CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

Dificultades en la conceptuación de los números complejos en el ámbito escolar

Tesis que presenta

Tetis Gisela Camacho Espinoza

para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Directora de tesis: Dra. Hatice Asuman Oktaç

México, D.F. Febrero de 2013

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)

Número de becario: 245137

AGRADECIMIENTOS

A mis padres. Por apoyarme con todo lo que pudieron para obtener una formación académica que me ha permitido realizar una maestría. Por su ejemplo de perseverancia, coraje y dignidad.

A mi hermana. Por el apoyo moral y económico que siempre me ha dado. Por su inspirador modo de vivir y por todo lo que hemos recorrido juntas.

Al Dr. Rodrigo Cambray Núñez. Por su guía académica invaluable, por infundirme el afecto que tengo por las matemáticas y por mostrarme que hay otras maneras de hacer matemáticas. Por enseñarme el camino del humanismo.

A la Dra. Asuman Oktaç. Por la oportunidad que me dio para de conocer el campo de la matemática educativa y trabajar en él.

RESUMEN

Los números complejos se estudian en diferentes niveles educativos en México. Sin embargo, se han publicado pocos trabajos de investigación educativa relacionados con su cognición en el ámbito escolar. En esta tesis se reportan algunas de las dificultades que enfrentaron estudiantes de las licenciaturas de matemáticas y de física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y estudiantes de cuarto semestre de nivel medio superior del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, plantel Vallejo (CCH Vallejo), durante sus procesos de conceptuación de los números complejos.

La investigación llevada a cabo para esta tesis consistió inicialmente en revisar libros de texto indicados en la lista de referencias bibliográficas de tres programas de estudio de diferentes niveles del Sistema Educativo Nacional de México, programas en los que se considera el estudio de los números complejos. Después se diseñó y se aplicó un cuestionario para recabar información sobre las concepciones de estudiantes de tres grupos de nivel licenciatura (Facultad de Ciencias UNAM) y un grupo de nivel medio superior (CCH Vallejo) sobre los números complejos. Las respuestas obtenidas en los cuestionarios se clasificaron y se analizaron. Se seleccionó a tres estudiantes de licenciatura y a tres del CCH para entrevistarlos; la información recabada mediante las entrevistas se analizó desde el marco teórico de las metáforas conceptuales. Se presentan las dificultades en la conceptuación de los números de cada estudiante entrevistado y se exponen las observaciones pertinentes.

ABSTRACT

Complex numbers are studied at different levels of the National Education System of Mexico (SENM). Nevertheless, very few research studies about cognition of complex numbers in school environments have been published worldwide. Undergraduate (sophomore) students of mathematics and physics, from the Faculty of Sciences of the National Autonomous University of Mexico (FC-UNAM), and pre-university students (grade 11), from the Academy of Sciences and Humanities—Colegio de Ciencias y Humanidades—of UNAM at Vallejo (CCH, Vallejo), took part as subjects in the research reported in this thesis. Some of the difficulties those students had during their processes of conceptualizing complex numbers were identified and are included in this report.

Initially, textbooks cited in bibliographies of the programs of study—which include the study of complex numbers—for three different levels of the SENM were revised for this research. Then a questionnaire was designed to gather data about students' conceptions of complex numbers; this questionnaire was answered by three groups of undergraduate students (FC-UNAM) and one group of pre-university students (CCH, Vallejo). The answers to this questionnaire were classified and analyzed. Three undergraduate and three pre-university students were interviewed for this research study. Data gathered by means of each interview were analyzed using the theoretical framework of conceptual metaphors. Difficulties that each interviewed student had, together with pertinent remarks, are discussed in this thesis.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los números complejos se presentan en los programas de estudios en distintos niveles educativos en México. Sin embargo, existen pocos trabajos de investigación educativa relacionados con su conceptuación en el ámbito escolar. Los números complejos aparecen implícitamente en el tercer grado de educación secundaria cuando se estudia la resolución de ecuaciones cuadráticas; se recurre a la aplicación de una fórmula general para obtener sus soluciones. Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, sus soluciones son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Así, si $b^2 - 4ac < 0$, el estudiante se enfrentará al problema de obtener las raíces cuadradas de un número negativo. El programa de estudios no aborda el tema; sin embargo, éste es el primer contacto de los estudiantes con los números complejos.

Por otra parte, en México existen diversos programas de educación media superior que obedecen a distintas necesidades y proyectos educativos. Entre ellos se encuentra la opción de preparatoria de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) que, en primer grado, como parte de la materia obligatoria de Matemáticas IV, aborda en la tercera unidad la existencia de los números imaginarios ante la imposibilidad de encontrar solución a determinadas ecuaciones en el campo de los números reales. Después en la sexta unidad, se da una introducción completa a los números complejos y se propone que los estudiantes trabajen con el cálculo de potencias de i y la formación de otros números complejos. En el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la UNAM los números complejos se tratan en el curso obligatorio de Matemáticas I (primer semestre), en la quinta unidad, titulada "ecuaciones cuadráticas" y en el curso obligatorio de Matemáticas II (segundo semestre), en la primera unidad, "funciones cuadráticas y [sus] aplicaciones".

Respecto al nivel superior, los números complejos se estudian en diversas licenciaturas e ingenierías. Por ejemplo, en las licenciaturas de matemáticas, física, ciencias de la computación y actuaría, en la Facultad de Ciencias de la UNAM, los números complejos se estudian en el primer semestre de la carrera de Física en la asignatura obligatoria de "álgebra para físicos", en el segundo semestre del resto de las licenciaturas mencionadas en el curso obligatorio de "álgebra superior II" y en el quinto semestre de las licenciaturas en matemáticas y física en la materia obligatoria de "variable compleja I".

La inclusión del estudio de los números complejos en los programas mencionados resalta la importancia de su conocimiento, lo cual no reside únicamente en su utilidad para resolver problemas algebraicos o de tipo práctico. Se puede hacer matemáticas sin comprender del todo las entidades que manipulamos en la construcción de nuestro conocimiento; sin embargo, la experiencia de hacer matemáticas será más provechosa en la medida en que los entes que manejamos sean significativos.

Esto implica que es necesario analizar la manera en que los números complejos son presentados, cómo los conceptúan o intentan conceptuar los estudiantes, las dificultades que enfrentan durante el proceso de conceptuación, así como identificar los conocimientos necesarios para lograr avanzar en dicho proceso.

CAPÍTULO I
¿CÓMO SE ABORDAN LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN LA ESCUELA?

El presente trabajo es un estudio sobre las concepciones de los números complejos que tienen estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), plantel Vallejo de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), así como estudiantes de las licenciaturas en física y matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Estas concepciones que integran la conceptuación sobre los números complejos de los estudiantes son la base para su conceptualización. En el ámbito escolar, las conceptuaciones de los estudiantes están influidas por la instrucción de los profesores y por los libros de texto que consultan. En este primer capítulo se muestran los resultados del análisis de algunos libros de texto que forman parte de la bibliografía de los planes de estudio de los cursos que los estudiantes deben llevar y que incluyen el estudio de los números complejos. Por otra parte, se precisa el objetivo de la investigación y se incluye la revisión de algunos trabajos anteriores relacionados con la cognición de los números complejos.

Los números complejos en los libros de texto

Hasta ahora, una de las fuerzas principales que ha guiado la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha estado constituida por los libros de texto; mediante ellos se intenta transponer el conocimiento científico en conocimiento enseñable junto con la concepción de un método adecuado para ello (Cambray 2003, p. 2). Por esto, con el fin de conocer cómo se presentan los números complejos en algunos sistemas escolares, se revisaron nueve libros de texto de tres niveles educativos: licenciatura (libros sugeridos en las bibliografías de los planes y programas de estudios de la Facultad de Ciencias, UNAM), educación media superior (libros sugeridos en las bibliografías de los planes y programas de estudios de la Escuela Nacional Preparatoria, UNAM) y educación secundaria (aparecen en la lista de libros de texto autorizados por la SEP para su uso en las escuelas secundarias del Sistema Educativo Nacional durante el ciclo escolar 2010-2011).

Los números complejos en libros de texto de licenciatura

En la facultad de ciencias de la UNAM, los números complejos se estudian durante el segundo semestre de las licenciaturas en matemáticas, actuaría y ciencias de la computación en la materia de álgebra superior II y en el primer semestre de la carrera de física en la materia de álgebra. El tema se retoma durante el quinto semestre de las licenciaturas en matemáticas y física en la materia variable compleja I.

En el libro *¿Qué son las matemáticas?* de Courant y Robbins (2002, p. 116) se considera el surgimiento de los números complejos como una extensión necesaria de los números reales. Se afirma que a mediados del siglo XIX los matemáticos se dieron cuenta de que la base lógica y filosófica esencial para operar en un dominio de números extendido es formal, de este modo, las extensiones tienen que crearse mediante definiciones que respeten las reglas y propiedades del dominio original.

Según este texto, el primer proceso que requiere del uso de los números complejos es la resolución de ecuaciones cuadráticas. Ante la imposibilidad de encontrar soluciones en los números reales para determinadas ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$ se introduce el nuevo símbolo i definiendo $i^2 = -1$. Sin embargo, la unidad imaginaria i no se relaciona con el concepto de número como un medio para contar, sólo es un símbolo cuya validez dependerá de su utilidad para extender de manera práctica el sistema de números reales (Courant y Robbins 2002, p. 117).

Se definirá el símbolo $a + bi$ donde a y b son números reales cualesquiera como un *número complejo* con parte real a y parte imaginaria b. Las operaciones de suma y multiplicación se realizarán de la misma manera que en el dominio de los números reales, sólo que i^2 será sustituido por -1, es decir, cumplirán las siguientes reglas (Courant y Robbins 2002, p. 118):

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (b + d)i.$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Así, de acuerdo con Courant y Robbins, mediante la introducción de $i^2 = -1$ se puede verificar que toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene solución, pues esta ecuación puede escribirse como

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Luego, si $b^2 - 4ac > 0$ entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real y las soluciones serán reales, y si $b^2 - 4ac < 0$ entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ podrá escribirse como $\sqrt{4ac - b^2} \cdot i$ y las soluciones serán números complejos.

En este libro, los autores también presentaron una interpretación geométrica de los números complejos y sus operaciones básicas atribuida a Wessel (1745 – 1818), Argand (1768 – 1822) y Gauss (1777 – 1855) de manera independiente, sosteniendo que a partir de ella se disiparon las dudas respecto a la validez de los números complejos. Courant y Robbins puntualizaron que esta interpretación no es necesaria desde el punto de vista moderno, según el cual la justificación de los cálculos formales con números complejos se da directamente sobre la base de las definiciones de suma y multiplicación. Sin embargo, esta interpretación geométrica cobra importancia tanto en las matemáticas como en las ciencias físicas al mostrar las operaciones de manera natural desde el punto de vista intuitivo (Courant y Robbins 2002, p. 120).

Esta interpretación consiste en representar el número complejo $z = x + yi$ como el punto con coordenadas rectangulares (x, y) en el plano. Así, la abscisa x representa la parte real de z y la ordena y representa su parte imaginaria (véase la figura 1.1). Por otra parte, el número real $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ se denomina módulo de z, es decir, $\rho = |z|$. El ángulo entre la dirección positiva del eje X y el segmento de recta Oz se llama ángulo de z y se denota con Φ.

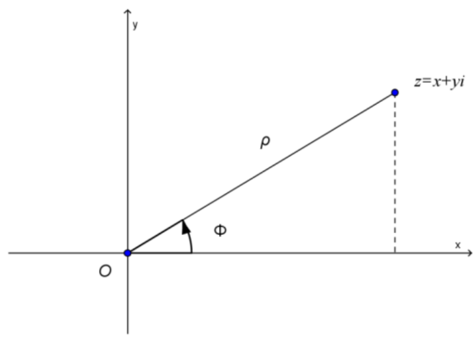


Figura 1.1. Interpretación geométrica del número $z = x + iy$

De la definición de suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ se tiene que

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Así, $z_1 + z_2$ se representa en el plano con el cuarto vértice de un paralelogramo cuyos tres vértices restantes son O, z_1 y z_2, como se observa en la figura 1.2 (Courant y Robbins 2002, pp. 121 – 122).

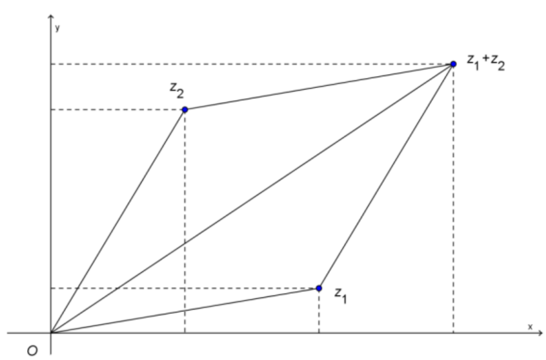


Figura 1.2. Representación geométrica de la suma de números complejos $z_1 + z_2$

Ahora, el ángulo de z no está determinado de manera única, pues cualquier múltiplo entero de 360° puede sumarse o restarse a un ángulo sin modificar la posición de su lado terminal. En términos de ρ y de φ, el número complejo z puede escribirse como

$$z = x + yi = \rho\,(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi),$$

pues por las definiciones de seno y coseno, $x = \rho \cos \varphi$ y $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$.

De lo anterior, se tiene que al multiplicar dos números complejos $z = \rho\,(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ y $z' = \rho'\,(\cos \varphi' + i \operatorname{sen} \varphi')$ resulta

$$zz' = \rho\rho'\,[(\cos \varphi \cos \varphi' - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi') + i\,(\cos \varphi \operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi')$$

pero

$$\cos \varphi \cos \varphi' - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi' = \cos(\varphi + \varphi') \text{ y } \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi' = \operatorname{sen}(\varphi + \varphi').$$

Luego,

$$zz' = \rho\rho'\,[\cos(\varphi + \varphi') + i \operatorname{sen}(\varphi + \varphi')].$$

Así, para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman los ángulos (véase la figura 1.3), es decir, la multiplicación de números complejos tiene algo que ver con la rotación. Multiplicar z por z' simplemente rota z un ángulo Φ' y si $\rho' \neq 1$ la longitud de z tiene que multiplicarse por ρ' (Courant y Robbins 2002, pp. 123 – 125).

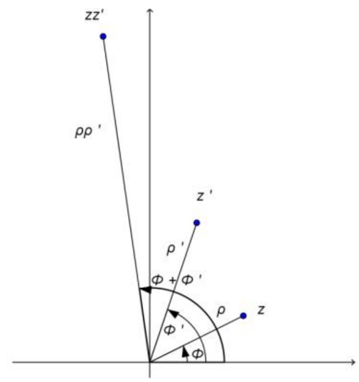


Figura 1.3. Representación geométrica de la multiplicación *z·z'*

En el texto Álgebra superior (Cárdenas *et al*., 1990 p. 245) los autores puntualizan que han querido destacar a lo largo de toda su exposición el aspecto geométrico de los números complejos; para ello, los identifican con los puntos del plano real R^2 y establecen dos operaciones "convenientemente" definidas.

Para tales fines, en el libro se incluye un primer apartado relacionado con el módulo y el argumento de los vectores de R^2. En una sección posterior los autores preguntan: "¿Es posible extender el producto de los números reales a un producto en R^2?" (Cárdenas *et al*. 1990, p. 253); nombran al plano real R^2 con las operaciones de suma y producto, definidas del mismo modo que en la interpretación geométrica mostrada en el libro de Courant y Robbins (2002), el campo de los números complejos. Los números reales se identificarán con los puntos del eje de las abscisas.

El número i está representado por (0, 1). Así, todo punto del eje de las ordenadas es de la forma bi, es decir, $(0, b) = b(0, 1) = bi$. Luego, todo punto z de R^2 se puede escribir como $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$. De este modo, el aspecto geométrico de los números complejos descansa en las propiedades heredadas de su representación vectorial.

En el libro *Curso de álgebra superior* (Kurosch 1994) también se hace alusión a la necesidad de extender el sistema de los números reales al sistema de los números complejos con la finalidad de encontrar solución a ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$. El autor utilizó los puntos del plano como material de construcción para el nuevo sistema numérico comparando este modelo con la representación de los números reales por medio de puntos de una recta (Kurosch 1994, p.112).

Las operaciones de suma y producto de puntos del plano se definen como

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a\,c - bd,\ \ ad - bc).$$

Se demuestra que estas operaciones tienen las mismas propiedades que las del sistema de los números reales y que el nuevo sistema lo extiende de manera efectiva. Para demostrar que en esta nueva estructura numérica existe una solución para $x^2 + 1 = 0$ se propone al punto (0, 1) como dicha solución; así,

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Se designa el punto (0, 1) con la letra *i* y se obtiene una expresión ordinaria $(a, b) = a + bi$ para los números complejos. Posteriormente, se muestran las mismas representaciones geométricas de la suma y del producto de números complejos vistas en los textos anteriores. Para esta última operación también se utiliza la expresión

$$\alpha = a + bi = r\,(cos\ \varphi + i\ sen\ \varphi).$$

En los libros de texto Basic Complex Analysis (Marsden 1987) y Theory of functions of a complex variable (Markushevich 1965) se da prácticamente el mismo tratamiento a los contenidos de introducción de los números complejos. En estos libros se muestra la geometría relacionada con los números complejos como surgida de las propiedades algebraicas y trigonométricas de los vectores.

Los números complejos en libros de texto de bachillerato

Ahora, se analizará la presentación de los números complejos en otro contexto escolar. En la educación media superior los estudiantes se enfrentan con los números complejos cuando resuelven ecuaciones de segundo grado a partir de la fórmula general. Sin embargo, en algunos libros de texto se concluye que las ecuaciones cuadráticas

($ax^2 + bx + c = 0$) con discriminante ($b^2 - 4ac$) menor que cero no tienen solución como se muestra a continuación. Se seleccionaron dos libros incluidos en la bibliografía de la asignatura Matemáticas IV, correspondiente al primer grado de bachillerato, tomada de los planes y programas de estudio de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM.

En el libro de texto para educación media superior *Álgebra* (De Oteyza *et al*. 1996) se plantea lo siguiente: supongamos que $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación de segundo grado en x donde a, b y c son números dados. Para obtener la solución de la ecuación general de segundo grado los autores proponen resolverla por el método de completación de trinomios cuadrados perfectos; es decir, dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, se sigue que

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$ax^2 + bx = -c,$$
$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c.$$

Por otra parte, para completar un trinomio cuadrado perfecto a partir de $x^2 + \frac{b}{a}x$ se tiene que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2;$$

luego,

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -c + \frac{b^2}{4a},$$
$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a},$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$
$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Así,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Según los autores, para que las expresiones anteriores tengan sentido, el coeficiente *a* debe ser distinto de cero y el discriminante, $b^2 - 4ac$, debe ser mayor que o igual a cero, pues si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución (Oteyza *et al*. 1996, p. 343).

En el libro de texto *Intermediate Algebra* (Angel 2004) se presenta a los números imaginarios como todos aquellos que tienen por factor $\sqrt{-1}$, que es llamado unidad imaginaria y denotado con *i*. Así, para escribir la raíz cuadrada de cualquier número negativo en términos de *i*, se utiliza la siguiente propiedad para *n* número positivo:

$$\sqrt{-n} = \sqrt{-1}\sqrt{n} = i\sqrt{n}.$$

De este modo, se definen los números complejos en términos de la nueva unidad *i*. Todo número de la forma $a + bi$ donde *a* y *b* son números reales es un número complejo. Las operaciones de suma y multiplicación se realizan como sigue.

Para sumar o sustraer números complejos.

1.- Cambia todos los números imaginarios a la forma *bi*.

2.- Suma (o sustrae) las partes reales de los números complejos.

3.- Suma (o sustrae) las partes imaginarias de los números complejos.

4.- Escribe las respuestas en la forma $a + bi$.

Para multiplicar números complejos:

1.- Cambia todos los números imaginarios a la forma *bi*.

2.- Multiplica los números complejos como si multiplicaras polinomios.

3.- Sustituye i^2 por -1.

4.- Escribe la respuesta en la forma $a + bi$. (Angel 2004, pp. 510 – 512)

En un capítulo posterior se inicia con la resolución de ecuaciones cuadráticas, y se deduce la formula general de manera análoga a como se hace en el texto Álgebra (De Oteyza *et al*. 1996) utilizando el discriminante $b^2 - 4ac$ de la fórmula para determinar el número de soluciones reales para la ecuación cuadrática.

Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:
Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas.
Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una solución real.
Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática *no tiene soluciones reales*. (Angel 2004, pp. 542)

Además, se muestra lo siguiente.

Si $b^2 - 4ac > 0$, la gráfica de la ecuación se interseca con el eje X dos veces (véase la figura 1.4).

Figura 1.4. Representación geométrica de las soluciones de una ecuación cuadráticacon $b^2 - 4ac > 0$ (Angel 2004, pp. 542 – 543)

Si $b^2 - 4ac = 0$, la gráfica de la ecuación se interseca con el eje X una vez (véase la figura 1.5).

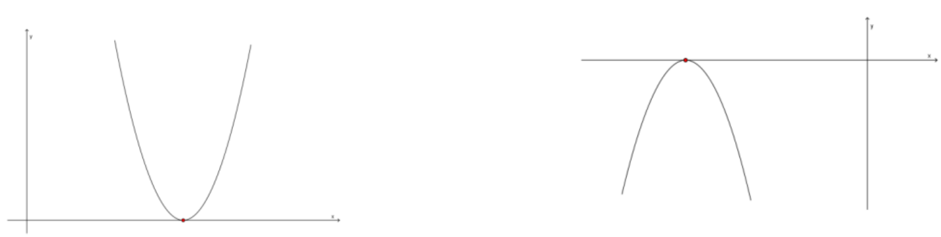


Figura 1.5. Representación geométrica de las soluciones de una ecuación cuadrática con $b^2 - 4ac = 0$ (Angel 2004, pp. 542 – 543)

Si $b^2 - 4ac < 0$, la gráfica de la ecuación no se interseca con el eje X (véase la figura 1.6).

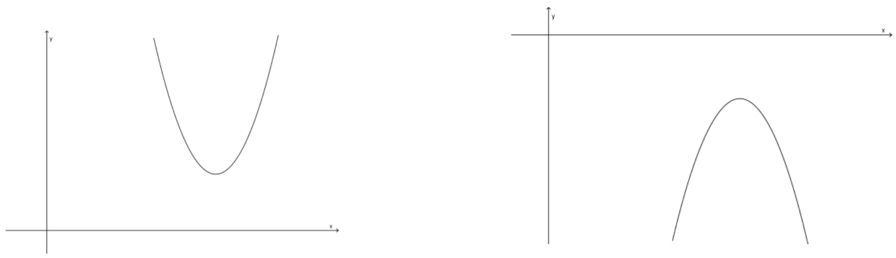


Figura 1.6. Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la parábola que representa al polinomio $ax^2 + bx + c$ no se interseca con el eje X (Angel 2004, pp. 542 – 543)

Los números complejos en libros de texto de secundaria

Si bien los números complejos no son un tema propio de la educación secundaria, éstos aparecen de manera implícita al resolver y representar soluciones de ecuaciones cuadráticas. Se escogieron dos libros de texto autorizados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) para su uso en las escuelas secundarias del Sistema Educativo Nacional en el ciclo 2011 – 2012. La lista completa de libros autorizados por la SEP puede consultarse en el *Diario Oficial de la Federación* del 20 de junio de 2011.

En la lección 15 del libro Matemáticas 3º (Farfán *et al*. 2008), los autores presentaron la forma general de la ecuación de segundo grado con una incógnita: $ax^2 + bx + c = 0$. Siguiendo el mismo razonamiento que el texto Álgebra (De Oteyza *et al.* 1996), (de bachillerato), deducen la expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Luego, para resolver una ecuación de segundo grado, basta con sustituir los valores de a, b y c en la expresión hallada. Para saber si una ecuación de segundo grado tiene dos, una o ninguna raíz, se propone calcular el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cuando $\Delta > 0$, la ecuación de segundo grado tiene dos raíces distintas.

> Cuando $\Delta = 0$, la ecuación de segundo grado tiene una raíz.
>
> Cuando $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces. (Farfán *et al*. 2008, pp. 123 – 125)

En la lección 1 del bloque 2 del libro *Matemáticas 3* (Briseño *et al*. 2008), se lee lo siguiente.

> Las ecuaciones cuadráticas pueden tener una o dos soluciones o pueden no tener solución.
>
> La ecuación $(x – 5)^2 = 0$ tiene a $x = 5$ como única solución.
>
> La ecuación $x^2 = 4$ tiene dos soluciones distintas: $x = 2$ y $x = –2$.
>
> La ecuación $x^2 = – 5$ no tiene solución. (Briseño *et al*. 2008, p. 102)

Obsérvese que en ambos textos de nivel secundaria la conclusión es la misma. Dada la fórmula general de resolución de las ecuaciones de segundo grado, $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, si $\Delta < 0$, siendo $\Delta = b^2 – 4ac$, entonces la ecuación no tiene raíces. No se explica que las raíces de la ecuación no pertenecen a los números reales.

En este análisis se observa que en el nivel de licenciatura una de las principales preocupaciones de los autores de los libros de texto revisados es el carácter geométrico de los números complejos. Sin embargo, la geometría asociada a este sistema de números se genera directamente de sus propiedades algebraicas. Courant y Robbins (2002) vincularon el campo de los números complejos con los puntos de R^2, Cárdenas *et al.* (1990) lo relacionaron con representaciones vectoriales sobre el plano. Luego, los modelos geométricos propuestos no clarifican la construcción geométrica de los números complejos; se da prioridad a su aspecto algebraico y se busca un modelo adecuado que se apegue a las propiedades propuestas. Evidencia de esto es la representación geométrica de la unidad compleja $i = \sqrt{-1}$; primero se presenta como un número “adecuado” que resuelve algebraicamente la problemática planteada de encontrar soluciones a ecuaciones como $x^2 + 1= 0$, y después se le asocia una representación geométrica “conveniente” en el plano. Surge la pregunta obligada: ¿Los números complejos pueden generarse geométricamente?

De acuerdo con los textos analizados, el carácter puramente algebraico de los números complejos se concibe desde la educación media superior. Se observó que $i = \sqrt{-1}$ se presenta como unidad adecuada para operar y resolver ecuaciones que no tendrían solución en los números reales, además, en el bachillerato las propiedades algebraicas de los números complejos se tratan del mismo modo que en el nivel superior. La geometría más próxima a los números de la forma $a + bi$ se vincula con la resolución de ecuaciones cuadráticas y se explica mediante la ausencia de intersecciones de la parábola en el plano cartesiano que representa a la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con el eje X, lo que indica que para ningún valor de las abscisas se cumple que $ax^2 + bx + c = 0$. Este modelo invita a pensar que los números complejos no tienen representación geométrica y en consecuencia no sería natural que pudieran generarse geométricamente.

Los números complejos no son un tema tratado en la educación secundaria. Sin embargo, las ecuaciones cuadráticas y el manejo de la fórmula general de resolución se estudian en tercer grado. Con el estudio del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ se abre la posibilidad de dar a conocer a los estudiantes que se puede generar un dominio numérico más amplio que el que conocen. Es probable que las estructuras cognitivas de los estudiantes de secundaria no sean las adecuadas para incorporar conocimientos relacionados con un campo numérico distinto al campo de los números reales, pero esto no implica que se deba negar la existencia de entidades matemáticas que posiblemente en un futuro sean estudiadas por los alumnos. Afirmar que una ecuación cuadrática con $b^2 - 4ac < 0$ no tiene solución, puede generar concepciones limitadas de esas cantidades desconocidas hasta ese momento por los estudiantes, que se reforzará con modelos geométricos como el de la parábola que no se interseca con el eje X.

Este análisis muestra cómo se estudian los números complejos en el sistema escolar. No se plantea una idea clara de cómo se generan estos números y por tanto es de esperarse que su conceptuación resulte complicada, ajena y artificial en los estudiantes de cualquier nivel.

Objetivo de esta investigación

Para este trabajo de investigación en matemática educativa se plantearon los siguientes objetivos.

– Identificar y analizar las concepciones sobre los números complejos presentes en estudiantes de educación media superior y superior de la UNAM.
– Identificar las dificultades de estudiantes de educación media superior y superior de la UNAM para conceptuar y conceptualizar los números complejos, así como las posibles causas de esas dificultades.

En la redacción de este trabajo se debe entender por *concepciones* las ideas, nociones, creencias, procedimientos, etc. Según Ponte (2004), las concepciones son estructuras cognitivas que intervienen como marco subyacente de los conceptos y son esencialmente metafóricas. Por otra parte, el mismo autor explica que las creencias son verdades personales que no admiten duda ni disputa y que provienen de la experiencia o de la fantasía (Ponte 2004, p.1). Así, por medio de las creencias se determina si algo es verdadero o falso aunque se carezca de un argumento consistente y sistemático para sustentarlo. Ponte se refiere al conocimiento como una amplia red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos. De este modo, las creencias y las concepciones forman parte del conocimiento. Para nuestro estudio no se consideró indispensable distinguir entre concepción y creencia de manera puntual, ya que se buscaba caracterizar las conceptuaciones de los estudiantes; es decir, se buscó determinar los elementos que emplean los estudiantes para formarse una opinión o consideración de los números complejos. Además, se buscaba identificar si esas conceptuaciones dificultaban lograr la conceptualización de los números complejos.

Algunas investigaciones publicadas sobre la cognición de los números complejos

Se analizaron algunas investigaciones previas relacionadas con la cognición de los números complejos. Los trabajos revisados fueron los siguientes. “The concept of complex numbers: An example of accomodation in the learning of mathematics" (1979), de Shlomo Vinner; "Ces nombres que l'on di « imaginaires »" (2003), de Hilda Rosseel y Maggy Schneider, y "What is i?", que es un estudio de caso llevado a cabo por George Lakoff y Rafael E. Núñez, incluido en el libro *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being* (2000).

En el trabajo de Shlomo Vinner (1979) se reporta una investigación enfocada en el acomodamiento del concepto de número complejo en los estudiantes de bachillerato y de licenciatura. Las nociones de asimilación y de acomodamiento, según Vinner, tienen significados similares en las teorías de Piaget, Ausubel y Skemp. Es común que en matemáticas las estructuras cognitivas de los estudiantes no es las adecuadas para integrar nuevos conocimientos; Vinner define el acomodamiento como sigue.

> […]
> muy frecuentemente y especialmente en matemáticas, la estructura cognitiva del estudiante no es la deseable para incorporar nuevo material. En este caso, la estructura cognitiva tiene que someterse a algunos cambios, esto es acomodamiento (Vinner 1979, p. 426).

El autor distingue dos tipos de cambio: el acomodamiento subordinado, que exige un cambio relativamente pequeño en el esquema existente del individuo, y el acomodamiento subordinante, que implica una sustitución completa del esquema existente por uno nuevo totalmente diferente (Vinner 1979, p. 426).

Vinner en esta publicación de hace más de 30 años, señaló dos maneras de *enseñar* el concepto de número complejo. La primera de ellas requiere un proceso de acomodamiento subordinado; consiste en mostrar a los estudiantes que existen algunos números con los que no están familiarizados pero que son útiles para extender el campo de los números reales; uno de esos números se denota como i, siendo su cuadrado igual a –1. Otros números se obtienen al multiplicar i por números conocidos (números reales) y son del tipo bi, que al ser sumados a números reales, generan números del tipo $a + bi$; es decir, números complejos. Estos números tienen leyes de adición y multiplicación:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$
$$(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Esta aproximación refleja las ideas de extensión de campo al agregar una raíz de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Vinner menciona que esta presentación probablemente no es muy aceptable desde el punto de vista del rigor matemático y, además, resulta completamente ininteligible para los estudiantes ajenos a las matemáticas superiores. Sin embargo, requiere un cambio relativamente pequeño en los esquemas de los estudiantes, ya que pueden usar por ejemplo $5 + \sqrt{3}$ (véase el tema de extensión de campo en Courant y Robbins 2000, pp. 157 – 164) como una analogía a $5 + 3i$. Luego, según Vinner, esta manera de enseñanza requiere un acomodamiento subordinado (Vinner 1979, p. 427).

La segunda forma de enseñanza es identificar a los números complejos como pares ordenados de números reales. La suma y la multiplicación de pares se definen de la siguiente manera:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Según Vinner, se puede probar que la colección de pares ordenados es un campo que extiende el campo de los números reales y que tiene un elemento, el par (0, 1), cuyo cuadrado es (–1, 0). De acuerdo con el autor, es claro que para asimilar el concepto de número complejo con esta segunda aproximación se debe cambiar completamente el esquema de los números. Así, esta manera de enseñanza requiere un acomodamiento subordinante.

> [El estudiante] tiene que asimilar la idea de que los números son “hechos por el hombre”, que los matemáticos definen objetos y operaciones matemáticas “arbitrariamente” y que los números reales pueden ser identificados con todos los pares que tienen la forma (a, 0) y que por lo tanto existe un número cuyo cuadrado es –1 en el campo complejo. (Vinner 1979, p. 428)

Para explorar el acomodamiento en el aprendizaje de los números complejos, Vinner trabajó con tres grupos de estudiantes que contestaron un cuestionario con 2 preguntas de opción múltiple sobre el número *i*. Un grupo estaba integrado por estudiantes de bachillerato con un nivel académico superior al promedio; otro, formado por estudiantes de ciencias que recibieron un curso corto de álgebra lineal como preparación para estudios posteriores en química o biología y uno más integrado por estudiantes universitarios con una orientación más matemática que el grupo anterior. Los dos primeros grupos estudiaron los números complejos como pares ordenados, y el tercer grupo los estudió como extensión del campo de los números reales al agregar *i*.

Algunas ideas de los estudiantes respecto a los números complejos que Vinner obtuvo mediante el cuestionario fueron las siguientes.

1.- No podemos entender cómo el cuadrado de un número es igual a –1.

2.- Tenemos ideas claras de cómo usar los números complejos en los cálculos.

3.- *i* no tendría que existir, pero la definición de número puede interpretarse de muchas maneras y cada quien elige la interpretación que le ajusta mejor.

4.- Es imposible definir *i* por medio de conceptos ordinarios, pero puede ejemplificarse por medio de ejercicios; por ejemplo, ecuaciones cuadráticas que tienen discriminante negativo.

5.- *i* no es un número y no falta información, falta imaginación.

6.- *i* es el número $\sqrt{-1}$ y es más conveniente denotarlo por una letra como el caso de π.

7.- *i* es un dígito en un dominio diferente. (Vinner 1979, p. 429)

Sólo un estudiante, de acuerdo con las perspectivas de Vinner (1979, p. 436), logró un acomodamiento de orden superior al mencionar que los números complejos son pares ordenados de números reales donde *i* es el par (0, 1). Lo más común fue el acomodamiento subordinado al identificar *i* con $\sqrt{-1}$.

Por otra parte, el autor recomienda que si existen dos aproximaciones alternativas para enseñar un nuevo tema, uno que requiere acomodamiento subordinado y otro que necesita acomodamiento de orden superior, y si en la instrucción posterior no se necesita una aproximación de orden superior, entonces es mejor usar la aproximación subordinada.

Finalmente, concluye que si existe sólo una aproximación que requiere un acomodamiento de orden superior para enseñar el tema y las ideas de orden superior no serán necesarias en la enseñanza futura, quizás es mejor reconsiderar la inclusión del tema en los programas de matemáticas escolares.

En el reporte de la investigación de Rosseel y Schneider (2003) se describen y analizan en términos de la noción de *obstáculo epistemológico*, en el sentido de Brousseau, las dificultades que enfrentron algunos estudiantes belgas de bachillerato, así como profesores practicantes en formación con relación a la conceptuación de los números complejos después de haber recibido una enseñanza bajo un enfoque algebraico, como se explicará más adelante. Según las autoras, su investigación les permitió analizar aquello que se pone en acción durante el aprendizaje de los números complejos.

Una de las aproximaciones clásicas a los números complejos empleada en la enseñanza secundaria en Bélgica (estudiantes de 12 a 18 años) consiste en postular la existencia del número i cuyo cuadrado es $i^2 = -1$. El objetivo de este postulado es extender el número de ecuaciones solubles (Rosseel y Schneider 2003, p 54). De este modo, se define al número complejo como aquel que tiene la forma $a + bi$, donde a es llamada la parte real y b es llamada la parte imaginaria. Para sumar dos números complejos se deben sumar sus partes reales y sus partes imaginarias respectivamente, y su multiplicación obedece a la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma de los números reales; es decir,

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

Otra aproximación frecuente consiste en definir un número complejo como una pareja de números reales (a, b) definiendo la suma y la multiplicación respectivamente como

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ y } (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

La escritura trigonométrica de estas aproximaciones, según las autoras, conduce a la interpretación geométrica de las operaciones de los números complejos en términos de transformaciones geométricas del plano (Rosseel y Schneider 2003, p. 54).

Las preguntas planteadas por las investigadoras formaron parte de una entrevista semiestructurada enfocada en lo que los entrevistados aprendieron sobre los números complejos, cómo lo explicarían a otros estudiantes que no han iniciado estudios relacionados con los números complejos, la importancia de estos números en las matemáticas, así como cuestionamientos sobre su "existencia verdadera". Algunas ideas de los estudiantes identificadas mediante en las entrevistas fueron las siguientes (Rosseel y Schneider 2003, pp. 55-56).

1.– La parte imaginaria de los números complejos es una parte "inventada".

2.– Los números complejos se utilizan para resolver ecuaciones cuadráticas cuyo discriminante es negativo. Particularmente, i sirve para cambiar el signo de los números negativos, por ejemplo $-9 = 9i^2$.

3.– Los números complejos pueden imaginarse, son como la geometría del espacio pero sin la posibilidad de comprobar los resultados obtenidos al trabajar con ellos.

4.– No existe un modelo concreto para i. No es claro por qué $i^2 = -1$.

5.– Los números complejos sugieren imposibilidad y complicación. En cursos previos al bachillerato los profesores enseñan que las raíces cuadradas de los números negativos no existen; después se presenta i como una herramienta que permite encontrar esas raíces. ¿Por qué los profesores trabajan de esa manera?

6.– La noción de número complejo es imprecisa y absurda. Las nociones puramente abstractas y sin aplicación, como los números complejos, carecen de interés y no pueden comprenderse.

7.– i es únicamente una herramienta de cálculo sin significado.

8.– i es un número inventado cuyo cuadrado da -1 y puede verse como todos los demás números inventados; sin embargo, cambia la concepción de las matemáticas que un estudiante puede tener.

9.– Los números complejos son una pérdida de tiempo.

10.– No sé para qué sirven los números complejos.

Algunas ideas de los profesores en formación fueron las siguientes (Rosseel y Schneider 2003, pp. 57-58).

1.– Se necesita poder de abstracción para imaginar que pueden existir otros números más generales que los números reales.
2.– El ejemplo más concreto de la utilidad de los números complejos es que permiten encontrar las raíces de los números negativos.
3.– Los números complejos son una construcción y una notación cómoda que permiten descomponer en factores cualquier polinomio y encontrar las raíces de los números negativos.
4.– Se pueden representar de manera concreta en el plano de dos dimensiones; sin embargo, su significado no es concreto.
5.– En matemáticas son aceptados como parte de la teoría matemática; en física son útiles para simplificar cálculos y por tanto son suficientemente concretos.
6.– No son números porque un número es aquel con el que se puede contar algo.
7.– i es un número aunque se trate de una letra, y esto puede perturbar a los estudiantes.
8.– El cuadrado de un número no puede ser negativo, pero los matemáticos inventaron el número i llamado número imaginario tal que $i^2 = -1$.
9.– Su analogía con las coordenadas del plano no ayuda a comprender por qué $i^2 = -1$.

Según las autoras, para los estudiantes la palabra número evoca las propiedades comúnmente asociadas a los números que conocen, entre ellas que un número sirve para contar, de aquí que surjan dificultades para englobar objetos matemáticos inesperados, como los números complejos, dotados con otras propiedades y que incluso generan contradicciones con sus esquemas establecidos. Indican que si los estudiantes o los profesores en formación se muestran incómodos al tratar con los números complejos, es precisamente porque no pueden asociar un modelo concreto, como la longitud de un segmento, ni una escritura familiar como la de un número decimal (Rosseel y Schneider 2003, p. 60 – 61).

Por otra parte, señalan la visión positivista del sistema educativo de su país como otro factor importante que obstaculiza el aprendizaje de los números complejos.

Argumentan que esta visión consiste en concebir a los objetos matemáticos como el reflejo de los objetos del mundo natural: los números naturales se relacionan con colecciones de objetos que existen en el mundo tangible, los números racionales y los irracionales se relacionan con la medida de magnitudes. En oposición, proponen que una visión socio-constructivista considera a los objetos matemáticos como productos imaginados por el espíritu humano en función de proyectos bien determinados (Rosseel y Schneider 2003, p. 61).

Respecto a postular la existencia de un número i cuyo cuadrado es –1 como una solución didáctica para estudiar los números complejos, las autoras consideran que esta aproximación no resuelve los problemas que enfrentan los estudiantes para comprender los números complejos, únicamente permite desarrollar la teoría de los números complejos bajo un modelo formal basado en el principio de no contradicción, es decir, la teoría puede no ser significativa para el estudiante. Un ejemplo de esto es que el estudiante no considera que la multiplicación de dos números complejos es una operación diferente a la multiplicación de números reales que conoce. Las autoras afirman que la introducción prematura de la letra i puede acarrear confusiones a los estudiantes, pues su papel en la matemática obedece a una perspectiva esencialmente formalista (Rosseel y Schneider 2003, pp. 62 – 66).

La aproximación geométrica clásica empleada en Bélgica es la conocida en México: los números complejos son vistos como parejas ordenadas en el plano. Esta aproximación más concreta no elimina forzosamente las dudas de la existencia del número i, pues los estudiantes continúan sorprendiéndose de que un número pueda tener una potencia cuadrada negativa. Respecto a esta aproximación para enseñar los números complejos, las autoras señalan que uno de los principales obstáculos que enfrentan los estudiantes es concebir a un número complejo como un número, ya que el modelo presentado lo exhibe como una pareja ordenada, es decir, se requieren dos números reales para representar a un número complejo; luego, un complejo no es un número sino que son dos números. Aunado a esto, el modelo, a pesar de ser tangible, no necesariamente ayuda a comprender por qué $i^2 = -1$.

A continuación se describe el estudio de caso titulado “¿Qué es i?”, de Lakoff y Núñez (2000). Los autores trabajaron desde el punto de vista de la ciencia cognitiva a través de metáforas. Según Lakoff y Núñez, la mayoría de los seres humanos desarrollan conceptos abstractos en términos concretos mediante ideas y modos de razonamiento basados en el sistema sensorio-motor. Al mecanismo por el cual lo abstracto es comprendido en términos de lo concreto se le llama *metáfora conceptual*. El pensamiento matemático hace uso de metáforas conceptuales; por ejemplo, cuando se conceptualizan los números como puntos sobre una línea (Lakoff y Núñez 2000, p. 5).

Las metáforas conceptuales son parte de nuestro sistema de pensamiento; su principal función es permitirnos razonar acerca de dominios relativamente abstractos (dominios destinatarios) usando la estructura formada por inferencias de dominios relativamente concretos (dominios fuente) (Lakoff y Núñez 2000, p. 42). Los autores explican que una metáfora conceptual es un mecanismo cognitivo central que extiende la aritmética básica a aplicaciones más sofisticadas de los números. Muchos de los procesos de abstracción de las matemáticas superiores son consecuencia de capas sistemáticas de metáforas sobre metáforas, donde cada capa metafórica tiene una estructura de inferencias del dominio fuente al dominio destinatario (Lakoff y Núñez 2000, pp. 47 – 48).

Al comienzo de su estudio de caso, estos autores dan una explicación de la naturaleza controversial de $\sqrt{-1}$. Afirman que transcurrió mucho tiempo antes de que $\sqrt{-1}$ fuera reconocido como un número, principalmente por razones cognitivas, pues en matemáticas un número representaba una magnitud, y $\sqrt{-1}$ no es una magnitud comparable con las magnitudes reales, los números reales son ordenados linealmente, y $\sqrt{-1}$ no está ordenado respecto a los números reales. Sin embargo, $\sqrt{-1}$ es útil para resolver ecuaciones y se puede manipular para realizar cálculos (Lakoff y Núñez 2000, p. 420).

Lakoff y Núñez señalan como su objetivo mostrar cómo los números complejos, los números imaginarios, el plano complejo y la aritmética compleja surgen y son entendidos en términos de mecanismos de cognición ordinaria. Los autores afirman que, desde una perspectiva formal, mucho acerca de los números complejos y su aritmética parece arbitrario. Desde el punto de vista algebraico, $i = \sqrt{-1}$ surge como una solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$. No hay nada geométrico en este tipo de argumentación, ni siquiera en el llamado plano complejo, puesto que no es claro por qué el "eje i" forma un ángulo recto con del eje X, es decir, forma un ángulo de 90° –en sentido levógiro– con respecto al eje X (Lakoff 2000, pp. 420 – 421).

Los autores asumieron el siguiente principio: Las leyes de la aritmética se deben mantener para x, siendo x cualquier "tipo" de número, es decir, las leyes de la aritmética se mantienen para todos los *números*. Esto es equivalente al principio cognitivo de cerradura, es decir, cualquier operación aritmética sobre números dará como resultado un número (Lakoff y Núñez 2000, p. 421).

Ahora, los números irracionales dan soluciones a ecuaciones como $x^2 = 2$. Para resolver esta ecuación se debe dar por hecho que x es un número. Una vez que se muestra que x no puede ser un número racional, el principio de cerradura obliga a que los números irracionales existan, con $x = \sqrt{2}$ como una solución de $x^2 = 2$. Para resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$, de acuerdo con esta perspectiva, se necesita que bajo las leyes de la aritmética x sea un número. Ahora, $x^2 + 1 = 0$ equivale a $x^2 = -1$; si x es un número, debe ser un número natural, racional, irracional o algún tipo de "número". Llámese i a dicho número; es decir, $i^2 = -1$. El número i no es un número real, pues no guarda un orden relativo con los números reales. Si i fuera un número positivo, su cuadrado sería positivo; si i fuera un número negativo, su cuadrado sería positivo; si i fuera igual a 0, su cuadrado sería igual a 0, pero su cuadrado es –1. De ahí que sea llamado imaginario; i será un número en virtud de la cerradura y de las leyes de la aritmética (Lakoff y Núñez 2000, pp. 422 – 423).

Para estudiar qué es i, los autores recurren a la conceptuación de los números negativos y sus operaciones aritméticas básicas (adición y multiplicación). Se utilizará la metáfora de que la aritmética es el movimiento a lo largo de una línea con un punto particular al que se llamará origen; la metáfora permite extender la línea indefinidamente en ambos sentidos a partir del origen. De este modo, los números positivos, el cero y los números negativos serán conceptuados como puntos ubicados sobre la línea. Para sustentar la aritmética de los números reales hay que extender la metáfora.

Los números negativos se localizarán sobre la línea en el sentido opuesto al de los positivos respecto al cero, que se identifica con el origen. En el dominio fuente se observa la simetría, para todo punto localizado a determinada distancia del origen existe un único punto localizado a la misma distancia pero en el sentido opuesto, es decir, existe un punto simétrico. El simétrico de –5 es +5 y el simétrico de +5 es –5. En el dominio destinatario, a cada punto localizado en la línea le corresponde un número; luego, para cada número positivo existe un único número negativo, e inversamente (Lakoff y Núñez 2000, pp. 89 – 90).

La metáfora para sumar es la siguiente. Para sumar un número positivo a un número dado hay que moverse a la derecha del "punto dado" sobre la recta; para sumar un número negativo hay que moverse hacia la izquierda. Es decir, si se quiere determinar la suma de $A + B$, siendo B un número positivo, basta con moverse B unidades a la derecha del punto que representa a A. Si B es un número negativo, entonces hay que moverse B unidades a la izquierda de modo que asociando distancias dirigidas a la adición se tendrá que $A + (-B) = A - B$. Para determinar la sustracción $A - B$ hay que moverse B unidades a la izquierda de A. Si B es negativo, hay que moverse B unidades a la derecha de A. Así, asociando distancias dirigidas a la sustracción se tendrá que $A - (-B) = A + B$.

$$A + (-B) = A - B,$$
$$A - (-B) = A + B.$$

La multiplicación es más complicada. Multiplicar por un número positivo requiere ejecutar la acción de mover determinado número de veces la posición de un punto. Multiplicar un número negativo $-B$ por un positivo A requiere sumar A veces $-B$, es decir, partiendo del origen hay que mover A veces las B unidades negativas (Lakoff y Núñez 2000, p. 91).

