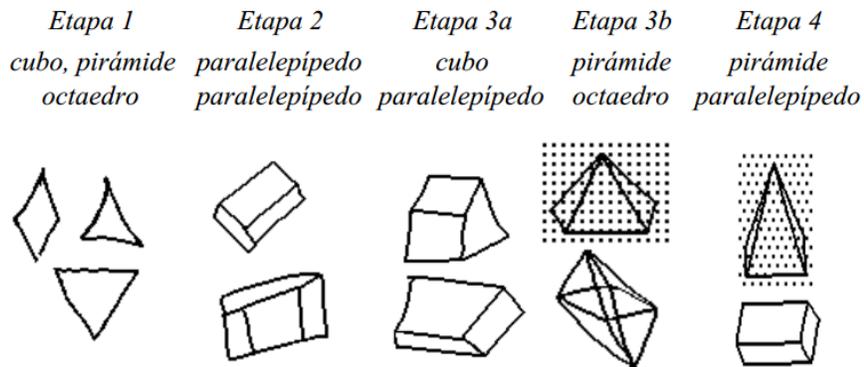


Figura 17: Representaciones de estudiantes
(Gutiérrez, 1998, p. 205)

3.2.4 *En síntesis*

Hay que destacar que las dos primeras investigaciones se abocan a proponer un desarrollo lineal sobre la representación de lo tridimensional, jerarquizándolo según etapas o fases, segmentadas por el rango etario, que los individuos recorrerán en cierta etapa de su vida.

Lowenfeld y Brittain-Lambert (1980) demostraron que, para lograr representar lo tridimensional en el plano, los individuos atraviesan por siete etapas: Etapa del Garabateo, Etapa pre-esquemática, Etapa Esquemática o del esquematismo, Edad de la pandilla, Etapa pseudonaturalista, Etapa de la decisión, Desarrollo de la conciencia estética, las que se ven intervenidas por el entorno, tales como ambientales, sociales, entre otros. Por otra parte Ives y Gardner (Citado de Cabezas, 2007) identifican ciertas influencias de tipo culturales en el desarrollo del dibujo infantil, proponiendo tres etapas por las que transita un individuo: Dominio de los patrones universales; Florecimiento del dibujo y Apogeo de las influencias culturales.

Por otro lado, Mitchelmore (1976, 1980b) realizó un estudio que se enfocó en establecer ciertas influencias culturales en la educación matemática. Lo que consiguió fue distinguir cuatro etapas por las que pasa un individuo al momento de representar lo tridimensional (Esquemática plana; Esquemática espacial; Pre.realista; y Realista).

A pesar de que estas investigaciones reconocen la influencia de ciertos factores culturales en la representación de lo tridimensional, esta idea parece desvanecerse al presentar el producto final, ya que ninguna da cuenta sobre el papel que desempeña la cultura. Lowenfeld y Brittain-Lambert (1980) e Ives y Gardner (citado en Cabezas, 2007) proponen etapas que parecen ser estáticas, la que vivirá un individuo independiente del entorno donde esté inmerso. Mitchelmore (1976, 1980b) logra establecer influencias sin explicitarlas, sus conclusiones lo llevaron a afirmar que una sociedad estaba más “avanzada” o “retrasada” a otra comparándolas con su modelo, sin embargo no se profundizó en los factores que producían ese fenómeno.

Es así como emergen interrogantes como las siguientes: ¿Es necesario establecer una separación por rango etario de los individuos? ¿Cómo estas etapas se pueden aplicar a la matemática escolar? ¿Es posible reconocer los factores socioculturales que conllevan a estas diferencias?

Creemos que el escenario sociocultural, en el que se encuentra inmerso un individuo, influye sobremanera en la representación que éste logra del espacio, por ello que no debe ser soslayado. Más aún, sostenemos que aquella representación es la evidencia empírica o la portadora de la información sobre el tipo de apropiación lograda en determinado contexto. Es así como presentamos nuestra visión, desde la socioepistemología, sobre cómo una civilización se apropia del espacio.

3.3 ¿Cómo se apropian las civilizaciones del espacio?

De acuerdo a lo señalado en este capítulo, se puede afirmar que una civilización ha logrado apropiarse del espacio luego de haber vivido cuatro momentos, no se presentan en un orden jerárquico en particular y no descartamos la existencia de otros, pero para este estudio los siguientes son la base para hablar de apropiación del espacio: Interacción con el espacio físico; extracción de propiedades del entorno; representación del entorno; manipulación del entorno, tanto mental o física.

3.3.1 *Interacción con el espacio físico*

La interacción con el espacio físico es vista como la primera aproximación a la apropiación del espacio, en la cual se reconoce la cosmogonía de una civilización.

En diversos diccionarios de astronomía⁸ se define cosmogonía como una rama de la Astronomía que estudia el origen del cosmos y su posterior evolución, enfatizando en la comprensión teórica del "inicio" de todo. Difiere de la cosmología, con la que normalmente se confunde, que se ocupa del origen y evolución del Universo considerado en su totalidad.

De esta manera, la Cosmogonía se transforma en un conjunto de teorías míticas, religiosas, filosóficas y científicas sobre el origen del mundo. Por ende, cada cultura o religión han tenido y tienen sus propios entendimientos y explicaciones cosmogónicas, que pueden ser identificadas con un proceso de creación o emanación.

Es así como se identifica que esta cosmogonía acude a un ser supremo responsable de la creación de todo lo existente o bien, de establecer un orden al caos inicial. A éste se le atribuyen poderes sobrenaturales capaces de crear, conllevando a la existencia de

⁸ Véase, por ejemplo, www.astronomia.com/glosario

diferentes dioses que representaban a la naturaleza, que tampoco era comprendida por el ser humano en aquel entonces.

Esto se debe a que el ser humano ha buscado explicaciones sobre el origen de las cosas, sin embargo éstas, en su mayoría, se argumentaban con base en mitos donde los dioses hacían gran parte del trabajo. Por lo tanto, la cosmogonía surge como una necesidad humana de explicarse a sí mismo, de dar un sentido a su existencia y de tratar de comprender el mundo que lo rodea.

Consiguientemente, se considera que el estudiar la cosmogonía de una civilización ayudará a comprender la forma en la que ésta veía su entorno, en otras palabras, cómo dieron explicación al origen de las cosas, a la creación.

3.3.2 *Extracción de propiedades del entorno*

La *extracción de propiedades del entorno* se relaciona con la actividad de *localización* planteada por Bishop (1999), la que se encuentra estrechamente ligada a la orientación en el espacio y la identificación de ciertos elementos del entorno, donde el terreno en el que se habita adquiere gran importancia.

Para Bishop (1999) el interés convergía en identificar ciertos elementos de un entorno que estuviesen asociados a ciertas ideas matemáticas, tales como las distintas inclinaciones que poseía un tipo de suelo o si se podía identificar un horizonte, le darían sentido a la noción de pendiente o de horizontalidad.

Para esta investigación se considerará como *extracción de propiedades del entorno* a la identificación de propiedades, tanto del entorno como de elementos de éste, las que lleven a establecer una idea o generalización de cierto fenómeno, con el propósito de conformar un conocimiento propio del escenario sociocultural.

3.3.3 *Representación del entorno*

La *representación del entorno* se concibe como la portadora de información o elementos claves al momento de establecer cómo dicha civilización comprendía su entorno, ya que es la evidencia tangible del tipo de apropiación que se logró, en otras palabras, es lo que podemos observar, por ejemplo las representaciones bidimensionales del espacio.

Además de establecer un tipo de representación particular, característica de una determinada sociedad, se reconoce que revela diferencias entre los mismos ciudadanos, por ejemplo Gutiérrez (1998) evidenció que, al abocarse a estudiar los dibujos en el plano de objetos tridimensionales en las producciones de tejedores, alfareros y granjeros se obtienen diversas representaciones para cuerpos como cilindros y pirámides.

En la siguiente figura se presentan los resultados obtenidos en esa experiencia, lo que demuestra que la representación del espacio no sólo será característica de una comunidad, sino que además, si se profundiza en ella se reconocerán diferentes representaciones para un mismo objeto dentro de la comunidad, en el caso de Gutiérrez (1998) éstas fueron en torno al oficio del ciudadano.

Además, la imagen devela que, a pesar de las diferentes representaciones que se plasman en el plano, es posible establecer ciertos patrones: En las producciones de los cilindros, se logra observar el énfasis puesto en recalcar que en una visión lateral a éste se podrá ver un rectángulo y en una visión desde arriba, es circular. Llama la atención que el alfarero y el granjero dibujaran algo que pareciera ser una gota; En las producciones de las pirámides, se logra visualizar el énfasis puesto en proponer una pirámide de base cuadrada, se reconoce que desde una visión lateral la pirámide se verá como un triángulo.

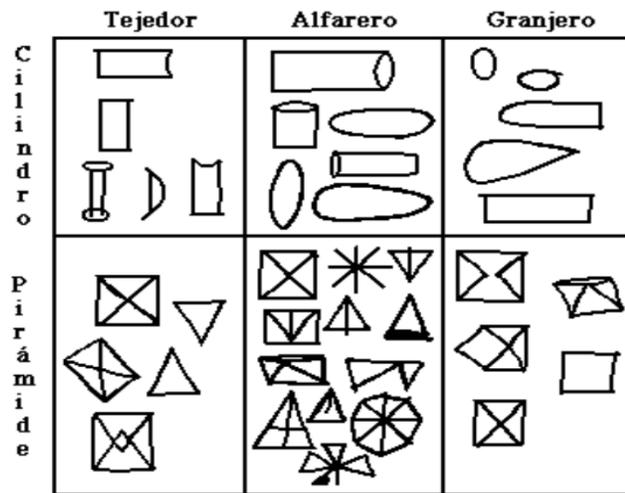


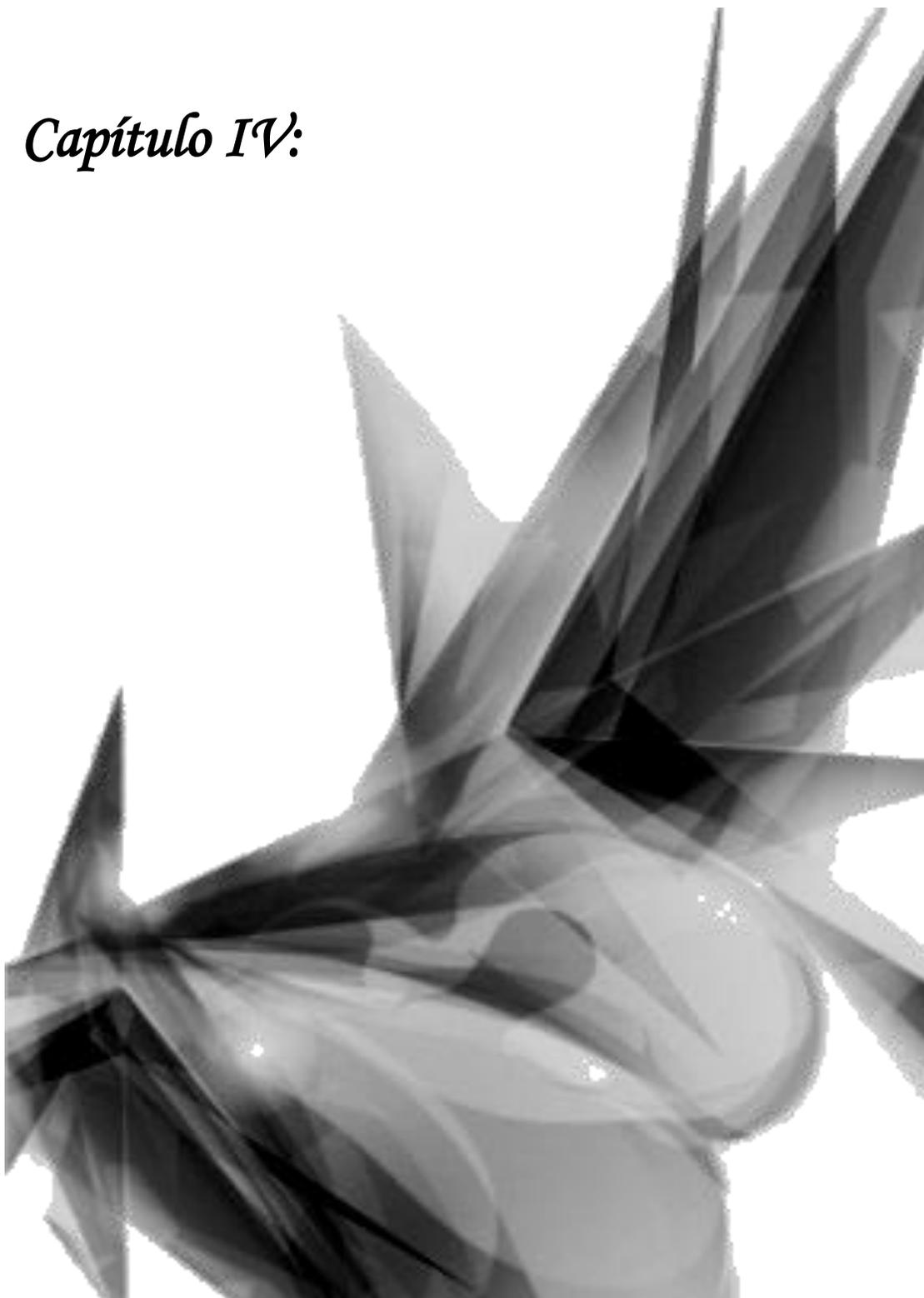
Figura 18: Representaciones de cuerpos geométricos
Gutiérrez (1998, p. 207)

3.3.4 Manipulación del entorno

La *manipulación del entorno* se relaciona con la actividad de *diseñar* planteada por Bishop (1999) considerándola como la tecnología, los artefactos y objetos manufacturados que son confeccionados para la vida doméstica de una cultura o con fines comerciales, también puede aplicarse a la construcción de casas o aldeas, huertos, campos, carreteras o ciudades. Para Bishop (1999) la esencia de esta actividad es la transformación, lo cual implica la imposición de una estructura particular a la naturaleza, destacando ciertos aspectos por encima de otros.

