Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Distrito Federal
Departamento de Matemática Educativa

FACTORES QUE INFLUYEN EN LA VISUALIZACIÓN DE REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS EN LOS AMBIENTES DE LÁPIZ-Y-PAPEL Y TECNOLÓGICO

Tesis que presenta

César Briseño Miranda

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

Director de tesis: Dr. José Guzmán Hernández

México, Distrito Federal Agosto, 2014

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) el apoyo financiero brindado a través de la beca otorgada durante mis estudios.

Becario No. 485639

Agradezco al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV), especialmente al Departamento de Matemática Educativa (DME) por la oportunidad y apoyo otorgado para realizar mis estudios de maestría.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por las bendiciones que me ha brindado a lo largo de mi vida.

A mi Esposa “Olivia” quien gracias a su paciencia, comprensión, bondad, amor y sacrificio ha logrado un cambio radical en mi vida. Este trabajo refleja el esfuerzo mutuo que nos ha permitido superar momentos difíciles. Gracias por estar a mi lado, eres el amor de mi vida y la razón de mí existencia. *Simplemente Te amo.*

A mis hijos “Karen y Carlos” quienes son mi fuente de inspiración y motivo por el cual, mi vida tiene sentido. Deseo que este trabajo los motive a alcanzar sus metas y ser mejores día con día. Los amo con todo mi corazón “*Mis ositos*”.

A mis padres Prospero y Patricia, quienes me enseñaron el camino de la rectitud y me han dado las bases para alcanzar mis objetivos basados en el esfuerzo y el trabajo. *Con cariño para ustedes.*

A mis hermanos Diana, Rosa Isela y Roberto quienes me han brindado su apoyo y comprensión a lo largo de mi vida. *Gracias hermano, los quiero.*

A mis sobrinos Daniel y Gustavo, quienes son parte de mi inspiración y me han enseñado que se debe ser feliz a pesar de las dificultades. Espero que este trabajo sirva como motivación para su futura superación académica. *Los quiero mucho.*

A mis compañeros, amigos, profesores y personal del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN quienes han hecho placentera esta etapa de mi vida.

Al Dr. Guzmán, quien me brindó su confianza y me ha apoyado en todo momento. Gracias por su paciencia, comprensión y sus acertados comentarios durante la dirección de esta investigación.

A mis sinodales Dr. Zubieta y Dr. Sánchez. Gracias por sus sugerencias que han servido para enriquecer este trabajo.

ÍNDICE

Resumen………………………………………………………………...i

Abstract……………………………………………………………….. ii

Presentación………………………………………………………… iii

Capítulo 1

Problema de investigación

1.1 Introducción………………………………………………………. 1
1.2 Visualización en matemáticas…………………………………….. 3
1.3 Las nuevas tecnologías en educación matemática……………...... 4
1.4 Problema de investigación……………………………………... 6
1.4.1 Objetivos de investigación…………………………………8
1.4.2 Preguntas de investigación…………………………………8
1.4.3 Justificación de la investigación……………………………9

Capítulo 2

Marco Conceptual

2.1 Introducción………………………………………………………. 11
2.1.1 Psicología de la Gestalt…………………………………… 11
2.1.2 Importancia de la visualización en educación matemática……………………………………………... 14
2.2 La visualización……..……………………………………………. 15
2.2.1 Representaciones geométricas……………………………..18
2.3 Visualización de figuras geométricas……………………………...19
2.3.1 Unidades constitutivas de una figura geométrica………….21
2.3.2 Reconocimiento de representaciones geométricas………... 24
2.3.3 Reconfiguración de una figura geométrica……………….. 28
2.3.4 Representaciones mentales………………………………...28
2.4 Visualización de objetos matemáticos con ayuda tecnológica…… 29
2.5 Consideraciones de los elementos teóricos………………………..33

Capítulo 3

Metodología

3.1 Introducción………………………………………………………. 35
3.2 Etapas de la investigación…………………………………………35
3.2.1. Etapa 1. Problema de investigación………………………. 36
3.2.2. Etapa 2. Orientación Teórica………………………………37
3.2.3. Etapa 3. Descripción y análisis de datos………………….. 37

3.3 Tipo de investigación………………………………………….. 37
3.4 Descripción y selección de la población…………………………..38
3.5 Selección e instrucción de la herramienta tecnológica…………… 39
3.6 Diseño y selección de las Actividades……………………………40
3.6.1. Actividades implementadas………………………………. 42
3.7 Recolección de datos………………………………………………48

Capítulo 4

Análisis de la información y discusión de resultados

4.1 Introducción……………………………………………………. 51
4.2 Análisis de la información……………………………………... 52
4.3 Primera Actividad……………………………………………. 53
4.3.1 Ambiente de lápiz-y-papel……………………………... 54
4.3.2 Ambiente tecnológico…………………………………….. 56
4.4 Segunda Actividad…………………………………………… 58
4.4.1 Ambiente de lápiz-y-papel……………………………... 58
4.4.2 Ambiente tecnológico…………………………………….. 60
4.5 Tercera Actividad……………………………………………….. 63
4.5.1 Ambiente de lápiz-y-papel…………………………….. 64
4.5.2 Ambiente tecnológico……………………………………. 66
4.6 Cuarta Actividad……………………………………………... 68
4.6.1 Ambiente de lápiz-y-papel……………………………... 69
4.6.2 Ambiente tecnológico…………………………………….. 73
4.7 Discusión de resultados…………………………………………77
4.7.1. Principales resultados de la primera Actividad…………… 77
4.7.2. Principales resultados de la segunda Actividad…………... 78
4.7.3. Principales resultados de la tercera Actividad……………..79
4.7.4. Principales resultados de la cuarta Actividad……………...81
4.8. Resultados generales……………………………………………83
4.8.1. Respecto al papel de la visualización……………………. 83
4.8.2. Respecto al trabajo en los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico……………………………….. 84

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Introducción……………………………………………………. 87
5.2 De acuerdo con los objetivos de la investigación………………… 87
5.2.1. Factores que influyen en el reconocimiento de objetos geométricos……………………………………88
5.2.2. Visualización de objetos matemáticos mediante herramientas tecnológicas………………………………… 90

5.3 Conclusiones respecto a las preguntas de investigación…………. 91
5.3.1. Respuesta a la primera pregunta…………………………… 91
5.3.2. Respuesta a la segunda pregunta……………………………93
5.3.3. Respuesta a la tercera pregunta…………………………… 95
5.4 Reflexiones finales……………………………………………….. 98

Capítulo 6

Investigación futura

6.1 Introducción……………………………………………………. 103
6.2 Antecedentes…………………………………………………… 105
6.3 Justificación de la investigación……………………………….. 108
6.4 Problema de investigación…………………………………….. 110
6.4.1. Objetivos de la investigación…………………………….. 112
6.4.2. Preguntas de investigación……………………………….. 112
6.5. Marco conceptual………………………………………………..113
6.5.1. Visualización en matemáticas…………………………… 113
6.5.2. Registros de representación………………………………..115
6.5.3. Unidades constitutivas de una figura geométrica………….118
6.5.4. Tipos de aprehensión………………………………………118
6.5.5. Visualización y abstracción matemática………………….. 119
6.5.6. La herramienta tecnológica en el desarrollo de habilidades matemáticas……….……………………….. 122
6.6. Aspectos metodológicos……………………………………….. 123
6.6.1. Tipo de estudio…………………………………………….124
6.6.2 Sujetos participantes……………………………………….124
6.6.3. Recolección de datos………………………………………124
6.6.4. Diseño de Actividades……………………………….….... 125
6.6.5. Fases de la investigación…………………………………..125
6.6.6. Calendario de actividades………………………………… 126
6.6.7. Resultados esperados………………………………………127

Referencias Bibliográficas………………………………………………. 129

RESUMEN

La visualización de representaciones geométricas se reconoce como problemática en la adquisición de conceptos. En ésta la visión juega un papel importante, y su éxito depende del conocimiento, la memoria, la interpretación, así como la percepción por parte del sujeto de aquello que ve. Esta investigación reporta los resultados obtenidos al trabajar con estudiantes de bachillerato Actividades en ambientes tecnológico y de papel-y-lápiz. Este trabajo muestra cómo estos dos ambientes se complementan durante la visualización de representaciones geométricas. Los resultados revelan que la herramienta tecnológica potencia la visualización de representaciones, pero el papel-y-lápiz como herramienta de trabajo se vuelve necesario para conjeturar conceptos abstractos surgidos de tales representaciones.

ABSTRACT

The visualization of geometric representations is recognized as problematic in acquiring concepts. In this vision plays an important role, and its success depends on the knowledge, memory, interpretation, and the subject's perception of what it sees. This research reports the results obtained when working with high school students in technological environments and Activities of paper-and-pencil. This paper shows how these two environments are complemented when viewing geometric representations. The results show that technological power tool visualization representations, but the paper-and-pencil as a tool becomes necessary to guess abstract concepts resulting from such representations.

PRESENTACIÓN

Un proceso común, en la actividad matemática, consiste en analizar figuras geométricas, con ello se logra una mejor comprensión de un concepto matemático. Cuando se analizan las figuras geométricas la información que está implícita, puede ser interpretada con base en la observación y el razonamiento. La visualización, en los últimos años, ha sido utilizada y reconocida como una parte importante en la educación matemática. La mayor parte de los trabajos realizados en esta disciplina destacan la importancia de la visualización (por parte de los alumnos) para lograr la comprensión de conceptos matemáticos.

Sin embargo, existen diversas dificultades que impiden realizar una visualización adecuada de los objetos matemáticos. Las representaciones visuales de objetos matemáticos no son necesariamente transparentes para los estudiantes. Debe ser necesario que los alumnos posean un grado de conocimiento considerable de los símbolos y convenciones para que las representaciones tengan sentido. La visualización plantea un problema específico respecto a la visión, ya que se involucra el saber o el reconocer en una figura los objetos que las formas visualmente representan.

Estas (y otras) dificultades presentadas por los estudiantes cuando llevan a cabo la visualización de objetos matemáticos son comunes, debido a la gran cantidad de representaciones matemáticas encontradas en los materiales educativos. La visualización juega un papel trascendental en el aprendizaje de las matemáticas, debido a que en la actualidad existen múltiples materiales educativos que permiten, a los estudiantes, acercarse a los objetos matemáticos.

El rápido avance de la tecnología ha influido en la naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Mediante el uso de las herramientas tecnológicas en el salón de clases, los estudiantes pueden explorar y comunicar conceptos matemáticos de diversas maneras, usando por ejemplo, las representaciones gráficas de esos conceptos matemáticos surgidos de procedimientos relacionados con su interpretación.

Gracias a los avances tecnológicos se hace cada vez más fácil y menos costoso incorporar elementos que permiten realizar visualizaciones de objetos matemáticos en el aula. Mediante el uso herramientas tecnológicas se pueden visualizar no sólo las imágenes en dos dimensiones estáticas, sino también dinámicas e incluso visualizaciones interactivas, las cuales, se han vuelto frecuentes en la enseñanza de las matemáticas. Las herramientas tecnológicas ofrecen claras ventajas a los estudiantes para identificar y explorar diversas relaciones matemáticas.

Este trabajo pretende analizar la influencia del ambiente tecnológico como complemento del ambiente de lápiz-y-papel en la visualización de figuras geométricas. Se propone que el uso de la tecnología contribuye en la construcción de significados matemáticos a través del estudio de figuras geométricas analizadas previamente en ambiente de lápiz-y-papel. Se propone determinar si esta relación entre los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico permite desarrollar métodos visuales efectivos para producir y sustentar generalizaciones.

La estructura del documento es la siguiente:

En el Capitulo 1, se presenta la problemática relacionada con la visualización de representaciones geométricas, así como la importancia de la visualización y la influencia de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la geometría. El Capítulo concluye con el planteamiento del problema de investigación, las preguntas en relación con la problemática elegida y los propósitos del estudio.

En el Capítulo 2, se lleva a cabo la revisión de la literatura, la cual contiene los elementos teóricos esenciales que sustentan el trabajo. La revisión de la literatura involucra la elección de la teoría, sobre la cual está fundamentada la investigación, así como, una descripción de la evolución e importancia de la visualización en matemáticas.

En el Capítulo 3, se describen las características de los sujetos participantes, la tecnología utilizada para este trabajo, el diseño y selección de los instrumentos de investigación, también, la recolección de datos que son fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

En el Capítulo 4, se describe el análisis y la descripción de las Actividades implementadas a los sujetos participantes. Mediante la realización de estas Actividades se pretende sustentar las nociones teóricas que orientaron el estudio a través de la discusión de resultados.

En el Capítulo 5, de acuerdo con los objetivos establecidos en el Capítulo 1, se pretende dar respuesta a las preguntas de investigación que guiaron el presente trabajo. Se presentan las conclusiones y reflexiones finales acerca de los resultados encontrados en la investigación.

En el Capítulo 6, se presentan las perspectivas futuras que vislumbra este trabajo, en las cuales, se propone la continuidad de esta investigación; cuyo eje principal es la visualización y la forma de aprovecharla para promover la abstracción matemática, empleando los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico.

Finalmente, se agregan las Referencias Bibliográficas citadas en la presente investigación, las cuales fueron utilizadas y que sirven de base para la continuación de la investigación.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

En la actividad matemática, el uso de sistemas de expresión y de representación es parte importante y necesaria dentro de las actividades cognitivas. La utilización de variados sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, diagramas, gráficos cartesianos o figuras geométricas son esenciales para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales. Estas representaciones externas son también conocidas como *representaciones semióticas*[1].

Las representaciones semióticas son el medio ideal para comunicar los conocimientos que posee un sujeto. Cuando el sujeto produce o interpreta una representación, se ponen en juego diferentes elementos que permiten la comprensión como la percepción, la memoria, la imaginación y la creatividad. Es esencial no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones; ya que un objeto matemático puede darse a través de representaciones diferentes. No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Toda confusión entre el objeto y su representación provoca una pérdida en la comprensión (Duval, 1999a).

[1] Las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…), por medio de los cuales, un individuo dispone para exteriorizar sus representaciones mentales (para hacerlas visibles o accesibles a los demás sujetos).

Aunque las representaciones deberían comunicar ideas de manera inequívoca, quien las interpreta lo hace desde su propio entendimiento y comprensión que no necesariamente coincide con el autor de la representación. Este fenómeno sucede comúnmente en la enseñanza de la geometría; el profesor emplea las representaciones, en especial las figuras geométricas, para exponer ese conocimiento que se desea comunicar (implícita o explícitamente). Las representaciones geométricas se convierten en el medio por el cual se expresan las relaciones, propiedades y conceptos contenidos en dichas figuras.

En la enseñanza de la geometría prevalece un problema fundamental, el cual consiste en la identificación de las figuras geométricas, así como el reconocimiento tanto de sus propiedades como de las relaciones que guardan con el razonamiento. Duval (2003) menciona que cuando los estudiantes emplean las representaciones geométricas, todo parece indicar que la acción necesaria y suficiente es simplemente *ver*[2]; sin embargo, los alumnos no logran mirar las figuras como los profesores desearían que las mirasen y, por consiguiente, no obtienen la información que dichas figuras contienen o se encuentra implícita en ellas.

En el contexto escolar existe una ruptura en la comunicación entre profesor y alumno, debido a las diferencias marcadas por los campos de experiencia de cada uno de ellos con relación a los objetos en cuestión. El profesor razona sobre el objeto geométrico, sin embargo, el alumno no se da cuenta de las relaciones estructurales entre los elementos constitutivos del objeto, debido a que no son explícitas aunque perceptivamente parecieran estar ahí.

Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, cuya utilización resulta provechosa, tanto en las tareas de representación como en el manejo de conceptos. La forma de actuar con atención a las posibles representaciones concretas y relacionarlas con lo abstracto, incluyendo procesos

[2] De acuerdo con el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE), la palabra “ver” tiene diversos significados. Para este trabajo “ver” se refiere a reconocer con cuidado y atención alguna figura [geométrica], percibiéndola y examinándola por medio del sentido de la vista y de la inteligencia.

tanto de construcción como de transformación de las imágenes visuales, puede ser considerada como *visualización*[3].

La acción de *ver* parece ser simple y sencilla, no obstante se basa en un conjunto complejo de funciones cognitivas que dependen de la naturaleza de los objetos que se presentan, y donde la *visualización* involucra el reconocimiento (por parte de los alumnos) de los objetos que las formas visualmente representan. Para analizar las figuras geométricas se requieren aprendizajes específicos de cada tipo de visualización usado, dando a los alumnos el sentido de *ver* y distinguiendo los procesos como la visión y la visualización, los cuales, nunca son completamente distantes. Analizar figuras geométricas es trascendental en la educación matemática. Cuando se analizan figuras geométricas se generan ciertos conflictos o determinadas ambivalencias de las figuras, tales conflictos tienen su origen dentro de la dualidad forma y dimensión que las constituye.

1.2. Visualización en matemáticas

El pensamiento geométrico es el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones de los objetos geométricos, las relaciones entre ellos y sus transformaciones. El pensamiento geométrico requiere la coordinación simultánea de tres procesos cognitivos: visualización, construcción y razonamiento. Específicamente, la visualización se interpreta como el espacio de representación de las configuraciones de dos o tres dimensiones, las cuales, sirven como ayuda intuitiva para el razonamiento (Duval, 1998).

Las ideas, conceptos y métodos de estudio de las matemáticas suelen ser referidos por medio de representaciones, las cuales expresan una gran riqueza de contenidos visuales, cuya utilización resulta provechosa tanto en el manejo de tales conceptos como en su comprensión misma. La representación de un objeto matemático involucra su análisis; si el objeto es una figura geométrica, se deben identificar características y hacerse un tratamiento del objeto no solo empleando el sentido de la vista sino también formando en la

3 El DRAE da a conocer la palabra “visualizar” y se refiere a formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto mediante la imaginación e inteligencia, la cual genera rasgos visibles de los objetos [matemáticos] que no se tienen a la vista.

mente una imagen de un concepto abstracto empleando la inteligencia e imaginación. La manera en cómo un alumno visualiza objetos matemáticos, en particular, figuras geométricas es de suma importancia para que logre el aprendizaje de conceptos matemáticos asociados con esas figuras. Para Duval (1999a), realizar una adecuada comprensión visual de un objeto matemático permite al alumno reconocer las representaciones de ese concepto en el registro visual, y además, debe ser capaz de transformarlas y convertirlas en otros registros cuando se realizan razonamientos matemáticos con ellas.

La palabra visualización algunas veces es usada para describir representaciones visuales, en otras ocasiones se emplea para describir el uso de una representación específica, y otras veces se utiliza para describir la actividad cognitiva de imaginar una representación visual. En la educación matemática, las imágenes, figuras y diagramas siguen siendo importantes objetos de visualización. Además de las imágenes que se presentan a los estudiantes, también hay objetos de visualización producidos por los propios estudiantes y objetos que pueden visualizar (los estudiantes) introspectivamente (objetos generados y manipulados en la mente).

La capacidad de interpretar las representaciones visuales es una tarea nada trivial para la mayoría de los estudiantes, debido a que las visualizaciones pueden darse en términos de: objetos físicos (imágenes, figuras, diagramas); objetos mentales (imágenes mentales, construcciones mentales); procesos cognitivos (mediante funciones cognitivas como la percepción visual).

1.3. Las nuevas tecnologías en educación matemática

La enseñanza de las matemáticas ha cambiado debido al desarrollo de las nuevas tecnologías. La presencia de las computadoras, en la mayor parte de las escuelas y de los hogares, junto con la existencia de una gran cantidad de software está produciendo cambios metodológicos importantes y positivos en la enseñanza de las matemáticas. El uso de software matemático dentro y fuera del aula permite experimentar, conjeturar, comprobar, demostrar y, en definitiva, "trabajar situaciones matemáticas" de manera práctica.

Las calculadoras y las computadoras son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. De acuerdo con la NCTM (2000), las nuevas tecnologías proporcionan imágenes visuales de ideas o conceptos matemáticos, además de facilitar la organización y el análisis de datos; así, los estudiantes cuando disponen de estas herramientas tecnológicas pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas. Por esta razón, las calculadoras y las computadoras se han convertido en instrumentos didácticos valiosos.

Las nuevas tecnologías permiten ampliar los recursos que los estudiantes emplean para resolver problemas. El simple hecho de usar alguna herramienta tecnológica para dibujar una gráfica o como una ayuda para resolver un problema no descalifica la práctica como "no matemática". Es el significado, y la forma de darle sentido "al conjunto de hechos y signos", y no las formas de los sistemas de signos que determina lo que es matemático; de esta manera, se cree que la calculadora y los computadores pueden enriquecer y favorecer el uso del pensamiento matemático en contextos más cercanos de lo que es el proceso de producción y de uso de las matemáticas.

Según la teoría basada en la resolución de problemas de Santos (2007), un aspecto notable en el uso de la tecnología es aquel que permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas que pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas. Con el uso de las herramientas tecnológicas los estudiantes tienen la oportunidad de mover partes de configuraciones geométricas y observar cambios o invariantes (objeto matemático que no cambia de valor al sufrir determinadas transformaciones).

En *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000, p. 27), se hace hincapié en la importancia (por parte de los estudiantes) de "usar la visualización, el razonamiento espacial y la modelización geométrica para resolver problemas", utilizando las herramientas tecnológicas. Mediante el uso de la tecnología en el salón de clases, los estudiantes pueden explorar, resolver y comunicar conceptos matemáticos de varias maneras. En la actualidad, es común encontrar imágenes, dibujos, gráficos y diagramas en textos matemáticos, sin embargo, se ha vuelto frecuente el uso de las herramientas tecnológicas en el aula mediante la utilización de programas informáticos enfocados en la enseñanza de las matemáticas.

Algunos ejemplos de estos programas son: Cabri Geometry, Mathematica, Derive, Maple, Geogebra, entre otros. En el ambiente educativo, incluso se cuenta con una gran cantidad de *applets*[4] disponibles *online*[5]. Este tipo de herramientas tecnológicas potencia la visualización como forma de enseñanza de conceptos matemáticos, y se vuelve trascendental en educación matemática.

De acuerdo con Goldenberg y Cuoco (1998) estos softwares ofrecen una herramienta poderosa para examinar relaciones geométricas desde diversas perspectivas. Por ejemplo, resulta difícil imaginar el lugar geométrico que describe un punto cuando se mueve dentro de una configuración. El uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triángulo, etc.) cuando se mueve respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración. Además, los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de programas informáticos. Mediante este software, los estudiantes pueden realizar constantes exploraciones, probar sus ideas matemáticas y conjeturas en forma visual, eficiente y dinámica.

1.4. Problema de investigación

La representación de un objeto matemático involucra su análisis; si el objeto es una figura geométrica, se deben identificar características y hacerse un tratamiento del objeto empleando el sentido de la vista. Analizar figuras geométricas es parte del funcionamiento representacional de la visualización en matemáticas por excelencia, donde su forma y dimensión juegan un papel trascendental en las mismas, ahí radica la importancia de la visualización.

Las imágenes visuales producidas en la mente del estudiante, para resolver problemas durante su desarrollo académico, lo enfrentan a un ejercicio físico y mental casi cotidiano

[4] Un *applet* es un programa escrito en lenguaje de programación *Java* que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo en un navegador web.

[5] Se dice que la información está "*online*" o "en línea" cuando se encuentra disponible a través de Internet.

en él. En ocasiones, su estado mental de concentración en los problemas de visualización lo llevan a encontrar soluciones de estos; sin embargo, es común que la ausencia u omisión de información, el desconocimiento parcial o total del problema presentado y la falta de coherencia (por parte del alumno) en sus "imágenes mentales", provoquen el fracaso del individuo en la visualización de objetos matemáticos.

Arcavi (2003) se refiere a la visualización como la capacidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, el uso y la reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente o sobre el papel con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en su comprensión.

Al incorporar las herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se promueve una adecuada comprensión visual (por parte del alumno) del objeto matemático en estudio. De acuerdo con lo establecido por la NCTM (2000, p. 26), "la potencia gráfica de los instrumentos tecnológicos permite el acceso a modelos visuales poderosos, pero que muchos estudiantes son incapaces de generar independientemente si están o no dispuestos para hacerlo".

La visualización de objetos matemáticos ante la influencia de las herramientas tecnológicas promueve una relación experimental. En esta relación, los alumnos actúan ante los objetos matemáticos de la siguiente manera: a) "visualizan los objetos matemáticos" formando en la mente una imagen visual de un concepto abstracto mediante la imaginación e inteligencia y generan rasgos visibles de los objetos que no se tienen a la vista; b) "reflexionan y razonan a través de las nuevas tecnologías", las cuales, proporcionan imágenes visuales de ideas o conceptos matemáticos que muchos estudiantes son incapaces de generar, y permiten verificar la validez de la visualización de estos objetos realizada previamente.

Se comparte la idea de que la disponibilidad de la tecnología no le resta importancia a comprender con claridad los conceptos que sustentan los objetos matemáticos, sin embargo, en caso de que las herramientas tecnológicas sean incorporadas a la enseñanza de las matemáticas de manera acertada, el uso de estas herramientas facilitan a los alumnos la comprensión de conceptos, centrando su atención en la reflexión y el razonamiento.

1.4.1. Objetivos de investigación

El presente trabajo de investigación tiene como principal interés de describir y analizar la naturaleza de la visualización en los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico, estableciendo su relación con su enseñanza y aprendizaje dentro de la actividad matemática.

Para la presente investigación se establecen los siguientes propósitos:

a) Identificar los factores que influyen en el proceso de reconocimiento de objetos matemáticos relacionados con representaciones geométricas presentados en el registro visual.
b) Determinar la influencia de la visualización de objetos matemáticos empleando alguna de las herramientas tecnológicas actuales (para este trabajo se utiliza el software de Geogebra) como complemento en el trabajo de visualización tradicional (ambiente de lápiz-y-papel).

Esta investigación no pretende hacer una universalización de lo visual, sino rescatar algunas ideas básicas de la manera de concebir los objetos, y potencializar con ayuda de las herramientas tecnológicas la adquisición y comprensión de conceptos matemáticos poco claros para los alumnos.

1.4.2. Preguntas de investigación

Para lograr los objetivos planteados en la investigación, es necesario determinar la manera en que los alumnos analizan los objetos matemáticos relacionados con las representaciones geométricas. Las preguntas de investigación que guiaron el presente trabajo se detallan a continuación:

1. ¿Cuáles son las dificultades de la visualización de figuras geométricas en el aprendizaje de las matemáticas?
2. ¿Cómo influye el uso del ambiente tecnológico como complemento del de lápiz-y-papel, en la visualización de figuras geométricas?
3. ¿Qué ventajas y desventajas se tienen al usar los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico en la visualización de objetos matemáticos?

Para dar respuesta a estas preguntas, se realizaron Actividades que involucraron la visualización de figuras geométricas en los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico (en ese orden). Las Actividades permitieron obtener evidencias de las formas de visualizar las representaciones geométricas por parte de los estudiantes en ambos ambientes; estas evidencias están basadas en registros escritos y video-grabados de las sesiones de trabajo.

1.4.3. Justificación de la investigación

Se tiene en la actualidad una gran cantidad de materiales educativos relacionados con matemáticas. En ellos, la visualización juega un papel trascendental debido a que existen libros de texto matemáticos llenos de imágenes, diagramas y gráficos, así como diversos programas informáticos que permiten a los estudiantes interactuar con ellos.

De acuerdo con Duval (1999b), la actividad matemática (principalmente en los cursos de geometría) se centra en el uso del registro de las figuras geométricas. En esos registros se describen los objetos matemáticos estudiados, así como sus propiedades y el uso del lenguaje natural para enunciar teoremas, definiciones, hipótesis concernientes a esas figuras. De esta manera, se describe la importancia del estudio de la visualización de figuras geométricas.

El rápido avance de la tecnología ha influido en la naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Mediante el uso de las herramientas tecnológicas en el salón de clases, los estudiantes pueden explorar y comunicar conceptos matemáticos de diversas maneras, usando, por ejemplo, las representaciones gráficas de esos conceptos matemáticos y surgidos de procedimientos relacionados con la interpretación de tales conceptos.

La idea de promover (en los estudiantes) el uso de imágenes y la visualización de objetos matemáticos usando tecnología motiva que surjan preguntas como: ¿qué es la visualización?, ¿cuáles son las dificultades de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas?, ¿qué ventajas y desventajas se presentan al usar los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico en la visualización de objetos matemáticos?, ¿cómo influye el uso del ambiente tecnológico como complemento del de lápiz-y-papel, en la visualización de figuras geométricas? Este trabajo pretende responder estas preguntas.

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1. Introducción

La visualización como herramienta de enseñanza y de aprendizaje de conceptos matemáticos (especialmente de geometría) ha sido foco principal de investigación desde hace varios años. Diversos autores (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 1998, 1999a, 1999b, 2003; Presmeg, 2006; Phillips et al, 2010, entre otros) han reconocido la importancia de la visualización en la comprensión del conocimiento matemático de los alumnos. De acuerdo con Presmeg (2006), la investigación sobre la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas comenzó en las décadas de los 70 y 80, basándose en la psicología teórica.

2.1.1. Psicología de la Gestalt

Un ejemplo de la psicología teórica es la denominada psicología de la Gestalt. Este movimiento de la psicología, sostiene que la mente es la encargada de configurar, mediante diversos principios, todos aquellos elementos que forman parte de ella gracias a la acción de la percepción o al acervo de la memoria. Entre las principales leyes anunciadas por la doctrina Gestalt, se encuentran: a) ley de la semejanza: postula que la mente se encarga de realizar agrupaciones de elementos según su similitud; b) ley de la pregnancia: establece que la experiencia resultante de la percepción siempre tiende a adquirir la forma de mayor simpleza; c) ley de la proximidad: instituye que la reunión de elementos se concreta según la distancia; d) ley del cierre o continuidad: establece que cuando falta algún elemento, la mente se encarga de añadirlo para obtener una figura completa.

No obstante, también se consideran que junto a dichos principios existen otros tales como: a) *simetría* establece que las imágenes que presentan esta característica se contemplan como idénticas en la distancia; b) *experiencia* determina que nuestro sistema nervioso se va formando en función del mundo exterior, por lo tanto, el entorno influye en la percepción y concepción de los objetos por parte del individuo.

La teoría Gestalt busca demostrar la importancia fundamental de la percepción. Es la percepción (de cada individuo) la que en un momento determinado, en esa situación y en ese instante, le dan una forma significativa y dominante al objeto percibido. Un ejemplo claro se muestra en la Figura 2.1; en esta figura se percibe, de acuerdo con los principios de la psicología Gestalt definidos previamente, un cubo o hexaedro regular. Sin embargo, la Figura 2.1 muestra en realidad 12 líneas: cuatro horizontales, cuatro verticales y cuatro oblicuas. Al observar las 12 líneas, el individuo las relaciona con el recuerdo de un cubo y de acuerdo con su percepción (el individuo) crea la figura. Esa forma, figura, gestalt o proyecto emerge desde un fondo, en nuestro caso desde nuestro inconsciente.

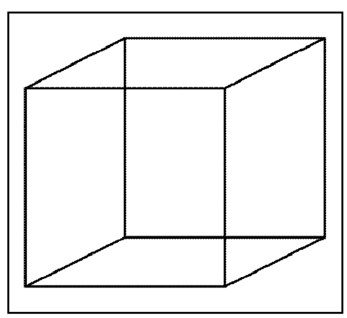

Figura 2.1. Percepción de un cubo o hexaedro regular.

En todo campo perceptivo, se diferencian un fondo (plano posterior a la figura) y una forma (es la figura dominante que toma su sentido al emerger del fondo). Sin embargo, la percepción de la forma no es un hecho objetivo. La variación parte principalmente del sujeto, quien aísla del fondo las formas dominantes; en otras palabras, es el sujeto quien hace emerger la figura de acuerdo con su atención y sus necesidades.

Otro ejemplo relacionado con la percepción (por parte del individuo) de los objetos aplicando la psicología Gestalt se muestra en la Figura 2.2.a, la cual muestra sin duda un cuadrado.

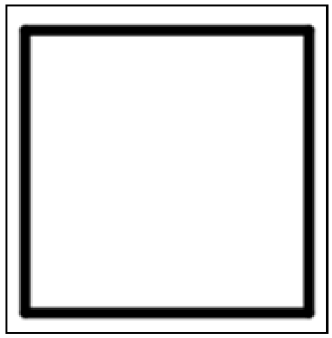

Figura 2.2.a.
Representación de un cuadrado

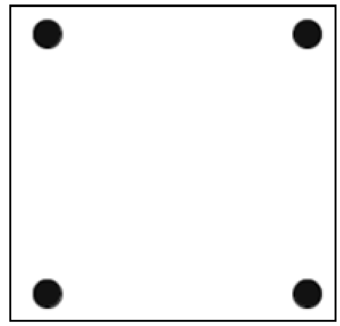

Figura 2.2.b.
Configuración de cuatro puntos.