Según Lakoff y Núñez, multiplicar por un número negativo no es una simple extensión conceptual de la multiplicación por un número positivo. Se necesita una metáfora diferente que debe ajustarse a las leyes de la aritmética. Para multiplicar por un número negativo $-n$ primero se multiplica por el número positivo n y después se hace una rotación mental al punto simétrico de 180°. Este proceso desde una perspectiva cognitiva, es una mezcla de metáforas. Así, $-n \cdot a = (-1 \cdot n)\, a = -1 \cdot (n \cdot a)$, es decir, $-n \cdot a$ puede conceptualizarse como una rotación al punto simétrico de $n \cdot a$ (Lakoff y Núñez 2000, p. 92).

Para conceptualizar los números complejos se empleará la metáfora denominada mezcla rotación–plano, es decir, se puede considerar la mezcla de metáforas multiplicación–rotación y combinarla con la mezcla número–línea para formar la mezcla rotación–número–línea, en la que multiplicar por el número –1 se corresponde con una rotación de 180°. Esta nueva mezcla define una multiplicación metafórica por medio de la rotación del plano, se puede multiplicar un par ordenado por otro. Así, dado el punto (a, b) en el plano cartesiano, la rotación de 180° lo envía al punto $(-a, -b)$, es decir, $(-1 , 0) \cdot (a, b) = (-a, -b)$. La suma está bien definida, $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ y $(0, a) + (0, b) = (0, a + b)$ (Lakoff y Núñez 2000, p. 426).

En la rotación en el plano, rotar 180° equivale a multiplicar por –1. Si se extiende la metáfora para encontrar un significado a rotar 90°, se tendrá que existe algún número n tal que la rotación de 90° represente multiplicar por n. Luego, dos rotaciones de 90° serán el equivalente a n^2.

Así, al multiplicar n y $(1, 0)$ se aplicará una rotación de 90° a $(1, 0)$ para obtener $(0, 1)$, luego, $n \cdot (1, 0) = (0, 1)$. Si se multiplican n y (a, b), se aplicará una rotación de 90° a (a, b) para obtener $(-b, a)$, así, $n \cdot (a, b) = (-b, a)$. Ahora, si se multiplican n^2 y (a, b) se aplicará una rotación de 90° a $(-b, a)$ para obtener $(-a, -b)$, de donde $n^2 \cdot (a, b) = (-a, -b)$.

De este modo, Lakoff y Núñez muestran la rotación en el plano cartesiano como la metáfora para conceptualizar la multiplicación por –1, es decir, la multiplicación por –1 es rotar hacia el punto simétrico sobre la línea. Luego, el plano complejo resulta de rotar el plano cartesiano 90°, es decir, multiplicar por $i = \sqrt{-1}$ es rotar 90° (Lakoff y Núñez 2000, p. 429). Estos resultados no son arbitrarios, si la multiplicación por –1 es una rotación de 180° y además $i \cdot i = -1$ entonces tiene sentido que la multiplicación por i sea una rotación de 90°. Lakoff y Núñez señalan que es posible pensar a los números complejos y sus operaciones aritméticas básicas aislados del dominio espacial, pero como consecuencia se perderá la estructura conceptual que motiva las propiedades aritméticas de este sistema numérico. Caracterizar al plano complejo como la rotación de 90° del plano cartesiano revela la estructura inherente que subyace al significado del plano complejo (Lakoff y Núñez 2000, pp. 430 – 431). Así, en términos de metáforas, la estructura conceptual del plano complejo es la siguiente combinación de metáforas.

1.- La multiplicación por –1 se sustenta con la metáfora de la rotación de 180°.

2.- La metáfora de los números como puntos sobre una línea.

3.- La metáfora denominada *mezcla plano cartesiano*.

4.- La metáfora denominada *mezcla rotación–plano*.

5.- La metáfora rotación de 90° en el plano, es decir, la *mezcla rotación de 90°*.

Es digno de observar que la enseñanza de los números complejos no ha cambiado en nada desde la publicación de la investigación de Vinner (1979). Las mismas representaciones de los números complejos: como símbolos manipulables de la forma $a + bi$ o como pares ordenados en el plano cartesiano, son empleadas para identificarlos y justamente es posible que en ello radiquen las dificultades de su conceptuación (aprendizaje). ¿Por qué emplear sistemas de representación y no modos de generar los números complejos? Vinner reconoció sólo dos posibles maneras de llevar al aula el concepto de número complejo que, según la evidencia encontrada en los libros de texto, persisten. También caracterizó los tipos de acomodamiento de estructuras cognitivas en los procesos de aprendizaje de los estudiantes que implícitamente muestran algunas dificultades. Sin embargo, lejos de proponer un camino para librar estas dificultades, concluyó con dos recomendaciones: optar por la vía del acomodamiento subordinado atendiendo a las representaciones, o desistir de la enseñanza del tema si no existe una vía de este tipo y si no se requiere el conocimiento de los números complejos en el futuro del estudiante. ¿Se requiere una reforma de planes y programas de estudio para evitar los inconvenientes de conocer los números complejos? ¿Existen otros caminos que permitan a los estudiantes comprender *qué es* y no *qué representa* a una magnitud compleja?

La investigación de Rosseel y Scheneider (2003) muestra evidencias de un conjunto de dificultades surgidas de los modelos de representación utilizados para los números complejos empleados en la enseñanza tradicional, dificultades que van desde considerar el número i como un artificio sin significado fabricado para “solucionar” algunos problemas matemáticos, hasta la imposibilidad de comprender a través de los modelos vigentes por qué $i^2 = –1$.

La investigación de Lakoff y Núñez (2000) muestra una perspectiva diferente para comprender los mecanismos cognitivos que intervienen en la cognición de los números complejos. Este panorama se enriquecería con el estudio histórico del surgimiento de los números complejos. Las evidencias encontradas en los libros de texto y en los reportes de investigación de Vinner (1979) y de Rosseel y Shneider (2003) muestran a los números complejos en el ambiente escolar desde una óptica puramente aritmética-algebraica, y en ocasiones completamente simbólica y ligada a la organización rigurosa del conocimiento matemático, dejando de lado su elaboración inicial en el ámbito geométrico, aspecto rescatado con una visión alternativa en el trabajo de Lakoff y Núñez.

A partir estas reflexiones surgen las siguientes preguntas.

1.- ¿Cómo pueden los estudiantes conceptualizar los números complejos?
2.- ¿Qué consecuencias tiene una temprana concepción errónea de las raíces cuadradas de los números negativos?
3.- ¿Los números complejos pueden generarse geométricamente en el aula?
4.- ¿Existen otros caminos que permitan a los estudiantes comprender *qué es* y no *qué representa* a una magnitud compleja?

Estas preguntas no se responderán en esta investigación, surgieron a partir de la revisión de algunas investigaciones hechas en diferentes países relacionadas con la cognición de los números complejos.

CAPÍTULO II
LA METÁFORA CONCEPTUAL COMO MARCO TEÓRICO

En este capítulo se plantea el marco teórico desde el que se condujo la investigación para esta tesis. El marco teórico de la metáfora conceptual, desde la perspectiva de Lakoff y Núñez (2000), tiene sus fundamentos en la lingüística y se sustenta en la ciencia cognitiva, como se describe a continuación.

Existen asuntos matemáticos que regularmente son aceptados de manera dogmática. Por ejemplo, cuando se pregunta: ¿Por qué menos por menos da más?, o ¿Por qué $i^2 = -1$? Las respuestas a estas preguntas se siguen de definiciones, axiomas y reglas que no necesariamente surgen de un entendimiento genuino de aquello que se cuestiona. En muchos casos se valida una respuesta mediante una demostración rigurosa y formal, y no necesariamente porque se logre comprender el significado de los conceptos matemáticos implicados. Este tipo de demostraciones generalmente dejan ver la manipulación adecuada de símbolos pero no las ideas que subyacen a lo que se quiere validar.

Para entender la naturaleza y el origen de las matemáticas así como su significado es necesario estudiar las matemáticas mismas, con sus fundamentos intuitivos, su estructura de inferencias, su sistema de símbolos, etc., como una materia científica. Es decir, se requiere una ciencia cognitiva de las matemáticas. Desde esta perspectiva, las respuestas que se asumen como dogmas deben darse en términos de mecanismos subyacentes a nuestras intuiciones y a nuestras ideas. Es decir, en términos de cognición humana y mecanismos biológicos y culturales, no en términos de axiomas, definiciones, demostraciones formales y teoremas (Núñez 2000, p. 5).

Algunas ideas importantes de la ciencia cognitiva que ayudan a nuestro entendimiento de las matemáticas son las siguientes, según los escritos de Núñez (2000) y Lakoff y Núñez (2000).

1.- La encarnación de la mente. La ciencia cognitiva trata de detallar la naturaleza dinámica del cuerpo humano y del cerebro, así como su funcionamiento diario en un mundo de estructuras, conceptos y razonamientos, en lo cual tienen cabida conceptos y razonamientos matemáticos.

2.- El inconsciente cognitivo. Muchos procesos cognitivos son inconscientes, inaccesibles a la introspección. No podemos ver directamente por medio de introspección en nuestro sistema conceptual y en nuestros procesos cognitivos de bajo nivel; esos procesos incluyen muchos pensamientos matemáticos.

3.- Pensamiento metafórico. La mayoría de los seres humanos conceptúan ideas abstractas en términos concretos usando estructuras de inferencias precisas y modos de razonamiento fundamentados en el sistema sensorio-motor. El mecanismo cognitivo por medio del cual lo abstracto es comprendido en términos de lo concreto es llamado *metáfora conceptual*. El pensamiento matemático también hace uso de metáforas conceptuales; por ejemplo, cuando se conceptúan los números como puntos sobre una línea o espacios como conjuntos de puntos.

Se debe tener en mente que no sólo es de interés lo que es verdadero en matemáticas, sino lo que las ideas matemáticas significan y por qué las verdades matemáticas lo son en virtud de esos significados. Es importante aclarar que Núñez (2000) se refiere a las aproximaciones contemporáneas de la ciencia cognitiva, que son radicalmente diferentes de la ciencia cognitiva ortodoxa.

En esta misma postura, Anna Sfard (1998) propone que para investigar sobre el aprendizaje en general se tienen que examinar cuidadosamente los niveles primarios más fundamentales de nuestro pensamiento; es decir, indagar en las suposiciones y en las creencias que nos guían, en las metáforas subyacentes tanto a nuestras concepciones espontáneas diarias como a nuestras reflexiones científicas. Según la autora, las metáforas son los objetos informativos de análisis más primitivos, elusivos y sorprendentes (Sfard 1998, p. 4). Su poder especial deriva de que frecuentemente cruzan las fronteras entre lo espontáneo y lo científico, entre lo intuitivo y lo formal; llevando a través del lenguaje ideas que se permean del discurso diario al científico y viceversa, permitiendo que nuestra intuición primaria modele ideas científicas y que los conceptos formales se enriquezcan dentro de la intuición.

En su artículo “La metáfora como conducto”, Reddy (1978) señaló la ubicuidad de las metáforas y su papel constitutivo (citado en Sfard 1998, pp. 4-5). Usando como ejemplo la noción de comunicación, mostró cómo el lenguaje que utilizamos para hablar nos proporciona conceptos que permiten ir sistemáticamente de una organización a otra, estableciéndose dominios conceptuales no relacionados. Desde entonces los mapeos conceptuales fueron conocidos como metáforas conceptuales y se volvieron objeto de investigación vigorosa. Por otra parte, la idea de que nuevo conocimiento se germina en viejo conocimiento ha sido promovida por todos los teóricos del desarrollo intelectual, desde Piaget y Vigotsky hasta los científicos cognitivos contemporáneos. La noción de metáfora como trasplante conceptual complementa esta visión proporcionando un medio para explicar el proceso que convierte lo viejo en nuevo. Así, la proyección metafórica es un mecanismo a través del cual la cultura se perpetúa y se reproduce a sí misma en un sistema creciente de conceptos.

En cuanto a los mecanismos que nos permiten conocer, y regresando a los temas matemáticos, razonemos que extender los números naturales a los racionales, luego a los reales, después a los imaginarios y a los hiperreales, por ejemplo, requiere de un enorme aparato cognitivo que va más allá de lo que los bebés, los animales y un adulto normal sin instrucción puede hacer. Así, se plantea la siguiente pregunta sobre la naturaleza, origen y significado de las ideas matemáticas: ¿Cuáles son las capacidades cognitivas encarnadas que le permiten a alguien ir desde las habilidades numéricas básicas innatas a un profundo y rico entendimiento de las matemáticas de nivel universitario? (Núñez 2000, p. 7). Lakoff y Núñez (2000) se han enfocado en esta pregunta usando metodologías propias del creciente campo de la lingüística cognitiva y de la psicolingüística. Según sus hallazgos, las habilidades matemáticas avanzadas no son independientes del aparato cognitivo usado fuera de las matemáticas. Se presume que la estructura cognitiva de las matemáticas avanzadas hace uso del aparato conceptual que es materia prima de los pensamientos diarios como esquemas, esquemas aspectuales, mezclas conceptuales y metáforas conceptuales (Núñez 2000, p. 7).

El sentido en las matemáticas ordinarias diarias no se obtiene de manera consciente a través de demostraciones concisas desde axiomas, ni siempre es resultado de instrucción explícita, consciente y dirigida hacia un objetivo. Mucho del entendimiento de las matemáticas diarias tiene lugar sin que seamos capaces de explicar exactamente lo que entendimos y cómo lo entendimos. Lakoff y Núñez(2000, p.8) plantean las siguientes preguntas al respecto.

– ¿Cuánto del entendimiento matemático hace uso del mismo tipo de mecanismos conceptuales que son utilizados en el entendimiento de los dominios ordinarios no matemáticos?
– ¿Los mismos mecanismos usados para caracterizar las ideas ordinarias también son usados para caracterizar las ideas matemáticas?
– En caso de que así sea, ¿cuál es el fundamento biológico o corporal de tales mecanismos?

Lakoff y Núñez (2000) han reportado varios mecanismos cognitivos que no son específicamente matemáticos y son usados para caracterizar ideas matemáticas. Incluyen mecanismos cognitivos ordinarios usados en las relaciones espaciales básicas, agrupamiento, cantidades pequeñas, movimiento, distribución de cosas en el espacio, cambios, orientaciones corporales, manipulaciones básicas de objetos como rotar y extender, acciones iteradas, entre otros. Algunos de esos mecanismos son los siguientes.

– La conceptualización matemática de una clase hace uso del concepto diario de una colección de objetos en una región limitada del espacio.
– La conceptualización de la recursión hace uso del concepto diario de acción repetida.
– La conceptualización de la aritmética de los números complejos hace uso del concepto diario de rotación.

Desde una perspectiva no técnica esto debería ser obvio, pero desde la perspectiva de la ciencia cognitiva se plantea la pregunta: ¿Exactamente qué conceptos y mecanismos cognitivos diarios son usados en exactamente qué maneras en la conceptualización inconsciente de ideas técnicas, tales como las que proporcionan la estructura precisa de inferencias observada en las matemáticas? (Núñez 2000, p. 8).

Algunos desarrollos en el estudio de la cognición de alto nivel en lingüística desde la perspectiva encarnada han resultado muy fructíferos y han demostrado ser poderosos, como la integración conceptual y la teoría de las metáforas conceptuales. Estas aproximaciones ofrecen la posibilidad empírica de estudiar la estructura conceptual de un vasto sistema de conceptos abstractos a través de las manifestaciones lingüísticas ampliamente inconscientes, fáciles y comunes; además, proporcionan un bagaje para el desarrollo del análisis de ideas matemáticas (Núñez 2000, p. 9).

En la lingüística se ha encontrado que los conceptos están sistemáticamente organizados a través de una vasta red de mapeos conceptuales, que ocurren en sistemas altamente coordinados y se combinan de maneras complejas. La mayor parte de esos mapeos se utilizan de manera fácil e inconsciente en la comunicación diaria. En este tenor, las metáforas conceptuales no son sólo figuras del habla, tampoco son sólo herramientas pedagógicas usadas para ilustrar algún material educativo. Las metáforas conceptuales son mecanismos cognitivos fundamentales que proyectan la estructura de inferencias de un dominio fuente sobre un dominio destinatario, es decir, permiten el uso de inferencias fáciles basadas en cuerpos específicos para estructurar inferencias abstractas (Núñez 2000, p. 9).

En lo que concierne a los conceptos matemáticos, Lakoff y Núñez (2000) distinguen los siguientes tres tipos importantes de metáforas conceptuales.

– *Metáforas fundamentales*. Fundamentan nuestro entendimiento de las ideas matemáticas en términos de la experiencia diaria. En este caso, el dominio destinatario de la metáfora son las matemáticas, pero el dominio fuente está fuera de las matemáticas. Como ejemplo está la metáfora de que las clases son esquemas contenedores.
– *Metáforas de redefinición*. Son metáforas que imponen un entendimiento técnico para reemplazar conceptos ordinarios (como las metáforas conceptuales usadas por Georg Cantor para reconceptuar las nociones “más que” y “tanto como” para conjuntos infinitos).

– *Metáforas de enlace*. Son metáforas dentro de las matemáticas mismas que nos permiten conceptuar un dominio matemático en términos de otro dominio matemático. En este caso, ambos dominios del mapeo son matemáticos. Como ejemplo se tiene la metáfora de que las funciones son conjuntos de puntos (Núñez 2000, p. 10).

Las metáforas de enlace son las más interesantes ya que son parte de la producción matemática misma. Suceden cuando una rama de las matemáticas es usada para modelar otra. Las metáforas de enlace son centrales para la creación no sólo de nuevos conceptos matemáticos sino, frecuentemente, para la creación de nuevas ramas de las matemáticas.

Algunos investigadores han reflexionado sobre el papel de las metáforas como medio de investigación y de aprendizaje. Sfard (1998) hace referencia a Scheffler (1991) diciendo que la línea que existe en la ciencia entre teoría seria y metáfora es muy delgada. No hay un punto obvio en el que pueda decirse dónde termina la metáfora y comienza la teoría. Lo indispensable de la metáfora en la ciencia se hace transparente y, como resultado, los científicos frecuentemente mantienen esa representación figurativa sólo como herramienta explicativa. Los filósofos de la ciencia, sin embargo, están completamente de acuerdo desde hace tiempo en que las metáforas juegan un papel constitutivo en el conocimiento científico, y que ningún tipo de investigación sería posible sin ellas. Por otra parte, se ha vuelto obligatorio implícitamente en la ciencia ocultar los orígenes metafóricos de las ideas matemáticas en formalismos; lo que puede hacer difícil restaurar las raíces figurativas de las teorías científicas (Sfard 1998, p. 5).

Ahora bien, las metáforas se caracterizan por crear un puente conceptual entre un dominio de partida y uno de llegada, al que hemos llamado destinatario, que permite trasladar propiedades de un dominio a otro; es decir, permite transponer una serie de características y estructuras. Sin embargo, autores como Font y Acevedo (2003) afirman que las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio destinatario que no engloba su totalidad. Según estos autores, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y oculta otros de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes (Font y Acevedo 2003, p. 406).

Debe considerarse que la metáfora sirve para conectar diferentes sentidos, por lo que amplía el significado que para una persona tiene determinado objeto matemático. No obstante, Font y Acevedo (2003) plantean que el uso de metáforas puede acarrear dificultades; por ejemplo, los estudiantes pueden considerarlas literalmente. Los autores sugieren el caso de la metáfora "una función es una máquina". La metáfora tiene un significado literal, pero también tiene un segundo significado que se quiere que el estudiante entienda. Se busca que el alumno estructure su conocimiento sobre funciones a partir de sus conocimientos sobre las máquinas, no que piense que una función es una máquina. Para evitar este tipo de resultados no deseados se tiene que producir un conflicto cognitivo entre el significado literal de la expresión y el contexto que usa. La existencia de este conflicto es lo que hace que el alumno busque un significado diferente del literal. Además, con frecuencia el profesor usa metáforas de manera incontrolada sin ser consciente de que lo hace y de las consecuencias que esto trae en sus estudiantes (Font y Acevedo 2003, pp. 406-407).

Las dificultades relacionadas con el pensamiento metafórico van más allá de la dificultad causada por un conflicto con el significado literal, ya que incluso cuando el uso que se hace de la metáfora es correcto, se corre el riesgo de trasladar relaciones que no son válidas en el dominio de llegada o destinatario (Font y Acevedo 2003, p. 407). Mediante la metáfora estructuramos una situación en términos de otra, y se corre el peligro de trasladar aspectos del dominio de partida que no son aplicables en el dominio destinatario (Font y Acevedo 2003, p. 414).

A través de las metáforas, quien aprende externa sus expectativas respecto a las posibles características que tendrán los conceptos construidos en el dominio destinatario. Por ello, la elección de la metáfora es una decisión de altas consecuencias. Diferentes metáforas pueden conducir a diferentes maneras de pensamiento y a diferentes actividades. No puede pasarse por alto que las metáforas son un arma de doble filo: por una parte, son un mecanismo básico detrás de cualquier conceptualización, son lo que hace posible nuestro pensamiento abstracto y científico; por otra parte, mantienen la imaginación humana dentro de los límites de nuestras experiencias y concepciones previas. En el proceso de proyección metafórica, es decir, en el empleo de metáforas a partir de un dominio conocido para construir nuevos conceptos en otro, las viejas suposiciones de origen así como las creencias enraizadas pueden proporcionar inercia. Las antiguas deducciones tienden a viajar de un dominio a otro prácticamente inadvertidas. Por ello, una migración descontrolada de vínculos metafóricos no siempre es benéfica para las nuevas teorías ya que puede obstruir ideas frescas, minar la utilidad de los sistemas conceptuales resultantes y, sobre todo, perpetuar creencias y valores que nunca han sido sometidos a inspección crítica (Sfard 1998, p. 5).

Así, el marco teórico de las metáforas conceptuales da pie para investigar las dificultades que los estudiantes enfrentan al conceptuar un objeto matemático. Como se ha explicado, la metáfora es un mecanismo cognitivo básico que permite la construcción de conceptos abstractos en un nuevo dominio a partir de conceptos conocidos en un dominio fuente. Las dificultades en la conceptuación pueden ir desde conflictos con el significado literal hasta traslado de características y estructuras del dominio fuente que no serán compatibles con el dominio destinatario, pasando por las concepciones limitadas del objeto en cuestión que los profesores puedan tener y por tanto transmitir en las metáforas que utilicen.

CAPÍTULO III
ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este capítulo se tratan los asuntos relacionados con la metodología de la investigación seguida para esta tesis. Se describe el instrumento utilizado para obtener la información necesaria así como la manera en que se logró el contacto con los grupos de trabajo.

Los grupos de trabajo

Para cumplir con los objetivos de esta investigación se tomaron como guía las siguientes preguntas.

– ¿Qué concepciones de los números complejos tienen estudiantes de educación media superior y superior?
– ¿Cómo ayudan o dificultan estas concepciones en la conceptualización de los números complejos?
– ¿Cómo ayudan o dificultan los modelos presentados en los libros de texto en la conceptuación de los números complejos?

Las concepciones de los estudiantes engloban creencias, saberes adquiridos en el aula de clase o en otros ambientes, ideas intuitivas, representaciones y procedimientos asociados a experiencias con los números complejos.

Con la finalidad de obtener información que permitiera responder las preguntas planteadas, se elaboró un cuestionario que se aplicó a cuatro grupos de estudiantes. El primer grupo estaba integrado por 33 estudiantes del turno matutino del primer semestre de la licenciatura en física de la Facultad de Ciencias de la UNAM; cursaban la materia obligatoria de álgebra. Los números complejos integran el cuarto tema de la asignatura de álgebra de primer semestre del plan de estudios de la carrera de física, por esta razón se presenta en la parte final del semestre.

Inicialmente se tenía contemplado trabajar con un grupo diferente de primer semestre de la misma materia de álgebra: Se consiguió la autorización de un profesor, al que se contactó personalmente en las instalaciones de la facultad, para observar sus clases relacionadas con el tema con la finalidad de aplicar el cuestionario diseñado para esta investigación a sus estudiantes. Después de seguir las clases una semana, el profesor tuvo que dejar la cátedra por problemas graves de salud. Se recurrió a un segundo profesor a quien se contactó personalmente en la facultad y que accedió amablemente a cooperar con la aplicación del cuestionario con el consentimiento previo de los estudiantes. Sin embargo, en vísperas del fin de semestre no se pudieron observar sus clases porque el tema ya había sido impartido y los estudiantes habían sido evaluados una semana antes. El cuestionario se aplicó y se consideró al grupo como un grupo piloto que permitiría estimar la viabilidad del instrumento. Los estudiantes cursaban el semestre 2012-1, de agosto de 2011 a diciembre de 2011.

El segundo grupo estaba formado por 17 alumnos de quinto semestre del turno vespertino de las licenciaturas de física y matemáticas. Estos estudiantes cursaban materias no sólo de quinto semestre; en la Facultad de Ciencias de la UNAM se permite que después del segundo semestre los estudiantes elaboren sus horarios de acuerdo con sus necesidades académicas y personales; un alumno puede cursar materias de varios semestres en un semestre lectivo. Los 17 estudiantes del segundo grupo cursaban la materia obligatoria de variable compleja I, ubicada en los planes y programas de estudio de la facultad en el quinto semestre de las licenciaturas de física y matemáticas. El tema “Álgebra y geometría de complejos” señalado en el programa de estudios de la materia de variable compleja I se estudia al iniciar el curso.

Se contactó personalmente al profesor en el salón de clases después de la presentación de su curso. Se le explicó el objetivo de la investigación para esta tesis de maestría así como la importancia de la aplicación del cuestionario; y amablemente permitió la observación de sus clases relacionadas con el estudio de los números complejos. Durante las clases, los estudiantes no se enteraron que la observadora trabajaba en un proyecto de investigación, fue considerada como una estudiante más. Cuando el tema concluyó el profesor hizo del conocimiento de los estudiantes el objetivo de la observadora de las clases. Con el consentimiento de los alumnos y después de explicarles el objetivo del cuestionario se aplicó éste. Después de la clasificación de los datos obtenidos se seleccionó a un estudiante para ser entrevistado. Los alumnos cursaban el semestre 2012-2, de enero de 2012 a junio de 2012.

El tercer grupo estaba formado por 14 alumnos de quinto semestre de las licenciaturas de física y matemáticas del turno matutino de la misma Facultad de Ciencias; cursaban la materia de variable compleja I. Se contactó personalmente al profesor en su cubículo, ubicado en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias; se le explicó el proyecto de investigación y cortésmente permitió la observación de sus clases. Durante las clases, los estudiantes no se enteraron que la observadora trabajaba en un proyecto de investigación, fue considerada como una estudiante más. Cuando el tema concluyó, el profesor hizo del conocimiento de los estudiantes el objetivo de la observadora. Después de explicar a los alumnos el interés de la investigación, por voluntad propia contestaron el cuestionario. Después de clasificar los datos obtenidos se seleccionó a dos estudiantes para ser entrevistados. Los estudiantes cursaban el semestre 2012-2, de enero de 2012 a junio de 2012.

El cuarto grupo estaba integrado por 34 estudiantes del cuarto semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), plantel Vallejo, de la UNAM; cursaban la asignatura de matemáticas III. Se contactó a la profesora personalmente y se le explicó el proyecto de investigación. La profesora expuso que trabajaría con estudiantes de matemáticas III y que abordaría los números complejos en la unidad 5 (La parábola y su ecuación cartesiana), uno de los últimos temas del curso. Con la autorización y completa disposición de la profesora se observaron sus clases relacionadas con la parábola y los números complejos. La maestra no explicó a los estudiantes el motivo de la visita de la observadora hasta que terminó el tema. Con la finalidad de motivar la participación de los estudiantes la profesora les ofreció puntos adicionales a quienes contestaran con seriedad y honestidad el cuestionario. La investigadora explicó a los estudiantes el objetivo del cuestionario así como su importancia en el desarrollo de la investigación. Todos los estudiantes participaron. Después de la clasificación de datos se seleccionó a tres estudiantes para ser entrevistados.

El cuestionario de investigación

Además de identificar concepciones sobre los números complejos que poseían algunos estudiantes de licenciatura de la Facultad de Ciencias de la UNAM, y algunos estudiantes del CCH de la misma universidad, el cuestionario se utilizó como instrumento para seleccionar estudiantes que fueron entrevistados posteriormente. Las entrevistas permitieron poner en claro algunos aspectos ambiguos de las respuestas dadas en los cuestionarios así como profundizar en algunas concepciones de los alumnos.

Las preguntas fueron diseñadas con el objetivo de recabar los conocimientos y las ideas que los estudiantes tenían respecto a qué es un número complejo y algunas de sus representaciones. Se puso énfasis en la representación de los números complejos porque de acuerdo con los análisis de libros de texto así como la revisión de trabajos previos relacionados con su cognición, la enseñanza de estos números se basa en modelos establecidos desde hace más de 30 años.

En el cuestionario se hizo referencia particularmente a $\sqrt{-1}$, la unidad imaginaria, que tiene características distintas a la unidad de los números reales. Este número puede representarse, según los modelos establecidos en los libros de texto, como el punto en el plano complejo denotado por la pareja ordenada (0, 1) o como el número $a + bi$ donde $a = 0$ y $b = 1$, es decir, i. ¿Cómo entienden los estudiantes el número i? ¿Cómo manipulan $\sqrt{-1}$ para resolver ecuaciones cuadráticas?

Por otra parte, la resolución de ecuaciones cuadráticas no asegura la conceptuación de los números complejos. Un estudiante puede encontrar las soluciones de una ecuación de segundo grado por medio de la fórmula general de resolución manipulando adecuadamente las raíces cuadradas de un número negativo, en caso de que el discriminante de dicha ecuación sea menor que 0, y no necesariamente puede solucionar otro tipo de problemas en los que intervenga el concepto de número complejo; por ejemplo, la determinación de las raíces cúbicas o cuartas de la unidad. Con la finalidad de analizar la manera en que los estudiantes razonaban ante problemas de este tipo, se incluyeron en el cuestionario dos preguntas relacionadas con la resolución de ecuaciones cuadráticas que en las entrevistas llevadas a cabo posteriormente sirvieron para profundizar en las ideas que los estudiantes habían escrito.

El cuestionario que aparece a continuación se tomó como base; se hicieron modificaciones mínimas de lenguaje o se agregaron preguntas según el grado escolar del grupo que lo contestó.

Cuestionario

1.- ¿Qué es un número complejo?

2.- Da un ejemplo de una representación de un número complejo.

3.- ¿Qué denota i?

a) Un punto en el plano

b) No sé

c) $\sqrt{-1}$

d) Otra (Explique)

4.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$?

5.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 – 2x + 2 = 0$?

Los estudiantes de los cuatro grupos recibieron el cuestionario impreso con suficiente espacio en blanco entre las preguntas para recabar sus producciones escritas. Las preguntas planteadas se relacionan únicamente con la conceptuación de los números complejos sin sugerir algún contexto específico como origen de dichas concepciones. Anexo al cuestionario, los estudiantes de los grupos de licenciatura leyeron y firmaron un consentimiento que aseguraba la confidencialidad de sus nombres y de la información proporcionada en el cuestionario. El consentimiento se muestra en la siguiente página. En el caso del grupo del CCH, sólo los estudiantes entrevistados firmaron el consentimiento, pues aunque el grupo completo accedió a contestar el cuestionario sin ser obligados, existió el aliciente de los puntos adicionales por una participación seria y honesta. En el caso del consentimiento para estudiantes del CCH, el fragmento “identificar y analizar las dificultades de los estudiantes de licenciatura de la Facultad de Ciencias de la UNAM para conceptuar los números complejos así como sus posibles causas” se cambió por “identificar y analizar las dificultades de los estudiantes de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM (plantel Vallejo) para conceptuar los números complejos así como sus posibles causas”.

Consentimiento para la participación en el cuestionario de investigación sobre la conceptuación de los números complejos en el ámbito escolar

El propósito de este cuestionario es obtener información para la investigación que tiene como objetivo identificar y analizar las dificultades de los estudiantes de licenciatura de la Facultad de Ciencias de la UNAM para conceptuar los números complejos así como sus posibles causas. El investigador estudiará la información que proporcione en combinación con información proporcionada por otros participantes como sujetos. No existen riesgos conocidos asociados con la participación en este estudio. Su colaboración en será determinante para cumplir el objetivo de la investigación mencionada.

Su participación es completamente voluntaria. Todos los datos que usted proporcione serán tratados confidencialmente y utilizados sólo para propósitos de investigación. Todo lo encontrado será presentado en forma resumida en una tesis de maestría en matemática educativa. Cualquier cita usada de este cuestionario será reportada con la frase "de acuerdo con uno de los participantes".

Yo, ____, acepto contestar este cuestionario de investigación. Se me ha explicado el proyecto y doy mi consentimiento para participar.

______________________________	__________________________________
Firma del participante	Fecha

Investigador Principal:
Tetis Gisela Camacho Espinoza
Estudiante de maestría en el Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.

CAPÍTULO IV
CLASIFICACIÓN DE LOS DATOS RECABADOS EN EL CUESTIONARIO DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se incluyen una clasificación de las respuestas obtenidas en los cuestionarios aplicados en cada grupo. Los resultados se muestran en cuadros. Esta clasificación permitió analizar parte de la conceptuación de los estudiantes sobre los números complejos así como identificar algunas dificultades en sus procesos de esta conceptuación.

En cada caso se indica la cantidad de estudiantes por grupo que contestaron el cuestionario y los principales apartados de los planes y programas de estudios que se refieren al tratamiento de los números complejos según la materia que cursaban los estudiantes. También se explica brevemente cómo los profesores expusieron los temas de los contenidos de sus materias relacionados con los números complejos. En el caso del grupo piloto no se siguieron las clases del profesor, por lo que la información al respecto no aparece en el apartado sobre este grupo. Se incluye, en cada caso, el cuestionario completo que contestaron los estudiantes de cada grupo.

Clasificación de las respuestas al cuestionario aplicado a estudiantes de álgebra de la Facultad de Ciencias de la UNAM (Grupo piloto)

El cuestionario se aplicó a un grupo de 33 estudiantes de primer semestre de la carrera de física de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Los alumnos cursaban la materia de álgebra cuando contestaron el cuestionario. En el mapa curricular de la licenciatura en física la materia aparece con el nombre de álgebra; sin embargo, en el temario se exhibe con el nombre de álgebra superior I. No debe confundirse esta materia con la de álgebra superior I incluida en el programa de estudios de la licenciatura en matemáticas de la misma Facultad, ya que los contenidos de las asignaturas son diferentes. El temario de la materia de álgebra del programa de la carrera de física marca como objetivos los siguientes.

> Este curso introduce los temas básicos de la matemática y en particular del álgebra; ellos son el fundamento de los cursos que se imparten en la carrera. Este curso ofrece la primera mitad del material que se considera elemental (Facultad de Ciencias UNAM, 2002).

Así que de acuerdo con estos objetivos, se considera un material elemental en la carrera de física a los números complejos, que se plantean en el tema 4 titulado "Números complejos". Los contenidos incluidos en este tema son los siguientes.

> El campo de los números complejos: operaciones y propiedades. El conjugado de un número complejo (propiedades). El módulo de un número complejo (propiedades). Ecuaciones de segundo grado. Representación polar. Teorema de Moivre [*sic*]. Raíces de números complejos. (Facultad de Ciencias, UNAM, 2002).

Los estudiantes recibieron instrucción previa sobre los números complejos y fueron evaluados en el tema una semana antes de contestar el cuestionario. El estudiante que lo entregó primero lo contestó en 20 minutos, el último tardó 30 minutos. No se siguieron las clases del profesor relacionadas con el tema ni se seleccionaron estudiantes de esta primera muestra para ser entrevistados. Sin embargo, se obtuvo información referente a las concepciones que los alumnos tienen de los números complejos. El cuestionario que contestaron los 33 estudiantes de primer semestre de la licenciatura en física fue el siguiente.

1.- ¿Qué es un número complejo?
2.- Da un ejemplo de una representación de un número complejo.
3.- ¿Qué denota i?
  a) Un punto en el plano
  b) No sé

c) $\sqrt{-1}$

d) Otra (Explique)

4.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$?

5.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$?

Enseguida se presenta una clasificación detallada de las respuestas de los estudiantes a cada pregunta. Esta clasificación sirve para analizar parte de la conceptuación de los estudiantes sobre los números complejos, así como para identificar algunas de sus dificultades en su comprensión. Algunas respuestas caen en más de una clasificación.

Las respuestas se clasificaron en diferentes tipos, cada uno representa la idea central de la respuesta. Los tipos de respuesta se ordenaron de mayor número de estudiantes a menor en todas las clasificaciones.

Cuadro 4.1. Clasificación de respuestas a la pregunta 1: *¿Qué es un número complejo?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1.– Es un número con una parte real y otra imaginaria	16
2.– Son números que se pueden escribir de la forma $a + bi$ siendo a y b números reales, con $i = \sqrt{-1}$	10
3.– Número que es solución de ecuaciones tales como $x^2 + 1 = 0$	5
4.– Es un número que no pertenece al conjunto de los números reales	3
5.– Es aquel que no está contenido en la recta real	2
6.– No contestaron.	2
7.– “Aquel que sale de la raíz [cuadrada] de un número negativo”	2
8.– “Es la representación de un número dado en el plano”	1
9.– “Es un número que en realidad se desconoce su valor o localización”	1

Un estudiante hizo referencia a la existencia de propiedades específicas del "campo de los números complejos" (así lo escribió el estudiante) pero no especificó cuáles son (esta respuesta se consideró de tipo 1 [Es un número con una parte real y otra imaginaria]).

Los tipos de respuesta 1 (Es un número con una parte real y otra imaginaria) y 2 (Son números que se pueden escribir de la forma $a + bi$ siendo a y b números reales, con $i = \sqrt{-1}$) se consideran diferentes porque en el tipo 1 los estudiantes no utilizaron $i = \sqrt{-1}$ para referirse a los números complejos. Los tipos de respuesta 4 y 5 se consideraron diferentes porque en el tipo 4 los estudiantes consideran que un número complejo no pertenece al conjunto de los números reales pero no hacen alusión a su representación en la recta real, mientras que los estudiantes que dieron respuestas de tipo 5 se basaron específicamente en el modelo de la recta real para afirmar que los números complejos no son números reales.

Obsérvese que las respuestas de tipo 5 (Es aquel que no está contenido en la recta real) sólo indican a los números complejos como números que no pueden ubicarse en la recta real, por otra parte, la respuesta de tipo 8 (Es la representación de un número dado en el plano) indica como representación el plano completo incluyendo la recta real. En la respuesta de tipo 7, el estudiante se refirió a las raíces cuadradas de los números negativos. La respuesta 9 (Es un número que en realidad se desconoce su valor o localización) carece de sentido matemático.

En las respuestas de tipo 2 (Son números que se pueden escribir de la forma $a + bi$ siendo a y b números reales, con $i = \sqrt{-1}$) un estudiante contestó que "Como dice su nombre, es un 'número' con una parte real (quiere decir, del tipo que siempre hemos usado) y otra parte imaginaria (de la forma ib) y normalmente se denota $z = a + ib$".

El estudiante entrecomilló la palabra "número" y señaló a los números reales como números habituales para él. Otro estudiante en su respuesta se refirió a la falta de orden en los números complejos. Otro indicó que los números reales son un subconjunto de los números complejos.

En las respuestas de tipo 3 (Número que es solución de ecuaciones tales como

$x^2 + 1 = 0$), un estudiante anotó que un número complejo es un "número irreal que sirve para resolver ecuaciones que antes no se podían". Nótese el uso de la palabra "irreal" para referirse a un número complejo.

En las respuestas de tipo 4 (Es un número que no pertenece al conjunto de los números reales) sobresalen las dos siguientes.

– "Es un número que no existe en el conjunto de los números reales el cual tiene un valor que según ciertas operaciones no puede existir en la realidad, como la raíz cuadrada de un número negativo".

– "Un número complejo es la representación real e imaginaria de un punto en un campo de números llamados complejos, son aquellos también que representan una cantidad que no es posible representar en el campo de los reales".

Dos respuestas se ubicaron en 3 tipos de la clasificación y 5 respuestas se ubicaron en 2 tipos diferentes haciendo un total de 42 respuestas, aunque 33 estudiantes contestaron el cuestionario. Por ejemplo, la siguiente respuesta a la pregunta 1 se ubicó a la vez en los tipos 1, 2 y 3.

– "Es un número que contiene una parte real y una imaginaria y es de la forma $a + bi$, tuvo origen con la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$".

Cuadro 4.2. Clasificación de respuestas a la pregunta 2: *Da un ejemplo de una representación de un número complejo.*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1.– $z = a + bi$	18
2.– Anotaron un caso particular de la forma $z = a + bi$ (por ejemplo, $3 + 5i$)	13
3.– Puede representarse gráficamente en el plano como un vector	4
4.– Anotaron un caso particular de la forma $z = re^{i\theta}$ (por ejemplo $e^{i\pi} + 1 = 0$)	3
5.– $r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$	2
6.– Anotaron un caso particular de la raíz cuadrada de un número negativo (por ejemplo $\sqrt{-2}$)	2
7.– C = (3, 4i)	1
8.– $i = \sqrt{-3}$	1
9.– Un punto en el plano	1
10.– No respondió	1

En las respuestas de tipo 1 ($z = a + bi$) sobresalen las siguientes dos variantes: $z = ax + bi$ (1 estudiante) y $z = a - bi$ (1 estudiante). Además, sólo 3 de los 18 estudiantes que utilizaron la representación $z = a + bi$ señalaron que a y b pertenecen a los números reales.

En las respuestas de tipo 2 [Anotaron un caso particular de la forma $z = a + bi$ (por ejemplo, $3 + 5i$)] sobresalen las siguientes 2.

a) $ix - 1$

b) $4x + i$

Otro estudiante ejemplificó con la representación

$$1 = 1 + 0i.$$

Nótese que en esta representación implícitamente está “pensando” que los números reales también son números complejos.

Las 3 respuestas de tipo 4 [Anotaron un caso particular de la forma $z = re^{i\theta}$ (por ejemplo $e^{i\pi} + 1 = 0$)] tienen formas diferentes, a pesar de ser variantes de la forma $z = re^{i\theta}$:

a) $\psi(x_1t) = Ae^{i(kx+wt+\varepsilon)}$ representación de una perturbación en una onda

b) $e^{i\pi} + 1 = 0$

c) $re^{\theta\pi}$

Varias respuestas se consideraron en más de un tipo. Una (1) respuesta (Véase la figura 4.1) se clasificó en 5 tipos diferentes: tipo 1 [$z = a + bi$], tipo 2 [Anotaron un caso particular de la forma $z = a + bi$ (por ejemplo, $3 + 5i$)], tipo 3 [Puede representarse gráficamente en el plano como un vector], tipo 5 [$r\,(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\theta)$] y tipo 9 [Un punto en el plano].

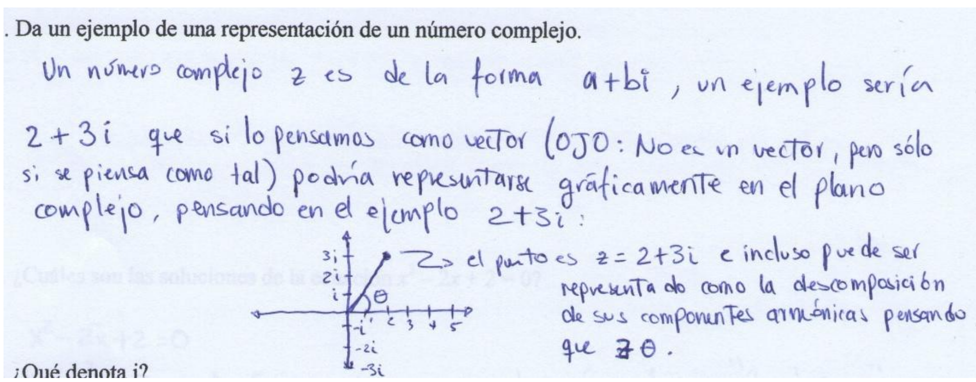


Figura 4.1. Respuesta clasificada en 5 tipos diferentes

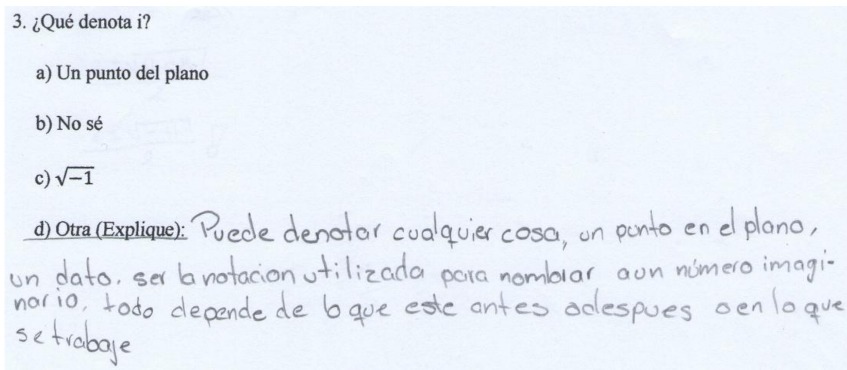
Una (1) respuesta se clasificó en 3 tipos diferentes y 7 respuestas se clasificaron en 2 tipos diferentes. Estos resultados arrojaron un total de 46 respuestas contabilizadas aunque sólo 33 estudiantes contestaron el cuestionario.

Cuadro 4.3. Clasificación de respuestas a la pregunta 3: *¿Qué denota i?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1.– $\sqrt{-1}$	29
2.– Un punto en el plano	2
3.– Otra	3

Tres respuestas a la pregunta 3 se ubicaron en el tipo otra:

– “Puede denotar cualquier cosa, un punto en el plano, un dato, ser la notación utilizada para nombrar a un número imaginario, todo depende de lo que esté antes o después o en lo que se trabaje”. Esta respuesta también se clasificó en el tipo 2 [Un punto en el plano].(Véase la figura 4.2).



3. ¿Qué denota i?

a) Un punto del plano

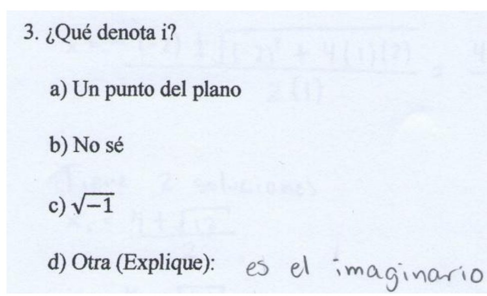
b) No sé

c) $\sqrt{-1}$

d) Otra (Explique): Puede denotar cualquier cosa, un punto en el plano, un dato. ser la notacion utilizada para nombrar aun número imagi-nario, todo depende de lo que este antes odespues oen lo que se trabaje

Figura 4.2. Respuesta tipo 3

– “Es el imaginario” (Véase la figura 4.3).



3. ¿Qué denota i?

a) Un punto del plano

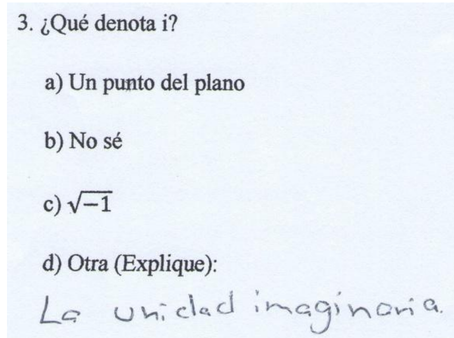
b) No sé

c) $\sqrt{-1}$

d) Otra (Explique): es el imaginario.

Figura 4.3. Respuesta tipo 3

– “La unidad imaginaria” (Véase la figura 4.4).



3. ¿Qué denota i?

a) Un punto del plano

b) No sé

c) $\sqrt{-1}$

d) Otra (Explique):

La unidad imaginaria.

Figura 4.4. Respuesta tipo 3

Cuadro 4.4. Clasificación de respuestas a la pregunta 4: *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 + 1 = 0$*?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1.– $x = \pm i$	14
2.– $x = i$	9
3.– $x = \pm\sqrt{-1}$	5
4.– $x = \sqrt{-1}$	2
5.– $x = \pm 1$	1
6.– Respuesta incompleta	2

En los siguientes 3 cuadros se anotan los procedimientos empleados por los estudiantes en la obtención de su respuesta a la pregunta 4.