En este estudio la manipulación del entorno, tanto mental, como física, hace referencia a cómo, sin la necesidad de representar, se puede moldear lo que nos rodea con el fin de crear otros nuevos objetos o modificarlos.

Capítulo IV:



4. INFLUENCIAS DEL ESCENARIO SOCIOCULTURAL

En el capítulo anterior se puede reconocer que las investigaciones han ido evolucionando en torno a identificar el por qué los jóvenes o niños logran diferentes representaciones tanto según su rango etario como según su entorno cultural, sin embargo, han soslayado la herencia del escenario sociocultural.

Por ejemplo, si nos centramos en la representación bidimensional de cuerpos tridimensionales, Gutiérrez (1998) señala que las diferencias en las representaciones se deben a la existencia de convenios sobre la manera de interpretar los dibujos, por lo que reconocer la influencia cultural se torna de gran importancia en la planificación y diseño curricular, señalando que el hacer uso de métodos de enseñanza de otros países produce un choque de concepciones, conllevando a una incompreensión por parte de los estudiantes.

Sin embargo no encontramos investigaciones que den cuenta de la naturaleza de esta influencia cultural, sólo la reconocen como una variante en la representación de la realidad. En este sentido se asume que, como en ciertos lugares no existe evidencia de la producción de la obra matemática, se genera un fenómeno de adherencia, análogo al reportado por Silva (2010). ¿Acaso esto significa que aquellos lugares, que se adhieren al currículum matemático de países más avanzados, no producen ideas que conlleven a nociones matemáticas en su forma más básica?, en otras palabras ¿podemos afirmar que en estos lugares no logran apropiarse del espacio?

4.1 Segunda pregunta de investigación

Es así como se construye la segunda pregunta de investigación, que nos permitirá identificar cómo las influencias de un entorno sociocultural merman en ciertas prácticas que conllevan a la generación de ideas matemáticas. Es necesario clarificar que no se analizará la evolución de un concepto matemático, si no que se reconocerán las prácticas que le dan origen. De esta manera la segunda interrogante es:

(2) ¿Cómo la apropiación del espacio ha sido influenciada por los escenarios socioculturales?

Esta pregunta permitirá dar evidencia de que, tal como lo plantea la teoría socioepistemológica, la matemática forma parte intrínseca de la cultura de una civilización, en otras palabras, es una manifestación cultural de una sociedad, por lo tanto cada escenario tendrá una definición propia sobre la matemática, en este caso particular, sobre la Geometría.

Antes de comenzar a responder la pregunta de investigación será necesario precisar ciertos elementos claves, como: ¿Qué se entiende por escenarios socioculturales?

4.1.1 *Escenarios socioculturales*

La teoría socioepistemológica reconoce al individuo como un ser social, partiendo de la premisa que toda persona se encuentra inmersa en una sociedad. Es por ello que se puede afirmar que este individuo vive en un contexto, denominado *sociocultural*, en el cual se encuentran inmersas ciertas significaciones colectivas originadas en aquel escenario.

Mingüer (2006) identifica que una sociedad lleva a cabo prácticas sociales que se manifiestan como: ideas, opiniones, creencias, cultura, ideologías, modas, entre otras, que definen lo sociocultural. Por lo tanto lo sociocultural se establece como un sistema que abarca todos los fenómenos sociales que surgen de un grupo social culturalmente situado.

Los escenarios socioculturales pueden ser reconocidos, según Crespo (2007), como los ámbitos en los que actúan los grupos sociales, los que están definidos por prácticas culturales específicas que revelan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos que constituyen las sociedades. Además reconoce que en estos escenarios se explicitan peculiaridades históricas y cotidianas, de carácter filosófico, epistemológico, ideológico, es decir, culturales.

Es así como Crespo (2007) establece que el escenario sociocultural influye en la forma de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita, moldeando sus acciones y pensamientos, condicionándolos sustancialmente. Además, todas las características de los escenarios socioculturales influyen en la construcción del conocimiento, de esta manera éste es comprendido como un producto sociocultural, y por lo tanto representativo de la sociedad en la que se gesta.

4.2 Un escenario sociocultural: Los egipcios

En el capítulo anterior se plantearon cuatro momentos bajo los cuales se concluirá que una civilización se ha apropiado del espacio, por lo tanto, el estudio se centrará en éstos y el escenario seleccionado es el Antiguo Egipto.

Sloley (1944) realizó un estudio sobre el Antiguo Egipto, el cual evidencia que el conocimiento matemático de esta civilización era esencialmente práctico, el que fue desarrollándose con el fin de solucionar problemas específicos. Raramente los problemas se referían a números abstractos, ya que no estaban interesados en desarrollar una teoría o una filosofía determinada y mientras un método cualquiera cubriese sus necesidades, estaban satisfechos. A pesar de ello, antes del año 2000 AC habían dado forma a un sistema práctico de numeración, con el que podía efectuar complicados cálculos de expresiones fraccionarias.

De León (sf) señala que los egipcios dominaron la geometría de las principales figuras y lograron un conocimiento de la geometría del espacio que le permitió construir esas magníficas edificaciones que sobrevivirían hasta la actualidad.

4.2.1 *La vida en el Antiguo Egipto*

Los egipcios consideraban que el objetivo principal de la vida era servir a los dioses y al faraón, éste último era visto como un Dios sobre la Tierra, de esta manera manifestaban que era posible asegurar la prosperidad de todo el pueblo (Parra, 2003). Su sociedad estaba conformada mediante la siguiente categoría: Faraón, a la cabeza de la sociedad; Nobles, sacerdotes, funcionarios y escribas, estos últimos eran de gran importancia, debido a que eran los únicos que conocían la escritura jeroglífica; Campesinos y finalmente los esclavos (figura 19).

El Faraón era de tal importancia que, según Bustos (sf), Akhenatón, hijo de Amenofis III, haciendo uso del enorme poder y riquezas, realizó un movimiento que se salía de la trayectoria tradicional de los reyes de Egipto: intentó una reforma religiosa, siendo tan radical que estuvo a punto de asestar un golpe mortal no sólo al culto tebano sino incluso a los fundamentos de la religión egipcia, dando paso a un período monoteísta rindiéndole culto a Amón.

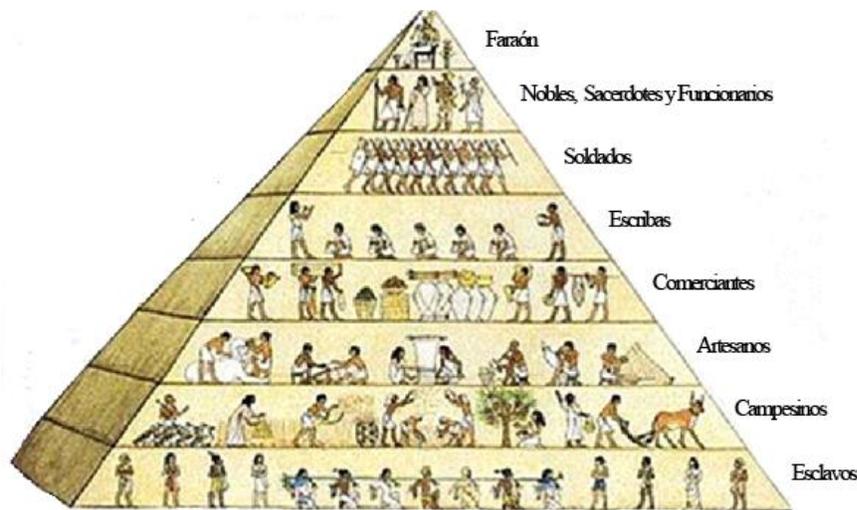


Figura 19: Organización social del Antiguo Egipto

Con respecto a sus creencias, tenían la convicción de que todas aquellas manifestaciones de la naturaleza a las que no podían darle explicación representaban el poder de los dioses, entre los cuales estaban Ra (Dios del sol), Osiris (Dios de la vegetación, el Nilo y los muertos), entre otros, lo que los llevó a posicionarse como una civilización politeísta. Sin embargo, tal como se señaló anteriormente, un faraón en la época del Reino Nuevo cambió ésta a una creencia monoteísta.

Debido al valor que los egipcios daban a la vida después de la muerte, estas creencias llevaron a que gran parte de las construcciones arquitectónicas de mayor importancia fuesen monumentos funerarios, templos y tumbas. Otras expresiones artísticas

también se realizaban con fines religiosos, como la escultura y la pintura, pero no fueron tan desarrolladas como la arquitectura.

Peréz (2004) destaca la importancia de la vida después muerte en el Antiguo Egipto, la que constituyó gran parte de sus prácticas, por ejemplo el culto funerario, para el cual construían imponentes sepulcros para enterrar a los faraones, dejando numerosos elementos que le ayudarían a llevar una vida de ultratumba confortable y libre de sufrimientos.

Al interior de estos edificios se encontraba una habitación principal, la cámara funeraria, en ese lugar se depositaba el sarcófago que contenía el cuerpo embalsamado. Las paredes y otros elementos que se enterraban con el faraón contenían numerosas inscripciones religiosas, grabados y pinturas, describiendo la vida del muerto y ritos que asegurarían su mejor vida de ultratumba.

Por otra parte, consideramos que las nociones de matemática fueron de gran importancia en la construcción de las grandes obras de ingeniería y arquitectura. Como las esculturas, esfinges, torres y obeliscos, que se construyeron con el fin de decorar las fachadas de los templos. Los conocimientos astronómicos permitieron a los egipcios fijar un calendario de 365 días, que comenzaba cuando el Sol y la estrella Sirio se ubicaban juntas en el cielo y comenzaba la época de las inundaciones.

Para Assmann (2003) la crianza y la educación de los hijos eran los medios de los que se disponía para formar al niño según las normas del Antiguo Egipto. El objetivo era establecerse como un ser social, lo que se lograba al “adoctrinar” al niño para que aceptara y adoptara los valores morales de la sociedad y de la clase a la que pertenecía. Reconociendo, de esta manera, la importancia de la educación, ya que ésta moldeaba a un individuo y lo convertía en un hombre, en un ser sociable, en una persona que dominaba sus instintos y era responsable de llevar una vida ordenada

4.2.2 ¿Podemos decir que los egipcios se apropiaron del espacio?

En este apartado se pretende realizar un análisis de la civilización egipcia, con la intención de estudiar de qué forma influyen los factores de escenario sociocultural en la apropiación de espacio, tomando los cuatro momentos mencionados en el capítulo anterior, e identificarlos.

4.2.2.1 Interacción con el entorno

Ares (1997) realiza un análisis sobre cómo los egipcios percibían el espacio, concluyó que ellos consideraban que el mundo estaba organizado de una manera similar a la de un cubo gigante. De esta forma, en el fondo se encontraba la tierra y los mares, ubicando a Egipto en el centro, además ésta era sostenida por cuatro pilares o montañas localizadas en cada extremo.

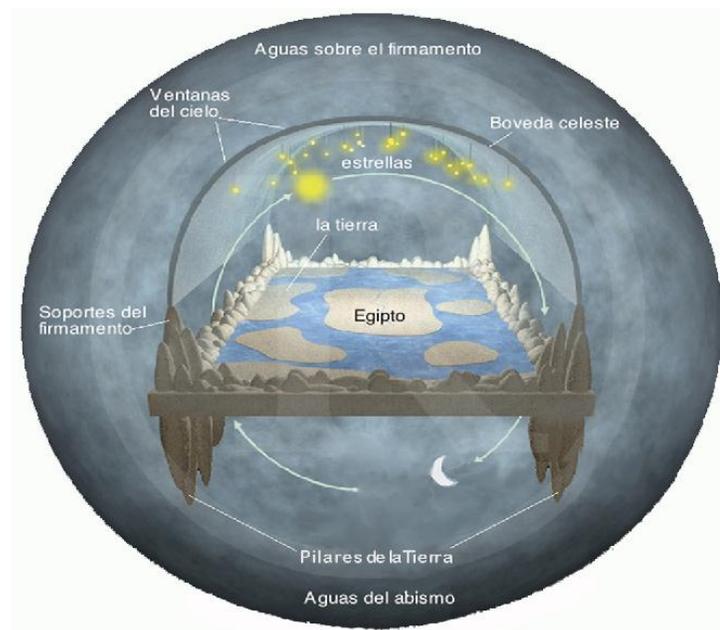


Figura 20: Cosmogonía egipcia

Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.