Sin embargo, la Figura 2.2.b muestra una configuración de cuatro puntos, los cuales, a primera vista llevados por la fuerza de la costumbre, sin duda el individuo verá ahí "un cuadrado" de nuevo. Aunque estos cuatro puntos podrían también formar un círculo, una cruz o una Z, como se muestra en la Figura 2.3.

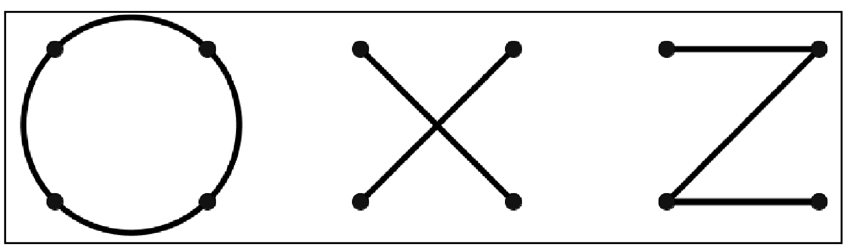

Figura 2.3. Reconfiguración posible de los cuatro puntos.

La primera forma que viene espontáneamente a la mente es la más simple; la cual obedece a un cierto número de leyes bien definidas por los psicólogos gestaltistas (simetría, estructura, ejes, homogeneidad, etc.), pero como todo lenguaje, esta forma u objeto es polisémico[6]; contiene simultáneamente varios significados que no se excluyen uno del otro, pero que aparecen en función del patrón de lectura utilizado, explicito o implícitamente; ya

[6] De acuerdo con el DRAE, la palabra *polisémico* es relativo a la *polisemia* y se refiere a aquello que cuenta con más de un significado, independientemente de la naturaleza de los signos o símbolos con que está constituido dicho elemento.

que en lugar de que el individuo perciba formas geométricas, pudo haber visto en esa misma configuración flores o animales.

Es importante establecer la diferencia entre la visualización enfocada en la psicología y la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. La visualización en psicología se interesa por la formación de imágenes mentales y las habilidades del individuo para manejarlas, mientras que la visualización en matemáticas está relacionada con la habilidad de los estudiantes en dibujar una figura para representar un problema matemático y usar la representación para lograr la comprensión de dicho concepto (Zimmermann & Cunningham, 1991).

2.1.2. Importancia de la visualización en educación matemática

En la década de los 90, cuando la importancia de la visualización fue reconocida en educación matemática, se convirtió en centro de temas diversos entre los que destacan el desarrollo curricular y la eficacia de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. Uno de los autores que durante esta década realizó destacables trabajos relacionados con los obstáculos potenciales en los alumnos para aprender geometría es Bishop. Este autor considera que la visualización de las figuras geométricas es uno de los obstáculos que se presentan en el aprendizaje de la geometría, ya que se genera una confusión entre la forma y el contenido representado (Bishop, 1992).

Otro aspecto considerado por Bishop es la dificultad generada cuando un estudiante intenta *ver* una figura geométrica con una configuración diferente; sin tener éxito. Según el autor, esta dificultad se deriva de una enseñanza basada en las posiciones prototípicas de algunos objetos geométricos. A partir del año 2000 se ha observado un aumento en las investigaciones sobre los aspectos semióticos de la visualización de figuras, dando prioridad a la comprensión de los conceptos de imagen y de representación.

La importancia del análisis de objetos matemáticos y sus respectivas representaciones se mencionan en los *Principles and Standards for School Mathematics* publicado por la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000):

> Las representaciones comunican visualmente determinados tipos de información, además de que facilitan el razonamiento acerca de objetos y acciones que se pueden percibir

> directamente cuando son utilizadas en niveles básicos, a diferencia de los niveles medios, en los cuales se van creando y empleando cada vez más representaciones de objetos que no se perciben de forma directa logrando interpretar y extraer una amplia variedad de contextos, identificando características esenciales de una situación y hallando representaciones que capten las relaciones entre dichas características. (p. 366)

El creciente interés en este campo de investigación está muy lejos aún de agotar los temas relacionados con la visualización, ya que hay una clara necesidad de seguir la búsqueda de nuevas perspectivas teóricas.

2.2. La visualización

Dentro de los contenidos matemáticos, existe la necesidad de analizar diferentes figuras geométricas. Mediante la visualización de estos objetos matemáticos se realizan transformaciones mentales en dos sentidos: al reducir o incrementar la complejidad y contenido de una representación. Dehesa (2008) menciona que la transformación de un conjunto de características generales a específicas provoca que las nuevas visualizaciones usualmente contengan menos información que su fuente; este proceso sólo representa las características más relevantes de la situación real y es conocido como modelación. Por el contrario, si el proceso va de lo específico a lo general se generan modelos visuales que poseen mayor información que la original. De este modo, la visualización involucra actividades cognitivas como la interpretación y la abstracción.

Cuando se analiza una figura geométrica, debe hacerse un tratamiento del objeto matemático empleando el sentido de la vista. Sin embargo, independientemente de sus concepciones de la naturaleza y de la existencia de los conceptos matemáticos, diversos autores (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 1998, 1999a, 1999b, 2003; Presmeg, 2006; Phillips et al, 2010, entre otros) afirman que ese modo de conocimiento consiste en *ver*, debe realizarse ya sea por los sentidos, por la imaginación o por la inteligencia.

La revisión de artículos de investigación relacionados con la visualización (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 2003; Presmeg, 2006, entre otros) en educación matemática permitió identificar dos problemáticas centrales: la primera está relacionada con las dificultades teóricas que se tienen para poder explicar la función de la visualización de objetos matemáticos, y la segunda, trata sobre el rol que juega la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. Estas dos problemáticas se superponen y se intercalan entre ellas debido a que no es posible estudiar a una de ellas sin la presencia de la otra.

Las ideas surgidas de la visualización en matemáticas enriquecen los contenidos visuales, cuya utilización resulta provechosa, tanto en las tareas de representación como en el manejo de conceptos de esta disciplina. La visualización en ocasiones se emplea para describir representaciones visuales; en otras, se usa para definir las ideas o propiedades de cierta representación específica, o bien, para explicar la actividad cognitiva del sujeto cuando hace uso de representaciones visuales.

En matemáticas, comúnmente los profesores no dudan en afirmar ciertas características o cierta información a partir de las representaciones y normalmente emplean la frase "se ve sobre la figura o de acuerdo con la figura"; sin embargo, desde el punto de vista cognitivo el problema es saber si las representaciones discursivas como las frases de un anuncio o las secuencias de expresiones dentro de la escritura de un cálculo algebraico dan lugar al mismo tipo de aprehensión[7] visual que las representaciones no discursivas, como las imágenes o las figuras.

Es importante resaltar que existe una diferencia radical entre *ver* en geometría y *ver* dentro de los otros dominios en matemáticas. Para que éstas puedan funcionar como una visualización de verdad, hay que pasar de una simple visualización local a una situación de aprehensión global cualitativa. Una posible respuesta se refiere a la aprehensión de un mismo objeto geométrico. Un objeto requiere de dos tipos de aprehesión: la perceptual y la operatoria. La primera tiene que ver con la forma como se reconocen las unidades figurales en la representación geométrica dada (véase parágrafo 2.3.1). La segunda, donde se efectúan las modificaciones posibles de las relaciones de las partes con el todo de las unidades figurales reconocidas y de representación dada (véase parágrafo 2.3.4).

La NCTM (2000) menciona que los profesores deberían iniciar a sus alumnos en las representaciones matemáticas convencionales y ayudarles a utilizarlas eficazmente,

[7] El término aprehensión se entiende como una asimilación inmediata de ideas o conocimientos [de un objeto matemático].

basándose, cuando sea necesario, en las representaciones personales e idiosincrásicas de los propios alumnos. Las distintas representaciones de los mismos objetos matemáticos pueden transmitir diferente información; es importante seleccionar representaciones que convengan a las tareas concretas de que se trate.

Cuando se lleva a cabo un estudio de objetos que involucren explicaciones verbales, toda aprehensión de una representación discursiva implica la prioridad de una aprehensión sucesiva. Ello se debe no sólo a su carácter unidimensional, sino también a su composición de elementos discretos. Para efectuar esta actividad se requiere de un movimiento rápido de los puntos de fijación de la observación del orden de cinco o seis por segundo, dentro de una lectura normal. En cambio, la percepción de una figura implica, por el contrario, el predominio de la aprehensión simultánea la cual se impone a una primera identificación. Sin embargo, este predominio no excluye una aprehensión sucesiva, porque debe seguir siendo precisa o enriquecida por una exploración.

En una investigación reciente sobre visualización Phillips, Norris y Macnab (2010) recomiendan distinguir explícitamente: el objeto de visualización, la visualización introspectiva y la visualización interpretativa. Phillips et al (2010) definen dichos conceptos de la siguiente manera:

> Los objetos de visualización están relacionados con objetos físicos vistos e interpretados por una persona con el propósito de entender algo más que el objeto en él mismo
>
> La visualización introspectiva es una construcción imaginativa de una posible experiencia visual en ausencia de un objeto de visualización; centrada en objetos capturados por la mente.
>
> La visualización interpretativa involucra dar sentido (significado) a los objetos de visualización o visualizaciones introspectivas, en función de la red existente en la persona acerca de creencias, experiencias y entendimientos. (p. 26)

En la visualización se distinguen: objetos físicos (e.g., ilustraciones, animaciones, pantallas generadas por la computadora, etc.), así como “objetos mentales” almacenados y procesados en la mente en forma de esquemas mentales, imágenes mentales, construcciones y representaciones mentales. O bien, mediante funciones cognitivas manifestadas en la percepción visual, la manipulación y transformación de las representaciones visuales de la mente, concretando los modos abstractos de pensamiento e imaginando hechos. Phillips et al. (2010) enfatizan que estas distinciones son importantes para entender el contexto de las visualizaciones y poder establecer aplicaciones eficaces de visualización en el aula de matemáticas.

2.2.1. Representaciones geométricas

Las representaciones permiten vincular objetos con conceptos matemáticos. Para poder comunicar las representaciones internas se necesitan representaciones externas como el lenguaje, cualquier forma de representación hecha en papel o a través de una calculadora o computadora. Esta representación es producida como un soporte externo y se convierte en instrumento cognitivo.

A través de las representaciones se puede tener acceso a conceptos abstractos; muchas veces, difíciles de comprender. La acción de representar crea un espacio donde lo ausente se hace presente. De esta manera, mediante las representaciones se pueden capturar rasgos importantes y críticos de aquello representado; como las estructuras que presentan las figuras geométricas. Para generar comprensión matemática es necesario que el alumno logre diferenciar que la representación no agota el objeto matemático (Duval, 1998). Un mismo objeto puede tener diferentes representaciones. Cada representación es parcial respecto al concepto que representa, se debe considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación. Duval (ibidem) se refiere a que cada sistema de representación puede resaltar características diferentes de un objeto matemático.

La actividad matemática (principalmente en los cursos de geometría) se centra en el uso del registro (sistema de representación semiótica) de las figuras geométricas, en el cual se designa a dichos objetos y sus propiedades. La geometría requiere actividades cognitivas exigentes debido a los tratamientos efectuados en una representación. El tratamiento es una actividad considerada como la transformación de una representación a otra, pero en el mismo registro en el cual ha sido transformada. Un mismo objeto puede tener diferentes representaciones (Duval, 1998).

Los tratamientos figurales parecen proceder de leyes de organización de la percepción visual, y la práctica de un discurso teórico, es por ello que ambos tratamientos están enlazados por una vertiente común, la cual es la actividad matemática. Sin embargo, este lazo entre la percepción visual y el discurso teórico, resulta ser parte de un fenómeno nada próximo entre ambos tratamientos. La necesidad de una coordinación entre los tratamientos de registros figurales y discursivos, así como el distanciamiento entre los procesos matemáticos, generan los problemas de aprendizaje en la geometría. El registro de las figuras está dirigido por la percepción. Las principales fuentes de la dificultad del aprendizaje en la geometría están relacionadas con la correspondencia entre tratamientos pertinentes y no pertinentes en el interior de un mismo registro, así como la ausencia de coordinación entre los tratamientos de registros diferentes. Es aquí donde reside el punto estratégico del aprendizaje de la geometría, debido a que las actividades propuestas en la enseñanza no son suficientes para favorecerla.

La aproximación tanto psicológica en la percepción de las figuras como matemática de la lectura de los objetos, desconocen la diversidad de tratamientos propios del registro de las figuras geométricas. La ejecución de estos tratamientos, en parte no consciente, permite a las figuras cumplir su función heurística. La descripción de estos tratamientos no puede llegar a ser dominada sin un aprendizaje específico.

2.3. Visualización de figuras geométricas

De acuerdo con Duval (1999a, 2003), la pureza de la visión consiste en permitir una aprehensión simultánea, la cual al relacionarse con la visión se genera una aprehensión inmediata y directa de todo lo que es accesible en el campo de la percepción. La aprehensión visual es inmediata, y permite discriminar e identificar en menos de una décima de segundo los múltiples elementos del campo y sus relaciones. En este sentido, *ver* consiste en reconocer alguna característica a primera vista. El aprendizaje visual es directo, debido a que resulta de los procesos automáticos no conscientes, que dependen de todo eso que ha podido ser guardado en la memoria.

Las figuras dan lugar a una aprehensión simultánea e inmediata (Duval, 2003). La visualización permite no estar completamente seguros de una intuición del objeto que se representa. Ésta no puede entonces valer epistemológicamente como prueba o como evidencia. El problema específico que la visualización de figuras geométricas parece tener involucra a las mismas figuras y el espacio real percibido; existe una continuidad cognitiva y didáctica entre la visión real y la visualización geométrica. La visualización de objetos matemáticos obliga a considerar una ruptura y un salto importante que muchos de los alumnos no pueden abordar; comenzando por un enfoque simple e icónico de las figuras hasta que se mantiene una relación de semejanza con el objeto representado. La visualización entonces debe permitir distinguir e identificar, ya sea a primera vista o de un solo vistazo, la aprehensión simultánea de eso que está representado.

Cuando se analizan los objetos matemáticos, la visión presenta una limitación de perspectiva; siempre es relativa a un punto de vista determinado por la posición de lo que se observa. Los objetos vistos no tienen únicamente un solo aspecto. De manera que, si la visión es una aprehensión simultánea que tiene el valor de aprehensión global nunca es una aprehensión completa (Duval, 1999a, 2003). Un objeto geométrico requiere dos tipos de aprehensión: a) la perceptiva, en la cual se reconocen las unidades figurales (véase parágrafo 2.3.1) de la representación geométrica; b) operatoria, en la cual se efectúan las modificaciones posibles de las relaciones que constituyen las partes de la representación.

La aprehensión operativa de un objeto geométrico se relaciona con las modificaciones posibles que se pueden hacer sobre la figura, por ejemplo, separar, componer o combinar las unidades figurales elementales, o bien, redimensionar, trasladar o rotar la figura. Estas modificaciones generan operaciones particulares en el registro figural. Un tratamiento en el registro figural tiene que ver con la reconfiguración de un objeto geométrico. Duval (1999b) se refiere a la reconfiguración como “la operación que consiste en reorganizar una o varias figuras diferentes en una representación geométrica”. Al realizar este tratamiento el objeto geométrico se divide en sub-figuras, que permiten comparar o agrupar una representación global diferente de la original.

De acuerdo con Duval (2003), otra limitante se presenta debido a que la visión es intencionalmente dirigida; relacionada con el término “observar”, enfocada (en todo momento) sobre una pequeña región del campo de visión. Al ser la visión intencionalmente dirigida se presentan limitaciones relacionadas con la posición de la cabeza (perspectiva fija) y ligada con la focalización de la observación, compensadas evidentemente por dos tipos de movimiento: a) cambio de la posición del cuerpo; b) cambio continuo de los puntos fijos oculares por el balance del campo de visión.

Debido a que la visualización desencadena procesos automáticos no conscientes del sujeto –que dependen de todo eso que ha podido ser guardado en su memoria–, el aprendizaje visual es directo. Es común que los estudiantes establezcan relaciones perceptivas más que estructurales, en relación con la visualización de representaciones geométricas, debido al reconocimiento y aproximación de las formas. Es poco común que el alumno establezca relaciones estructurales a partir de los elementos constitutivos del objeto representado. El estudiante, de manera global, no visualiza las características geométricas inmersas en dicha representación.

2.3.1. Unidades constitutivas de una figura geométrica

La visualización es una representación que, a diferencia de la percepción, no se desarrolla dentro del espacio real en tercera dimensión (3D), sino que se proyecta sobre una superficie en segunda dimensión (2D). Esta reducción de 3D a 2D constituye una primera ruptura entre la visión real y la visualización (Duval, 2003). Los registros físicos de figuras o de gráficos demandan el uso de materiales como hoja de papel, pantalla de video, entre otros, a fin de lograr destacar alguna propiedad identificable en el campo perceptivo de las figuras en cuestión. Duval (1999a) afirma que la implantación de una mancha visible en la figura es el primer indicio de toda representación visual, y es susceptible de variaciones visuales; éstas pueden agruparse en dos categorías:

- Variación dimensional. Ligada con el número de dimensiones: 0 (punto), 1 (línea) o 2 (área).
- Variación cualitativa. Ligada con la forma (línea recta o curva; contorno abierto o cerrado de un área), tamaño, orientación, granulación, color, etcétera.

Distinguir estas dos categorías de representación permite definir las características de una figura; debido a que en todas ellas aparece como la combinación de valores para cada una de las variaciones visuales de los tipos dimensional y cualitativo, los cuales forman las unidades figurales elementales (véase Figura 2.4).

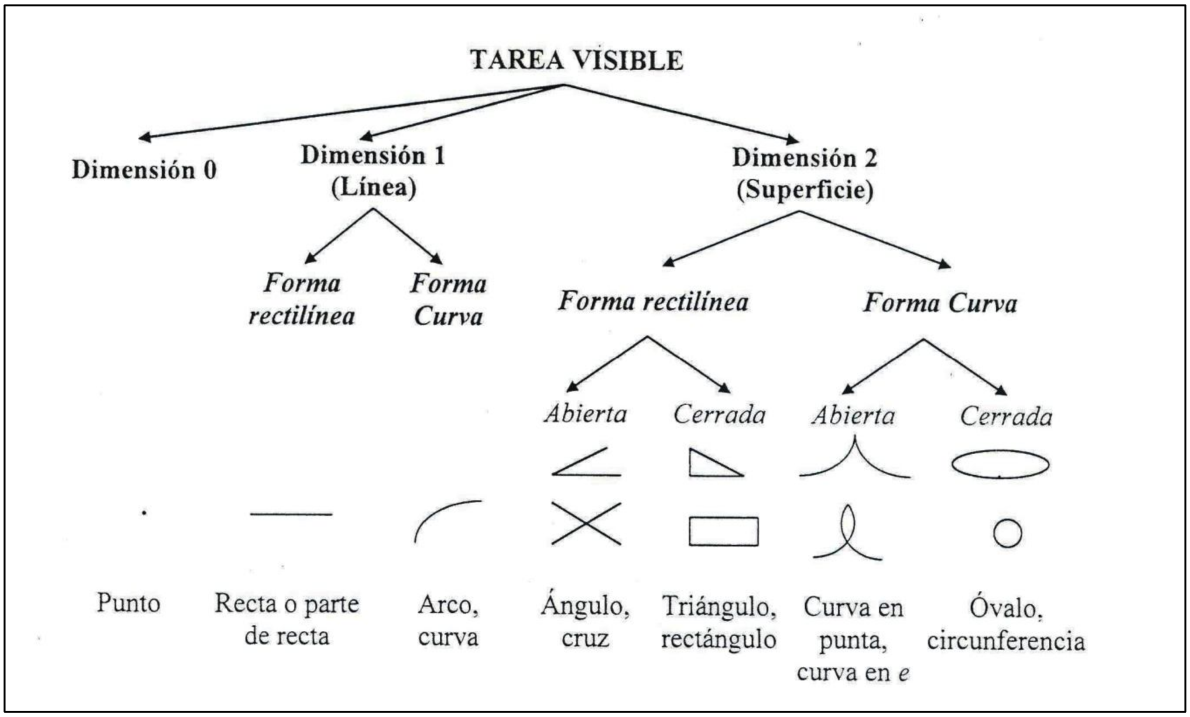

Figura 2.4. Clasificación de las unidades figurales elementales (Duval, 1999a, p.120).

En los sistemas de representación semiótica de una figura no todas las variables son pertinentes por igual, ya que en una figura geométrica existen menos variables visuales que en un gráfico. Un gráfico presenta orientación, color, granulación o tamaño; en cambio, en una figura geométrica no son pertinentes debido a que no son susceptibles de representar intrínsecamente relaciones proyectivas. Esta pertinencia no significa que las variables visuales no puedan ser utilizadas para mejorar la lectura de una figura. Sin embargo, el color no interviene más que como un subrayado. El tamaño y la orientación a veces se toman en consideración dentro de una figura geométrica, pero estas características implican añadir notaciones complementarias (flechas, ejes, graduaciones...) que no permiten sólo hablar de variables visuales. La variable cualitativa que surge, de manera intrínseca, determina una unidad de base representativa para las figuras geométricas es la variable visual de forma.

Estas unidades figurales caracterizan el registro respecto de las figuras geométricas, ya que cada una de ellas es siempre una configuración de al menos dos unidades figurales elementales. Por ejemplo, una circunferencia está formada por la unidad punto y la forma curva cerrada. Incluso, al hablar de un cuadrado, figura aparentemente reducida a una sola unidad figural de dimensión 2, puede ser considerada como configuración de cuatro unidades figurales de dimensión 1 (segmentos que forman los lados), debido a que son las relaciones (paralelismo, simetría, tangente…) entre las unidades figurales elementales las que constituyen el contenido pertinente de una figura geométrica. Es común que las figuras geométricas estén compuestas por numerosas unidades figurales elementales con valores diferentes (e.g., círculos, triángulos, cuadriláteros, puntos, etcétera).

Duval (1999b) menciona que las unidades figurales elementales de dimensión 2 (límite cerrado de un área) son estudiadas en geometría euclidiana como configuraciones de unidades figurales de dimensión 1 (forma de línea). Se debe contrastar estas unidades figurales con las definiciones de los objetos matemáticos que éstas representan para notar el cambio de dimensión que debe efectuarse cuando se pasa de la representación figural al discurso sobre los objetos matemáticos. En el registro de las figuras predomina la percepción de las unidades de dimensión 2 sobre las de dimensión inferior. Mientras que en el registro discursivo en lenguaje natural en que son definidos los objetos representados por la figura, predominan los objetos representados por las unidades figurales de dimensión 1 o 0. Si se analiza un paralelogramo, la secuencia de representaciones en la que cada una muestre dos unidades figurales de dimensión 1 vinculadas con la definición, por la propiedad de paralelismo o por la de la igualdad, se llega a una representación más adecuada desde el punto de vista de su posible interpretación, ya que una sola representación impone de golpe la imagen de la unidad de dimensión 2 (forma rectilínea cerrada).

En toda representación predominan las unidades de dimensión 2 sobre las de dimensión inferior. Los gestalistas atribuyen esta predominancia al cierre (o continuidad) de un contorno simple y cerrado de una representación geométrica cualquiera, por ejemplo, si en el plano se dibujan tres puntos no alineados el sujeto percibe un triángulo (cierre) y no tres puntos aislados. Del mismo modo, un cuadrado se percibe como una figura única (continuidad) y no como la unión de cuatro segmentos opuestos dos a dos. La utilización de figuras requiere un cambio continuo del número de dimensiones tomadas en consideración con la aprehensión perceptiva de las unidades figurales que se pueden distinguir de ciertas figuras geométricas.

2.3.2. Reconocimiento de representaciones geométricas

Las visualizaciones intencional y explícitamente producidas requieren que los trazos de las formas sean efectuados sobre un soporte material en segunda dimensión. Duval (2003) hace referencia a la identificación perceptiva de formas que tienen el reconocimiento de los objetos cuando entre unos y otros hay una relación de similitud requerida, de donde surgen dos criterios. El primer criterio es una simple similitud entre los contornos identificados y el perfil de los objetos representados, como si esos hubiesen servido de plantilla, módulo del tamaño ya que las formas se dibujan a menudo más pequeñas. De esta manera, se da la posibilidad de un reconocimiento no solamente visual, sino tangible de la forma.

La semejanza también puede imponerse a partir de la sola conservación de las relaciones topológicas entre las características típicas del objeto representado. Cuando las formas que corresponden a cada una de las características típicas son vistas como elementos de un todo no presentan semejanza, por lo tanto la visualización constituye un aporte específico de aprehensión global, en la cual permite reconstituir el rompecabezas de varios ambientes visuales que no se pueden nunca ver al mismo tiempo y se puede evocar mentalmente de aproximación en aproximación como cuando uno se mueve en la realidad.

Las visualizaciones icónicas son aquellas que funcionan sobre una relación de parecido con los objetos reales 3D/3D, ya sea una semejanza de contorno o de disposición de los elementos característicos de un todo o de un conjunto. Sin embargo, la ruptura de la semejanza del parecido entre las visualizaciones icónicas y la percepción de la realidad se hace únicamente al nivel de la comprensión. Duval (2003) reconoce que, para saber si las visualizaciones en matemáticas funcionan como representaciones icónicas, se debe considerar que la visualización matemática tiene relación con las unidades figurales que pueden ser puntos, contornos cerrados, planos, posiciones marcadas por pares de números (coordenadas), etc. Los objetos de la visualización matemática hacen ver que son de las organizaciones de las relaciones y que las unidades figurales difieren de los objetos cuya identificación puede variar.

El segundo criterio considera que la aprehensión de una visualización icónica no implica de ninguna manera la capacidad de producirla, mientras que la visualización matemática implica lo contrario; es decir, la capacidad de producirla. En otros términos, no hay necesidad de saber dibujar un objeto o ser medido y reconocerlo sobre el dibujo, por el contrario hay que ser capaz de construir una figura geométrica o una gráfica para ser medida y ver lo que está representando. Esta segunda diferencia es importante desde el punto de vista tanto didáctico como epistemológico. Entonces, no se puede olvidar que las figuras geométricas se construyen con la ayuda de instrumentos, para respetar las propiedades afines o métricas y para que las figuras muestren bien las relaciones que ellas tienen que visualizar. Fuera de las matemáticas, las visualizaciones son del tipo icónico, ya que funciona según los criterios de semejanza que hacen como una extensión de la percepción visual.

En la realidad hay un largo camino del reconocimiento icónico de las formas euclidianas elementales. La aprehensión matemática de las formas; llamado figura geométrica. Una figura geométrica consiste siempre de una configuración de varias formas, aunque se perciba como una forma simple, Observar matemáticamente una figura nunca se reduce a una simple percepción visual, sino que se coordina con varios tipos de aprehensión. Dentro de una figura geométrica como menciona Duval (2003), se deben distinguir varias formas, vistas como unidades figurales representativas posibles. Las figuras euclidianas más simples (círculo, triángulo, cuadrado,…) deben ser vistas como configuraciones de varias unidades figurales y nunca como una sola unidad figural. Las diferentes unidades figurales identificables dentro de una figura tienen raramente el mismo número de dimensión; y dificultan al alumno la visualización de un objeto matemático al no ser visto como configuraciones de varias unidades figurales.

Las formas que pueden ser distinguidas o reconocidas dentro de una figura geométrica son: 2D/2D (una sección plana, un triángulo, un rectángulo) o 1D (un segmento, una curva). El reconocimiento de las unidades figurales de dimensión diferente implica un cambio completo del campo de focalización visual dentro del cual da una observación cambiante. Hay un predominio de las formas 2D sobre las formas 1D; por ejemplo, un “cuadrado” nunca es visto espontáneamente como una configuración de cuatro unidades figurales 1D (cuatro segmentos), sino como una unidad figural simple 2D de una cierta manera que no puede descomponerse.

Esta variabilidad dimensional se convierte en un fenómeno esencial a tomar en cuenta cuando se trate de articular la visualización geométrica y un discurso matemático; sea por una simple descripción, explicación o razonamiento deductivo. Duval (2003) menciona que el sujeto debe ser capaz de efectuar simultáneamente dos focalizaciones; una en el campo constituido en las formas 2D y la otra dentro del campo constituido por las formas 1D o 0D, los dos campos se complementan perfectamente.

En efecto, el problema esencial de aprendizaje es el de aprender a *ver*, debido a que los alumnos deben ser capaces de enriquecer por sí mismos la figura inicial y de reconocer las figuras o sub-figuras pertinentes que se añadieron. En resumen, se trata de retomar una formulación general de extraer la información útil o el empleo de la misma formulación para la comprensión de los enunciados del problema, dentro de los cuales se debe considerar. Para una misma familia de figuras (rectángulo, paralelogramo, trapecio) el mismo tipo de problema matemático da lugar a diferencias en los enfoques y el rendimiento entre los estudiantes universitarios.

Todas las figuras no tienen el mismo valor heurístico: hay ciertas figuras que ayudan más que otras a descubrir la respuesta o la idea de la respuesta de una pregunta matemática, mientras que otras parecen más bien un obstáculo. Dicho de otra manera, la dificultad no solamente es imputable a los alumnos, sino a los factores internos del proceso de identificación y del tratamiento visual de las formas 2D o 3D. La exploración visual de una figura cuando una fase de búsqueda se hace siempre al nivel de las unidades figurales 2D aunque los razonamientos matemáticos exigen tomar en cuenta objetos representados por las unidades figurales 1D o 0D.

A partir de las unidades figurales, se puede suponer que una figura ayuda a descubrir la respuesta de una pregunta en función de lo que se supuso; lo que ofrece a las operaciones visuales de los tratamientos puramente figurales: consistente en transformaciones de organización perceptiva que se grava a simple vista y que impone la identificación de una configuración 2D en detrimento (destrucción leve o parcial) de otras posibles.

El problema que surge, a partir de las unidades figurales, concierne a la visibilidad de estas operaciones visuales que permiten la exploración heurística de una figura. Enriquecer una figura o extraer la información pertinente para responder una pregunta depende de la visibilidad de estas operaciones visuales. Las operaciones visuales permiten discernir (distinguir algo de otra cosa, señalando la diferencia que hay entre ellas) entre una configuración posible que no siempre es visible: una figura de salida no da necesariamente los buenos datos para ver los elementos de la respuesta de una pregunta. A menos que no se considere más que los conceptos y razonamientos matemáticos que implícita o explícitamente guían la visión; las figuras sirven solamente para ilustrar y para fijar los arraigamientos diferenciales de justificaciones matemáticas. En realidad, los tratamientos puramente figurativos dan a la figura su poder heurístico; permitiendo desarrollar las exploraciones de diferente razonamiento para probar una conjetura.

La observación matemática sobre las figuras, articula siempre una aprehensión perceptiva relacionada, a veces, con la "aprehensión discursiva". Esta articulación necesaria de aprehensión perceptiva y discursiva muestra que la utilización de figuras en geometría nunca surge de la visualización pura; requiere, por el contrario, la coordinación de al menos dos registros de representación: a) el de las figuras propiamente dichas; b) el de las representaciones que dan lugar a una aprehensión simultánea de formas en dimensiones diferentes; c) el del discurso que enuncia las propiedades a partir de las cuales se puede por deducción o por cálculo, derivar de otras propiedades, en esta característica, la identificación debe hacerse a partir de un discurso y no solamente de lo que se ve.

Por la coherencia o incoherencia didáctica del uso de las figuras en geometría la heterogeneidad de sus roles, así como, las ambivalencias existentes, surge la necesidad de un aprendizaje para el adecuado funcionamiento representacional de las figuras. Debido a que las representaciones visuales no son transparentes para los estudiantes, es necesario que ellos tengan conocimiento considerable de los símbolos y convenciones de las representaciones para que éstas adquieran y tengan sentido para los alumnos. A fin de que el estudiante comprenda y utilice de forma pertinente representaciones geométricas, debe entender el significado de las rectas, puntas de flecha, marcadores de ángulos, números y variables (Phillips et al., 2012).

2.3.3. Reconfiguración de una figura geométrica

La reconfiguración es un tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente. En esta operación interviene la productividad heurística de las figuras geométricas. Las sub-figuras son el resultado de una división de la figura geométrica que depende de las necesidades de un problema propuesto: puede consistir en una unidad figural o en una combinación de unidades (Duval 1999a). Es importante no confundir la unidad figural elemental y la sub-figura. Las unidades figurales elementales son las formas de base en la cuales las figuras pueden ser analizadas (véase parágrafo 2.3.1).