Cuadro 4.4.1. Procedimientos para obtener la respuesta $x = \pm i$

Procedimiento	Número de estudiantes
Sólo anotaron la respuesta	9
Despeje en la ecuación $x^2 + 1 = 0$	4
Fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado	1

Cuadro 4.4.2. Procedimientos para obtener la respuesta $x = i$

Procedimiento	Número de estudiantes
Despeje en la ecuación $x^2 + 1 = 0$	6
Sólo anotaron la respuesta	3

Cuadro 4.4.3. Procedimientos para obtener la respuesta $x = \pm\sqrt{-1}$

Procedimiento	Número de estudiantes
Sin método detallado	4
Despeje en la ecuación $x^2 + 1 = 0$	1

Los estudiantes que respondieron $x = \sqrt{-1}$ (tipo 4) no anotaron algún procedimiento. El estudiante que respondió $x = \pm 1$ descompuso en factores de primer grado (de manera equivocada) el binomio $x^2 + 1$ de la siguiente manera:

$$x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1) = 0.$$

Cuadro 4.5. Clasificación de respuestas a la pregunta 5: *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 - 2x + 2 = 0$*?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1.– Respuesta equivocada por errores en el procedimiento o errores de cálculo	11
2.– $x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$	10
3.– $x_1 = \frac{2+\sqrt{-4}}{2}$ y $x_2 = \frac{2-\sqrt{-4}}{2}$	4
4.– Respuesta equivocada sin procedimiento	3
5.– No respondió	3
6.– No existe solución	2

De las 11 respuestas clasificadas en el tipo 1 (Respuesta equivocada por errores en el procedimiento) 8 son soluciones en términos de números complejos con parte imaginaria distinta de 0, y 3 son soluciones en términos de números reales. De las 8 respuestas que implican números complejos con parte imaginaria no nula, en 4 se emplea el símbolo *i*, en las otras 4 sólo se indicó la raíz cuadrada de algún número negativo. Se detectaron 2 procedimientos.

Cuadro 4.5.1. Procedimientos para obtener la respuesta de tipo 1: Respuesta equivocada por errores en el procedimiento o errores de cálculo

Procedimiento	Número de estudiantes
Fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado	9
Descomposición en factores	2

Los estudiantes que utilizaron la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado cometieron los siguientes tipos de errores.

Cuadro 4.5.1.1. Tipos de errores de los estudiantes que utilizaron la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado

Error	Número de estudiantes que lo cometieron
Aritméticos	7
Aplicación incorrecta de la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado	2

Respecto a los 2 estudiantes que emplearon descomposición en factores para encontrar las soluciones de la ecuación dada, uno de ellos descompuso en factores de manera equivocada. Escribió: $x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow (x + 1)^2 = 0$, así, concluyó que $x = 1$ (Véase la figura 4.5).

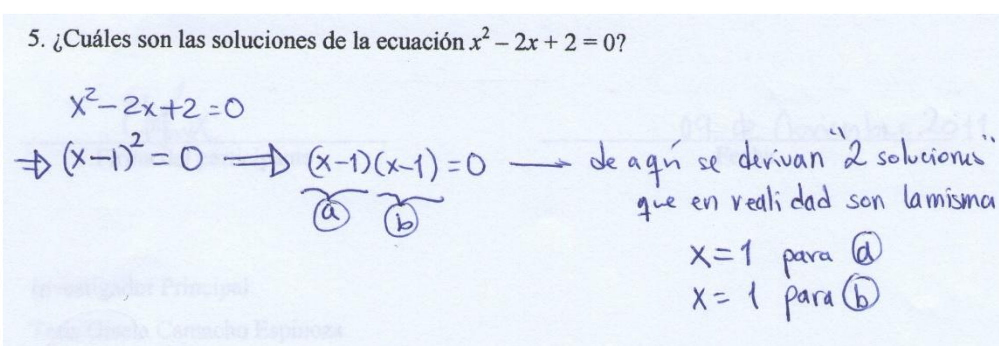


Figura 4.5. Descomposición en factores

El segundo estudiante transformó la ecuación $x^2 – 2x + 2 = 0$ en $x^2 – 2x + 1 + 2 = 1$ y descompuso en factores esta última expresión obteniendo $(x – 1)(x – 1) = – 1$ (véase la figura 4.6). Sin embargo, no pudo concluir adecuadamente.

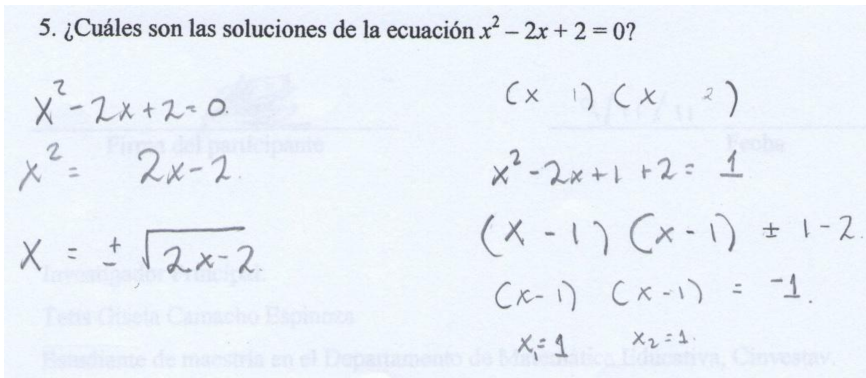


Figura 4.6. Descomposición en factores

Se detectaron dos procedimientos empleados por los estudiantes para encontrar las soluciones de tipo 2 ($x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 – i$).

Cuadro 4.5.2. Procedimientos para obtener la respuesta de tipo 2: $x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 – i$.

Procedimiento	Número de estudiantes
Fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado	5
Sin procedimiento	3
Descomposición en factores	2

Los estudiantes que anotaron respuestas de tipo 3 ($x_1 = 1 + \sqrt{-1}$ y $x_2 = 1 – \sqrt{-1}$) utilizaron la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado para determinar las soluciones de la ecuación propuesta.

Uno de los dos estudiantes cuyas respuestas se clasificaron en el tipo 5 (No existe solución) realizó la siguiente descomposición en factores que le impidió llegar a la respuesta correcta.

“$x^2 – 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 – 2x = – 2 \Leftrightarrow x (x – 2) = – 2$”.

Así, su conclusión fue que la ecuación no tenía solución. El segundo estudiante señaló haber llegado a una contradicción al encontrar en su procedimiento la raíz cuadrada de un número negativo.

Clasificación de las respuestas al cuestionario aplicado a estudiantes de variable compleja de las licenciaturas en física y matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM

El cuestionario sobre conceptuación de números complejos se aplicó a dos grupos de estudiantes de la asignatura de variable compleja I de la Facultad de Ciencias de la UNAM. La materia corresponde al quinto semestre de las licenciaturas de física y matemáticas. Los objetivos de la asignatura, según el programa de estudios, son los siguientes.

> Entender las propiedades y caracterizaciones (geométricas y algebraicas) de las funciones analíticas. Conocer la teoría de integración de las funciones complejas, tanto en sus bases como en sus aplicaciones al estudio mismo de las funciones analíticas. Manejar las series de potencias para representar funciones alrededor de puntos donde la función es analítica, así como alrededor de puntos donde la función tiene una singularidad aislada. Aprender a utilizar el método de cálculo de residuos para el cálculo de integrales. (Facultad de Ciencias, UNAM, 1983)

Para un logro cabal de los objetivos es necesario conocer y comprender qué es un número complejo, puesto que las variables que se estudian en este curso ya no son los números reales. En la primera unidad temática del programa de estudios, titulada “Preliminares y analiticidad”, el tema 1.1 corresponde al estudio del álgebra y la geometría de los números complejos. Los profesores cuyos alumnos contestaron el cuestionario consideraron este contenido como un repaso, pues anteriormente los estudiantes de ambas carreras trabajaron con los números complejos: los estudiantes de matemáticas en el segundo semestre en el curso de álgebra superior II, y los de física en el primer semestre en el curso de álgebra para físicos.

Clasificación de las respuestas del grupo 1 de variable compleja I

Los grupos que contestaron el cuestionario serán llamados grupo 1 y grupo 2 en lo subsecuente. El grupo 1 estaba integrado por 17 alumnos de las carreras de física y matemáticas del turno vespertino; el profesor de este grupo trabajó el tema álgebra y geometría de los números complejos durante 5 días. El enfoque que sobresalió en la instrucción fue el de los números complejos como extensión del campo de los números reales; sin embargo, el profesor expuso diversas representaciones de los números complejos como la forma algebraica $x + iy$ definiendo previamente $i = \sqrt{-1}$, la representación geométrica como vector en el plano complejo, en ocasiones llamado el plano de Argand, la representación en coordenadas polares ($r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta$), así como el mapeo de los números complejos sobre la esfera de Riemann.

En la clase se trataron las operaciones de adición, multiplicación, división, potenciación y radicación de números complejos. Utilizando el llamado plano complejo, se ilustraron la adición, la multiplicación y la radicación; esta última se estudió desde la fórmula de De Moivre, expuesta sin demostración alguna. Por otra parte, se asumió que los números complejos son *isomorfos* al plano cartesiano, denotado por R^2, aludiendo a la existencia de demostraciones formales que muestran mapeos biyectivos entre el plano cartesiano y los números complejos pero sin exponer alguno de ellos. En la clase se trabajaron pocos ejercicios prácticos; el objetivo de la mayoría de los ejercicios era ilustrar de manera general las operaciones entre números complejos.

Por otra parte, los estudiantes que cursan variable compleja I, además de haber recibido instrucción previa sobre los números complejos, conocían sin demostración el teorema fundamental del álgebra, que es considerado uno de los resultados más importantes de las matemáticas y cuya base son los números complejos. Habían tomado 2 cursos de geometría analítica (plana y del espacio), 2 cursos de cálculo diferencial (una y varias variables), y 2 cursos de cálculo integral (una y varias variables); además, los estudiantes de física habían llevado 1 curso de álgebra lineal, mientras que los estudiantes de matemáticas ya habían tomado 2 cursos de esta materia.

Las preguntas incluidas en el cuestionario aplicado a los dos grupos fueron las siguientes.

1.- ¿Qué es un número complejo?

2.- Dé un ejemplo de una representación de un número complejo.

3.- ¿Qué es un número imaginario?

4.- ¿Qué denota *i*?

a) Un punto del plano

b) No sé

c) $\sqrt{-1}$

d) Otra (Explique):

5.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$?

6.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$?

7.- ¿Ha estudiado los números complejos en algún otro curso anterior a su curso de variable compleja I? ¿Cuál?

8.- ¿Es la primera vez que cursa la materia? Si contesta que no, ¿qué temas le parecieron más complicados cuando estudió el curso la primera vez y por qué?

Enseguida se presenta una clasificación detallada de las respuestas de los estudiantes del grupo 1 a cada pregunta. Como en el caso del grupo de estudiantes de primer semestre de la carrera de física, esta clasificación sirve para analizar parte de su conceptuación sobre los números complejos, así como para identificar algunas de las dificultades en su comprensión.

Las respuestas se clasificaron en diferentes tipos, cada uno representa la idea central de la respuesta. En algunas respuestas se identificaron dos o más concepciones diferentes de los números complejos, por lo que caen en más de una clasificación. Los tipos de respuesta se ordenaron de mayor a menor número de estudiantes en todas las clasificaciones.

Cuadro 4.6. Clasificación de respuestas a la pregunta 1: *¿Qué es un número complejo?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1.– Es un número de la forma $a + bi$	14
2.– Número compuesto por una parte real y una imaginaria	7
3.– Elemento de un conjunto llamado el conjunto de los números complejos con estructura de campo	5
4.– Es aquel que puede asociarse con un punto en el plano complejo	2
5.– Una pareja ordenada (a, b) en $\boldsymbol{R}^2$	2
6.– Se obtiene al intentar dar solución a ecuaciones como $x^2 = -1$	2
7.– Se puede representar como un vector en el plano complejo	1
8.– Se puede representar como un vector en el plano	1
9.– Se representa como un punto en el plano cartesiano	1
10.– Se puede representar en el plano (no especifica cómo)	1
11.– Es un espacio vectorial	1

En las respuestas clasificadas como tipo 1 (Es un número de la forma $a + bi$), sobresalen las siguientes: "Es un arreglo de la forma $a + bi$ donde $a, b \in R$". "Es un número compuesto por un número real más otro número real multiplicado por 'una constante i', es decir, un número real más un número imaginario". En la primera respuesta, el estudiante no consideró al número complejo como un número, lo entendió como un arreglo. En la segunda respuesta, el estudiante no utilizó símbolos, salvo para referirse a la constante i, no especificó qué es i; sólo habló de ella como una constante que multiplica a un número real y que da el carácter de número imaginario al nuevo número que surge de la multiplicación. Se observó que sólo 6 estudiantes cuyas respuestas cayeron en esta clasificación aclararon que $i = \sqrt{-1}$.

En las repuestas de tipo 2 (Número compuesto por una parte real y una imaginaria) destacan las siguientes respuestas: "Es una combinación de dos tipos de números, reales e imaginarios". Para este estudiante un número complejo no es un número sino dos números que forman una nueva entidad. Otro estudiante respondió de manera similar: "[…]

algebraicamente es un elemento compuesto por dos números reales y uno imaginario". Otra respuesta que destacó fue: "[…] si z es un número complejo, z se representa como $z = a + ib$ donde a es la parte real y bi es la parte imaginaria". Este estudiante afirmó que la parte imaginaria de un número complejo es bi y no el número real b. Sólo dos estudiantes cuyas respuestas fueron de tipo 2 aclararon que $i = \sqrt{-1}$.

En las respuestas clasificadas como tipo 3 (Elemento de un conjunto llamado el conjunto de los números complejos con estructura de campo), destaca que uno de los estudiantes agregó que, a pesar de que el conjunto de los números complejos tiene la estructura algebraica de campo, no es un conjunto ordenado. Otro estudiante respondió: "[…] es la extensión de los números reales. A diferencia de otros espacios, éste es cerrado bajo la raíz [cuadrada] –la raíz [cuadrada] de un número complejo siempre va a dar un número complejo –". Un estudiante más respondió: "Es un elemento de un campo de dimensión 2".

En las clasificaciones 4 (Es aquel que puede asociarse con un punto en el plano complejo), 5 (Una pareja ordenada (a, b) en R^2) y 6 (Se obtiene al intentar dar solución a ecuaciones como $x^2 = -1$), no hay observaciones sobresalientes, el título de cada una describe con claridad las respuestas encontradas.

Durante las clases, el profesor se refirió al plano cartesiano y al plano complejo como dos entidades matemáticas distintas. La diferencia entre ellos consiste en la manera de denotar a los ejes de referencia; en el plano cartesiano reciben el nombre de eje X y eje Y, en el plano complejo son llamados eje real y eje imaginario respectivamente. Sin embargo, el profesor hizo hincapié en que el plano cartesiano, entendido como R^2, es isomorfo al campo de los números complejos, y por tanto es isomorfo al plano complejo, de aquí que se consideren diferentes los tipos de respuesta 7, 8 y 9. En la respuesta clasificada como tipo 7 (Se puede representar como un vector en el plano complejo), el estudiante no utilizó palabras para dar esta respuesta, sólo dibujó el siguiente esquema del plano complejo (figura 4.7) indicando el eje real con el símbolo $Re\ (z)$ y el eje imaginario con $Im\ (z)$.

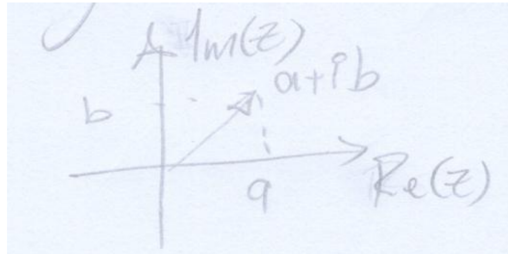


Figura 4.7. Representación de un número complejo como un vector en el plano complejo

De manera similar, el estudiante cuya respuesta es de tipo 9 (Se representa como un punto en el plano cartesiano), no empleó palabras, sólo dibujó un esquema (figura 4.8).

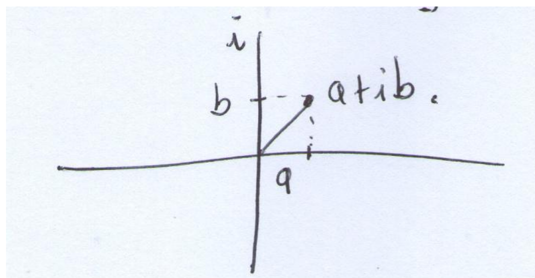
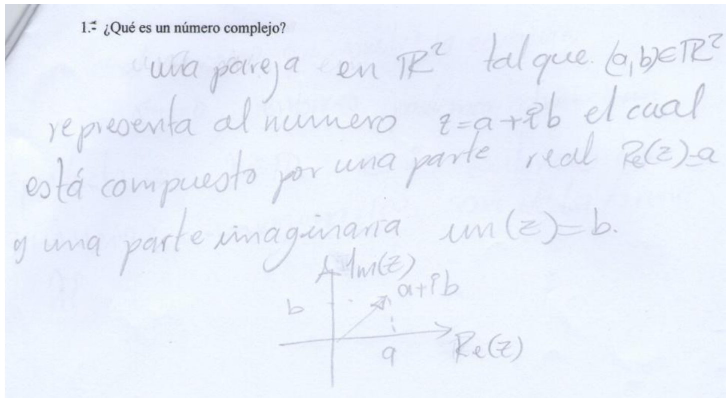


Figura 4.8. Representación de un número complejo como un punto en el plano complejo

No hay observaciones respecto a las respuestas de los tipos 8 (Se puede representar como un vector en el plano), 10 [Se puede representar en el plano (no especifica cómo)] y 11 (Es un espacio vectorial).

En esta clasificación 7 respuestas se ubicaron en 2 tipos diferentes, 3 respuestas se ubicaron en 3 tipos diferentes, 1 respuesta en 4 tipos diferentes y una respuesta más se ubicó en 5 tipos diferentes. Así, en la tabla se contaron un total de 37 respuestas aunque sólo participaron 17 alumnos.

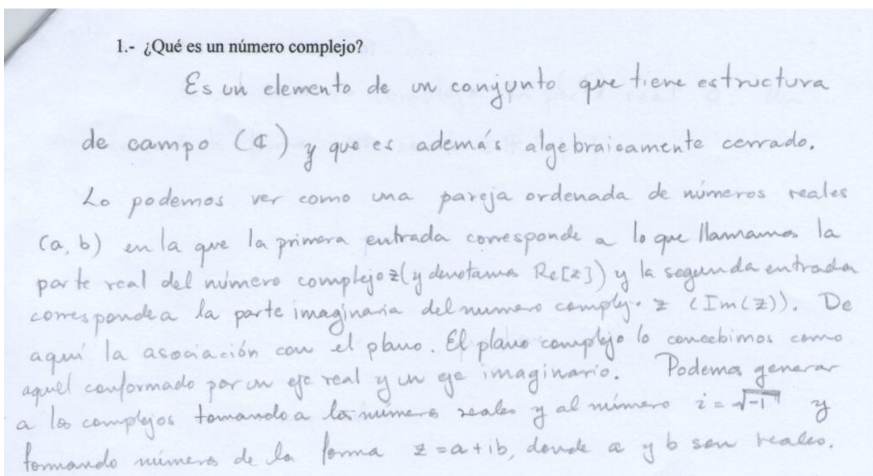
En la figura 4.9 se muestra la respuesta clasificada en 4 tipos diferentes: tipo 1, tipo 2, tipo 5 y tipo 7.


1.- ¿Qué es un número complejo?

una pareja en $\mathbb{R}^2$ tal que $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ representa al numero $z=a+ib$ el cual está compuesto por una parte real $Re(z)=a$ y una parte imaginaria $im(z)=b$.

Figura 4.9. Respuesta clasificada en 4 tipos

En la figura 4.10 se muestra la respuesta clasificada en 5 tipos diferentes: tipo 1, tipo 2, tipo 3, tipo 4 y tipo 5.


1.- ¿Qué es un número complejo?

Es un elemento de un conjunto que tiene estructura de campo ($\mathbb{C}$) y que es además algebraicamente cerrado.

Lo podemos ver como una pareja ordenada de números reales (a, b) en la que la primera entrada corresponde a lo que llamamos la parte real del número complejo z (y denotamos $Re[z]$) y la segunda entrada corresponde a la parte imaginaria del numero complejo z ($Im(z)$). De aquí la asociación con el plano. El plano complejo lo concebimos como aquel conformado por un eje real y un eje imaginario. Podemos generar a los complejos tomando a los números reales y al número $i=\sqrt{-1}$ y formando números de la forma $z=a+ib$, donde a y b son reales.

Figura 4.10. Respuesta clasificada en 5 tipos

Cuadro 4.7. Clasificación de respuestas a la pregunta 2: *Dé un ejemplo de una representación de un número complejo*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1.– $z = x + iy$	12
2.– $z = re^{i\theta}$	5
3.– Un caso particular de la forma $a + bi$, por ejemplo, $z = 4 + 3i$	4
4.– Un punto en el plano cartesiano	4
5.– Un vector en R^2	3
6.– Un punto en el plano complejo	3
7.– Un vector en el plano complejo	2
8.– $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$	2
9.– Un par ordenado	2
10.– $a + bi = (a \quad b)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$	1
11.– $x^2 + 1 = 0$	1
12.– Proyección estereográfica	1

En las respuestas de tipo 1 ($z = x + iy$), 5 estudiantes explicaron en ésta o en la respuesta anterior que $i = \sqrt{-1}$, otro escribió $i^2 = \sqrt{-1}$ y uno más escribió: “También podemos verlo como $x^2 + 1 = 0$”. Los 5 estudiantes restantes cuya respuesta se clasificó en este tipo no especificaron el significado de *i*, a pesar de que lo utilizaron en la representación que eligieron.

En las respuestas clasificadas como tipo 2 ($z = re^{i\theta}$), destaca que un estudiante escribió $z = \sqrt[n]{r}\, e^{i\beta}$, así, se refiere al valor del módulo del número complejo con $\sqrt[n]{r}$. Otro estudiante anotó $e^{i\theta} = cos\ \theta + i\ sen\ \theta$; con esta expresión sólo consideró a los números complejos con módulo 1. En esta clasificación 3 estudiantes anotaron en ésta o en la respuesta anterior que $i = \sqrt{-1}$, los 2 restantes no dieron explicación.

En las respuestas de tipo 3 (Un caso particular de la forma $a + bi$, por ejemplo, $z = 4 + 3i$) sólo un estudiante explicó que $i = \sqrt{-1}$, los 3 restantes no apuntaron nada sobre *i* a pesar de que utilizaron este número en sus representaciones.

Por la distinción entre plano complejo y plano cartesiano expuesta en las observaciones para las respuestas del cuadro 4.6, en esta clasificación se consideran diferentes los tipos 4, 5, 6 y 7. En las respuestas de tipo 4 (Un punto en el plano cartesiano), sólo un estudiante se refirió a un punto cualquiera del plano cartesiano y no utilizó ningún esquema. Dos se refirieron a puntos particulares del plano, uno de ellos escribió: “lo podemos ver como (5, 6) en el plano cartesiano”, el otro realizó el siguiente esquema de la figura 4.11 sin utilizar palabras en su respuesta.

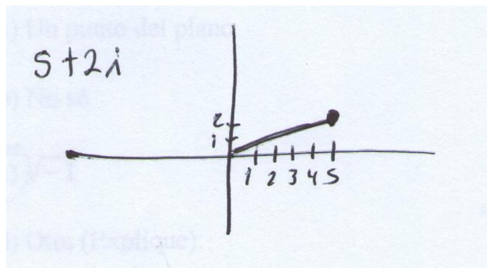


Figura 4.11. Representación del número complejo 5 + 2*i* como un punto en el plano cartesiano

El cuarto estudiante nombró como representación a las parejas en el plano cartesiano y utilizó el esquema de la figura 4.12, obsérvese que el estudiante utilizó diferentes representaciones en la ilustración: número complejo como vector y punto en el plano cartesiano y en el plano imaginario, así como la representación $z = x + iy$.

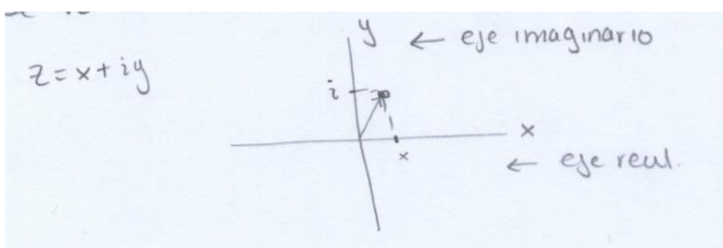


Figura 4.12. Algunas representaciones de los números complejos

En las respuestas de tipo 5 (Un vector en R^2), un estudiante escribió “Una representación es como un vector en R^2”, otro estudiante, además de utilizar palabras, agregó un esquema; otro estudiante sólo utilizó un esquema. En las respuestas de tipo 6 (Un punto en el plano complejo), los tres estudiantes emplearon un esquema, dos de ellos también utilizaron la notación (x, y) y uno de estos dos escribió $z = x + iy \cong (x, y)$. Obsérvese en la figura 4.13 que el estudiante utilizó diversas representaciones: vector en el plano cartesiano, punto en el plano complejo, par ordenado y $z = x + iy$.

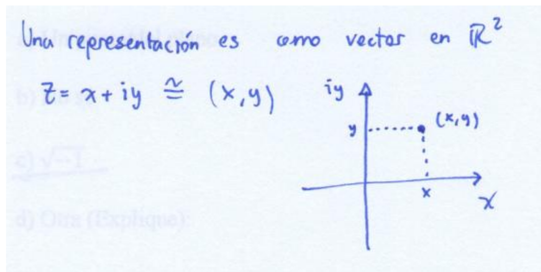


Figura 4.13. Representación de un número complejo como par ordenado, punto y vector en el plano

Los estudiantes con respuestas de tipo 7 (Un vector en el plano complejo) contestaron por medio de esquemas; sobresale el esquema de la figura 4.4 como evidencia de que este estudiante consideró un punto en el plano cartesiano y un vector como entidades iguales.

Un estudiante que dio respuesta de tipo 8 [$z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$] aclaró que $z = \sqrt{a^2 + b^2}$, es decir, se refirió a la norma del número complejo; además, escribió θ = arc tan $\left(\frac{b}{a}\right)$; e ilustró su representación con el esquema de la figura 4.14.

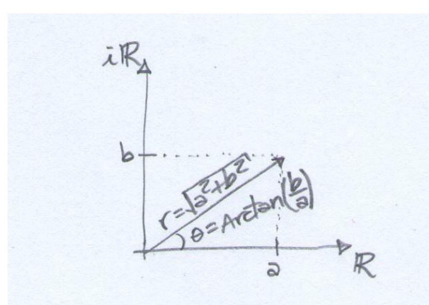


Figura 4.14. Representación de un número complejo en la forma $z = r(cos\theta + i\ sen\theta)$

El segundo estudiante que dio respuesta de tipo 8 escribió: "Una de ellas es la forma polar $z = cos\ x + i\ sen\ y$", únicamente consideró los números complejos con norma igual a 1.

Uno de los estudiantes cuya respuesta se clasificó como tipo 9 escribió: "[una representación es] la forma de parejas en el plano cartesiano, donde se ve el isomorfismo de R^2 con los complejos". El segundo estudiante que dio una respuesta de este tipo escribió: "$z = (x, y)$", de aquí que se decidiera nombrar a este tipo de la clasificación como "Un par ordenado". Las respuestas pueden observarse en las figuras 4.15 y 4.16.

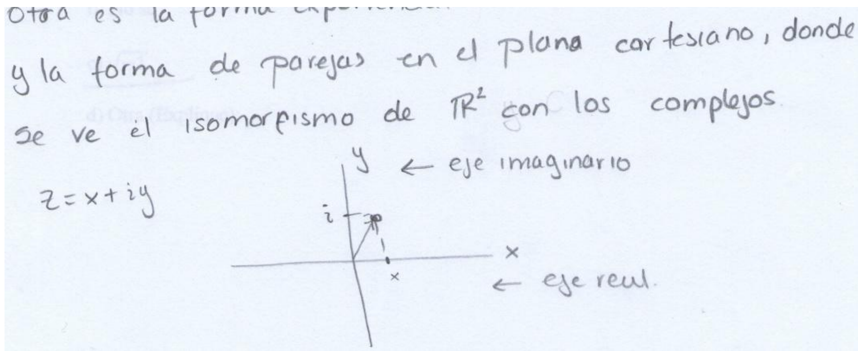


Figura 4.15. Respuesta tipo 9

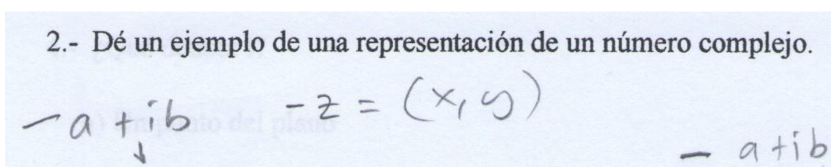
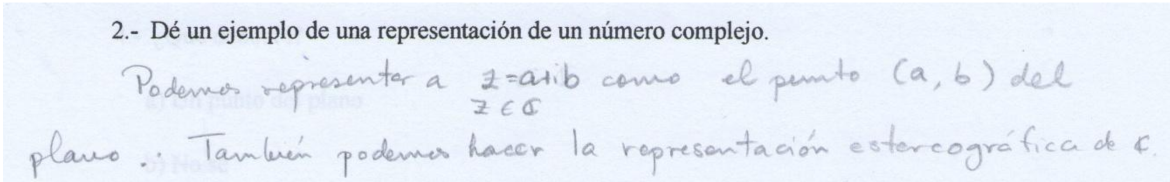


Figura 4.16. Respuesta tipo 9

No se encontraron observaciones sobre las respuestas de los tipos 10 $\left[a + bi = (a \quad b)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right]$ y 11($x^2 + 1 = 0$). Respecto a la respuesta de tipo 12 (Proyección estereográfica), el estudiante sólo escribió: "También se puede hacer la representación estereográfica de C". No especificó cómo hacer dicha representación, a pesar de que el profesor lo explicó en clase; sólo se limitó a mencionar la existencia de tal representación, como se observa en la figura 4.17.

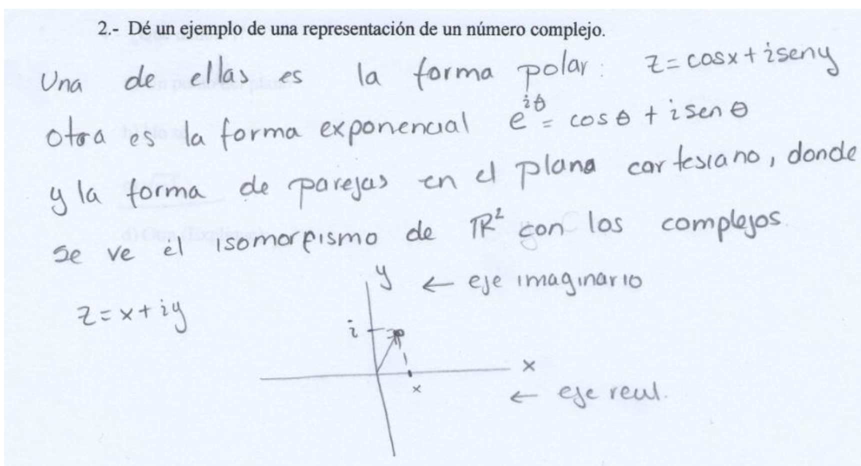


2.- Dé un ejemplo de una representación de un número complejo.

Podemos representar a $z=a+ib$ como el punto (a,b) del
$z \in \mathbb{C}$
plano $\therefore$ También podemos hacer la representación estereográfica de $\mathbb{C}$.

Figura 4.17. Respuesta tipo 12

En esta clasificación 4 respuestas se ubicaron en 2 tipos diferentes, 3 respuestas se ubicaron en 3 tipos diferentes, 1 respuesta se ubicó en 4 tipos diferentes, 1 respuesta se ubicó en 5 tipos diferentes y 1 respuesta se ubicó en 6 tipos diferentes. Así, el total de las respuestas contabilizadas en el cuadro es de 40 aunque sólo participaron 17 estudiantes. La respuesta que aparece en la figura 4.18 se ubicó en el tipo 1, tipo 2, tipo 4, tipo 7, tipo 8 y tipo 9.



2.- Dé un ejemplo de una representación de un número complejo.

Una de ellas es la forma polar: $z = \cos x + i \operatorname{sen} y$
otra es la forma exponencial $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$
y la forma de parejas en el plano cartesiano, donde se ve el isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ con los complejos.

$z = x + iy$

Figura 4.18. Respuesta clasificada en 6 tipos diferentes

La respuesta que aparece en la figura 4.19 se ubicó como respuesta de tipo 1, tipo 2, tipo 5, tipo 9 y tipo 10.

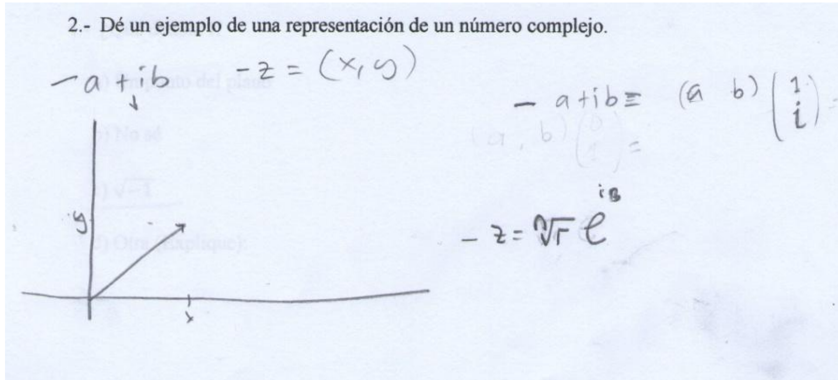


Figura 4.19. Respuesta clasificada en 5 tipos diferentes

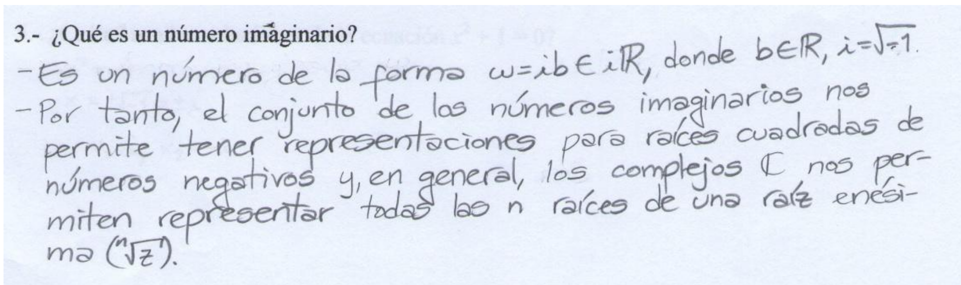
Cuadro 4.8. Clasificación de respuestas a la pregunta 3: *¿Qué es un número imaginario?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Es un número de la forma *bi*	8
2. – Es aquel que se obtiene al calcular la raíz cuadrada de un número negativo	7
3. – Los números complejos son números imaginarios	2
4. – "Es un símbolo que da sentido a lo que estamos operando en los complejos, *i* cumple que $i^2 = -1$"	1
5. – "Convención matemática para [representar] lo que no existía o era indeterminado" (contexto: raíces cuadradas de números negativos)	1
6. – "Es un número que no tiene solución en los reales"	1

De los 8 estudiantes que dieron respuestas de tipo 1 [Es un número de la forma *bi*] sólo uno de ellos aclaró que *b* pertenece al conjunto de los números reales sin el 0; además, sólo 5 de ellos aclararon en ésta o en alguna de las preguntas anteriores que $i = \sqrt{-1}$, los 3 restantes no especificaron nada al respecto. Sobresale la respuesta de un estudiante que complementó de la siguiente manera.

> […] el conjunto de los números imaginarios nos permite tener representaciones para raíces cuadradas de números negativos, y en general, los complejos *C* nos permiten representar todas las *n* raíces de una raíz enésima $(\sqrt[n]{z})$.

El título de las demás clasificaciones expresa con claridad la idea principal de las respuestas encontradas. No hay observaciones relevantes sobre ellas. En esta clasificación 3 respuestas se ubicaron en 2 tipos diferentes. Por ejemplo, la respuesta de la figura 4.20 se clasificó como tipo1 y tipo 2.


3.- ¿Qué es un número imaginario?

-Es un número de la forma $\omega = ib \in i\mathbb{R}$, donde $b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$.

-Por tanto, el conjunto de los números imaginarios nos permite tener representaciones para raíces cuadradas de números negativos y, en general, los complejos $\mathbb{C}$ nos permiten representar todas las n raíces de una raíz enésima ($\sqrt[n]{z}$).

Figura 4.20. Respuesta clasificada en los tipos 1 y 2

De este modo, en el cuadro se cuentan 20 respuestas, aunque los estudiantes que contestaron el cuestionario fueron 17.

Cuadro 4.9. Clasificación de respuestas a la pregunta 4: *¿Qué denota i?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – $\sqrt{-1}$	12
2. – Un punto en el plano complejo y $\sqrt{-1}$	3
3. – $i = \pm\sqrt{-1}$, en el plano *i* es un número sobre la recta imaginaria denotado como la ordenada	1
4. – “Es el imaginario, $\sqrt{-1} = i^2$ ”	1

No hay observaciones respecto a las respuestas de tipo 1 [$\sqrt{-1}$]. Los 3 estudiantes que dieron respuestas de tipo 2 [Un punto en el plano complejo y $\sqrt{-1}$] resaltaron que *i* no sólo denota $\sqrt{-1}$, sino también un punto en el plano complejo; uno de ellos utilizó la notación $C = R \times iR$ para referirse a dicho plano. Otro estudiante añadió lo siguiente: “Visto en el plano complejo, denota el punto (0, 1), o más correctamente al vector $\bar{v} = (0, 1)$”.

Parte de la respuesta clasificada como tipo 3 [$i = \pm\sqrt{-1}$, en el plano *i* es un número sobre la recta imaginaria denotado como la ordenada] es la siguiente: "Si representamos al conjunto de los [números] complejos en el plano, *i* sería un punto sobre la recta imaginaria, generalmente denotada como la ordenada." El estudiante no especificó con claridad el lugar donde se ubica *i* en el plano complejo.

No hay observaciones relevantes sobre la respuesta de tipo 4.

Cuadro 4.10. Clasificación de respuestas a la pregunta 5: *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 + 1 = 0$*?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – $x = \pm\, i = \pm\sqrt{-1}$	9
2. – $x = \pm\, i$	5
3. – $x = \pm\sqrt{-1}$	1
4. – Dibujó la parábola $(x - 1)^2$	1
5. – No respondió	1

Dos de los estudiantes que dieron respuestas de tipo 1 [$x = \pm\, i = \pm\sqrt{-1}$] no anotaron algún procedimiento de resolución, los 7 restantes utilizaron el procedimiento de despeje para obtener las respuestas. Los estudiantes que dieron respuestas de los tipos 2 [$x = \pm\, i$] y 3 [$x = \pm\sqrt{-1}$] no anotaron algún procedimiento de resolución. El título de las clasificaciones 4 [Dibujó la parábola $(x - 1)^2$] y 5 [No respondió] expresa con claridad la idea central de las respuestas de los estudiantes.

Cuadro 4.11. Clasificación de respuestas a la pregunta 6: *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 - 2x + 2 = 0$*?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – $x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$	5
2. – Respuesta equivocada por errores de cálculo aritmético	4
3. – Respuesta inconclusa	3
4. – Respuesta equivocada por aplicación incorrecta de la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado	2
5. – No respondió	2
6. – "No recuerdo cómo resolverlas"	1

Los estudiantes cuyas respuestas fueron de tipo 2 [Respuesta equivocada por errores de cálculo aritmético] utilizaron como procedimiento la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado. Las respuestas de tipo 3 [Respuesta inconclusa] presentaron los siguientes problemas. (*1*) Un estudiante sustituyó la variable x de la ecuación por el número complejo desconocido $x + iy$, obtuvo un sistema de ecuaciones que no resolvió pero concluyó que la solución del sistema sería un número imaginario que cumpliría la ecuación; (*2*) otro estudiante no concluyó la resolución de la ecuación, que comenzó utilizando la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado, (*3*) otro estudiante intentó escribir la fórmula general de resolución pero no lo logró.

Se detectaron 2 procedimientos empleados por los estudiantes que dieron respuestas de tipo 1 [$x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$].

Cuadro 4.11.1. Procedimientos para obtener la respuesta de tipo 1: $x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$

Procedimiento	Número de estudiantes
Fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado	4
Descomposición en factores	1

El estudiante que descompuso en factores la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ para resolverla concluyó que la ecuación podía escribirse como $(x^2 - 1)^2 = -1$, como se muestra en la figura 4.21.

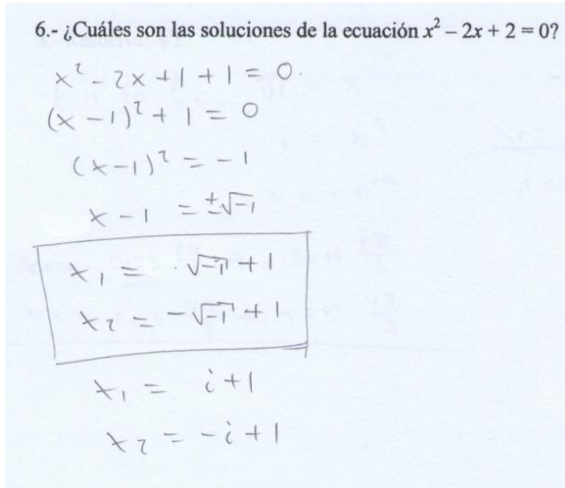


Figura 4.21. Descomposición en factores

No hay observaciones relevantes sobre las respuestas de los tipos 5 [No respondió] y 6 [“No recuerdo cómo resolverlas”] del cuadro 4.11.

Se elaboraron dos cuadros para mostrar la clasificación de las respuestas a la pregunta 7. En el cuadro 4.12.1 sólo se responde a la pregunta con sí o no; en el cuadro 7.2 se especifican los cursos anteriores en los que los estudiantes trabajaron con números complejos. Algunas respuestas del segundo cuadro cayeron en más de una clasificación.

Cuadro 4.12 Clasificación de respuestas a la pregunta 7: *¿Ha estudiado los números complejos en algún otro curso anterior a su curso de variable compleja I?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Sí	15
2. – No	2

Cuadro 4.12.1 *¿Cuál? [¿En qué curso anterior a su curso de variable compleja I estudió los números complejos?]*

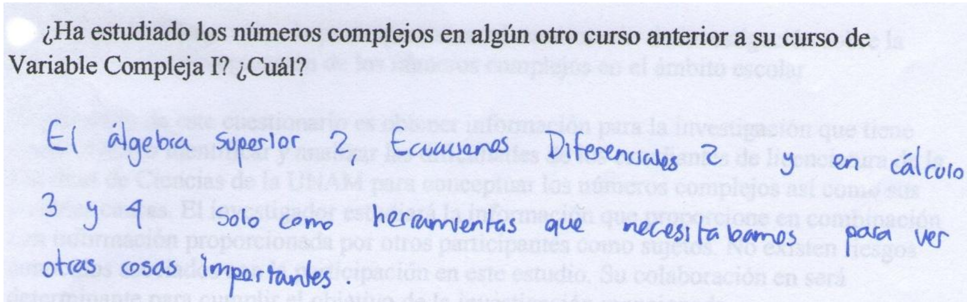
Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Álgebra superior II	7
2. – Bachillerato	4
3. – Álgebra para físicos	3
4. – Álgebra lineal	1
5. – Ecuaciones diferenciales II	1
6. – Cálculo III	1
7. – Cálculo IV	1
8. – No especificó	1

Un estudiante que afirmó haber trabajado con números complejos en su curso de álgebra superior II se refirió a la manipulación de los símbolos a través de la parte operativa; otro más señaló que estudió la construcción de estos números así como sus operaciones básicas.

Dos estudiantes que trabajaron con los números complejos en el bachillerato especificaron las instituciones donde cursaron sus estudios: CCH y Preparatoria agrícola de la Universidad Autónoma de Chapingo. Uno de los estudiantes cuya repuesta cayó en esta clasificación escribió: “Sólo en preparatoria, pero fue sólo una pequeña plática porque no se profundiza tanto, dijeron que lo llevaríamos más adelante”.

Dos de los estudiantes que estudiaron los números complejos en álgebra para físicos señalaron que lo hicieron de manera breve. El estudiante que trabajó números complejos en algebra lineal especificó que fue con cuaternios. Los estudiantes cuyas respuestas fueron ecuaciones diferenciales II, cálculo III y cálculo IV no especificaron algún tema o tratamiento particular.

En esta clasificación una (1) respuesta se ubicó en 2 tipos, es decir, un estudiante escribió que estudió los números complejos en álgebra superior II y en álgebra lineal. Otra respuesta se ubicó en 4 tipos diferentes ya que un estudiante afirmó haber estudiado a los números complejos en álgebra superior II, ecuaciones diferenciales II, cálculo III y cálculo IV como se muestra en la figura 4.22.



¿Ha estudiado los números complejos en algún otro curso anterior a su curso de Variable Compleja I? ¿Cuál?

El álgebra superior 2, Ecuaciones Diferenciales 2 y en cálculo 3 y 4 solo como herramientas que necesitabamos para ver otras cosas importantes.

Figura 4.22. Respuesta clasificada en 4 tipos

Cuadro 4.13. Clasificación de respuestas a la pregunta 8: *¿Es la primera vez que cursa la materia? Si contesta que no, ¿qué temas le parecieron más complicados cuando estudió el curso la primera vez y por qué?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Sí	7
2. – No	8
3. – No especificó	2

Los temas más complicados para los estudiantes que estaban repitiendo el curso fueron: series de Laurent, mapeos, dominios de analiticidad, superficies de Riemann, transformaciones de Möbius, integrales, teoremas de Cauchy y de Morera, singularidades y polos, homotopía, construcción de los números complejos en la circunferencia de radio 1, obtención de las raíces enésimas de los números complejos y función logaritmo. Destacaron dos respuestas que se muestran en las figuras 4.23 y 4.24.

– "…Me gustaría que se lleve con otro nombre esta materia desde el 1er semestre de la carrera, porque así nos ayudaría a entender los complejos más y aplicarlos desde el principio, como no he llevado esta materia se me hizo muy difícil álgebra lineal".

– "Lo más complicado [de la materia] es la exposición de los maestros que piensan que las cosas son obvias o previamente vistas".

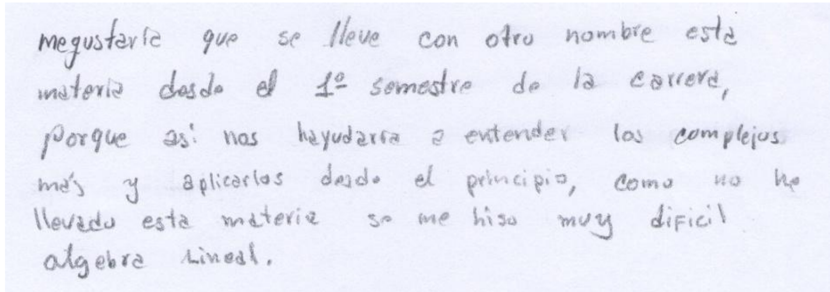
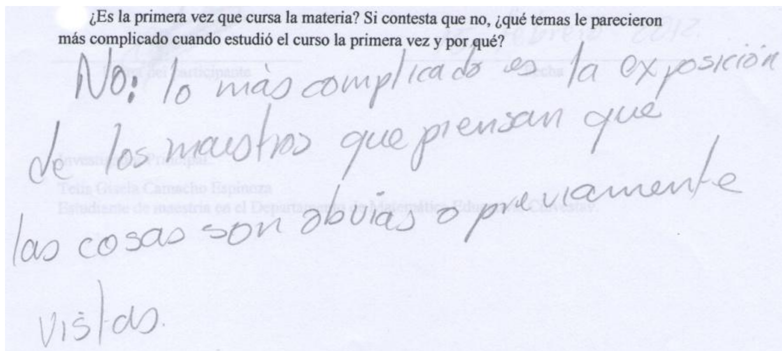

Megustaria que se lleve con otro nombre esta materia desde el 1º semestre de la carrera, porque así nos hayudaria a entender los complejos más y aplicarlos desde el principio, como no he llevado esta materia se me hiso muy dificil algebra Lineal.