Mediante la observación de las estrellas, el Sol y la Luna, lograron darse cuenta que el cielo era una superficie convexa que giraba alrededor de la tierra. En la figura 20 se puede apreciar una representación actual del espacio de los egipcios (haciendo uso de la perspectiva).

Ahora bien, al adentrarnos a las creencias del Antiguo Egipto, ellos consideraban que la cara superior de este cubo pertenecía a la diosa Nut (diosa del cielo, creadora del universo y los astros), la inferior al dios de la tierra Geb (dios creador, principio de vida y fertilidad), y las cuatro caras laterales eran divididas en planos por cuatro columnas que mantenían separados al cielo y a la tierra, cetos *was*. Esta caja contenía todo su entorno, por ejemplo, en el interior de ésta fluía el dios del aire Shu (deidad cósmica, que personifica el aire atmosférico y la luz), el cual separa a Nut y Geb.

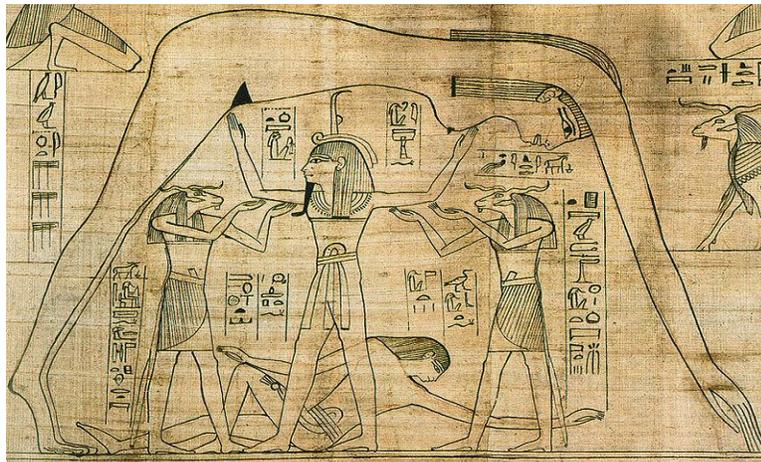


Figura 21: Representación del mundo egipcio

Aldred (1996) señala que la tierra y el cielo se conciben como las dos grandes paralelas en el cual se ubica y desenvuelve el hombre dentro de un universo geométrico. De esta manera el egipcio se sentía muy consciente de la estructura como una caja de su mundo, atravesado en ángulo recto por dos coordenadas: el fluir del

Nilo, generalmente de norte a sur, y el paso del sol de este a oeste por la bóveda de los cielos, sostenida por un tercer eje.

4.2.2.2 *Extracción de propiedades*

Una de las prácticas que distinguió a los egipcios de otras civilizaciones fue el estudio del cielo, de los movimientos de las estrellas y de la posición de la Luna, es decir, fueron grandes estudiosos y observadores del cielo.

Esto les permitió predecir el momento en el que el cauce del Nilo produciría inundaciones, ya que una crecida escasa o abundante podía hacer que el hambre, el desierto y la confusión se apoderaran del país, acabando con la vida de miles de personas (Parra, 2003).

Se crearon muchos mitos en torno a su admiración por el cielo, Blanco (2009) comenta que a los egipcios se les ocurrió la idea de que cuando un faraón moría, su espíritu subía y se convertía en una estrella, así el alma del faraón existiría para siempre.

Belmonte (sf) señala que estos estudios permitieron que las pirámides de Keops, Kefren y Micerinos, erigidas en la Meseta de Giza hace probablemente unos 4.500 años, estén orientadas con una precisión "asombrosa" hacia los cuatro puntos cardinales. Por lo tanto concluye que la astronomía se puso al servicio de la cultura, en este caso, de la arquitectura monumental.

4.2.2.3 *Representación del espacio*

Su visión de un mundo cúbico conllevó a que todas las manifestaciones egipcias dieran cuenta de estos términos, cielo, tierra y cetos, aludiendo al espacio tridimensional dentro del bidimensional. Aldred (1996) menciona que la cuidadosa definición de los distintos planos separados de este universo cúbico se ve reflejado en

un arte que es estrictamente bidimensional, de esta manera el artista egipcio no podía abandonar estas rigurosas normas estéticas que lo condicionaban al momento de crear nuevas obras.

Ares (1997) identifica que, dentro de este margen de posibilidades, el artista egipcio optó por una perspectiva en la cual *“la distancia entre los objetos incluidos en una representación, solamente puede ser medida con respecto a la paralela del plano de la superficie-soporte, anulando la visión oblicua y perpendicular de las imágenes”* (Op. Cit, p. 32). Es así como se identifica un intento por plasmar todos los objetos que, para los egipcios, merecían ser reproducidos incluyendo los que no podían ser percibidos mediante la representación actual (haciendo uso de la perspectiva).



Figura 22: Celebración de una victoria sobre el Bajo Egipto.

(Tomada de Janson y Janson (2001, p. 43).

Este método produjo que al representar la realidad, ésta fuese dividida en planos o escenas paralelas, por ejemplo los humanos que correspondían a un plano eran

dibujados con una misma altura, tal como se puede apreciar en la figura 22. Además, llama la atención la figura del hombre, ya que el artista pudo lograr representarlo de manera que el espectador observe todas y cada una de las partes de la anatomía humana. Ares (1997) distingue que la cabeza siempre aparece de perfil con el ojo de frente, el tronco aparece de frente aunque el pecho está de perfil, al igual que los brazos y las piernas.

Aldred (1996) señala que para el egipcio la visión subjetiva del creador no tuvo mayor valor, lo realmente importante era captar la esencia de las cosas, su imagen eterna, imágenes que dieran cuenta del “orden inmutable del mundo” establecido desde la creación. Por lo que la representación del mundo no se plasmó como una revelación instantánea del ojo, ya que habría sido considerada como una técnica profana, como un intento por representar la subjetividad del creador y la fugacidad del tiempo, habría sido un vano esfuerzo por representar una ilusión óptica y no una verdad metafísica.

Moliner y Llanos (2010) destacan que dentro de una composición las figuras aparecen en su proporción natural (hombre, animales, muebles, entre otros), sin embargo, el conjunto de las composiciones se organiza a escala en torno a sus figuras destacadas, es decir, cuanto mayor es la figura, más importancia adquiere. Es así como en las tumbas la imagen del faraón suele ocupar toda la altura del muro, dominando y destacando sobre sus súbditos. En la siguiente figura (figura 23) se puede observar como los esclavos equivalen la mitad de la altura de Ti.

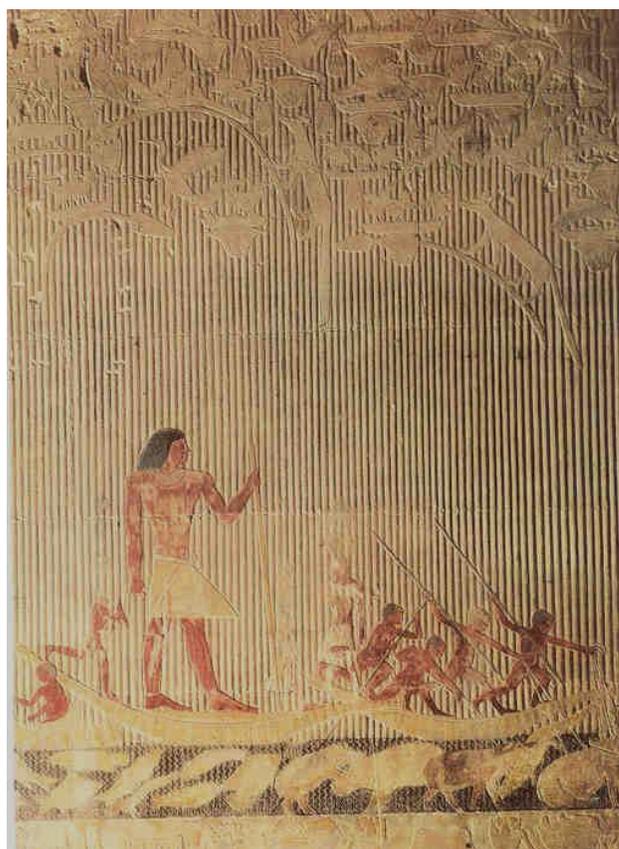


Figura 23: Ti mirando la caza de un hipopótamo
(Janson y Janson, 2001, p. 52).

Ares (1997) pone en evidencia que la representación de los egipcios dista mucho del tipo de representación que es empleada en la actualidad. Una escena ilustrativa de lo anterior es un relieve del Imperio Medio donde se muestra el traslado de un coloso de piedra, el cual es arrastrado por cuatro hiladas de hombres.

En la figura 24 se puede observar esta concepción del espacio en el arte egipcio, lo que ha obligado, por así decirlo, a colocar planos superpuestos (uno encima de otro), es así como todos los hombres tienen las mismas dimensiones, sobre todo la altura, que se observa claramente. Si comparamos este método con una técnica actual, los

Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.

principios de la perspectiva renacentista, de tipo piramidal, llevaría a ubicar estos hombres uno sobre otro, reduciendo cada vez más su tamaño.

Además en esta figura, es curioso observar la importancia que dieron al coloso, reconociendo en esta imagen las dimensiones del mismo (dos alturas de hombre de alto), lo cual no se podría lograr tan explícitamente con la técnica renacentista.



Figura 24: Construcción de un coloso.

(Ares, 2002, p. 24).

A diferencia de la técnica ya mencionada, los egipcios utilizaron otra que daba cuenta de una visión de un objeto vertical y otro horizontal, es decir, un objeto que está de pie y otro tendido sobre el suelo. En el Museo Británico se conserva una pintura de una piscina, que posiblemente fuera encontrada en la tumba del noble Nebamón.

El núcleo principal de la pintura es una vista aérea de la piscina a la que se le han ido añadiendo los diferentes complementos naturales necesarios (granadas, higueras, palmeras, peces, gansos, etc.), que den la suficiente sensación de paisaje que el artista pretendía. Esta piscina, se encuentra rodeada en todo su perímetro por una hilera de árboles, aparentemente caídos sobre el suelo, con el añadido de que la fila inferior rompe la posición de las otras dos y se encuentra enfrentada a la situación de la piscina. Vemos cómo el artista egipcio ha dado prioridad al plano horizontal en detrimento del vertical, haciendo que el resto de componentes de la escena giren en torno a este núcleo.

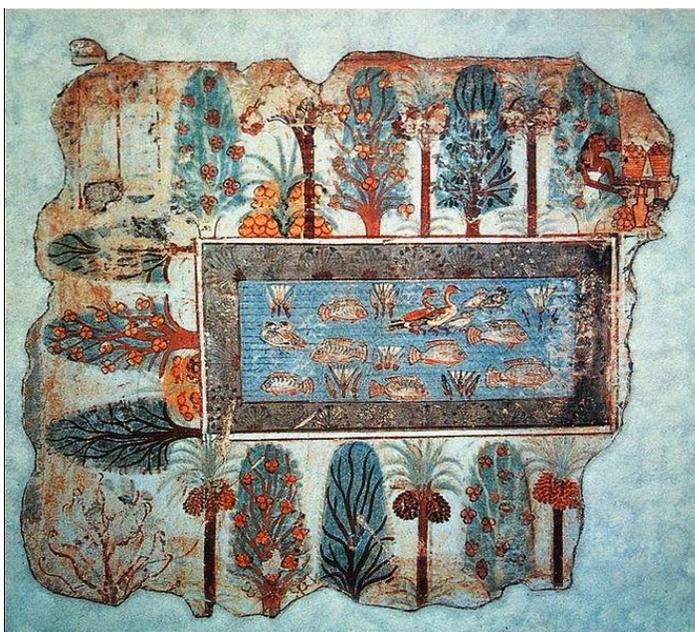


Figura 25: Relieve de la Capilla de Nebamón.

(Janson y Janson, 2001, p. 55).

Ares (1997) da cuenta de que un efecto similar se puede observar en la representación de las mesas de ofrendas que son presididas por el difunto y que aparecen ejecutadas sobre las paredes de las tumbas desde las primeras dinastías. Debido a que uno de los convencionalismos era optar una visión de perfil, el contenido de la mesa pasaría

desapercibido para el ojo humano, es así como si la mesa es representada de perfil y la parte superior de ésta es observada desde un punto de vista cenital, de tal manera que se pueden apreciar con claridad las ofrendas depositadas sobre ella.