Independientemente de la variación dimensional de las unidades figurales; que pueden reconocerse dentro de una figura, sea cual sea, hay otras transformaciones de la figura de salida que pueden realizarse con el objeto de responder o encontrar la respuesta de una pregunta. Habitualmente, se habla de enriquecer la figura de salida añadiendo nuevos trazos de rectas, segmentos, círculos… sobre la figura de salida. Se trata, entonces, de transformar una figura en otra que conserve la figura inicial como una sub-figura para hacer aparecer la razón de un resultado.

2.3.4. Representaciones mentales

Duval (1999a) se refiere a las representaciones semióticas como una manera en que el individuo externa sus representaciones mentales, de forma que se hacen accesibles o visibles para los demás. Las representaciones mentales permiten una mirada del objeto en ausencia total de significante perceptible (son identificadas con las “imágenes mentales”).

Además de las representaciones semióticas, existen las visualizaciones estrictamente internas que prolongan y alargan el campo actual de percepción para cada individuo. Se puede recordar visualmente casi todo lo que se ha podido *ver* u observar. En esta actividad espontánea e interna, el reconocimiento emerge o surge automáticamente e inmediatamente de la memoria individual (Duval, 2003). La naturaleza de la actividad matemática implica el manejo de los objetos matemáticos basándose en representaciones mentales, de todo aquel conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre: el objeto y la situación. Las representaciones mentales, también conocidas como internas, son aquellas que ocupan un lugar en la mente del sujeto (Tamayo, 2006).

Las representaciones mentales cubren un dominio más amplio que el de las imágenes; es necesario incorporar en ellas no sólo los conceptos, las nociones, las ideas, sino también las creencias y las fantasías, puesto que todas las proyecciones más difusas y más globales que reflejan los conocimientos, y los valores que un individuo comparte con su medio. Cuando se exteriorizan las representaciones mentales existe una falta de dependencia con lo que se desea representar y con la misma forma de representarlo. De acuerdo con Duval (1999a), puede haber una gran diferencia entre las representaciones mentales de un sujeto y las representaciones semióticas que él produce para expresar sus representaciones mentales (debido a la independencia de las funciones). La diferencia esencial que separa las representaciones semióticas de las representaciones mentales es que las primeras presentan un grado de libertad, necesario a todo tratamiento de la información, que las segundas no presentan.

2.4. Visualización de objetos matemáticos con ayuda tecnológica

El rápido avance de la tecnología ha influido, en las últimas décadas, en la naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Diversos autores (e.g., Arcavi, 2003; Haciomeroglu, 2011; Hitt, 1995; Zimmermann & Cunningham, 1991; entre otros) consideran que a través de la tecnología puede potenciarse la implicación de los alumnos en las ideas matemáticas abstractas y en su dominio.

En el contexto de la incorporación de la tecnología en la educación matemática, se afirma que con el uso de las computadoras y las calculadoras se incrementa la capacidad de “abstracción” del estudiante para comprender conceptos o “visualizar” comportamientos complejos (Zimmermann & Cunningham, 1991). Para Hitt (1995), promover las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas permite realizar simulaciones, mediante las cuales se construye un *puente (enlace)* entre las ideas intuitivas de un alumno y los conceptos formales. En esta apreciación, la calculadora y la computadora son herramientas importantes en la enseñanza de las matemáticas.

Las calculadoras y los computadores también pueden considerarse como herramientas de visualización que Zimmermann y Cunningham (1991) define así: "Tomamos el término visualización para describir los procesos de producción o uso de representaciones geométricas o gráficas de conceptos matemáticos, principios o problemas, ya sea dibujados a mano o generados por computadora" (p. 1).

La importancia del uso de las herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas se mencionan en los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000, p. 26), "la tecnología puede ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas. Por ejemplo, mediante calculadoras y computadoras [los estudiantes] pueden examinar más representaciones o ejemplos que los que son posibles a mano, y así, pueden formular conjeturas fácilmente". El empleo de herramientas computacionales en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes no solamente facilita la identificación e implementación de estrategias de resolución, sino también potencia el repertorio de las heurísticas (Santos, 2007).

Diversos programas informáticos, por ejemplo: Cabri-Geometry, Cinderella, Geometer's Sketchpad, C.a.R. (Compass and Ruler), Geogebra, entre otros, se denominan Software de Geometría Dinámica (SGD). El uso de estos paquetes computacionales potencia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y en particular de la geometría tanto euclidiana como analítica. Arcavi (2003) afirma que:

> Los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones. (p. 26)

Los SGD permiten construir objetos geométricos. Una vez construidos pueden manipularse empleando las herramientas con que cuenta el SGD, o bien, trasladarlos, girarlos, y estudiar con estos objetos conceptos como los de simetría, reflexión, homotecia, etc. Además, con ellos también es posible medir los lados de las figuras, representar las ecuaciones que les corresponden, comprobar sus propiedades geométricas y realizar cálculos vinculados con sus propiedades.

Cuando se visualizan figuras en ambiente de lápiz-y-papel, la representación geométrica se presenta en forma estática (figura geométrica estática)[8]. Estas figuras provocan en el alumno dificultades para descubrir relaciones estructurales (explícitas e implícitas) de los objetos geométricos. Al analizar representaciones geométricas estáticas mediante un SGD, el alumno puede generar las representaciones estructurales y no sólo identifica sus propiedades, sino que puede interactuar y transformar esas construcciones a través de las herramientas con que cuenta el software.

El uso de algún SGD facilita la incorporación de la visualización en la enseñanza de conceptos geométricos, pues se cuenta con representaciones dinámicas[9] e incluso con visualizaciones interactivas. Con las herramientas propias de los SGD se puede medir, agregar trazos auxiliares o simplemente explorar la figura. Otra ventaja que tiene el uso de representaciones dinámicas es que permite la creación y manipulación de construcciones geométricas, cuyo trazado o construcción es modificable en forma automática (si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, B puede ajustarse y actualizarse; así se mantienen las relaciones correspondientes con A). Un atributo importante del SGD es su versatilidad de uso, el cual estimula el interés y la participación de los estudiantes cuando resuelven problemas geométricos.

La NCTM (2000) menciona que las herramientas tecnológicas ayudan al aprendizaje mediante la retroalimentación que la tecnología suministra. Por ejemplo: al arrastrar un nodo en un entorno de geometría dinámica y observar cómo la imagen de la pantalla cambia, o al modificar las fórmulas en la hoja de cálculo y detectar cómo se modifican los valores dependientes. La tecnología también permite centrar la atención sobre los objetos

[8] Se considera una figura geométrica estática como aquella representación geométrica que de acuerdo con las condiciones de su composición no presenta ninguna variación, es decir, no sufre cambios en su forma y dimensión.

[9] Se considera una figura geométrica dinámica, aquella representación de un objeto geométrico que de acuerdo con su construcción al manipular uno de sus elementos (punto, línea, ángulo…) se tiene una nueva figura que mantiene una relación con las características de la figura original, ya que las propiedades geométricas permanecen inalterables.

que aparecen en pantalla y sobre los efectos de las posibles transformaciones dinámicas que el programa permite.

Haciomeroglu (2011) menciona que la visualización, empleando modelos dinámicos, permite a los estudiantes entender los conceptos o significados que pueden ser extraídos de las representaciones y, por lo tanto, juega un papel importante para el desarrollo del pensamiento analítico; que por sí solo se logra de manera limitada en el pensamiento de los estudiantes refiriéndose al ambiente de lápiz-y-papel. El uso de SGD puede funcionar como una herramienta de gran utilidad para que los estudiantes se enganchen en procesos de búsqueda y formulación de conjeturas, relaciones y argumentos o justificaciones matemáticas. En particular, interesa destacar la importancia de la tecnología en los procesos que enfrentan los estudiantes al visualizar, conjeturar, formular y utilizar argumentos matemáticos.

Las exploraciones que se pueden realizar en ambientes dinámicos facilitan a los estudiantes la manipulación de las representaciones figurales de los objetos geométricos, mediante herramientas como: a) medida de segmentos o distancias, ángulos y áreas; b) generación de trazos auxiliares, a través de rectas perpendiculares, rectas paralelas, mediatrices, bisectrices; c) creación de puntos, rectas o intersección de dos objetos; entre otras. El uso de un software de geometría dinámica hace posible la interacción con los objetos geométricos sin modificar sus características, lo cual permite a los estudiantes descubrir propiedades, proponer conjeturas y validarlas.

La principal característica del SGD es la capacidad de adaptación que se refleja en la operación de arrastre[10], y permite la manipulación directa y continua de los objetos matemáticos. La operación de arrastre introduce algunos aspectos que no aparecen cuando se trabaja con regla y compás, y que puede ser aprovechada por los alumnos de diferentes maneras. Larios (2005) se refiere al SGD como:

---

[10] El arrastre es conocido en lengua inglesa como *draggin*, se refiere a la acción de mover mediante el cursor objetos. Los objetos arrastrados en los SGD son habitualmente puntos y rectas, pero también pueden arrastrarse otro tipo de objetos. Mediante el arrastre se deforman las figuras, y de acuerdo con su construcción se mantienen sus relaciones estructurales.

Un medio para explorar y generar diferentes casos de las construcciones realizadas.

Un espacio para observar propiedades que resultan invariantes a pesar del cambio de la forma, lo cual está relacionado con el punto anterior, pero que implica un desarrollo cognitivo mayor.

Un medio para determinar si una construcción está bien realizada por medio del examen de arrastre.

Una utilización como herramienta externa o física que proporciona la posibilidad de dibujar 'a mano alzada' una construcción o 'acomodar' sus elementos para que el resultado en la pantalla visualmente cumpla con los requisitos pedidos en la tarea llevada a cabo. (p. 145)

Mediante un SGD es posible construir significados de los objetos geométricos a través de la transformación continua de los dibujos, los cuales son diferentes de los significados construidos al utilizar el ambiente de papel-y-lápiz. El SGD usado de esta manera, se convierte en un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico y el usuario.

Además, el mismo software hace necesaria que la diferencia entre dibujo y figura se destaque, pues en este ambiente las construcciones geométricas se ejecutan con base en las relaciones lógicas entre los objetos y no sólo sobre los aspectos figurales de las mismas, lo cual permite que al momento de hacer una transformación de una construcción por medio del arrastre, las propiedades geométricas (más que la información figural) se mantengan invariantes. El uso de este tipo de herramienta para el diseño de ambientes se puede convertir en un medio que propicie el desarrollo del pensamiento matemático relacionado con la Geometría y abre la posibilidad al alumno de generalizar situaciones y buscar casos particulares para construcciones realizadas (Larios, 2005).

2.5. Consideraciones de los elementos teóricos

Los elementos teóricos plasmados en esta sección proporcionan las herramientas para explicar los factores que influyen en el proceso de reconocimiento de objetos matemáticos y la influencia de la visualización de objetos matemáticos empleando el ambiente tecnológico como complemento del ambiente de lápiz-y-papel. Se explican a continuación algunos aspectos de la investigación, relacionados con los elementos teóricos:

1. La teoría de representaciones de Duval (1998, 1999a, 1999b, 2003, 2006) permite comprender las dificultades cognitivas de los alumnos cuando se realizan actividades que involucran visualización de objetos matemáticos. Esta teoría guía la investigación como parte fundamental del trabajo tanto en el ambiente de lápiz-y-papel como en el ambiente tecnológico.

2. Los trabajos de investigación, en los cuales se exponen el uso de las herramientas tecnológicas para la visualización de objetos matemáticos (e.g., Arcavi, 2003; Haciomeroglu, 2011; Hitt, 1995; Zimmermann & Cunningham, 1991; Larios, 2005, entre otros) permiten identificar el papel de la tecnología y su influencia en la visualización de las representaciones geométricas. Además, proporciona elementos que permiten explicar los obstáculos ligados con la naturaleza de la representación geométrica en ambientes tecnológicos y su complejidad en la obtención de conjeturas basadas en la teoría de representaciones de Duval.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este apartado se describe la metodología, la cual permite guiar la investigación reportada en el presente documento. En ella se abordan las características de los sujetos participantes, la tecnología empleada, el diseño y la selección de los instrumentos usados para el desarrollo de la investigación, así como los procedimientos para la recolección de datos.

En primer lugar, se establece el planteamiento del problema, el cual permite definir el marco teórico-conceptual que sirve como punto de partida para esta investigación. En segundo lugar, se desarrolla la etapa denominada orientación teórica constituida por el diseño y planificación de los instrumentos que se ejecutan en la siguiente fase, así como la selección e instrucción de la herramienta tecnológica empleada. En tercer lugar, se expone la fase consistente en la descripción y análisis de la información, en la cual se realiza la recolección de la información, se analizan los resultados y permite la formulación de las conclusiones de esta investigación.

3.2. Etapas de la investigación

A continuación se presenta una figura que incluye las etapas desarrolladas a lo largo de la investigación, además, se describen los elementos que las constituyen (véase Figura 3.1). La figura muestra el proceso realizado en este estudio, consistente en tres etapas fundamentales: a) problema de investigación; b) orientación teórica; c) descripción y análisis de datos.

Cada etapa es trascendental para el desarrollo de la investigación, debido a que están sustentadas e inmersas en ellas. El planteamiento del problema y la etapa de revisión de la literatura son fundamentales por ser el sustento de las siguientes fases, y establece el vinculo de los elementos teóricos dados por los distintos autores (e.g. Arcavi, 2003; Duval, 1998, 1999a, 1999b, 2003, 2006; Haciomeroglu, 2011; Hitt, 1995; Presmeg, 2006; Phillips et al, 2010; Zimmermann y Cunningham, 1991; entre otros) quienes guían la descripción y análisis de la información recabada a partir del diseño y planificación de los instrumentos utilizados durante la fase de orientación teórica.

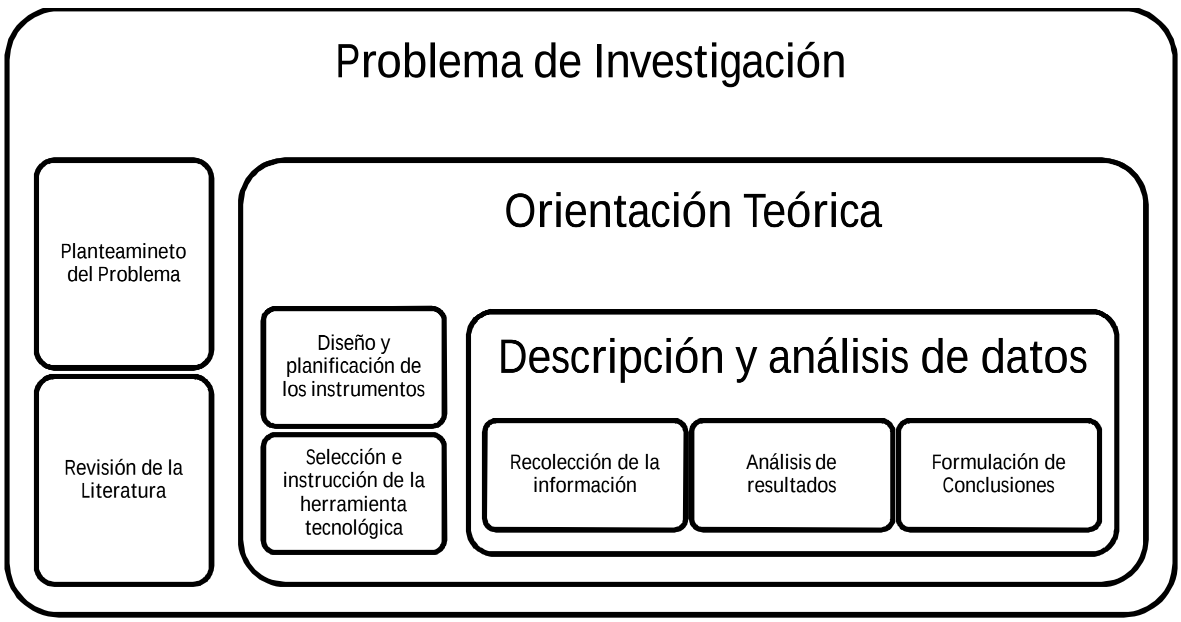

Figura 3.1. Etapas en el desarrollo de la investigación.

Para alcanzar los objetivos planteados y así dar respuesta a las preguntas de investigación, este trabajo se desarrolló en tres fases; cada fase está dividida en etapas. A continuación, se exponen las fases con sus etapas correspondientes.

3.2.1. Etapa 1. Problema de investigación

Esta fase corresponde a: 1) planteamiento del problema, en el cual se establecen las metas, alcances y pasos a seguir en la investigación; 2) revisión de la literatura, en la cual se establece el sustento teórico de la investigación

3.2.2. Etapa 2. Orientación Teórica

Esta fase corresponde a: 1) diseño y planificación de los instrumentos, en la cual se elaboran los instrumentos, de acuerdo con los propósitos de la investigación, con los cuales se pretende realizar la recolección de datos; 2) selección e instrucción de la herramienta tecnológica, en la cual se define el software a emplear para el estudio y se inicia con la instrucción del mismo a los sujetos participantes.

3.2.3. Etapa 3. Descripción y análisis de datos

Esta fase corresponde a: 1) recolección de la información, en la cual se realiza la implementación de las Actividades diseñadas en la fase anterior; 2) análisis de resultados, en esta etapa se realiza el análisis de datos de acuerdo con el marco teórico; 3) formulación de conclusiones, en la cual se elabora el reporte de investigación que incluye las conclusiones obtenidas a lo largo del trabajo.

La metodología que se pretende seguir en el diseño, organización y desarrollo de esta investigación ha sido seleccionada en concordancia con el propósito del trabajo. La revisión de la literatura permitió tomar en cuenta ideas para el diseño de las Actividades. Durante la etapa de análisis de resultados se consolidan los elementos pertenecientes al marco teórico, debido a que se fortalece la orientación teórica con la finalidad de dar una mejor explicación a los resultados obtenidos. Después del análisis de resultados se generan reflexiones finales y se dan respuesta a las preguntas de investigación, además, como resultado de esta investigación se formulan nuevas preguntas y perspectivas de trabajo que deben ser objeto de investigación y estudio.

3.3. Tipo de investigación

La presente investigación es de tipo cualitativo, la cual está basada en principios teóricos empleando métodos de recolección de datos, con el propósito de explorar las relaciones sociales y describir la realidad tal como la experimentan sus correspondientes protagonistas (Quecedo & Castaño, 2002). Esta investigación es descriptiva en cuanto a su finalidad; como se evidencia en el siguiente Capítulo se narra con detalle el trabajo realizado por los estudiantes en cada una de las Actividades. Con base en esta descripción, se analizan dichas respuestas, se interpretan y, en su momento, se trata de dar explicaciones del porqué de estas visualizaciones basadas en el marco teórico-conceptual.

En el presente trabajo existe una componente cualitativa mostrada en las técnicas usadas para la recolección de la información y la manera como ésta se analiza. La componente cualitativa permite determinar la cantidad y variedad de respuestas encontradas; estableciendo que tan generalizados se encuentran los tipos de visualización.

A partir de la información, tanto cualitativa como cuantitativa, se trata de dar una explicación rica y profunda de lo encontrado en las Actividades realizadas por los alumnos con base en el marco teórico. Conforme al propósito de la investigación, se busca comparar, describir y explicar el procesamiento cognitivo de los estudiantes ante la situación sometida a estudio; también, la investigación es de naturaleza comparativa, descriptiva e interpretativa

3.4. Descripción y selección de la población

La investigación se llevó a cabo con un grupo de 12 alumnos que cursaban el quinto año de bachillerato[11]. El grupo estaba constituido por cinco mujeres y siete hombres. Con ellos se formaron seis equipos de dos integrantes cada uno; formados por ellos mismos, ya que se dio oportunidad a que los alumnos eligieran la pareja con la que abordarían las Actividades diseñadas. La edad de los estudiantes osciló entre los 16 y 18 años de edad. Los alumnos disponían de conocimientos elementales de geometría y no tenían experiencia alguna con programas informáticos enfocados en la enseñanza de las matemáticas. La selección de los participantes la realizó el profesor del grupo, quién, de acuerdo con su criterio, eligió alumnos con mejor rendimiento y con disposición de trabajar en equipo y participar en el estudio. Se instruyó a los participantes sobre el uso básico de la herramienta tecnológica (Geogebra), para que pudieran emplearla en las tareas propuestas para cada una de las Actividades diseñadas. El trabajo con el grupo se llevó a cabo en cinco sesiones de 50 minutos cada una.

[11] De acuerdo con la NCTM el quinto grado de bachillerato es equivalente al grado 11 de la escuela secundaria.

3.5. Selección e instrucción de la herramienta tecnológica

Dado que uno de los objetivos de esta investigación consiste en determinar la influencia de la visualización de objetos matemáticos empleando alguna de las herramientas tecnológicas actuales como complemento en el trabajo de visualización tradicional, se debe emplear una herramienta tecnológica que cumpla con las siguientes características: a) gratuita (no es necesario adquirir alguna licencia para su uso); b) amigable (fácil de usar); c) presente características propias de los SGD; d) accesibilidad a los objetos matemáticos (conexión entre los objetos algebraicos y geométricos).

La herramienta tecnológica que cumple con estas características principales es el SGD denominado Geogebra. Este software es un programa dinámico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles. Combina de una manera dinámica, geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas y planillas, y hojas de datos dinámicamente vinculadas.

La importancia del uso de Geogebra para esta investigación es que permite abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a los estudiantes a visualizar objetos matemáticos complicados de afrontar desde un dibujo estático. También, permite realizar construcciones de manera fácil y rápida, con un trazado exacto y real, que además, revelan las relaciones existentes entre la figura construida, y permite la transformación dinámica de los objetos que componen dicha construcción. Debido a que se empleó un SGD, fue necesario un proceso de instrucción (dirigida a los alumnos) con el fin de conocer, explorar y manipular las herramientas con que cuenta el software. Esta instrucción fue previa a la realización de las Actividades consideradas en esta investigación.

En el proceso de instrucción de la herramienta tecnológica se realizaron Actividades que permitieron a los estudiantes conocer las posibilidades y limitantes que presenta el software Geogebra. A través de Actividades, los alumnos conocieron y usaron los menús y las herramientas con que cuenta el software seleccionado; por ejemplo, trabajaron con la medición, tanto de longitudes y distancias como de áreas y ángulos. Además, hicieron uso de algunas herramientas de construcción como recta perpendicular, recta paralela, punto medio, intersección de dos objetos, así como la herramienta elige y mueve, la cual es una herramienta básica, pero importante ya que permite una manipulación directa y continua de los objetos matemáticos.

3.6. Diseño y selección de las Actividades

Para cumplir los objetivos planteados en esta investigación fue necesario diseñar Actividades que permitieran a los alumnos desarrollar habilidades encaminadas al análisis de propiedades de las figuras geométricas; en estas representaciones es trascendental identificar características y relaciones geométricas, que permitan establecer conjeturas respecto a su construcción.

En la investigación, se consideraron los siguientes aspectos para el diseño y selección de las Actividades: a) Nivel académico. El propósito fue diseñar (para los estudiantes) tareas significativas, accesibles e interesantes y que no resultaran triviales ni imposibles de resolver. b) Uso de la herramienta tecnológica. Se buscó realizar Actividades que pudieran ser llevadas a cabo en el ambiente tecnológico, con el fin de que el alumno utilizando el SGD seleccionado y mediante sus herramientas propias del software, visualizara los objetos matemáticos en estudio. c) Contenidos matemáticos. Cada Actividad se relacionó con los contenidos temáticos abordados en cursos previos de geometría: condiciones de perpendicularidad y paralelismo, ángulos, propiedades del círculo y de triángulos, etcétera.

El diseño de cada Actividad involucraba un primer análisis empleando el ambiente de lápiz-y-papel, enseguida, se pretendía que los alumnos mediante el uso del software exploraran, analizaran y validaran los resultados previos. Las Actividades implementadas motivaron a los estudiantes en la comprensión, asimilación y análisis de las representaciones geométricas, y promovieron la generación de conjeturas (en ambiente de lápiz-y-papel), además, estas representaciones pueden ser llevadas al ambiente tecnológico para realizar una exploración dinámica. Una parte de las Actividades fueron realizadas empleando el ambiente tecnológico, ya que a través de las herramientas tecnológicas se pueden diseñar Actividades y ambientes que ayuden a los alumnos a estudiar situaciones matemáticas sin tener que hacer mucho énfasis en procesos mecánicos que se le pueden dejar a la herramienta computacional. El uso de las herramientas permite generar un espacio para la reflexión y el desarrollo de conceptos, dejando a un lado la mecanización de procedimientos.

Dicho ambiente permite a los alumnos validar las visualizaciones realizadas y promovieron la utilización de diferentes estrategias de solución y la generación de nuevas conjeturas. Marmolejo G. y Vega, M. (2012) mencionan que: “las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras se encuentran íntimamente relacionadas con la gama de modificaciones posibles que se pueden realizar sobre ellas” (p.12).

Para que una representación cumpla con su función heurística, Duval (1999b) menciona que se deben realizar los siguientes tratamientos: a) determinación de las unidades de base constitutivas de este registro; b) posibilidades de su articulación en representaciones geométricas; c) modificación de las representaciones geométricas obtenidas. Estos tratamientos se relacionan con modificaciones de las relaciones de las partes con el todo: visuales o posicionales de una representación geométrica, las cuales pueden realizarse física o mentalmente sin estar estrechamente ligados con el conocimiento matemático.

En síntesis, para el diseño y selección de las Actividades se intentó incluir problemas de exploración y búsqueda, necesarios para la formulación de conceptos, así como la comunicación y afirmación de sus observaciones. Las Actividades planteadas tienen como propósito la exploración y generación de casos particulares para conjeturar y encontrar una generalización de la figura mostrada.

El desarrollo de las Actividades se realizó de acuerdo con las siguientes etapas:

a) Lectura de la Actividad (por parte del estudiante) y aclaraciones del trabajo a desarrollar (por parte del investigador).

b) Exploración y análisis de la figura geométrica en ambiente de lápiz-y-papel de acuerdo con las preguntas que guiaron la Actividad.

c) Elaboración de primeras conjeturas de acuerdo con el análisis realizado de la figura en ambiente de lápiz-y-papel.

d) Exploración y análisis de la figura geométrica en ambiente tecnológico (Geogebra) para verificar y validar resultados previos.

e) Validación y generalización de conjeturas de acuerdo con las características que presenta la figura geométrica.

3.6.1. Actividades implementadas

Las Actividades implementadas fueron seleccionadas de forma que los alumnos requirieran para su análisis, formulación y resolución, el descubrimiento de invariantes, tareas de construcción, establecimiento de conjeturas, así como descripción y explicación de los objetos matemáticos visualizados, considerando los dos ambientes (lápiz-y-papel y tecnológico, en ese orden). Las Actividades son el punto medular de la investigación, ya que permiten explorar y observar las estrategias de visualización utilizadas por los estudiantes.

El diseño de las Actividades incluye el análisis y la visualización de alguna figura geométrica. Diversos estudios (e.g., Arcavi, 2003; Haciomeroglu, 2011; Marmolejo G. y Vega, M., 2012; Hitt, 1995; entre otros) han demostrado que mediante representaciones geométricas se estimula el pensamiento productivo y motivan a los estudiantes en la comprensión, asimilación y análisis de conceptos matemáticos abstractos.

La inclusión de la herramienta tecnológica en las Actividades permite al alumno manipular, transformar, comprobar y en definitiva, conjeturar las propiedades visualizadas en las figuras geométricas, verificándolas y validándolas a partir del trabajo previo en el ambiente de lápiz-y-papel. Zimmermann y Cunningham (1991) indican que lo que interesa en la visualización matemática es la capacidad del estudiante para formular y utilizar una representación apropiada [en ambientes de lápiz-y-papel o tecnológico] para representar un problema matemático y utilizarla como ayuda para resolver el problema.

A continuación, se transcriben las Actividades implementadas en este estudio.

3.6.1.1. Actividad 1

A) Ambiente de lápiz-y-papel

La Figura 3.2 representa el esbozo del rectángulo ABCD y de la circunferencia de centro A que corta al lado AD del rectángulo en el punto E.

1) Usa la Figura 3.2 para calcular la longitud de ED. Explica tu procedimiento

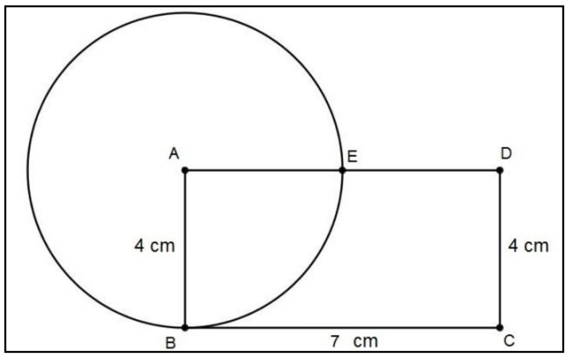

Figura 3.2. Primera Actividad.

B) Ambiente Tecnológico

1) Empleando el software Geogebra reproduce la Figura 3.2 y calcula la longitud del segmento ED.

2) Compara el resultado obtenido en Geogebra con el anterior, ¿coinciden? Explica por qué

3) ¿Cómo influye la forma de calcular la longitud del segmento ED con el software comparado con lápiz-y-papel? Explica

3.6.1.2. Actividad 2

A) Ambiente de lápiz-y-papel

La Figura 3.3 muestra dos triángulos de base AB comprendidos entre dos rectas paralelas.

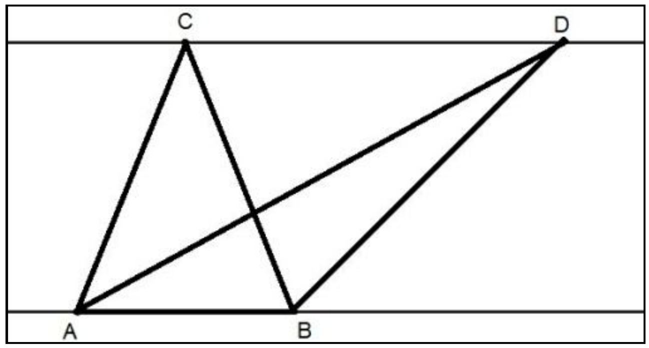

Figura 3.3. Segunda Actividad.

1) ¿Cuál es el área del triángulo ABC? Anota tu procedimiento

2) ¿Cuál es el área del triángulo ABD? Anota tu procedimiento

3) Al comparar las áreas de los triángulos ABC y ABD, ¿son iguales o distintas? ¿A qué se debe?

B) Ambiente Tecnológico

1) Empleando Geogebra construye la Figura 3.3. Calcula el área de los triángulos ABC y ABD. Los resultados ¿son iguales o distintos? ¿A qué se debe? Explica

2) Mueve el punto D sobre la recta paralela. Desplaza el punto C “lo más posible” hacia la derecha o izquierda, ¿cómo son las áreas de los triángulos ABC y ABD? ¿A qué se debe?

3) ¿Cómo son las áreas de los triángulos ABC y ABD calculadas con Geogebra comparadas con el cálculo en lápiz-y-papel? Explica

3.6.1.3. Actividad 3

A) Ambiente de lápiz-y-papel

La Figura 3.4 muestra el triángulo rectángulo ABC. Los puntos medios X, Y y Z de cada lado del triángulo ABC forman el triángulo XYZ.

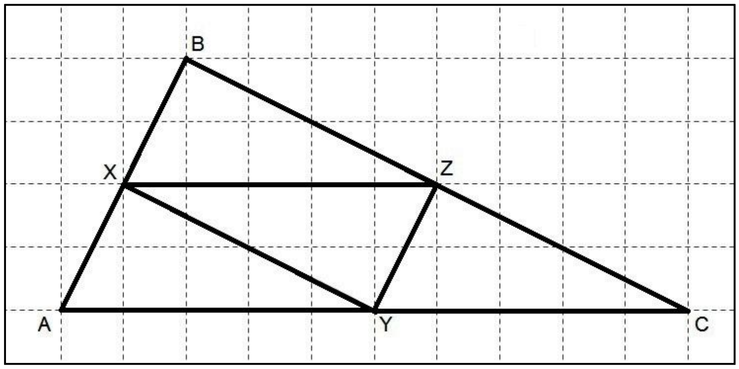

Figura 3.4. Tercera Actividad.