Figura 4.23. Opinión de un estudiante


¿Es la primera vez que cursa la materia? Si contesta que no, ¿qué temas le parecieron más complicado cuando estudió el curso la primera vez y por qué?

No: lo más complicado es la exposición de los maestros que piensan que las cosas son obvias o previamente vistas.

Figura 4.24 Respuesta de un estudiante

Clasificación de las respuestas del grupo 2 de variable compleja I

En este apartado se describe los resultados obtenidos de las respuestas de los estudiantes de un segundo grupo de variable compleja I de la misma Facultad de Ciencias de la UNAM. El grupo 2 estaba formado por 14 estudiantes de las licenciaturas de física y matemáticas del turno matutino. El primer estudiante que entregó el cuestionario tardó 20 minutos en resolverlo, el último tardó 30 minutos. El enfoque que sobresalió en las clases de este grupo fue el de los números complejos como extensión de los números reales. Se definió $i = \sqrt{-1}$ y se demostró que los números complejos son un campo no ordenado. El profesor utilizó como representaciones de los números complejos las formas $a + bi$, $r\,(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$ y $re^{i\theta}$; también representó a los números complejos como una matriz de 2×1 o de 1×2, es decir, una matriz de la forma $\binom{a}{b}$ o de la forma $(a \quad b)$. Por otra parte, puso énfasis en que el campo de los números complejos es isomorfo a R^2 utilizando la notación $C \cong R^2$; no explicó qué es un isomorfismo: se asumió que los estudiantes conocían el concepto.

Respecto a las operaciones con números complejos (adición, multiplicación, división, potenciación y radicación), el profesor trabajó bajo un enfoque algebraico en su mayor parte, en la radicación utilizó la fórmula de De Moivre sin demostrarla. La mayoría de los ejercicios propuestos se centraron en la correcta manipulación algebraica de los números complejos, por ejemplo, resuelva $x = \sqrt[4]{128 + 128i\sqrt{3}}$.

Enseguida se presenta una clasificación detallada de las respuestas de los estudiantes del grupo 2 a cada pregunta del cuestionario de investigación. Esta clasificación se utilizó para analizar detalladamente parte de su conceptuación sobre los números complejos, así como para identificar algunas dificultades en su comprensión. Las respuestas se clasificaron en diferentes tipos, representando cada uno la idea central de la respuesta. En algunas respuestas se identificaron dos o más concepciones diferentes de los números complejos, por lo que caen en más de una clasificación. Los tipos de respuestas se ordenaron de mayor a menor número de estudiantes en todas las clasificaciones.

Cuadro 4.14. Clasificación de respuestas a la pregunta 1: *¿Qué es un número complejo?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Un número de la forma $z = a + bi$ con a y b números reales	6
2. – Un número que consta de una parte real y una imaginaria	5
3. – Elemento de un campo algebraico	3
4. – Es la suma de un número real y un número imaginario	2
5. – Es aquel que se puede representar como un punto en el plano cartesiano	1
6. – Es aquel que puede representarse como un vector en el plano complejo	1
7. – Es aquel que se obtiene de la raíz cuadrada de un número negativo	1
8. – "Un número complejo es un número imaginario que vive en el anillo ***C*** "	1

Sólo un estudiante que dio respuesta de tipo 1 (Un número de la forma $z = a + bi$ con a y b números reales) escribió $i^2 = -1$; ningún otro estudiante se refirió a la naturaleza de i. Sin embargo, en la pregunta 3, *¿Qué es un número imaginario?*, uno de estos estudiantes escribió $i^2 = \sqrt{-1}$. En las respuestas de tipo 1 destaca la siguiente.

> Un número complejo es un elemento que pertenece al campo de los complejos y que se representa mediante la suma de 2 entradas o componentes que pertenecen a los reales, con la segunda acompañada de i, *i.e.*, si $z \in C$ entonces z es de la forma $z = \{x, y \in R \mid x + iy = z\}$ [*sic*].

Nótese que el estudiante aclaró que proporcionaba una representación de un número complejo, mas no que la representación sea el número complejo.

Tres estudiantes que dieron respuestas de tipo 2 (Un número que consta de una parte real y una imaginaria) también utilizaron la representación $z = a + ib$. Ninguno aclaró cuál es la parte real y cuál la parte imaginaria de un número complejo. Sin embargo, uno de ellos escribió $i \in C$ y $R \subset C$, y otro señaló que $a \in R$ y $bi \in C$; implícitamente éste señaló que a es la parte real y bi es la parte imaginaria.

De las respuestas de tipo 3 (Elemento de un campo algebraico) destaca la siguiente: "Es un miembro de un campo en el cual se pueden dar soluciones a ecuaciones polinomiales de cualquier grado". El estudiante agregó como una característica especial que en este campo se pueden encontrar las soluciones de cualquier ecuación polinomial.

Dos estudiantes dieron respuestas de tipo 4 (Es la suma de un número real y un número imaginario). Este tipo se considera diferente del tipo 2 porque la parte imaginaria de un número complejo no es un número imaginario, situación que los estudiantes que dieron respuestas de tipo 2 no aclararon.

Respecto a las respuestas de tipo 5 y 6 se debe aclarar que el profesor habló del plano complejo durante las clases pero no puso énfasis, a diferencia del profesor del grupo 1, en no considerarlo igual al plano cartesiano. Aclarado esto, no hay observaciones relevantes respecto a la respuesta de tipo 5 (Es aquel que se puede representar como un punto en el plano cartesiano).

El estudiante cuya respuesta es de tipo 6 (Es aquel que puede representarse como un vector en el plano complejo) no utilizó palabras: ilustró esta concepción mediante el esquema que se muestra en la figura 4.25.

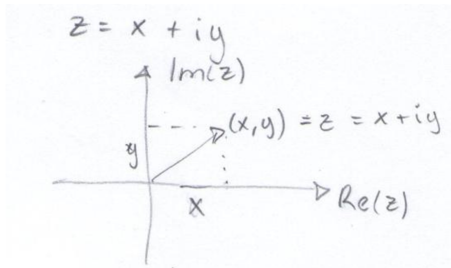


Figura 4.25. Representación de un número complejo como vector en el plano complejo

De las respuestas de esta clasificación, 4 de ellas se ubicaron en 2 tipos diferentes y una (1) respuesta se ubicó en 3 tipos diferentes. Así, en el cuadro se cuentan 20 respuestas aunque sólo contestaron 14 estudiantes. La respuesta que se observa en la figura 4.26 se clasificó como respuesta tipo 1, tipo 2 y tipo 6.

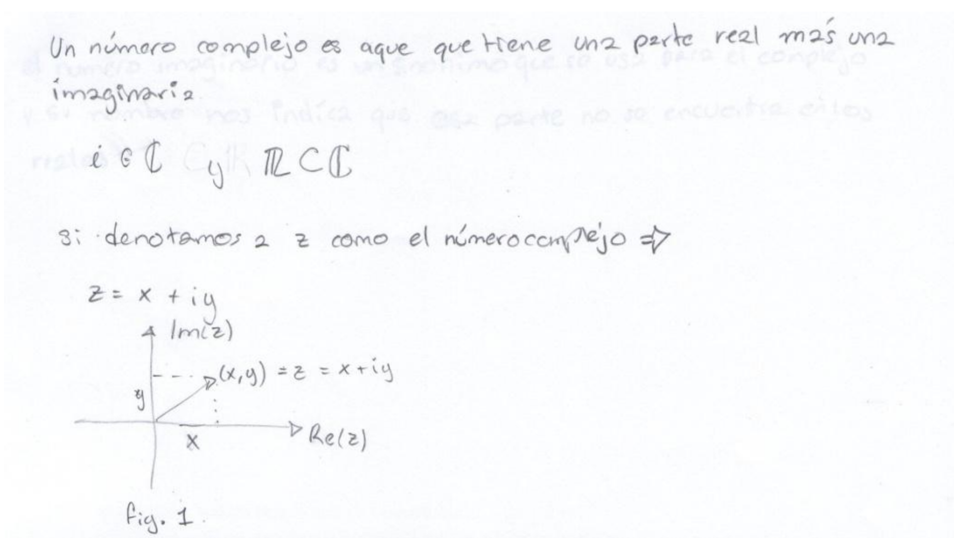


Figura 4.26. Respuesta clasificada en 3 tipos diferentes

Cuadro 4.15. Clasificación de respuestas a la pregunta 2: *Dé un ejemplo de una representación de un número complejo*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – $z = a + ib$	10
2. – $z = cos\theta + i\ sen\theta$	3
3. – Un caso particular de la forma $a + bi$, por ejemplo, $z = 2 + 3i$	2
4. – Un punto en el plano complejo	2
5. – $z = (a, b)$	2
6. – Un vector en el plano complejo	1
7. – “Son útiles para representar una función de onda…”	1
8. – “El punto (1, *i*)”	1

De las respuestas de tipo 1 ($z = a + ib$) destaca una en la que el estudiante señaló que a es la parte real del número complejo y la parte imaginaria es iy. Nótese que el estudiante entendía que la parte imaginaria de un número complejo es un número imaginario. Sólo un estudiante señaló que $i^2 = -1$.

En las respuestas de tipo 2 ($z = cos\theta + i\ sen\theta$ [*sic*]), los 3 estudiantes pasaron por alto que el módulo de un número complejo puede ser distinto de 1. Destaca que un estudiante se refirió al módulo de un número complejo $z = a + ib$ escribiendo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sin embargo, anotó $z = cos\theta + i\ sen\theta$ y no consideró que el módulo de un número complejo puede ser distinto de 1. Los otros dos estudiantes también utilizaron la representación $e^{i\theta}$; uno de ellos especificó que $e^{i\theta} = cos\theta + i\ sen\theta$ [*sic*], pero omitió, al igual que su compañero, que el módulo de un número complejo puede ser distinto de 1. Sólo un estudiante cuya respuesta cayó en esta clasificación señaló que $i^2 = -1$.

Ninguno de los estudiantes cuyas respuestas fueron clasificadas como tipo 3 [Un caso particular de la forma $a + bi$, por ejemplo, $z = 2 + 3i$] aclaró el significado de i, a pesar de utilizarlo en las representaciones que eligieron.

De las respuestas de tipo 4 [Un punto en el plano complejo] destaca la siguiente: “Una gráfica con un punto que tiene parte imaginaria y parte real la cual será representada así [obsérvese la figura 4.27]”.

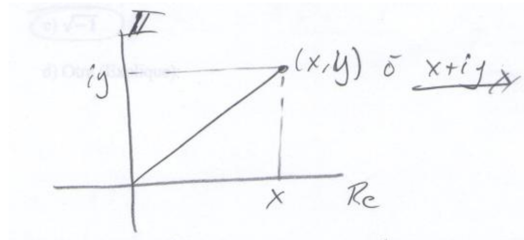


Figura 4.27 Representación de un número complejo como punto en el plano complejo

Nótese que el estudiante utilizó una mezcla de concepciones: escribió sobre un punto que tiene parte imaginaria y parte real cuando las dos coordenadas de dicho punto son números reales; por otra parte, llamó al punto (x, y) o $x + iy$.

En las respuestas de tipo 5 un estudiante escribió: “como pareja ordenada (a, b)”, la segunda respuesta clasificada en este tipo decía: “$z = (a, b)$”. El estudiante que dio la respuesta clasificada como tipo 6 [Un vector en el plano complejo] sólo utilizó palabras, no empleó ningún esquema para ilustrar la representación que propuso. Por otra parte, el estudiante que dio la respuesta de tipo 7 [“Son útiles para representar una función de onda por su forma polar”] también escribió $e^{i\theta} = cos\theta + i\ sen\theta$ y no escribió algo relacionado con la naturaleza de i.

El estudiante que dio la respuesta de tipo 8 escribió: “Por ejemplo, pensemos en el punto (1, i) donde la parte real es 1 y la parte imaginaria también”. Ilustró su respuesta con el esquema que se muestra en la figura 4.28.

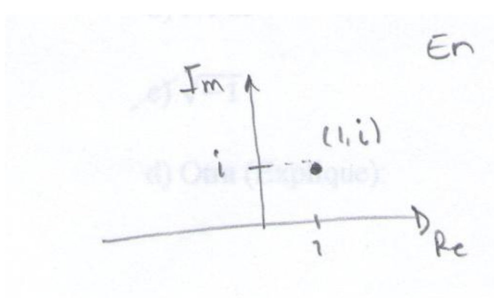


Figura 4.28 Representación del número complejo (1, i)

Obsérvese que el estudiante consideró que el punto está en el plano complejo, pues denotó al eje horizontal como el eje real y al eje vertical como el eje imaginario; además, nombró al punto (1, *i*). El estudiante no aclaró el significado de i.

En el cuadro 4.15 de esta clasificación se cuentan 22 respuestas. Tres (3) respuestas se clasificaron en 2 tipos diferentes, 1 respuesta se clasificó en 3 tipos diferentes y 1 respuesta se clasificó en 4 tipos diferentes. Así, en el cuadro 4.15 hay un total de 22 respuestas aunque sólo 14 estudiantes participaron en el cuestionario. En la figura 4.29 se observa la respuesta que fue clasificada como tipo 1, tipo 2, tipo 4 y tipo 7.

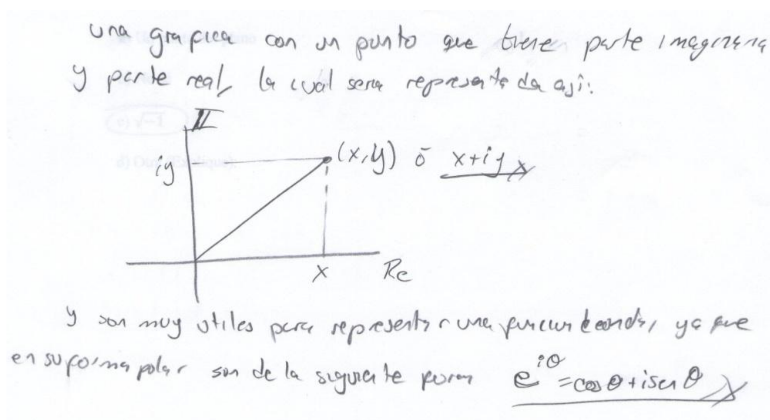


Figura 4.29.Respuesta clasificada en 4 tipos.

Cuadro 4.16. Clasificación de respuestas a la pregunta 3: *¿Qué es un número imaginario?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Es un número de la forma *bi* con $b \in \boldsymbol{R}$	7
2. – Es aquel que se obtiene al calcular la raíz cuadrada de un número negativo	4
4. – El nombre de número imaginario es un sinónimo de número complejo, indica que no es un número real	1
5. – Es $i = \sqrt{-1}$	1
6. – “Número que surge como solución de ecuaciones que no podían resolverse”	1
7. – “Son los puntos que no podemos ver comúnmente, son ‘imaginarios’ ”	1

En las respuestas de tipo 1 (Es un número de la forma *bi* con $b \in R$) sólo un estudiante escribió que $b \in R\backslash\{0\}$ y sólo en 4 especificaron que $i = \sqrt{-1}$. Destacan las siguientes respuestas: "Un número [en el que] solamente nos fijamos en la segunda componente, *i.e.*, $z = a + ib \therefore \mathrm{Im} = ib$". "Un número que no tiene la parte real, *i.e.*, $a + bi$ donde $a = 0$ y $b \in R\backslash\{0\}$". El primer estudiante consideró que un número complejo está formado por 2 componentes; además, escribió Im = *ib* para expresar que *ib* pertenece a los números imaginarios. El segundo estudiante afirmó que un número complejo no tiene parte real aunque después escribió $a = 0$; así, aunque la parte real de un número imaginario es igual a 0, el estudiante juzgó que la parte real no existe.

En las respuestas de tipo 3 (Es un número de la forma *bi* con $i = \sqrt{-1}$ y $b \in R$) destaca que ninguno de los estudiantes tomó en cuenta que $b \in R\backslash\{0\}$. No hay observaciones relevantes respecto a los demás tipos de respuestas. En esta clasificación una (1) respuesta se ubicó en 2 tipos diferentes, así, en el cuadro 4.16 se cuentan 15 respuestas aunque solo participaron 14 estudiantes.

Cuadro 4.17. Clasificación de respuestas a la pregunta 4: *¿Qué denota i?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – $\sqrt{-1}$	13
2. – Un punto en el plano	1
3. – El punto (0,1) de R^2	1
4. – Un punto en el plano complejo	1
5. – Un vector en el plano complejo	1

El estudiante que dio la respuesta de tipo 4 escribió: "se puede ver también como un punto en el plano complejo en forma vectorial". Nótese que el estudiante considera que un punto es lo mismo que un vector en el plano complejo y como consecuencia *i* puede ser un punto y un vector. El estudiante ilustró su respuesta con el esquema de la figura 4.30.

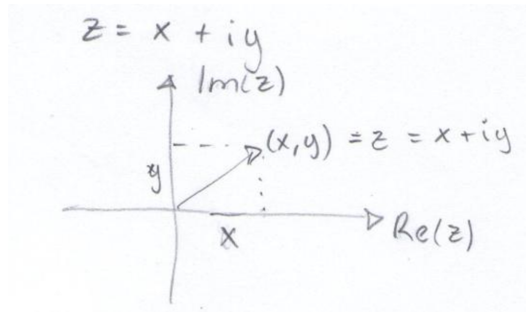
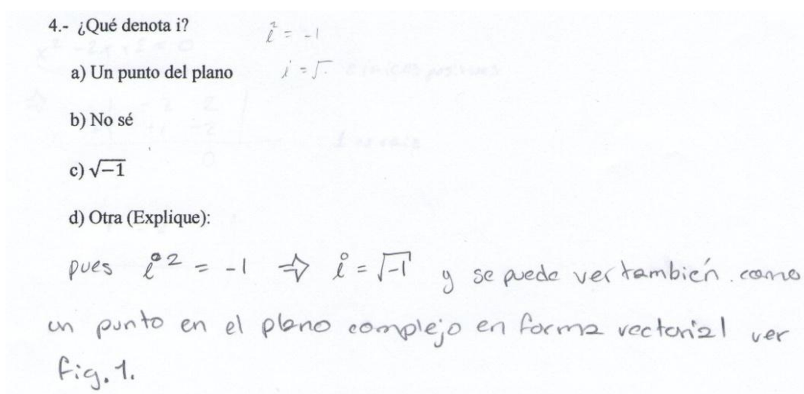


Figura 4.30. Representación de un número complejo como punto y vector en el plano complejo

No hay observaciones que hacer sobre las respuestas de cualquier otra clasificación. Los estudiantes se limitaron a seleccionar la respuesta que consideraron correcta en los casos de los tipos 1 y 2, o escribieron alguna de las respuestas clasificadas como 3 o 5 sin hacer más comentarios. En esta clasificación, una (1) respuesta se ubicó en 2 tipos diferentes y una (1) respuesta se ubicó en tres tipos diferentes. En la figura 4.31 se muestra la respuesta clasificada como tipo 1, tipo 4 y tipo 5.


4.- ¿Qué denota i?

a) Un punto del plano

b) No sé

c) $\sqrt{-1}$

d) Otra (Explique):

pues $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$ y se puede ver también como un punto en el plano complejo en forma vectorial ver fig. 1.

Figura 4.31. Respuesta clasificada en 3 tipos diferentes

Cuadro 4.18. Clasificación de respuestas a la pregunta 5: *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – $x = \pm i$	11
2. – $x = \sqrt{-1} = i$	2
3. – $x = \sqrt{-1}$	1

En las respuestas de tipo 1 [$x = \pm i$] se identificó que 5 estudiantes escribieron $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$, mientras que otros 3 escribieron $\sqrt{-1} = \pm i$. No hay observaciones sobre las respuestas de tipo 2. Por otra parte, el estudiante que dio la respuesta de tipo 3 escribió: "Una respuesta posible sería –1 pero $\sqrt{-1}$ no existe, por tanto es un número imaginario".

Ocho de los estudiantes despejaron la variable x de la ecuación para obtener su respuesta. Los seis restantes no anotaron algún procedimiento.

Cuadro 4.19. Clasificación de respuestas a la pregunta 6: *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 - 2x + 2 = 0$*?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – $x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$	9
2. – Respuesta equivocada por errores de cálculo aritmético	2
3. – Respuesta inconclusa	1
4. – La solución existe en los números complejos	1
5. – No respondió	1

Ocho de los estudiantes que dieron respuestas de tipo 1 utilizaron la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado. Uno de ellos no escribió procedimiento alguno.

Los estudiantes cuyas respuestas fueron clasificadas como tipo 2 [Respuesta equivocada por errores de cálculo aritmético] cometieron errores de cálculo aritmético al utilizar la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado. Uno de ellos dio como solución $2 \pm i$ y el otro $1 \pm 2i$. El estudiante que dio la respuesta de tipo 3 [Respuesta inconclusa] intentó encontrar las soluciones de la ecuación utilizando división sintética, como se muestra en la figura 4.32.

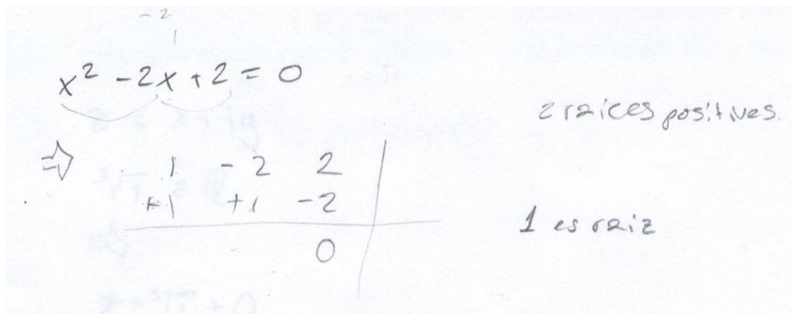


Figura 4.32. Procedimiento inconcluso de división sintética para encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$

El estudiante que dio la respuesta de tipo 4 escribió: “Esta [ecuación] también tiene solución pero existe en los C ”. No explicó las causas por las que no proporcionó una solución.

Cuadro 4.20 Clasificación de respuestas a la pregunta 7: *¿Ha estudiado los números complejos en algún otro curso anterior a su curso de variable compleja I?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Sí	12
2. – No	2

Siete estudiantes que afirmaron haber estudiado los números complejos en cursos anteriores escribieron que los habían estudiado a modo de introducción o muy brevemente, enfocándose en sus operaciones básicas. Dos estudiantes respondieron de la siguiente manera: “Sí, vimos una introducción de ellos en álgebra superior II”, “Pues muy poco, digamos que sólo suma, multiplicación y resta”.

En el cuadro 4.20 se muestran los cursos en los que los estudiantes recibieron instrucción previa sobre los números complejos.

Cuadro 4.20.1 *¿Cuál?* [¿En qué curso anterior a su curso de variable compleja I estudió los números complejos?]

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Álgebra superior II	6
2. – Álgebra para físicos	4
3. – Otro curso de variable compleja	1
4. – Álgebra lineal	1
5. – Geometría analítica I	1
6. – Análisis matemático I	1
7. – Ecuaciones diferenciales	1

Destaca la siguiente respuesta, que se ilustra en la figura 4.33, y que se clasificó como tipo 2 y tipo 1 ya que el estudiante especificó en su cuestionario que era estudiante de física: “Sólo se mencionan en los cursos de álgebra y se utiliza como herramienta en ecuaciones diferenciales pero éstos no son tocados a fondo en estos cursos”.

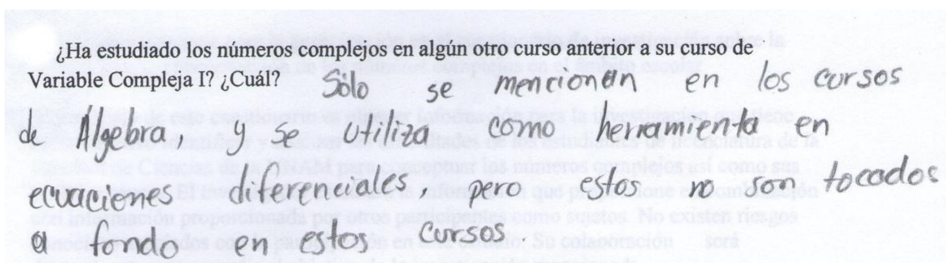


Figura 4.33. Respuesta clasificada en 2 tipos

De las respuestas obtenidas, una se ubicó en 2 tipos diferentes y una más se clasificó en 3 tipos diferentes: tipo 1, tipo 5 y tipo 6. Así, en el cuadro se contaron 15 respuestas aunque solamente 12 estudiantes afirmaron haber estudiado los números complejos en otros cursos.

Cuadro 4.21. Clasificación de respuestas a la pregunta 8: *¿Es la primera vez que cursa la materia? Si contesta que no, ¿qué temas le parecieron más complicados cuando estudió el curso la primera vez?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Sí	8
2. – No	6

Los temas más complicados para los estudiantes que cursaron la materia anteriormente fueron: Transformaciones de Möbius, integrales de Cauchy, problemas con singularidades, teorema del residuo, raíces enésimas de un número complejo, y polos. Una de las respuestas obtenidas se ilustra en la figura 4.34.

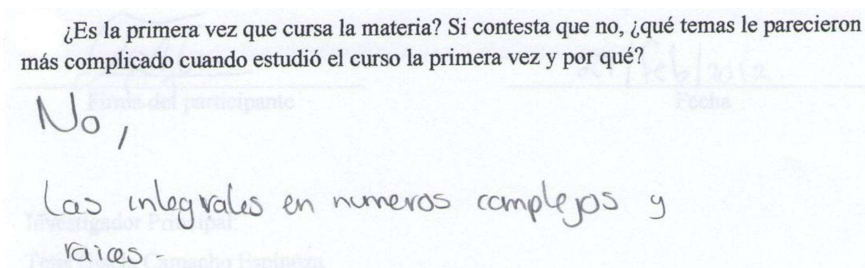


Figura 4.34. Temas complicados para un estudiante

Clasificación de las respuestas al cuestionario aplicado a estudiantes de cuarto semestre del CCH Vallejo de la UNAM

El cuestionario se aplicó a un grupo de 34 estudiantes de cuarto semestre del CCH Vallejo. El estudiante que entregó primero el cuestionario lo contestó en 35 minutos, el último tardó 50 minutos. Los participantes estudiaban por segunda vez la materia de matemáticas III (una asignatura que se estudia en el tercer semestre) en un curso que formó parte del programa de acreditación inmediata (PAI), que tiene la finalidad de apoyar a los estudiantes que en su semestre anterior reprobaron sólo una materia. Un curso normal de matemáticas III consta de 80 horas de clase, un curso PAI consta de 40 horas. Está estipulado que el profesor debe cubrir todos los temas del programa de estudios.

Algunos propósitos del programa de estudios de la asignatura de matemáticas III que aparecen en los programas de estudios del CCH Vallejo son los siguientes.

> Al finalizar el tercer curso de matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:
>
> – Reconoce que se incrementan las posibilidades de análisis y aplicación de la Geometría Euclidiana, al incorporar al estudio de los objetos y relaciones geométricas la representación y los procedimientos del álgebra.
>
> – Dada una ecuación con dos variables, lineal o cuadrática, identifica de qué tipo de “curva” se trata y obtiene información sobre sus elementos.
>
> – Avanza en el concepto de sistema de ecuaciones y su resolución, al incorporar ecuaciones cuadráticas o un mayor número de ecuaciones e incógnitas. (Colegio de Ciencias y Humanidades UNAM, 2003)

Por otra parte, en la unidad 4 (Elipse, circunferencia y sus ecuaciones cartesianas) del programa de estudios se plantean como propósitos:

> Reafirmar el método analítico al obtener las ecuaciones de la elipse y la circunferencia y avanzar en el reconocimiento de formas y estructuras, en la formulación de conjeturas y en la resolución analítica de problemas de corte euclidiano.

Se mencionan como aprendizajes los siguientes puntos.

> – Utilizando la ecuación ordinaria de la elipse, [el estudiante] obtiene las otras formas.
>
> – [El estudiante] transita de la ecuación general de la elipse a la ecuación ordinaria y viceversa. Para ello, aplica el método de completar cuadrados.

– [El estudiante] determina los elementos esenciales de una elipse, a partir de su ecuación dada en la forma ordinaria o general, y los utiliza para bosquejar su gráfica. (Colegio de Ciencias y Humanidades UNAM, 2003)

Se plantean los mismos aprendizajes respecto a la circunferencia. Por otra parte, la unidad 5 (La parábola y su ecuación cartesiana) tiene los siguientes propósitos.

> Consolidar el manejo del método analítico a través del estudio de la ecuación de la parábola. Avanzar en el reconocimiento de formas, estructuras y procedimientos, al resolver diversos problemas que involucren tanto a la parábola como a otros lugares geométricos ya vistos.

Se mencionan como aprendizajes los siguientes:

– [El estudiante] relaciona lo que estudió para funciones cuadráticas respecto al papel de los parámetros dentro del comportamiento de la gráfica de la parábola vertical.

– [El estudiante] utiliza esto último para analizar la relación entre los parámetros y la gráfica de las parábolas horizontales.

– [El estudiante] infiere que para transitar de la ecuación general de la parábola a la ecuación ordinaria, requiere, como en el caso de la elipse y la circunferencia, aplicar el método de completar cuadrados que ya conoce. Se ejercitará al respecto.

– [El estudiante] valora ventajas y desventajas de cada una de las formas, ordinaria o general, en la graficación y análisis de esta curva. (Colegio de Ciencias y Humanidades UNAM, 2003)

Para cumplir con estos objetivos, en el programa de estudios se concede importancia relevante al manejo de sistemas de ecuaciones lineales así como a las ecuaciones de segundo grado. El estudio de los números complejos no aparece como un aprendizaje en el programa de estudios de la asignatura matemáticas III; sin embargo, la profesora consideró que para trabajar adecuadamente las ecuaciones cuadráticas se necesita conocer y manejar de manera apropiada los números complejos, pues por medio de dichas ecuaciones se puede bosquejar la gráfica de cualquier cónica y determinar sus intersecciones con el eje X o, en su defecto, puede explicarse por qué tales intersecciones no existen.

Los números complejos se señalan en el programa de estudios de la materia obligatoria de matemáticas I. Aparecen en la unidad V, titulada “Ecuaciones cuadráticas”. Como parte de los aprendizajes que el estudiante debe obtener se lee lo siguiente.

> En relación con la actividad de resolución de problemas, el alumno:
>
> – Comprende que cuando en el radical se obtiene un número negativo, no existe ningún número real que satisfaga esta condición, por lo que se requiere entrar al terreno de otro tipo de números llamados complejos que se forman a partir del número $i = \sqrt{-1}$ y son de la forma $a + bi$.
>
> – Calcula el valor del Discriminante $b^2 - 4ac$ para conocer la naturaleza y el número de soluciones distintas. (Colegio de Ciencias y Humanidades UNAM, 2003)

Sin embargo, muchos estudiantes que cursaban matemáticas III nunca habían estudiado los números complejos, a pesar de ser un tema señalado en el curso de matemáticas I. La profesora del curso invirtió 5 horas de clase en el tema de los números complejos. El propósito de estudiarlos fue que los estudiantes comprendieran que si la gráfica de una cónica cualquiera no se interseca con el eje de las X entonces las raíces del polinomio que representa dicha curva son números imaginarios.

La profesora comenzó la exposición del tema preguntando: “¿Los fantasmas existen?” Se refirió al surgimiento de los números complejos como entidades matemáticas necesarias para resolver aquellas ecuaciones cuadráticas ($ax^2 + bx + c = 0$) cuyo discriminante ($b^2 - 4ac$) es menor que 0. Comentó que durante siglos se consideró que las raíces cuadradas de los números negativos no existían, pero hubo necesidad de definirlas matemáticamente para resolver algunas ecuaciones. Con este razonamiento en mente afirmó que un fantasma existe o no en virtud de la definición que se tenga de él.

Partiendo de que todo polinomio de grado 2, es decir, de la forma $x^2 + bx + c$, puede representarse como una parábola en el plano cartesiano, la profesora explicó a los estudiantes que las intersecciones de la curva con el eje X se obtienen igualando el polinomio con 0, es decir, resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$. Dedujo la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado de la siguiente manera. Dado $ax^2 + bx + c = 0$ se tiene que:

$$(ax^2 + bx) + c = 0$$

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2\right] - a\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - c$$

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = \frac{ab^2}{4a^2} - c$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Así, si el discriminante $b^2 - 4ac < 0$ se tendrá que la parábola no se interseca con el eje X y se dirá que las raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$ son complejas. La profesora definió el conjunto de los números complejos como $\boldsymbol{C} = \{a + bi \mid i = \sqrt{-1} \text{ y } a, b \in R\}$. De este modo, presentó el número i como $i = \sqrt{-1}$. Ejemplificó la adición, la multiplicación y la división del mismo modo en que se presenta en los libros de texto. También representó a los números complejos como vectores en el plano complejo. Explicó la suma y la multiplicación de números complejos de manera geométrica utilizando la representación $z = r\,(cos\theta + i\, sen\theta)$. Sin embargo, cuando se cuestionó a los estudiantes sobre la ubicación de i en el plano ellos señalaron que i se ubicaba en la parte negativa del eje Y ya que i era un número negativo. Otro estudiante afirmó que i no tenía representación, uno más dijo que i podía ubicarse en cualquier punto del eje Y. Otro estudiante preguntó: "¿Los números imaginarios son los números negativos?" Así, la definición de i no fue suficiente para que los estudiantes comprendieran el tipo de entidad matemática que operaban o que trataban de representar en el plano complejo, el cual distinguían del plano cartesiano.

Las preguntas del cuestionario aplicado a este grupo fueron las siguientes.

1.- ¿Qué es un número complejo?

2.- ¿Cómo se representa un número complejo?

3.- ¿Qué es un número imaginario?

4.- ¿Qué significa el símbolo *i*?

a) Un punto del plano

b) No sé

c) $\sqrt{-1}$

d) Otra (Explica):

5.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$?

6.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 – 2x + 2 = 0$?

Enseguida se presenta una clasificación detallada de las respuestas de los estudiantes del CCH Vallejo a cada pregunta. Esta clasificación será útil para analizar detalladamente parte de su conceptuación sobre los números complejos, así como para identificar algunas de las dificultades en su comprensión.

Las respuestas se clasificaron en diferentes tipos, cada uno representa la idea central de la respuesta. En algunas respuestas se identificaron dos o más concepciones diferentes de los números complejos, por lo que caen en más de una clasificación. Los tipos de respuesta se ordenaron de mayor a menor número de estudiantes en todas las clasificaciones.

Cuadro 4.22. Clasificación de respuestas a la pregunta 1: *¿Qué es un número complejo?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Es la suma de un número real y uno imaginario	16
2. – Es la suma de un número natural y uno imaginario	4
3. – Respuesta que no aporta ninguna información	4
4. – No respondió	3
5. – Es un par ordenado de tipo (x, y)	2
6. – Es un número imaginario	2
7. – Es un número negativo	2
8. – Se obtienen de las raíces cuadradas de los números negativos	1
9. – “Son todos los números: reales, imaginarios, racionales e irracionales”	1
10. – “Es el inverso de un número real”	1
11. – “Es cualquier número que no sea imaginario”	1
12. – “Los números complejos constituyen un cuerpo”	1
13. – “Es aquel con el que pueden resolverse ecuaciones complejas sin usar fracciones”	1
14. – “Se ocupan en área como la ingeniería”	1

En las respuestas de tipo 1 sobresalen las siguientes. “Los números complejos son los que están constituidos por números reales y números imaginarios, los números imaginarios [están] representados con la *i* ”; obsérvese que el estudiante afirmó que con *i* se representa a todos los números imaginarios. Otra estudiante escribió: “Es la unión de uno real con uno imaginario, $1i$. La maestra del PAI un día nos contó un chascarrillo de un niño que le pregunta a su madre sobre su existencia y ella le respondió que era un niño complejo hecho de una madre real con padre imaginario”; nótese que la concepción del estudiante está relacionada con el comentario de la profesora. En la respuesta “Es un número real mas una parte imaginaria [o] el múltiplo real de la imaginaria”, el estudiante no tiene claridad respecto a la parte imaginaria de un número complejo; cuando escribió “el múltiplo real de la imaginaria” implícitamente se refiere a un múltiplo de *i*, así, para él *i* representa la parte imaginaria de un número complejo. Otra respuesta fue la siguiente.

> Los números complejos son aquellos que están conformados por números reales y números imaginarios utilizando el símbolo *i* en algunos números. Por lo tanto los números complejos son un real + [más] un imaginario + [más] el múltiplo real del imaginario.

Nótese que el estudiante escribió sobre el múltiplo real del imaginario, no es claro qué es para él un número imaginario. Una respuesta similar fue: "Un número real más uno imaginario, múltiplo real más el imaginario". Otro estudiante contestó lo siguiente.

> Es el número que se representa en un plano cartesiano, el cual tiene un valor real e imaginario al mismo tiempo, regularmente se usa para dar un valor cuando los números reales no dan respuesta alguna. En clase lo usamos cuando veíamos el plano cartesiano.

En esta respuesta el estudiante mostró más de una concepción de los números complejos, pero para fines de las respuestas de tipo 1 nótese que concebía a los números complejos como aquellos que tienen un valor real e imaginario al mismo tiempo, así, no es claro si para él un número real era un número complejo o no.

De todos los estudiantes que dieron repuestas de tipo 1, sólo 3 mencionaron a i en ellas. Uno de ellos se refirió a i como el símbolo que representa a todos los números imaginarios, los otros dos sólo lo utilizaron para ejemplificar a los números complejos escribiendo $1i$ y $5i$.

Respecto a las 3 respuestas de tipo 5 (Es un par ordenado de tipo (x, y)), un estudiante contestó de la siguiente manera: "Son aquellos como (x, y), uno debe ser imaginario y otro real". Otra respuesta fue: "Es un número que lleva un número natural y un número imaginario", el estudiante ilustró su respuesta con el ejemplo $(2, \sqrt{-3})$ como se muestra en la figura 4.35.

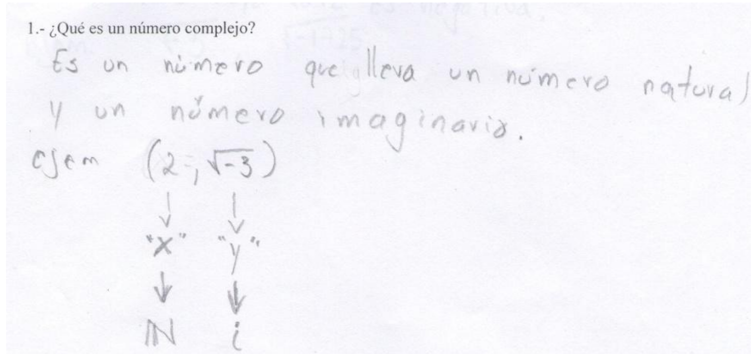


Figura 4.35. Los números complejos como pares ordenados

La primera respuesta también fue clasificada como tipo 1 y la segunda fue clasificada como tipo 2. Aunque en la primera respuesta solamente se considera la primera entrada como un número real y en la segunda respuesta la primera entrada se toma como un número natural, mientras que en ambas respuestas la segunda entrada se considera un número imaginario, se nombró a este tipo de respuesta, “Es un par ordenado de tipo (x, y)”, teniendo en cuenta que ambos estudiantes utilizaron la estructura de par ordenado con sus respectivas limitantes para referirse a un número complejo.

En esta clasificación se contaron 40 respuestas en el cuadro 4.20. Seis respuestas se ubicaron en 2 tipos diferentes de la clasificación. Así, se cuentan en total 40 respuestas aunque sólo participaron 34 estudiantes.

Cuadro 4.23. Clasificación de respuestas a la pregunta 2: *¿Cómo se representa un número complejo?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Un caso particular de $a + bi$, por ejemplo 8 + 7 i	14
2. – Respuestas sin coherencia con los contenidos matemáticos o ambiguas	9
3. – Con el símbolo ***C***	6
4. – Con un punto en el plano	5
5. – No respondió	3
6. – Con un par ordenado de la forma (x, y) donde x es real y y es imaginario	2
7. – Con una sucesión particular de números, por ejemplo 0.11, 0.2, 0.3, 0.4,…	2

En las respuestas de tipo 1[Un caso particular de la forma $a + bi$, por ejemplo, $8 + 7i$] sobresalen las siguientes. "$(x + 2i) + (x - 3i) = 2x - i$"; donde el estudiante utilizó la variable x para representar la parte real de los números complejos y utilizó valores concretos para las partes imaginarias. De manera similar otro estudiante escribió: "$(a + i)(c + i)$". Otro estudiante respondió: "Los números complejos se representan de la siguiente manera: $5 + \sqrt{-1} = x$", una respuesta similar fue: "$2 + \sqrt{-1}$", estos estudiantes no utilizaron el símbolo i en sus representaciones. Otro estudiante respondió: "$8 + 7i$ donde i representa el número imaginario"; nótese que para este estudiante sólo el número i representa un número imaginario, no consideró al número completo $7i$. Otra respuesta fue: "Se indica con la letra i"; no es claro si este estudiante distinguía que todos los números imaginarios son complejos así como todos los números reales, o si su concepción de los números complejos se limitaba a aquellos cuya representación requiere del símbolo i. En este tenor, otro estudiante contestó: "Un número cualquiera acompañado por i, ejemplos: $26i$, $32i$, pero si sólo hay i no significa que no sea un complejo, es como si estuviera acompañado de un 1". Otro caso fue "$1i$"; el estudiante señaló que 1 es un número real mientras que i es un número imaginario como se observa en la figura 4.36.

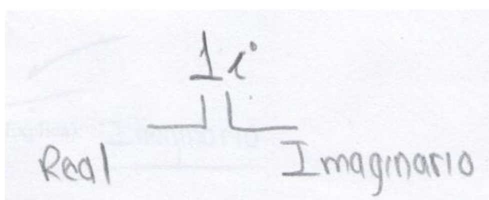


Figura 4.36. Representación del número complejo i como un caso particular de la forma $a + bi$

Otra repuesta fue: "[Se representan con la letra] C [pero también] pueden ser representados en un plano de complejos o por un número imaginario así como $\sqrt{-1}$". Este estudiante no utilizó explícitamente el número i, pero indicó que $\sqrt{-1}$ es un número imaginario que pertenece a los números complejos. Otro estudiante especificó: "Estos se representan con la raíz de –1 que tiene como valor –1 y se pone con el símbolo i". Otra respuesta sobresaliente fue: "Se representa colocando la parte real al principio seguida de la parte imaginaria por lo general representada con la letra *i* ”. Algo que sobresale en estas respuestas es que los estudiantes empleaban el símbolo *i* como un identificador de los números imaginarios, pero muy pocos lo relacionaban con la unidad imaginaria o con $\sqrt{-1}$. Durante la instrucción, cuando la profesora representó algunos números complejos en el plano, para los estudiantes no fue fácil localizar el número *i*, incluso les resultó poco natural ubicarlo en el eje imaginario a una unidad de distancia del 0.

Tres respuestas fueron clasificadas en 2 tipos diferentes y 2 respuestas cayeron en 3 tipos diferentes. Así, en el cuadro 4.23 se cuentan 41 respuestas aunque sólo 34 estudiantes contestaron el cuestionario.

Cuadro 4.24. Clasificación de respuestas a la pregunta 3: *¿Qué es un número imaginario?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Número que se obtiene de las raíces cuadradas de los números negativos	14
2. – Número que no existe	9
3. – Número que da solución a ecuaciones que parecen no tenerla	6
4. – Número complejo con parte real igual a cero	6
5. – Respuestas incoherentes con el contenido matemático	5
6. – Un punto en el plano	2
7. – No contestó	1

En las respuestas de tipo 1 [Número que se obtiene de las raíces cuadradas de los números negativos] sobresalen las siguientes: “Es cuando […] debe ponerse un número negativo dentro de esta [se refiere al símbolo de raíz cuadrada], se le llama número imaginario, ya que no es posible hacer una raíz con números negativos y se representa con una *i*”. Nótese que el estudiante afirmó que no es posible obtener las raíces cuadradas de los números negativos, y habló de ellas como convenciones útiles. Otra respuesta que destaca es la siguiente: “Los números imaginarios son aquellos que no son reales, por ejemplo, las raíces negativas, tal es el caso de $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-5}$, etc. Son todas las raíces [cuadradas de las cantidades] negativas ya que en una ecuación si te llega a salir una raíz [de una cantidad] negativa ya no tiene solución real”. Para este estudiante los números imaginarios son todos aquellos que no son reales, no considera que existen números complejos que no pertenecen a los números imaginarios. Otro estudiante escribió: “Está representado así ‘i’, lo que es igual a $\sqrt{-1}$, y son los números negativos adentro de una raíz, para los que no hay solución”. Se observa que el estudiante utilizó *i* únicamente como símbolo, y no hizo referencia a un significado; lo asoció como una manera de identificar a un número convenientemente definido; esta idea se refuerza cuando se refirio a las raíces cuadradas de los números negativos como ecuaciones algebraicas sin solución. Otro estudiante que tenía la misma concepción escribió: “Cuando en una raíz cuadrada no se encuentra solución o el número es negativo se dice que éste es imaginario”. Otro estudiante que exhibió conflictos claros con la representación de los números imaginarios en el plano complejo, así como con el significado de *i*, escribió: “Por ejemplo, en una recta nos dan números negativos como en $\sqrt{-4}$, entonces se pone la *i* donde $i = \sqrt{-1}$”.

En las respuestas de tipo 2 [Número que no existe] destacan las siguientes respuestas: “Es un número que no existe, no tiene raíz cuadrada como por ejemplo el –1. $\sqrt{-1}$ no tiene, así que se dice que es un número imaginario porque los números negativos no pueden tener raíz cuadrada. (+)(+) = +, (–)(–) = +”. Este estudiante tenía una mezcla de concepciones; por una parte, afirmó que los números negativos no existen y por otra los concebía como una convención matemática que se le había impuesto. Otro estudiante anotó: “Son aquellos números que matemáticamente no existen o no son reales y no es posible cuantificarlos”; este estudiante consideraba que un número era una entidad matemática que servía para cuantificar algo; luego, si los números imaginarios no cuantifican nada entonces no existen. Otro estudiante que tenía conflictos con la inexistencia de los números imaginarios lo expresó de la siguiente manera: “Es aquel número que tiene una parte ‘no real’ y otra real, la real es igual a cero. Es aquel que para la vida cotidiana no existe, como decir ‘menos un metro de azulejos’ no lo puedes hacer. O como en las gráficas, una coordenada que no se pueda poner en nuestra gráfica”. El estudiante no tenía una representación geométrica clara de los números imaginarios y asociaba su inexistencia con la imposibilidad de cuantificar algo tangible con ellos; para él los números naturales, por ejemplo, existen porque con ellos se pueden cuantificar cosas de la vida cotidiana. Otro estudiante escribió: “Es un número que aparentemente no existe, por ejemplo, $\sqrt{-1}$ que en números reales no existe porque no hay raíces [cuadradas de cantidades] negativas"; este estudiante intentó convencerse de la existencia de los números imaginarios por acto de fe, utilizó las palabras "aparentemente no existe" y después dio argumentos para afirmar su inexistencia diciendo que las raíces cuadradas de los números negativos no existen.

En las respuestas de tipo 3 [Número que da solución a ecuaciones que parecen no tenerla] sobresalen las siguientes: "…a través de éste pueden sustituirse o colocarse valores que sean útiles para resolver alguna situación algebraica… no es necesario ubicarlo en algún espacio ya que es sólo de ayuda, es imaginario". Este estudiante concibió a los números imaginarios como herramientas que le ayudan a resolver ecuaciones, no hay otro tipo de estructuras algebraicas a las que pudiera referirse a causa de la instrucción que había recibido en sus estudios previos. Destaca que le era imposible imaginar una representación geométrica de ellos. Otro estudiante escribió: "Es un número que se usa en un resultado alterno o complementario para alguna ecuación. Es como si estuviera pero no lo viéramos". Este estudiante también consideró a los números imaginarios como una herramienta útil para resolver ecuaciones, aunque no tenía algún referente geométrico que le permitiera representarlas; de igual modo, no tenía un referente geométrico que le ayudara a comprender qué es un número imaginario. Otra respuesta digna de mencionarse fue: "Son aquellos números que matemáticamente no existen o no son reales y no es posible cuantificarlos". Se observa, una vez más, que este estudiante asoció la razón de ser de un número a la cuantificación, sobresale que el estudiante mencionó que los números imaginarios no existen matemáticamente.