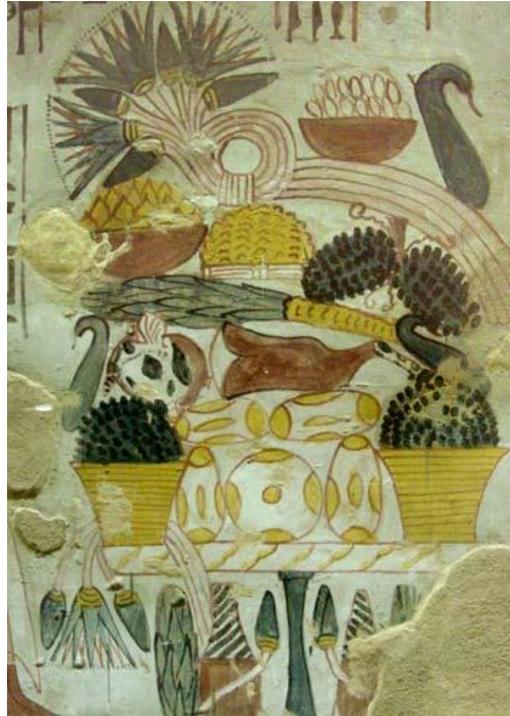


Figura 26: Altar de Ofrendas.

(Prette & Giorgis, 2002, p. 114).

Lo que el artista ha hecho no ha sido más que representar las diferentes filas de ofrendas, una sobre otra, de forma que puedan ser advertidas perfectamente en el relieve. De lo contrario, al no aparecer el contenido de la mesa sobre la superficie decorada, estas ofrendas, por el carácter mágico de la representación pictórica antes aludido, no existirían, con el consiguiente perjuicio para el difunto residente en la tumba (figura 26).

4.2.2.4 *Manipulación del entorno*

Casanova (2005) habla sobre la vida del Faraón tras la muerte, señala que como éstos eran considerados como dioses, debían iniciar un viaje hacia el cielo para situarse entre las estrellas, convirtiéndose en un espíritu luminoso, viviendo eternamente. Para lograr aquello, pensaron que resultaría más sencillo ascender al cielo utilizando un rayo de luz, que atravesaría las nubes, de ésta manera sus tumbas se debían asemejar a este rayo de luz. Lo que conllevó a la construcción de las edificaciones fúnebres en forma de pirámide.

Por otra parte, Blanco (2009) devela que los egipcios tenían una técnica particular de hacer esculturas, tomaban un trozo de roca en forma de prisma y dibujaban a cada lado el frente, el perfil y la espalda de lo que querían representar, luego quitaban trozos de piedra hasta terminarla, de esta forma la escultura podía ser vista desde cualquier lado.

De esta manera se puede observar que los egipcios lograban transformar la realidad mediante la extracción de propiedades de ciertos elementos de su entorno, en la que subyace lo “cosmogónico” de su sociedad, es decir, se conlleva con sus necesidades ideológicas.

4.2.2.5 *En síntesis*

Lo que resulta importante destacar en este apartado es dar cuenta de que las representaciones del entorno se reconocen como las portadoras de información sobre cómo la civilización se apropió del espacio, en otras palabras, es la evidencia palpable, tangible. Sin embargo no puede analizarse sin comprender la cosmogonía de la que deviene, tampoco se puede soslayar la extracción de propiedades y la manipulación del entorno. Es decir, se entiende como un todo, sistémico, situado a un contexto, determinado por el escenario sociocultural.

Se torna necesario ilustrar este planteamiento mediante un ejemplo, en el cual se quiere enfatizar sobre este carácter sistémico.

El mito de la Piedra Benben

En la ciudad de Lunu, se rendía culto a una piedra llamada Benben. Se dice que ésta piedra fue un meteorito que cayó a la tierra y que los sacerdotes recogieron y adoraron como si fuese un obsequio del propio Ra. Dicho meteorito tenía forma de cono y le atribuyeron poderes mágicos.

Como se mencionó anteriormente, los egipcios tenían una forma particular de realizar esculturas, de esta manera, analizaron las formas de la piedra Benben, tomaron un bloque de piedra y comenzaron a esculpir una réplica de ésta. Primero identificaron que desde una vista frontal, la piedra tomaba forma de triángulo, por lo que en cada uno de los cuatro lados del bloque dibujaron un triángulo, como resultado obtuvieron una pequeña pirámide, con cuatro caras triangulares.

La creencia de una piedra sagrada en forma de pirámide inspiró la construcción de las tumbas reales. Para Blanco (2009) esta es la razón por la cual las tumbas de los faraones tienen forma de pirámide, ya que representan un rayo de sol petrificado utilizado por el alma del faraón para subir al cielo.

4.2.3 *¿Qué influencias del escenario sociocultural pueden ser reconocidas?*

En contraste con la concepción actual, la representación egipcia dista sobremanera de los dos principios fundamentales de la perspectiva, vale decir, del empleo del *escorzo*⁹ y la utilización de un punto de vista único. Tal como señala Blanco (2009) las figuras que lograron son más bien diagramas de sucesos, teniendo como objetivo principal el de proporcionar información de lo que acontecía en su cotidiano.

⁹ Perspectiva que se utiliza en pintura para representar figuras perpendicularmente al lienzo o al papel

Es por ello que, a partir de la información analizada se reconocen cuatro factores desde el escenario sociocultural que influyen directamente en la apropiación del espacio conseguida por los egipcios. Puede que no sean los únicos que medien en la manera en que cierta civilización se apropie del espacio, pero son los que se reconocen en este trabajo.

En este apartado, se realizará una profundización sobre estos factores, desprendidos del análisis con la civilización egipcia, y además se contrastarán con otros escenarios socioculturales. Lo que se pretende, es dar cuenta de que la apropiación del espacio es influenciada por los escenarios socioculturales, independiente del tiempo o de la civilización.

Por otra parte, se reconoce que la representación desarrollada por una determinada civilización es la que porta la evidencia concreta y visible para establecer cómo estos factores contribuyeron, por ejemplo a la delimitación de lo que se quiere dar a conocer en una pintura. En palabras de Borrás (1996) es un signo visible y simbólico de las actitudes culturales y filosóficas de un determinado periodo histórico.

4.2.3.1 *Mediados por la cosmogonía*

Para los egipcios, en el Antiguo Egipto, el creer que el origen de todo conllevó a la generación de un mundo en forma de cubo, reconociendo a la tierra como plana, tal como se mencionó en el apartado anterior (figura 21), condicionó, según Ares (1997) el tipo de representación que desarrollarían. Logrando, de esta manera, una imagen plana y distante a la realidad, idealizada bajo la condición de plasmar la importancia del cielo, la tierra y los cetos.

Esto conllevó a la elaboración de planos superpuestos que no daban cuenta de la noción de profundidad que se conoce actualmente. Ares (1997) señaló que los egipcios consideraban que la distancia entre los objetos incluidos en una

representación era constante, era la misma para los objetos de igual valor, por ejemplo la distancia entre esclavos, asimismo, se anulaba la visión oblicua y perpendicular de las imágenes que componían la realidad.

La técnica utilizada por los egipcios se denomina ley de la máxima claridad, la cual consiste en representar en una superficie plana, todos y cada uno de los objetos que merecen ser reproducidos, incluyendo aquellos que, desde una perspectiva real, no fueran apreciados por el ojo humano.

Otro ejemplo de la influencia de la cosmogonía, de nuestra cultura, es el que se encuentra en la Biblia, en los primeros capítulos del Génesis, se relata como Dios crea el mundo, “el principio de todas las cosas”. Para Marabolí (sf) durante varios siglos esta versión fue tomada como dogma por la teología oficial cristiana, hasta mediados del siglo XVIII, época en la que los avances del racionalismo y las ciencias experimentales pudieron comenzar a construir una visión física, basada en leyes y principios generales y verificables, acerca no ya de una “creación”, sino de un mundo constituido por planetas y otros cuerpos estelares.

Es así como, para Levi-Strauss (1982) esta cosmogonía, en la forma de mitos y relatos sagrados (base de todo un sistema de creencias), dio paso a un nuevo paradigma, el positivista y científico, por consiguiente, todo el conjunto de la religión y las religiones pasaron a ser asunto de fe y no de conocimiento. El ámbito de las creencias fue ligado a los “irracional” o a una forma de sentir el mundo, por lo tanto perdió el carácter de “verdad” Una consecuencia importante de este cambio radica en que la religión paso a ser ella misma un objeto de estudio dentro de las ciencias sociales y de la historia en particular.

4.2.3.2 *Mediados por la divulgación (transmisión) de información*

Se reconoce que una civilización, mediante una imagen, representa sus intereses por comunicar cierta información y no otra, de esta manera éstas se vuelven propias de ese escenario sociocultural.

Por ejemplo, al analizar los problemas abordados por los egipcios en la obra matemática del Antiguo Egipto, más específicamente aquellos que aluden al cálculo del área de una superficie y al volumen de un tronco de pirámide, explicitados en el Papiro de Moscú. En el cual se logra observar el cálculo del área de una figura (*figura 5*), la que visualmente pareciera ser un trapecio isósceles, pero que en realidad es una pirámide truncada cuadrangular.

A partir de la indagación realizada en este trabajo, se hace posible concluir que, para los egipcios, no se consideraba necesario el uso de profundidad en el dibujo de este tronco de pirámide, ya que lo primordial era establecer las reglas que permitirían determinar el área y volumen de la misma y las medidas básicas para conseguir este cálculo. Por lo que el uso de nociones de perspectiva se convierte más en una herramienta estética, carente de importancia con respecto al contenido que quería ser transmitido.

Sin embargo, los egipcios no son los únicos que presentan esta “selección de elementos”, por llamarlo de alguna manera. Un ejemplo de lo anterior lo podemos encontrar en un escrito de Galileo (1981, citado en Flores, 1998), al hablar de la flexión de vigas, da cuenta de una proposición sobre la distribución de esfuerzos de una viga:

“Un prisma o cilindro sólido de cristal, acero, madera o cualquier otra materia frágil, que sea capaz de sostener un peso muy considerable si se le ata longitudinalmente, se romperá si se le aplica transversalmente (como hemos

indicado no hace mucho), aunque el peso sea sensiblemente menos, y tanto más cuanto más supere su longitud a su grosor”

La proposición en sí es lógica, por ende resulta natural cuestionarse sobre ¿qué es lo que llama la atención de esta cita?, la respuesta es clara, lo que resulta llamativo es la representación o figura que Galileo plasma a continuación de ese párrafo y el posterior enunciado.

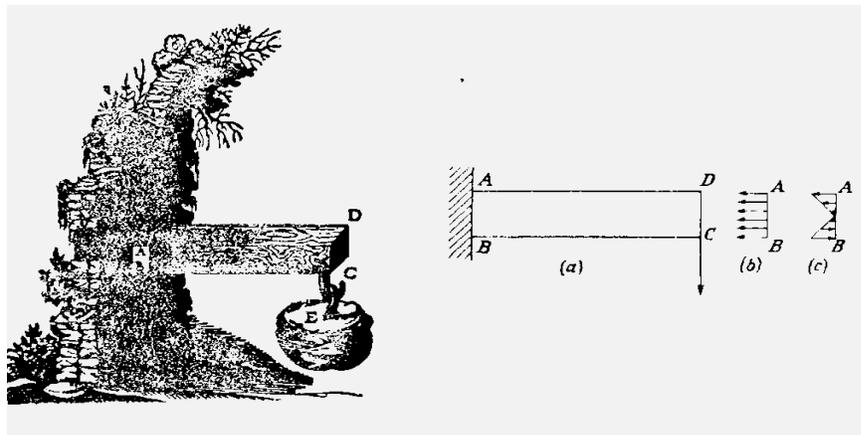


Figura 28: Representación de Galileo.

(Flores, 1998, p. 35).

“Imaginemos un prima sólido, ABCD, fijo en una pared por su parte AB, mientras que el otro extremo sostiene la fuerza del peso E, dando por supuesto siempre que el muro está vertical y el prisma o cilindro está fijo a la pared, formando un ángulo recto con ella...”

En esta sección de la proposición, resulta explícito que Galileo se refiere a un objeto tridimensional en el mundo real, a una viga que puede ser un prisma o un cilindro, sin embargo en su explicación denota al prisma como ABCD, es decir, él sólo está poniendo énfasis en una cara, que corresponde a la más importante al momento de realizar la explicación.

4.2.3.3 *Mediados por la situación del hombre en el mundo que le rodea*

Para los egipcios la función de las pinturas era el de preservar la imagen del difunto y las posesiones que este tenía, para que así su alma pudiese pervivir para siempre. Debido a ello la representación del cuerpo debía ser sencilla y clara, utilizando la ley de la máxima claridad.

En las representaciones de la figura humana se pueden distinguir regularidades, tales como que la cabeza, el pecho y los pies siempre están de perfil, las caderas van posicionadas de semiperfil y el ojo mira de frente, al igual que el tronco. Esto, ya que no se intentaba, ni siquiera se pensaba, en plasmar una imagen real del cuerpo, sino que se pretendía mostrar la esencia del ser.