1) Calcula el área del triángulo ABC. Anota tu procedimiento

2) Calcula el área del triángulo XYZ. Anota tu procedimiento

3) Calcula las áreas de los triángulos AXY, YZC y XBZ. Explica cómo las calculaste

4) ¿Cómo son los triángulos AXY, YZC y XBZ comparado con el triángulo XYZ? Explica

5) ¿Qué relación existe entre las áreas de los triángulos ABC y XYZ? Explica

6) Explica porqué razón esta relación puede o no mantenerse para cualquier triángulo

B) Ambiente Tecnológico

1) Empleando el software Geogebra, abre el archivo que contiene la Figura 3.4 y calcula las siguientes áreas de los triángulos AXY, YZC, XBZ, XYZ y ABC usando la herramienta Área. Anota los resultados a continuación

2) Compara los resultados obtenidos en lápiz-y-papel con los obtenidos con Geogebra ¿son iguales o distintos? ¿A qué se debe? Explica

3) Encuentra la relación que hay entre las áreas los triángulos ABC y XYZ. Explica tu procedimiento

4) Con el software Geogebra mueve los puntos A, B y C hacia cualquier posición del plano con el fin de tener un nuevo triángulo, cuya longitud de sus lados sean diferentes entre sí. Calcula las siguientes áreas de los triángulos usando la herramienta Área de Geogebra. Anota tus resultados en el renglón 1 de la siguiente tabla. Repite los pasos anteriores para los renglones 2 y 3 a fin de tomar la medida de las áreas de triángulos con diferentes longitudes de sus lados.

Área de los triángulos					
Triangulo	AXY	YZC	XBZ	XYZ	ABC
1					
2					
3					

5) Determina una relación entre las áreas de los triángulos anteriores respecto al triángulo ABC. Explica

6) De acuerdo con los cálculos obtenidos. Explica porqué razón esta relación puede o no mantenerse para cualquier triángulo

3.6.1.4. Actividad 4

A) Ambiente de lápiz-y-papel

En la Figura 3.5 forma diferentes triángulos que conecten diferentes puntos P cualesquiera, ubicados en el interior del cuadrado con los vértices de la base del cuadrado (puntos A y B).

Remarca con color los puntos P donde los triángulos formados en el interior del cuadrado sean acutángulos.

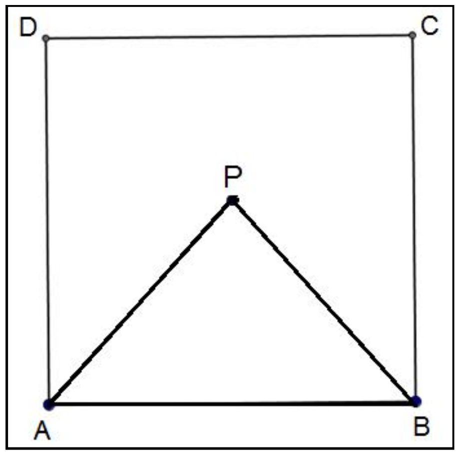

Figura 3.5. Cuarta Actividad.

1) ¿Qué sucede al mover el punto P (vértice del triángulo) en el interior del cuadrado?

2) ¿Cuántos tipos de triángulos existen dentro del cuadrado?

3) ¿Qué herramienta permitiría simplificar el problema? Explica

B) Ambiente Tecnológico

1) Empleando el software Geogebra, abre el archivo que contiene la Figura 3.5.

2) Mueve el punto P en el interior del cuadrado. Identifica la región interior del cuadrado donde los triángulos APB sean acutángulos. Puedes auxiliarte de las herramientas propias del software.

3) ¿Qué sucede al mover el punto P (vértice del triángulo) en el interior del cuadrado?

4) ¿Existe alguna figura geométrica que te permita determinar la región donde se forman los triángulos acutángulos? , si es así, ¿cómo la encontraste?

5) Los resultados obtenidos con el software ¿son iguales o distintos de los obtenidos con papel-y-lápiz? ¿A qué se debe?

6) El software ¿simplificó o complicó esta Actividad? Explica lo más claro posible tu respuesta

3.7. Recolección de datos

El trabajo se enfocó en la implementación de Actividades que permitieron determinar la influencia de la visualización de objetos matemáticos empleando la herramienta tecnológica (Geogebra) como complemento en el trabajo de visualización tradicional (ambiente de lápiz-y-papel). La aplicación de estas Actividades se realizó en cinco sesiones de 50 minutos cada una. Las fuentes de información generadas durante la aplicación de las Actividades fueron:

- Hojas de trabajo (registro escrito) de los estudiantes, en las cuales se plasmaron las respuestas dadas por escrito.
- Videograbaciones (registro de audio y video) generados durante la interacción del investigador con los estudiantes.

Los alumnos fueron acomodados en parejas (formadas por ellos mismos) durante la implementación de las Actividades. El objetivo de realizar las Actividades en pareja fue para favorecer el análisis y explicación de las mismas, además, se buscaba contribuir en la discusión y justificación de las respuestas de las preguntas planteadas en cada Actividad.

Puesto que las respuestas escritas, por los estudiantes, son el resultado de sus observaciones, fue necesario seguir de cerca el desarrollo de cada una de las Actividades desde el inicio hasta la generación de conjeturas, tanto en el ambiente de lápiz-y-papel como en el ambiente tecnológico. El seguimiento de las Actividades permitió determinar cómo mediante la percepción de las figuras geométricas en ambiente tecnológico (Geogebra), modificaron las estrategias utilizadas por los estudiantes durante la visualización de los objetos matemáticos, a través de la variación y relación estructural presentada por las figuras. Las evidencias relacionadas con el trabajo de los estudiantes quedaron plasmadas en las videograbaciones realizadas durante cada una de las sesiones de trabajo.

La intervención del investigador permitió que los alumnos reflexionaran sobre sus respuestas escritas y fueran más allá de lo visualizado en los dos ambientes (lápiz-y-papel y tecnológico). Se buscó que el análisis del comportamiento general de las figuras mostradas a los estudiantes, así como su comprensión y entendimiento de acuerdo con las propiedades que presenta, fueran lo más claramente posible para ellos. El investigador entregó las hojas con cada una de las Actividades a realizar (una por sesión) y recomendó usar tinta negra para contestarlas evitando borrar, tachar o rayar sus anotaciones. Además, se les indicó el tiempo disponible para la realización de dicha Actividad.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1. Introducción

En este Capítulo, se analizan y discuten las respuestas dadas por los estudiantes durante las Actividades implementadas. Se exponen los resultados obtenidos durante la visualización de representaciones geométricas en ambos ambientes y se examinan las diferentes respuestas dadas por los alumnos.

De acuerdo con la NCTM (2000), las representaciones de objetos matemáticos como figuras geométricas, diagramas o gráficas deben tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de los conceptos y relaciones matemáticas, para que los alumnos comuniquen sus enfoques, argumentos o conocimientos y reconozcan las conexiones entre conceptos matemáticos. La representación aplica a los procesos y a los productos observables externamente y, también, a los que tienen lugar internamente en las mentes de quienes hacen matemáticas.

Las representaciones son parte esencial del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Duval (2003) afirma que la persona con ojo especializado ve o deduce la existencia de cosas que pasan completamente inadvertidas o simplemente están contempladas por aquella que no es especialista.

Considerando lo mencionado por Duval (1998, 1999a, 1999b, 2003) se tiene un punto de partida, el cual permite analizar las Actividades implementadas en este trabajo. De esta manera, para analizar los datos surgidos de las Actividades implementadas en este trabajo, es necesario considerar que los alumnos interpretan lo que para sus profesores puede considerarse "representaciones claras". Es común que los alumnos propongan o esbocen representaciones de contenidos que tienen un significado personal, incluso si no están convencidos de la certeza de las ideas que se asimilan y que no se parecen en lo absoluto a las representaciones matemáticas convencionales. De esta manera, el análisis y discusión de la información recabada permite distinguir la forma en que los alumnos reconocen e identifican las características relacionadas con la visualización de representaciones geométricas.

4.2. Análisis de la información

A continuación, se analizan los datos recabados mediante la implementación de las Actividades realizadas por los alumnos. Para el análisis e interpretación de la información se adoptan teorías (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 1998, 1999a, 1999b, 2003; Haciomeroglu, 2011; Hitt, 1995; Presmeg, 2006; Phillips, et al., 2010; Zimmermann & Cunningham, 1991; entre otros) para explicar los procesos y situaciones que permiten o imposibilitan (a los alumnos) a visualizar de forma eficiente las representaciones geométricas mediante los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico.

El propósito general de las Actividades es determinar la influencia de la visualización de objetos matemáticos empleando alguna de las herramientas tecnológicas actuales (para este trabajo se utiliza el software de Geogebra) como complemento en el trabajo de visualización tradicional (ambiente de lápiz-y-papel). De esta manera, cada Actividad presentó dos partes: la primera enfocada a la visualización de figuras geométricas en ambiente de lápiz-y-papel; la segunda parte se enfocó a la visualización de representaciones geométricas empleando la herramienta tecnológica (Geogebra).

Las categorías de análisis de las Actividades están basadas en la interpretación propia de los estudiantes, en términos del análisis funcional propuesto por Duval (1998, 1999a, 1999b, 2003) para la actividad cognitiva vinculada con los registros semióticos de representación; en particular, el relacionado con las figuras geométricas y la visualización asociada con ellas. Las categorías de análisis se basaron en el número de incidencias comunes por parte de los alumnos en las Actividades, de acuerdo con el estudio de las representaciones geométricas en los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico.

Para esta investigación se considera importante contrastar los resultados obtenidos en ambiente de lápiz-y-papel con aquellos que resulten en ambiente tecnológico. De esta manera, se puede determinar la influencia de la visualización de objetos matemáticos empleando alguna de las herramientas tecnológicas (software de Geogebra) como complemento en el trabajo de visualización tradicional (ambiente de lápiz-y-papel); principal propósito de esta investigación.

4.3. Primera Actividad

El objetivo de la Actividad fue analizar la influencia de la visualización de figuras geométricas estáticas[12] en los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico (en ese orden). En particular, esta Actividad fue retomada del articulo "A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics" de Duval (2006, p.117). En esta Actividad el autor propone a los estudiantes que a partir del esbozo de la gráfica (véase Figura 4.1.A) hallen la longitud del segmento $\overline{ED}$, tomando como datos fijos la longitud de los segmentos $\overline{AB} = \overline{DC} = 4$ cm y $\overline{BC} = 7\, cm$.

El autor aplicó esta actividad a estudiantes franceses que terminaron la educación primaria (*elementary school*) e ingresaron a la secundaria (*middle school*). El autor reporta tres tipos de respuesta: a) 22.2% da 3 *cm* (repuesta matemática); b) 39.6% da 3.5 *cm* (medida directa del segmento); y c) 24.4% da otras respuestas, incluyendo la ausencia de

[12] Se considera una figura geométrica estática como aquella representación geométrica que de acuerdo con las condiciones de su composición no presenta ninguna variación, es decir, no sufre cambios en su forma y dimensión.

ellas. Los resultados de los estudiantes en el estudio, reportado por Duval, tuvieron como referente el ambiente de lápiz-y-papel.

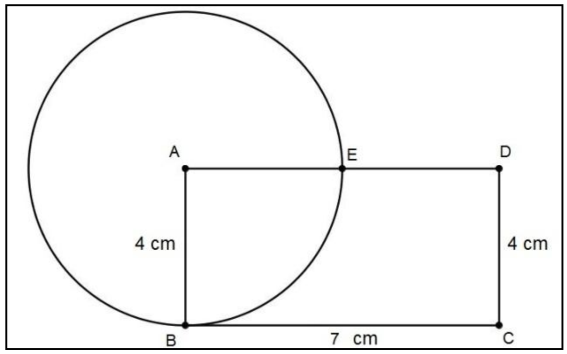

Figura 4.1.A. Primera Actividad. Los alumnos visualizan la figura geométrica y de acuerdo con sus propiedades calculan la longitud $\overline{ED}$.

4.3.1. Ambiente de lápiz-y-papel

Los resultados obtenidos durante el análisis de datos realizado para esta investigación (en ambiente de lápiz-y-papel) son similares a los reportados por Duval (2006), a pesar de que los grados educativos (en los cuales se aplicó la actividad) son diferentes. En la primera Actividad se obtuvieron los siguientes resultados: 83% de los alumnos percibieron que el valor del segmento $\overline{ED}$ es 3.5 *cm* y sólo 17% consideró las propiedades de la circunferencia, al darse cuenta de que el valor real del segmento $\overline{ED}$ es de 3 *cm*.

Algunas observaciones realizadas durante la visualización de la primera Actividad muestran que la dificultad de interpretar correctamente la representación geométrica radica en la manera de articular la información implícita y explicita dada. En consecuencia, la visualización realizada por parte de los alumnos a esta figura geométrica tiende a adquirir la forma de mayor simpleza; provoca que los alumnos perciban los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{ED}$ iguales. La manera *ver* la figura, por parte de los alumnos, generó una primera impresión realizada a simple vista. Identificaron que el punto E (intersección de la circunferencia con la segmento $\overline{AB}$) se localizaba en el punto medio del segmento $\overline{AB}$. La forma de *ver* la figura impidió alcanzar la visualización correcta del objeto matemático.

En la presente investigación las estudiantes Ivonne y Ximena [Equipo 5 (Alumno 5A y 5B), en adelante], son el único equipo que visualizó correctamente la primera Actividad, se dieron cuenta de las propiedades implícitas en la figura. La explicación del Equipo 5 indica "la distancia de $\overline{ED}$ es de 3 *cm*. El circulo con centro A tiene de radio 4 *cm* (ubicando el segmento $\overline{AB}$), por lo tanto, la circunferencia en cualquier punto tiene 4 *cm* de radio, restamos los segmentos $\overline{BC}$ - $\overline{AB} = 3$ *cm*". La interpretación realizada por el Equipo 5 de la transición de la Figura 4.1.A al objeto geométrico; el equipo logró visualizar, a través de la representación las propiedades de dicho objeto matemático, sin importar su apariencia perceptiva.

Se observa en los datos –surgidos en ambiente de lápiz-y-papel– que la mayoría de los alumnos se inclinó por una percepción visual de la figura y no consideraron sus propiedades. Un ejemplo es la visualización realizada por los estudiantes Edgar y Ricardo [Equipo 2 (Alumno 2A y 2B), en adelante], quienes registran que "el punto E es la mitad del segmento $\overline{AD}$ y éste a su vez es igual que la base $\overline{BC}$ que mide 7 *cm*; como la mitad es 3.5 *cm*, por lo tanto, este es el valor del segmento". La figura 4.1.B muestra la visualización de las estudiantes Dulce y Teresa [Equipo 1 (Alumno 1A y 1B), en adelante], quienes optan por la percepción de la figura.

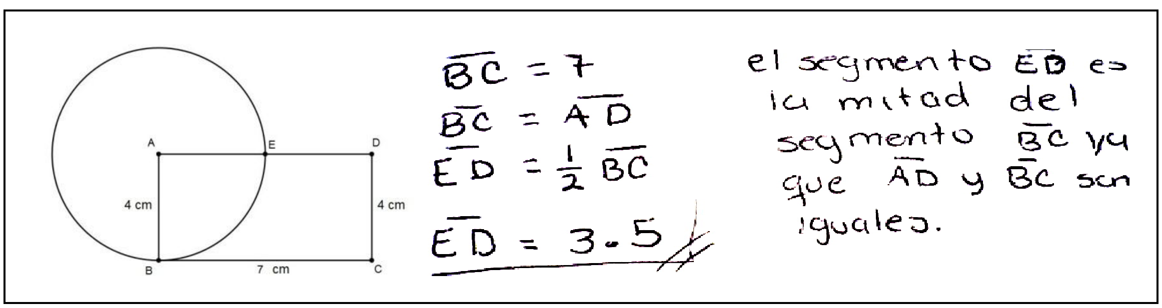

Figura 4.1.B. Primera Actividad ambiente de lápiz-y-papel. Ejemplo de cómo los alumnos se inclinaron por la percepción visual de la figura al calcular la longitud del segmento $\overline{ED}$.

4.3.2. Ambiente tecnológico

En la segunda parte de esta Actividad, los alumnos reprodujeron la Figura 4.1.A empleando la herramienta tecnológica (Geogebra) y mediante sus herramientas calcularon la longitud del segmento $\overline{ED}$. Además, compararon el resultado obtenido con el software respecto del obtenido con lápiz-y-papel.

Al hacer uso del software Geogebra, 100% de los equipos concluyó que la longitud del segmento $\overline{ED}$ es de 3 *cm* debido a que el punto E no se encuentra en el punto medio del segmento $\overline{AD}$ (véase Figura 4.1.C).

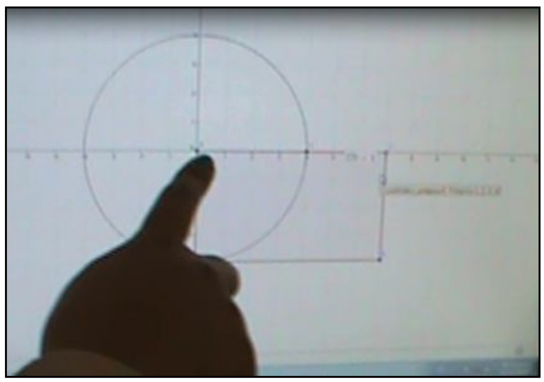

Figura 4.1.C. Primera Actividad ambiente tecnológico. Los alumnos se dan cuenta que el punto E no se encuentra en el punto medio del segmento $\overline{AD}$.

A continuación, se transcribe lo dicho por los alumnos Brandon y Fernando [Equipo 4 (Alumno 4A y 4B), en adelante] cuando contrastaron los resultados obtenidos en lápiz-y-papel, respecto del ambiente tecnológico:

[1] Profesor: De acuerdo con la figura ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{ED}$?

[2] Alumno 4A: El segmento $\overline{BC}$ y el segmento $\overline{AD}$ son iguales. Entonces, si éste [*punto E*] está al centro [*punto medio del segmento* $\overline{AB}$] vale la mitad [*3.5 cm*].

[3] Profesor: Usando el software ¿el resultado cambió o es el mismo?

[4] Alumno 4A: Me doy cuenta de que el radio de la circunferencia es 4 *cm* y el radio en todas las partes de la circunferencia siempre es el

		mismo, entonces mide 4 *cm* aunque [*visualmente en la figura en lápiz-y-papel*] sea la mitad de $\overline{AD}$.
[5]	Profesor:	Finalmente, ¿cuál sería el valor [*la longitud*] de $\overline{ED}$?
[6]	Alumno 4A:	Tres, ya que la distancia de $\overline{AE}$ es 4 *cm* y el segmento $\overline{AD}$ es 7 *cm*.
[7]	Profesor:	¿De qué forma les ayudo el software en la visualización de la figura?
[8]	Alumno 4A:	A la vista se ve como si fuera la mitad [*ambiente de lápiz-y-papel*] y al ponerlo en la computadora [*Geogebra*] se ven bien definidas las unidades de la figura [*se dan cuenta de las propiedades del objeto matemático*].
[9]	Profesor:	¿Que pueden decir de la figura impresa [*lápiz-y-papel*]?
[10]	Alumno 4A:	Se tiene una figura que no es proporcional [*según sus características*].

Acerca de la pregunta, expuesta en la Actividad, ¿cómo influye la forma de calcular la longitud del segmento $\overline{ED}$ con el software comparado con lápiz-y-papel? Los estudiantes Miguel y Fernanda [Equipo 6 (Alumno 6A y 6B), en adelante] indican que “en lápiz y papel da la percepción que la circunferencia pasa por la mitad [*del segmento*] $\overline{AD}$ y en el software comprobamos que no [*el punto E no está a la mitad del segmento* $\overline{AD}$]”. Todos los equipos coincidieron que al emplear el software pudieron observar la medida de los segmentos. De esta manera, lograron visualizar las propiedades que presenta la figura; ya que en el ambiente de lápiz-y-papel (la mayoría de los alumnos) se inclinaron por la primera impresión (percepción) de la figura.

Los resultados obtenidos muestran que al trabajar en ambiente de lápiz-y-papel, los alumnos, en su mayoría, visualizan la figura de acuerdo con su percepción sin hacer uso de las propiedades o descomposición de la figura en partes más simples de ella. Al hacer uso de la tecnología, 100 % de los estudiantes se dio cuenta del error en su visualización en ambiente de lápiz-y-papel; en esa visualización ellos omitieron las propiedades de la figura (circunferencia).

4.4. Segunda Actividad

El objetivo de la segunda Actividad fue analizar la influencia de la visualización de objetos geométricos equivalentes empleando los ambientes: lápiz-y-papel y tecnológico (software Geogebra). Esta Actividad fue adaptada del trabajo de Reyes (2012). En el trabajo mencionado, el autor indica que para cumplirse la *equivalencia*[13] entre dos triángulos, la base y la altura de ambos debe de ser la misma. Para cumplir la equivalencia entre dos triángulos basta con trazar una horizontal (paralela a la base de uno de los triángulos) y por cualquier punto sobre la recta colocar el vértice del nuevo triángulo. Reyes (2012) muestra un triángulo ABC y propone desplazar el vértice D sobre una línea paralela a la base $\overline{AB}$. La altura del triángulo es la distancia entre las rectas paralelas (véase Figura 4.2.A).

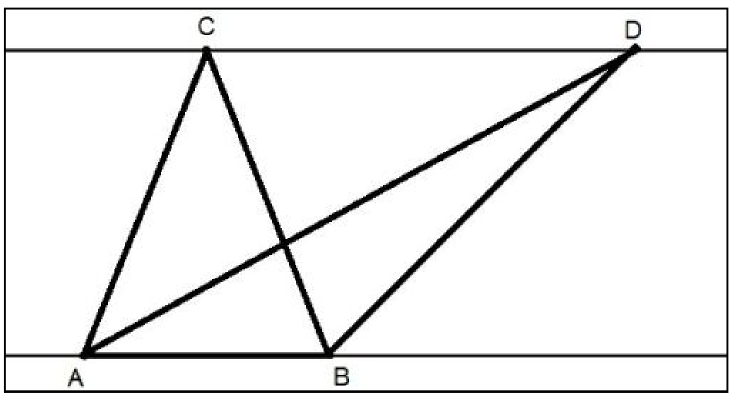

Figura 4.2.A. Segunda Actividad. Triángulo equivalente a otro de igual base.

4.4.1. Ambiente de lápiz-y-papel

De acuerdo con la Figura 4.2.A, se propone a los estudiantes hallar las áreas de los triángulos ABC y ABD (empleando el ambiente de lápiz-y-papel), y determinar si éstas son iguales o distintas. La primera dificultad que enfrentaron los alumnos se enfocó al uso de unidades no visibles. De acuerdo con la visualización de la figura realizada por ellos, establecieron las relaciones existentes entre las bases unidades figurables visibles y las alturas unidades figurales no visibles. Para hallar las áreas de los triángulos ABC y ABD, los alumnos emplearon los siguientes recursos: a) midieron de forma directa (en la hoja

[13] Las figuras planas son equivalentes cuando ocupan la misma superficie (área).

impresa) la base y altura de ambos triángulos; b) propusieron valores numéricos (en los triángulos) para simplificar operaciones. Esta acción les permitió determinar las áreas para casos específicos (casos particulares); c) asignaron literales para calcular las áreas de los triángulos de manera general, etc. Mediante alguno de estos recursos, los alumnos, determinaron la relación que existe entre las áreas ABC y ABD.

Los resultados de la segunda Actividad son los siguientes: 34% de los estudiantes identificó que las áreas ABC y ABD son iguales y 66% respondió que las áreas son diferentes, ya que el área del triángulo ABD es mayor que la del triángulo ABC. Para identificar la relación existente entre las áreas, tres equipos propusieron valores numéricos fijos, dos equipos midieron de forma directa (usando regla) las dimensiones de la figura impresa y sólo un equipo dejó expresada el área en términos de literales.

Al analizar los resultados, la dificultad más evidente presentada por los estudiantes en esta Actividad, durante la visualización de la figura geométrica en ambiente de lápiz-y-papel, se presentó al no tener claro el concepto de altura de un triángulo. Los alumnos, quienes respondieron que las áreas son diferentes, consideraron las alturas del triángulos ABC y ABD como la distancia del punto medio de la base $\overline{AB}$ a los puntos C y D, respectivamente. La Figura 4.2.B muestra la identificación y medida directa realizada por el Equipo 6 de la base y las alturas de los triángulos ABC y ABD.

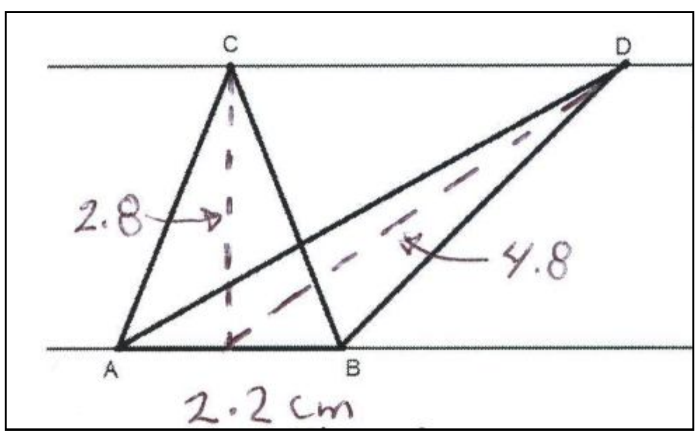

Figura 4.2.B. Segunda Actividad. Identificación de las alturas en los triángulos ABC y ABD.

Los alumnos, que reportaron respuestas incorrectas, consideraron que el área del triángulo ABD es mayor que la del triángulo ABC de acuerdo con lo siguiente:

a) Al emplear la fórmula para calcular el área de los triángulos, la altura del triángulo ABD es considerada de mayor longitud comparada con la altura del triángulo ABC (a pesar de tener la misma base $\overline{AB}$). Al explicar la relación que guardan las áreas de los triángulos ABC y ABD, el Equipo 5 mencionó que "son diferentes, ya que son triángulos distintos con un valor igual [*misma base*] y con alturas distintas, lo que nos dio área diferente".

b) Al expresar la fórmula del área para los triángulos ABC y ABD mediante literales, los alumnos no lograron identificar el valor de la altura en ambos triángulos (únicamente se expresa como h). Durante el desarrollo de esta Actividad, el Equipo 1 mencionó que "sólo viendo la fórmula parecen iguales [refiriéndose a las áreas], pero a simple vista esos triángulos son de diferente tipo, el ABC es equilátero y el ABD es isósceles". Este equipo presentó dudas al comparar las áreas durante la visualización de la figura. De acuerdo con su percepción consideraron el triángulo ABC como equilátero y el triángulo ABD como isósceles.

Los equipos que consideran a las áreas de los triángulos ABC y ABD iguales, identificaron que comparten la misma base $\overline{AB}$ y tienen la misma altura. Los integrantes del Equipo 6 al comparar las áreas de los triángulos ABC y ABD mencionaron "son iguales [*las áreas*], se debe a que están colocados sobre dos líneas paralelas, y ésta influye ya que al estar en la misma altura y tener la misma base se tiene la misma área".

4.4.2. Ambiente tecnológico

Durante la segunda parte de esta Actividad, los alumnos reprodujeron la Figura 4.2.A empleando la herramienta tecnológica (Geogebra) y utilizando las herramientas del software, calcularon las áreas de los triángulos ABC y ABD. Los resultados obtenidos, en esta segunda parte, fueron comparados con los registrados en el ambiente de lápiz-y-papel.

Al calcular las áreas de los triángulos ABC y ABD, empleando el software, 100% de los alumnos reportaron que las áreas son iguales. Algunos estudiantes mostraban sorpresa ante este resultado; el Equipo 5 expresó "nos dimos cuenta que las áreas eran iguales, pero no sabemos porque". Una vez calculadas las áreas y mediante el software, se les pidió a los alumnos desplazar el punto D (vértice del triángulo ABD) sobre la recta paralela y comparar de nuevo las áreas. Al desplazar el punto D, nuevamente 100% de los alumnos comentó que las áreas son iguales. Los Equipos 1 y 3 registraron que las áreas son iguales por que tienen la misma altura. Sin embargo, los Equipos 2 y 5 no estaban completamente seguros de porqué existe esta igualdad entre dichos triángulos.

En particular, el Equipo 5 continuó considerando las alturas como la distancia del punto medio de la base $\overline{AB}$ a los puntos C y D, respectivamente. Para salir de la duda, se le pidió al Equipo 5 realizar trazos auxiliares que les permitiera identificar las alturas de los triángulos ABC y ABD. A continuación, se transcribe lo expuesto por el Equipo 5 al identificar la igualdad en alturas de ambos triángulos:

[11] Profesor: ¿Qué sucede al desplazar el punto D?

[12] Alumno 5A: Las áreas no cambian si se desplaza el punto en cualquier dirección [*refiriéndose al punto D sobre la paralela*].

[13] Profesor: ¿A qué se debe que las áreas sean iguales?

[14] Alumno 5A: Sabemos que tienen la misma base [$\overline{AB}$], pero pensamos que la altura es la distancia de este punto [*punto medio del segmento* $\overline{AB}$] al punto D.

[15] Profesor: Empleando la fórmula para el área un triángulo, ¿que debería cumplirse?

[*Toman su tiempo para analizar la expresión*]

[16] Alumno 5B: Si la base es la misma y el área es la misma entonces…la altura debe ser la misma.

[17] Profesor: Entonces ¿cuál será la altura correcta del triángulo ABD?

[*Realizan trazos en el software*]

[18] Alumno 5B: Es la misma [*altura*] que la del triángulo ABC, el área no cambia sólo se comprime [*se refiere al cambio de forma del área*] (véase Figura 4.2.C).

[19] Profesor: ¿Qué debería suceder para que las áreas de los triángulos sean diferentes?

[20] Alumno 5B: Deben tener diferente base o diferente altura. Si el punto D saliera de la recta [*se refiere a la recta paralela*] ya no tendrían la misma área.

Mediante el software, los alumnos validaron sus resultados previos. Los alumnos que obtuvieron áreas distintas de los triángulos ABC y ABD (en ambiente de lápiz-y-papel), notaron la incongruencia de los resultados al verificarlos con Geogebra. Con ayuda del software los estudiantes, que presentaron dificultades, descubrieron el error que cometían cuando consideraban la altura del triángulo ABD como la distancia del punto medio del segmento $\overline{AB}$ al punto D. A través de trazos auxiliares, los alumnos, identificaron que la altura del triángulo ABD es la misma que la del triángulo ABC, como se muestra en la Figura 4.2.C. Además, los alumnos con ayuda del programa lograron conjeturar que las áreas son iguales, siempre que compartan la misma base y se encuentren entre rectas paralelas, ya que los triángulos tendrían las mismas alturas.

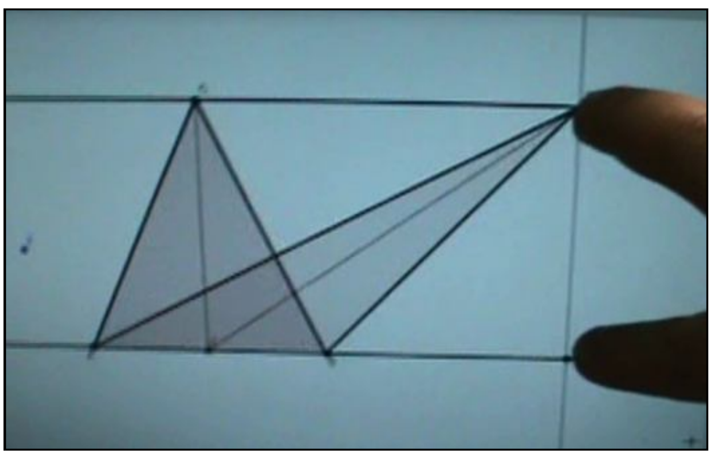

Figura 4.2.C. Segunda Actividad. Identificación de la altura del triángulo ABD.

Los resultados obtenidos en ambiente de lápiz-y-papel, demuestran que las representaciones visuales no son necesariamente transparentes para los estudiantes. Los estudiantes deben poseer conocimiento considerable de los símbolos y convenciones de las representaciones para que éstas adquieran sentido para ellos. Al hacer uso de la tecnología, los estudiantes (en su mayoría) notaron que su visualización, interpretación y apreciación de la figura no era la correcta, debido a la incongruencia en los resultados obtenidos en ambos ambientes (relacionados a las alturas de los triángulos). El uso del software permitió, a los alumnos, determinar las relaciones existentes en la figura y establecer conjeturas de acuerdo con la visualización realizada en este ambiente (tecnológico).