En las respuestas de tipo 4 [Número complejo con parte real igual a cero] no hay comentarios que hacer. Como ejemplo de las respuestas de tipo 5 [Respuestas incoherentes con el contenido matemático] está: "Defino números imaginarios aquellos que acompañan a una incógnita, por ejemplo x, lo acompaña un número que no se escribe, pues x es una unidad".

En las respuestas de tipo 6 [Un punto en el plano] destaca: "Es aquel que se representa por el símbolo i y nos indica un punto en el plano que se ubica de manera negativa". El estudiante asocia i con cualquier número imaginario pero no es consciente de su significado matemático, además, no tiene idea de la ubicación de los números imaginarios en el plano complejo.

En esta clasificación 7 respuestas se ubicaron en 2 tipos diferentes y 1 respuesta se ubicó en 3 tipos diferentes. Así, en el cuadro 4.24 se cuentan 43 respuestas aunque sólo 34 estudiantes contestaron el cuestionario.

Cuadro 4.25. Clasificación de respuestas a la pregunta 4: *¿Qué denota i?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – $\sqrt{-1}$	24
2. – Otra (Explica)	5
3. – Un punto en el plano	3
4. – No sé	1
5. – No respondió	1

En las respuestas de tipo 1 destaca que un estudiante escribió que $\sqrt{-1} = -1$. En las respuestas de tipo 2 [Otra (Explica)] se distinguen las siguientes:

> Significa número imaginario, que de alguna forma pudo ser el inciso c) $\left[\sqrt{-1}\right]$ pero esa es sólo la representación de éste, la "*i* " significa que el número no es real y se utiliza para poder resolver la operación en la cual necesariamente se tuvo que utilizar "*i* "

El estudiante entendía *i* como un símbolo que le ayudaba a identificar a los números imaginarios y a operar con ellos, aunque no supiera lo que realmente ocurría al ejecutar dichas operaciones. No estaba seguro de su verdadero significado, esto lo manifestó al escribir: "pudo ser el inciso c) $\left[\sqrt{-1}\right]$". También es claro que tenía una confusión entre números complejos, números imaginarios y números no reales, ya que *i* es un número imaginario particular (la unidad imaginaria) y los números no reales son los números complejos de la forma $a + bi$ con $b \neq 0$, los números imaginarios forman parte de este conjunto pero existen números $a + bi$ con a y b distintos de cero que no son números imaginarios y tampoco son números reales.

Otras respuestas que se relacionan con la concepción de *i* únicamente como símbolo son: "Es lo que acompaña al número complejo y ayuda a identificarlos", "Ese símbolo es para representar un número imaginario". Como puede observarse, el significado más inmediato que los estudiantes atribuyen a *i* es de carácter simbólico; *i* les permite distinguir a un número imaginario de un número que no lo es. Incluso uno de ellos afirmó que para representar un número complejo necesariamente se debe utilizar el símbolo i; no consideró que los números reales sean números complejos.

En las respuestas de tipo 3 [Un punto en el plano] ninguno de los estudiantes especificó qué punto del plano representaba a i. No hay observaciones respecto a las respuestas de los tipos 4 [No sé] y 5 [No respondió].

Cuadro 4.26. Clasificación de respuestas a la pregunta 5: *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 + 1 = 0$*?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Respuesta errónea	13
2. – No contestó	12
3. – $x = \sqrt{-1}$	4
4. – $x = i$	3
5. – $x = \pm\sqrt{-1}$	2

En las respuestas de tipo 1 o respuestas erróneas, los estudiantes no descompusieron en factores de manera adecuada la expresión cuadrática propuesta, no utilizaron adecuadamente la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado, no despejaron bien o no supieron operar con las raíces cuadradas de los números negativos. A continuación se muestran algunas de estas respuestas.

Un estudiante descompuso en factores de manera equivocada la expresión $x^2 + 1 = 0$, como se muestra en la figura 4.37. Nótese que el estudiante utilizó el símbolo $\emptyset$ en lugar de 0. El estudiante no pudo resolver la ecuación porque no fue capaz de reproducir un procedimiento algebraico.

$$(x+1)(x+1)=\emptyset$$
$$x^2+1=\emptyset$$
$$x=0+1$$
$$x=1$$

Figura 4.37. Procedimiento de descomposición en factores para encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$

Otro estudiante realizó dos despejes de manera equivocada y llegó a una solución incorrecta. Su desarrollo se muestra en la figura 4.38. Nótese que despejó x de la expresión $x^2 = 1$ dividiendo el segundo miembro entre 2.

$$x^2=0+1$$
$$x^2=1$$
$$x=\frac{1}{2}$$

Figura 4.38 Procedimiento de despeje para encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$

En otra respuesta un estudiante no pudo aplicar de manera correcta la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado, como se muestra en la Figura 4.39.

$$x^2+1=0$$
$a=1 \quad b=1 \quad c=0 \rightarrow$ Valores
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow$ Formula
Se sustituyen los valores:
$$x=\frac{-(1)\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(0)}}{2(1)}$$
Resolvemos
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-0}}{2}$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1}}{2}$$
$$x=\frac{-1\pm 1}{2}$$
$$x_1=\frac{-1+1}{2}=\frac{0}{2}$$
$$x_2=\frac{-1-1}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$
Las soluciones son:
$x_1=\frac{0}{2}$ y $x_2=-1$

Figura 4.39 Aplicación incorrecta de la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado

En la figura 4.40 se muestra el procedimiento que utilizó otro estudiante para resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$; obsérvese que el estudiante escribió en uno de los pasos $x = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2}$ y después concluyó que $x_1 = \frac{-6i}{2}$ y $x_2 = \frac{6i}{2}$. No dedujo que $\sqrt{-4} = 2i$.

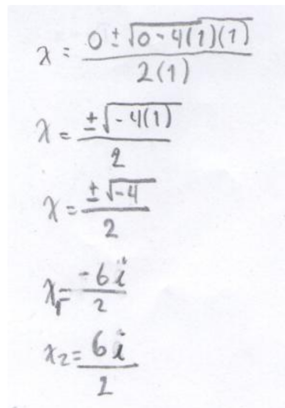


Figura 4.40 Procedimiento en el que el estudiante deduce que $x = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm 6}{2}i$

Finalmente, en la figura 4.41, se muestra el procedimiento que siguió un estudiante para resolver la ecuación. En el paso señalado en la ilustración, el estudiante escribió $x = \frac{0\pm\sqrt{-4}}{2}$. Luego escribió $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_1 = -\frac{1}{2}$. No relacionó $\sqrt{-4}$ con los números imaginarios.

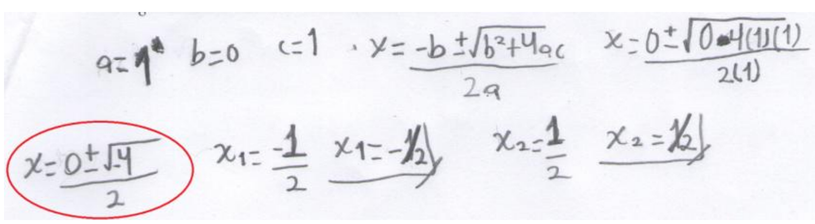


Figura 4.41. Deducciones equivocadas respecto a $x = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2}$

Por otra parte, un estudiante que dio respuesta de tipo 3 [$x = \sqrt{-1}$] despejó x de la ecuación para obtener el resultado $x = \sqrt{-1}$. En su respuesta agregó lo siguiente.

> Tenemos como resultado un número imaginario porque es negativo [la raíz cuadrada de un número negativo], ya que como hemos dicho anteriormente no

existe un número ya sea positivo o negativo que al multiplicarlo [consigo mismo] te de un negativo. (+)(+) = +, (−)(−) = +.

Otro estudiante que dio una respuesta de este tipo como resultado de despejar *x* de la ecuación agregó: “La raíz de –1 no existe, son números imaginarios”. Ambos estudiantes concebían a los números imaginarios como números que no existen; los utilizaron como objetos matemáticos que pueden manipular para resolver una ecuación cuando los recursos que conocían les impedían hacerlo. De aquí que no pudieran relacionar $\sqrt{-1}$ con *i*, pues no era claro qué tipo de entidad es *i* ni lo que representa.

Los tres estudiantes que dieron respuestas de tipo 4 [$x = i$] despejaron *x* de la ecuación. En la figura 4.42 se muestra una de las respuestas; nótese que tanto este estudiante como los demás que llegaron a este resultado no consideraron $x = -\sqrt{-1} = -i$ como solución de la ecuación.

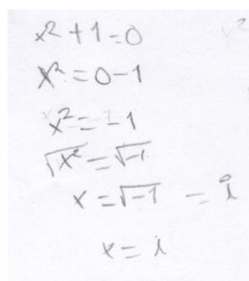


Figura 4.42. Procedimiento de despeje para la resolución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$

Ahora observemos las dos respuestas de tipo 5 [$x = \pm\sqrt{-1}$]. Ambos estudiantes despejaron *x* en la ecuación, como se muestra en la figura 4.43. Sin embargo, no fueron capaces de identificar $\sqrt{-1}$ con *i*. Evidencia de ello son sus comentarios respecto a sus soluciones: “Los resultados o las soluciones son números imaginarios”, no especificó a qué número imaginario en particular se refería. “Las diferentes soluciones se pueden dar con números reales o imaginarios o números complejos”, el estudiante no tenía idea de qué tipo de número era el que encontró como solución de la ecuación. Ambos estudiantes mostraron tener dominio aritmético de los números imaginarios, pero no comprendían su significado.

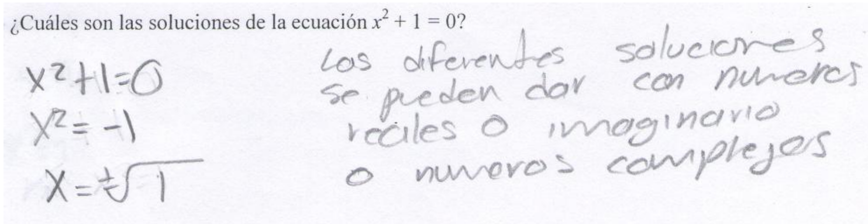


Figura 4.43. El estudiante no identifica $x = \pm\sqrt{-1}$ con $\pm i$

Por otra parte, como se indica en el cuadro 4.26.1, se detectaron 3 procedimientos diferentes que utilizaron los estudiantes para dar solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Cuadro 4.26.1. Procedimientos de los estudiantes para resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Despeje	17
2. – Fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado	3
3. – Descomposición en factores	2

Cuadro 4.27. Clasificación de respuestas a la pregunta 6: *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 - 2x + 2 = 0$*?*

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – No contestó	19
2. – Respuesta errónea	13
3. – $x = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$	2

La clasificación 1 del cuadro 6 incluye las 6 respuestas inconclusas que se encontraron. Un estudiante aclaró que no recordaba cómo resolver la ecuación. Otro escribió que no recordaba cómo descomponer en factores la expresión algebraica propuesta, 2 estudiantes más intentaron realizar ese procedimiento pero no lograron llegar a una respuesta. Un estudiante intentó despejar x sin descomponer en factores el primer miembro de la ecuación pero no lo logró. Otro estudiante aplicó de manera equivocada la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas dejando el procedimiento a medias.

En las respuestas de tipo 2 o respuestas erróneas se detectó que los estudiantes no escribían correctamente la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas, no descomponían en factores de manera adecuada el primer miembro de la ecuación, no lograron operar con las raíces cuadradas de los números negativos o consideraron a dichos números como inexistentes optando por escribirlos como raíces cuadradas de números positivos para poder operar con ellos. A continuación se presentan algunas de sus respuestas.

Un estudiante contestó como se muestra en la figura 4.44. Aplicó de manera errónea la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas; además, cuando obtuvo $x = \frac{-2\pm\sqrt{-6}}{2}$, concluyó que $x_1 = \frac{-2-6i}{2}$ y $x_2 = \frac{-2+6i}{2}$. Nótese que sólo sacó el 6 del radical y agregó i.

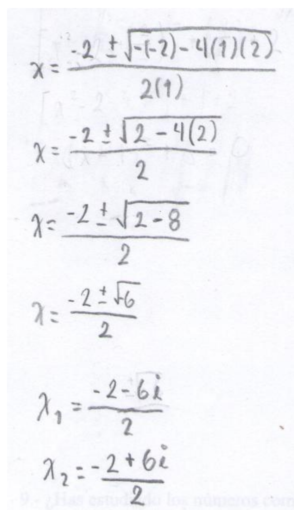


Figura 4.44. Aplicación errónea de la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado para resolver la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$

Otro estudiante que utilizó la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado dio la respuesta que se muestra en la figura 4.45. Obsérvese que realizó las operaciones de manera adecuada, pero cuando apareció en su procedimiento $\sqrt{-4}$ escribió: “Aquí es donde ocurre un problema, éste es un número imaginario, no tiene solución”. El estudiante decidió obtener las raíces cuadradas de 4 en lugar de las raíces cuadradas de – 4 y continuar el procedimiento aritmético para obtener las soluciones de la ecuación propuesta.

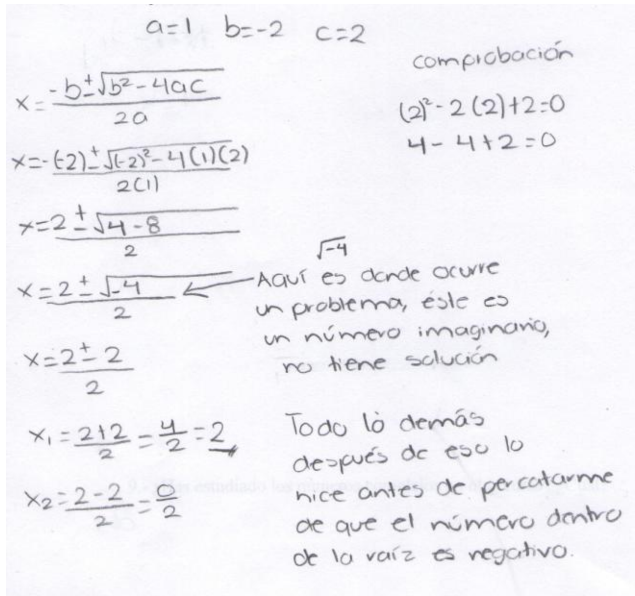


Figura 4.45. El estudiante consideró que la ecuación no tenía solución porque $\sqrt{-4}$ es un número imaginario

Otro estudiante utilizó correctamente la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado como se muestra en la figura 4.46, pero cuando llegó a $x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$, no logró continuar el procedimiento de manera adecuada; escribió $x_1 = \frac{2-(-1)}{2}$ y $x_2 = \frac{2+(-1)}{2}$. El estudiante no comprendió el significado de $\sqrt{-4}$.

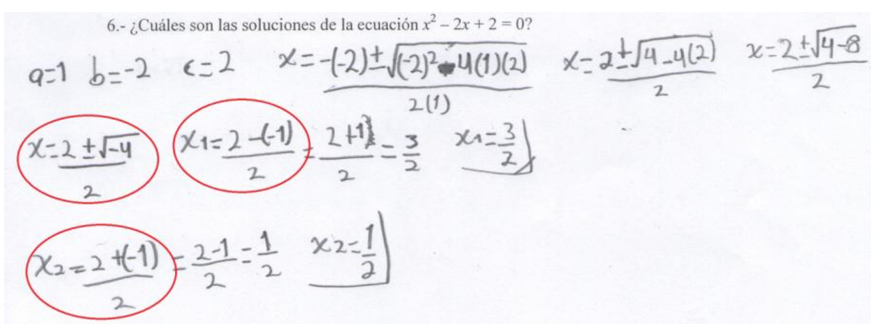


Figura 4.46. El estudiante identifica $\sqrt{-4}$ con –1

En las respuestas de tipo 3 $\left[x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}\right]$ destacan las siguientes. En la figura 4.47 se observa que el estudiante utilizó la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado, pero cuando obtuvo $x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$, agregó como nota: “Si la raíz es negativa no existe”, es decir, para él las raíces cuadradas de los números negativos no existían a pesar de la instrucción que recibió.

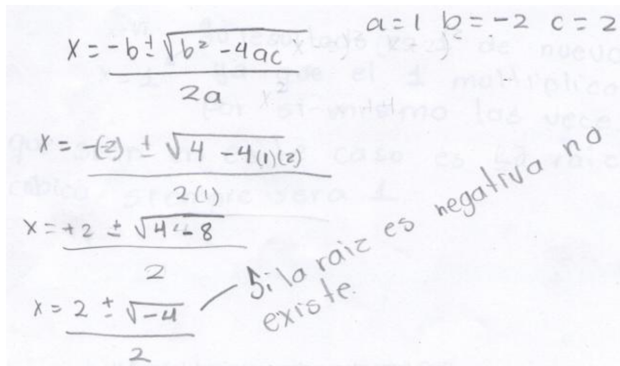
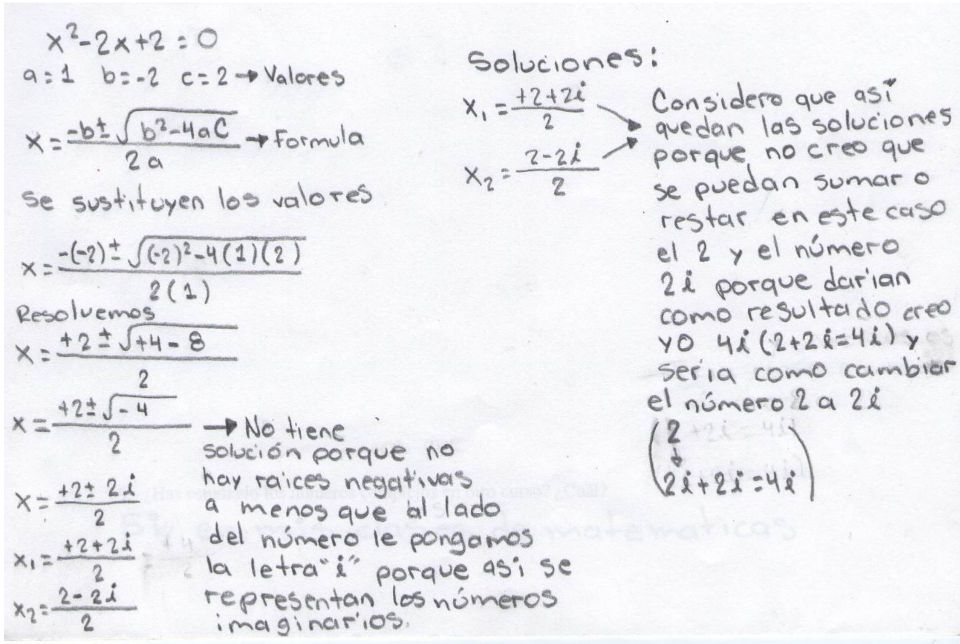


Figura 4.47. El estudiante afirmó que las raíces cuadradas de los números negativos no existen

Otro estudiante respondió como se muestra en la figura 4.24; utilizó la fórmula general de resolución y, cuando obtuvo $x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$, señaló: “No tiene solución porque no hay raíces negativas a menos que al lado del número le pongamos la letra ‘*i* ’ porque así se representan los números imaginarios”. Nótese que el estudiante concebía a *i* como un símbolo que le daba derecho de existencia a un número que consideraba inexistente. Según su modo de resolver la ecuación, *i* le permitía operar con las raíces cuadradas de los números negativos. Por otra parte, este fue el único estudiante que dio su respuesta en términos de *i*; escribió: $x_1 = \frac{2+2i}{2}$ y $x_2 = \frac{2-2i}{2}$.


$x^2 - 2x + 2 = 0$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 2 \rightarrow$ Valores

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4aC}}{2a} \rightarrow$ Formula

Se sustituyen los valores

$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$

Resolvemos

$x = \frac{+2 \pm \sqrt{+4 - 8}}{2}$

$x = \frac{+2 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow$ No tiene solución porque no hay raices negativas a menos que al lado del número le pongamos la letra "i" porque así se representan los números imaginarios.

$x = \frac{+2 \pm 2i}{2}$

$x_1 = \frac{+2+2i}{2}$

$x_2 = \frac{2-2i}{2}$

Soluciones:

$x_1 = \frac{+2+2i}{2}$

$x_2 = \frac{2-2i}{2}$

Considero que así quedan las soluciones porque no creo que se puedan sumar o restar en este caso el 2 y el número $2i$ porque darían como resultado creo yo $4i$ ($2+2i=4i$) y sería como cambiar el número 2 a $2i$

$2i+2i=4i$

Figura 4.24. El estudiante utilizó *i* como un símbolo que le permitía operar con raíces cuadradas de números negativos

En el cuadro 4.27.1 se muestran los 3 procedimientos que emplearon los estudiantes para resolver la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$. También se contaron los procedimientos que utilizaron los seis estudiantes que intentaron resolver la ecuación sin lograrlo.

Cuadro 4.27.1 Procedimientos de los estudiantes para resolver la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$

Tipo de respuesta	Número de estudiantes
1. – Fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado	13
2. – Descomposición en factores	5
3. – Despeje	3

CAPÍTULO V
ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SUPERIOR Y MEDIA SUPERIOR

En este capítulo se presentan los resultados de los análisis de las entrevistas hechas a seis de los estudiantes que contestaron el cuestionario propuesto para esta investigación. Tres (3) estudiantes eran de los grupos de licenciatura; 2 pertenecían al grupo 2 de la materia variable compleja, 1 al grupo 1 de la misma materia. Los tres estudiantes restantes eran del grupo del CCH Vallejo.

A los estudiantes de licenciatura que se seleccionó para ser entrevistados, se les contactó en sus salones de, los profesores no participaron en la selección de los estudiantes. Los criterios de selección se explican en la sección de este capítulo donde se describen los resultados de la entrevista. Estos 3 estudiantes de licenciatura participaron voluntariamente y con mucha disposición. La fecha y la hora de las entrevistas se acordó según la disponibilidad de los estudiantes. Respecto al grupo 1 de licenciatura, se habían considerado 2 estudiantes más para ser entrevistados, por las características de sus respuestas en el cuestionario. Sin embargo, cuando se intentó contactarlos ya habían abandonado el curso de variable compleja. Las entrevistas se realizaron en un salón de la Facultad de Ciencias de la UNAM, estando presentes únicamente la entrevistadora y el entrevistado.

Por otra parte, los 3 estudiantes de educación media superior seleccionados fueron contactados personalmente en su salón de clases. Se les entrevistó el mismo día porque así convenía al desarrollo de sus actividades. El horario fue escogido por ellos. Los criterios de selección de cada estudiante se describen en la sección de este capítulo en que se describen los resultados de la entrevista. Las entrevistas se realizaron en un aula del área de asesorías del CCH Vallejo estando presentes sólo la entrevistadora y el entrevistado. La profesora del grupo observado ayudó a la entrevistadora a conseguir los permisos necesarios para utilizar las instalaciones. La maestra no participó en las entrevistas.

Los 6 estudiantes que colaboraron fueron informados sobre el proyecto de investigación, sobre el cuestionario y la entrevista, y fueron audiograbados con su autorización. Los 6 estudiantes firmaron el consentimiento que aparece en la siguiente página. El fragmento que dice "…identificar y analizar las dificultades de los estudiantes de licenciatura de la Facultad de Ciencias de la UNAM" fue cambiado en el caso de los estudiantes del CCH por "…identificar y analizar las dificultades de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM (plantel Vallejo)".

Consentimiento para la participación en la investigación sobre la conceptuación de los números complejos en el ámbito escolar

El propósito de este estudio de investigación sobre la conceptuación de los números complejos en el ámbito escolar, es identificar y analizar las dificultades de los estudiantes de licenciatura de la Facultad de Ciencias de la UNAM para conceptuar los números complejos así como sus posibles causas.

Su participación en esta entrevista tomará aproximadamente media hora de su tiempo. Se le preguntará acerca de las ideas que expresó respecto a los números complejos en el cuestionario que amablemente contestó anteriormente. Nuestra entrevista será grabada y se transcribirá. Desde la transcripción literal de la entrevista, el investigador analizará la información que proporcione en combinación con información proporcionada por otros participantes como sujetos. La grabación será destruida cuando este estudio esté terminado. Su participación en este estudio será determinante para identificar y analizar algunas dificultades que enfrentan los estudiantes de licenciatura para conceptuar los números complejos. No existen riesgos conocidos asociados con la participación en este estudio.

Su participación en este estudio es completamente voluntaria y es libre de retirarse del estudio en cualquier momento sin penalización alguna por parte del investigador. Todos los datos que proporcione para este estudio serán tratados confidencialmente y utilizados sólo para propósitos de investigación. La información obtenida será presentada en forma resumida en una tesis de maestría. Cualquier cita usada de esta entrevista será reportada con la frase "de acuerdo con uno de los entrevistados". Si tiene cualquier pregunta, ahora o en el futuro, siéntase libre de hacerla.

****

Yo, ____, acepto participar en este estudio de investigación sobre la conceptuación de los números complejos en el ámbito escolar. Se me ha explicado el estudio y mis preguntas fueron respondidas satisfactoriamente. Se me ha dado una descripción de este proyecto y doy mi consentimiento para participar.

________________________________ ________________________________

Firma del participante Fecha

Investigador Principal: Tetis Gisela Camacho Espinoza
Estudiante de maestría en el Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav

Por otra parte y con relación a lo que de aquí en adelante será llamado metáfora, de acuerdo con lo propuesto en el marco teórico de esta investigación, el mecanismo cognitivo por medio del cual lo abstracto es comprendido en términos de lo concreto es llamado *metáfora conceptual*. Las metáforas conceptuales son mecanismos cognitivos fundamentales que proyectan la estructura de inferencias de un dominio fuente sobre un dominio destinatario, es decir, permiten el uso de inferencias fáciles basadas en cuerpos específicos para estructurar inferencias abstractas. En las matemáticas se pueden identificar los siguientes tipos de metáforas:

– *Metáforas fundamentales*. Fundamentan nuestro entendimiento de las ideas matemáticas en términos de la experiencia diaria. En este caso, el dominio destinatario de la metáfora son las matemáticas, pero el dominio fuente está fuera de las matemáticas.
– *Metáforas de enlace*. Son metáforas dentro de las matemáticas mismas que nos permiten conceptuar un dominio matemático en términos de otro dominio matemático. En este caso, ambos dominios del mapeo son matemáticos.

La metáfora tiene un significado literal, pero también tiene un segundo significado que se quiere que el estudiante entienda. Se busca que el alumno estructure su conocimiento sobre determinado concepto matemático a partir de sus conocimientos de otros conceptos matemáticos o no matemáticos; en contra, no se desea que el estudiante asuma que el nuevo concepto matemático que intenta construir es el concepto que evoca la metáfora.

Diremos que una estructura de pensamiento es una metáfora si podemos caracterizar su dominio fuente así como su dominio destinatario y si podemos identificar los mecanismos que permiten apropiarse del nuevo concepto a través del concepto conocido. En el caso de la cognición de los números complejos reconoceremos como metáforas aquellas estructuras de pensamiento de los estudiantes en las que se puede determinar el dominio fuente (dentro o fuera de las matemáticas) así como su correspondencia con el dominio destinatario (los números complejos) y si podemos evidenciar mecanismos que permitan al estudiante apropiarse del concepto de número complejo; es decir, mecanismos que permitan trasladar propiedades de un dominio a otro, o que permitan transponer una serie de características y estructuras de un dominio a otro (asociar segmentos rectilíneos, asociar ángulos, sumar coordenadas, sumar segmentos geométricamente, etc.).

Se debe aclarar que el uso de metáforas es generalmente inconsciente. En este caso las metáforas como forma de apropiación de nuevos conocimientos son ajenas a los estudiantes que participaron en esta investigación; ellos no identifican una metáfora, ni un dominio fuente o uno destinatario, simplemente compartieron sus concepciones con quien realiza esta investigación.

Se diseñó una entrevista semiestructurada para cada uno de los estudiantes de educación superior y media superior.

Análisis de la entrevista de G, estudiante de licenciatura de la asignatura de variable compleja I, grupo 2

La primera entrevista fue diseñada para el estudiante que de aquí en adelante será llamado G. Fue alumno del grupo 2 de la asignatura de variable compleja, cuyas clases siguió quien reporta esta investigación. G es estudiante de la licenciatura en Física y hasta el momento de la entrevista había cursado 90% de sus materias correspondientes a los primeros cinco semestres de su carrera. Era la primera vez que cursaba la materia de variable compleja I, informó que había estudiado los números complejos anteriormente de manera superficial en su curso de Álgebra del primer semestre. No estudió el tema en ningún nivel de estudios previo al de la licenciatura. G fue seleccionado para ser entrevistado porque contestó todas las preguntas del cuestionario según la instrucción que recibió por parte de su profesor durante el curso de variable compleja I; así que se buscaron indicios de cómo conceptuó a los números complejos conforme las clases recibidas. Por otra parte, proporcionó 3 representaciones diferentes de los números complejos, las cuales son susceptibles de interpretación mediante dos metáforas por lo menos; dichas representaciones se explicitan en la entrevista semiestructurada diseñada para G y se presenta a continuación.

1.– En el cuestionario mencionaste que un número complejo es aquel que tiene una parte real y una imaginaria. Utilizaste la representación $z = a + bi$. ¿Cuál es la parte real y cuál es la parte imaginaria en esa representación?

2.– ¿Qué es un número imaginario?

3.– Por favor, explica en qué consiste la representación $z = (a, b)$ de los números complejos.

4.– Por favor, explica la representación $z = cos\theta + i\ sen\theta$ de los números complejos la cual utilizaste en una de las respuestas de tu cuestionario.

5.– Mencionaste 4 posibles representaciones para un número complejo, $z = a + bi$, $z = (a, b)$, $z = cos\theta + i\ sen\theta$ y $e^{i\theta}$. ¿Cualquier número complejo puede representarse utilizando cualquiera de estas cuatro representaciones?

6.– Utilizando la representación $z = (a, b)$, ¿cómo se representa el número i?

7.– ¿Por qué i se ubica en ese punto en el plano complejo?

8.– Utilizando cualesquiera dos de las representaciones de los números complejos que conoces, ¿cómo obtendrías el resultado de $(4 + 2i) + (6 – 3i)$?

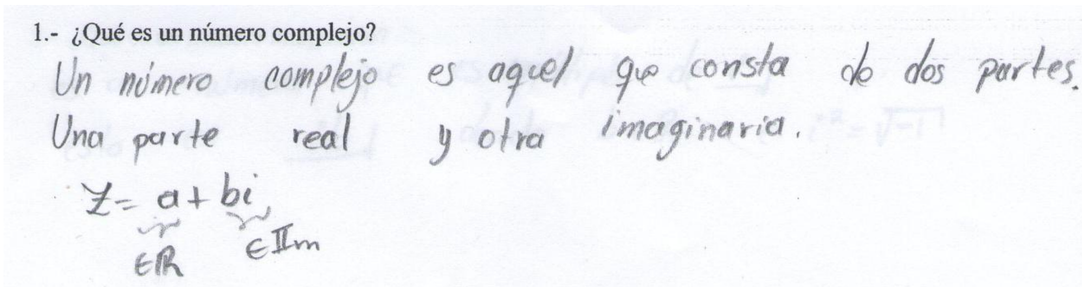
9.– ¿Cómo se resuelve $x = (1 + i)^2$?

No todas las preguntas se formularon de al estudiante como aparecen escritas en este diseño de la entrevista. Sin embargo, se respetó la idea esencial de cada cuestionamiento. Se procuró establecer un ambiente de comodidad y confianza para que el alumno respondiera con honestidad en un diálogo natural. No se presentaron las preguntas por escrito al entrevistado. La investigadora proporcionó lápiz y papel al estudiante para que los utilizara en caso de necesitarlo, en el momento que más conviniera. De cada pregunta de la entrevista semiestructurada se obtuvieron las siguientes observaciones.

Pregunta 1

En el cuestionario mencionaste que un número complejo es aquel que tiene una parte real y una imaginaria. Utilizaste la representación z = a + bi. *¿Cuál es la parte real y cuál es la parte imaginaria en esta representación?*

En el cuestionario y durante la entrevista el estudiante identificó a los números complejos con la representación $z = a + bi$. En el cuestionario el estudiante G anotó $bi \in \mathrm{Im}$ como se muestra en la figura 5.1. En efecto, bi es un número imaginario, pero en la respuesta no es claro cuál es la parte imaginaria del número complejo. En la entrevista reconoció al número *a* como la parte real del número complejo y al número *b* como la parte imaginaria. Esta respuesta se reforzó a lo largo de la conversación.


1.- ¿Qué es un número complejo?

Un número complejo es aquel que consta de dos partes. Una parte real y otra imaginaria.

$z = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{bi}_{\in \mathrm{Im}}$

Figura 5.1. Concepción de G sobre los números complejos.

Vale la pena señalar que varios de los estudiantes de licenciatura que contestaron el cuestionario identificaron la parte imaginaria de un número complejo expresado en la forma $a + bi$ como *bi*, a pesar de que en sus clases los profesores aclararon que la parte imaginaria de un número complejo $z = a + bi$ es *b*.

Ésta fue la primera representación de los números complejos a laque el estudiante aludió; y es una representación de los números complejos que se muestra en los libros de texto de licenciatura revisados para este trabajo de tesis.

Pregunta 2

¿Qué es un número imaginario?

El estudiante respondió: "Para mí, un número imaginario es… este… un número que es múltiplo de *i*, donde *i* es… entre sus representaciones está $\sqrt{-1}$". En el cuestionario contestó: "Es un número que es múltiplo de *i*, esto es *ib*, donde $b \in$ R e $i^2 \in \sqrt{-1}$ [*sic*]".

Nótese que la concepción que este estudiante tiene sobre los números imaginarios se apoya en su concepción del número *i*, al que identifica con $\sqrt{-1}$.

Pregunta 3

Por favor, explica en qué consiste la representación z = (a, b) *de los números complejos.*

En el cuestionario utilizado para esta investigación se pidió al estudiante G que diera un ejemplo de una representación de un número complejo, G escribió: "$z = a + bi$, se puede representar como $z = (a, b)$, como $z = cos\theta + i\ sen\theta$, $e^{i\theta}$". Cuando se le preguntó a G sobre la representación $z = (a, b)$, respondió lo siguiente: "Me estoy refiriendo a una representación que está en un plano complejo, así lo podemos llamar, en donde la coordenada *a* se refiere a la parte real y la coordenada *b* se refiere a la parte imaginaria".

Nótese que el estudiante utilizó la metáfora de enlace *un número complejo es un punto en el plano complejo*. G concibe al plano complejo como un plano de coordenadas rectangulares. Por otra parte, recuérdese que una metáfora de enlace es una metáfora dentro de las matemáticas mismas que permite conceptuar un dominio matemático en términos de otro. El uso de la metáfora se pone de manifiesto cuando dice "… en donde la coordenada *a* se refiere a la parte real y la coordenada *b* se refiere a la parte imaginaria [del número complejo]". Con relación a lo anterior, también explicó: "Sí, es una representación, la parte real está aquí [señala el número *a* que está sobre el eje que nombró eje *Re*, como se muestra en la figura 5.2], y ésta sería la parte imaginaria [señala la coordenada *b* sobre el eje que nombró eje *Im*. No escribe la letra *b*, sólo la señala], y por aquí, pues no sé, está la representación (*a*, *b*).

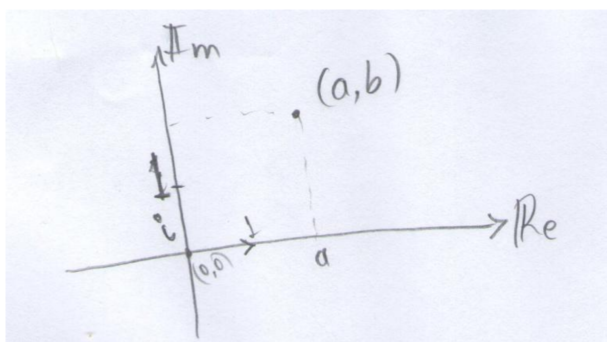


Figura 5.2. Esquema elaborado por G para explicar $z = (a, b)$.

En el cuadro 5.1 se especifican los elementos de la metáfora de enlace *un número complejo es un punto en el plano complejo*, que el estudiante G utilizó para explicar su concepción de un número complejo como un número de la forma $z = (a, b)$.

Cuadro 5.1. Elementos de la metáfora de enlace *un número complejo es un punto en el plano complejo*

Dominio Fuente	Dominio destinatario
Ser un par ordenado (a, b) en el plano complejo	Ser un número complejo
Coordenada a del par ordenado (a, b)	Parte real del número complejo $a + bi$
Coordenada b del par ordenado (a, b)	Parte imaginaria del número complejo $a + bi$
Eje *Re* del plano complejo	Números reales
Eje *Im* del plano complejo	Números imaginarios

Pregunta 4

Por favor, explica la representación z = cosθ + i senθ *de los números complejos que utilizaste en una de las respuestas de tu cuestionario.*

El estudiante respondió: “Sí, pues más que nada esta representación, desde mi punto de vista, la considero útil para representación en coordenadas polares o coordenadas cilíndricas, o si estamos hablando de tres dimensiones, inclusive hasta esféricas”.

Obsérvese que el estudiante concibe que los números complejos pueden utilizarse en cuestiones relacionadas con tres dimensiones. Se le preguntó a G sobre el significado de la representación $z = cos\theta + i\ sen\theta$, como se observa en el siguiente fragmento de la entrevista donde se identifica con la letra I a la investigadora.

I: Y en el otro modelo [$z = cos\theta + i\ sen\theta$], ¿es un punto también pero en coordenadas…?

[G interrumpe antes de que se termine de formular la pregunta]

G: Esteee polares.

I: Polares.

G: Sí.

Para G, las representaciones $z = (a, b)$ y $z = cos\theta + i\ sen\theta$ se refieren a un punto en el plano, aunque en el caso de $z = cos\theta + i\ sen\theta$ el estudiante no hace alusión alguna a la norma del número complejo. En esta primera variante de la representación polar de los números complejos, $z = r\ (cos\theta + i\ sen\theta)$, deben considerarse dos elementos básicos: r, que representa la norma o módulo del número complejo; es decir, la distancia del punto en el plano al origen, y θ, el argumento o ángulo que forman el segmento de recta que une el punto con el origen y el semieje horizontal positivo. El alumno G pasó por alto el módulo r, no habló al respecto en su explicación sobre esta forma polar. G intentó valerse de la metáfora *un número complejo es un punto en el plano con coordenadas polares.* Hasta este punto se rescata que G conceptuaba a los números complejos como puntos en el plano. Los elementos que integran la metáfora se muestran en el cuadro 5.2.

Cuadro 5.2. Elementos de la metáfora de enlace *un número complejo es un punto en el plano con coordenadas polares*

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser un par ordenado (r, θ) en el plano	Ser un número complejo de la forma $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$
Coordenada r del par ordenado (r, θ)	Norma del número complejo $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$
Coordenada θ del par ordenado (r, θ)	Argumento del número complejo $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$
Eje polar del plano	Números reales positivos
Polo	Número complejo 0

Pregunta 5 Mencionaste cuatro posibles representaciones para un número complejo, $z = a + bi$, $z = (a, b)$, $z = cos\theta + i\ sen\theta$ *y* $e^{i\theta}$. *¿Cualquier número complejo puede representarse utilizando cualquiera de estas cuatro representaciones?*

El estudiante G respondió afirmativamente; enseguida se le pidió contestar la pregunta 6.

Pregunta 6

Utilizando la representación z = (a, b) *¿cómo se representa el número* i*?*

En el siguiente fragmento de entrevista, se nota que el estudiante recurre una vez más a la metáfora de que *los puntos del eje Im del plano son los números imaginarios*. Obsérvese que por medio de la metáfora se relacionan diferentes significados que G tiene sobre i. En la figura 5.3 se muestra que señaló el punto (0, 1) como el punto asociado a i, y por consiguiente a $\sqrt{-1}$.

G: Estaría… si aquí tenemos nuestro (0, 0) [marca el punto (0, 0) en el plano complejo que utilizó anteriormente], este es nuestro imaginario [señala el eje que llamó *Im*], el *i* estaría aquí [se señala con una flecha en la figura 3], que estaría a 1 más bien.

I: Ya. O sea que está en el eje imaginario a la altura 1¿no?

G: Sí, ajá. Mmm con 0 real.

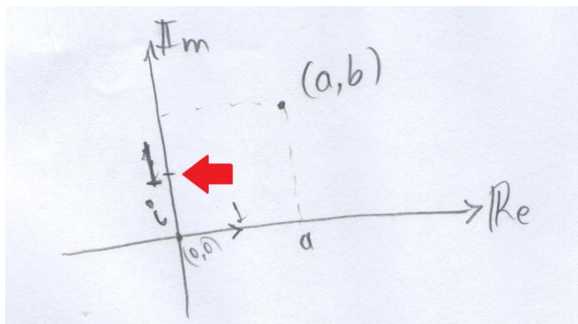


Figura 5.3. Representación de *i* en el plano complejo según G.

Cuadro 5.3. Metáfora *el punto* (0, 1) *del plano complejo es i* = $\sqrt{-1}$

Dominio fuente	Dominio destinatario
El punto (0, 1) en el plano complejo	El número *i* = $\sqrt{-1}$

Pregunta 7

¿Por qué i se ubica en ese punto en el plano complejo?

Una vez que G identificó (0, 1) como el número *i*, se le preguntó: ¿Por qué *i* se ubica en ese punto en el plano complejo? El siguiente extracto de la entrevista da cuenta de la respuesta del estudiante.

G: ¿Por qué se ubica ahí?... Ahhhh… Es que es la base canónica del… de este… de la representación imaginaria.

I: Base canónica, ¿te refieres a pensar en el plano como un espacio…?

G: [El estudiante contesta antes de que se formule la pregunta completa]. Sí sí, me refiero, sí por eso. Me refería más bien a que la parte… pensando de esa forma, este, si tenemos un 1 aquí [señala el número 1 en el eje real como se indica con la flecha en la figura 5.4], no sé, ésta sería para mí mi base canónica para los reales, la parte real, porque multiplicado por cualquier número pues me va a dar ese número más la base canónica *i* por llamarlo de alguna manera, para completar el par ordenado (*a*, *b*).

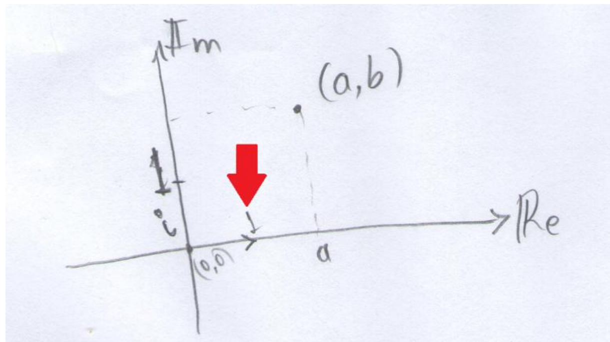


Figura 5.4. G muestra la base canónica que para él genera a los números $z = (a, b)$

I: Entonces, ¿le llamas base canónica porque con ella estás generando todos los reales y todos los imaginarios?
G: Así es, a partir del 1 y la *i*.

El estudiante utilizó otra metáfora para explicar la ubicación de *i* en el plano. Se refirió a los números complejos, implícitamente, como un espacio vectorial. En este momento de la entrevista asoció los puntos del plano complejo con vectores del espacio vectorial R^2 y consideró al conjunto {(1, 0), (0, 1)} como su base canónica, donde (1, 0) representa al número real 1 y (0, 1) representa al número *i*.

En el cuadro 5.4 se describen los elementos de la metáfora *los números complejos son vectores del espacio vectorial* R^2. G la utilizó para explicar por qué *i* se ubica en el eje vertical del plano a una distancia de una unidad del origen.

Cuadro 5.4. Elementos de la metáfora *los números complejos son vectores del espacio vectorial* R^2

Dominio Fuente	Dominio destinatario
Ser un vector (a, b) en el espacio vectorial R^2	Ser un número complejo.
Vector (1, 0)	Número real 1
Vector (0, 1)	Número i
El vector k(1, 0) con $k \in R$	El número real k
El vector n(0, 1) con $n \in R$	El número ni con $n \in R$

El estudiante G consideró que i debe ubicarse sobre el eje imaginario a una distancia de una unidad del origen para que el punto que lo representa, (0, 1), forme una base canónica junto con (1, 0), que es la representación del número complejo 1. El estudiante no aclaró la importancia de considerar la base canónica que genera el espacio vectorial R^2 y no otra base ortogonal o no ortogonal, y por tanto otra representación en el plano asociada a i. G argumentó que la razón para ubicar i sobre el eje imaginario reside en la posibilidad de generar a todos los números imaginarios (véase su segunda intervención presentada en el fragmento de entrevista anterior).

Algunas cuestiones de fondo respecto a la representación de i en el plano complejo son: 1) ¿Por qué el eje imaginario es perpendicular el eje real?, 2) ¿Por qué i se ubica en la parte positiva del eje imaginario a distancia 1 del origen?, 3) ¿Por qué R^2 es un modelo adecuado que nos permite representar a los números complejos? G trató de argumentar su respuesta respecto a la posición de i en el plano complejo a partir del modelo mismo, no se cuestionó sobre la naturaleza de esa representación ni sobre la naturaleza de i. Esta conformidad se hace evidente a partir de la parte final de el extracto de la entrevista anotado antes:

I: Entonces, le llamas base canónica porque con ella estás generando todos los reales y todos los imaginarios?

E: Así es, a partir del 1 y la i.

Pregunta 8

Utilizando cualesquiera dos de las representaciones de los números complejos que conoces, ¿cómo obtendrías el resultado de (4 + 2i) + (6 – 3i)*?*

A partir de las representaciones que el estudiante conocía se le pidió que resolviera dos ejercicios con números complejos. El primero fue (4 + 2i) + (6 – 3i). Para obtener esta suma G recurrió en primer lugar al modelo algebraico $z = a + ib$.

G: Aquí, si utilizo la representación normal z [se refiere a la representación $z = a + bi$], sería como agrupar este… los términos semejantes y sería 6 + 4, 10. Y –3i + 2i daría –i.

I: Ajá.

G: Ésa sería la representación z.

I: Eso es utilizando tu representación $z = a + bi$.

G: Ajá.

G mostró que el algoritmo para la suma de números complejos le era familiar y cómodo. Llama la atención que se refiriera a esta representación algebraica como "la representación normal". Puede pensarse que el estudiante está muy identificado con el manejo de algoritmos y por eso le resultó natural nombrar a esta representación como "la representación normal".

Cuando se le pidió que utilizara otra representación para resolver el mismo problema se dio el siguiente diálogo:

I:¿Podrías utilizar otra representación de las que tienes en tu cuestionario?

G: Sí, la cartesiana por ejemplo, que sería en este caso (6, –3) y la otra sería más (4, 2). Entonces, como sumamos en un plano normal, sería coordenada por coordenada, que también sería (10, –1) y así sería con esta representación (véase la figura 5.5).

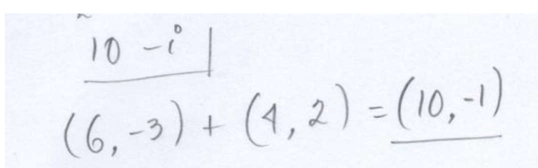


Figura 5.5. Suma de pares ordenados

Aquí se muestra que G concebía al espacio vectorial R^2, al plano cartesiano y al plano complejo como metáforas para los números complejos. Les asociaba el mismo significado e iba de una a otra sin distinción alguna como se muestra con el siguiente fragmento que complementa la parte anterior de la entrevista.

I: Y gráficamente, ¿cómo veo esto aquí en el plano?
G: De hecho lo veríamos como vectores, ¿no?
I: ¿Como vectores?
G: Sí.
I: Entonces ,¿quieres decir que un número complejo también lo podría ver como un vector?
G: Ehh sí, lo podríamos interpretar de esa forma.
I: ¿Entonces esto sería como suma de vectores en el plano complejo?
G: Sí.