En consecuencia, las pinturas fueron bidimensionales y de colores planos, en las que se relataban historias de la vida del difunto. En su composición resultó de gran importancia las posiciones de poder que tenían cada individuo, es decir, se diferenciaban jerárquicamente faraones, sacerdotes o nobles, de campesinos y esclavos mediante el tamaño de la persona.

Otro ejemplo donde se logra ver la situación del hombre con respecto a su entrono es en la transición desde la pintura gótica a la pintura renacentista. Bien es sabido que durante la Edad Media el foco de los artistas era realizar pinturas basadas en el cristianismo, es decir religiosas. En el renacimiento, por el contrario, el antropocentrismo llevó a que los artistas se enfocaran en representar al hombre, paisajes, entre otros, dejando a un lado toda la temática que producía el teocentrismo.

4.2.3.4 *Mediados por ideologías de tipo religiosas*

Según Kvasz (1998) las pinturas góticas carecían de profundidad, las figuras u objetos eran ubicados uno al lado del otro, por ejemplo una casa al lado de otra casa,

Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.

una colina al lado de otra colina, esto sin la intención de capturar la profundidad del espacio. Debido a que la tarea del pintor, en esa época, no era pintar la realidad tal cual la veía, si no que la debía pintar tal como era, es decir como la veía Dios. En otras palabras, visualmente, para el pintor, los objetos lejanos parecían ser más pequeños que los que estaban más cerca de él, pero sólo es una apariencia, en la realidad tienen el mismo tamaño. Por ende, el pintor debía pintar todo del mismo tamaño.



Figura 29: Pintura gótica.

(Lefebvre, 2008, p.61).

Algo diferente pasaba en el Renacimiento, el teocentrismo medieval se sustituía por el antropocentrismo, de esta manera cambió el objetivo que buscaban los pintores, ahora querían presentar la realidad, el mundo, tal cual ellos lo veían. Por lo que una práctica de los pintores fue recurrir a herramientas que permitieran conseguir su

propósito, una de ellas fue la perspectiva, la cual se concibió como un objeto de estudio y reflexión para muchos artistas, conllevando a representar una ilusión de espacio tridimensional de una forma científica y reglada. De esta manera las pinturas abandonaron paulatinamente los temas religiosos y a su vez la rigidez gótica, aproximándose cada vez más a la realidad.

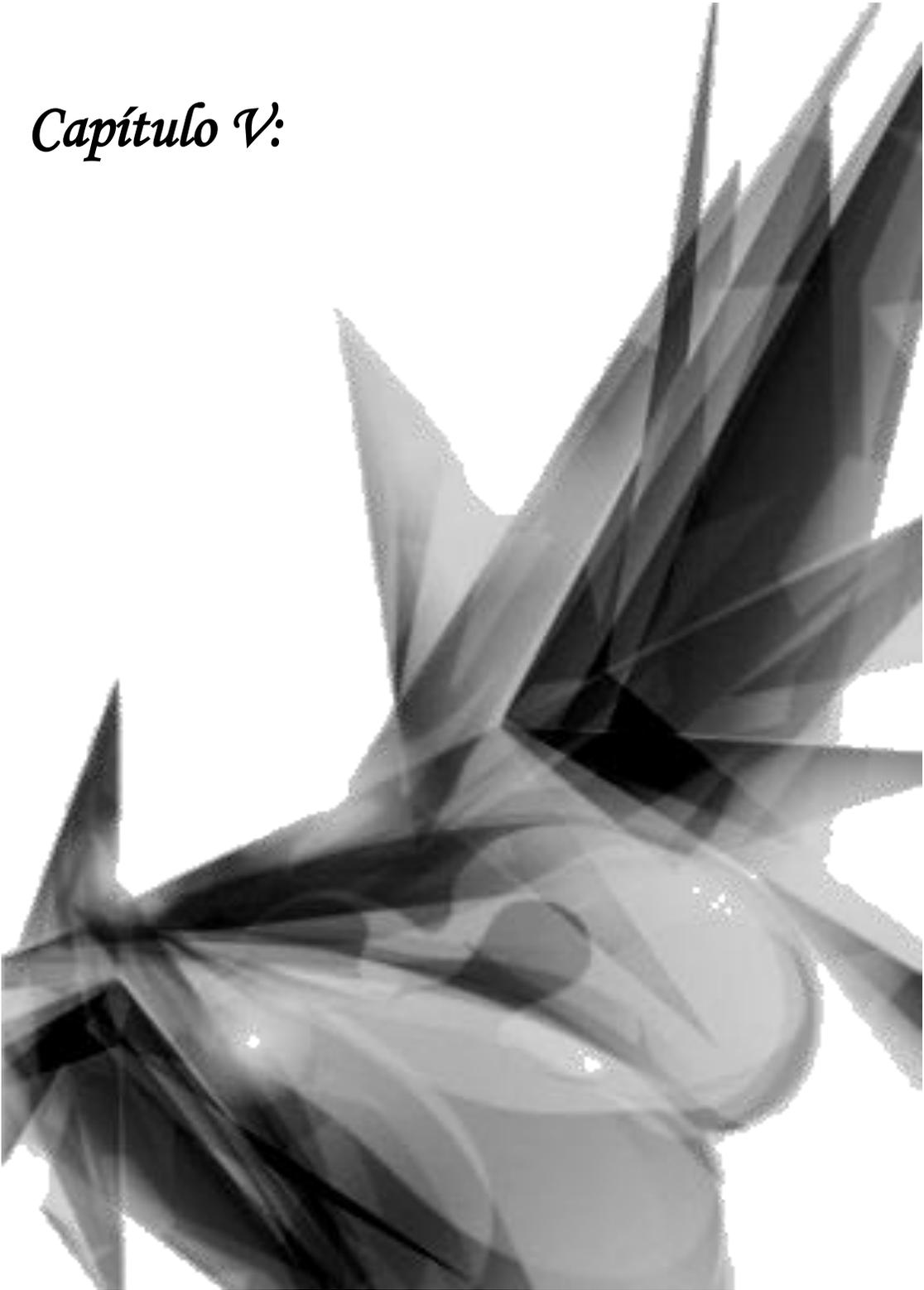


Figura 30: Chiaroscuro, Da Vinci.

(Castillo, sf).

Otra técnica que permitió el estudio de la realidad, fue la introducida por Da Vinci, denominada *chiaroscuro* (figura 30), o claroscuro, que sería desarrollada posteriormente en el Barroco bajo el nombre de *tenebrismo*. Esta técnica consiste en enfatizar los contrastes fuertes entre volúmenes, unos muy iluminados y otros ensombrecidos, para destacar más eficientemente ciertos elementos.

Capítulo V:



5. CONCLUSIONES

La investigación presentada abre un debate sobre cómo *lo geométrico* se encuentra inmerso en un escenario escolarizado, por ejemplo, dentro del discurso Matemático Escolar y su construcción en diversos escenarios socioculturales.

En este capítulo se precisan las conclusiones que se desprenden, en primer lugar, de las investigaciones que se han realizado con respecto a la problemática abordada en este trabajo, es decir, conlleva a una reflexión sobre lo que se ha estudiado y cómo se han aproximado al fenómeno. En segundo lugar, se concluye respecto a los resultados obtenidos, precisando las respuestas a las preguntas de investigación. Finalmente, se plantea una reflexión sobre los aportes hacia la disciplina, la Matemática Educativa y a la Socioepistemología.

5.1 Sobre lo que se ha investigado

A partir de la revisión de las investigaciones abocadas en estudiar temas afines con la problemática de este trabajo, se concluye que éstas se centran en abordar cuestiones sobre cómo realizar mejoras para que los estudiantes comprendan la geometría espacial. De esta manera se distinguen dos categorías, una que se enfoca en realizar mejoras estructurales en el currículum escolar de matemáticas y otra que atiende hacia destacar la importancia que tiene el desarrollar las habilidades espaciales en los estudiantes.

Sin embargo, tal como se señaló anteriormente, estas investigaciones propician que los estudiantes comprendan los objetos matemáticos, enfocándose en el objeto matemático del saber involucrado, a pesar de que algunas reconozcan la importancia de factores externos en su desarrollo, como el lenguaje. Se puede concluir que estas investigaciones reconocen al estudiante, durante el proceso educativo, como consumidor de un conocimiento matemático que permanece estático, rígido o acabado, es decir, el estudiante se transforma en un receptor, vale decir, un sujeto que aprende, descubre o reproduce, pero no quien construye.

Es posible considerar que el conflicto, para que los estudiantes desarrollen las habilidades espaciales que permitan un mayor entendimiento sobre la geometría espacial, radica en la misma visualización y representación espacial, sin embargo, esta investigación revela la existencia de cuatro factores desprendidos de escenario sociocultural (mediados por la cosmogonía, mediados por la divulgación de la información, mediados por la situación del hombre en el mundo que le rodea, mediados por ideologías) que intervienen directamente en el tipo de representación que se logre. En otras palabras, no basta sólo con decir que los estudiantes presentan dificultades al visualizar un cuerpo geométrico porque no han desarrollado ciertas habilidades espaciales.

De esta forma, proponer una reestructuración curricular o la introducción de actividades específicas carece de sentido práctico, esta investigación demuestra que es necesario estudiar lo que ocurre dentro de un escenario sociocultural, a fin de reconocer los cuatro factores mencionados, para con ello, proponer un rediseño del discurso Matemático Escolar.

Ya que si bien, se reconoce que en los escenarios no académicos el conocimiento científico no es central de manera intencional, no significa que en ellos no pueda ser construido y manejado este tipo de conocimiento, e incluso influir en la construcción de conocimiento que se lleve a cabo en un escenario académico.

Por otro lado, se considera que la educación escolar no sólo excluye a los actores del sistema didáctico (profesor, estudiantes, autores de textos escolares, entre otros) a través del discurso Matemático Escolar, reportado por Soto (2010), sino que además se logra evidenciar un distanciamiento de ciertos contenidos matemáticos, tales como las geometrías no-euclidianas, la geometría proyectiva, la geometría descriptiva, dejando como centro del currículum matemático escolar sólo lo propuesto por Euclides, geometría euclidiana.

Todo lo expuesto anteriormente conlleva a una ruptura entre el saber matemático y el saber del ciudadano, producto de este distanciamiento se puede pensar que los actores involucrados en el sistema educativo pretenden que el saber, estático, se convierta en un objeto más cercano al individuo, generando, por ejemplo, el surgimiento de las “figuras prototipo”.

En los estudios de Blanco (2009) y de Andrade y Montecino (2009) se puede observar que las respuestas de los estudiantes y el tipo de ejercicios que se presentan en el aula dan cuenta de dichas representaciones o “prototipos”, las que generan confusiones, por llamarlas de alguna manera, en los estudiantes (figura 31).

Influencia de los escenarios socioculturales en la apropiación del espacio.

- Profesora: (Señalando un cubo visto desde arriba, entre un conjunto de cubos en distintas posiciones) ¿Es esto un cubo?
- Alumna: No, porque tiene una cara que es un rombo.

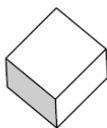


Figura 31: Respuesta de una estudiante.

(Blanco, 2009, p. 30).

De lo anterior, se puede concluir que la forma en la que se presentan los contenidos en el aula no propicia la adquisición de habilidades espaciales que permitan desarrollar la apropiación de lo tridimensional, a pesar de que diversas investigaciones hayan manifestado la importancia de ello.

Esto llevó a que, en una indagación a diferentes libros de texto, se dé evidencia de que estas representaciones usuales o figuras “prototipo” están inmersas en el currículo de al menos tres países -Chile, México y Francia- plasmados en los libros de texto escolar, lo cual lleva a reflexionar sobre ¿Qué propició su surgimiento?

En la figura 32, correspondiente a un texto escolar de Chile, se puede apreciar cómo, mediante una actividad que requiere la utilización de material tangible (cartulina y arena), proponen comparar los volúmenes de ciertos cuerpos geométricos, llenando con arena un recipiente confeccionado de cartulina, vertiéndolo dentro del otro.

Sin embargo, lo que se observará no es la actividad, ni su intencionalidad, sino que interesa la representación que es utilizada para ilustrar los pasos que deben seguir los estudiantes. Se logra reconocer una tendencia a utilizar una visión en perspectiva, ya que se ve la cara superior de los sólidos plasmados y la parte frontal de los mismos. Además, los otros sólidos, en los que se ve la cara inferior, son rotaciones en el plano de las representaciones anteriores de los sólidos.