4.5. Tercera Actividad

Esta Actividad tuvo como objetivo analizar la influencia de la visualización de objetos geométricos mediante la reconfiguración figural de dicho objeto, empleando los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico. Cuando se visualizan figuras geométricas, un tratamiento en los registro figurales tiene que ver con la reconfiguración de un objeto geométrico. Duval (1999a) se refiere a la reconfiguración de un objeto geométrico como "la operación que consiste en reorganizar una o varias sub-figuras diferentes de una figura dada en otra figura". Al realizar este tratamiento el objeto geométrico se divide en sub-figuras, que permiten comparar o agrupar una representación global diferente de la original. Una sub-figura puede ser o una unidad figural de dimensión 2 o un reagrupamiento de unidades figurales elementales también de dimensión 2 (véase parágrafo 2.3.2).

Esta Actividad fue adaptada del libro *Elementary Plane Geometry* de Gustafson y Frisk (1985). Los autores muestran un triángulo equilátero ΔABC y piden al lector probar que el triángulo formado por los puntos medios de cada lado del triángulo ΔABC, también es equilátero. Además, el autor propone determinar que los triángulos formados a partir de los puntos medios de cada lado del triángulo ΔABC, son congruentes.

La Actividad propuesta en este trabajo, presenta un triángulo rectángulo ΔABC y se pretende que el alumno identifique si existe una relación proporcional entre el triángulo ΔABC y las sub-figuras formadas a partir de los puntos medios de sus lados. Además, existe en la figura una cuadricula, la cual representa las unidades de longitud que permite simplificar los cálculos de las áreas de las sub-figuras (véase Figura 4.3.A).

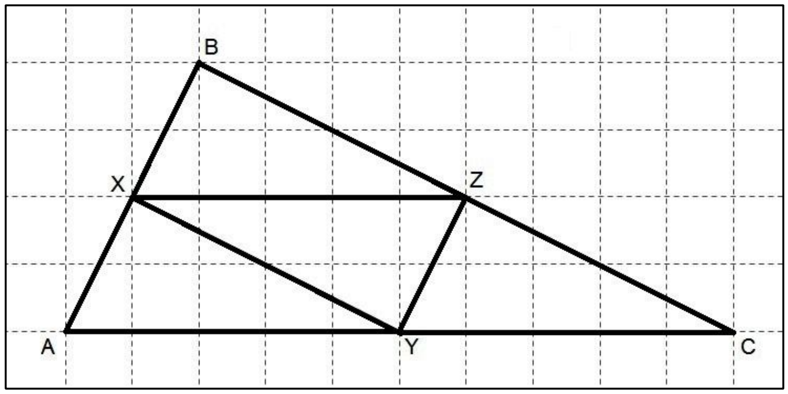

Figura 4.3.A. Tercera Actividad. Triángulo rectángulo ΔABC dividido en sub-figuras a partir de los puntos medios de sus lados.

La Actividad está enfocada para determinar si el alumno es capaz de inferir que esta relación proporcional se mantiene para cualquier triángulo dado.

4.5.1. Ambiente de lápiz-y-papel

La Actividad propuesta muestra un triángulo rectángulo ΔABC y los puntos medios X, Y y Z correspondientes a cada lado de dicho triángulo, los cuales forman el triángulo ΔXYZ (véase Figura 4.3.A). En la Actividad, se pide a los alumnos calcular las áreas de los triángulos ΔABC, ΔXYZ, ΔAXY, ΔYZC y ΔXBZ apoyados por la cuadrícula que presenta la figura. Una vez calculadas las áreas de los triángulos mencionados, se pide a los alumnos compararlas y determinar si existe (o no) una relación entre ellas; en caso de existir alguna relación, el alumno debe explicar si puede (o no) mantenerse para cualquier triángulo independientemente de su tamaño o forma.

De acuerdo con los resultados registrados en ambiente de lápiz-y-papel sólo un equipo presentó dificultades en el cálculo de las áreas, equivalente a 17% de los alumnos; el resto de los equipos realizaron el cálculo correcto de las áreas para los triángulos en cuestión (equivalente a 83% de los alumnos).

El Equipo 3 registró dificultades en el cálculo del área ΔXYZ, debido a las sub-figuras formadas a partir de los puntos medios de los lados del triángulo ΔABC, quienes impidieron el reconocimiento figural adecuado; los alumnos identificaron de manera errónea la altura del triángulo $\mathrm{D}XYZ$. Este equipo mencionó que “las áreas son distintas [*se refiere a las áreas de los triángulos* $\mathrm{D}AXY$, $\mathrm{D}YZC$ *y* $\mathrm{D}XBZ$ *comparadas con el triángulo* $\mathrm{D}XYZ$] porque el triángulo XYZ tiene diferente altura, pero igual base que los otros [*se refiere a los triángulos* $\mathrm{D}AXY$, $\mathrm{D}YZC$ *y* $\mathrm{D}XBZ$]”. La dificultad en el cálculo de áreas provocó que los alumnos identificaran el área del triángulo $\mathrm{D}XYZ$ diferente de los triángulos $\mathrm{D}AXY$, $\mathrm{D}YZC$ y $\mathrm{D}XBZ$. Esta contrariedad impidió al Equipo 3 encontrar alguna relación entre las áreas de los triángulos mencionados.

Los alumnos que realizaron los cálculos correctos, al hallar las áreas de los triángulos $\mathrm{D}ABC$, $\mathrm{D}XYZ$, $\mathrm{D}AXY$, $\mathrm{D}YZC$ y $\mathrm{D}XBZ$, concluyeron que el área del triángulo $\mathrm{D}XYZ$ es la cuarta parte del área del triángulo $\mathrm{D}ABC$. Además de la relación anterior, los alumnos mencionaron que los triángulos $\mathrm{D}ABC$ y $\mathrm{D}XYZ$ son: a) proporcionales (Equipos 2, 3 y 6); b) equivalentes (Equipo 1); c) congruentes (Equipo 4).

En particular, el Equipo 1 reportó que “son equivalentes, pues el triángulos *ABC* es de base 10 y altura 4, y el triángulo *XYZ* es de base 5 y altura 2. La mitad de cada una”. De manera similar el Equipo 4 reportó que “el área de *XYZ* es una cuarta parte del área *ABC*, ya que los triángulos son congruentes”. Estos resultados reflejan el conflicto surgido por la asociación en las definiciones dadas por parte de los Equipos 1 y 4.

Cuando se preguntó a los alumnos si la relación encontrada (en caso de haberla obtenido) puede o no mantenerse para cualquier triángulo, reportaron lo siguiente:

a) 16% de los alumnos indicó que la relación no se mantiene. El Equipo 4 mencionó que “No, porque los ángulos no siempre son los mismos”;

b) 52% de los alumnos reportó que la relación puede mantenerse, sin embargo, no confirmaron o negaron esta suposición. El equipo 5 comentó que “podría mantenerse [*esta relación*] siempre y cuando se cumpla la regla del punto medio en cada segmento o lado del triángulo [*refiriéndose al triángulo* $\mathrm{D}ABC$]”;

c) 16% de los alumnos reportó que en todo momento se mantiene la relación. El Equipo 1 mencionó que “se mantiene la relación porque los puntos que dividen a los lados del triángulo ABC son puntos medios”.

d) 16% de los alumnos reportó que no existe relación alguna entre los triángulos. La dificultad presentada por el Equipo 3, acerca de la relación inexistente entre las áreas de los triángulos ΔABC y ΔXYZ, se puede entender de la siguiente manera: el proceso de reconocimiento de una figura geométrica puede generar dificultades para los alumnos en actividades donde se realizan modificaciones sencillas como la posición, traslación o rotación. Debido a las modificaciones (realizadas por los alumnos) en el registro figural para la identificación de propiedades, el Equipo 3 presentó deficiencias en la visualización del objeto matemático.

Los resultados muestran que la representación sirve de apoyo a la intuición, pero para distinguir las reconfiguraciones se tiene una relación directa con el conocimiento que posee el estudiante de la teoría formal de la geometría; en algunos casos, el alumno necesitó *ver* las reconfiguraciones en la representación geométrica y luego vincularlas con el conocimiento. La identificación en la configuración inicial de una sub-configuración puede ser condición necesaria, pero no suficiente para desencadenar el razonamiento figural.

4.5.2. Ambiente tecnológico

En la segunda parte de esta Actividad, los alumnos calcularon las áreas de los triángulos ΔABC, ΔXYZ, ΔAXY, ΔYZC y ΔXBZ empleando las herramientas del software Geogebra y compararon los resultados obtenidos con los del ambiente de lápiz-y-papel. Se reporta que la totalidad de los equipos obtuvieron que las áreas de los triángulos ΔXYZ, ΔAXY, ΔYZC y ΔXBZ son iguales. El Equipo 3 (quien reportó áreas distintas para dichos triángulos en ambiente de lápiz-y-papel) mencionó que, al usar Geogebra, obtuvieron áreas iguales. De esta manera, 100% de los alumnos identificó que el área del triángulo ΔXYZ es la cuarta parte del triángulo ΔABC. El Equipo 1 mencionó que “dentro del triángulo ABC hay cuatro triángulos, cada uno de ellos forma la cuarta parte del triángulo mayor”.

Al identificar que las áreas de los triángulos ΔAXY, ΔYZC y ΔXBZ son iguales, se les pidió a los alumnos desplazar los puntos A, B y C (vértices del triángulo ΔABC), usando las herramientas del software, con la finalidad de obtener nuevos triángulos, cuya longitud de sus lados fuera diferente entre sí. Al generar diversos triángulos se pidió (a los alumnos) identificar porqué razón esta relación puede o no mantenerse para cualquier triángulo (generalización de la relación).

A continuación, se transcribe lo expuesto por el Equipo 5 al identificar porqué esta relación se mantiene para cualquier triángulo:

[21] Profesor: Al desplazar los puntos *A*, *B* y *C* , ¿la relación [*se refiere a que el área del triángulo* D*XYZ es la cuarta parte del triángulo* D*ABC*] se mantiene para cualquier triángulo?

[22] Alumno 5A: Siempre que se respete el punto medio de cada uno de sus lados va a tener [*el triangulo ABC*] cuatro triángulos inscritos con la misma forma del triángulo mayor y cada uno de ellos va a ser siempre la cuarta parte del área total (véase Figura 4.3.B).

[23] Profesor: ¿En qué momento se podría perder esta relación?

[24] Alumno 5A: Cuando los puntos ya no sean los puntos medios [*se refiere a los puntos X, Y, Z*], ya que nos dimos cuenta que al mover los puntos [*se refiere a los vértices A, B y C*] las áreas [*de los triángulos interiores*] seguían siendo iguales y que la suma nos daba la mayor [*área del triángulo ABC*] debido a que los puntos medios hacían esta proporción, pero solo lo pudimos ver cuando hicimos diferentes casos con el programa.

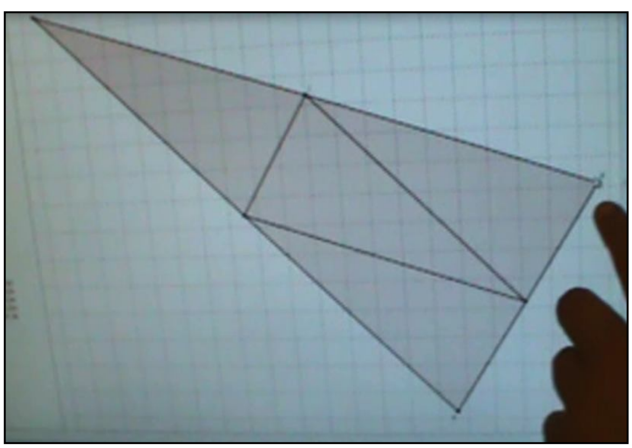

Figura 4.3.A. Tercera Actividad. Generalización de la relación: el área del triángulo D*XYZ* es la cuarta parte del área del triángulo D*ABC*

Al hacer uso del software, los equipos lograron generalizar la relación identificada por ellos mismos, la cual indica que los triángulos formados a partir de los puntos medios de cada lado de cualquier triángulo, tienen la misma longitud de sus lados, y generan triángulos congruentes.

La manera de generalizar la relación existente, por parte de los alumnos, fue mediante la manipulación y la generación de diversos casos particulares a partir de la modificación de los vértices del triángulo ΔABC. Cuando se desplazan los objetos matemáticos en pantalla, los objetos matemáticos representados se mantienen coherentes y en unidad todo el tiempo. De esta manera, promueven la generación de conjeturas por los alumnos.

4.6. Cuarta Actividad

En la cuarta Actividad, se busca analizar la manera como el alumno externa la idea de una figura geométrica del tipo dinámica,[14] a partir de una condición definida. Esta Actividad fue tomada del libro "Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas" de Santos (1996, p.193). La Actividad consistió en que los alumnos construyeran diferentes triángulos, conectando un punto P cualquiera en el interior de un cuadrado dado con los vértices de la base del cuadrado, tomando en consideración una condición establecida. Además, los estudiantes deben identificar la zona o región (dentro del cuadrado) cuyos triángulos formados con el punto P son acutángulos (véase Figura 4.4.A).

En esta Actividad, se debe analizar la idea mental del objeto matemático expresado y representado de acuerdo con la formulación y concepción de las condiciones establecidas, con el propósito de identificar y generalizar la región en la cual se cumple dicha condición. El alumno parte de planteamientos particulares y trata de organizar e inferir el comportamiento general del problema presentado.

[14] Se consideran figuras geométricas dinámicas como aquellas representaciones de un objeto geométrico que de acuerdo con su construcción al manipular uno de sus elementos (punto, línea, ángulo…) se tiene una nueva figura que mantiene una relación con las características de la figura original, ya que las propiedades geométricas permanecen inalterables.

Forma diferentes triángulos que conecten un punto P cualquiera en el interior del cuadrado con los vértices de la base del cuadrado (puntos A y B).

Remarca con color, los puntos P donde los triángulos formados en el interior del cuadrado sean acutángulos.

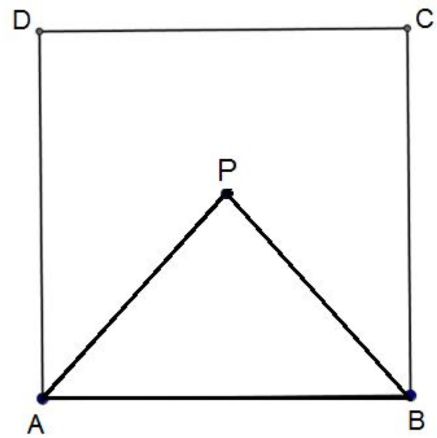

Figura 4.4.A. Cuarta Actividad. Los alumnos forman diferentes triángulos que conecten un punto cualquiera en el interior de un cuadrado dado, con los vértices (A y B) de la base del cuadrado.

4.6.1. Ambiente de lápiz-y-papel

Al emplear el ambiente de lápiz-y-papel, el estudiante conecta un punto P cualquiera en el interior del cuadrado con los vértices de la base del cuadrado. Al unir dichos puntos, el alumno, percibe e identifica un triángulo que presenta ciertas características. La condición que se pide cumplir es que cada uno de estos triángulos formados en el interior del cuadrado sean acutángulos. Sin embargo, cuando se toma(n) otro(s) punto(s) se genera una familia de triángulos de base igual que la del cuadrado, pero cada uno de ellos con determinadas características específicas (casos particulares).

Los triángulos formados a partir de los puntos P (propuestos por los estudiantes y ubicados dentro del cuadrado) con los vértices de la base del cuadrado que cumplen la condición (triángulos acutángulos), son remarcados. De esta manera, el alumno realiza la conceptualización de la representación geométrica en casos particulares. En el momento en que el alumno consideró que tiene un número suficiente de casos particulares y puntos P remarcados, identificó la región o zona dentro del cuadrado donde los triángulos formados por el punto P son acutángulos. Esta zona o región (conjunto de puntos) dentro del cuadrado debe cumplir la condición establecida donde los triángulos formados son acutángulos, la cual se denomina caso general.

Para el análisis de los datos surgidos de esta Actividad se consideran las similitudes de las respuestas dadas por los alumnos (en el ambiente de lápiz-y-papel). De acuerdo con las visualizaciones realizadas, los alumnos hallaron regiones (que a su juicio) cumplían la condición establecida. Para simplificar el análisis, las regiones con similitudes se denominaron: *rectangular, triangular* y *especial*.

Región rectangular: de los alumnos participantes, 50% identificó la región solución del problema como una región de forma rectangular. Los alumnos que identificaron esta zona, como aquella que cumple la condición establecida, notaron que los triángulos formados cerca de la base del cuadrado son obtusángulos. Se observa en los datos recabados que los alumnos dividieron el cuadrado en dos partes iguales (rectángulos horizontales), y consideraron que en el interior del rectángulo superior se forman triángulos acutángulos. La región *rectangular* es identificada por los Equipos 3, 5 y 6 (véase Figura 4.4.B).

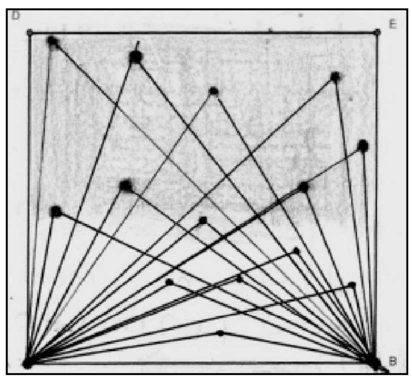

Figura 4.4.B. Región identificada por los alumnos como rectangular.

A continuación, se transcribe lo dicho por el Equipo5 cuando identificó la región (rectangular) que cumple la condición dada, "si el cuadrado se divide en dos partes iguales desde los puntos medios de los lados laterales, entonces de aquí para arriba [*línea horizontal que divide al cuadrado en dos partes iguales*] sería donde encontráramos los triángulos acutángulos y abajo de esa línea serian triángulos obtusángulos".

Región triangular: de los alumnos participantes, 33% identificó la región solución del problema en forma triangular, ésta es una aproximación cercana de la solución correcta. En sus procesos de solución, los alumnos no consideraron la región encerrada por la semicircunferencia, la cual es clave para llegar a la solución. Tampoco consideraron algunas regiones cercanas de la base por los extremos del cuadrado, pues en ellas se perciben triángulos acutángulos por debajo de la mitad del cuadrado. La mayoría de estudiantes afirmó que fuera de la región triangular y dentro del cuadrado se forman triángulos acutángulos. La región *triangular* es identificada por los Equipos 2 y 4 (véase Figura 4.4.C).

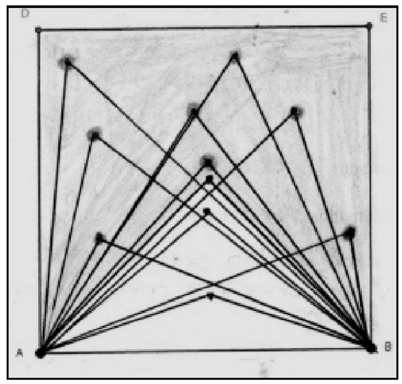

Figura 4.4.C. Región identificada por los alumnos como triangular.

Región especial: de los alumnos participantes, 16% identificó una región semejante a una semicircunferencia; fuera de la cual, a su criterio, cumple la condición relacionada con los triángulos acutángulos. De acuerdo con la forma de externar las representaciones realizadas para los triángulos que cumplen la condición establecida, el Equipo 1 identificó una región delimitada por una semicircunferencia; los alumnos consideraron que en el interior del cuadrado y fuera de la semicircunferencia se forman triángulos acutángulos lo cual cumple la condición (véase Figura 4.4.D).

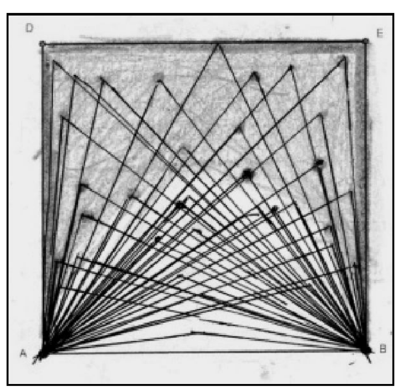

Figura 4.4.C. Región identificada por los alumnos como especial.

Para identificar la región denominada especial, el Equipo 1 colocó diferentes puntos dentro del cuadrado, en seguida, unió cada punto con la base del cuadrado y reconocieron según su percepción y análisis cómo es el ángulo $\angle APB$. Al identificar el ángulo $\angle APB$ menor que 90° remarcan el punto P. El equipo notó que al acercar el punto P a la base, los ángulos $\angle APB$ formados son mayores que 90°. Así, con la consideración anterior lograron que la identificación de la región que cumple con la condición fuese acertada.

Los resultados obtenidos en el ambiente de lápiz-y-papel, muestran que los alumnos obtuvieron casos particulares de los puntos, teniendo la primera limitante presentada. La limitante mencionada está relacionada con el número de puntos P que los alumnos consideran para formar los diferentes triángulos con vértice APB, es decir, el número de casos particulares. Una cantidad mínima de puntos P propuestos (casos particulares) impide conjeturar e identificar el comportamiento general de las representaciones.

La segunda limitante está relacionada con percepción y análisis que hacen los alumnos del triángulo generado al unir los puntos APB. La visualización de cada figura geométrica generada (casos particulares) tiene asociada las siguientes dificultades: a) aunque el objeto matemático sea el mismo, al utilizar representaciones distintas provoca que los alumnos tengan significados distintos de la misma representación; b) la manipulación del punto P dentro del cuadrado presenta como limitante la capacidad de imaginación y de visualización de los alumnos. Al generalizar el comportamiento de la figura en función de la modificación del punto P, la capacidad imaginativa del alumno es factor de la precisión o impresión que se tiene al conjeturar o predecir la región que cumple la condición establecida en la Actividad.

Al cuestionar a los alumnos sobre ¿cuántos tipos de triángulos se forman dentro del cuadrado? Todos los estudiantes contestaron que se podían formar todos los tipos de triángulos. El Equipo 1 mencionó “se pueden formar todos los triángulos dependiendo de donde se ubique el punto P”. También, se les preguntó a los estudiantes acerca de ¿qué herramienta permitiría simplificar el problema? Las respuestas dadas por los alumnos estaban relacionadas con el uso de un objeto que permitiera medir los ángulos internos del triángulo (transportador), así como, regla o escuadra. El Equipo 3 mencionó que se puede emplear el plano cartesiano para ubicar el cuadrado a fin de simplificar la ubicación de puntos.

4.6.2. Ambiente tecnológico

En la segunda parte de esta Actividad, los alumnos formaron un cuadrado empleando el software de Geogebra. Mediante sus herramientas ubicaron un punto cualquiera dentro del cuadrado y unieron dicho punto con los vértices de la base del cuadrado. En seguida, utilizaron la herramienta de medida de ángulo para obtener los valores de los ángulos interiores del triángulo. A través de la herramienta de Geogebra "Elige y Mueve", los alumnos manipulaban el punto ubicado en el interior del cuadrado. Así generaron una gran cantidad de representaciones, las cuales conservan las características del objeto matemático.

Durante la segunda parte de esta Actividad, 100% de los alumnos con ayuda del software lograron determinar la región que cumple la condición del problema, y que ésta [la región] presenta una relación de su forma con la de una semicircunferencia. En el interior de esta región es identificable un triángulo formado con el punto P y los extremos del diámetro de la semicircunferencia. Los alumnos detectaron mediante el software que la semicircunferencia delimita la región que cumple la condición establecida. Con esta información, se infiere que la región que cumple la condición del problema es aquella que se encuentra dentro del cuadrado, pero fuera de la semicircunferencia (véase Figura 4.4.D).

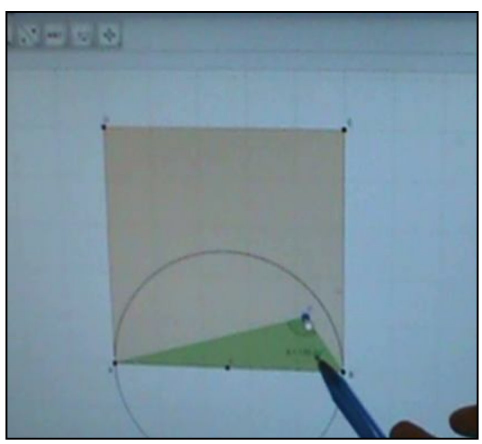

Figura 4.4.D. Cuarta Actividad en ambiente tecnológico empleando Geogebra. Identificación, por parte de los estudiantes, de la región que satisface la condición del problema.

Para identificar la región que cumple la condición establecida, el Equipo 5 partió de los resultados obtenidos en el ambiente de lápiz-y-papel, y contrastó sus observaciones con las realizadas en Geogebra. Los alumnos (en ambiente de lápiz-y-papel) infirieron que la región que cumplía la condición era denominada *rectangular* (reportada en la primera parte de la Actividad), sin embargo, al hacer uso del software notaron que su respuesta era parcialmente correcta, ya que al colocar el punto P debajo de la línea (imaginaria) que divide al cuadrado en dos rectángulos horizontales, también existen triángulos acutángulos. Esta situación llevó al Equipo 5 a aumentar la región solución y pensar que estaba delimitada por una región del tipo *triangular* (definida en el análisis de la primera parte del problema). Esta región *triangular* inferida mediante el software fue el nuevo punto de partida que permitió llegar a la solución correcta. A continuación, se transcribe lo dicho por el Equipo 5 a los cuestionamientos acerca de esta observación:

[25]	Profesor:	De acuerdo con su análisis ¿creen que si colocamos el punto P fuera del triángulo que observan [*región triangular*] (véase Figura 4.4.E), se cumple la condición de que los triángulos formados [*triángulos APB*] son acutángulos?
[26]	Alumno 5A:	Al parecer no [*dudan en dar esta respuesta*].
[27]	Profesor:	Usando el software, ¿qué sucede si colocan el punto P próximo al triangulo? [*región triangular*] pero fuera de él, ¿los triángulos son acutángulos o no?
[28]	Alumno 5A:	¡Vamos a ver! Si colocamos el punto por aquí (véase Figura 4.4.F). ¡Tampoco se cumple!
[29]	Alumno 5B:	Muévelo [*se refiere al punto P*] más a la derecha.
[30]	Alumno 5A:	¡Ahí! [*en ese lugar*], ¡ya no se cumple!
[31]	Alumno 5B:	Hace rato habíamos visto lo que pasaba a este punto de aquí [*se refiere al punto P señalado con la pluma]* (véase la Figura 4.4.G) y por lo tanto no puede ser un triángulo acutángulo. Creo que se va formando la mitad de un círculo, ya que si movemos el punto por aquí [*con la pluma, el alumno, índica*

		un movimiento semicircular en el monitor a partir del punto A] se va acercando a 90°.
[32]	Profesor:	Mencionaste un círculo. Usando las herramientas del software ¿podrían verificar su propuesta [*conjetura*]? ¿Qué sucede si colocan una circunferencia con centro en el punto medio del segmento $\overline{AB}$?
[33]	Alumno 5B:	Este es el círculo (véase Figura 4.4.H), ahora muévelo [*le indica a su compañero que mueva el punto P*].
[34]	Alumno 5A:	Cuando está [*se refiere al punto P*] adentro del círculo, este ángulo siempre es mayor [*mayor que 90°*] y cuando está afuera el ángulo es menor que 90°. Entonces ¡si es el círculo!
[35]	Profesor:	¿Qué sucede si el punto P está sobre la circunferencia? Es decir, sobre su perímetro.
[36]	Alumno 5A:	¡A ver! Es casi de 90°. Muévelo acá [*le indica el alumno a su compañero que desplace el punto P a un lugar sobre la circunferencia*].
[37]	Alumno 5B:	¡Es de 90°! Es un ángulo recto.
[38]	Alumno 5A:	Entonces, si el punto [*punto P*] está sobre el círculo, el ángulo es de 90°, significa que es [*la circunferencia*] el límite donde la región cumple la condición.

Los alumnos notaron mediante el uso del software que en el interior de la semicircunferencia el triángulo formado con el punto P tiene un ángulo mayor que 90°, es decir, se trata de un triángulo obtusángulo. Por lo tanto, la región que cumple la condición establecida es la que se encuentra dentro del cuadrado, pero que está fuera de la semicircunferencia (véase Figura 4.4.D).

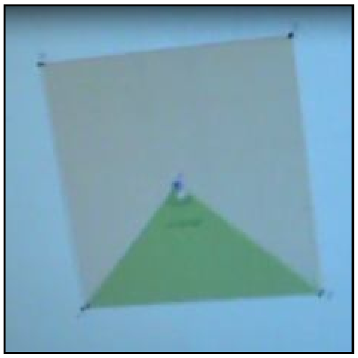

Figura 4.4.E.

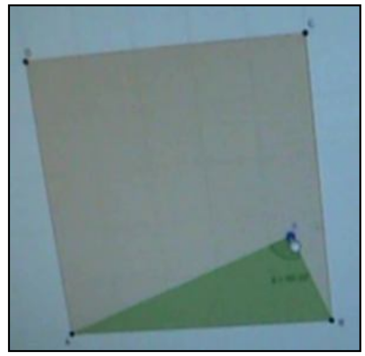

Figura 4.4.F.

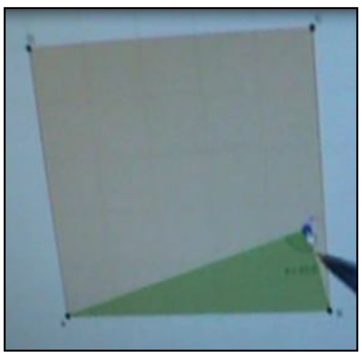

Figura 4.4.G.

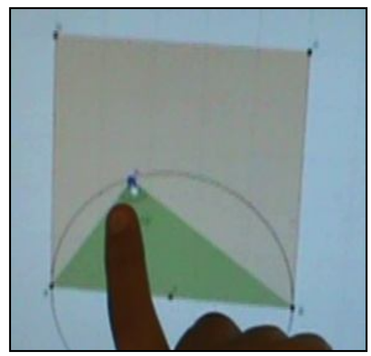

Figura 4.4.H.

Figuras 4.4.E, 4.4.H, 4.4.G y 4.4.H. Cuarta Actividad en ambiente tecnológico.
Secuencia realizada por el Equipo 5 para hallar la región que satisface la condición del problema.

Con ayuda del software Geogebra, durante la segunda parte de la Actividad, los alumnos lograron determinar que la región que cumple la condición establecida tenía que ver con el exterior de una semicircunferencia. La manipulación del punto P mediante el software es directa, ya que pueden señalar el vértice del triángulo y arrastrarlo. Los alumnos al manipular el punto P (vértice del triángulo) mediante el software no se preocuparon en pensar que "lo que en realidad están moviendo es el ratón, el cual arrastra un pequeño círculo en la pantalla, que a su vez genera un cambio en las coordenadas del vértice del triángulo". Simplemente aseguran que "están moviendo el vértice del triángulo". Esta manipulación provocó que la distancia cognitiva entre lo que está en la pantalla y el trasfondo matemático es mínima.

Al finalizar la Actividad se les preguntó a los estudiantes si el software ¿simplificó o dificultó la realización de la Actividad? En relación con esta pregunta, todos los alumnos concordaron en que el uso del software simplificó la Actividad. Además, cuatro equipos indicaron que al obtener la medida de los ángulos (a través de las herramientas del software) se puede mejorar la forma de visualizar la figura y obtener conclusiones. Dos equipos describieron que la manipulación del punto P, empleando el software, permite hacer visible diversos casos (particulares) que no lograron *ver* en la primera parte de la Actividad (ambiente de lápiz-y-papel).

Mediante el software la manipulación del punto P es directa, ya que los alumnos pueden señalar, seleccionar y arrastrar el vértice del triángulo. Esta manipulación simplificó la forma de visualizar la figura por parte de los alumnos y de esta forma tener éxito al identificar la región solución establecida en el problema. Los alumnos relacionaron esta solución con la zona delimitada por una semicircunferencia. Este es un ejemplo de cómo, a través de la tecnología, se puede potenciar en los alumnos las ideas matemáticas abstractas, partiendo de casos particulares.

4.7. Discusión de resultados

A partir del análisis realizado para cada una de las Actividades implementadas, a continuación se discuten los principales resultados obtenidos.

4.7.1. Principales resultados de la primera Actividad

La primera Actividad muestra el esbozo relacionado con una representación geométrica (véase Figura 4.1.A), la cual involucra una figura geométrica sin consistencia (falta de coherencia entre los elementos que la conforman). Durante la realización de esta actividad se observó: que la mayoría de los alumnos visualizan (en ambiente de lápiz-y-papel) la figura de acuerdo con su percepción; no hacen uso de las propiedades o descomposición de la figura en partes más simples. La visualización de esta figura tiende a adquirir la forma de mayor simpleza, y provoca que los alumnos perciban segmentos de igual longitud.