El estudiante G contestó: "de hecho lo veríamos como vectores, ¿no?". Nótese que es hasta este momento de la entrevista que G identificó explícitamente a los números complejos como vectores, aunque anteriormente los relacionó con el espacio vectorial R^2. La metáfora que externó en este punto se relaciona con la representación de un vector como una flecha con magnitud, dirección y sentido.

G trasladó las propiedades aritméticas válidas de los dominios fuente de las metáforas que utilizó al dominio destinatario de los números complejos. Recurrió a lo que le era familiar y saltaba de manera inconsciente de una metáfora a otra, según le convenía en concordancia con las propiedades del dominio fuente. Obsérvese que cuando identificó a los números complejos $4 + 2i$ y $6 – 3i$ con los puntos del plano cartesiano, (6, –3) y (4, 2), procedió a sumarlos diciendo: "Entonces como sumamos en un plano normal, sería coordenada por coordenada…".

Las metáforas que G utilizó hasta ese momento le sirvieron para manipular aritméticamente los números complejos, le ayudaron a concebir una representación de ellos. Sin embargo, estas metáforas mantienen limitados los significados asociados a la naturaleza de los números complejos y particularmente los significados asociados al número i.

Pregunta 9

¿Cómo se resuelve x = $(1 + i)^2$*?*

Éste fue el segundo problema aritmético planteado al estudiante. Cuando se le preguntó a G cómo resolver $x = (1 + i)^2$, respondió:

G: ¿$(1 + i)^2$? Ehhh más *i* al cuadrado. No sé, en la representación *z* sería como ver este… un… ¿cómo se llama? Un, un este… un binomio al cuadrado.

I: ¿Un binomio al cuadrado?

G: Pues este, la representación básicamente [comienza a resolver el binomio al cuadrado] sería pues 1 porque es la parte mmm al cuadrado del producto que sería 2*i* y el cuadrado de *i* que sería –1, pero con esto pues se me va. Quedaría 2*i*.

El estudiante recurrió una vez más a los algoritmos de la aritmética de los números complejos. No tuvo problemas para realizar las operaciones,como se muestra en la figura 6.

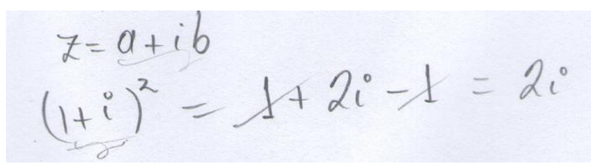


Figura 5.6. Desarrollo aritmético de $(1 + i)^2$

Cuando intentó contestar la pregunta utilizando una segunda representación recurrió al modelo $z = e^{i\theta}$.

G: La otra representación que creo se me haría más fácil sería una representación $e^{i\theta}$

I: ¿Qué representaba $e^{i\theta}$?

G: $e^{i\theta}$ este… se refiere a… es la representación de… θ se refiere al argumento de, de… este número complejo representado en *z*.

I: ¿Con “argumento” te refieres al ángulo?

G: Ajá. Y este… y tendría yo que checar lo de… a que se refiere… [cuál es] el argumento que tiene cada uno de estos.

I: Bien.

G: Y ya después, al obtener este argumento, este… solamente hay que hacerlo al cuadrado. Ésa es la representación pertinente, que sería $e^{2i\theta}$, pero este… 2θ sería una… tendría una representación en la forma $z = a + bi$ que me daría igual el $2i$.

En este intento se observa que para G no era claro cómo utilizar la representación que él llamó $z = e^{i\theta}$. Pasó por alto que el módulo o norma del número complejo $1 + i$ es distinto de 1 y por tanto su modelo propuesto no es útil; necesitaría algo de la forma $z = re^{i\theta}$. G concebía que para elevar al cuadrado un número complejo debía duplicar su ángulo; sin embargo, no intentó obtener ni el argumento ni el módulo del número $1 + i$. Tampoco explicó geométricamente su procedimiento; incluso parecía incómodo al tratar con una representación diferente a la de la forma $z = a + bi$. Por otra parte, G relacionó el número 2 del complejo $2i$ con el 2 que acompaña a $i\theta$ en $e^{2i\theta}$.

Obsérvese que el estudiante no recurrió a las metáforas que había utilizado anteriormente: *los números complejos son puntos en el plano complejo* y *los números complejos son vectores del espacio vectorial* R^2. Las propiedades del dominio fuente de estas metáforas muy probablemente le hubieran resultado de poca ayuda al intentar elevar un número complejo al cuadrado; es decir, al multiplicarlo por sí mismo. Intentó recurrir a una representación que creyó más conveniente por expresar explícitamente el argumento o ángulo de un número complejo. Sin embargo, no intentó obtener la norma o el argumento del número complejo propuesto. En sus respuestas mostró que conocía el modelo, pero que no podía manejarlo con facilidad.

Las metáforas que G utilizó durante la entrevista le ayudaron a obtener un referente de los números complejos. Le permitieron trasladar propiedades de ámbitos conocidos a un terreno desconocido para él. Por medio de esas metáforas asignó un significado a los números complejos, a los números imaginarios y a su suma. Sin embargo, los significados que logró son limitados. G no pudo explicar la razón por la que i se ubica en el eje vertical a una distancia de una unidad del origen en el plano complejo que dibujó; es decir, como cuestionamiento de fondo G no pudo explicar por qué el plano complejo es un modelo adecuado para los números complejos.

Se detectaron las siguientes dificultades en su conceptuación de los números complejos.

– El estudiante no comprendió por qué i se asocia al punto de coordenadas (0, 1) del plano complejo.

– El estudiante no pudo pasar de la representación $z = a + ib$ a la representación $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$.

– En la representación $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$ el estudiante pasó por alto el valor de r y sólo consideró como representación de los números complejos la expresión $z = cos\theta + i\ sen\theta$.

– El estudiante resolvió adecuadamente, utilizando aritmética de los números complejos, los ejercicios planteados en la entrevista y en el cuestionario de investigación; sin embargo, cuando intentó utilizar la representación $z = re^{i\theta}$ no identificó adecuadamente los elementos necesarios de la misma; ignoró la norma del número complejo expresada en esta representación por la letra r y no propuso alguna idea para obtener θ a partir de la representación $z = a + ib$. Bajo esta perspectiva, G no pudo identificar los elementos geométricos de la representación de un número complejo.

Análisis de la entrevista de F, estudiante de licenciatura de la asignatura de variable compleja I del grupo 1

La segunda entrevistada para esta investigación fue una persona estudiante de licenciatura, a quien se llamará F de aquí en adelante. Estudiaba en el grupo 1 de la asignatura de variable compleja I, cuyas clases fueron observadas por quien reporta esta investigación.

F había cursado 90% de sus materias correspondientes a los primeros cinco semestres del programa de estudios de la carrera de matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Fue seleccionada porque utilizó cuatro representaciones diferentes de los números complejos en las respuestas de su cuestionario, lo que da lugar a por lo menos tres metáforas diferentes para conceptuar estos números. Estas metáforas fueron utilizadas por varios estudiantes, pero no todos utilizaron las tres en un solo cuestionario. Por otra parte, las respuestas de F están relacionadas con la instrucción que recibió en sus clases de variable compleja I; sin embargo, sus respuestas muestran algunas dificultades que se expondrán en el presente análisis.

La siguiente entrevista semiestructurada fue diseñada para la estudiante F conforme a sus respuestas al cuestionario utilizado para la investigación que se reporta en esta tesis.

1.– En el cuestionario que amablemente contestaste antes escribiste que "un número complejo es aquel que tiene una parte real y una imaginaria". Por favor, dame un ejemplo de un número complejo y muéstrame su parte real y su parte imaginaria.
2.– Por favor, explicame en qué consiste la forma polar de un número complejo. ¿Puedes ilustrar geométricamente la representación polar que has expresado?
3.– En las representaciones que diste en el cuestionario utilizaste una flecha en el plano que parte del origen. ¿Puedes explicar más sobre este modelo?
4.– Mencionas que R^2 es isomorfo a los números complejos. ¿Qué significa esto?
5.– ¿Por qué R^2 es isomorfo a los números complejos?
6.– ¿Qué es un número imaginario? ¿Un número imaginario es un número complejo?
7.– Utilizando una representación diferente a $z = x + iy$, ¿cómo representarías i?
8.– ¿Qué denota i?
9.– ¿Cómo se representa $1 + i$ con el modelo $z = cos\theta + i\ sen\theta$? ¿Cómo se representa en el plano?
10.– Utilizando cualesquiera dos de las representaciones de los números complejos que conoces, por favor, obtén el resultado de $(4 + 2i) + (6 – 3i)$.
11.– ¿Cómo se resuelve $x = (1 + i)^2$?

Como en la entrevista anterior, no todas las preguntas se formularon tal como se acaban de presentar. Sin embargo, se respetó la idea esencial de cada cuestionamiento. Se procuró establecer un ambiente de comodidad y confianza para que la alumna respondiera con honestidad a través de un diálogo natural. No se presentaron las preguntas por escrito a la entrevistada. La investigadora proporcionó lápiz y papel a la estudiante para que los utilizara, en caso de necesitarlos, en el momento que más conviniera. De cada pregunta de la entrevista semiestructurada en combinación con las respuestas de esta alumna al cuestionario se registraron las siguientes observaciones.

Pregunta1

En el cuestionario que contestaste antes amablemente escribiste que un número complejo es aquel que tiene una parte real y una imaginaria. Por favor, dame un ejemplo de un número complejo y muéstrame su parte real y su parte imaginaria.

En sus respuestas en el cuestionario utilizado para esta investigación, F escribió: “un número complejo es la asociación de los reales y una parte imaginaria”. Vinculó la representación geométrica de los números complejos al plano cartesiano, llamando al eje *Y* “eje imaginario” y al eje *X* “eje real”. En ningún momento se refirió a este plano como el plano complejo. Por otra parte, se refirió a los números complejos como números de la forma $z = a + ib$, donde a es la parte real e ib es la parte imaginaria. En la instrucción que recibió F en sus clases, el profesor aclaró que la parte imaginaria de un número complejo $a + ib$ es el número real b; sin embargo, varios estudiantes consideraron que la parte imaginaria del número complejo $z = a + ib$ es ib. Además, el profesor recalcó la diferencia entre plano complejo y plano cartesiano: la distinción consistía en que el plano complejo estaba formado por un eje real ortogonal a un eje imaginario en el que la unidad de medida es la unidad imaginaria, mientras que el plano cartesiano constaba de un par de ejes ortogonales etiquetados como eje *X* y eje *Y*, ambos con la unidad real como unidad de medida. En la figura 5.7 se puede observar la respuesta de F a la pregunta *¿Qué es un número complejo?*, incluida en el cuestionario.

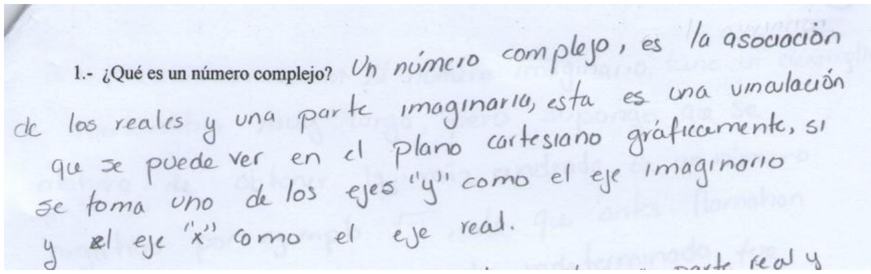

1.- ¿Qué es un número complejo? Un número complejo, es la asociación de los reales y una parte imaginaria, esta es una vinculación que se puede ver en el plano cartesiano gráficamente, si se toma uno de los ejes "y" como el eje imaginario y el eje "x" como el eje real.

Figura 5.7. Respuesta de F a la pregunta *¿Qué es un número complejo?*

En la entrevista se le pidió a F que diera un ejemplo de número complejo e identificara su parte real y su parte imaginaria. En el extracto que sigue se puede leer su respuesta.

I: ¿Me podrías dar por favor un ejemplo de un número complejo, y me puedes mostrar cuál es su parte real y cuál es su parte imaginaria?

F: Mmmm… pues bueno. La forma más común de ver cuál es un número complejo es, lo representamos como $z = x + iy$, esta forma es más fácil de ver porque lo vemos en el plano cartesiano, podemos tomar su parte real que es x.

I: Ajá.

F: Y su parte imaginaria que es iy. Esto nos va a dar un “vectorcito” que es $x + iy$.[Véase la figura 5.8; en este momento la estudiante sólo había trazado el vector señalado.]

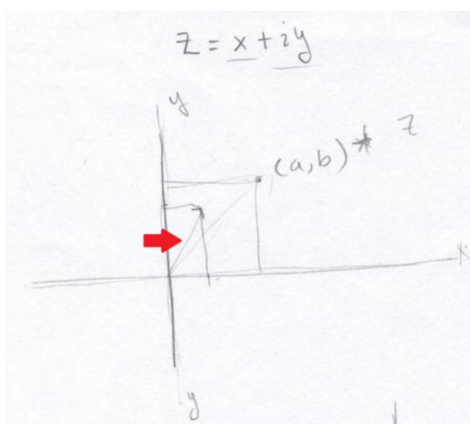


Figura 5.8. Vector trazado por F en el plano cartesiano

En este fragmento de la entrevista se puede observar que F concebía a la parte imaginaria de un número complejo $z = x + iy$ como iy. La estudiante utilizó la metáfora *los números complejos son vectores en el plano* para conceptuar a los números complejos. Esto es evidente cuando dice: “la forma más común de ver cuál es un número complejo es, lo representamos como $z = x + iy$, esta forma es más fácil de ver porque lo vemos en el plano cartesiano”. Además, dijo: “esto nos va a dar un vectorcito que es $x + iy$”; nótese que F llamó vector al segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen del plano cartesiano y con extremo final (x, y).

Cuadro 5.5 Elementos de la metáfora *los números complejos son vectores en el plano.*

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser un vector en el plano cartesiano cuyo extremo inicial es (0, 0) y con extremo final (x, y)	Ser el número complejo $x + iy$
Coordenada x del punto (x, y) extremo final del vector anclado al origen	Parte real del número complejo $x + iy$
Coordenada y del punto (x, y) del extremo final del vector anclado al origen	Parte imaginaria del número complejo $x + iy$
Eje Y del plano cartesiano	Números imaginarios
Eje X del plano cartesiano	Números reales

Cuando se le cuestionó sobre la parte imaginaria del número complejo una vez que había trazado su esquema de referencia, contestó lo siguiente.

I: … Aquí ya me explicaste en tu ilustración que la parte real sería x. ¿Y la parte imaginaria sería?

F: Lo tomamos como el eje de las y ’s.

Resalta que, a pesar de esbozar gráficamente su idea, la estudiante identificó la parte imaginaria de $x + iy$ como iy. Puede pensarse que F comprende que la longitud del segmento de recta señalado en la figura 5.9 es iy. F identificó que la parte imaginaria de los números complejos, de acuerdo a la representación que estaba utilizando, se encuentra sobre el eje *Y*. La estudiante explicó que la parte real de $x + iy$ es x después de dibujar el vector (x, y) que representa al número complejo, es decir, asoció la coordenada x de (x, y) a la parte real del número. Por otra parte, afirmó que iy es la parte imaginaria de $x + iy$, ¿por qué no asumió que la coordenada y es la parte imaginaria? Esta pregunta no se realizó en la entrevista o algún cuestionamiento al respecto que permitiera obtener las concepciones de F relacionadas con este asunto.

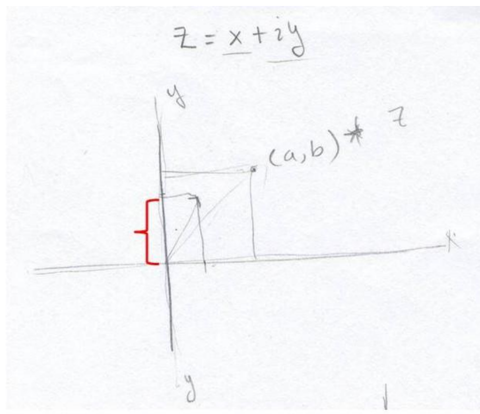


Figura 5.9. Longitud de la ordenada del vector trazado por F

En el cuestionario, la estudiante F también había propuesto como representación de los números complejos los pares ordenados del plano cartesiano (véase la figura 5.10). Escribió: “donde se ve el isomorfismo de R^2 con los complejos”. Más adelante en este análisis se retomará el tema del isomorfismo; por ahora, vale la pena rescatar esta segunda metáfora que es semejante a la primera: *los números complejos son puntos en el plano cartesiano.* La diferencia entre esta metáfora y la metáfora *los números complejos son vectores en el plano* reside en que los puntos del plano cartesiano y los vectores en el mismo plano serán considerados entes diferentes. Los puntos carecen de magnitud dirección y sentido a diferencia de los vectores representados en el plano, estos elementos permiten caracterizar el módulo y el argumento de un número complejo.

F agregó un esquema para ilustrar su idea en el cuestionario, como se observa en la figura 5.10. Se consideró que el par ordenado estaba representado por el punto dibujado en el esquema. Obsérvese que el punto es el extremo final de la flecha o vector de la ilustración.

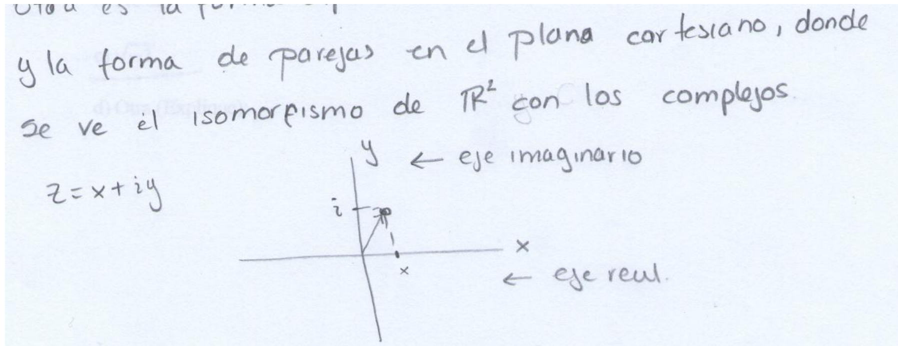


Figura 5.10. F indica como representación de los números complejos a los pares ordenados del plano.

Cuadro 5.6. Elementos de la metáfora *los números complejos son puntos en el plano cartesiano*

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser un par ordenado (x, y) en el plano cartesiano	Ser un número complejo
Coordenada x del par ordenado (x, y)	Parte real del número complejo $x + iy$
Coordenada y del par ordenado (x, y)	Parte imaginaria del número complejo $x + iy$
Eje X del plano cartesiano	Números reales
Eje Y del plano cartesiano	Números imaginarias

Pregunta 2

Por favor explica en qué consiste la forma polar de un número complejo. ¿Puedes ilustrar geométricamente la representación polar que has expresado?

En el cuestionario, la estudiante F mencionó que una representación de los números complejos era la forma polar $z = cos\ x + i\ sen\ y$, como se muestra en la figura 5.11.

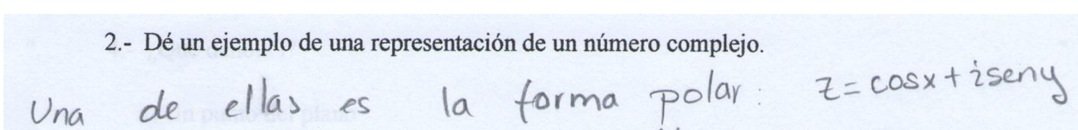

2.- Dé un ejemplo de una representación de un número complejo.
Una de ellas es la forma polar: $z = \cos x + i \operatorname{sen} y$

Figura 5.11. Representación de un número complejo en forma polar según F

Obsérvese que la alumna escribió $z = cos\ x + i\ sen\ y$; luego, estaba considerando ángulos diferentes para representar un número complejo, a saber, el ángulo x y el ángulo y.

Se le cuestionó sobre la representación geométrica de dicho modelo pero no pudo externar una idea matemática sólida. En sus palabras expresiones es evidente que no logró apropiarse de la idea central de la representación, como se exhibe en el siguiente extracto de la entrevista.

I: Ahora, también hablaste aquí en tu cuestionario sobre la forma polar de un número complejo.
F: Ahh ajá.
I: ¿Puedes ilustrar geométricamente a qué te refieres con la forma polar de un número complejo?
F: Ajá. Bueno, pues precisamente como se puede ver como un vector.
I: Ajá.
F: Ehhh ahh es que no me acuerdo cómo se saca.
I: Por aquí lo tenías [la investigadora le muestra la parte del cuestionario donde habló sobre la representación polar].
F: Ah sí, *z = cos x + i sen y*. Pues sale de Pitágoras.
I: Ajá.
F: [La estudiante dibuja el esquema que se mjuestra en la figura 5.12] Y este es *seno*… ahhh… es que luego me equivoco, *coseno*... ¿o es al revés? [Vacila al colocar “las etiquetas” *cos x* y *sen y* a los catetos que forman el triángulo rectángulo que aparece en su esquema.]

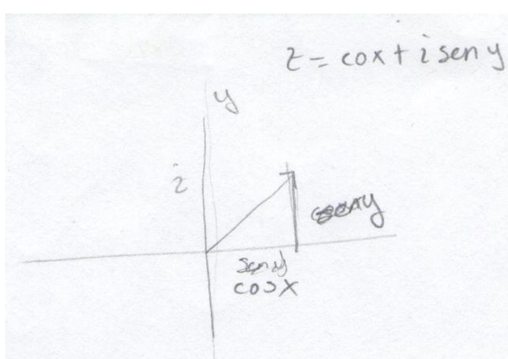


Figura 5.12. Representación geométrica de un número complejo en forma polar, según F

I: Es al revés [la investigadora corrige los nombres de los catetos, pero no corrige el dato relacionado con el ángulo].

F: Sí, verdad, coseno de ahh sí, *cos x, sen y*… sí. Perdón.

I: No, no te preocupes.

F: Sí, y bueno esa es la forma polar de verlo, y ya que éste es el eje de las *Y*'s, y bueno, pues en este eje están todos los imaginarios.

F reforzó la idea de que en el eje *Y* del plano cartesiano se encuentran las partes imaginarias de los números complejos, a pesar de que se necesita cambiar de sistema de referencia para trabajar con coordenadas polares. Por otra parte, no meditó sobre el asunto de los ángulos de los que calcula el *seno* y el *coseno*. En su esquema dibujó un vector y trazó un segmento de recta paralelo al eje *Y* que iba del extremo final del vector al eje *X* formando un triángulo rectángulo, como se observa en la figura 5.13. En su explicación no fue clara la necesidad de utilizar el teorema de Pitágoras, sólo obtuvo el seno y el coseno del ángulo agudo formado por el vector y el eje horizontal (señalado con una flecha en la figura 5.13), obsérvese que escribió *cos x* y *sen y* y para referirse al mismo ángulo, no expresó nada sobre por qué se remite por escrito a ángulos diferentes si la ilustración muestra que alude al mismo ángulo.

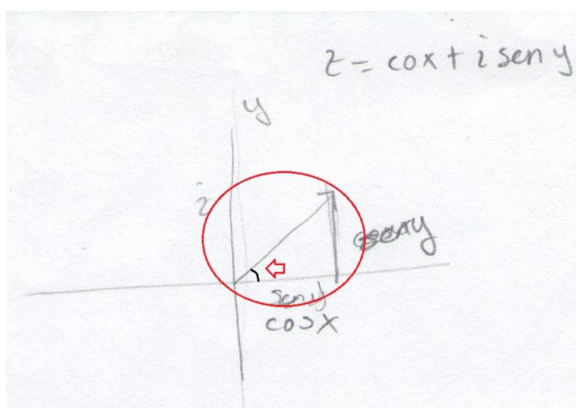


Figura 5.13. Triángulo rectángulo formado por el vector, su ordenada y su abscisa

Por otra parte, F no consideró la longitud del "vector" en la representación polar que utilizó. Incluso en la parte superior del esquema escribió $z = cos\ x + i\ sen\ y$. Nótese que los elementos clave en esta representación de los números complejos, el ángulo de inclinación del vector y la longitud del vector, no son elementos contundentes en la explicación de F. La estudiante intentó valerse de la metáfora *un número complejo es un punto en el plano con coordenadas polares.* Los elementos que integran la metáfora se muestran en el cuadro 5.7.

Cuadro 5.7. Elementos de la metáfora *un número complejo es un punto en el plano con coordenadas polares*

Dominio Fuente	Dominio destinatario
Ser un par ordenado (r, θ) en el plano	Ser un número complejo de la forma $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$
Coordenada r del par ordenado (r, θ)	Norma del número complejo $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$
Coordenada θ del par ordenado (r, θ)	Argumento del número complejo $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$
Eje polar del plano	Números reales positivos
Polo	Número complejo 0

Respecto a la pregunta 3, *En las representaciones que diste en el cuestionario utilizas una flecha en el plano que parte del origen. ¿Puedes explicar más sobre este modelo?* ya se ha explicado el significado que F asoció a la flecha que usó en sus representaciones geométricas.

Pregunta 4

Mencionas que R^2 es isomorfo a los números complejos, ¿qué significa esto?

En el cuestionario, F escribió respecto a las representaciones de los números complejos: "[una representación de los números complejos es] la forma de parejas en el plano cartesiano, donde se ve el isomorfismo de R^2 con los complejos". Ilustró su idea con el esquema que se muestra en la figura 5.14.

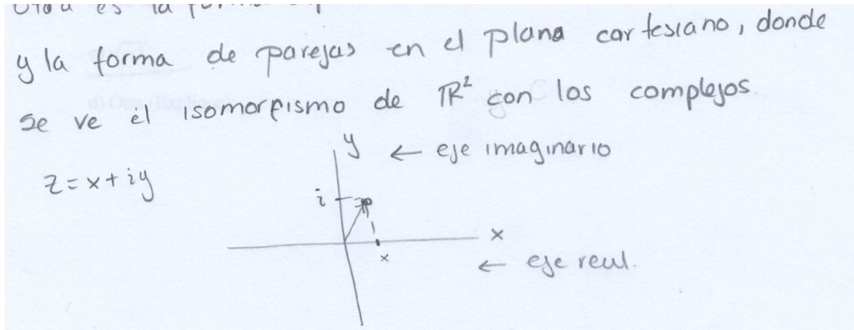


Figura 5.14. F escribe sobre el isomorfismo de R^2 con los números complejos

Obsérvese que la estudiante no se refirió a la existencia de una función biyectiva f cuyo dominio es el espacio vectorial R^2 y con contradominio C (los números complejos) tal que $f(ab) = f(a)\,f(b)$. Tampoco se refirió a los números complejos como un espacio vectorial explícitamente. En la entrevista se le preguntó a F sobre el significado de su afirmación:

I: …Ahora, mencionaste también en tu cuestionario que R^2 es isomorfo a los números complejos.

F: Ajá.

I: ¿Qué significa esto?

F: Ahhh… lo llamo, bueno, como lo vi en la clase de variable, lo llamamos un isomorfismo porque nosotros, precisamente al verlo como un plano cartesiano podemos decir que existe un eje, que es *Y*, que va a ser el de todos los imaginarios y un eje *R* que va a ser el eje real, el eje *X* va a ser el eje real. Entonces, nosotros decimos que existe un isomorfismo (o es como lo definimos) porque si nosotros tomamos un punto como coordenadas cartesianas, sea (a, b), por medio de alguna operación, no sé, * [estrella] podemos decir que ese es un número; o sea, podemos decir que también existe aquí un número complejo z [la estudiante escribe sobre el esquema del plano cartesiano que utilizó anteriormente las coordenadas (a, b) y el símbolo $*$ junto con la letra z que simboliza a un número complejo, como se muestra en la figura 5.15].

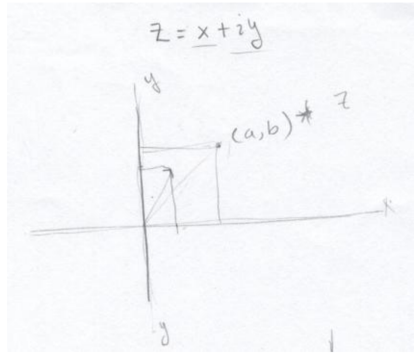


Figura 5.15. Operación * que interviene en el isomorfismo de $\boldsymbol{R}^2$ y los números complejos

I: Ajá.

F: Un número complejo *z*.

I: O sea, estás diciéndome que a través de “estrella” podríamos determinar una biyección entre el plano y…

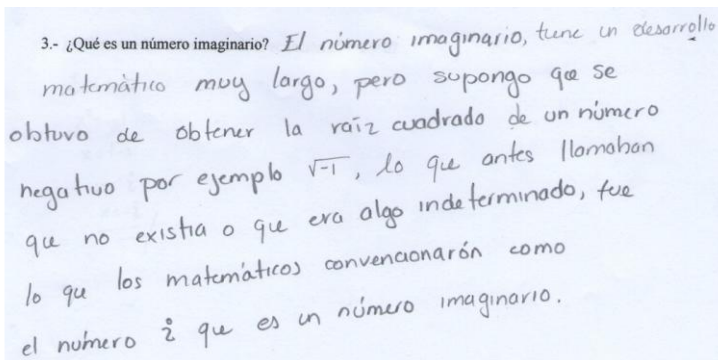
F: Sí, entre el plano y… [no continúa].

La estudiante justificó en su explicación el isomorfismo entre R^2 y los números complejos afirmando implícitamente que hay una biyección entre los números reales y el eje *X*, y una biyección entre los números imaginarios y el eje *Y*. De alguna manera, le basta suponer esta biyección para asegurar que puede vincular cada punto (x, y) del plano con un número complejo *z*. Por otra parte, propone una operación que denota con *(y llama estrella), gracias a la que el isomorfismo es posible. F exhibe una concepción limitada del concepto de isomorfismo y por tanto también se limita su comprensión del isomorfismo entre R^2 y los números complejos. En esta exposición se respondió ya a la pregunta 5: ¿por qué R^2 es isomorfo a los números complejos? La estudiante trató de justificar de una manera rigurosa por qué los números complejos pueden ser vistos como puntos en el plano cartesiano o como vectores en el mismo plano al que llamó R^2; para ello recurrió a su concepción de isomorfismo. Su profesor de clase habló del isomorfismo entre R^2 y los números complejos pero no exhibió la función biyectiva que lo sustenta.

Pregunta 6

¿Qué es un número imaginario? ¿Un número imaginario es un número complejo?

En el cuestionario la estudiante explicó que los números imaginarios son las raíces cuadradas de los números negativos y escribió como ejemplo $i = \sqrt{-1}$. Sobresale que se refirió a los números imaginarios como números que se consideraron indeterminados o inexistentes en determinado periodo de la historia, desde su perspectiva. También agregó que la comunidad matemática determinó por convención que $i = \sqrt{-1}$. En la figura 5.16 se muestra esta respuesta.



3.- ¿Qué es un número imaginario? El número imaginario, tiene un desarrollo
matemático muy largo, pero supongo que se
obtuvo de obtener la raíz cuadrado de un número
negativo por ejemplo $\sqrt{-1}$, lo que antes llamaban
que no existia o que era algo indeterminado, fue
lo que los matemáticos convencionarón como
el número ¿ que es un número imaginario.

Figura 5.16. Respuesta de F a la pregunta *¿Qué es un número imaginario?*, del cuestionario

En la entrevista la estudiante explicó lo siguiente.

F: Un número imaginario… bueno… es el que básicamen[te]… bueno… matemáticamente yo lo entiendo que es como el que se obtiene de un resultado por aquí, al obtener la raíz cuadrada de un número negativo.

I: Bien.

F: Por ejemplo, –1.

I: Por ejemplo –1… entonces, la raíz cuadrada de –1 sería…

F: Un número imaginario.

I: Bien. ¿Y un número imaginario es un número complejo?

F: Sí.

En este fragmento de la entrevista destaca que la estudiante F consideraba que los números imaginarios son números complejos.

Pregunta 7

Utilizando una representación diferente a $z = x + iy$ *¿cómo representarías* i*?*

En la entrevista se dio el siguiente diálogo en relación con esta pregunta.

I: …Y ahora, utilizando cualquiera de las representaciones que manejaste, ¿cómo representarías *i*?

F: Ahh… pues… por ejemplo, en la parte cartesiana [utilizando la forma cartesiana], *i* estaría en el eje de las *Y*'s, simplemente sería *i* y su parte real es cero. [La estudiante dibujó el esquema que se muestra en la figura 5.17.]

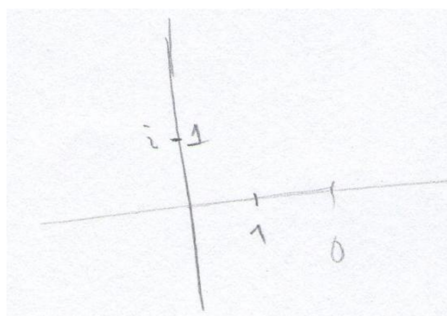


Figura 5.17. Representación geométrica de *i*, según F

I: Bien. ¿Por qué *i* se ubica ahí?

F: ¿En el eje de las *Y*'s?

I: Ajá.

F: Pues… así lo definimos (risas) pero realmente, tampoco lo sé.

Nótese que F se refirió al modelo cartesiano para representar al número *i*; esbozó el esquema de la figura 5.17, dejando implícito que el par ordenado (0, 1) representa a *i*. Evidencia de esto es que junto al símbolo *i* que señala en el eje *Y* escribió el número 1.

Por otra parte, cuando se le preguntó sobre la ubicación de *i* hizo alusión a "la definición". En sus clases de variable compleja I el profesor definió *i* como $\sqrt{-1}$, pero nunca dio una explicación de por qué el número *i* se ubicaba sobre el eje Y en la parte positiva a una unidad de distancia del origen de coordenadas. Es natural preguntarse por qué *i* tiene esa ubicación; sin embargo a F le extrañó la pregunta.

Pregunta 8

¿Qué denota i?

En el cuestionario utilizado para esta investigación, F señaló que *i* denota $\sqrt{-1}$. Cuando se le hizo la misma pregunta en la entrevista, F agregó lo siguiente.

I: … ¿Y qué denota *i*?

F: Es una distancia, como tal vez, bueno… yo lo veo como distancia en el eje real; como por ejemplo 1 en el eje real, aquí en vez de ser 1 es *i*.

F consideró que *i* era una distancia. La estudiante buscó un referente familiar para explicar el significado de *i*. Al utilizar la representación cartesiana, o la metáfora de *los números complejos son puntos en el plano cartesiano*, F mostró que tenía dificultades para separar el dominio fuente del dominio destinatario. No utilizó la metáfora para comprender el significado de los números complejos, particularmente de *i*, sino que asumió que *i* es un par ordenado y por tanto puede manipularlo como tal. Por ejemplo, pudo calcular la distancia entre dos puntos; en este caso, la distancia del origen al par ordenado (0, 1) y asociar esa distancia a *i*.

Pregunta 9

¿Cómo se representa $1 + i$ *con el modelo* $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ *? ¿Cómo se representa en el plano?*

Considerando que F utilizó el modelo de coordenadas polares $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$, pero omitiendo r y empleando ángulos diferentes, recuérdese que ella escribió $z = cos\ x + i\ sen\ y$ asociando los ángulos x y y a un mismo número complejo y sin hacer aclaraciones respecto a ellos. Se le pidió que representara al número 1 + *i* utilizando la forma $z = cos\theta + i\ sen\theta$. Se corrigió la cuestión de los ángulos diferentes, pues la representación que se le mostró sólo utilizaba θ como ángulo asociado al número complejo *z*, pero no se agregó el factor *r* que representa la norma del número complejo. Nótese que la norma del número complejo 1 + *i* es diferente de 1. El siguiente extracto muestra cómo piensa la estudiante.

I: … ¿Cómo se representaría el número 1 + *i* en el modelo que manejas en la forma polar?
F: Uyyy… A ver, déjame acordarme. Mmmm… 1 + *i* ahh… pues sería coseno, coseno de 1 más *i* seno de 1 [*cos* 1 + *i sen* 1].
I: A ver, escríbelo, por favor.
F: A ver, 1 + *i* el modelo, ¿cómo es? $z = cos\theta + i\ sen\theta$.
I: Ajá.
F: *z* = *cos* 1 + *i sen* 1. (Véase la figura 5.18.)

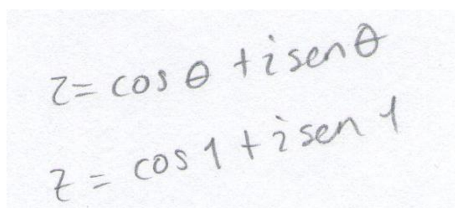


Figura 5.18. Forma polar del número 1 + *i* según F

Obsérvese que F no logró obtener con éxito el argumento del número complejo 1 + *i*, tampoco calculó su norma. Tenía una concepción limitada de la forma polar de un número complejo: ignoraba los elementos más importantes de este modelo.

Pregunta 10

Utilizando cualquiera dos de las representaciones de los números complejos que conoces, por favor, obtén el resultado de (4 + 2i) + (6 – 3i)

El siguiente fragmento de la entrevista muestra cómo intentó F resolver la suma de números complejos.

I: Ahora, utilizando las representaciones o los modelos que tú prefieras de los números complejos, ¿podrías sumar estos dos números, por favor: $(4 + 2i) + (6 - 3i)$?

F: $(4 + 2i) + (6 - 3i)$.

I: Puedes utilizar la forma que gustes.

F: Puedo con la cartesiana. [Escribe los números que sumará en la hoja de papel y traza el esquema que se muestra en la figura 5.19; en este momento de la entrevista sólo ha dibujado los vectores marcados con flechas.] Sería la suma de vectores.

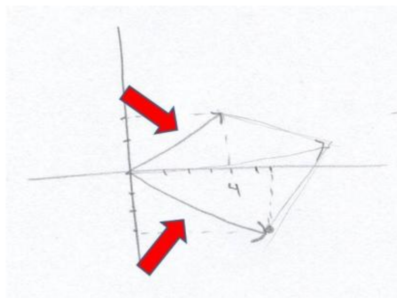


Figura 5.19. Representación geométrica de la suma $(4 + 2i) + (6 - 3i)$.

I: Está bien.

F: Sería, éste más éste [señala los vectores que dibujó en el esquema de la figura 5.19].

La estudiante recurrió a la suma de vectores para obteber la suma de números complejos que se le había pedido. Obsérvese que utilizó la metáfora *los números complejos son vectores*. Propuso hacer la suma de vectores, válida en el dominio fuente, para ejecutar la operación de números complejos. Intentó trasladar esta operación, válida en el dominio fuente, a los elementos del dominio destinatario. Sin embargo, a pesar de haber utilizado un método aparentemente más familiar para ella, no concluyó el ejercicio, como se muestra a continuación.

I: Bueno, no sé si la quieras terminar (risas).

F: ¿La tengo que terminar?

I: Como quieras. (La estudiante no concluyó el ejercicio.)

F: Es que la verdad, ahorita no me acuerdo bien de cómo se suman los vectores. Hay que hacer el paralelogramo y luego la diagonal. [Intenta trazar el paralelogramo y su diagonal sobre el esquema que dibujó antes Véase la figura 5.20.]

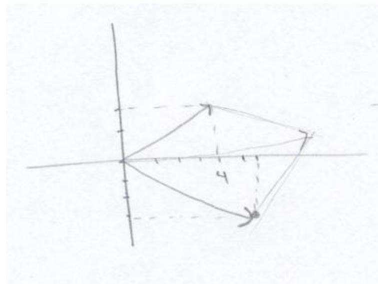


Figura 5.20. Construcción del paralelogramo para sumar dos vectores

Pregunta 11

¿Cómo se resuelve x = $(1 + \mathrm{i})^2$*?*

Para resolver el problema, F recurrió a la aritmética de los números complejos.

F: Ahh… pues eso algebraicamente, ¿no?

I: ¿Algebraicamente? ¿Lo podrías escribir, por favor.

F: 1… ¿más qué?

I: $(1 + i)^2$

F: Sería $(1 + i)$ por $(1 + i)$ y eso es igual a $1 + i + i + i^2$ pero esto es $1 + 2i – 1$ y esto es igual a $2i$. (Véase la figura 5.22.)

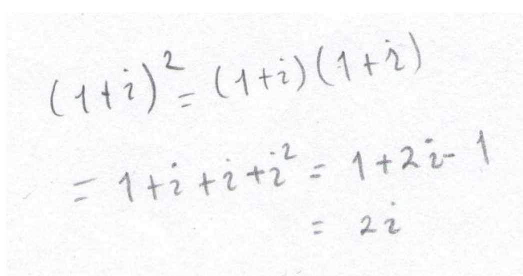


Figura 5.22. Desarrollo aritmético de $(1 + i)^2$

Obsérvese que para F era más cómodo calcular empleando la forma $z = x + iy$ de los números complejos. Para el caso de la suma de números complejos F tuvo un referente geométrico para explicar el significado de la suma. En el caso de la multiplicación, se limitó a aplicar el algoritmo de la multiplicación de binomios. Aunque las concepciones de los números complejos que tenía F eran limitadas, pudo resolver adecuadamente la pregunta 5 del cuestionario: ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$? Y en la pregunta 6, a pesar del error aritmético que cometió al expresar que $\frac{2-\sqrt{-4}}{2} = \sqrt{-4}$, no le provocó ningún conflicto concluir que $x = \pm\sqrt{-4}$. Véanse las figuras 5.23 y 5.24.

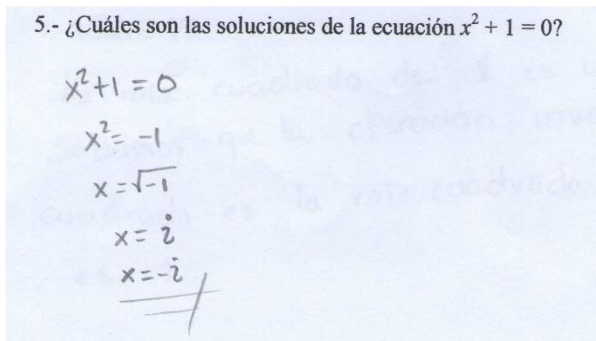


Figura 5.23. Resolución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$

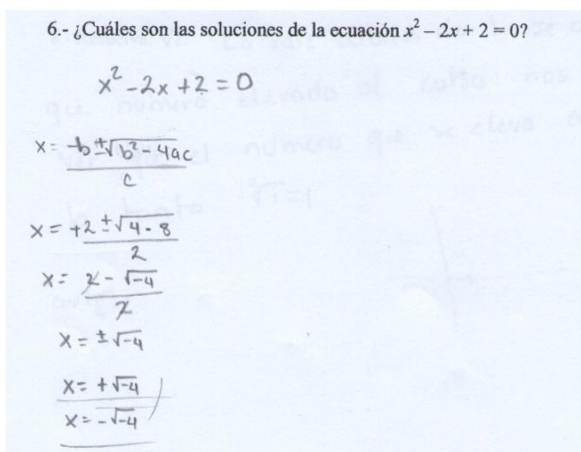


Figura 5.24 Resolución de la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$

Se detectaron las siguientes dificultades en la conceptuación de F de los números complejos.

– F afirmó que la forma más común de un número complejo es la forma $z = a + ib$. Sin embargo, relacionó directamente esta forma con el plano cartesiano, diciendo que a es la parte real que puede ubicarse sobre el eje X del plano cartesiano y bi es la parte imaginaria que se ubica en el Y. No tenía claridad sobre el significado de la parte imaginaria. Utilizó la metáfora *los números complejos son vectores en el plano.* A pesar de que etiquetó a estos vectores en el plano cartesiano como (x, y) no logró interiorizar que la parte imaginaria del número complejo $x + iy$ es y. Esto lleva a pensar que F comprendió que la longitud de la ordenada del vector (x, y) es iy.

– La estudiante F utilizó la metáfora *un número complejo es un par de coordenadas polares*. Sin embargo, no pudo determinar los elementos que conforman la metáfora para expresar un número complejo en la forma $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$. Evidencia de ello está en su producción escrita, al referirse a los números complejos escritos en forma polar como números del tipo $z = cos\ x + i\ sen\ y$. No tomó en cuenta la norma del número complejo y no tenía claridad sobre el argumento de un número complejo.

– F afirmó que los números complejos son isomorfos a R^2. Sin embargo, en su respuesta relacionada con este asunto, la estudiante no habló de la existencia de una función biyectiva f cuyo dominio es el espacio vectorial R^2 y con contradominio C (los números complejos) tal que $f\,(ab) = f\,(a)\,f\,(b)$. Tampoco se refirió a los números complejos como un espacio vectorial explícitamente. F justificó el isomorfismo entre R^2 y los números complejos afirmando implícitamente que hay una biyección entre los números reales y el eje X, y una biyección entre los números imaginarios y el eje Y.

– Respecto a los números imaginarios, la estudiante los concebía como una convención matemática necesaria. Cuando se le preguntó sobre la ubicación del número i en el plano, señaló su posición sobre la parte positiva del eje Y a una unidad de distancia del origen, y argumentó que ésa era la ubicación correcta por definición.

Análisis de la entrevista de H, estudiante de licenciatura de la asignatura de variable compleja I del grupo 2

La tercera entrevistada para esta investigación fue una persona estudiante de licenciatura a quien se llamará H de aquí en adelante. Estudiaba en el grupo 2 de la asignatura de variable compleja I, cuyas clases fueron seguidas por quien reporta esta investigación. H había cursado 75% de sus materias correspondientes a los primeros sexto seis semestres del programa de estudios de la carrera de física de la Facultad de Ciencias de la UNAM. No era la primera vez que cursa la materia de variable compleja I.

La estudiante fue seleccionada porque utilizó dos representaciones para referirse a los números complejos. La primera de ellas fue la representación $z = x + iy$ y la segunda fue la representación de los números complejos como puntos en el plano complejo. En esta segunda representación, H dio como ejemplo el par ordenado $(1, i)$. Esta manera de utilizar pares ordenados cuya segunda componente es un número imaginario muestra una concepción diferente de la representación que el profesor expuso en clase. La metáfora que H utilizó para conceptuar los números complejos es distinta de la propuesta por G o por F. Estos alumnos utilizaron pares ordenados donde las dos coordenadas son números reales, ya sea para representar puntos en el plano o para representar vectores. Por otra parte, en el cuestionario utilizado para la investigación que aquí se reporta, H escribió que los números imaginarios “son los puntos que no podemos ver comúnmente, son imaginarios”.

¿Qué tipo de concepción sobre los números imaginarios ha desarrollado H? Otro aspecto que destacó en las respuestas de esta estudiante al cuestionario fue que en las dos preguntas que implican la resolución de ecuaciones cuadráticas obtuvo las respuestas correctas realizando los cálculos aritméticos necesarios en los que intervenían números complejos. Así, las concepciones que F tenía sobre estos números no interfirieron de manera negativa en la ejecución de las operaciones aritméticas básicas de los números complejos, como lo muestra su correcta resolución de ecuaciones cuadráticas.

Acorde con las respuestas que H escribió en el cuestionario, se diseñó la siguiente entrevista semiestructurada.

1.– En el cuestionario mencionaste que un número complejo es aquel que tiene una parte real y una imaginaria y utilizaste la representación $z = x + iy$. ¿Cuál es la parte real y cuál es la parte imaginaria del número complejo?

2.– ¿Qué es un número imaginario?

3.– ¿Un número imaginario es un número complejo?

4.– Te referiste a los números complejos como puntos en el plano complejo. Entonces, ¿todo número complejo $z = x + iy$ puede representarse con un punto en el plano complejo? ¿Qué número complejo de la forma $z = x + iy$ está representado por el punto $(1, i)$ de tu ejemplo?

5.– En la representación de los números complejos como puntos en el plano complejo, ¿qué punto corresponde al número i? ¿Por qué i se ubica en ese punto en el plano complejo?

6.– ¿Dónde se ubica el número $2 + 3i$?

7.– ¿Dónde se ubica el número $-3i$?

8.– Utilizando la representación de los números complejos como puntos en el plano, ¿cómo obtienes el resultado de $(4 + 2i) + (6 - 3i)$?