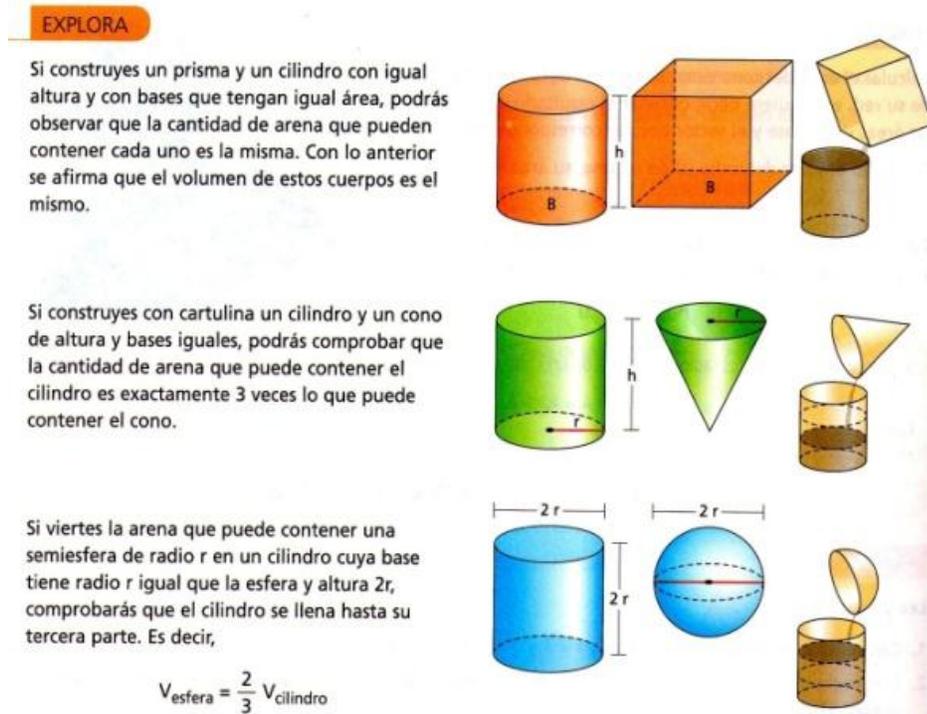


Figura 32: Representación de sólidos en un texto escolar de Chile.

(Andrade & Montecino, 2009, p. 85).

Se puede apreciar la misma situación, en una actividad similar, que se encuentra en un texto escolar de Francia, en la que los estudiantes tienen que fabricar sólidos de cartulina con el objeto de estudiar sus dimensiones, alturas, lados de la base o diámetros, según corresponda.

En la siguiente imagen (figura 33) se ilustran los sólidos desde una perspectiva tal que nos permite ver la cara superior del sólido y el frente, así con los sólidos que están dibujados como los que están contruidos con cartulina.

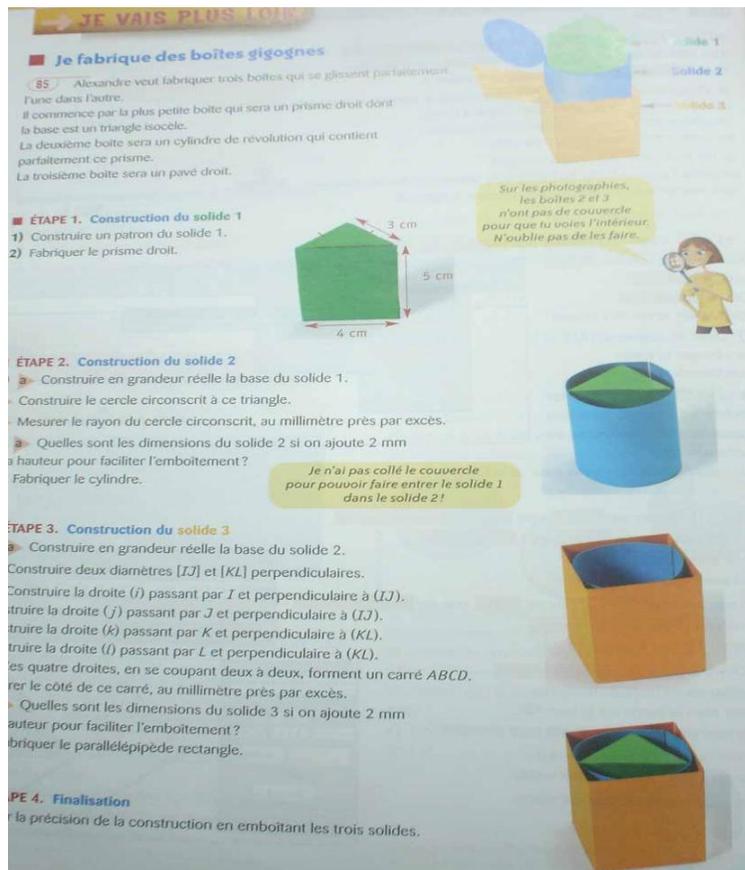


Figura 33: Representación de sólidos en un texto escolar de Francia.

(Brault, Daro, Ferrero, Perbos-Raimbourh & Telmon, 2006, p. 107).

En un texto escolar mexicano, presentado en la siguiente figura, se reitera esta tendencia por mostrar la cara superior de un cuerpo geométrico, a pesar de que las actividades sean diferentes. La primera actividad, de la izquierda, conlleva a extraer propiedades y a calcular el área de ciertos sólidos. La de la derecha, pretende que los estudiantes identifiquen los cuerpos redondos de los poliedros.

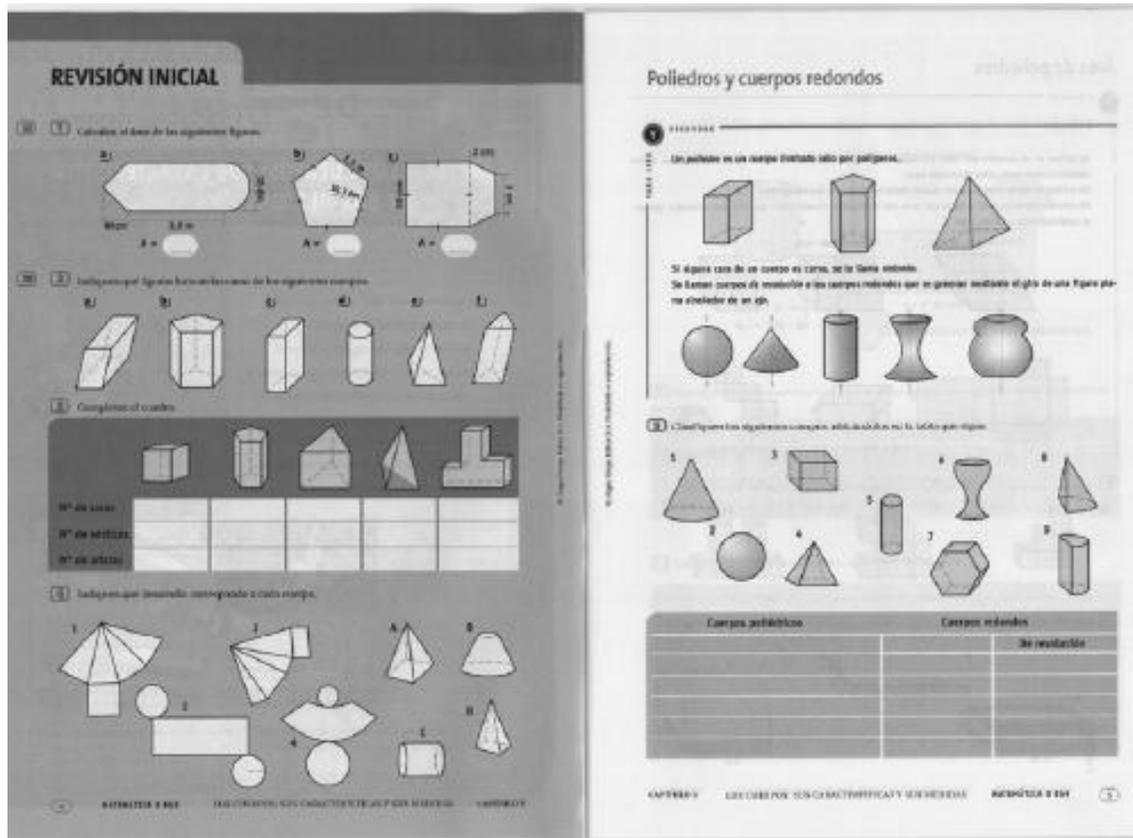


Figura 34: Representación de sólidos en un libro de texto escolar de México. (Blanco, 2009, p. 110).

5.2 Respuesta a las preguntas de investigación

En este apartado se realizará una síntesis de los capítulos anteriores, precisando y sintetizando las respuestas a las preguntas de investigación.

5.2.1 Primera pregunta de investigación

(1) **¿De qué manera las civilizaciones han logrado apropiarse del espacio a través del tiempo?**

Para responder esta primera pregunta de investigación se tomaron las ideas de Bishop (1999) y se complementaron con la visión socioepistemológica, de esta manera se puede afirmar que una civilización ha logrado apropiarse del espacio luego de haber vivido cuatro momentos: Interacción con el espacio físico; Extracción de propiedades del entorno; Representación del entorno; Manipulación del entorno, tanto mental como físico.

5.2.2.1 Interacción con el espacio físico

La *interacción con el espacio físico* es vista como la primera aproximación a la apropiación del espacio, en la cual se reconoce la cosmogonía de una civilización, tal como se mencionó anteriormente, la cosmogonía se refiere a un conjunto de teorías míticas, religiosas, filosóficas y científicas sobre el origen del mundo, propias de una comunidad. Es por ello que cada cultura o religión ha tenido y tiene sus propios entendimientos y explicaciones cosmogónicas, que pueden ser identificadas con un proceso de creación o emanación.

De esta manera el estudio de la cosmogonía de una determinada civilización o comunidad proporciona los cimientos para comprender la forma en la que ésta ve y entiende su entorno, además de cómo dieron explicación al origen de las cosas.

5.2.2.2 Extracción de propiedades del entorno

La *extracción de propiedades del entorno* es considerada como la identificación de ciertas características, tanto del entorno como de elementos de éste, las que lleven a establecer una idea o generalización de cierto fenómeno, con el propósito de

conformar un conocimiento propio del escenario sociocultural. Se reconoce de gran importancia a la orientación en el espacio.

5.2.2.3 Representación del entorno

La *representación del entorno* se concibe como la portadora de información o elementos claves al momento de establecer cómo dicha civilización comprendía su entorno, probablemente porque es la evidencia tangible de la vida de esa civilización, ya que relata acontecimientos, destaca sus creencias y da cuenta de la cosmogonía. Para Borrás (1996) la representación del espacio es concebida como un signo visible y “simbólico” de las actitudes culturales y filosóficas de un determinado período histórico

5.2.2.4 Manipulación del entorno

La manipulación del entorno, tanto mental como material, hace referencia a cómo, sin la necesidad de representar, se puede moldear lo que nos rodea con el propósito de crear nuevos objetos o modificarlos. Se reconoce como la base de la creación y producción material de una sociedad. Tomando gran importancia la transformación.

5.2.2 Segunda pregunta de investigación

(2) ¿Cómo la apropiación del espacio ha sido influenciada por los escenarios socioculturales?

Los escenarios socioculturales influyen en la apropiación del espacio mediante cuatro factores, ésta influencia se reconoce como tal, ya que cada civilización o sociedad posee una identidad respecto a ellos, lo cual conlleva a que no todas las comunidades se apropien del espacio de la misma manera. De esta forma se prueba que la

apropiación del espacio es influenciada por los escenarios socioculturales, independiente del tiempo o de la civilización.

Por otra parte, se reconoce que la representación desarrollada por una determinada civilización es la que porta la evidencia concreta y visible para establecer cómo estos factores (mediados por la cosmogonía, mediados por la divulgación de información, mediados por la situación del hombre en el mundo que le rodea, mediados por las ideologías de tipo religiosas) contribuyeron, por ejemplo, a la delimitación de lo que se quiere dar a conocer en una pintura.

5.2.2.1 Mediados por la cosmogonía.

Las diferentes formas de ver y entender el mundo condicionan la manera en la que será representado y en cómo los ciudadanos comprenderán su entorno. Un ejemplo de ello es que la cosmogonía de la Antigua Grecia se basaba, entre otras cosas, que el cielo era sostenido por titanes, si se observa la arquitectura que lograron, se verá muy repetidamente el patrón de columnas que sostienen los techos de los edificios.

5.2.2.2 Mediados por la divulgación (transmisión) de información.

Se reconoce que una civilización, mediante una imagen, representa sus intereses por comunicar cierta información y no otra, es así como éstas se vuelven propias de ese escenario sociocultural.

Un ejemplo de ello son las representaciones de niños de primaria, de diferentes sólidos, donde se revela la importancia de representar diferentes caras de los objetos, aunque no puedan ser vistas desde el ángulo que están mirando.