La manera de ver una figura geométrica impone un reconocimiento a primera vista de forma intuitiva y evidente; genera en el alumno un reconocimiento perceptual de formas y el establecimiento de las relaciones correspondientes. Este proceso es automático, y en la mayor parte de las ocasiones irreflexivo, dando origen a una interpretación incorrecta debido a la dificultad de interpretar y articular de manera adecuada la información implícita y explícita mostrada en la figura; la percepción de la figura impidió el reconocimiento de las propiedades de la misma. Los alumnos que visualizaron la representación geométrica de manera adecuada, en ambiente de lápiz-y-papel, evidenciaron la transición de la figura geométrica al objeto geométrico; los alumnos (Equipo 5) lograron visualizar, a través de la representación, las propiedades en cuestión, sin importar su apariencia perceptiva.

Todos los alumnos involucrados en la Actividad al hacer uso de la tecnología notaron que las propiedades mostradas en la Figura 4.1.A, son incorrectas en relación con la circunferencia mostrada. Los alumnos, con ayuda del software, se dieron cuenta de que durante la visualización realizada en ambiente de lápiz-y-papel omitieron las propiedades del objeto matemático mostrado (circunferencia).

A través del software, se logró que los alumnos conectaran el acto perceptivo con las propiedades de la figura, pasando del establecimiento de relaciones perceptivas a geométricas. El tipo de herramientas que utiliza el estudiante, empleando el software para crear una construcción, refleja el nivel de articulación conceptual para establecer relaciones geométricas en la representación dada.

4.7.2. Principales resultados de la segunda Actividad

Esta Actividad muestra de manera general que la representación geométrica de esta figura es visualizada por los alumnos, en ambiente de lápiz-y-papel como dos figuras particulares o específicas producidas por la misma posición de la base, pero con distintas alturas. Por esta razón, la mayor parte de los alumnos identificó en la figura dos representaciones diferentes con distintas áreas.

En el ambiente de lápiz-y-papel los alumnos establecieron relaciones entre las bases, ya que identificaron que comparten ambos triángulos las mismas unidades figurables, las cuales son visibles debido a que se encuentran de forma explícita en la representación. Sin embargo, las alturas son implícitas en la representación, es decir, las unidades figurales no son visibles (véase Figura 4.2.A). La apariencia de la figura provocó una primera ruptura entre las relaciones estructurales y los elementos constitutivos del objeto, debido a que no son explícitas aunque perceptivamente parecieran estar ahí.

El tipo de conocimiento por esta forma de *ver* está vinculado intrínsecamente con el contexto y llevó al alumno a hacer sustituciones o estimaciones numéricas, con las cuales lograron obtener la altura de las representaciones para el cálculo de áreas, sin embargo, esta sustitución o estimación numérica provocó un obstáculo para la adecuada visualización de alumnos. Este obstáculo se presentó, en la mayoría de los alumnos, al no asimilar de forma correcta y clara el concepto de altura de un triángulo, lo cual provocó que las alturas de los triángulos fueran consideradas desde el punto medio de la base hasta los vértices ubicados sobre la recta paralela; en consecuencia obtuvieron áreas diferentes. Durante la segunda parte de la Actividad y con ayuda del software, el total de los alumnos participantes reportó que las áreas son iguales. A través de las herramientas notaron que ambas representaciones tienen la misma altura y por consiguiente tienen la misma área al compartir ambos la base.

Con el desarrollo de esta Actividad, se ilustró que la representación geométrica proporcionada por el software está más cerca del objeto geométrico que su representación en el ambiente de lápiz-y-papel, ya que por medio de las herramientas del software se descubren las relaciones estructurales implícitas en la figura, lo cual provoca que la distancia cognitiva entre el objeto matemático y su representación se acorte. Los resultados muestran que las representaciones visuales no son necesariamente transparentes para los estudiantes, ya que deben poseer conocimiento considerable de los símbolos y convenciones de las representaciones para que éstas adquieran sentido.

4.7.3. Principales resultados de la tercera Actividad

Esta Actividad consistió básicamente en realizar la reconfiguración de una representación y determinar la relación que guarda al ser dividida en sub-figuras. El tratamiento dado a la representación se basó en identificar que las bases y las alturas de las sub-figuras son iguales.

A pesar de que las sub-figuras son visibles, ya que se encuentran de forma explícita en la representación, una pequeña parte del grupo tuvo dificultades en el cálculo de las áreas en el ambiente de lápiz-y-papel; los alumnos no lograron distinguir los triángulos como configuraciones de varias unidades figurales, sino como una sola unidad figural, lo que impidió identificar que todos los triángulos tienen la misma longitud de base y de altura. El proceso de reconocimiento de las sub-figuras generó dificultades para los alumnos ya que presentaban modificaciones sencillas como la posición, traslación y rotación (véase Figura 4.3.A).

Las sub-figuras son el resultado de una división de la figura geométrica principal a partir de los puntos medios de cada uno de sus lados. Esta representación geométrica promueve la producción heurística para la generalización del comportamiento de la figura, siempre que mantenga las relaciones estructurales. A pesar de esta reconfiguración, la mayoría de los alumnos fueron incapaces de inferir (con seguridad y sin lugar a dudas) el comportamiento general de la representación.

Esta configuración de la representación sirve de apoyo a la intuición, sin embargo, es necesario distinguir las reconfiguraciones, las cuales tienen una relación directa con el conocimiento que posee el estudiante de la teoría formal de la geometría; en algunos casos el alumno necesita *ver* las reconfiguraciones en la representación geométrica y luego vincularlas con el conocimiento. La identificación en la configuración inicial de una sub-configuración puede ser condición necesaria, pero no suficiente para desencadenar el razonamiento figural.

Debido al tiempo limitado para la implementación de la Actividad, el investigador previamente realizó la construcción de la figura geométrica empleando la herramienta tecnológica, la cual fue proporcionada a los alumnos a través de un archivo de trabajo y los alumnos únicamente se enfocaron a validar y generar conjeturas con respecto al comportamiento general de la representación geométrica empleando las herramientas con las que cuenta el software (véase parágrafo 3.6.1.3).

Al hacer uso del software, la mayor parte de los estudiantes confirmó la relación existente entre los triángulos $DXYZ$ y $DABC$; esta relación cumple que el área de la primera es igual a la cuarta parte del área de la segunda, respectivamente (véase Figura 4.3.A). Además, los alumnos identificaron que se generan triángulos congruentes cuando se divide, a partir de los puntos medios de cada lado, un triángulo.

La generalización de la relación de áreas para cualquier triángulo fue identificada usando el contexto de la geometría dinámica, ya que el alumno logró distinguir esta relación a través de las herramientas del software. El uso del SGD permitió a los alumnos distinguir las relaciones estructurales que presenta la figura geométrica; cuando se manipulan las representaciones geométricas, usando el software, los objetos matemáticos representados se mantienen coherentes, y promueven la generación y validación de la conjetura propuesta por los alumnos.

4.7.4. Principales resultados de la cuarta Actividad

Esta Actividad involucra la exteriorización de la idea de triángulo acutángulo, con la variante de que a partir de un punto que puede ser colocado en cualquier parte, dentro de un cuadrado, se formaran triángulos acutángulos. Una vez identificados estos tipos de triángulos, se pedía al estudiante que infiriera la zona o región dentro del cuadrado donde el punto cumplía dicha condición. Los resultados muestran que la importancia de la visualización radica en el proceso cognitivo de comprender, a través del producto de la creación de figuras geométricas en la mente del alumno o en lápiz-y-papel; este proceso está ligado con el conocimiento del estudiante (véase parágrafo 4.5).

La creación de figuras geométricas, en ambiente de lápiz-y-papel, provoca una ruptura en el reconocimiento de los objetos geométricos producido por la interpretación y la abstracción de aquello que representa el objeto matemático. Esta ruptura provocó que la mayoría de los alumnos no identificaran que la región que cumple la condición del problema está relacionada con una semicircunferencia e infieren regiones que cumplen la condición con características distintas de las solicitadas.

Esta Actividad permitió a los alumnos generar nuevas representaciones relacionadas con un triángulo de base igual que la del cuadrado y se representa el cambio de una figura manteniendo sus características geométricas (por ejemplo, al cambiar el punto P se generan diferentes triángulos ΔAPB). En este proceso de transformación explica Philippe (2004) se busca comprender la idea de generar el movimiento mediante imágenes mentales del registro figural. Estas imágenes mentales corresponden a la visualización introspectiva expuesta por Phillips et al (2010), sin embargo, para representar la idea de movimiento se debe generar más de una modificación en la imagen mental del registro figural.

De la misma manera que lo sucedido con la Actividad 3, debido al tiempo limitado para la implementación de la Actividad, el investigador realizó previamente la construcción de la figura geométrica empleando la herramienta tecnológica, la cual fue proporcionada a los alumnos a través de un archivo de trabajo y los alumnos solo se limitaron a verificar y generar conjeturas con respecto al comportamiento general de la representación geométrica empleando las herramientas con las que cuenta el software (véase parágrafo 3.6.1.4).

El tratamiento de figuras es un proceso demostrativo que requiere control tanto cognitivo como semiótico; representado por la imagen mental en movimiento. Esta dificultad relacionada con el tratamiento de las figuras se reduce cuando el ambiente de lápiz-y-papel se complementa con el tecnológico. Mediante el uso del software se puede comprender la idea de movimiento (representación dinámica) empleando la herramienta de arrastre (dragging). Cuando los estudiantes arrastran un objeto geométrico empleando el SGD, logran visualizar el paso de un objeto estático a uno dinámico, lo cual [el arrastre] les permite verificar alguna conjetura que hayan propuesto.

A través del SGD los estudiantes lograron conjeturar en torno a las propiedades presentadas por la representación dinámica. Esta interacción, entre el alumno y el software, favoreció el paso de lo concreto a lo abstracto. Los alumnos usando el SGD notaron que sus conjeturas propuestas en el ambiente de lápiz-y-papel eran erróneas, y con ayuda del software hallaron la región que cumple con la condición establecida. Los alumnos lograron generalizar el comportamiento de los triángulos formados por la base del cuadrado y el punto P, lo cual permitió inferir a los estudiantes que pueden resolver problemas a partir de diversas situaciones concretas, las cuales permiten generalizar la solución de dicha problemática.

4.8. Resultados generales

A continuación se describen los resultados generales de acuerdo con las Actividades implementadas:

4.8.1. Respecto al papel de la visualización

Toda representación de un objeto matemático involucra su análisis; si dicho objeto se trata de una figura geométrica, deben identificarse características mediante un tratamiento del objeto empleando el sentido de la vista. Para lograr analizar las figuras geométricas son necesarios aprendizajes específicos de cada tipo de visualización, los cuales son indispensables para desarrollar en los alumnos el sentido de *ver*.

Cuando los alumnos analizaron las figuras geométricas en ambiente de lápiz-y-papel, se establece que en la visualización existen variantes entre las que destacan la forma, el tamaño, su relación geométrica. Para lograr una correcta visualización de una figura geométrica es necesario que el alumno posea aprendizajes específicos para cada tipo de representación; este conocimiento permite recordar visualmente casi todo, lo relativo a la figura, que se ve o que se observa. La visualización es una actividad espontánea e interna y el reconocimiento de una figura geométrica emerge o surge automáticamente e inmediatamente de la memoria individual dando sentido al objeto mismo.

La visualización no sólo se define en términos fisiológicos como el acto de *ver*, sino como el proceso cognitivo de comprender, a través del producto de la creación, la interpretación, el uso y la reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, realizadas en nuestra mente, en papel o mediante software informático. Durante la visualización, la transformación de un conjunto de características generales a específicas, provocó que las nuevas visualizaciones usualmente contuvieran menos información que su fuente original. La visualización involucra actividades cognitivas como la interpretación y la abstracción de aquello que representa el objeto matemático. Debido a la interpretación y abstracción se generan determinados conflictos o ambivalencias de las figuras, teniendo su origen dentro de la dualidad forma y dimensión que las constituye.

La diversidad de resultados reportados por los alumnos durante la visualización de figuras geométricas (en ambiente de lápiz-y-papel), se relaciona con la forma de *ver* las representaciones, debido a que la visión es intencionalmente dirigida y está centrada en un pequeño campo de visión. Al visualizar una figura geométrica, una consideración que se debe tomar en cuenta está relacionada con la identificación perceptiva de formas y el reconocimiento de los objetos geométricos, cuando entre unos y otros existe una relación de similitud requerida.

Para los alumnos no es sencillo visualizar las figuras euclidianas más simples (círculo, triángulo, cuadrado…) como configuraciones de varias unidades figurales, ya que es común que las figuras sean vistas como una sola unidad figural. Es decir, un cuadrado nunca es visto espontáneamente como una configuración de cuatro unidades figurales 1D (cuatro segmentos), sino como una unidad figural simple 2D que de cierta manera no puede descomponerse. Sin embargo, hay ciertas figuras que ayudaron más que otras a descubrir la respuesta o la idea de la respuesta a una pregunta matemática mientras que otras parecen más bien un obstáculo.

La representación geométrica presentada en la primera Actividad (véase Figura 4.1.A) obstaculiza la respuesta a la pregunta matemática; la composición de la figura es inadecuada debido a la falta de coherencia en las propiedades mostradas, lo que ocasionó que la mayoría de los alumnos identificaran las propiedades de forma perceptual generando la inadecuada visualización de la figura. Por el contrario, la representación geométrica utilizada en la tercera Actividad (véase Figura 4.3.A) contiene diversos elementos (e.g., líneas horizontales y verticales), los cuales permitieron simplificar el cálculo de las áreas para las sub-figuras. De esta manera, la representación utilizada en la tercera ayudó a descubrir la respuesta a las preguntas matemáticas propuestas.

4.8.2. Respecto al trabajo en los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico

En el ambiente de lápiz-y-papel, los alumnos no siempre lograron realizar un proceso de visualización adecuado, por consiguiente, no interpretaron representaciones geométricas considerando tanto aspectos figurales como conceptuales. Por su parte, el ambiente tecnológico permite a los alumnos tener un mayor nivel de visualización que una representación geométrica en lápiz-y-papel. El alumno a través del software comienza a relacionar las acciones implícitas en el enunciado y determina que los datos perceptuales no son arbitrarios; a diferencia de las representaciones en lápiz-y-papel.

Usando el ambiente tecnológico el alumno pudo llevar a cabo el estudio con representaciones dinámicas de los objetos geométricos que pueden ser modificadas con cierta libertad, pero que conservan las relaciones matemáticas establecidas. Además, utilizando las herramientas del software, el alumno logró tener "cierta" interacción con la figura, ya que es posible medir, trasladar, realizar trazos auxiliares o simplemente manipularla mediante el arrastre (de acuerdo con su construcción) de los elementos que la constituyen. La manipulación del objeto matemático mediante el software fue directa, ya que se pudo seleccionar un objeto libre de la construcción y arrastrarlo. Esta manipulación provoca que la distancia cognitiva entre lo que está en la pantalla y las matemáticas detrás sea mínima.

Es importante resaltar que debido al tiempo que fueron cedidos los alumnos para la realización de las Actividades, durante el trabajo en el ambiente tecnológico los estudiantes solo construyeron dos de las cuatro figuras geométricas, es decir, empleando las herramientas del software reprodujeron las figuras geométricas de la Actividad 1 y 2. Sin embargo, las figuras geométricas involucradas en las Actividades 3 y 4 fueron previamente construidas por el investigador, de esta manera los alumnos se enfocaron a verificar las conjeturas propuestas previamente en el ambiente de lápiz-y-papel e identificar y conjeturar el comportamiento general de la representación.

El papel que tiene el alumno acerca de la apropiación de herramientas tecnológicas es parte de la génesis instrumental, la cual no es objeto de análisis para este estudio, sin embargo, es fundamental esta temática para estudios futuros, debido a situaciones en las que el diseño de la actividad prevee momentos didácticos clave para la construcción de conceptos pertenecientes a dominios específicos de la matemática escolar, tomando en consideración el bagaje matemático de los sujetos y los obstáculos (reportados en la literatura de investigación) que deberán remontar en su camino hacia tales construcciones o desarrollos.

El uso de la herramienta tecnológica (software Geogebra) proporcionó a los estudiantes un nivel mayor de evidencia que las figuras geométricas en ambiente de lápiz-y-papel. Los alumnos notaron las acciones realizadas durante la visualización de las figuras empleando el software y comprendieron las relaciones y restricciones existentes en las representaciones geométricas, que no fueron detectadas, ya que no las percibían empleando el ambiente de lápiz-y-papel. Las representaciones dinámicas ayudan a los estudiantes a producir conjeturas, que las representaciones estáticas obstaculizan por no estar al alcance los aspectos figurales y conceptuales. A través de las herramientas con que cuenta el software, en el trabajo con figuras geométricas, se genera un enlace entre la representación geométrica y el objeto geométrico analizado, con lo cual se logra reflejar el nivel de asimilación (articulación) conceptual que posee el alumno.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En este Capítulo se describen las conclusiones de la presente investigación, las cuales son el resultado del análisis y discusión de los resultados recabados mediante los instrumentos de recolección de datos empleados en este trabajo. Se parte de los objetivos de investigación y se desarrolla respecto a las preguntas que guiaron el presente estudio. Al final del Capítulo, se llevan a cabo reflexiones y se encamina el trabajo en torno a futuras investigaciones relacionadas con la temática desarrollada en el presente documento.

5.2 De acuerdo con los objetivos de la investigación

Los resultados analizados y discutidos en el Capítulo anterior permiten, en primer lugar, identificar los factores que influyen en el proceso de reconocimiento de objetos matemáticos relacionados con representaciones geométricas mostrados en el registro visual. Este análisis se desprende de los resultados cuantitativos y cualitativos obtenidos a partir de los datos recabados, con el fin de identificar los factores que influyen en la visualización de figuras geométricas. En segundo lugar, de acuerdo con los objetivos de esta investigación expuestos en el parágrafo 1.4.1, los resultados recabados en esta investigación contienen evidencias que permiten afirmar que las herramientas tecnológicas (ambiente tecnológico) influyen de manera positiva en la visualización de representaciones geométricas como complemento en el trabajo de visualización tradicional (ambiente de lápiz-y-papel), y que a continuación se detalla.

5.2.1. Factores que influyen en el reconocimiento de objetos geométricos

Durante el trabajo de visualización desarrollado por los diferentes Equipos, se logró identificar diversos factores que influyen en el reconocimiento de objetos geométricos. Mediante las Actividades implementadas, las cuales consistieron en visualizar objetos geométricos, los alumnos realizaron el análisis de distintas representaciones geométricas; este análisis incluyó múltiples conceptos cognitivos, como interpretar, relacionar, vincular, decodificar, etc. A través de estos conceptos cognitivos los alumnos obtuvieron información "parcial" (la mayoría de las veces) que la representación muestra de manera explícita e implícita.

Para la obtención de la información (correcta) que la representación geométrica contiene además de *ver* la figura se necesita saber de ella. Por ejemplo, como se mencionó en la primera Actividad, la mayoría de los alumnos visualizan la figura de acuerdo con su percepción y no con base en las propiedades de la figura (véase parágrafo 4.3.1). De lo anterior se puede mencionar que la falta de conocimiento del objeto matemático durante la visualización ocasionó diferentes dificultades al identificar representaciones geométricas. Los objetos matemáticos representados por las figuras no están a la vista de manera explícita; la mayor parte de los alumnos no se percató de este hecho, aunado a que el cerebro ve, pero identifica, reconoce e interpreta cosas distintas. El reconocimiento e interpretación que realizó el estudiante de la figura geométrica proviene del proceso que se llevó a cabo sobre la información, que es percibida e inherente de los efectos que el cerebro realiza sobre las distintas interpretaciones mostradas en la figura.

El uso de representaciones geométricas es fundamental en el desarrollo del pensamiento geométrico. Diversos estudios (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 1998, 1999a, 1999b, 2003; Presmeg, 2006; Phillips et al, 2010, entre otros), han demostrado que gran parte de la actividad de aprendizaje de la geometría se inicia y se basa en la interacción entre lo que se mira y el (sujeto) que mira, expresados en imágenes y signos que conducen a los conceptos matemáticos. Cuando los alumnos (sujeto que mira) visualizan diversas figuras geométricas (lo que se mira) existen diferentes factores (conocimiento, interpretación, relación...) que ponen de manifiesto la complejidad que guardan dichas representaciones para tener acceso a los objetos geométricos implícitos en las ellas.

Mediante las Actividades implementadas y a través del análisis de las figuras geométricas se logró verificar que ver con los ojos es distinto de visualizar haciendo uso del conocimiento relacionando lo que se ve con el objeto matemático; esta afirmación se verificó durante el análisis de datos de la primera Actividad (véase parágrafo 4.3), ya que la apariencia de la figura provocó una ruptura entre las relaciones estructurales y los elementos constitutivos de la representación geométrica.

Durante las Actividades implementadas se pudo verificar lo descrito por Duval (2003), quién expresa que las personas que no son especialistas, simplemente pasan por alto características que muestra la representación, o bien, pueden inventar representaciones de contenidos que tienen un significado personal, a pesar de no tener la certeza de las ideas que se asimilan y que no se parecen en lo absoluto a las representaciones matemáticas convencionales. Por ejemplo, durante la segunda Actividad el obstáculo que impidió lograr una adecuada visualización fue la parte conceptual relacionada con la altura de un triángulo, lo cual provocó que los alumnos consideraran como alturas de un triángulo la distancia desde el punto medio de la base hasta el vértice superior ubicado sobre la recta paralela (véase parágrafos 4.4 y 4.7.2).

De acuerdo con los resultados obtenidos en el Capítulo anterior, se puede afirmar que cuando los estudiantes visualizan representaciones geométricas, la acción de visualizar no se restringe a mirar y recuperar cierta información, sino a razonar con relación a conceptos en entornos visuales mediante la interpretación y la reflexión con el propósito de comprender y lograr el entendimiento del concepto matemático involucrado. Los alumnos cuando visualizaron una figura geométrica desarrollaron y trabajaron con una representación mental, la cual a través de representaciones semióticas lograron exponer sus ideas. Los resultados del Capítulo anterior muestran que durante el tratamiento de la representación geométrica, el alumno centró su atención en la nueva transformación, lo cual impidió recuperar la información implícita o explícita de la figura; por lo tanto la visualización de dicho objeto (en la mayoría de las ocasiones) no fue completa.

5.2.2. Visualización de objetos matemáticos mediante herramientas tecnológicas

A partir de los datos recabados y analizados en el Capítulo precedente de esta investigación, se puede afirmar que las herramientas tecnológicas han cambiado la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en particular para la temática relacionada con la visualización. Mediante las herramientas tecnológicas (SGD), los alumnos lograron visualizar representaciones geométricas de manera distinta de la realizada en lápiz-y-papel, ya que con ayuda del programa Geogebra, ellos relacionaron la representación geométrica mostrada en las diferentes figuras con el objeto matemático en cuestión. Por ejemplo, durante la cuarta Actividad (véase parágrafos 4.6 y 4.7.4) los alumnos identificaron la región delimitada por la semicircunferencia como aquella que cumple las condiciones del problema. Además, infirieron que los triángulos formados por la base del cuadrado y el tercer vértice (punto P) son triángulos rectángulos, siempre que el punto P esté colocado sobre la semicircunferencia, que tiene por diámetro la base del cuadrado. Esta conjetura propuesta por los alumnos no fue posible obtenerla en el ambiente de lápiz-y-papel. De esta manera, se comprueba que durante las Actividades implementadas, el ambiente tecnológico reduce la distancia cognitiva entre el concepto matemático y su representación geométrica.

Al usar el SGD (Geogebra), los alumnos tuvieron acceso a las herramientas con que cuenta dicho ambiente y con ayuda de ellas lograron interactuar con las representaciones geométricas. Las figuras geométricas que fueron creadas mediante el software tenían la facultad de ser manipuladas y de acuerdo con su construcción podían modificarse en forma dinámica. Por ejemplo, las representaciones geométricas de la tercera y cuarta Actividad poseen la característica de ser construcciones dinámicas, las cuales dependen de los parámetros o valores iniciales asignados a uno o varios objetos. Estos valores iniciales al ser modificados provocaron un cambio en los objetos, los cuales están en función de los parámetros iniciales. Este atributo que permiten los ambientes tecnológicos, específicamente el SGD (Geogebra), generó estimulo, interés y participación por parte de los estudiantes en la visualización de las representaciones geométricas contenidas en las Actividades implementadas. De esta manera, se verificó lo establecido por Haciomeroglu (2011), quien afirma que el ambiente tecnológico facilita a los estudiantes la visualización y análisis de las figuras geométricas.

5.3 Conclusiones respecto a las preguntas de investigación

A continuación se da respuesta a las preguntas de investigación que guiaron el presente trabajo, con base en el análisis y discusión de resultados expuestos en el Capítulo anterior.

5.3.1. Respuesta a la primera pregunta

¿Cuáles son las dificultades de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas?

Para dar respuesta a esta pregunta, y de acuerdo con el análisis y discusión de los datos recabados en la investigación, se debe considerar que existe una variedad inagotable de figuras geométricas. Si a estas figuras el individuo aplica la acción consistente en visualizar, deben reconocerse o identificarse en ellas, todas las organizaciones posibles que surgen a primera vista. Una actividad cognitiva que puede ser más compleja y más diversificada que lo necesario fuera de las matemáticas es *ver*. Durante la realización de las Actividades se detectó que la actividad cognitiva consistente en *ver* involucra dos operaciones que tienden a asimilarse dentro de un mismo acto: por una parte el alumno debe distinguir varias formas dentro de una figura, por otra el alumno debe identificar estas formas o su configuración representada.

En este contexto de la visualización, Hitt (1995) menciona que: "la visualización de los conceptos matemáticos no es una actividad cognitiva trivial: visualizar no es lo mismo que *ver*". En el contexto para este trabajo de investigación, visualizar está relacionado con la habilidad de formar una imagen visual en la mente, relacionada con representaciones geométricas que permitan obtener rasgos visibles de objetos matemáticos que no son perceptibles a simple vista.

Para analizar lo que representa una figura, los alumnos se apoyaron en la similitud y parecido de las formas identificadas dentro de ella con los objetos que han sido reconocidos o reencontrados. Esta identificación fue realizada por la mayor parte de los alumnos durante la tercera Actividad, ya que encontraron similitudes entre las diferentes sub-figuras presentadas por la misma representación (véase parágrafo 4.5.1). Cuando los alumnos identificaron que estas formas pueden parecerse a los objetos reconocidos, lograron iniciar la búsqueda de propiedades a través de la organización interna de la figura; es decir, buscaron las relaciones que puedan existir entre los elementos de la figura.

Para visualizar de forma adecuada las representaciones geométricas, de acuerdo con el análisis y la discusión de resultados expuesto en el Capítulo 4, se necesita que el alumno posea conocimientos específicos de los objetos matemáticos, con la finalidad de que comprenda, reconozca e identifique las propiedades y el comportamiento de las figuras. A través del análisis de datos se verificó que sin el conocimiento suficiente de los objetos matemáticos, por parte de los alumnos, las representaciones geométricas no adquieren sentido, a pesar de que las características y los elementos de las figuras se muestren de forma explícita en las representaciones.

De acuerdo con los resultados obtenidos en esta investigación, podemos afirmar que las figuras geométricas como cuadrados, rectángulos o triángulos no fueron percibidas por los alumnos como una configuración de tres o cuatro unidades figurales 1D (tres o cuatro segmentos), sino como unidad figural simple 2D que de cierta manera no puede descomponerse en unidades 1D. Por ejemplo, en la tercera Actividad, los alumnos no fueron capaces de descomponer una figura geométrica que contiene varias sub-figuras idénticas 2D con diferentes posiciones como unidades figurales 1D "segmentos iguales" (véase parágrafo 4.5.1). La dificultad consistente en descomponer una figura como una configuración de tres unidades figurales 1D se presentó en la tercera Actividad, a pesar de que la figura geométrica estaba enriquecida con trazos auxiliares "cuadricula" (véase parágrafo 4.5.1). De esta manera se verificó que durante la visualización de una figura, la identificación en la configuración inicial de una sub-configuración puede ser condición necesaria, pero no suficiente para desencadenar el razonamiento configural.

Otra limitante presentada durante la visualización, la cual fue identificada durante la realización de las Actividades, tiene relación con la posición del alumno. Duval (2003) menciona que la visión presenta una limitación de perspectiva, en la cual, siempre es relativa a un punto de vista determinado por la posición de eso que se observa; de manera que los objetos vistos no tienen únicamente un solo aspecto. Además una limitante adicional se presenta debido a que la visión es siempre intencionalmente dirigida, centrándose siempre sobre una pequeña región del campo de visión.

5.3.2. Respuesta a la segunda pregunta

¿Cómo influye el uso del ambiente tecnológico como complemento del de lápiz-y-papel, en la visualización de figuras geométricas?

Para dar respuesta a esta pregunta, se parte de la interpretación por parte del alumno de la representación de un objeto geométrico, ya sea en el ambiente de lápiz-y-papel o en el tecnológico. Esta interpretación depende de sus conocimientos previos, del contexto, así como, de la interpretación misma del objeto. Cuando se usaron representaciones geométricas, durante el trabajo de visualización involucró que el alumno ejecutara dos operaciones visuales que tienden a asimilarse dentro de un mismo acto: por una parte, distinguir varias formas dentro de una figura; por otra, identificar en estas formas una configuración representada. Como lo plantea Duval (2003), *ver* en matemáticas es una actividad cognitiva del sujeto; que puede ser más compleja o más diversificada de lo requerido fuera de esta disciplina.

De acuerdo con el análisis de resultados expuesto en el Capítulo anterior, la dificultad de identificación de los objetos matemáticos no solamente es imputable a los alumnos, sino también, intervienen factores internos del proceso de identificación y del tratamiento visual de las formas. Con esta aseveración se puede afirmar que el manejo del registro visual no es fácil ni natural. Los resultados de esta investigación muestran que la mayor parte de los alumnos visualizan, en ambiente de lápiz-y-papel, los objetos geométricos de manera perceptual, debido a la falta de conocimiento, lo cual les impide y limita la obtención de relaciones geométricas implícitas en las figuras, ya que solo prestan atención a una parte (un subconjunto propio) de las características visuales de la representación.

Con base en el análisis de resultados expuesto en cada una de las Actividades, durante la visualización en el ambiente de lápiz-y-papel, se puede afirmar que los alumnos son incapaces de identificar diferentes figuras usuales, además, carecen de la habilidad para construir y manipular figuras (e.g. trasladarlas o girarlas) mediante imágenes mentales que permitan dar significado a sus representaciones. Por ejemplo, durante la generalización del comportamiento de la figura geométrica presentada en la tercera Actividad (véase parágrafo 4.5.1). Durante este estudio se destaca la reacción de los estudiantes sobre lo que es visual, utilizando instintivamente la percepción e interpretación de los objetos matemáticos de acuerdo con lo que la representación gráfica permite evocar[15] en ellos.

Por el contrario, cuando los alumnos utilizaron el ambiente tecnológico, durante las Actividades implementadas, se logró identificar que con ayuda de la herramienta tecnológica (software Geogebra) los alumnos visualizaron las figuras geométricas con base en sus propiedades, apoyados por las herramientas propias del SGD, las cuales mediante su uso los alumnos lograron reducir la brecha entre la representación física, la representación de las imágenes mentales y el objeto matemático mismo. Con base en los resultados obtenidos, se puede afirmar que el software permitió la exploración y la reflexión sobre conceptos matemáticos, ya que los estudiantes a tráves la herramienta tecnológica lograron vincular los objetos geométricos con sus propiedades.

Cuando los alumnos trabajaron con lápiz-y-papel, la representación geométrica proporcionó al estudiante poca visión sobre el objeto, ya que no lo pudo manipular. En cambio, al utilizar el SGD el estudiante adquirió recursos de apoyo. Estos recursos permitieron al estudiante establecer puentes entre la representación del objeto matemático con sus propiedades. La representación geométrica mostrada en el medio tecnológico, permitió interactuar con el objeto geométrico; además el estudiante tuvo la facultad de manipularlo sin modificar sus propiedades estructurales. Por ejemplo, las representaciones empleadas en la tercera y cuarta Actividad, en las cuales fue necesario manipular elementos en la representación de forma que se tuviera una nueva figura conservando las características y propiedades de la figura original (véase parágrafos 4.5.2 y 4.6.2).