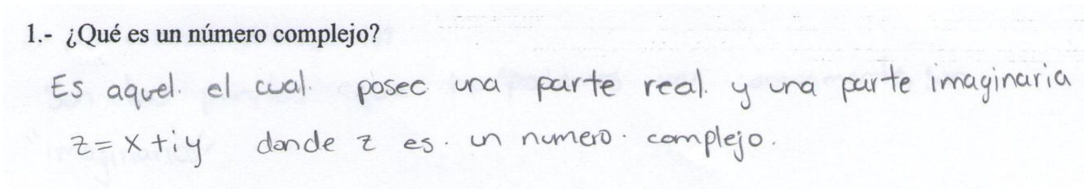
9.– Con esa misma representación, ¿cómo se resuelve $x = (1 + i)^2$? ¿Puedes utilizar otra representación para resolver la ecuación?

Estas preguntas durante la entrevista no se formularon tal como están escritas. Sin embargo, se respetó la idea principal de cada una. No se proporcionaron las preguntas por escrito a la entrevistada: se buscó promover un diálogo natural y fluido preguntando sólo de manera oral. Se proporcionaron hojas blancas y lápiz a la estudiante para recabar sus producciones escritas, en caso de que ella necesitara escribir algo. Las respuestas obtenidas en la entrevista fueron las siguientes.

Pregunta 1

En el cuestionario mencionaste que un número complejo es aquel que tiene una parte real y una imaginaria y utilizaste la representación $z = x + iy$. ¿Cuál es la parte real y cuál es la parte imaginaria del número complejo?

En el cuestionario, H respondió que un número complejo es aquel de la forma $z = x + iy$ que tiene una parte real y una parte imaginaria. Su respuesta se muestra en la figura 5.25.



1.- ¿Qué es un número complejo?

Es aquel el cual posee una parte real y una parte imaginaria

$z = x + iy$ donde z es un numero complejo.

Figura 5.25. Respuesta a la pregunta *¿Qué es un número complejo?*

Como en su respuesta no especificó cuál era la parte real y cuál la parte imaginaria, se le preguntó sobre esto.

I: … En el cuestionario que contestaste, mencionaste que un número complejo es aquel que tiene una parte real y una parte imaginaria, utilizaste la representación $x + iy$. ¿De acuerdo? Escribiste $z = x + iy$, donde z es un número complejo. En esta representación, ¿cuál es la parte real y cuál es la parte imaginaria del número complejo?

H: La parte real es igual a x.

I: ¿Y la parte imaginaria?

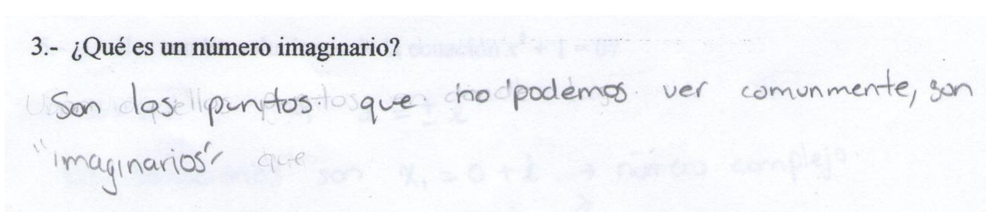
H: y.

La estudiante H concibió a x como la parte real del número complejo $z = a + ib$ y a y como la parte imaginaria.

Pregunta 2

¿Qué es un número imaginario?

En el cuestionario, H respondió: “Son los puntos que no podemos ver comúnmente, son ‘imaginarios’” como se muestra en la figura 5.26.



3.- ¿Qué es un número imaginario?

Son los puntos que no podemos ver comunmente, son "imaginarios"

Figura 5.26. Concepción de H sobre los números imaginarios

Se planteó la misma pregunta en la entrevista y H dio una respuesta diferente.

I: Para ti, ¿qué es un número imaginario?
H: Este… es aquel que la parte real es igual a cero; entonces, es un número que es puramente imaginario.

La estudiante H expresó su concepción de número imaginario valiéndose del modelo $z = x + iy$. Utilizó una de las definiciones que su profesor le proporcionó en clase. En el cuestionario, H contestó a la pregunta *¿qué es un número imaginario?* de la siguiente manera: “Son los puntos que no podemos ver comúnmente, son ‘imaginarios’ ”. En la entrevista se le pidió a la estudiante explicar su respuesta. El siguiente fragmento muestra lo que H respondió.

I: Entonces, a ver… aquí, por ejemplo, algo que me llamó la atención de lo que contestaste fue que escribiste que [los números imaginarios] son los puntos que no podemos ver comúnmente. ¿Qué fue lo que quisiste expresar con esa respuesta?
H: Es que estaba pensando que, ya que estamos aquí [en los estudios de licenciatura] pues nos hablan mucho de… de los campos, ¿no? De los reales, de los racionales, de los irracionales. Entonces, al llegar aquí y que nos presenten a los imaginarios por primera vez, pues sí te… como que te saca de onda. Entonces, pues ya con el tiempo vas viendo que los imaginarios son un conjunto que está… que es más grande todavía que los reales.
I: Bien.
H: Entonces, por eso el que no lo podíamos ver comúnmente, era como el estar arrastrando a siempre pensar en los naturales, en los enteros o en los reales.

Nótese que H se refiere a los números imaginarios como un conjunto de números desconocido hasta que inició sus estudios de licenciatura. Ella afirmó estar familiarizada con los números reales, los racionales y los irracionales, pero aludió a los números imaginarios como un conjunto que en un principio le pareció extraño; utilizó la frase “como que te saca de onda”.

Por otra parte, son dignas de atención las siguientes palabras que expresó: “ya con el tiempo vas viendo que los imaginarios son un conjunto que está… que es más grande todavía que los reales”. H externó que terminó por aceptar la existencia del conjunto de los números imaginarios y además lo comprendió como un conjunto de cardinalidad mayor que los números reales (a pesar de que esta idea es errónea).

En la parte final de este fragmento de la entrevista H dijo que se refería a los números imaginarios como “los puntos que no podemos ver comúnmente”, porque con frecuencia las ideas matemáticas que ella ha estudiado conciernen a números naturales, enteros o reales. Esto invita a pensar que la idea de la existencia del conjunto de los números imaginarios resultó desconcertante para esta estudiante porque no tenía referentes de ningún tipo para ellos. La naturaleza abstracta con que los números complejos se presentaron en su ámbito escolar, limitó la imaginación de H; no fue capaz de construir una metáfora con elementos matemáticos que le fuesen familiares para explicarse a sí misma qué es un número complejo.

Pregunta 3

¿Un número imaginario es un número complejo?

La respuesta a esta pregunta se muestra a continuación.

I: …¿Un número imaginario es un número complejo?

H: Pues está dentro de los complejos.

H reconoció a los números imaginarios como números complejos. Tenía muy clara la representación $a + bi$ e identificaba aquellos números con $a = 0$ como números complejos e imaginarios.

Pregunta 4

Te referiste a los números complejos como puntos en el plano complejo. Entonces, ¿todo número complejo z = x + iy *puede representarse con un punto en el plano complejo? ¿Qué número complejo de la forma* z = x + iy *está representado por el punto* (1, i) *de tu ejemplo?*

En el cuestionario, la estudiante H identificó a los números complejos como puntos en el plano complejo según se muestra en la figura 5.27.

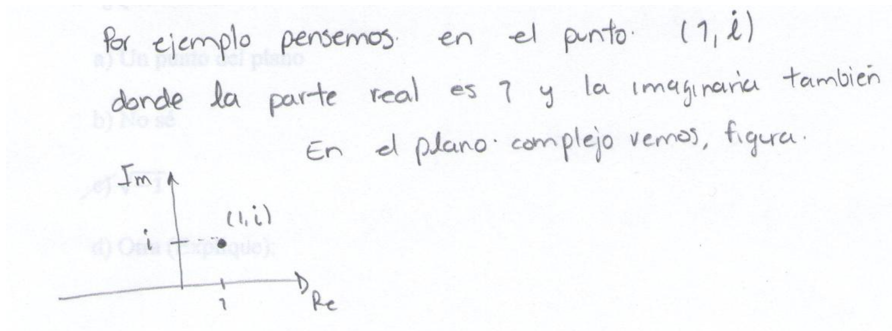


Figura 5.27. Representación de los números complejos como puntos en el plano

Nótese que H denotó al par ordenado (1, *i*) como un número complejo representado por el punto señalado en el plano complejo. Obsérvese que la segunda entrada del par ordenado no es un número real sino un número imaginario, a pesar de que en la primera pregunta de la entrevista H aclaró que la parte imaginaria de un número complejo $z = x + iy$ es y y no iy. La estudiante utilizó la metáfora *los números complejos son puntos del plano complejo de la forma* (x, iy).

Cuadro 5.8. Elementos de la metáfora *los números complejos son puntos del plano complejo de la forma* (x, iy)

Dominio Fuente	Dominio destinatario
Ser un par ordenado (x, iy) en el plano complejo	Ser un número complejo
Coordenada x del par ordenado (x, iy)	Parte real del número complejo $x + iy$
Coordenada iy del par ordenado (x, iy)	Parte imaginaria del número complejo $x + iy$
Eje *Re* del plano complejo	Números reales
Eje *Im* del plano cartesiano	Números imaginarios
Punto (0, i)	Número complejo i

En la entrevista, la estudiante H afirmó que todo número complejo $z = x + iy$ puede representarse con un punto en el plano complejo.

I: …¿Eso quiere decir que todo número complejo $z = x + iy$ lo puedes representar como un punto?

H: Sí.

I: Entonces, ¿qué número complejo de la forma $z = x + iy$ está representado por el punto que tú diste aquí? Diste el punto $(1, i)$ [así lo escribió la estudiante en el cuestionario]. Entonces, si escribiste que todos los números complejos $x + iy$, bueno es lo que entiendo que respondiste, todo número $x + iy$ se puede representar como un punto en el plano.

H: Ajá.

I: Entonces, este punto que llamaste $(1, i)$, ¿a qué número de esta forma corresponde? [La entrevistadora señala la representación $z = x + iy$ escrita en una hoja de papel.]

H: Bueno, la primera coordenada pertenece a la parte real, y la segunda coordenada a la parte imaginaria.

I: Entonces, ¿este número cómo se llama? Si lo escribieras así [la entrevistadora señala la representación $z = x + iy$], si se escribe de esta forma, ¿cómo se transcribe éste [la entrevistadora señala la representación $(1, i)$ que la entrevistada escribió en el cuestionario] con esta representación [la entrevistadora señala la representación $z = x + iy$]?

H: Como $x + i$.

En esta parte de la entrevista H dijo que la primera coordenada del par ordenado $(1, i)$ es la parte real de un número complejo y la segunda coordenada es la parte imaginaria. Nótese en comparación con la respuesta dada a la pregunta 1 de la entrevista que H consideraba al número imaginario i como una pieza de la parte imaginaria de un número complejo. Finalmente, relacionó al par ordenado $(1, i)$ con el número complejo $x + i$.

Para H no era totalmente clara la relación entre las coordenadas del par ordenado que representa al punto y las partes real e imaginaria del número complejo $x + iy$. Por otra parte, obsérvese que H asumió que i es un número complejo que se ubica en la parte positiva del eje vertical del plano que dibuja; probablemente lo consideró una pieza que le daba el carácter de imaginario a la parte imaginaria del número complejo.

Pregunta 5

En la representación de los números complejos como puntos en el plano complejo, ¿qué punto corresponde al número i? ¿Por qué i se ubica en ese punto en el plano complejo?

En el cuestionario, H respondió que *i* denota a $\sqrt{-1}$. En el siguiente extracto de la entrevista se lee la respuesta de H a la pregunta formulada.

I: …Por favor, ¿podrías aquí dibujar el plano? [La entrevistadora proporcionó hojas de papel a la entrevistada].

H: Ajá.

I: ¿En dónde se ubica el número *i*?

H: Aquí. (Obsérvese el punto señalado con una flecha en la figura 5.28.) Mmm… en lo que para nosotros sería como el eje *Y*.

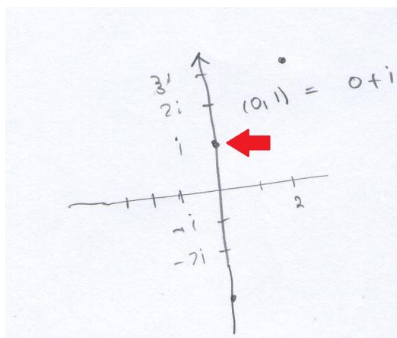


Figura 5.28. Representación de *i* en el plano.

H señaló al número *i* en el plano, como se muestra en la figura 5.28, con una flecha. En cuanto a la pregunta *¿por qué i se ubica en ese punto en el plano complejo?*, se dio el siguiente diálogo.

I: …¿Y por qué el número *i* está ubicado ahí?

H: Mmmm… bueno… aquí sería el punto (0, 1), que sería como escribir 0 + *i*.

I: De acuerdo.

H: Entonces, este… pues… es que aquí yo lo que entiendo es que nuestro eje *Y* es… en vez de que sea 1, 2, es *i*, es 2*i*, 3*i*, igual aquí, –*i*, –2*i*.

I: Pero, ¿por qué *i* está aquí y no, digamos, a la altura de lo que llamas 2*i*, por ejemplo?
H: Mmm… ¿por la escala?

H tomó como unidad de medida del eje imaginario, al que llamó eje *Y* en esta parte de la entrevista, a la unidad imaginaria *i*. Nótese que al llamar al eje vertical eje *Y*, H estaba considerando al plano cartesiano como el medio que le permitía representar a los números complejos. Por otra parte, en el cuestionario se refirió a la representación de los números complejos como puntos del plano complejo, como se muestra en la figura 5.29. Nótese que alude al plano complejo al llamar a los ejes de referencia eje *Im* (imaginario) y eje *Re* (real). Así, para H no había diferencia entre plano complejo y plano cartesiano como medios para representar a los números complejos como puntos. Es posible que esta ambigüedad respecto al plano haya dado lugar al par ordenado (1, *i*), pues por una parte afirmó que la unidad de medida del eje *Y* es *i*, y por otra, H llamó a este eje imaginario.

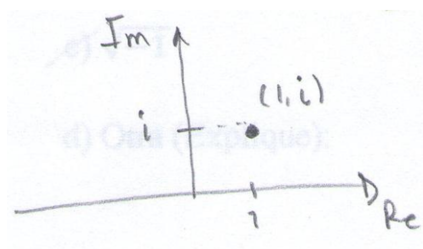


Figura 5.29. Representación del punto (1, *i*) en el plano complejo

Por otra parte, cuando H respondió en la entrevista; “aquí sería el punto (0, 1), que sería como escribir 0 + *i*”, nótese que en tomó un número real para la segunda entrada del par ordenado que representa al número complejo *i*. Además, dio por sentado que (0, 1) representaba a *i*, sin dar una explicación del porqué, simplemente lo asumió. Cuando se le preguntó por qué el punto que representaba a *i* no se ubicaba en otro sitio, como por ejemplo en donde ella había señalado al punto que representaba al número 2*i* respondió dudosamente que el motivo era la escala. Nótese que la concepción geométrica del número complejo *i* que tenía la estudiante H era limitada; no pudo dar un argumento sólido que validara la ubicación de *i* que ella propuso en el plano.

Pregunta 6

¿Dónde se ubica el número 2 + 3i*?*

Utilizando el mismo esquema que H dibujó para representar al número *i* como punto en el plano, se le pidió localizar el número complejo 2 + 3*i*.

I: …¿Dónde ubicarías en ese plano complejo al número 2 + 3*i*?

H: ¿2 + 3*i*?

I: Ajá.

H: Aquí está el 2 y acá está el… [obsérvese el punto marcado con la flecha en la figura 5.30.]

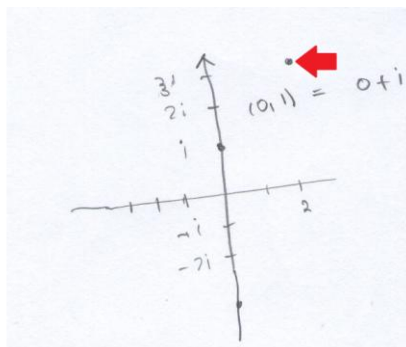


Figura 5.30. Punto en el plano que representa al número complejo 2 + 3*i*

H no tuvo ningún problema para localizar el número pedido.

Pregunta 7

¿Dónde se ubica el número –3i*?*

En el mismo esquema localizó el número imaginario –3*i*, como se muestra en el siguiente extracto.

I: …¿Y el número –3*i*?

H: ¿Nada más –3*i*?

I: Sí.

H: Ahhh… acá, a no… acá. [Obsérvese la figura 5.31.]

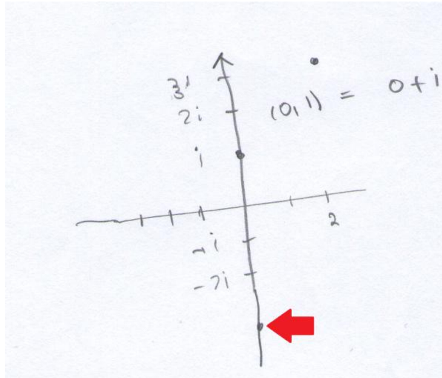


Figura 5.31. Punto en el plano que representa al número complejo –3*i*.

Como se puede ver, H tampoco tuvo problemas para ubicar el número imaginario –3*i* en el plano.

Pregunta 8

Utilizando la representación de los números complejos como puntos en el plano, ¿cómo obtienes el resultado de (4 + 2i) + (6 – 3i)*?*

En esta pregunta, H prefirió usar como primera opción el modelo $z = x + iy$. Realizó aritmética básica de los números complejos para dar una respuesta como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista.

I: …Utilizando esta representación que manejas, que es la de los números complejos como puntos del plano complejo, ¿cómo se suman los números 4 + 2*i* y 6 – 3*i*?

H: Ah… la suma de números complejos es la suma de los números reales más la suma de los números imaginarios.

I: Entonces, utilizarías otra representación, la representación que diste al principio.

H: Ajá.

I: Entonces, ¿podrías realizar la suma por favor?

H: Tenemos (4 + 2*i*) + (6 – 3*i*), entonces la suma sería 6 + 4… serían 10, y 2*i* – 3*i* sería –*i*. Entonces, la suma sería 10 – 3*i* (obsérvese la figura 5.32).

$$(4+2i)+(6-3i) = 10 - i$$

Figura 5.32. Suma de números complejos utilizando la representación $z = x + iy$

I: Entonces, el modelo que teníamos anteriormente, o la representación que teníamos anteriormente del plano cartesiano, ¿no nos ayuda a resolver esto? ¿O lo ves más viable utilizando esta otra representación?
H: Mmmm… pues a mí me queda más claro así.

Obsérvese que H utilizó como primer recurso para resolver la suma propuesta la aritmética básica de los números complejos de la forma $z = x + iy$. Ignoró que se le pidió que trabajara con el modelo de los números complejos como puntos en el plano. La estudiante H no tenía problemas para trabajar aritméticamente con los números complejos bajo la representación $z = x + iy$, incluso agregó "…pues a mí me queda más claro así".

Respecto a resolver el problema utilizando la representación de los números complejos como puntos en el plano, H contestó lo siguiente.

H: Pero en el plano sería como sumar este… coordenadas, es como la [regla] del paralelogramo.

La estudiante sólo se refirió a este procedimiento pero no lo utilizó. Nótese que se refirió a utilizar la regla del paralelogramo, lo que sugiere la idea de los números complejos como vectores en el plano, no como puntos.

Pregunta 9

¿Con esa misma representación [números complejos como puntos en el plano],¿cómo se resuelve $x = (1 + i)^2$*? ¿Puedes utilizar otra representación?*

Después de observar la manera en que H resolvió la suma de números complejos, esta pregunta se planteó de manera diferente; se pidió a la estudiante que utilizara la representación que considerara más cómoda para resolver $x = (1 + i)^2$. H recurrió a la aritmética de los números complejos bajo la forma $z = x + iy$, como lo muestra el siguiente fragmento de la entrevista.

I: Y ahora, ehh… ¿cómo resolverías esto? ¿Cómo obtendrías este resultado: $x = (1 + i)^2$? ¿Qué representación te acomodaría más para resolverlo?
H: Mmmm… (silencio prolongado)… pues es la multiplicación, ¿no?, de cada uno de ellos. Sería $i + i + i - 1$, entonces sería $3i - 1$ (obsérvese la figura 5.33).

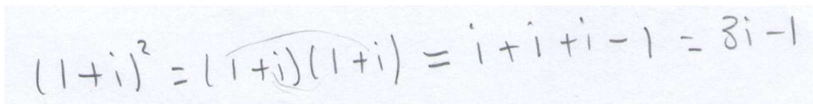


Figura 5.33. Obtención de $(1 + i)^2$

Nuevamente se observa que la estudiante recurrió a la aritmética básica de los números complejos. A pesar de haber utilizado los puntos en el plano como representación de los números complejos, no recurrió a ningún tipo de geometría relacionada con el plano para resolver el problema planteado. Además, el resultado que obtuvo fue erróneo.

De las respuestas obtenidas durante la entrevista así como de los resultados del cuestionario que H respondió, se detectaron las siguientes dificultades en su conceptuación de los números complejos.

– La estudiante comprendía cuál es la parte real y cuál es la parte imaginaria de un número complejo al emplear la representación $z = x + iy$. Sin embargo, cuando empleaba la representación de los números complejos como puntos de la forma (x, iy), la noción de parte imaginaria de un número complejo se transformó, pues desde este punto de vista la estudiante no concibió la parte imaginaria como un número real.

– La alumna concebía al número i como un número definido, es decir, $i = \sqrt{-1}$ por definición. Su concepción geométrica de éste y de los demás números complejos era limitada.

– H se valió únicamente de la aritmética de los números complejos para resolver problemas relacionados con su suma y su potenciación. Aunque podía resolver la mayoría de los ejercicios de manera correcta, su conocimiento de los números complejos se reducía a su correcta manipulación aritmética. H no externó algún conocimiento más profundo relacionado con los números complejos. A pesar de manejar una metáfora que relaciona a los números complejos con puntos en el plano, esta representación no era significativa para H, no la utilizó para ningún ejercicio propuesto y consideró que para ella era más claro manipular los números complejos desde su perspectiva aritmética únicamente, se limitaba a los algoritmos.

– Al principio de la entrevista H manifestó que los números complejos le eran ajenos por ser un conjunto que no manejaba con frecuencia. Sus argumentos llevaron a la conclusión de que H no tenía ningún referente para los números complejos antes de sus estudios universitarios, después de haber cursado la materia de variable compleja I H no podía generar una idea distinta de los números complejos basada en experiencias matemáticas previas; prefirió trabajar únicamente de manera algorítmica con estas cantidades. Así que después de un curso de variable compleja I, para H no había referentes geométricos útiles para los números complejos.

Análisis de la entrevista de K, estudiante de bachillerato de la asignatura de matemáticas III

La primera estudiante de bachillerato seleccionada para ser entrevistada será llamada K a lo largo de este análisis. K era estudiante de cuarto semestre al momento de la entrevista. Pertenecía a un grupo especial denominado grupo PAI (programa de acreditación inmediata) de matemáticas III, integrado por estudiantes de cuarto semestre de los turnos matutino y vespertino del CCH Vallejo que únicamente adeudaban la materia de matemáticas III de tercer semestre.

Durante la enseñanza de los números complejos en el aula, a manera de introducción, la profesora de K preguntó: ¿Los fantasmas existen? Varios estudiantes contestaron que no, otros respondieron: “depende”. La maestra habló sobre definir qué es un fantasma y de cómo a partir de esa definición se puede determinar si algo es un fantasma.

Los números complejos se trabajaron en la clase de K durante el estudio de la parábola. La profesora habló sobre la ubicación del vértice y las intersecciones de la parábola con los ejes coordenados X y Y. Dada la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, asoció las intersecciones de su gráfica cartesiana con el eje X a las raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, es decir, a las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. En estas condiciones la profesora planteó la necesidad de definir a los números complejos, pues existen parábolas que no se intersecan con el eje X, y esto no implica que los polinomios asociados a ellas no tengan raíces. Para motivar la definición de $i = \sqrt{-1}$, la profesora trabajó con las parábolas cuyas ecuaciones son $y = 8x^2 - 4x - 3$ y $y = -8x^2 - 4x - 3$. La gráfica de la primera de ellas se interseca con el eje X, mientras que la gráfica de la segunda no.

Bajo estas condiciones, K conceptuó a los números complejos utilizando la metáfora de enlace: *Los números complejos son las raíces de un polinomio de segundo grado.* Las concepciones de K sobre la existencia de un número pusieron en juego esta metáfora.

Con el fin de ahondar en las respuestas que cada uno de los tres estudiantes de bachillerato proporcionó en el cuestionario, se diseñó un conjunto de preguntas relacionadas con dichas respuestas. Sin embargo, a causa de que la estudiante K así como sus compañeros externaron que no recordaban con claridad las respuestas que dieron a las preguntas del cuestionario, se retomó este instrumento de investigación y se leyó íntegramente con cada estudiante. Se insertaron las preguntas correspondientes en el momento propicio durante la lectura de las preguntas y las respuestas. La guía para la entrevista semiestructurada realizada a K fue la siguiente.

1.- En el cuestionario escribiste que un número complejo es la raíz cuadrada de un número negativo. ¿Con qué raíz cuadrada de un número negativo se asocia a $2i$?

2.- ¿El número $-5i$ es un número complejo? ¿El número $\sqrt{-7}$ es un número complejo?

3.- En el cuestionario escribiste: “Un número imaginario es aquel que está en la recta pero no existe”. ¿En qué parte de la recta se ubica $\sqrt{-2}$?

4.- ¿En qué parte de la recta se ubica *i*?

5.- ¿Qué quieres decir cuando explicas que un número imaginario es aquel que no existe?

6.- ¿Qué diferencia hay entre un número complejo y un número imaginario?

Los resultados obtenidos en el cuestionario y la entrevista fueron los siguientes.

Pregunta 1

En el cuestionario escribiste que un número complejo es la raíz de un número negativo. ¿Con qué raíz cuadrada de un número negativo se asocia a 2i?

En la pregunta 1 del cuestionario, *¿Qué es un número complejo?*, la estudiante K se refirió a estos números como un resultado de las raíces cuadradas de los números negativos. Esto se muestra en la figura 5.34.

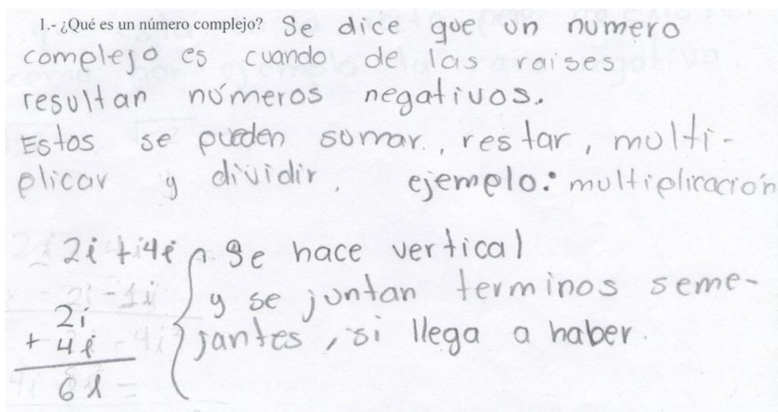


Figura 5.34. Número complejo es la raíz de un número negativo

Obsérvese que K señaló como ejemplos de números complejos a $2i$ y $4i$. En este contexto se le preguntó sobre la relación de $2i$ con la raíz cuadrada de algún número negativo.

I: …entonces, en un principio dijiste que estos números resultan de las raíces de los números negativos.

K: Sí, según yo.

I: Entonces, ¿de dónde sale $2i$?

K: Sólo fue un ejemplo para explicar cómo se hacían diferentes operaciones, de la suma resta, y así. Sólo fue que se me ocurrió.

I: ¿Cómo se relaciona con la raíz de algún número negativo? Porque explicaste que éstos [los números complejos] salen de las raíces cuadradas de los números negativos. ¿Con qué raíz cuadrada de un número negativo se puede relacionar 2*i*?

K: Ay pues… yo apliqué que eran raíces negativas.

I: Ajá.

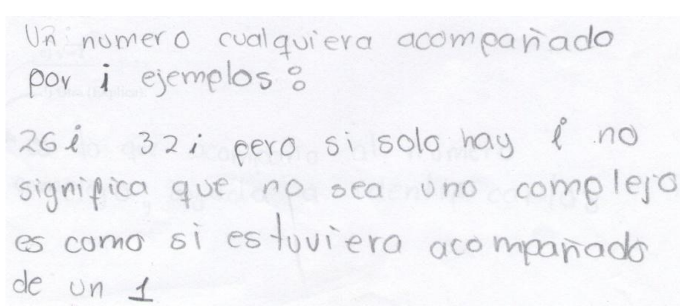
K: Porque sólo fue lo que me llegó a la mente, no me acordé bien en ese instante.

K no pudo relacionar el número 2*i* que ella misma proporcionó como ejemplo de número complejo con la raíz cuadrada de algún número negativo de acuerdo con lo que escribió en el cuestionario. Así, esta concepción de número complejo no le resultaba fácil de aplicar, puede entenderse como un intento de memorización de una definición. Obsérvese que K dijo respecto al porqué de sus ejemplos: “no me acordé bien en ese instante”. Por otra parte, nótese que la estudiante sólo proporcionó números imaginarios como ejemplos de números complejos; en su respuesta no consideró a los números reales ni a los números de la forma $a + bi$.

Pregunta 2

¿El número –5i es un número complejo? ¿El número $\sqrt{-7}$ *es un número complejo?*

En la pregunta 2 del cuestionario, *¿Cómo se representa un número complejo?*, K expresó que un número complejo es cualquier número acompañado por la letra *i*, como se muestra en la figura 5.35.



Un numero cualquiera acompañado
por i ejemplos:
26i 32i pero si solo hay i no
significa que no sea uno complejo
es como si estuviera acompañado
de un 1

Figura 5.35. Representación de un número complejo

Con base en esta respuesta se le preguntó a la estudiante: ¿El número –5*i* es un número complejo? ¿El número $\sqrt{-7}$ es un número complejo? Su respuesta se observa en el siguiente fragmento de la entrevista.

I: Entonces… este número, el número –5*i*, ¿es un número complejo?
K: Mmmm… sí.
I: Y el número $\sqrt{-7}$, ¿es un número complejo?
K: Pues, al igual que está dentro de una raíz sí sería un número complejo porque es inexacto y es negativo, a pesar de que no está acompañado de una *i*.
I: Entonces dices que es complejo porque es un número negativo adentro de una raíz. ¿Aunque no tenga la *i*?
K: Sí, es imaginario.

En la respuesta que K escribió en el cuestionario puede notarse que la estudiante concebía a *i* como un símbolo que le permitía identificar a un número complejo. Sin embargo, esta no era la única manera que tenía K para reconocer dichos números. Obsérvese que K afirmó que el número $\sqrt{-7}$ es un número complejo a pesar de no estar acompañado por la letra *i*. Argumentó que es un número negativo dentro de un radical, es decir, utilizó su definición de número complejo. Por otra parte, sobresale que consideró a $\sqrt{-7}$ como un número complejo por ser inexacto, y aclaró que es un número imaginario. En este momento de la entrevista aún no se distinguía si para K existía alguna diferencia entre número complejo y número imaginario. Esto se verá más adelante.

Pregunta 3

En el cuestionario escribiste: "Un número imaginario es aquel que está en la recta pero no existe". ¿En qué parte de la recta se ubica $\sqrt{-2}$?

En la pregunta 3 del cuestionario, *¿Qué es un número imaginario?*, K respondió: "Un número imaginario es aquel que está en la recta pero no existe, como por ejemplo la raíz negativa". Agregó dos ejemplos de números imaginarios, $\sqrt{-7}$ y $\sqrt{-2}$, como se observa en la figura 5.36.

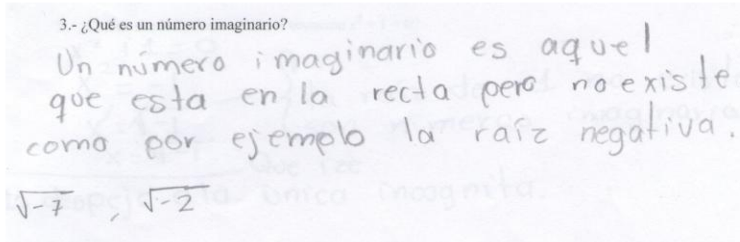


Figura 5.36. Un número imaginario no existe

Otra concepción que tenía K de los números imaginarios era que son puntos inexistentes que pueden ubicarse en la recta. Para profundizar en esta idea y tomando en cuenta los ejemplos que ella misma proporcionó, se le preguntó sobre la ubicación de $\sqrt{-2}$. Sus respuestas aparecen en el siguiente fragmento en extenso de la entrevista.

I: …[en el cuestionario] te preguntamos sobre los números imaginarios y escribiste: “un número imaginario es aquel que está en la recta pero no existe”. Entonces, ¿$\sqrt{-2}$ en qué parte de la recta lo ubicas?

K: Pues… haz de cuenta que primero graficas y está dentro de la…

I: A ver, si quieres, puedes realizar un esquema aquí o…

K: ¿Un boceto o algo? Bueno, la maestra, nuestra profesora nos explicó que tenías tu plano cartesiano, estaba así [dibuja una línea horizontal que será llamado eje *X* aunque K no lo haya etiquetado explícitamente, y una línea vertical que será llamado eje *Y*]. Y tu… esta… [dibuja una parábola vertical que no se interseca con ni toca al eje *X*]… estaba así. (Obsérvese la figura 5.37.)

Figura 5.37. Parábola en el plano

I: Ajá.

K: Pero que, dentro de la fórmula salía otro que podía estar por aquí [dibuja el punto señalado por una flecha en la figura 5.38], que era como una intersección, pero como estaba en negativo significaba que era parte pero no estaba dentro de [en] la parábola.

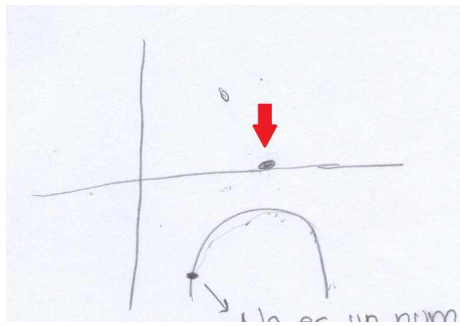


Figura 5.38 Resultado del discriminante negativo

I: Entonces trazaste una parábola que no está tocando al eje de las *X*'s.

K: No, pero dentro de éste [señala la parábola] existía un punto que era una raíz imaginaria.

Después de esta explicación se le pidió a K ubicar $\sqrt{-2}$ en el esquema que había trazado. La entrevista continuó de la siguiente manera.

I: Entonces, ¿podrías ubicar $\sqrt{-2}$ aquí, en este esquema que me muestras?

K: Sólo sería sacándola con la calculadora.

Se proporcionó una calculadora a la estudiante con la finalidad de que pusiera en práctica su idea para ubicar $\sqrt{-2}$ en el plano cartesiano. Después de realizar la operación en la calculadora K llegó a la siguiente conclusión.

K: Sería $\sqrt{-2}$ y [la calculadora] te marca rápido el error porque es imaginario. Igual que aquí, dice que está aquí [señala la parábola] pero no está dentro de ahí.

Este segmento en extenso de la entrevista proporciona varios elementos que intervienen en la conceptuación de los números imaginarios de esta estudiante. En su explicación K hizo alusión a la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado cuando dijo: "…pero que, *dentro de la fórmula* salía otro que podía estar por aquí…", a las raíces de un polinomio de segundo grado, es decir, un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, cuando dijo: "dentro de éste existía un punto que era *una raíz imaginaria*" y a la representación de estas raíces mediante las intersecciones de la gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, asociada al polinomio $ax^2 + bx + c$, con el eje X.

La estudiante afirmó implícitamente que si se utiliza la fórmula general de resolución para ecuaciones de segundo grado, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para encontrar las raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, es decir, para hallar las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, puede suceder que el discriminante $b^2 - 4ac$ sea un número negativo. Luego, según K, existiría una especie de intersección entre la parábola y el eje X; la estudiante dijo textualmente: "Pero que, dentro de la fórmula salía otro que podía estar por aquí, que era como una intersección, pero como estaba en negativo significaba que era parte pero no estaba dentro [en] de la parábola". No hay que perder de vista que con estaba explicación la estudiante está intentando representar geométricamente un número imaginario.

La estudiante K sabía que las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (puede existir una única solución de multiplicidad 2) encontradas con la fórmula general eran las abscisas de los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ que deberían ser parte de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ (por lo menos sabe que así funcionan las cosas cuando x_1 y x_2 son números reales). Sin embargo, no logró comprender cómo esas soluciones eran puntos ubicados en el eje X si la gráfica de la parábola no tocaba ni intersecaba con dicho eje. Por otra parte, si la ordenada de dichos puntos fuera diferente de 0, de acuerdo con el modelo geométrico de raíz de un polinomio de grado 2 planteado en clase, los números x_1 y x_2 no solucionarían la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Lo que K podría estarse planteando es lo siguiente: Si consideramos la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, y se hace $y = 0$ para encontrar las intersecciones de la gráfica de la parábola con el eje X, las soluciones forman parte de la gráfica de la parábola. Si no son parte de la parábola, ¿por qué decimos que la ecuación propuesta sí tiene solución? Quizás de aquí se desprenda el hecho de que K consideraba a los números imaginarios, aunque en realidad quiso decir a los números complejos, como intersecciones inexistentes, o en sus propias palabras: “era como una intersección, pero como estaba en negativo significaba que era parte pero no estaba dentro de [en] la parábola”.

Este modelo planteado por K obedece a la explicación que recibió en clase sobre las raíces de los polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, tales que el discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es negativo. En su clase se planteó que dichas ecuaciones sí tenían solución pero no se manejó un modelo geométrico que pudiera ilustrar esto. Por otra parte, en la explicación que K intentó dar para representar geométricamente $\sqrt{-2}$ dejó ver que para ella todo número complejo era un número imaginario.

A partir del análisis de esta pregunta de la entrevista se muestran las dos metáforas que K utilizó para conceptuar a los números imaginarios:

Metáfora 1

Los números imaginarios son las raíces de los polinomios de la forma $\mathrm{ax^2 + bx + c}$, *tales que la ecuación* $\mathrm{ax^2 + bx + c = 0}$ *tiene discriminante menor que* 0.

Metáfora 2

Los números imaginarios son las intersecciones de la gráfica de $\mathrm{y = ax^2 + bx + c}$ *con el eje* X, *donde* $\mathrm{ax^2 + bx + c = 0}$ *tiene discriminante menor que* 0.

Cuadro 5.9. Elementos de la metáfora 1

Dominio Fuente	Dominio destinatario
Ser una raíz del polinomio $ax^2 + bx + c$ donde $ax^2 + bx + c = 0$ tiene discriminante menor que 0	Ser un número imaginario

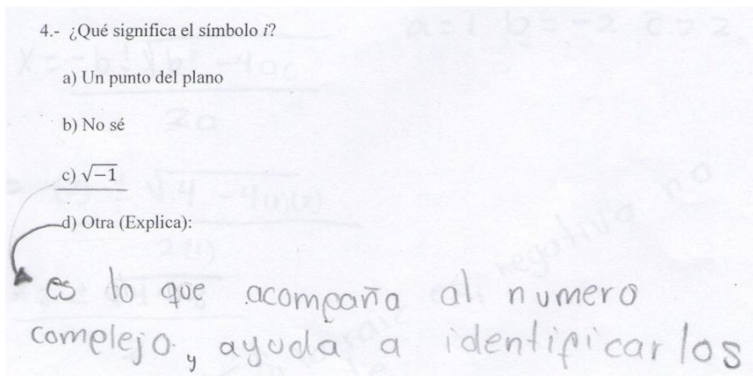
Cuadro 5.10. Elementos de la metáfora 2

Dominio Fuente	Dominio destinatario
Ser una intersección inexistente de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ con el eje X	Ser un número imaginario
Ser un punto del eje X que soluciona la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y que no es parte de la parábola $y = ax^2 + bx + c$	Ser un número imaginario

Pregunta 4

¿En qué parte de la recta se ubica i?

En el cuestionario se planteó la siguiente pregunta de opción múltiple: ¿Qué significa el símbolo *i*? Las opciones eran: *a)* un punto en el plano, *b)* no sé, *c)* $\sqrt{-1}$, y *d)* otra (explica). La estudiante K eligió dos respuestas, la opción *c)* $\sqrt{-1}$, y la opción *d)* otra (explica) en donde escribió: “es lo que acompaña al número complejo y ayuda a identificarlo”, como se muestra en la figura 5.39.



4.- ¿Qué significa el símbolo *i*?

a) Un punto del plano

b) No sé

c) $\sqrt{-1}$

d) Otra (Explica):

es lo que acompaña al numero complejo, y ayuda a identificarlos

Figura 5.39. *i* como símbolo

Sobresale que antes de considerar a *i* como un número, la estudiante lo reconoció como un símbolo que le permitía identificar a los números complejos. Para K no era totalmente claro el significado de *i*, como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista.

I: Escribiste: “[*i*] es lo que acompaña al número complejo y ayuda a identificarlo”. Entonces, ¿*i* es un símbolo que me ayuda a identificar a los números complejos?

K: [Asiente] A los números complejos.

I: Y a la vez *i* representa…

K: La raíz de un número negativo.

I: ¿La raíz de un número negativo cualquiera?

K: Sí.

I: Entonces, por ejemplo, el número $\sqrt{-2}$.

K: Ajá.

I: Ése, ¿cómo se representa en términos de *i*?

K: Me acuerdo que solamente se pasaba el 2 y se le agregaba una *i*, 2*i*.

I: 2*i*, y entonces, ¿*i* sería nada más $\sqrt{-1}$?

K: Ajá.

Nótese que K externó que *i* era un símbolo que ayudaba a identificar a los números complejos y también afirmó que era la raíz cuadrada de un número negativo cualquiera. Sin embargo, a pesar de esta afirmación, sostuvo que *i* = $\sqrt{-1}$. Por otra parte, obsérvese que la estudiante relacionó erróneamente al símbolo *i* con $\sqrt{-2}$ diciendo que $\sqrt{-2}$ = 2*i*. Esta idea vaga sobre *i* como un número imaginario cualquiera se reafirmó cuando se le preguntó sobre la ubicación de *i* en el plano cartesiano, pues en las preguntas anteriores K dejó ver que conceptuaba a los números imaginarios como puntos que podían ubicarse en dicho plano.

I: Entonces ¿podrías ubicar $\sqrt{-1}$ en este plano que tienes aquí dibujado?

K: Sería como una *i* sola, ya te había dicho que $\sqrt{-1}$ era igual a *i*. Entonces podríamos marcar que ésta va por aquí [dibuja el punto señalado con una flecha en el cuadrante superior derecho del esquema que dibujó anteriormente, mostrado en la figura 5.40], dependiendo.

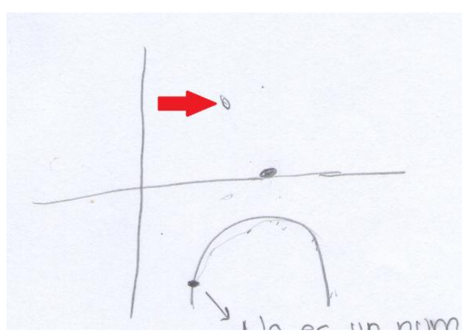


Figura 5.40. Ubicación de *i* en el plano

Cuando K afirmó respecto a i, “podríamos marcar que ésta va por aquí, dependiendo” confirma que a pesar de asociar el número $\sqrt{-1}$ al símbolo i, no lo consideraba una constante, la estudiante externó que el número i podía cambiar según el número imaginario al que se ligara.

En este momento de la entrevista surgió la siguiente declaración de K que puede dar luz sobre el porqué de algunas dificultades que enfrentó en su proceso de conceptualización de los números complejos.

K: Eso es igual en lo que yo me hago bolas, porque no sé cómo graficar un número complejo.

I: No sabes cómo graficar un número…

K: No.

I: O sea que, ¿no tienes un referente geométrico?

K: Sí, no tengo idea de cómo se ponen negativos, positivos o eso, más bien.

Pregunta 5

¿Qué quieres decir cuando explicas que un número imaginario es aquel que no existe?

Como ya se mencionó, en la pregunta 3 del cuestionario, *¿qué es un número imaginario?*, la estudiante K respondió: “Un número imaginario es aquel que está en la recta pero no existe, como por ejemplo la raíz negativa, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{-2}$”.

Recuérdese que la estudiante desarrolló sus concepciones sobre los números complejos, y en particular sobre los números imaginarios, en el contexto del estudio de las raíces de un polinomio de grado 2 que se ilustró mediante las intersecciones de la parábola, asociada al polinomio, con el eje X. En el siguiente fragmento de entrevista se habla respecto a la inexistencia de los números imaginarios expresada por K.

I: Ahora, cuando dices, “un número imaginario es aquel que está en la recta pero no existe”, ¿A qué te refieres con “no existe”?”

K: Bueno, es… sí es como que existe, pero no está dentro de [en] esta parábola; o sea, no está dentro de [entre] estos puntos que están aquí [señala la parábola], sino que está afuera de la figura.

I: De acuerdo. ¿Pero en el plano existe?

K: Sí, algo así.

I: Entonces, si nos trasladamos a este contexto, el contexto de la parábola en el plano cartesiano…

K: Ajá.

I: ¿Tú relacionas los números imaginarios con las intersecciones de la parábola con alguno de los ejes?

K: Mmmm… no sólo con las intersecciones, sino que, no sólo pueden estar en la intersección de aquí [señala un punto de la recta horizontal que trazó como eje], sino en la de aquí o más para acá [señala puntos cualesquiera en el plano que forman parte de la parábola].

I: Ajá. Entonces, te refieres a que no existen cuando ese punto no está…

K: En la parábola.

I: Y entonces, digamos, todos estos puntos que están aquí en [señala los puntos de la parábola], esos sí serían…

K: Pertenecientes y positivos.

I: Esté sería un número…

K: Ajá.

I: ¿Es un número complejo? [Señala un punto de la parábola que la estudiante dibujó.]

K: Mmmm… no porque éste sí está adentro de [en] la parábola.

I: Está adentro de [en] la parábola.

K: Y existe.

I: Entonces, si le pones aquí por favor que no es un número complejo [la estudiante hace la anotación en el esquema; véase la figura 5.41]. De acuerdo. Entonces ya me queda clara tu concepción respecto a lo que es un número complejo.

Figura 5.41 Ubicación de los números complejos en el plano

Obsérvese que K clasificó a los números como existentes o inexistentes según que formaran parte o no de la parábola asociada al polinomio cuadrático del que se deseaba conocer sus raíces. Así, un punto que "existe" en determinada parábola puede no existir en otra, es decir, un número puede existir bajo determinadas condiciones pero no en otras. Este razonamiento reafirma su concepción limitada por el modelo geométrico planteado para representar las raíces de un polinomio cuadrático, modelo que no le permitió identificar dichas raíces en el plano cuando se trataba de números complejos. Nuevamente afirmó que un número imaginario era aquel que formaba parte de la parábola pero no estaba en ella por alguna razón que no pudo expresar. Así, esos números que forman parte de la parábola pero que no están en ella son los números complejos. Todo punto de la parábola es un número que existe y que por tanto no es un número complejo. Nótese que se le preguntó a K si el punto señalado en la parábola era un número complejo, y no se le preguntó si era un número imaginario. Esto dio pie a preguntar sobre las distinciones que la estudiante expresó entre número complejo y número imaginario y se mostrará más adelante. En este fragmento de la entrevista se rescata la siguiente metáfora:

Los números complejos son los puntos que no están en la gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ *pero que son soluciones de la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$.

Cuadro 5.11.Elementos de la metáfora *los números complejos son los puntos que no están en la gráfica de la parábola* $y = ax^2 + bx + c$ *pero que son soluciones de la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$.

Dominio Fuente	Dominio destinatario
Ser un punto de la parábola $y = ax^2 + bx + c$	No ser un número complejo

Por otra parte, en la pregunta 5 del cuestionario, *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 + 1 = 0$*?*, y en la pregunta 6, *¿cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 – 2x + 2 = 0$*?*, la estudiante K contestó de manera correcta despejando *x* en la pregunta 5 y utilizando la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas en la pregunta 6. Sin embargo, en ambos casos concluyó que las soluciones encontradas no existían como se muestra en la figuras 5.42 y 5.43.