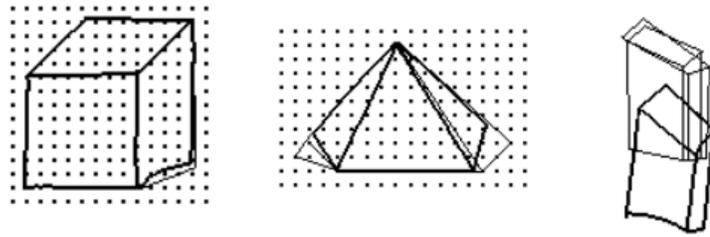


Figura 34: Representación de sólidos de estudiantes de primaria
(Gutiérrez, 1998, p. 206)

5.2.2.3 Mediados por la situación del hombre en el mundo que le rodea

Este factor da cuenta de la visión que el ser humano tenía de sí en un determinado período. Los egipcios reconocían en el faraón una representación humana de los dioses, por lo que en una pintura, él debía resaltar. Tal como se señaló anteriormente, en la transición desde la pintura gótica a la pintura renacentista se produce un cambio respecto de lo que se quería representar, durante la Edad Media el foco de los artistas era realizar pinturas basadas en el cristianismo, es decir religiosas. En el renacimiento, por el contrario, los artistas se enfocaron en representar al hombre, paisajes, entre otros, dejando a un lado toda la temática que producía el teocentrismo.

5.2.2.4 Mediados por ideologías de tipo religiosas

Según Kvasz (1998) las pinturas góticas carecían de profundidad, no porque no existieran herramientas o técnicas para lograr ese efecto, sino que, tal como se señaló, el pintor debía representar la realidad como Dios la veía, en cambio durante el Renacimiento los pintores buscaban presentar la realidad tal cual ellos la veían. Es por ello que una práctica de los pintores fue recurrir a herramientas que permitieran conseguir ese propósito, utilizando las nociones de perspectiva que habían sido desarrolladas.

5.3 Aportes de la investigación a la Matemática Educativa

La contribución que se deriva de esta investigación, permite proponer un debate o plantear un cuestionamiento que no se logra abarcar con este trabajo, pero que resulta necesario reflexionar sobre ello dentro de la disciplina.

La evidencia que se desprende de los resultados presentados, es que las dificultades en ciertos contenidos de matemáticas, en específico de geometría, no son producto de falencias del estudiante, ni carencias del profesor con respecto a la transmisión del conocimiento, si no que es producto de la selección de la matemática que se ha decidido incluir en el discurso Matemático Escolar y cómo ésta es abordada en el aula.

Claramente no es un conflicto que radique sólo en un país, más bien es un conflicto histórico, sociocultural y político, de luchas de poder en las cuales se ha visto afectada la producción de obra matemática a fin de difundir el conocimiento, ya que en algunos períodos, la matemática que se producía conllevaba a un quiebre conceptual, de ideologías, creencias, entre otros, lo que dificultaba la aceptación del mismo por parte de la comunidad científica y de la sociedad en sí. Lo que repercute en la actualidad al proponer un plan de estudios como el que tenemos, un ejemplo de ello es proponer a las derivadas como requisito para aprender a integrar.

En este sentido, la teoría socioepistemológica propone rediseñar el discurso Matemático Escolar a través del reconocimiento de prácticas sociales que norman las prácticas de una comunidad, mediante las cuales se construya conocimiento matemático. Por ejemplo Canul (2007) identifica la práctica social de *vestirse por identidad*, la que conlleva a la práctica de referencia del bordado, en la cual se reconocen propiedades de simetría, proporcionalidad, determinación de áreas, sin ser nombradas formalmente, pero se ven inmersas en un nivel funcional.

Por lo que cabe cuestionar sobre qué tan primordial es la institucionalización del saber en la escuela, ¿es más importante que el estudiante logre un entendimiento funcional de la matemática o que conozca el objeto matemático que acaba de construir?

5.4 Aportes de la investigación a la Teoría Socioepistemológica

Como se ha señalado en distintas investigaciones recientes (Covián, 2005; López, 2005; Montiel, 2005; Canul, 2007; García, 2008; Tuyub, 2008; Espinoza, 2009; Soto, 2010; Silva 2010 y Reyes-Gasperini, 2011), la socioepistemología se constituyó como una aproximación teórica que propone dar un giro a la visión tradicional de la matemática escolar, propiciando estudios basados en la construcción social del conocimiento matemático, mediante prácticas. Reconociendo como problemática fundamental, la confrontación entre las Obras Matemáticas y la Matemática Escolar (Cordero, 2001, Yojcom, 2011).

En este sentido el objetivo de la Teoría Socioepistemológica es explicar la construcción del conocimiento matemático, poniendo al centro de la discusión a las prácticas sociales asociadas a dicho conocimiento (Cantoral, 1990; Farfán, 1997; Cordero, 2005). En otras palabras, “*dar explicaciones acerca de cómo los seres humanos construyen el conocimiento matemático*” (López, 2005, p. 150).

Para Covián (2005) la Socioepistemología propone un cambio en la matemática escolar, en la que los conceptos tienen el estatus primordial en la construcción del conocimiento matemático, las prácticas sociales se convierten en lo fundamental, las significaciones que nacen de ellas y los usos de dicho conocimiento. Es así como este nuevo paradigma propicia el reconocimiento de las diferentes formas de la

construcción del conocimiento y el reto que se presenta es el de fundamentar diseños de situaciones de aprendizaje en prácticas de los grupos humanos.

De lo anterior surge la interrogante ¿Cuáles son los aportes de esta investigación a la teoría socioepistemológica o a la comunidad de socioepistemólogos?

Antes de responder este cuestionamiento, se torna fundamental responder a la pregunta ¿Qué es una práctica social? ¿Cómo se concibe? ¿Por qué se considera tan importante dentro de la teoría socioepistemológica?

5.4.1 ¿Qué es una práctica social?

La socioepistemología sostiene que las prácticas sociales son las generadoras del conocimiento matemático (ver por ejemplo, Buendía, 2004; Montiel, 2005; Canul, 2007). Sin embargo, éstas no son observables y su análisis sólo se puede lograr a través del estudio de las prácticas de referencia (Tuyub, 2008).

Entre sus funciones se localiza la normativa (que regula), la cual tiene un carácter oculto; la pragmática (que actúa), cuyo carácter es explícito, la discursiva (que comunica), con un carácter declarativo y la identitaria (que dota de identidad cultural) (Cantoral y Tuyub, 2012)

Covián (2005) establece, mediante el estudio del papel que juega el conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional maya, que aparecen tres categorías de prácticas que facilitan la diferenciación explícita de la centración en los estudios socioepistemológicos: la práctica social, la práctica de referencia y la práctica o la actividad. Planteando un Modelo Normativo de las prácticas sociales (reconociendo su función normativa):

- Etapa inicial: Donde se presenta la relación de identidad entre la noción de Actividad Humana y Práctica, ya sea a nivel sinonímico o metonímico.

- Etapa primaria: Se muestra la relación dialéctica entre la noción de Actividad Humana y Praxis.
- Etapa teórica: En donde se introduce la relación compleja entre la noción de Actividad Humana, Praxis y Práctica Social.

5.4.2 *¿Qué diferencia a una práctica social, a una práctica de referencia y a una práctica?*

Para Crespo (2007) una práctica social se traduce en conjunto de acciones que surgen y permanecen en el ambiente social, afectando y conformando la psique de todo individuo. La práctica social es reconocida como normativa de la actividad, no es lo que hace el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen, como acciones de grupos sociales que se dan en cierto escenario sociocultural, en las que se reflejan las características de dicho escenario.

La práctica de referencia es considerada como la actividad humana, generada socialmente. En este sentido, puede considerarse como una práctica situada en determinado contexto, parte de una comunidad, es donde se desarrolla la construcción de conocimiento (Farfán, 1997).

Y por último, la práctica o la actividad para la Socioepistemología, es un conjunto organizado de actividades o acciones intencionales para resolver un problema dado. Por lo tanto, se considera importante diferenciar qué prácticas son significativas, es decir, cuáles de éstas se ponen en juego al momento de construir cierto conocimiento o al momento de resolver ciertas problemáticas (Tuyub, 2008).

5.4.3 ¿Qué relación existe entre una práctica social, una práctica de referencia y una práctica?

La relación entre estas tres categorías de prácticas es determinada de manera jerárquica. Las prácticas sociales están en el máximo nivel, así permite regular o normar las prácticas de referencia que se sitúan en un contexto social específico.

Montiel (2005) plantea un modelo, basado en prácticas, que explica la construcción social del conocimiento matemático (figura 35). Para explicar cómo interactúan estas tres entidades, afirmaron que la práctica de referencia consiste en un conjunto de actividades reguladas por la práctica social. Esta es la mediación necesaria para alcanzar el “*estatus socio*” (Op. Cit, p. 102).

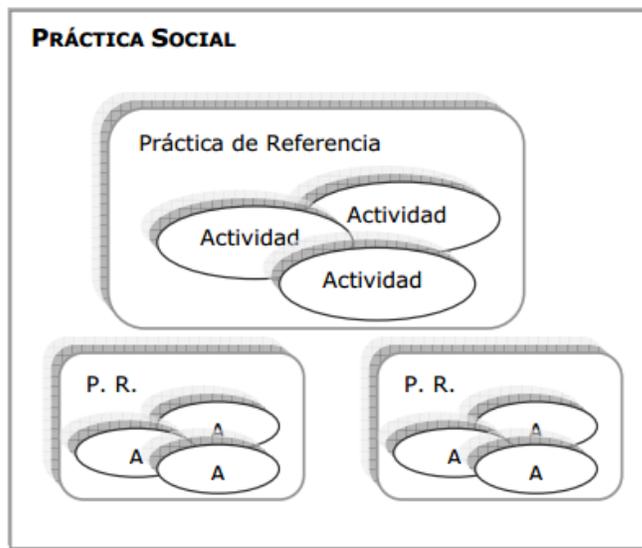


Figura 35: Modelo explicativo de la construcción social del conocimiento matemático (Montiel, 2005, p. 126)

Los componentes del modelo pueden ser entendidos como:

“La actividad como aquella observable tanto en los individuos como en los grupos humanos, la práctica de referencia como un conjunto articulado de actividades, también como aquella que permite la articulación de la actividad con la práctica social, la práctica social como reguladora (normativa) de la práctica de referencia y sus actividades relacionadas”. (Montiel, 2005, p.126)

Es así como, si analizamos el ejemplo de Canul (2007) con el modelo propuesto por Montiel (2005), entonces se reconoce en la práctica de referencia, **el bordado**, a las actividades de **contar** y **bordar**, ya que es ésta la que regula tales actividades y permite la articulación de las actividades con la práctica social de **vestirse por identidad**, la cual norma la práctica de referencia y la hace actuar de esa manera y no de otra.

Más específicamente, la práctica social de **vestirse por identidad** regula a la práctica de referencia, **el bordado**, en tanto que el vestirse es una necesidad de todos los seres humanos, para protegerse de las inclemencias del clima. Por la necesidad de diferenciarse entre hombres de mujeres, personas de diferentes clases sociales o poblaciones, las características de las vestimentas asumen un papel de distinción, por lo cual la práctica de referencia, **el bordado**, surge ante una necesidad, ya que con los diferentes diseños que se realizaban podían identificar una persona de otra, una clase social de otra y personas que provenían de regiones diferentes. **El bordado** a su vez “norma” a las actividades de **contar y bordar** ya que esta práctica norma lo que se cuenta, lo que se borda y cómo se borda. (Canul, 2007)

5.4.4 Propuestas de la Investigación

Como aporte a la Socioepistemología se pretende proponer a la *Orientación* (en el espacio) y a la *Trasformación* (de objetos del entorno en otros nuevos) como prácticas sociales, analizándolas desde su carácter normativo.

Retomando lo mencionado en el apartado anterior, Crespo (2007) señala que una práctica social se traduce en conjunto de acciones que surgen y permanecen en el ambiente social, siendo reconocida por su carácter normativo, *aquello que les hace hacer lo que hacen*. Entonces ¿cuál es el carácter normativo de éstas, de la Orientación y de la Transformación? Por otro lado, las prácticas sociales no son observables y su análisis sólo se puede lograr a través del estudio de las prácticas de referencia (Tuyub, 2008), de esta manera ¿es posible observarlas? ¿Pueden ser estudiadas directamente?

Para responder a aquellas interrogantes, será necesario retomar la caracterización de Apropiación del Espacio, se explicitó que una civilización ha logrado apropiarse del espacio luego de haber vivido cuatro momentos: Interacción con el espacio físico (cosmogonía), extracción de propiedades del entorno (identificación de características que lleven a conformar un conocimiento propio del escenario sociocultural), representación del entorno (signo visible y “simbólico”), manipulación del entorno (base de la creación y producción material).

5.4.4.1 ¿Puede ser considerada a la Orientación como una práctica social?

Podemos afirmar que ésta, la *orientación*, ocurre indistintamente del escenario sociocultural. Pinxten, Van Dooren y Harvey (1983) exponen la existencia de una universalidad de los referentes espaciales, afirmando que todas las culturas desarrollarán formas específicas de representar el mundo, pero todas ellas se referirán al mismo sol, la misma luna y lo harán mediante los mismos instrumentos básicos, manipulando la materia con las manos, mirando el mundo a través de unos ojos idénticos, a fin de obtener conocimiento y comprender lo que les rodea.

En este sentido, toda sociedad, a fin asegurar su sobrevivencia tiene la necesidad de *orientarse* en el espacio, por ejemplo, la necesidad de buscar alimento o de buscar un

terreno firme donde asentarse. O en el caso de los Egipcios, *orientarse en el espacio* los llevó a estudiar el cielo, sus creencias se basaban en la posición de las estrellas, incluso esto les permitió predecir las crecidas del río Nilo.