Al hacer uso de la herramienta tecnológica, los estudiantes se dan cuenta de que durante el trabajo en ambiente de lápiz-y-papel sólo lograron percibir e interpretar el objeto geométrico, y no consideraron aquellas propiedades estructurales con las que cuenta ese objeto. Como resultado de la interacción con el software los estudiantes lograron validar las conjeturas propuestas en ambiente de lápiz-y-papel y formular nuevas conjeturas en torno a las propiedades y características que tienen las figuras. Esta interacción favoreció a los alumnos el paso de lo concreto a lo abstracto en relación con el comportamiento de las

[15] El término “evocar” según la DRAE se refiere a traer algo [objeto geométrico] a la memoria o a la imaginación.

representaciones geométricas cuando se modifican algunos parámetros que generan nuevas figuras con propiedades geométricas inalterables (véase parágrafos 4.4.2, 4.5.2 y 4.6.2)

El SGD permitió incorporar visualizaciones de figuras geométricas no sólo estáticas de dos dimensiones, sino también dinámicas con la finalidad de contribuir a una mejor comprensión de conceptos matemáticos, partiendo desde operaciones concretas hasta lograr articular conceptos abstractos de esta disciplina. Cuando los alumnos usaron el SGD, generaron representaciones geométricas con características diferentes de las empleadas en lápiz-y-papel. Las representaciones dinámicas producidas en el ambiente tecnológico poseen un gran potencial debido a que el alumno no solo puede identificar sus propiedades, sino que tiene la facultad de interactuar y transformar esas construcciones mediante las herramientas propias del software. Con ayuda de las herramientas que posee el SGD, el alumno logró verificar y validar sus conjeturas propuestas en el ambiente de lápiz-y-papel.

El uso de las herramientas tecnológicas, durante la realización de las Actividades de trabajo, permitió la manipulación de las figuras y la construcción de objetos que mostraron de manera explícita sus propiedades. De acuerdo con el análisis de datos y la discusión de resultados se puede afirmar que el SGD potencia el aprendizaje de conceptos geométricos, pero no es sólo este ambiente que se debe tomar en cuenta como herramienta de enseñanza, sino que es crucial también el uso de lápiz-y-papel, pues estos ambientes se complementan con la finalidad de lograr un éxito (parcial) en la visualización de objetos matemáticos.

5.3.3. Respuesta a la tercera pregunta

¿Qué ventajas y desventajas se tienen al usar los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico en la visualización de objetos matemáticos?

Para discutir las ventajas y desventajas que se presentan cuando se visualizan objetos matemáticos es importante basarse en los elementos teóricos que permitan comprender las posibles dificultades presentadas. Cuando los alumnos analizaron las figuras geométricas de forma tradicional (ambiente de lápiz-y-papel) una dificultad notoria fue la limitación de perspectiva que presenta la figura cuando es analizada. Las figuras geométricas presentadas en ambiente tradicional, pueden generar en el alumno diferentes tipos de interpretaciones, de acuerdo con la percepción de la representación analizada.

La manera de cómo los alumnos identificaron lo que una figura representa promovió la búsqueda de propiedades a través de la organización interna de la figura (véase parágrafos 4.3.1 y 4.5.2). Sin embargo, para que la representación adquiera sentido, el alumno debe poseer un grado de conocimiento y debe ser capaz de enriquecer, por el mismo, la figura inicial que le permita reconocer las figuras o sub-figuras que se encuentran implícitas o explicitas en ellas. De acuerdo con los resultados obtenidos la mayor parte de los alumnos no lograron enriquecer las figuras de forma adecuada, en el ambiente de lápiz-y-papel (véase parágrafos 4.4 y 4.5).

Las figuras geométricas presentadas en ambiente tradicional no tienen el mismo valor heurístico, ya que hay ciertas figuras que ayudan a descubrir ciertas propiedades matemáticas, mientras que otras figuras parecen ocultar dichos elementos. Por ejemplo, las figuras que se emplearon en la primera y segunda Actividad contienen diferentes elementos implícitos y explícitos, los cuales la mayor parte de los alumnos identificó de manera errónea debido entre otros motivos a la falta de conocimiento, lo cual impidió una adecuada visualización de las figuras presentadas (véase parágrafos 4.3.1 y 4.5.1). Debido a que las figuras geométricas se construyen con la ayuda de instrumentos para que las figuras muestren las relaciones existentes, los estudiantes establecieron relaciones perceptivas más que estructurales, ya que se basan en el reconocimiento y la aproximación de las formas. Como se mostró en el análisis de resultados en la primera Actividad los alumnos visualizaron de manera perceptiva la representación sin notar las relaciones implícitas existentes que la figura contiene. Cuando los alumnos construyeron la figura usando el SGD notaron las relaciones que guarda la representación (véase parágrafo 4.3.1).

De acuerdo con los resultados expuestos en el Capítulo anterior, las herramientas tecnológicas permitieron a los alumnos manipular de manera directa y continua los objetos geométricos, respetando sus propiedades geométricas. Por ejemplo, la manipulación de las figuras geométricas de la tercera y cuarta Actividad cuyos elementos estructurales permanecen invariantes. A través de los SGD los alumnos llevaron a cabo exploraciones y observaciones que de otra manera quedan reservados para las personas que ya han desarrollado una capacidad de imaginación y de visualización (como los matemáticos o personas con mayor experiencia en la rama) que generalmente no tienen los alumnos del nivel medio superior.

Las ventajas presentadas por las herramientas tecnológicas, a lo largo de las diferentes Actividades implementadas, introduce posibilidades diferentes para el estudio con respecto a la tecnología utilizada tradicionalmente, ya que aunque los alumnos manejaron un mismo concepto, al hacer uso de distintas representaciones se lograron mostrar significados distintos. Por ejemplo, durante la visualización de la cuarta Actividad, realizada en ambiente tecnológico, los alumnos lograron identificar diversas características que presenta el problema. El uso de las herramientas tecnológicas tiene la finalidad de convertirlas en medios que permiten la transparencia y la accesibilidad de los objetos matemáticos para el alumno.

Mediante el SGD se lograron validar los resultados obtenidos en lápiz-y-papel para las Actividades implementadas. Philippe (2004) indica que la representación gráfica de un objeto dinámico vuelve evidente los límites tradicionales de las representaciones típicas posibles de registros figurales. De esta manera, se reduce la brecha entre la representación física y la representación de las imágenes mentales. De acuerdo a la NCTM (2000), las nuevas tecnologías proporcionan acceso a problemas y métodos que hasta hace poco eran difíciles de explorar de forma significativa y donde los alumnos deben familiarizarse con las representaciones normalmente empleadas.

De acuerdo con los resultados obtenidos, la visualización de figuras provenientes de ambientes dinámicos potencia el entendimiento de ideas matemáticas abstractas (tercera y cuarta Actividad). Sin embargo, la visualización puede ser confusa para los estudiantes, ya que los objetos, accesibles a nuestros sentidos no son fiables y, por lo tanto, la visualización o percepción podría ser engañosa (primera Actividad). El dilema se centra en lo que se busca obtener, es por ello que la visualización de representaciones de objetos matemáticos requiere reflexión tanto de los profesores como de los estudiantes.

5.4. Reflexiones finales

Durante la visualización de representaciones geométricas efectuada por los alumnos se debe tomar en cuenta que la visión pone de manifiesto una limitación de perspectiva, ya que siempre es relativa a un punto de vista determinado por la posición de la figura que se observa; de forma tal que los objetos vistos por los alumnos no tienen únicamente un solo aspecto. Además, la visión siempre es intencionalmente dirigida y se centra en todo momento sobre una pequeña región del campo de visión.

Las representaciones de objetos matemáticos como figuras geométricas son elementos esenciales, con los cuales los alumnos comunican sus enfoques, argumentos o conocimientos. Para visualizar las figuras geométricas, de manera adecuada, los alumnos requieren aprendizajes específicos, los cuales proporcionan a los estudiantes el sentido de *ver*. Además, las representaciones geométricas están relacionadas con los procesos y productos observables externa e internamente por parte de los alumnos.

Para lograr una adecuada visualización, el alumno debe ser capaz de construir una figura geométrica o una gráfica; que le permita *ver* y *saber* lo que ésta representa. La interpretación de una representación geométrica permitió en los alumnos la transición de la figura al objeto geométrico, el cual depende de los conocimientos de cada estudiante y del contexto en el cual se está inmerso. Durante la visualización los alumnos deben ser capaces de efectuar simultáneamente dos focalizaciones, en las cuales los campos de visión se complementan perfectamente; una en el campo constituido en las formas 2D y la otra dentro del campo constituido por las formas 1D o 0D.

Por un lado, durante el proceso de visualización, los alumnos deben ser capaces de enriquecer, por sí mismos, la figura inicial y de reconocer las figuras o sub-figuras pertinentes que se añadieron. De acuerdo con el análisis de datos se puede afirmar que existen ciertas representaciones geométricas que ayudan más que otras a descubrir la respuesta o la idea de la respuesta a una pregunta matemática mientras que otras parecen más bien un obstáculo.

Por otro lado, el ambiente tecnológico renueva de forma importante el campo de la visualización y aporta una dimensión esencial en la visión de las representaciones geométricas. Cuando se empleó un SGD se promovió la construcción de las figuras geométricas, en las cuales, sus propiedades y características se mantuvieron a pesar de la manipulación de sus elementos.

Durante el proceso de visualización, algunos alumnos lograron vincular el acto perceptivo con la teoría, es decir, lograron *ver* a través de la representación mostrada en algún ambiente (lápiz-y-papel o tecnológico) que les permitió retomar la teoría que conlleva ese objeto matemático. La visualización no está ligada con la percepción sino con la identificación de las estructuras que la figura contiene implícita o explícitamente. En el contexto de la geometría dinámica, la representación de la figura visualizada por los alumnos permitió establecer un lazo, con el cual se logró distinguir las dificultades comunes en la visualización de las figuras y relacionarlas con su carácter estructural.

Mediante las representaciones dinámicas, realizadas en la segunda parte de cada una de las Actividades implementadas, el alumno comenzó a relacionar las propiedades implícitas de la figura y determinó que sus elementos no tienen coherencia si son considerados de forma perceptual; a diferencia de las representaciones en lápiz-y-papel que tienen ciertas características o muestran limitación de perspectiva (véase parágrafo 4.3.1). A través del software se conectó el acto perceptivo con las características implícitas de la figura, lo cual permitió el paso de las relaciones perceptivas a las relaciones geométricas. De esta manera, se demuestra que la representación geométrica realizada en el software es más cercana del objeto geométrico que una representación en lápiz-y-papel.

De acuerdo con los resultados reportados en el Capítulo anterior, las herramientas informáticas introdujeron diferentes posibilidades durante la visualización de los objetos matemáticos respecto del ambiente de lápiz-y-papel. La NCTM (2000) expresa que con ayuda de la tecnología, los estudiantes tienen la facultad de aprender matemáticas, ya que mediante el software pueden examinar más representaciones o ejemplos de los que son posibles a mano, y así, pueden formular conjeturas fácilmente. Además, se debe considerar que el uso eficaz de la tecnología en las clases de matemáticas depende del profesor; ya que la tecnología por sí misma no es un remedio, por medio de la cual se resuelven los problemas cognitivos de los alumnos. Como cualquier herramienta, puede ser usada bien o deficientemente.

Uno de los papeles del profesor está enfocado en ayudar a los alumnos a conectar sus imágenes personales a representaciones más convencionales. Las representaciones matemáticas que aprenden los alumnos les proporcionan la oportunidad de comprender el poder y la belleza de las matemáticas, y los dota para usar representaciones en su vida, en el trabajo y en estudios posteriores, además de que las representaciones generadas por los alumnos constituyen una ventana muy útil para ver lo que piensan (NCTM, 2000). Además, los alumnos requieren de una base conceptual que les permita pasar de un nivel perceptivo a uno teórico, de manera que al visualizar las figuras empleando el software no genere ambigüedades en su interpretación.

Los profesores deben utilizar la tecnología para enriquecer las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos, seleccionando o creando tareas matemáticas que se beneficien de lo que ella puede hacer bien y eficientemente: bosquejar gráficas, visualizar y efectuar cálculos. El uso de herramientas tecnológicas permite a los estudiantes que tienen dificultad con los procedimientos básicos, desarrollar y demostrar otros conocimientos matemáticos, los cuales a su vez pueden ayudarles, con el tiempo, a aprender los procedimientos (NCTM, 2000).

Durante las actividades visuales no se puede dejar sobreentendido que los estudiantes requieran instrucción explícita tanto del uso e interpretación de objetos matemáticos (ya sean estáticos o dinámicos) como de la adecuada utilización de la herramienta tecnológica. Un ejemplo claro de lo descrito anteriormente se presentó durante la implementación de las Actividades en el ambiente tecnológico, ya que debido al tiempo limitado que fueron cedidos los alumnos para el desarrollo de este trabajo, provocó que los estudiantes solo se limitaran a construir dos de las cuatro representaciones geométricas utilizadas.

Esta limitante relacionada con la construcción de las figuras geométricas en el ambiente tecnológico promueve que no se puede concluir con firmeza que el uso de la herramienta tecnológica mejora al 100% la visualización de representaciones geométricas, debido a las dificultades de apropiación por parte de los alumnos de dicha herramienta para el aprendizaje de las matemáticas, la cual es vista desde la perspectiva teórica de la *génesis instrumental*, la cual debe ser contemplada para las investigaciones futuras relacionadas a esta temática.

De esta manera, basándose en lo descrito en este Capítulo se podría pensar que quienes usan la herramienta tecnológica como parte de la enseñanza pueden ser demasiado optimistas, y creer que los estudiantes aprenden a visualizar de forma profesional simplemente mediante el uso de dicho ambiente, sin embargo, la realidad es otra, ya que: a) no todas las figuras geométricas poseen el mismo valor heurístico, es decir, en algunas representaciones geométricas pueden ser más simples que otras y de igual manera se pueden extraer sus propiedades con mayor simpleza o dificultad; b) el uso de la herramienta tecnológica no garantiza la apropiación del conocimiento, es decir, el ambiente tecnológico no es un remedio en el aprendizaje de las matemáticas; c) se requiere instrucción explícita tanto del uso e interpretación de objetos matemáticos como de la adecuada utilización de la herramienta tecnológica, con el fin de lograr una mejor visualización de las representaciones geométricas.

Dubinsky y Tall (1991) afirman que los paquetes computacionales, con los cuales se realizan manipulaciones simbólicas, son herramientas de gran alcance. Sin embargo, ellos advierten que es erróneo creer que el equipo proporciona una manera fácil de adquirir conocimiento matemático. La rápida ejecución en la computadora de algoritmos matemáticos no garantiza la comprensión de los conceptos. Con el fin de adquirir (o de construir) conocimiento, los autores afirman que es necesario elaborar propuestas didácticas que lleven a buen término procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Estos mismos autores, también afirman que la visualización y las manipulaciones simbólicas de objetos matemáticos deben ser complementarias con el fin de contribuir a una comprensión profunda de conceptos.

CAPÍTULO 6

INVESTIGACIÓN FUTURA

LA VISUALIZACIÓN COMO PROMOTORA DE LA ABSTRACCIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DEL AMBIENTE TECNOLÓGICO COMO COMPLEMENTO DEL AMBIENTE TRADICIONAL

6.1. Introducción

Con el fin de lograr una mejor comprensión, los conceptos matemáticos pueden estudiarse a través de sus diferentes formas de representación; una de éstas son las representaciones geométricas. El proceso de visualización de representaciones geométricas es fundamental en el desarrollo del pensamiento geométrico, donde la percepción, el razonamiento y los conocimientos están entrelazados. De esta manera, las matemáticas son quizá la única disciplina, en la cual se desarrolla una profunda participación activa de varios órganos, para lograr mayor efectividad entre los dos actos cognitivos de la tradición filosófica y epistemológica que se oponen naturalmente: *ver* y razonar.

La visualización ha recibido especial atención como tema de investigación en educación matemática, principalmente, en el área de la geometría (e.g., Arcavi, 2003; Bishop, 1992; Duval, 2003; Presmeg, 2006; entre otros). A través de la visualización matemática, se pueden determinar los procesos y las capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren *ver* o *imaginar* mentalmente los objetos geométricos, relacionándolos y realizando determinadas operaciones y transformaciones geométricas con dichos objetos. Para que los alumnos comprendan conceptos matemáticos, es trascendental que aprendan a *ver* (término relacionado con el reconocimiento de alguna figura geométrica poniendo especial atención y cuidado, percibiéndola y examinándola por medio del sentido de la vista y de la inteligencia) propiedades en una representación geométrica.

Duval (2003) menciona que cuando los estudiantes emplean las representaciones geométricas, la acción necesaria y suficiente es simplemente *ver*, sin embargo, los alumnos no logran mirar las figuras como los profesores desearían que las mirasen y, por consiguiente, no obtienen la información que dichas figuras contienen o se encuentra implícita en ellas. La manera en que un alumno visualiza objetos matemáticos; en particular, figuras geométricas, es de suma importancia para que él logre el aprendizaje de conceptos matemáticos asociados con esas figuras. Para Duval (1999), el realizar una adecuada comprensión visual de un objeto matemático permite al alumno reconocer las representaciones de ese concepto en el registro visual, el cual debe ser capaz de transformarlas y convertirlas en otros registros cuando se realizan razonamientos matemáticos con ellas.

Debido al desarrollo de las herramientas informáticas se pueden incorporar programas que faciliten la visualización de diferentes representaciones matemáticas (mediante el uso adecuado de estos ambientes), con el fin de identificar las propiedades implícitas y explícitas que contienen las figuras. Los nuevos ambientes (tecnológicos) permiten visualizar representaciones geométricas de una manera diferente del ambiente tradicional (papel-y-lápiz), estrechando el lazo entre las representaciones geométricas y los objetos matemáticos involucrados.

La presente investigación fue realizada con la intención de analizar la influencia del uso del ambiente tecnológico como complemento del ambiente de lápiz-y-papel en la visualización de figuras geométricas. Se propone que el uso de la tecnología contribuye en la construcción de significados matemáticos a través del estudio de figuras geométricas analizadas previamente en ambiente de lápiz-y-papel. Sin embargo, a lo largo de la investigación se generaron nuevas preguntas y expectativas referentes al papel de la visualización y su relación entre los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico, con el fin de desarrollar métodos visuales efectivos para producir y sustentar generalizaciones.

Debido a estas nuevas expectativas surgidas, se considera esencial continuar el análisis de esta temática, ya que la visualización de figuras geométricas es parte importante del funcionamiento representacional en matemáticas, donde su forma y dimensión juegan un papel trascendental en las mismas.

6.2. Antecedentes

La visualización como herramienta de enseñanza y de aprendizaje de conceptos matemáticos (especialmente de geometría) ha sido uno de los ejes principales de investigación desde hace varios años. Presmeg (2006) detalla el desarrollo de la investigación sobre la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La autora indica que el estudio de la visualización matemática comenzó en las décadas de los 70 y 80, basándose en la psicología teórica.

Un ejemplo de la psicología teórica es la teoría de la Gestalt, la cual sostiene que la mente se encarga de configurar, mediante diversos principios, todos aquellos elementos que forman parte de ella gracias a la acción de la percepción o al acervo de la memoria. Esta corriente psicológica considera que es la percepción (de una figura) la que genera una forma significativa y dominante en la mente de quien realiza agrupaciones de “objetos” según su semejanza. Estas agrupaciones tienden a adquirir la forma de mayor simpleza y si faltara algún rasgo característico de la figura, la mente se encarga de añadirlo para obtener una versión completa de ella (ley de cierre o continuidad).

Durante la década de los 90, la visualización fue reconocida como un campo de investigación en educación matemática. Bishop (1992) se destacó durante esta época por sus trabajos relacionados con la visualización de figuras geométricas, resaltando los obstáculos que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas, debido a la confusión entre la forma y el contenido representado. A partir del año 2000 se ha observado un aumento en las investigaciones sobre los aspectos semióticos de la visualización de figuras, dando prioridad a la comprensión de los conceptos de imagen y de representación. Diversos autores (e.g., Arcavi, 2003; Bishop, 1992; Duval, 1998, 2003; Presmeg, 2006, entre otros) comparten la idea de que la visualización en matemáticas es trascendental para la comprensión del conocimiento matemático por parte de los alumnos.

La visualización se refiere a la actividad cognitiva intrínsecamente semiótica y no puede ser entendida como el simple acto de *ver*, sino como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, interpretar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del individuo. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones y el objeto matemático. La visualización es un medio, mediante el cual el alumno puede comprender conceptos matemáticos relacionados con las representaciones geométricas.

Existe una ruptura entre lo que *ven* los alumnos y los profesores en las representaciones geométricas. Es común que los alumnos presenten dificultades para identificar las propiedades implícitas y explicitas de la figura, para descubrir sus relaciones estructurales, y más aún, para comprenderlas. Esta dificultad es presentada debido a que no siempre el alumno puede *ver* en una representación geométrica, las invariantes relativas existentes en dicha representación. Hay ciertas representaciones geométricas que ayudan más que otras a descubrir la respuesta o la idea de la respuesta a una pregunta matemática mientras que otras parecen más bien un obstáculo.

En la última década, el estudio de la visualización en el pensamiento matemático ha sido objeto de numerosas investigaciones (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 1998, 1999a, 1999b, 2003; Presmeg, 2006; Phillips et al, 2010, entre otros) debido al desarrollo de los ambientes tecnológicos, los cuales han influido en la naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En la actualidad, se cuenta con una gran cantidad de materiales educativos relacionados con matemáticas como libros, revistas, páginas de internet, etc. En ellos, la visualización juega un papel trascendental debido a que estos materiales contienen gran cantidad de imágenes, diagramas y gráficos.

Mediante el uso de las herramientas tecnológicas, en el salón de clases, los estudiantes pueden explorar y comunicar conceptos matemáticos de diversas maneras, usando, por ejemplo, las representaciones gráficas de esos conceptos matemáticos y surgidos de procedimientos relacionados con la interpretación de tales conceptos. El análisis de representaciones geométricas a través de las herramientas tecnológicas facilita a los estudiantes su visualización, debido a que existe una interacción entre la representación geométrica y el alumno, lo cual permite a los estudiantes descubrir propiedades, proponer conjeturas y validarlas.

Durante la visualización de representaciones geométricas empleando las herramientas tecnológicas, a diferencia del ambiente tradicional (lápiz-y-papel), se puede lograr un acercamiento entre la representación geométrica y el objeto matemático representado, el cual depende de diferentes factores como el grado de conocimiento de los símbolos y convenciones para que las representaciones tengan sentido; el conocimiento del individuo, la interpretación de la representación; el reconocer en una figura los objetos que las formas visualmente representan, entre otras.

Estas dificultades explicadas en el párrafo anterior, son llevadas a cabo por los estudiantes cuando llevan a cabo la visualización de representaciones geométricas y pueden reducirse cuando los ambientes (lápiz-y-papel y tecnológico) se complementan entre sí, para lograr una mayor comprensión y entendimiento de los conceptos matemáticos involucrados. El presente trabajo de investigación, permitió responder una serie de preguntas, relacionadas con la visualización de representaciones geométricas, en los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico, entre las que se destacan: ¿qué es la visualización?, ¿cuáles son las dificultades de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas?, ¿qué ventajas y desventajas se tienen al usar los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico en la visualización de objetos matemáticos? Estas preguntas son respondidas a lo largo de los primeros cinco capítulos de esta investigación.

Sin embargo, existen otros cuestionamientos que han surgido, durante el desarrollo de este trabajo, como: ¿cuál es el efecto que tiene el uso de la herramienta tecnológica en el desarrollo de habilidades matemáticas relacionadas con la visualización? ¿Cómo interpretan, los alumnos, las características visualizadas en las figuras geométricas empleando el ambiente tecnológico como complemento del ambiente de lápiz-y-papel? ¿Cómo se puede aprovechar la visualización para promover la abstracción de figuras geométricas y su generalización empleando los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico?

Existe gran interés en responder estas y otras preguntas, es por ello que surge la necesidad de continuar explorando esta temática tan diversa.

Se considera (a juicio del autor) que es fundamental y trascendental dar continuidad al análisis de esta problemática, con la finalidad de generar respuestas sólidas que aclaren y sustenten estos cuestionamientos.

6.3. Justificación de la investigación

Durante el desarrollo de este trabajo fue evidente que el primer acercamiento de los estudiantes a las actividades implementadas estaba relacionado con el ambiente de lápiz-y-papel: representaciones estáticas, análisis de un caso particular y, con base en él, elaboraron sus primeras conjeturas. Las exploraciones que realizaron en ambientes dinámicos, como complemento del tradicional (lápiz-y-papel), facilitaron a los estudiantes la manipulación de las representaciones figurales de los objetos geométricos mediante herramientas como el arrastre, la medición, la verificación de propiedades, construcciones auxiliares, entre otras. Como resultado de la interacción, los alumnos descubrieron propiedades y generaron conjeturas.

Sin embargo, a lo largo del trabajo de investigación han surgido nuevas preguntas y cuestionamientos acerca del papel de la visualización y su influencia en los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico, con el fin de promover la abstracción matemática y la generalización de relaciones que guardan los objetos geométricos.

Un claro ejemplo de la necesidad de continuar este trabajo se presentó durante la cuarta Actividad reportada en la presente investigación, en la cual durante el trabajo de lápiz-y-papel los alumnos propusieron regiones que cumplían (a su criterio) la condición establecida en el problema (véase parágrafo 4.6). La mayor parte de las soluciones dadas por los alumnos no cumplían con la condición del problema, sin embargo, el uso de la herramienta tecnológica apoyó a los estudiantes para hallar la región que cumple con dicha condición. A continuación se transcribe parte de la conversación realizada entre el Equipo 5 y el profesor durante la implementación de la cuarta Actividad:

[25] Profesor: De acuerdo con su análisis ¿creen que si colocamos el punto P fuera del triángulo que observan [*región triangular*] (véase Figura 4.4.E), se cumple la condición de que los triángulos formados [*triángulos APB*] son acutángulos?

[26] Alumno 5A: Al parecer no [*dudan en dar esta respuesta*].

[27] Profesor: Usando el software, ¿qué sucede si colocan el punto P próximo al triangulo? [*región triangular*] pero fuera de él, ¿los triángulos son acutángulos o no?

[28] Alumno 5A: ¡Vamos a ver! Si colocamos el punto por aquí (véase Figura 4.4.F). ¡Tampoco se cumple!

[29] Alumno 5B: Muévelo [*se refiere al punto P*] más a la derecha.

[30] Alumno 5A: ¡Ahí! [*en ese lugar*], ¡ya no se cumple!

[31] Alumno 5B: Hace rato habíamos visto lo que pasaba a este punto de aquí [*se refiere al punto P señalado con la pluma]* (véase la Figura 4.4.G) y por lo tanto no puede ser un triángulo acutángulo. Creo que se va formando la mitad de un círculo, ya que si movemos el punto por aquí [*con la pluma, el alumno, índica un movimiento semicircular en el monitor a partir del punto A*] se va acercando a 90°.

[32] Profesor: Mencionaste un círculo. Usando las herramientas del software ¿podrían verificar su propuesta [*conjetura*]? ¿Qué sucede si colocan una circunferencia con centro en el punto medio del segmento $\overline{AB}$?

[33] Alumno 5B: Este es el círculo (véase Figura 4.4.H), ahora muévelo [*le indica a su compañero que mueva el punto P*].

[34] Alumno 5A: Cuando está [*se refiere al punto P*] adentro del círculo, este ángulo siempre es mayor [*mayor que 90°*] y cuando está afuera el ángulo es menor que 90°. Entonces ¡si es el círculo!

Durante el dialogo anterior y a lo largo de la investigación queda asentado la necesidad de identificar: a) el tipo de representaciones geométricas que permiten a través de la visualización promover la abstracción matemática y la generalización empleando los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico; b) el efecto que tiene el uso de la herramienta tecnológica en el desarrollo de habilidades matemáticas relacionadas con la visualización comparado con el ambiente de lápiz-y-papel; c) la forma, en la cual se puede aprovechar la visualización para promover la abstracción matemática empleando los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico.

Esta serie de cuestionamientos y otras preguntas pretenden ser abordados en la investigación propuesta, debido a que en ésta se abren nuevas posibilidades, metas y alcances que mantienen el eje principal de la temática, la cual está centrada en aprovechar la visualización para promover la abstracción matemática y la generalización empleando los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico.

6.4. Problema de investigación

Toda representación de un objeto matemático involucra su análisis; cuando ese objeto es una figura geométrica, se deben identificar características y hacerse un tratamiento del objeto empleando el sentido de la vista. Analizar figuras geométricas es parte del funcionamiento representacional de la visualización en matemáticas por excelencia, donde su forma y dimensión juegan un papel trascendental en las mismas, ahí radica la importancia de la visualización. La visualización generalmente se refiere a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar sobre información visual.

El fracaso del alumno durante la visualización de representaciones matemáticas, es común debido a la ausencia u omisión de información, el desconocimiento parcial o total del problema propuesto y la falta de coherencia (por parte del alumno) en sus “imágenes mentales”. De tal manera que el alumno no identifica las relaciones explicitas e implícitas que contienen las figuras, lo cual provoca la falta de apropiación del conocimiento y su relación con el objeto matemático representado. Arcavi (2003, p. 4) sostiene que “cuando la visualización actúa sobre conceptualizaciones de imágenes ricas la demanda cognitiva es ciertamente mayor".

Una manera efectiva de enseñar y aprender geometría, consiste en presentar a los estudiantes conceptos, propiedades, relaciones entre objetos, etc., materializados mediante instrumentos que modelen el objeto geométrico, al tiempo que proporcionan una representación que invita y facilita la exploración de las características y propiedades de dicho objeto geométrico. Las herramientas tecnológicas pueden ser uno de esos instrumentos. Al incorporar las herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se promueve una adecuada comprensión visual (por parte del alumno) del objeto matemático en estudio. De acuerdo con lo establecido por la NCTM (2000, p. 26), "la potencia gráfica de los instrumentos tecnológicos permite el acceso a modelos visuales que son poderosos, pero que muchos estudiantes son incapaces de generar independientemente o no están dispuestos para hacerlo".

El presente trabajo de investigación está centrado en la influencia del uso del ambiente tecnológico como complemento del ambiente de lápiz-y-papel durante la visualización de figuras geométricas. La problemática planteada se relaciona con la visualización y su relación con el razonamiento. La interpretación de una representación geométrica puede provocar el tránsito de la figura al objeto geométrico, el cual depende del conocimiento de cada estudiante, de los ambientes en los cuales se realiza la visualización, del tipo de representación analizada, etcétera. A partir de la problemática, reconocida desde hace más de tres décadas, relacionada con la visualización y con la evidencia del estudio realizado, se propone continuar la investigación relacionando la visualización y la abstracción matemática, dando lugar al tema de investigación propuesto que se denomina:

LA VISUALIZACIÓN COMO PROMOTORA DE LA ABSTRACCIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DEL AMBIENTE TECNOLÓGICO COMO COMPLEMENTO DEL AMBIENTE TRADICIONAL

La investigación propone que cuando las herramientas tecnológicas son incorporadas a la enseñanza de las matemáticas de manera acertada, el uso de estas herramientas facilitan en los alumnos la comprensión de conceptos, centrando su atención en la reflexión y el razonamiento.

6.4.1. Objetivos de investigación

Esta investigación pretende profundizar acerca de la naturaleza de la visualización y su relación con la generalización de las representaciones geométricas, empleando el ambiente tecnológico como complemento del tradicional (lápiz-y-papel). Este estudio sobre la visualización se enfoca en la manera de cómo el sujeto percibe representaciones geométricas empleando diferentes registros y cómo los relaciona con las representaciones mentales, para lograr exteriorizar la idea del concepto matemático involucrado.

Siguiendo la temática principal a investigar, se definen los siguientes propósitos:

a) Determinar la manera en que se puede aprovechar la visualización para promover la abstracción matemática, empleando el ambiente tecnológico como complemento del de lápiz-y-papel.
b) Determinar los procesos de visualización involucrados cuando los estudiantes emplean los ambientes tradicional (lápiz-y-papel) y tecnológico.
c) Distinguir el efecto que tiene el uso de la herramienta tecnológica en el desarrollo de habilidades matemáticas relacionadas con la visualización comparado con el ambiente tradicional.

6.4.2. Preguntas de Investigación

Para lograr los objetivos planteados en la investigación propuesta, es de suma importancia profundizar en el papel que tiene la visualización de representaciones geométricas en la adquisición de conocimiento matemático.

Las preguntas de investigación que guiarán el trabajo se detallan a continuación:

1. ¿Cómo repercute en los estudiantes sus procesos de visualización de figuras geométricas en la abstracción matemática?

2. Los estudiantes, ¿cómo interpretan las características visualizadas en las figuras geométricas empleando el ambiente tecnológico como complemento del ambiente de lápiz-y-papel?
3. ¿Qué tipo de figuras permiten desarrollar las habilidades matemáticas relacionadas con la visualización?
4. ¿Cómo se puede aprovechar la visualización para promover la abstracción matemática y la generalización empleando los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico?

6.5. Marco conceptual

Para investigar la naturaleza de la visualización y su relación con la generalización de las representaciones geométricas, empleando el ambiente tecnológico como complemento del tradicional (lápiz-y-papel), el marco conceptual está basado en la Teoría de Representaciones de Duval (1998, 1999a, 1999b, 2003) y en la influencia de las herramientas tecnológicas para potenciar la comprensión y adquisición del conocimiento matemático y su implicación en las ideas matemáticas abstractas (e.g. Arcavi, 2003; Haciomeroglu, 2011; Hitt, 1995; Zimmermann & Cunningham, 1991; entre otros).

6.5.1 Visualización en matemáticas

Las ideas, conceptos y métodos de estudio de las matemáticas suelen ser referidos por medio de representaciones, las cuales expresan una gran riqueza de contenidos visuales, cuya utilización resulta provechosa, tanto en el manejo de tales conceptos como en su comprensión misma. La representación de un objeto matemático involucra su análisis; si el objeto es una figura geométrica, se deben identificar características y hacerse un tratamiento del objeto empleando el sentido de la vista. La actividad de visualizar en matemáticas incluye diferentes procesos cognitivos como interpretar, decodificar, relacionar, vincular, entre otros. La visualización no es más que un medio con el que cuenta el alumno para poder realizar un mejor entendimiento. Cuando se menciona que se debe visualizar un concepto, se habla de comprender un concepto a través de una imagen visual.

Una postura asociada con la percepción de las representaciones y por consiguiente con la visualización, está relacionada con la construcción de la idea de la forma de la figura geométrica, es decir, la construcción de criterios que permiten asociar o separar las distintas figuras con base en la apariencia y en la detección de sus propiedades. Las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes. Arcavi, (2003) sostiene que:

> La visualización es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas en nuestra mente, sobre el papel o con instrumentos tecnológicos, con el propósito de representar y comunicar información, reflexionando y desarrollando ideas previamente desconocidas avanzando en el entendimiento. (p. 217)

La capacidad para visualizar determinado concepto matemático requiere habilidad para interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente, y expresarla sobre un soporte material. El soporte material por el cual puede ser expresado el pensamiento de un individuo es a través del lenguaje en sus diversos tipos: el simbólico, el de las palabras, el de las imágenes o figuras, etcétera.

Phillips et al. (2010) recomiendan distinguir explícitamente: a) el objeto de visualización relacionado con objetos físicos vistos e interpretados por una persona con el propósito de entender algo más que el objeto en él mismo; b) la visualización introspectiva, la cual es una construcción imaginativa de una posible experiencia visual en ausencia de un objeto de visualización; c) la visualización interpretativa involucra dar sentido (significado) a los objetos de visualización o visualizaciones introspectivas, en función de la red existente en la persona acerca de creencias, experiencias y entendimientos.

Duval (2003) distingue entre visión y visualización. La visión es la percepción directa de un objeto espacial; la percepción visual necesita exploración mediante movimientos físicos del individuo que ve, o del objeto que se mira, porque nunca da una aprehensión completa del objeto. El autor entiende la visualización como representación semiótica de un objeto, una organización bi-dimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades.

Mediante la visualización, alguna organización puede ser sinópticamente comprendida como una configuración, haciendo visible todo lo que no es accesible a la visión y aportando una aprehensión global para determinada organización de relaciones.

Ver y visualizar son actividades diferentes, a pesar de tener puntos en común como la aprehensión inmediata, pero hay entre estas actividades diferencias fundamentales. Duval (2003) menciona:

> Visualizar es producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permita observarlos como si estuvieran realmente delante de los ojos. La visualización debe permitir distinguir e identificar al primer vistazo (aprehensión inmediata) lo que está representado. En las representaciones producidas, desencadena y funde este reconocimiento puramente visual de los objetos o de las situaciones representadas. (p. 48)

La visualización plantea tres dificultades desde el punto de vista del aprendizaje: a) discriminación de las características visuales relevantes; b) el procesamiento figural, cambios entre registros visuales (descomponer, recomponer una figura; reconfiguración), cambio de perspectiva; c) coordinación con el registro discursivo. Cuando se usan las representaciones gráficas de conceptos matemáticos, como herramientas para interpretar conceptos o resolver problemas, la visualización no es un fin en sí misma, sino un medio para llegar a su comprensión o resolución. Se trata de expresar alguna propiedad específica de un concepto o alguna relación importante para la resolución de un problema a través de un diagrama, un dibujo o una gráfica.

6.5.2. Registros de representación

Duval (1999) menciona que durante la enseñanza de las matemáticas no se da un peso considerable a la conversión de las representaciones de un registro a otro y explica las razones. Una de ellas es que no se tienen reglas de conversión y que generalmente se transforma un registro con fines de simplicidad para facilitar el tratamiento y una vez que se logra esta conversión, se queda sólo con el registro en el cual se realizó el tratamiento.

La utilidad de las representaciones gráficas se encuentran limitadas, en la medida de que se crea que el conocimiento está en la mente, ya que la escritura (la mayor parte de las ocasiones) sólo es vista como un recordatorio y no como una representación. El papel del lenguaje escrito reside en considerar a la escritura como una forma de expresar y comunicar lo que pensamos de una manera diferente. El lenguaje debe ser reformulado de manera que se puede representar el objeto al lector y para que logre sobre él un tratamiento adecuado con la finalidad de lograr representarlo. En otros términos, no hay necesidad de saber dibujar un objeto o ser medido y reconocerlo sobre el dibujo, por el contrario hay que ser capaz de construir una figura geométrica o una gráfica para ser medida y ver lo que está representando.

Dehesa (2008) menciona que el aprendizaje matemático requiere de la existencia de diversos sistemas de escritura para los objetos. Estas escrituras matemáticas toman la forma de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar relaciones entre figuras geométricas. No es suficiente la identificación de representaciones mentales como el conjunto de imágenes ni de las concepciones que una persona puede tener sobre un objeto, sino que requiere de las representaciones semióticas como producciones constituidas por el objeto de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento.

Las representaciones semióticas son una manera en que el individuo externa sus representaciones mentales de forma que se hacen accesibles o visibles para los demás. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los perceptivos. Además, es necesario añadir el hecho de que la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales.

Cuando se exteriorizan estas representaciones mentales existe una falta de dependencia con lo que se desea representar y con la misma forma de representarlo. Durante los procesos de visualización de un objeto geométrico, la primera dificultad identificada está relacionada con la interpretación que tiene el alumno de dicho objeto. Una representación geométrica puede tener diversas interpretaciones no necesariamente ligadas con el objeto mismo. La interpretación depende del alumno, de sus conocimientos, del contexto, del papel y naturaleza de la representación misma. Las figuras forman un importante soporte intuitivo para las actividades en geometría; dejan ver más de lo que los enunciados dicen, permiten explorar, anticipar. Como afirma Fischbein (1998, citado en Godino, et al, 2012):

> Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales – como idealidad, abstracción, generalidad, perfección. (p. 143)

Duval (1995) subraya que el rol heurístico de las figuras depende del aprendizaje y desarrollo de los diversos procesos como visualizar, justificar y construir en los contextos geométricos. En relación con el papel heurístico de las figuras en la resolución de problemas de geometría, Duval (op. cit) subraya diferentes tipos de aprehensiones para comprender cómo funciona la visualización en el aprendizaje. En particular, Duval (1999a) caracteriza la aprehensión operativa como la modificación de una figura para considerar sub-configuraciones. Asimismo, Duval (1998) considera a la matemática, como creación humana y cultural que trata con objetos y entidades diferentes de cualquier fenómeno físico, se apoya fuertemente en la visualización de sus diferentes formas y niveles, no sólo en el campo de la geometría.

La visualización está relacionada con la habilidad que permite la construcción de significados matemáticos, mediante el sentido de la vista y la interpretación realizada cognitivamente en el cerebro del individuo. En este proceso de visualización las partes participantes son el individuo que mira y el objeto que es mirado, sin embargo, lo que se mira nunca es el objeto que se desea conocer, sino una representación de éste. Debido a la relación existente entre el individuo, el objeto y su representación se tiene una relación triangular, donde la representación es el medio por el cual el sujeto puede acceder a ese objeto matemático para lograr estudiarlo. La relación entre el conocimiento del objeto, por parte del individuo, esta mediada por su representación, lo que ocasiona que la representación sea indispensable en el proceso de aprendizaje de dicho objeto.

6.5.3. Unidades constitutivas de una figura geométrica

Los registros físicos de figuras o de gráficos demandan el uso de materiales como hoja de papel, pantalla de video, entre otros, a fin de lograr destacar alguna propiedad identificable en el campo perceptivo de las figuras en cuestión. Duval (1999a) afirma que la implantación de una mancha visible en la figura es el primer indicio de toda representación visual; éstas pueden agruparse en dos categorías: a) variación dimensional, ligada con el número de dimensiones: 0 (punto), 1 (línea) o 2 (área); b) variación cualitativa, ligada con la forma (línea recta o curva; contorno abierto o cerrado de un área), tamaño, orientación, granulación, color, etc. Duval (1999b) menciona que las unidades figurales elementales de dimensión 2 son estudiadas en geometría euclidiana como configuraciones de unidades figurales de dimensión 1. En el registro de las figuras predomina la percepción de las unidades de dimensión 2 sobre las de dimensión inferior.

En toda representación predominan las unidades de dimensión 2 sobre las de dimensión inferior. Los gestalistas atribuyen esta predominancia al cierre (o continuidad) de un contorno simple y cerrado de una representación geométrica cualquiera, por ejemplo, si en el plano se dibujan tres puntos no alineados el sujeto percibe un triángulo (cierre) y no tres puntos aislados. Del mismo modo, un cuadrado se percibe como una figura única (continuidad) y no como la unión de cuatro segmentos opuestos dos a dos. La utilización de figuras requiere un cambio continuo del número de dimensiones tomadas en consideración con la aprehensión perceptiva de las unidades figurales que se pueden distinguir de ciertas figuras geométricas.

6.5.4. Tipos de aprehensión

Duval (1999a, 1999b) propone que la visualización en matemáticas se apoya de la idea de representaciones semióticas, las cuales las define como sistemas de representación que permiten designar, manipular, comunicar e interactuar con los objetos matemáticos. En matemáticas, las representaciones semióticas no sólo son indispensables para fines de comunicación, sino también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. La posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado.

Respecto al trabajo de interpretación adecuado para la figura geométrica, Duval (1999b) considera que es necesario desarrollar un trabajo adecuado sobre los componentes de la representación de manera figural, es decir, la que se refiere a los elementos de la figura a través de los distintos tipos de aprehensión cognitivas. La aprehensión perceptual se refiere al reconocimiento de la forma en el plano o en el espacio 3D. La percepción del individuo, respecto a lo que muestra la figura, está determinado por las leyes de la organización figural y las indicaciones pictóricas. La aprehensión perceptual indica la habilidad para nombrar figuras y para reconocer en la figura percibida varias sub-figuras.

En toda representación geométrica, el reconocimiento perceptual de las propiedades geométricas debe permanecer bajo el control de las propiedades. La coordinación de los diferentes registros de representación ligados con el tratamiento de los conocimientos, no se da espontáneamente, incluso en el transcurso de una enseñanza que moviliza esta diversidad de registros. Puede verificarse fácilmente esta coordinación en los diferentes niveles de enseñanza de las matemáticas. Cuando la adquisición de conocimientos ha estado ligada con la formación y con el tratamiento de representaciones efectuadas en un solo registro, o ha privilegiado un registro particular (la escritura algebraica, los gráficos, las figuras geométricas, las tablas, el discurso en lengua natural) esta adquisición queda limitada a ese único registro.

6.5.5. Visualización y abstracción matemática

La visualización y la abstracción son dos conceptos fuertemente vinculados en los procesos de aprendizaje de las matemáticas; la experiencia de exploración que se llevó a cabo permitió evidenciar, que la "abstracción" no es la capacidad de "ver" objetos que no existen, sino la capacidad de ver objetos que "sí" existen. La abstracción se "define" como la capacidad de "representar" un objeto por referentes equivalentes o usando varios modos de representación; así, la abstracción es una cualidad inherente a cada objeto matemático, en lugar de ser una valoración genérica de las matemáticas. Los objetos matemáticos son abstractos.

En general y desde el punto de vista teórico, la visualización matemática presenta diferentes posibilidades de transformarse en pensamiento abstracto o conocimiento teórico matemático. Diversos investigadores (e.g., Hitt, 1995; Zimmermann & Cunningham, 1991; entre otros) han comprobado prácticamente este hecho, y sus recomendaciones señalan las bondades que su uso sistemático en la enseñanza de la matemática podría representar para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Se usa el término de pensamiento visual para describir los aspectos del pensamiento matemático que se pueden expresar en términos de imágenes mentales. Es posible educar a los niños y adolescentes para que su capacidad de visualización se desarrolle y tienda a mejorar. Todo experto conoce la utilidad de atender a tal origen concreto cuando quiere manejar con destreza los objetos abstractos correspondientes. Lo mismo sucede con otras partes aparentemente más abstractas de la matemática. La visualización está enlazada de forma directa con la manera de actuar con atención ante representaciones concretas que provoquen en la mente del individuo que se hagan visibles propiedades o que se descubran las relaciones abstractas.

Una parte de la matemática trata de explorar las estructuras de la realidad accesibles mediante ese tipo de manipulación especial. Se da inicialmente una percepción de ciertas semejanzas que permiten abstraer ciertas percepciones, las cuales son sometidas a una elaboración racional, simbólica, que permite manejar claramente la estructura subyacente a tales percepciones. La percepción de cada individuo es prioritariamente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matemáticas, no sólo en aquellas que, como la geometría, no se refieren más directamente a la exploración específica de aspectos del espacio, sino también en otras, como el análisis que nacieron para explorar los cambios de los objetos materiales en sí mismos y en sus aspectos espaciales.

En aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece estar más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de procesos imaginativos que les acompañan en su trabajo haciéndoles adquirir lo que se podría llamar una intuición de lo abstracto; Un conjunto de reflejos, una especie de familiaridad con el objeto que les facilita extraordinariamente algo así como una visión unitaria y descansada de las relaciones entre objetos, un apercibimiento directo de la situación relativa de las partes de su objeto de estudio. La visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.

La visualización matemática promueve la realización de generalizaciones que pueden facilitar la comprensión de los argumentos (juicios y razonamientos) que permitan sostener como válidas dichas generalizaciones. Sin embargo, no debe entenderse que cualquier forma de visualización tiene garantizada su transformación en pensamiento abstracto, pues suele ocurrir que en algunas ocasiones las generalizaciones que se provoquen vayan en direcciones alternativas respecto a los conceptos teóricos. Por ello, se hace necesario el diseño y validación de las distintas formas de visualización susceptibles de ser usadas en la enseñanza de las matemáticas.

En la visualización se distinguen: objetos físicos (e.g., ilustraciones, animaciones, pantallas generadas por la computadora, etc.), así como, "objetos mentales" almacenados y procesados en la mente en forma de esquemas mentales, imágenes mentales, construcciones y representaciones mentales. O bien, mediante funciones cognitivas manifestadas en la percepción visual, la manipulación y transformación de las representaciones visuales de la mente, concretando los modos abstractos de pensamiento e imaginando hechos. Phillips et al. (2010) enfatizan que estas distinciones son importantes para entender el contexto de las visualizaciones y poder establecer aplicaciones eficaces de visualización en el aula de matemáticas.

Cuando la visualización se refiere en general al uso del sentido de la vista, se establece que además de *ver* se debe *saber* (se refiere a poseer conocimiento que permita la interpretación y el manejo adecuado del objeto representado). Sin embargo, la visualización es un proceso directo y obstaculizado debido a que la mayoría de los objetos visualizados no pueden mostrar explícitamente sus propiedades. Este obstáculo, generado por la misma representación, provoca que los estudiantes no se percaten de las propiedades implícitas en la figura, lo cual provoca que el análisis de las representaciones se vea afectado directamente por la información percibida a través del sentido de la vista, lo cual genera una variedad de interpretaciones de distintos tipos que ejecuta de forma automática el cerebro de cada individuo.

6.5.6. La herramienta tecnológica en el desarrollo de habilidades matemáticas

En la actualidad existen una variedad de programas informáticos (herramientas tecnológicas) enfocados en la enseñanza de las matemáticas. Existen diversos programas con características similares denominados Software de Geometría Dinámica (SGD), entre los que se destacan: Cabri-Geometry, Cinderella, Geometer's Sketchpad, C.a.R. (Compass and Ruler) y Geogebra, los cuales, potencian la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, debido a que son utilizados como un medio para explorar de forma interactiva, diferentes tipos de representaciones gráficas. Estas representaciones pueden ser realizadas por los propios estudiantes a través de actividades dirigidas, o bien proporcionadas por los profesores e investigadores en función del objetivo de investigación y enseñanza.

Empleando las herramientas tecnológicas se puede identificar el comportamiento general de una representación cuando se modifican algunos parámetros manteniendo sus propiedades estructurales. El uso de estas herramientas tecnológicas facilita la incorporación de la visualización en la enseñanza de conceptos geométricos, pues se cuenta con imágenes dinámicas e incluso con visualizaciones interactivas. Haciomeroglu (2011) menciona que la visualización empleando modelos dinámicos permite a los estudiantes entender los conceptos o significados que pueden ser extraídos de las representaciones y, por lo tanto, juega un papel importante en el desarrollo del pensamiento analítico de los estudiantes, y que no sucede en ambiente de lápiz-y-papel.

Philippe (2004) indica que la representación gráfica de un objeto dinámico vuelve evidente los límites tradicionales de las representaciones típicas posibles de registros figurales. De esta manera, se reduce la brecha entre la representación física y la representación de las imágenes mentales. Los SGD permiten la manipulación de las representaciones de los objetos geométricos, es decir, el usuario puede llevar a cabo el estudio con representaciones dinámicas de los objetos geométricos que pueden ser modificadas con cierta libertad, pero que conservan las relaciones matemáticas establecidas. En términos generales, el SGD se caracteriza porque:

1. La manipulación es directa. Señalas el vértice del triángulo y lo arrastras.
2. La distancia cognitiva entre lo que está en la pantalla y las representaciones geométricas es mínima. El alumno no se detiene a pensar en lo que en realidad hace. Es decir, el alumno cuando hace uso del SDG mueve el *mouse*, el cual arrastra un pequeño círculo en la pantalla, que a su vez cambia las coordenadas de algún(os) elemento(s) de la representación (e.g., el vértice de un triángulo). Sólo se limita a pensar que arrastra el(los) elemento(s) de la representación (e.g., el alumno piensa en que arrastra el vértice de un triángulo).
3. El movimiento es continuo. El cambio tiene lugar durante el arrastre. Los objetos matemáticos representados en la pantalla se mantienen coherentes y en unidad todo el tiempo. (e.g., cuando el vértice del triángulo se mueve del punto A al punto B, se pueden observar todos los pasos intermedios y el comportamiento de la representación).
4. El ambiente de trabajo que proporciona el SGD, es un entorno gráfico muy amigable, donde el usuario puede encontrar diversos elementos y herramientas de trabajo. La experiencia que tienen los alumnos está involucrada con las representaciones que se manipulan (e.g. se puede interactuar con las representaciones empleando las herramientas del software). El SGD es de fácil acceso dirigiendo la atención del alumno en cómo alcanzar sus metas matemáticas y no en cómo hacer uso de la tecnología.

6.6. Aspectos metodológicos

En este apartado se expondrán los aspectos relacionados con la metodología a emplearse durante la investigación propuesta. Los aspectos metodológicos a considerarse son: Tipo de estudio, sujetos participantes, recolección de datos, diseño de Actividades y fases de la investigación. A continuación se da una explicación detallada de cada una de éstas.

6.6.1. Tipo de estudio

El trabajo de investigación propuesto es de carácter cualitativo, su interés se centra en profundizar acerca de la naturaleza de la visualización (por parte de los alumnos) y su relación con la generalización de las representaciones geométricas, empleando el ambiente tecnológico como complemento del tradicional (lápiz-y-papel). Una investigación de corte cualitativo es descrita como un campo de investigación centrado en procesos, significados y en la naturaleza de la realidad socialmente constituida (Quecedo & Castaño, 2002).

6.6.2. Sujetos participantes

Para llevar a cabo la investigación se propone que los sujetos apropiados para el estudio lo integrarán un grupo reducido de estudiantes. De esta manera, se podrá detallar y profundizar acerca de la naturaleza de la visualización y su relación con la generalización de las representaciones geométricas, empleando el ambiente tecnológico como complemento del tradicional (lápiz-y-papel).

Se propone que los sujetos participantes cursen el bachillerato y su edad no exceda los 16 años, con la finalidad de que dispongan de conocimientos elementales de geometría y que de preferencia tengan experiencia con algunos programas informáticos enfocados en la enseñanza de las matemáticas. Si no cuentan con esa experiencia, se propone instruir a los participantes sobre el uso básico de la herramienta tecnológica empleada (Geogebra), para que posean el conocimiento necesario al realizar las Actividades propuestas.

6.6.3. Recolección de datos

Para la investigación propuesta se emplearán tres instrumentos para la recolección de datos: entrevistas semi-estructuradas a los sujetos participantes, videograbaciones de realización de las Actividades durante cada una de las sesiones y notas de campo tomadas por el investigador y relacionadas con lo que acontece en el aula. Se han considerado tres instrumentos para la toma de datos; pero de ser necesario estos instrumentos pueden ser modificados o pueden ir acompañados de otros instrumentos de recolección de datos.

6.6.4. Diseño de Actividades

Para cumplir los objetivos propuestos en la investigación es necesario diseñar Actividades que permitan a los alumnos desarrollar habilidades enfocadas en el análisis de propiedades de las figuras geométricas estableciendo conjeturas respecto de su construcción, mediante la visualización. Para el diseño de las Actividades se deben tomar en cuenta los siguientes aspectos: nivel académico, uso de la herramienta tecnológica y contenidos matemáticos. Se deben incluir dentro de las Actividades problemas que requirieran para su resolución descubrimiento de invariantes, tareas de construcción, establecimiento de conjeturas, así como, descripción y explicación de los objetos matemáticos visualizados. Se busca que a través de las Actividades se estimule el pensamiento productivo y se motive a los estudiantes en la comprensión, asimilación y análisis de conceptos matemáticos abstractos.

6.6.5. Fases de la investigación

Para alcanzar los objetivos planteados y así dar respuesta a las preguntas de investigación, este trabajo se desarrollará en tres fases; cada fase estará dividida en tres etapas. A continuación, se exponen las fases con sus etapas correspondientes.

6.6.5.1. Fase 1

Esta fase corresponde a: 1) replanteamiento y análisis de los propósitos de la investigación, en el cual, apoyado por el asesor se esclarecerán las metas, alcances y pasos a seguir en la investigación; 2) búsqueda de información, en la cual se revisará exhaustivamente bibliografía en torno al papel de la visualización la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; 3) búsqueda de la muestra consistente en la selección de los sujetos participantes.

6.6.5.2. Fase 2

Esta fase corresponde a: 1) diseño de los instrumentos de toma de datos [Actividades], en la cual se elaborarán los instrumentos con los cuales se pretende aplicar para la recolección de datos; 2) implementación del estudio piloto como primer acercamiento al desarrollo de la investigación; 3) análisis de lo observado y replanteamiento de los instrumentos de recolección de datos.

6.6.5.3. *Fase 3*

Esta fase corresponde a: 1) aplicación de los instrumentos para el estudio final; 2) análisis de datos; 3) elaboración de artículos y reporte final (tesis) de investigación.

La Figura 6.1 muestra el esquema metodológico que se pretende seguir en la investigación. Se debe considerar que las fases de la investigación están entrelazadas debido a que se complementan entre sí y cada fase es fundamental para el desarrollo de la investigación.

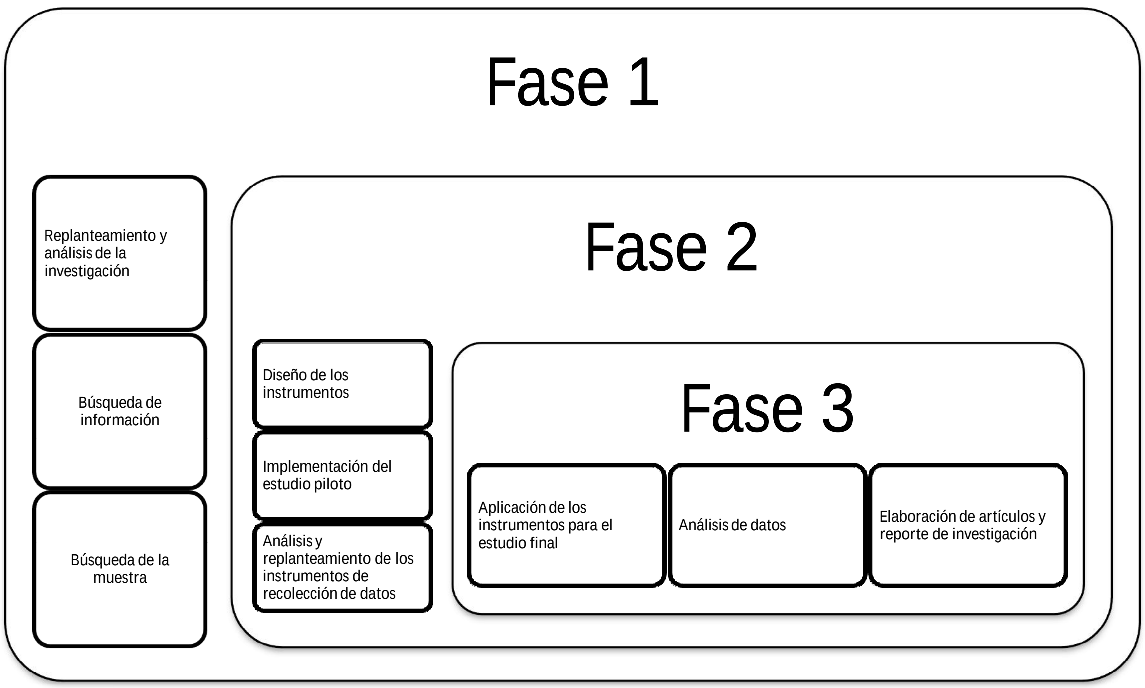

Figura 6.1. Esquema metodológico para el desarrollo de la investigación.

6.6.6. Calendario de actividades

La Figura 6.2 muestra un cronograma que incluye cada una de las fases descritas anteriormente, las cuales, están relacionadas con el tiempo estimado para el desarrollo de la investigación. La duración de la investigación se encuentra estimada en cuatro años (tiempo de duración del programa de doctorado, en el cual será desarrollada la investigación).

FASE	CRONOGRAMA	2014	2015		2016		2017		2018
		1er. Sem.	2do. Sem.	3er. Sem.	4to. Sem.	5to. Sem.	6to. Sem.	7mo. Sem.	8vo. Sem.
1	**Replanteamiento y análisis de la investigación**								
1	**Búsqueda de información**								
1	**Búsqueda de la muestra**								
2	**Diseño de los instrumentos**								
2	**Implementación del estudio piloto**								
2	**Análisis y replanteamiento de los instrumentos de recolección de datos**								
3	**Aplicación de los instrumentos para el estudio final**								
3	**Análisis de datos**								
3	**Elaboración de artículos y reporte de investigación**								

*Figura 6.2.*Cronograma de actividades propuestas.

6.6.7. Resultados esperados

La investigación propuesta tiene como objetivo determinar el papel de la visualización y su influencia en los ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico, con el fin de promover la abstracción matemática y la generalización de relaciones que guardan los objetos geométricos. Por tanto, los resultados esperados tienen como eje principal, identificar el tipo de figuras que, mediante la visualización, promueven la generalización de las representaciones geométricas, debido a que todas las figuras no tienen el mismo valor heurístico; hay ciertas figuras que ayudan más que otras a descubrir la respuesta o la idea de la respuesta de una pregunta matemática, mientras que otras parecen más bien un obstáculo.

De manera general, se puede afirmar que las representaciones visuales de objetos matemáticos no son necesariamente transparentes para los estudiantes, sin embargo, se busca identificar la manera en que los estudiantes promueven el uso de representaciones mentales y sus correspondientes representaciones semióticas producidas sobre papel, computadora, pizarrón, etc., y si estas representaciones (mentales y semióticas) favorecen el aprendizaje de contenidos geométricos y el desarrollo de habilidades de generalización y justificación, además de que permitan al estudiante tomar una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas. Se busca verificar e ir más allá de lo descrito por Marmolejo G. y Vega, M. (2012, p.12), quienes afirman que “las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras se encuentran íntimamente relacionadas con la gama de modificaciones posibles que se pueden realizar sobre ellas”.

El uso del software ofrece claras ventajas a los estudiantes para identificar y explorar diversas relaciones matemáticas. Cuando los estudiantes interaccionan con las construcciones existe demasiada información que inicialmente podría ser relevante para ellos. ¿Qué tipo de recursos necesitan los estudiantes durante la visualización de sus exploraciones que permita la generalización y abstracción de conceptos matemáticos relacionados con las representaciones geométricas? Esta y otras preguntas buscan ser respondidas durante el desarrollo de la investigación. Además, se desea verificar la idea de que la tecnología no le resta importancia a comprender con claridad los conceptos que sustentan los objetos matemáticos, ya que el uso de estas herramientas facilitan en los alumnos la comprensión de conceptos, dirigiendo su atención en la reflexión y el razonamiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-224.

Bishop, A. J. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre visualización. *Antología en Educación Matemática* (pp. 29-41). México: Cinvestav-IPN.

Dehesa, N. (2008*). Las prácticas discursivas en la construcción de registros semióticos de representación. El caso del Campo de Pendientes.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the teaching of the geometry for the 21st century* (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999a). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Colombia: Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (1999b). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proc. 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1 pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PME.

Duval, R. (2003). *"Voir"* en Mathématiques. En Filloy, E. (Ed.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 103-131.

Dubinsky, E., & TaU, D. O. (1991). Advanced mathematical thinking and the computer. En D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 98-133). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Finzer, W. & Jackiw, N. (1998). Dynamic manipulation of mathematical objects. En NCTM Standards 2000 Electronic Format Group. http://www.dynamicgeometry.com/General_Resources/Recent_Talks/Sketchpad_4.0_Talks/Dynamic_Manipulation.html

Ginger, S. & Ginger, A. (1993). *La gestalt: una terapia de contacto.* México: El manual moderno.

Godino, J., Gonzato, M., Cajaraville, J. & Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(2),109-130.

Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? En R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-367). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Gustafson, R. D. & Frisk, P. D. (1985). *Elementary plane geometry. Vol. 2* New York: John Wiley.

Haciomeroglu, E. S. (2011). Visualization through dynamic GeoGebra illustrations. En L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 133-144). Rotterdam: Sense Publishers.

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Revista de Educación Matemática*, 7(1), 63-75.

Larios, V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Marmolejo, G. A. & Vega, M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática,* 24(3) 7-32. [Recuperado el 20 de febrero de 2014 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525846001].

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The Council.

Philippe, R. R. (2004). L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursive-graphique. *Educational Studies in Mathematics, 57(2),* 229-263.

Phillips, L. M., Norris, S. P., & Macnab, J. S. (2010). *Visualization in mathematics, reading and science education*. New York: Springer.

Phillips, L. M., Norris, S. P., & Macnab, J. S. (2012). *Visualizations and visualization in mathematics education*. En Phillips, L. M. (Ed), *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education* (pp. 62-95). Rotterdam: Sense publishers.

Quecedo, R. & Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica,* 14, 4-65. [Recuperado el 14 de diciembre de 2013 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17501402]

Reyes, J.M. (2012). Entre triángulos: Triángulo equivalente de igual base. [Recuperado el 15 de agosto de 2014 de http://www.departamentodedibujo.es/D_T/entre_tringulos.html]

Rodríguez, O. & Castro, W. F. (2005). Uso de herramientas computacionales para el aprendizaje de las matemáticas. *El Hombre y la Máquina,* (24) 46-61. [Recuperado el 22 de febrero de 2014 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=47812408005]

Santos, L. M. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos, L. M. (2007). *Resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Tamayo, O. E. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, 18 (25), 37-49.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *What is mathematical visualization?* En W. Zimmermann & S. Cunningham, (Eds), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-8). USA: Matematical Asociation of America.