5.4.4.2 ¿Puede ser considerada a la Transformación como una práctica social?

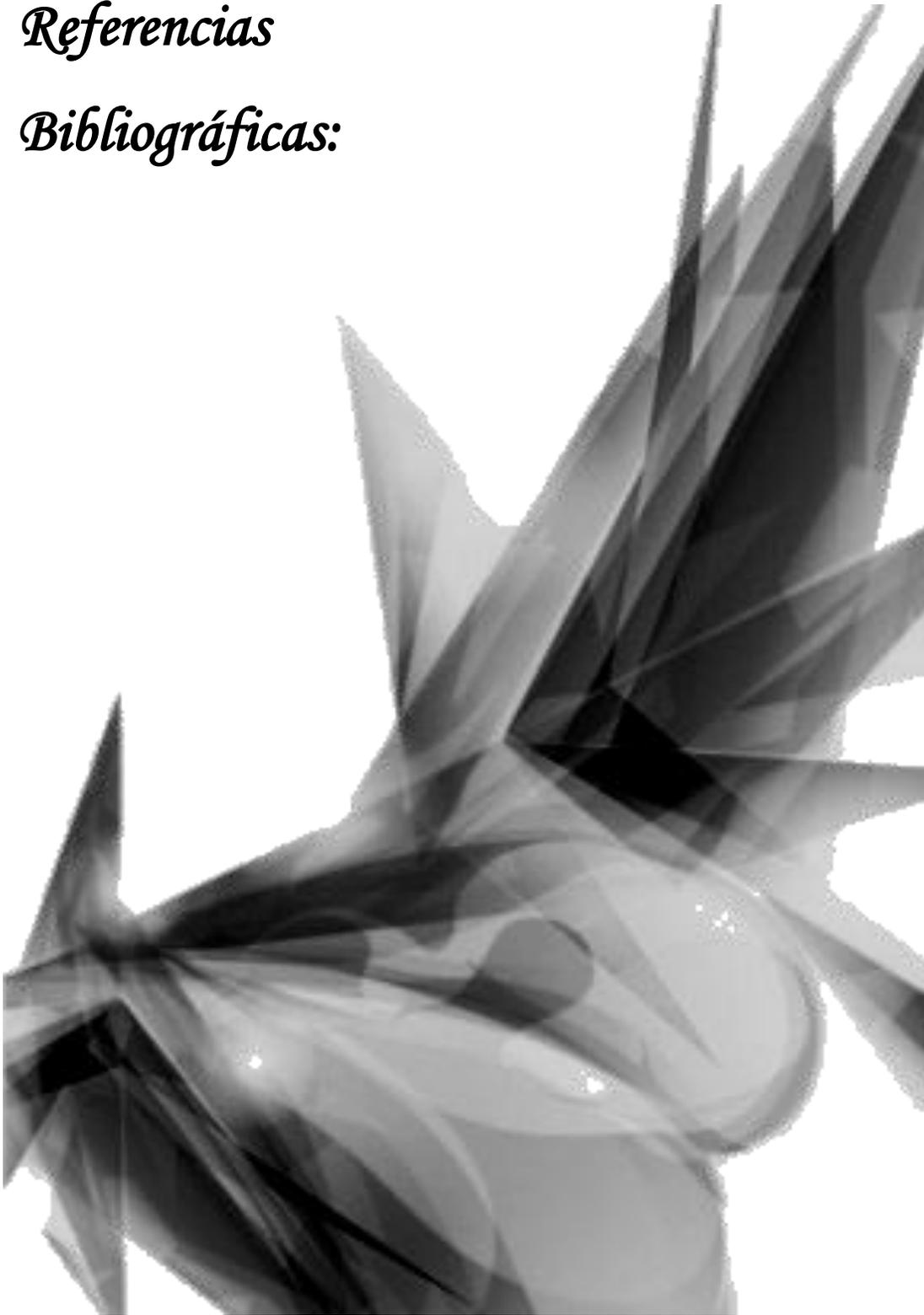
La *transformación*, es propia de cada escenario sociocultural, Bishop (1999) señala que transformar implica tomar un fenómeno natural (madera, arcilla, terreno, entre otras) y convertirlo en otro objeto (un utensilio, una olla, un huerto, etc.). Por lo que implica poner una estructura particular a la naturaleza, propia de la vida doméstica de cada escenario.

En otras palabras, el *transformar* implica, por ejemplo, estudiar un terreno para sembrar alimentos o tomar ciertos materiales como madera y hojas para construir una casa. De modo que también emerge para asegurar su sobrevivencia.

Finalmente creemos que las prácticas asociadas a la apropiación del espacio están normadas tanto por la *orientación* como por la *transformación*, es por ello que las proponemos como posibles prácticas sociales.

Referencias

Bibliográficas:



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aldred, C. (1996). *Arte egipcio. En el tiempo de los faraones: 3100 - 320 a. C.* Barcelona: Destino.
- Andrade, M. y Montecino, A (2009). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo.* Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Católica Silva Henríquez. Chile
- Andrade, M. y Montecino, A (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano, *Actas del XIII CIAEM-IACME 2011*. En: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2405.pdf>.
- Ares, I. (1997). La organización del espacio en perspectiva egipcia. *Revista de Arqueología* 18(191), 30-37.

- Ares, N. (2002). *Egipto: Hechos y objetos inexplicables del Egipto faraónico*. Madrid: EDAF.
- Artigue, M. (2004) Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática* 16(3), 5-28.
- Assmann, J. (2003). *The mind of Egypt. History and meaning in the time of the pharaohs*. Cambridge: Harvard University Press.
- Belmonte, J.A. (sf). Sobre pirámides y estrellas. Recuperado el 09 de Mayo de 2012 de http://www.egiptologia.cl/difusion/ciencia_sobre_piramides_es_trellas.php
- Ben-Haim, D., Lappan, G. y Hougang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics* 16, 389-409.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: analyzing and effecting students' performance. *Educational studies in mathematics* 20, 121-146.
- Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacionanl, México.
- Bishop, A. J. (1979). Visualizing and mathematics in a pre-technological culture. *Educational Studies in Mathematics* 10(2), 135–146.
- Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education – A review. *Educational Studies in Mathematics* 11, 257-269.

- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Borrás, G. (1996). *Teoría del arte I: Las obras de arte*. Madrid: Historia 16.
- Boyer, C. (1999) “*Historia de la matemática*”. Madrid: Alianza.
- Brault R., Daro I., Ferrero C., Perbos-Raimbourh D. y Telmon C. (2006). *Mathématiques*. Francia : Hachette Education.
- Bråting, K. y Pejlare, J. (2008). Visualizations in Mathematics. *Erkenntnis*, 68, 345-358.
- Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico)*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Bustos, R.M. (sf). Atón: Politeísmo y Monoteísmo. Recuperado el 05 de Mayo de 2012 de http://www.egiptologia.cl/difusion/religion_aton.php.
- Cabezas, C. (2007). *Análisis y características del dibujo infantil*. España: Ittakus
- Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de las Funciones Analíticas: simbiosis y Predación entre las nociones de “el Prædicere y lo Analítico”*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo editorial iberoamericana.

- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics* 53(3), 255 – 270.
- Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, 83-92.
- Cantoral, R. y Tuyub, I. (2012). Construcción social del conocimiento matemático: obtención de genes en una práctica toxicológica. *Bolema – Boletim de Educação Matemática* 26(42), 311 – 328.
- Canul (2007). *La práctica del bordado como generadora de conocimiento matemático*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Casanova, R. (2005). *El faraón y las estrellas. Los mundos del Más Allá en los Textos de las Pirámides*. España: Alicante.
- Castillo, B. (sf) Descubriendo técnicas: El dibujo. Recuperado el 10 de septiembre de 2012 de <http://fts-magazine.es/2012/05/descubriendo-tecnicas-el-dibujo/>
- Clements, M. A. (2008). Spatial abilities, mathematics, culture, and the Papua New Guinea experience. En P. Clarkson & N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education: Major contributions of Alan Bishop* (pp. 97–106). New York: Springer.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 103-128.

- Cordero, F. (2005). La distinción entre construcciones del cálculo: una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.
- Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México: Díaz de Santos–Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.
- Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de la gráfica en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de textos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 7-38.
- Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Crannell, A. y Douglas, S. (2012). Drawing on Desargues. *The Mathematical Intelligencer*, 1-8.
- Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.
- De León, G. (sf). La matemática en el antiguo Egipto. Recuperado el 09 de Mayo de 2012 de http://www.egiptologia.cl/difusion/ciencia_matematicas.php#geometria

- Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1990). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. En Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37). USA: MAA Series.
- Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Farfán, R. M. (1997). Problemática de la enseñanza de las matemáticas en América Latina. En D. Calderón y O. León (Eds.). *La didáctica de las disciplinas en la educación básica* (pp. 123 -146). Bogotá: Universidad Externado de Colombia.
- Farfán, R. M. (2003). Uma pesquisa em Educação Matemática: da propagação do calor à noção de convergência. *Educação Matemática Pesquisa*, 5 (2), 39 - 58.
- Flores, R. (1998). *Sobre el pensamiento variacional: una exploración en contexto*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Study of Mathematics*, 74, 163 –183.
- García, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. Una visión socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

- Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th Psychology of Mathematics Education Conference*, 2, 53-71. Utrech.
- Gray, J. y Field, J. (1987). *The Geometrical Work of Girard Desargues*. New York. Springer-Verlag.
- Gutierrez, A. (1996). Children's ability for using different plane representations of space figures. *New directions in geometry education*, 33-42.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3(3), 193-220.
- Janson, A. y Janson, H.W. (2001). *History of art*. New York: Harry N. Abrams
- Kospentaris, G., Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 77, 105-127.
- Kvasz, L. (1998). History of geometry and the development of the form of its language. *Synthese*. 116, 141-186.
- Lancy, D. (1981). The indigenous mathematics project. An overview. *Educational Studies* 12, 445-453.
- Levi-Strauss, C. (1982). *Mito y Significado*. Madrid: Alianza.
- López, J. (2005). La socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

- Lowenfeld, V. y Brittain-Lambert, W. (1980). *Desarrollo de la capacidad creadora*. Buenos Aires: Kapelusz.
- Marabolí, O. (sf). La creación según la Heliópolis: Mitos e iniciación. Recuperado el 15 de Mayo de 2012 de http://www.egiptologia.cl/difusion/mitologia_la_creacion.php
- Mingüer, L. (2006). *Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Estudio de caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México
- Mitchelmore, M. C. (1980a). Three-dimensional geometrical drawing in three cultures. *Educational Studies in Mathematics* 11, 205-216.
- Mitchelmore, M. C. (1980b). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education* 11 (2), 83-93.
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Moliner, J. M. y Llanos, B. (2010). Arte y arquitectura en el antiguo Egipto (1). Recuperado el 05 de Mayo de 2012 de <http://esunmomento.es/contenido.php?recordID=329>
- Parra, J. M. (2003). *Gentes del Valle del Nilo. La mirada de la historia*. España: Complutense.
- Pérez, A. (2004) *La vida en el Antiguo Egipto*. España: Alianza.

- Piaget, J. (1970). Piaget's theory. En PH Mussen (Ed.), *Carmichael's manual of child psychology* 1, 703-732. New York: Wiley.
- Pinxten, R., van Dooren, I. y Harvey, F. (1983). Anthropology of space. Explorations into the natural philosophy and semantics of the Navajo. Philadelphia: University of Pennsylvania press
- Presmeg, N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the learning of mathematics* 6(3), 42-46.
- Prette, M. y de Giorgis, A. (2002). *Atlas ilustrado de La historia del arte; técnicas, épocas y estilos*. España: Susaeta.
- Prieto, G. y Velasco, A. (2010). Does spatial visualization ability improve after studying technical drawing? *Quality and Quantity* 44 (5), 1015–1024.
- Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Sloley, R.W. (1944). *El Legado de Egipto*. Universidad de Oxford. Madrid: Pegaso.
- Silva, H. (2010). *Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Soto, D. (2010). *El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de

Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
México.

Tuyub, I. (2008). Estudio Socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo en la construcción social del conocimiento. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Vinner S. (1989). The Avoidance of visual considerations in Calculus. Focus Learning Problems of Mathematics. *Antología de Educación Matemática*. Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 85-93.

Wilson, B. (1985). The artistic tower of Badel: inextricable links between culture and graphic development. *Visual arts research* 11 (1), 90-105.

Woodrow, D. (1991). Children drawing cubes. *Mathematics Teaching*, 136, 30-33.

Wu, D.B., Ma, H.L. y Hsieh, K.J. (2006). The developmental stages of representations of simple regular space figures of elementary school students. En Novotna, J. (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 1, 430-437. Prague.

Yojcom, D. (2011). *La epistemología de la matemática maya: una construcción de conocimientos y saberes a través de prácticas*. Memoria Predoctoral no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.