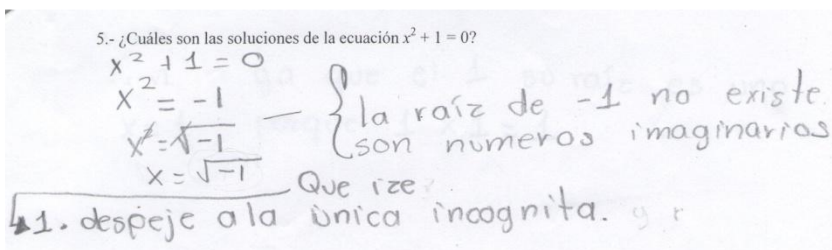


Figura 5.42. Resolución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$

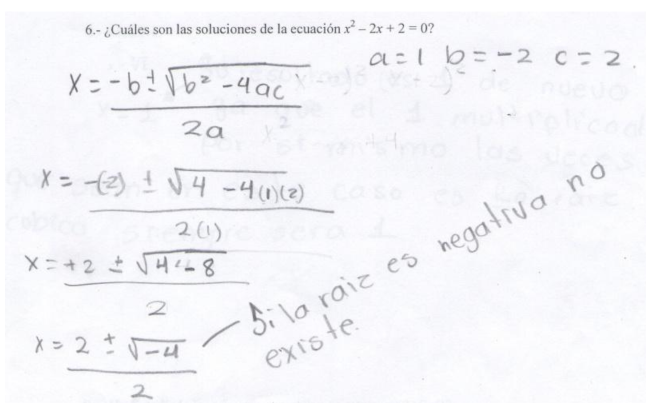


Figura 5.43. Resolución de la ecuación $x^2 – 2x + 2 = 0$

En la pregunta 5 la estudiante K sólo consideró la solución $x = \sqrt{-1}$. Obsérvese que escribió: “La raíz de –1 no existe, son números imaginarios”. En la pregunta 6, respecto a las soluciones $x = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$ escribió: “Si la raíz es negativa, no existe”. Con relación a la solución de la ecuación $x^2 +1 = 0$ y a la existencia o inexistencia de los números en el contexto geométrico de la parábola asociada al polinomio y sus raíces, considérese el siguiente fragmento de la entrevista.

I: Llegas a que $x = \sqrt{-1}$. Y escribiste, “la raíz de –1 no existe, son números imaginarios”. Aquí, en este caso no tenemos parábola.
K: Ni ninguna figura.
I: Ni ninguna figura. Pero entonces, ¿por qué dices que no existe? Porque yo entiendo que acá [en momentos previos de la entrevista] me dices que la existencia del número depende de si está o no…
K: En la parábola.
I: ¿Y acá, entonces?
K: Pues aquí como que, mmm… no es lo mismo que diga $x = i$, aunque sí coincide con que, con lo que aquí te había dicho que $\sqrt{-1} = i$.
I: Ajá.
K: Aquí me refiero a que es éste [señala la ecuación $x = \sqrt{-1}$], al resolverla te da un número imaginario, es por eso que no existe.
I: Es por eso que no existe. Entonces, ¿qué características debe de tener un número para que exista?
K: Mmm… bueno, aquí sería que dentro de la raíz estuviera un número positivo, para que pueda existir dentro del plano.

En las respuestas de K se hace evidente que asume a las raíces cuadradas de los números negativos como inexistentes por el hecho de que el número dentro del radical es un número negativo. La estudiante no pudo asociar una parábola en particular con la ecuación propuesta, ni recurrió a otro argumento de tipo geométrico como los que propuso anteriormente para justificar la inexistencia de la solución de la ecuación. Cuando se le dijo: “Aquí no tenemos parábola”, ella agregó: “Ni ninguna figura”. Así, la conceptuación limitada que K tiene sobre los números imaginarios como puntos que no están en las parábolas asociadas a polinomios de segundo grado no tiene conexión alguna para ella con el problema algebraico de resolver una ecuación cuadrática del tipo $ax^2 + bx + c = 0$. Sin embargo, se rescata que recurre a su definición de número complejo, que hasta el momento no había relacionado con ningún modelo geométrico. Recuérdese que el modelo de la parábola fue empleado por K para referirse a los números imaginarios.

I: Entonces, los números imaginarios son aquellos que no existen. ¿Y los números imaginarios son números complejos?

K: Este… sí.

Pregunta 6

¿Qué diferencia hay entre un número complejo y un número imaginario?

Considerando que K conceptuó a los números imaginarios (a los que también catalogó como números inexistentes en las ecuaciones cuadráticas que resolvió en el cuestionario) como las raíces cuadradas de los números negativos y del mismo modo, según la pregunta 1 del cuestionario; *¿qué es un número complejo?*, caracterizó a los números complejos, surge la pregunta: ¿qué diferencia hay entre un número complejo y un número imaginario? El siguiente fragmento en extenso de la entrevista muestra información al respecto.

I: Escribiste que los números complejos resultan de…

K: Las raíces negativas.

I: Las raíces de los números negativos. Y en lo que me explicas acá, dices que un número imaginario son las raíces de los números…

K: Negativos.

I: Entonces, ¿un número imaginario es un número complejo?

K: Sí.

I: De acuerdo. Entonces, ¿dices que $-5i$ es un número complejo?

K: Sí.

I: ¿$\sqrt{-7}$ es un número complejo?

K: Sí.

I: ¿El número $\frac{1}{2} + 2i$ es un número complejo?

K: Mmm… digamos que estás juntando términos diferentes. El $2i$ sí es un término complejo y el $\frac{1}{2}$ no porque tiene un signo positivo y no está acompañado de ninguna *i*.

I: Entonces, ¿$2i$ es un número complejo?

K: Sí.

I: ¿Y también es un número imaginario?

K: Ajá.

I: ¿Hay alguna diferencia entre números complejos y números imaginarios? ¿O son la misma cosa?

K: Pues, son como que lo mismo pero tienen diferentes características, no sé, un imaginario simplemente está especificado aquí con la $\sqrt{-7}$.

I: Aja. ¿Ése es un número imaginario?

K: Ajá. Pero aquí complejo sería especificando más con la *i* como lo que puse en la otra [respuesta].

Obsérvese que nuevamente K hizo uso de *i* como un símbolo que le permitía reconocer a los números complejos. Por una parte consideraba al número $\sqrt{-7}$ como un número imaginario, por ser la raíz cuadrada de un número negativo, y por otra lo consideraba como un número complejo porque su definición de número complejo es esa: las raíces cuadradas de los números negativos. Sin embargo, la diferencia entre complejos e imaginarios radica en el uso simbólico de *i*. Esta postura se reafirmó cuando expresó lo siguiente.

I: Entonces, los números complejos están asociados con…

K: La *i*.

I: Se asocian con la *i*. ¿Y los números imaginarios?

K: Son los que aún están dentro de una raíz, que no han sido resueltos o algo así.

I: ¿Son las raíces [cuadradas] de los [números] negativos?

K: Ajá.

I: ¿Como por ejemplo $\sqrt{-7}$?

K: Ajá.

Otro asunto que debe hacerse notar es que K no consideró que los números de la forma $a + ib$ fuesen números complejos. Cuando se le preguntó, *¿El número* $\frac{1}{2} + 2i$ *es un número complejo?*, ella respondió: "Mmm… digamos que estás juntando términos diferentes. El $2i$ sí es un término complejo y el $\frac{1}{2}$ no porque tiene un signo positivo y no está acompañado de ninguna *i* ". De este modo, K expresó que los números complejos son las raíces cuadradas de los números imaginarios pero que se hacen evidentes al expresarlos de manera explícita utilizando el símbolo *i*, si al expresar un número imaginario no se utiliza el símbolo *i* y sólo se indica la raíz cuadrada de un número negativo, o en palabras de K, "la raíz no se resuelve", el número es imaginario. En la conceptuación de K de los números complejos no había cabida para los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales. Luego, para K los números reales no son números complejos.

Se detectaron las siguientes dificultades en la conceptuación de los números complejos.

– El modelo geométrico por medio del cual la estudiante conceptuó a los números imaginarios no le permitió hacer una identificación precisa de un número imaginario determinado. La estudiante no pudo ubicar en el plano cartesiano un número imaginario de la forma $\sqrt{-a}$, siendo a un número natural positivo, a pesar de que afirmó que los números imaginarios se pueden representar en dicho plano.

– La estudiante identificó a *i* con $\sqrt{-1}$, pero también utilizó a *i* como un símbolo que le permitía identificar a los números que ella llamó complejos considerando a *i* como la raíz cuadrada de cualquier número negativo.

– La estudiante consideró como números complejos únicamente a los números imaginarios.

– La estudiante considera al número $a + ib$ como 2 números, a e ib. No pudo entenderlo como una entidad.

– La estudiante pudo resolver ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general de resolución o despejando la incógnita elevada al cuadrado, aunque el discriminante de la ecuación sea menor que 0; pero no pudo asociar su modelo geométrico de número complejo a las soluciones de esta ecuación.

– La estudiante consideró a los números imaginarios como números inexistentes.

– Las dificultades relacionadas con la existencia o inexistencia de un número surgieron del modelo geométrico planteado en clase para motivar el estudio de los números complejos.

Análisis de la entrevista de D, estudiante de bachillerato de la asignatura de matemáticas III

La segunda estudiante de bachillerato seleccionada para ser entrevistada será llamada D. Sólo se trabajó con un grupo de CCH en esta investigación; la estudiante D pertenecía al mismo grupo PAI (programa de acreditación inmediata) de matemáticas III que la estudiante K.

En la introducción al análisis de la entrevista realizada a K, se describió cómo la profesora del grupo PAI de matemáticas III motivó el estudio de los números complejos en el contexto del estudio de las raíces de los polinomios de grado 2 por medio de las parábolas asociadas a dichos polinomios y sus intersecciones con el eje X. La estudiante D fue seleccionada para ser entrevistada porque su conceptuación de los números complejos no se relacionó con las condiciones propuestas por su profesora de clase. A pesar de las explicaciones geométricas de la profesora, D conservó sus ideas arraigadas en cursos anteriores sobre la imposibilidad de obtener las raíces cuadradas de un número negativo. Por otra parte, D relacionó el concepto de número complejo con el de número complicado o difícil. Además, se destaca que D externó al momento de la entrevista que recurrió a internet como medio de apoyo para buscar información sobre los números complejos una vez que se le informó sobre el interés de entrevistarla.

Como en los casos anteriores, se elaboró una entrevista semiestructurada acorde con las respuestas que D proporcionó en el cuestionario. Se leyeron las respuestas del cuestionario junto con la estudiante y en el momento adecuado se realizaron las preguntas pertinentes. La entrevista semiestructurada es la siguiente.

1.- Por favor, da un ejemplo de un número complejo.
2.- ¿En qué parte de la sucesión de números, que según tus respuestas al cuestionario representa a los números complejos, se ubica el número que diste como ejemplo?
3.- ¿Por qué los números negativos no tienen raíces cuadradas?
4.- ¿Un número imaginario es un número complejo?
5.- ¿*i* es un número complejo?
6.- ¿Hay alguna diferencia entre un número complejo y un número imaginario?

No se pudieron plantear todas las preguntas de la entrevista semiestructurada porque antes de comenzar la entrevista D externó que había cambiado de opinión respecto a algunas respuestas de su cuestionario. La estudiante manifestó que recurrió a internet para verificar sus respuestas y, al notar que sus razonamientos no concordaban con la información que obtuvo, elaboró nuevas reflexiones. Por este motivo se incluyeron otras preguntas surgidas en el momento de la entrevista. Los resultados obtenidos fueron los siguientes.

Pregunta 1

Por favor, da un ejemplo de un número complejo

Uno de los motivos por los que D fue seleccionada para ser entrevistada fue su respuesta a la pregunta 1 del cuestionario, *¿Qué es un número complejo?* La estudiante respondió: “Son todos aquellos números negativos. Un ejemplo podría ser deber dinero, si debes \$10 y pagas \$7 ahora deberás \$3, lo que es igual a –10 + 7 = –3”. (Véase la figura 5.44.)

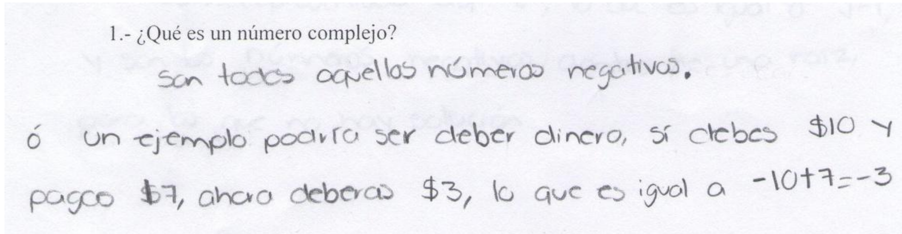


Figura 5.44. Los números complejos son números negativos según D

Sin embargo, cuando se le preguntó a D sobre esta respuesta, dijo que había encontrado información al respecto y que era diferente de las ideas que escribió en su cuestionario. Expresó lo siguiente en entrevista.

D: No. Bueno, este… ya he investigado acerca de esto y ya me di cuenta que dice que… bueno en internet, que un número complejo es la suma de un número real más uno imaginario. Entonces, en este caso podría ser un, este, digamos 7, como dice aquí, más un 5.

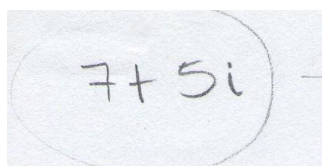


Figura 5.45. Ejemplo de número complejo según D

La estudiante D escribió $7 + 5i$ como ejemplo de número complejo (Véase la figura 5.45). A pesar de que su profesora sí se refirió a esta representación en clase, recurrió a otro medio para buscar información. En el siguiente fragmento de entrevista se puede leer respecto a su respuesta en el cuestionario.

I: Entonces, aquí no sé, más bien a lo mejor tenías otra…
D: Sí, sí… tenía otra idea, como número complejo es como… como complicado no sé, eso me…
I: ¿Y te hizo pensar en los números negativos?

D: En los negativos, ajá. Porque dije: como complejo, ¿pues cuáles? Se me hizo así como complicado, más bien lo relacioné y ya.

Obsérvese que la estudiante utiliza la palabra "complejo" en el sentido de complicado para tratar de identificar a los números complejos. Ella afirmó: "número complejo es como, como complicado no sé…" y los números que consideró complicados fueron los números negativos. Buscó un ejemplo metafórico para explicar los números negativos: las deudas de dinero. Escribió: "…si debes \$10 y pagas \$7 ahora deberás \$3, lo que es igual a $-10 + 7 = -3$".

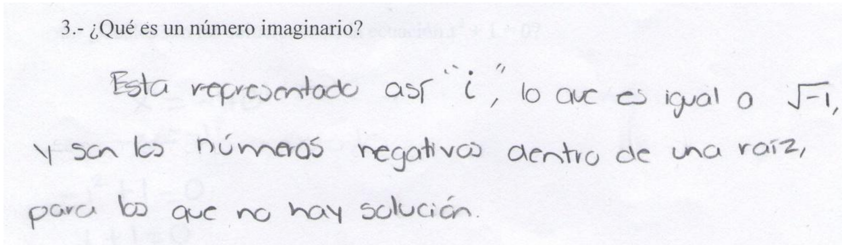
De la respuesta que D dio a la pregunta 1 del cuestionario se puede inferir la necesidad de la estudiante de tener un modelo concreto que le permitiera comprender qué es un número complejo. Después de buscar información en internet sobre los números complejos, cambió de opinión y en la entrevista dijo, en otras palabras, que un número complejo es un número de la forma $a + ib$. Cuando se le preguntó cómo se representa un número complejo, explicó: "…Ahorita ya serían… cualquier número, uno así infinito con i...". Cuando D dijo infinito se refería a un número cualquiera aunque fuese un número muy grande. Nótese que su nueva concepción de número complejo está ligada al número i.

La pregunta 2 de la entrevista semiestructurada; *¿En qué parte de la sucesión de números, que según tus respuestas al cuestionario representa a los números complejos, se ubica el número que diste como ejemplo?*, no pudo plantearse; pues como ya se mencionó, la estudiante externó reflexiones diferentes durante la entrevista.

Pregunta 3

¿Por qué los números negativos no tienen raíces cuadradas?

La estudiante D contestó a la pregunta 3 del cuestionario, *¿Qué es un número imaginario?*, de la siguiente manera; "Está representado así, 'i', lo que es igual a $\sqrt{-1}$, y son los números negativos adentro de una raíz, para los que no hay solución". (Véase la figura 5.46).


3.- ¿Qué es un número imaginario?

Esta representado así "i", lo que es igual a $\sqrt{-1}$, y son los números negativos dentro de una raíz, para lo que no hay solución.

Figura 5.46. ¿Qué es un número imaginario?

La estudiante se refirió a los números imaginarios como aquellos que no tienen solución. Se le preguntó al respecto y su respuesta puede leerse en el siguiente fragmento de la entrevista.

I: ¿A qué te refieres con que no tienen solución?

D: Bueno, porque recuerdo que vi en clase, no recuerdo por qué razón precisamente, pero la profesora nos explicó esto, creo que usted estuvo en la clase, pero que según este no tenía solución [señala $\sqrt{-1}$ que está escrito en su cuestionario]. Por eso es por lo que le puse que no tenía solución.

I: O sea, ¿no existe la raíz [cuadrada] de un número negativo? ¿A eso te refieres?

D: Bueno, es que en la calculadora sale como error.

I: Ajá.

D: Pero no sé si después… bueno, más bien sería como en un estudio ya para la carrera de matemáticas, yo creo, ya sería donde verían eso.

Debe aclararse que, como ya se explicó antes, la profesora de D preguntó a modo de introducción en el estudio de los números complejos, *¿Los fantasmas existen?* Es probable que D haya sido de los estudiantes que afirmaron que los fantasmas no existen. A pesar de que la profesora explicó que bastaba con definir qué era un fantasma para determinar su existencia o inexistencia, al parecer sus argumentos no fueron suficientemente convincentes para D. La profesora expuso a sus estudiantes que los números complejos son números del tipo $a + ib$, siendo a y b números reales. Además, definió al número i como $\sqrt{-1}$, y dadas estas “sencillas reglas”, afirmó que los números negativos sí tienen raíces cuadradas, contrario al discurso escolar promovido en algunos cursos de matemáticas de secundaria o en cursos previos en el mismo bachillerato. La profesora explicó que un número de la forma $\sqrt{-n}$, siendo *n* un número natural, puede escribirse como $\sqrt{n}\, i$.

Por otra parte, la profesora de D no era consciente de las consecuencias que una metáfora como la que utilizó puede acarrear en el pensamiento de sus estudiantes. La referencia a los fantasmas en el discurso didáctico de la profesora, como un recurso para alegar la existencia de una entidad a partir de caracterizarla, probablemente influyó en la determinación de D al afirmar que no era posible encontrar las raíces cuadradas de un número negativo. Un fantasma puede caracterizarse; sin embargo, depende de cada individuo *creer* en su existencia o no. La estudiante aceptó que $i = \sqrt{-1}$. Sin embargo, esta igualdad matemática es una definición que en algún momento apareció en el pizarrón, a la que no le atribuyó una utilidad o razón de ser. Consideró que para comprender su significado se requerían estudios universitarios avanzados en matemáticas. Según lo que externó, entender por qué los números negativos sí tienen raíces cuadradas era algo fuera de su alcance. Así, D mantuvo su idea arraigada sobre la imposibilidad del asunto.

En este mismo tenor, en la pregunta 6 del cuestionario, *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 - 2x + 2 = 0$*?*, la estudiante D utilizó la fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. La estudiante utilizó de manera adecuada la fórmula; sin embargo, no logró obtener las soluciones correctas. (Véase en la figura 5.47, encerrado en un rectángulo, que una de sus soluciones es $x_2 = \frac{0}{2}$). En la entrevista la estudiante externó que esa solución le causaba conflicto porque no entendía cómo 0 podía dividirse entre 2. Este comentario muestra una dificultad relacionada con el cero. Sin embargo, en lo que atañe a esta investigación, otra dificultad en la resolución de la ecuación se hace evidente en la parte encerrada con óvalos en la misma figura.

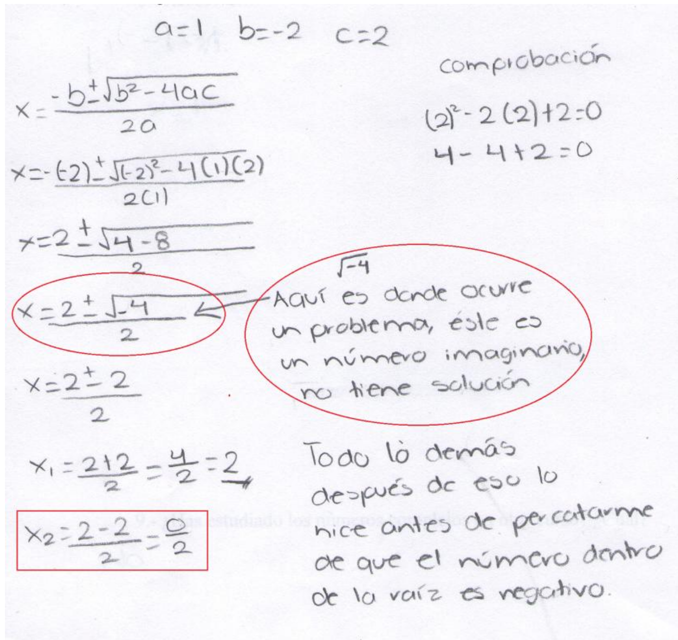


Figura 5.47. Resolución de la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$

Obsérvese que el discriminante de la ecuación es –4. La estudiante agregó: “Aquí es donde ocurre un problema, éste es un número imaginario, no tiene solución”. Para eludir la dificultad, D obtuvo la raíz cuadrada de 4 y continuó el procedimiento. En la entrevista se le preguntó al respecto y contestó de la siguiente manera.

I: Vamos a la pregunta 6. Dice: *¿cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 - 2x + 2 = 0$*?* Utilizaste la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas. Y aquí especificaste quién es *a*, el valor de *a* es 1, el valor de *b* es –2, el valor de *c* es 2 y realizaste los cálculos.

D: El cálculo. Pero aquí fue donde me atoré, por aquí [señala la parte encerrada en un rectángulo en la figura 5.47]. Aquí, por ejemplo, en el resultado x_2 quedaría así, entonces es cuando ya no sé cómo, por qué 0 entre –2.

I: A ver, regresemos a este paso, aquí.

D: Ajá.

I: Cuando tú llegas [a este punto], dices que $x = 2 \pm \sqrt{-4}$. Eso es el numerador, todo eso sobre 2. Y aquí haces una observación.

D: Es donde ocurre el problema porque es número imaginario.

I: ¿Te refieres a $\sqrt{-4}$?

D: A $\sqrt{-4}$.

I: Y escribes: "Aquí es donde ocurre el problema, esto es un número imaginario y no tiene solución".

D: No tiene solución.

I: Entonces, como no tiene solución, lo que tú hiciste fue que sacas la raíz de 4 únicamente.

D: Ajá.

Cuando la estudiante dijo "no tiene solución" respecto a $\sqrt{-4}$ se refería a que no puede obtener las raíces cuadradas de –4. Obsérvese que D argumentó su manera de proceder diciendo que $\sqrt{-4}$ es un número imaginario y no tiene solución, pone énfasis en esta situación cuando dice: "Es donde ocurre el problema porque es número imaginario"; y después agregó: "No tiene solución". La estudiante juzgó al discriminante negativo de una ecuación cuadrática como una limitante que le impidió continuar el desarrollo aritmético de la fórmula de resolución.

Como ya se mencionó antes, D atribuyó a *i* dos significados: *1)* $i = \sqrt{-1}$, y *2)* es el símbolo que le permitía identificar a un número imaginario. Teniendo en cuenta esto, se le preguntó si la idea de $i = \sqrt{-1}$ podría ayudarle a evitar su dificultad aritmética.

I: … ¿Y no te podría ayudar un poco lo que tú me dices acá [en la pregunta 3]? Sabes que *i* es igual a $\sqrt{-1}$.

D: ¿Ayudar?… ¿cómo?

I:¿Tú crees que puedes representar a $\sqrt{-4}$ utilizando *i*? Hacer alguna transformación aritmética o representar de alguna otra manera a $\sqrt{-4}$ valiéndote de *i*?

D: Mmmm… no, no se me ocurre cómo podría.

I: Entonces, consideras que esto te limita.

D: Amm, sí. Bueno, porque nunca me había pasado que en una fórmula general… pues normalmente todo marcha bien y en las raíces siempre son positivos. Hasta este momento en el que aquí me aparece un número negativo [señala la parte del radical en su aplicación de la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas], es donde ya no sé qué se hace, precisamente porque…

I: Es la raíz de un número negativo.

D: Ajá. Entonces, es un número imaginario y ya no sabría cómo seguir.

Este fragmento de la entrevista muestra que la estudiante confería un carácter totalmente simbólico al número *i*: no pudo relacionarlo con la raíz cuadrada de un número negativo, a pesar de que aceptaba que $i = \sqrt{-1}$.

Por otra parte, aunque la nueva postura de D respecto a los números complejos parecía ser clara, se le pidió clasificar algunos números. La estudiante afirmó que los números complejos son de la forma $a + ib$. Sin embargo, aunque consideró que *a* y *b* eran números reales, no tomó en cuenta los casos $0 + ib$ y $a + 0i$, como se muestra en el siguiente fragmento de la entrevista.

I: El número $\frac{1}{2} + 2i$, ¿es un número complejo?

D: Pues sí, porque éste es un número real [señala a $\frac{1}{2}$].

I: Bueno. El número $\sqrt{2} + i$, ¿es un número complejo?

D: Mmm... pues sí, yo creo que sí porque entra dentro de los números reales [se refiere a $\sqrt{2}$].

I: Entonces tú dices que sí porque $\sqrt{2}$ es un número real. Ahora, el número 3, ¿es un número complejo?

D: Mmm… pues creo que no porque no tiene la *i*, entonces no sería número imaginario, para empezar. Entonces sería un número real solamente.

I: A secas y hasta ahí.

D: Ajá.

I: Y el número $2i$, ¿es un número complejo?

D: Sería un número imaginario.

I: ¿Pero no es un número complejo?

D: Mmmm… nooo… bueno, no sé. Ahí es donde entro en confusión porque según es un número real más un número imaginario. Bueno, ahí es donde me quedo. Bueno, el concepto de número complejo. Entonces, cuando dices 2*i* es como si fuera solamente el imaginario. Entonces, para mí, sólo es un número imaginario.

Con este fragmento de la entrevista quedarían contestadas las preguntas 4, 5 y 6 que se habían diseñado como guía de la entrevista semiestructurada. La pregunta 4 es: *¿Un número imaginario es un número complejo?* Según la clasificación que la estudiante hizo, un número imaginario no es un número complejo porque carece de parte real. D no consideró que la parte real de un número imaginario sea 0. La pregunta 5 es: ¿i *es un número complejo?* En este tenor, la estudiante clasificó al número 2*i* como un número imaginario, pero no como un número complejo, pues desde su punto de vista no tiene parte real. Luego, habría clasificado al número *i* sería como un número imaginario, pero no como un número complejo. La pregunta 6 es: *¿Hay alguna diferencia entre número complejo y número imaginario?* Según las respuestas que la estudiante proporcionó, la diferencia entre número imaginario y número complejo radica en la aparición explícita de i. Un número complejo es de la forma $a + bi$, siendo, según la estudiante, ni a ni b igual 0. Un número imaginario para ella estaba asociado con la aparición de i; así, un número real no es un número complejo según D porque carece de parte imaginaria.

Se detectaron las siguientes dificultades en la conceptuación de los números complejos.

– La estudiante relacionó los números complejos con números complicados. Buscó una metáfora de tipo fundamental; es decir, trató de establecer la idea de número complejo en términos de experiencias diarias.

– La estudiante aceptó que $i = \sqrt{-1}$ de manera dogmática. Esto se comprobó cuando no pudo relacionar de alguna manera i con $\sqrt{-n}$ siendo n un número natural. Por otra parte, pensó a i como un símbolo que le permitía identificar a los números complejos.

– La estudiante comprendió que un número complejo tiene la forma $a + ib$ de manera limitada. Para ella los números reales no eran números complejos porque carecen de parte imaginaria, y los números imaginarios no eran números complejos porque no tienen parte real. No consideró que la forma $a + ib$ de un número complejo no impide que a o b sea igual a 0.

– La estudiante consideró que los números negativos no tienen raíces cuadradas.

Análisis de la entrevista de L, estudiante de bachillerato de la asignatura de matemáticas III

La estudiante que de aquí en adelante será llamada L también formó parte del grupo PAI de matemáticas III. Se seleccionó a la estudiante L porque fue la única que clasificó a los números reales como números complejos. Posiblemente conceptuó a los números complejos utilizando el modelo $a + ib$; sin embargo, en sus respuestas a las preguntas del cuestionario: *¿Qué es un número complejo?, ¿Cómo se representa un número complejo?* y *¿Qué es un número imaginario?,* L no escribió sobre la representación $a + ib$. Por otra parte, se seleccionó a L porque, en el cuestionario se refirió al conjunto de los números enteros negativos como números imaginarios.

Se diseñó la siguiente entrevista semiestructurada para la estudiante L. Las preguntas se elaboraron con base en las respuestas que dio en el cuestionario. Como en el caso de las otras entrevistadas de estudiantes del CCH, se leyeron las respuestas del cuestionario con esta estudiante y en el momento indicado se plantearon las preguntas de la entrevista semiestructurada.

1.- ¿Qué es un número complejo?
2.- ¿Qué es un número imaginario?
3.- ¿Qué diferencia hay entre un número imaginario y un número complejo?
4.- ¿Qué diferencia hay entre un número real y un número imaginario?
5.- ¿Un número irracional es un número complejo?

Estos fueron los puntos sobresalientes durante la entrevista.

Pregunta 1

¿Qué es un número complejo?

En el cuestionario se planteó esta misma pregunta. L respondió que los números complejos son todos los números que conoce. Mencionó a los números reales, imaginarios, racionales e irracionales. Dijo que esos números son números complejos porque así lo había entendido. En la figura 5.48 se muestra su respuesta a esta pregunta en el cuestionario.

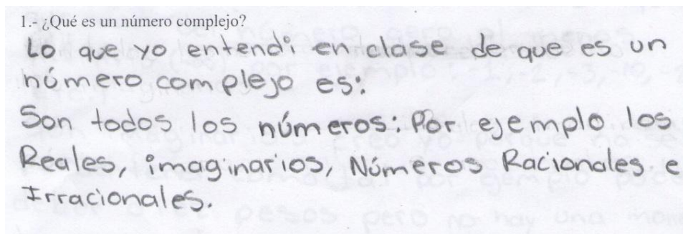

1.- ¿Qué es un número complejo?
Lo que yo entendí en clase de que es un
número complejo es:
Son todos los números: Por ejemplo los
Reales, imaginarios, Números Racionales e
Irracionales.

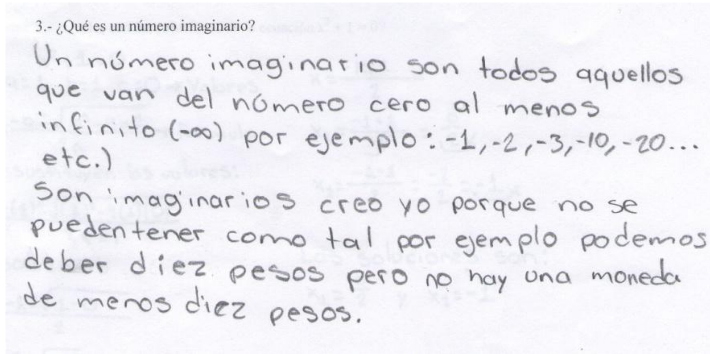
Figura 5.48. ¿Qué es un número complejo?

En la entrevista la estudiante repitió lo mismo y se mostró renuente para aportar más información.

Pregunta 2

¿Qué es un número imaginario?

Esta pregunta también se formuló en el cuestionario que la estudiante contestó. L escribió lo siguiente: “Un número imaginario son todos aquellos que van del número cero al menos infinito ($-\infty$), por ejemplo: –1, –2, –3, –10, –20… etc. Son imaginarios creo yo porque no se pueden tener como tal, por ejemplo podemos deber diez pesos pero no hay una moneda de menos diez pesos”. (Véase la figura 5.49.)


3.- ¿Qué es un número imaginario?

Un número imaginario son todos aquellos que van del número cero al menos infinito (-∞) por ejemplo: -1, -2, -3, -10, -20... etc.)
Son imaginarios creo yo porque no se puedentener como tal por ejemplo podemos deber diez pesos pero no hay una moneda de menos diez pesos.

Figura 5.49. Los números imaginarios son los números negativos

Nótese que L buscó una metáfora para explicar el concepto de número imaginario y lo relacionó con algo que no es tangible. La estudiante expresó lo siguiente.

L: Mmm… bueno, como la palabra lo dice, son imaginarios; por eso puse el ejemplo, porque… bueno… yo entiendo que si debemos… bueno \$10…
I: Ajá.
L: No tenemos una moneda que nos diga vale –\$10, se tiene una moneda que vale \$10 para pagar lo que debes, entonces es lo que yo entiendo. Y también, bueno, aquí nos han comentado que van desde el 0 hacia menos infinito.

Es claro que la estudiante tenía confusión con el concepto de número imaginario desde el nombre mismo. En las entrevistas anteriores sus compañeras se refirieron a los números imaginarios como números inexistentes. Se le preguntó a L al respecto en el siguiente fragmento de la entrevista.

I: Hay algunos compañeros que contestaron que un número imaginario no existe. *¿Tiene que ver eso con lo que tú planteas aquí de que no se puede tener como tal?*
L: Pues sí, en parte. No existe porque no lo podemos tener así, bueno como quien dice tocar, bueno los números así normales tampoco, pero el imaginario… ehh… es bueno…[largo silencio].
I: O sea como que, a ver, lo que dices es que a pesar de que los números o los otros números, los que no son imaginarios, tampoco los podemos tocar…

L: Ajá.

I: Entiendo que me explicas que sí hay una manera de representarlos con cosas que tenemos.

L: Ajá.

I: O con cosas que están a nuestro alrededor.

L: Sí.

I: ¿Y un número imaginario no?

L: Ajá. Es… como quien dice, es algo que falta.

Obsérvese que la estudiante se refirió a los números que no son imaginarios como "números normales". Destaca que consideró a los números imaginarios como "algo que hace falta". Ante la imposibilidad de representar a los números complejos con algo tangible o con un modelo matemático basado en sus conocimientos previos que le permitiera conceptualizar adecuadamente qué es un número imaginario, L recurrió a los números negativos para explicar el concepto.

Pregunta 3

¿Qué diferencia hay entre un número imaginario y un número complejo?

La estudiante reconoció a los números negativos como números imaginarios, pero en la pregunta 1 dijo que los números complejos "son todos los números". Surge la pregunta: ¿Qué diferencia hay entre un número imaginario y un número complejo? La estudiante contestó de manera cautelosa y se mostró renuente para aportar más información al respecto, como se ve en la siguiente parte de la entrevista.

I: Ahora, ¿qué diferencia hay entonces entre un número imaginario y un número complejo?

L: Ammm… pues creo que… bueno, que los complejos son todos y el imaginario sólo es una parte de.

Pregunta 4

¿Qué diferencia hay entre un número real y un número imaginario?

Se insistió en preguntar sobre las diferencias entre los distintos tipos de números que L expuso en las respuestas de su cuestionario y los números complejos, así como sus diferencias con los números imaginarios. El objetivo fue conocer las posibles conceptuaciones que la estudiante había logrado de cada tipo de número para poder identificar si utilizó o no metáforas durante sus procesos cognitivos. Si se reconoce la manera en la que un número de la forma $a + bi$ con $b = 0$ es conceptuado y posteriormente conceptualizado podrían encontrarse indicios sobre el porqué de las dificultades al intentar conceptuar un número de la forma $a + bi$ con $b \neq 0$.

La estudiante L contestó en la entrevista del siguiente modo.

I: Y entonces, ¿qué diferencia habría entre un número real y un número imaginario?
L: Que bueno, yo entiendo que el real lo tenemos así como tal (risas). Así con cosas y podemos decir este es un lápiz, una libreta y no podemos decir… ehh… bueno… menos una libreta o así.

L se aferró a las metáforas que hemos llamado metáforas fundamentales. Es decir, aquellas que fundamentan nuestro entendimiento en términos de la experiencia diaria. Sin embargo, volvió a referirse a ejemplos relacionados sólo con números enteros, se refirió a “un lápiz”, “una libreta”, “no podemos decir menos una libreta”. Como en el ejemplo de las deudas de dinero que propuso en su respuesta a la pregunta 1 del cuestionario, no hizo alusión a cantidades reales distintas de los números enteros. Esto puede indicar una conceptuación limitada incluso de los números reales.

Pregunta 5.
¿Un número irracional es un número complejo?
En este caso no se redactó la pregunta de manera literal. Se propuso a la estudiante reflexionar sobre el número $\sqrt{2}$. Las respuestas obtenidas sobre la naturaleza de este número fueron las siguientes.

I: ¿Qué tipo de número es $\sqrt{2}$?
L: Pues creo que seguiría siendo complejo.
I: Seguiría siendo complejo… ¿Por qué es complejo?

L: Porque forma parte de los números, los racionales, los irracionales.

I: Entonces este es un número complejo porque o es un número real o es un número racional o es un número irracional.

L: Ajá.

I: Es lo que estás diciendo. Entonces, ¿podrías determinar exactamente qué tipo de número es, de estos que tú englobas como complejos?

L: Mmm… pues sería real, porque es positivo.

L clasificó a los números como números reales y números imaginarios, y consideró que ambos conjuntos integran el conjunto de los números complejos. Obsérvese que para L un número no era imaginario si era un número positivo. Para ella todo número positivo era un número real. Por otra parte, nótese que L no pudo clasificar a $\sqrt{2}$ dentro de los números reales como un número irracional, sólo se refirió a él como un número real. Así, es claro que L tenía concepciones limitadas respecto a otros conjuntos de números.

Teniendo en cuenta que la estudiante no proporcionó mucha información cuando se le preguntó sobre la diferencia entre los números complejos y los números imaginarios, se le preguntó respecto a la naturaleza del número $\sqrt{-1}$. L afirmó en su respuesta a la pregunta 4 del cuestionario que el símbolo *i* significa $\sqrt{-1}$.

I: Entonces, ¿qué tipo de número es $\sqrt{-1}$?

L: Ahh… pues sería irracional.

I: Sería irracional.

L: Sí. No… sería irreal.

I: ¿Irreal?

L: Creo que sí.

I: ¿Sería irreal?

L: Ajá.

I: ¿ Y por qué sería irreal?

L: Porque es una raíz negativa y entonces… ehh… bueno… se dice que no se le puede sacar raíz a los números negativos, a menos que se representen con la letra *i*.

I: Y entonces, ¿si no se les puede sacar raíces cuadradas son irreales?
L: Sí.
I: ¿Y esos caen dentro de los imaginarios?
L: Sí, yo digo que sí.
I: O sea, entonces, éstos, las raíces de los números negativos y los números negativos serían imaginarios.
L: Ajá.

Obsérvese que la estudiante agregó a los números irreales que son las raíces cuadradas de los números negativos como parte de los números imaginarios. Respecto a la respuesta de la pregunta 4, en donde L afirmó que el significado del símbolo *i* es $\sqrt{-1}$, la estudiante expresó lo siguiente.

L: Bueno, es que yo lo puse así porque la raíz de –1 sería imaginaria. Entonces, si le ponemos… bueno, una vez una maestra me dijo que se le podía sacar raíz pero si lo tomábamos como si fuera 1 y no –1, y lo que salga le ponemos la *i* y decimos que entonces es imaginario con la letra *i*.
I: Con la letra *i*. Pero entonces *i* en particular es éste [señala el número $\sqrt{-1}$ escrito en el cuestionario de L], ¿o *i* puede ser cualquiera?
L: Mmmm… pues sí, *i* puede ser cualquiera, cualquier número imaginario.
I: O sea, el *i* nos ayuda nada más a hacer la diferencia entre las raíces de los números negativos…
L: Y los positivos. Bueno, entre los números positivos y los negativos.

Una limitación más que queda al descubierto con las palabras de L es que concebía a *i* como un símbolo que le permitía identificar a los números imaginarios, como se muestra a continuación, independientemente de que en su respuesta a la pregunta 4 del cuestionario afirmó que *i* es $\sqrt{-1}$. En esta parte de la entrevista también dijo: “*i* puede ser cualquiera, cualquier número imaginario”. Así, es claro que la estudiante no tenía una idea precisa del significado de *i*. Reconocía que $i = \sqrt{-1}$ de manera dogmática y por ello también afirmó que *i* podía ser cualquier número imaginario, es decir, le atribuía un carácter totalmente simbólico cuya utilidad consistía en permitir distinguir un conjunto de números de otro.

Considérese ahora la respuesta a la pregunta 6 del cuestionario: *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 - 2x + 2 = 0$*?* L determinó las soluciones de la ecuación utilizando la fórmula de resolución de ecuaciones cuadráticas. Cuando la estudiante descubrió que el discriminante de la ecuación era negativo, continuó de manera adecuada el procedimiento pero agregó lo siguiente: “No tiene solución porque no hay raíces negativas a menos que al lado del número le pongamos la letra ‘*i*’, porque así se representan los números imaginarios”. (Véase la figura 5.50.)

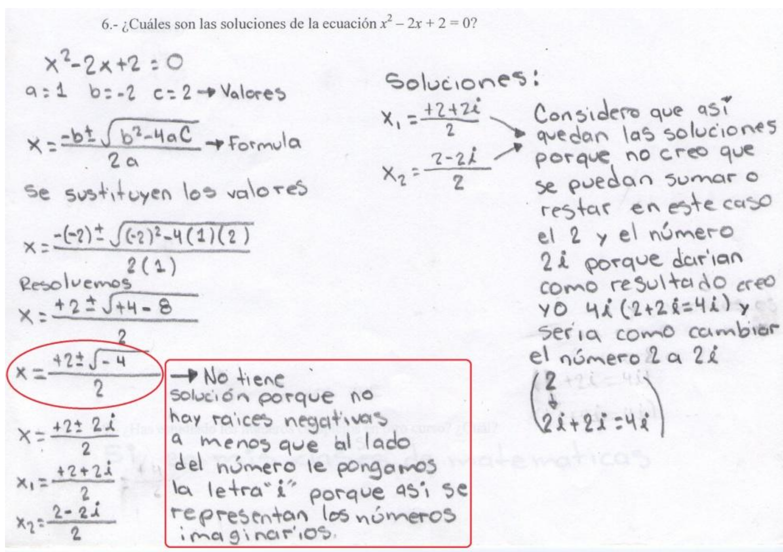


Figura 5.50. Resolución de la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$

Teniendo esta respuesta en mente, se le preguntó a la estudiante sobre el papel de *i* en la resolución de la ecuación.

I: Entonces, ¿qué es *i*?

L: Bueno, nos sirve para identificar a los números que son imaginarios.

I: Y entonces, por ejemplo, aquí ya con la ayuda de *i* lo que tú hiciste… a ver no sé… me gustaría que lo pudieras repetir aquí, solamente la parte referente a $\sqrt{-4}$. Tienes $\sqrt{-4}$ y te apoyas en *i* para trabajar con ella. ¿Cómo lo haces?

L: Entonces, bueno yo… saco raíz de 4 y es 2, pero como ésta era –4 entonces le pongo *i*. Es como si sacaras $\sqrt{-4}$ pero con 4.
I: Porque no se puede [obtener las raíces cuadradas] con los números negativos.
L: Ajá. Y entonces para indicar que era un número negativo le pongo la i al resultado.

Obsérvese que la estudiante realizó adecuadamente la aritmética de los números complejos. Sin embargo, el significado que atribuía a *i* era el de herramienta que le permitía obtener las raíces cuadradas de un número negativo, cosa que, según sus concepciones no podía hecer comúnmente. Al parecer la estudiante no se preguntó por qué este procedimiento en el que interviene *i* es válido: para ella simplemente el procedimiento funciona y ya.

Algunas dificultades que se observaron respecto a la conceptuación de los números complejos fueron las siguientes.

– La estudiante consideró que los números negativos son números imaginarios, del mismo modo que las raíces cuadradas de los números negativos.

– Consideró que los números imaginarios no son números “normales”. Atribuyó el carácter de imaginario a dichos números porque no pueden representarse con objetos tangibles.

– Para referirse a los números imaginarios utilizó frases como: “no hay una moneda de menos diez pesos”, “es algo que falta”, “este es un lápiz, una libreta, […] no podemos decir menos una libreta”.

– Sólo utilizó metáforas fundamentales para referirse a los números reales y dichas metáforas sólo hacían alusión a los números enteros positivos. Esto es evidencia de una conceptuación limitada de los números reales.

– No pudo clasificar $\sqrt{-2}$ entre los diferentes tipos de números reales que mencionó.

– Se refirió a las raíces cuadradas de los números negativos como números irreales.

– La estudiante pudo realizar la aritmética necesaria para resolver problemas que implicaban ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general de resolución; sin embargo, el único significado que le dio a *i* fue el de símbolo que permite obtener raíces cuadradas de números negativos. No mostró indicios de conocer por qué el símbolo *i* le permitía obtener las soluciones buscadas más allá de la aplicación del algoritmo.

– Reconoció que $i = \sqrt{-1}$. Sin embargo, también afirmó que *i* podía ser cualquier número imaginario; es decir, no comprendió completamente el significado de *i*.

En este capítulo se mostraron los resultados obtenidos en las entrevistas a los estudiantes seleccionados y se señalaron algunas dificultades que presentaron durante sus procesos de conceptuación de los números complejos. En el capítulo seis se presentaran las conclusiones obtenidas de este análisis así como una posible continuación de la investigación.

CAPÍTULO VI
CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas después del análisis de las entrevistas a los estudiantes seleccionados. En primer lugar aparecen algunas observaciones, producto de los análisis de las entrevistas hechas a los estudiantes de las licenciaturas en física y matemáticas; en segundo lugar se muestran las observaciones obtenidas de las entrevistas hechas a las estudiantes del CCH–UNAM, y en tercer lugar aparecen algunas observaciones surgidas, de manera global, de las seis entrevistas expuestas en el capítulo cinco. Además, se ha destinado un apartado en el que se expone una posible continuación de esta investigación.

Observaciones obtenidas mediante los instrumentos aplicados a los estudiantes de licenciatura

En los cuestionarios aplicados en la Facultad de Ciencias de la UNAM a un grupo de álgebra, integrado por estudiantes de primer semestre de la carrera de física, y 2 grupos de un primer curso de variable compleja, formados por estudiantes de las carreras de física y de matemáticas que por lo menos cursaban una materia de quinto semestre en su carga de asignaturas, se observó que los alumnos estudiaron diversas representaciones de los números complejos.

Los estudiantes se refirieron a los números complejos de las siguientes maneras: *1)* como números de la forma $x + yi$, siendo x y y números reales, *2)* como números que pueden representarse por medio de puntos en el plano cartesiano o en plano complejo, *3)* como vectores en el plano cartesiano o en el plano complejo, *4)* como pares ordenados de la forma (x, y), *5)* como números de la forma $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$ o $z = r\left(e^{i\theta}\right)$, o $z = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, y un estudiante mencionó que podían ser representados utilizando la proyección estereográfica.

Por medio de las entrevistas realizadas a tres estudiantes que contestaron el cuestionario, se pudo ahondar en las ideas que plasmaron en el papel. Los tres estudiantes conocían más de una representación de los números complejos. La representación que resultó más familiar para los tres fue $z = x + yi$ siendo x y y números reales; ninguno tuvo dificultades para reconocer a x como la parte real de un número complejo y a y como la parte imaginaria en esta representación. Por otra parte, los tres aceptaron como representación del número complejo $z = x + iy$ al par ordenado (x, y), que fue interpretado como un punto en el plano complejo o en el plano cartesiano y como un vector en el plano complejo o en el plano cartesiano. Desde esta representación ya no fue evidente para los tres estudiantes cuál era la parte real y cuál la parte imaginaria del número complejo; dos estudiantes consideraron que la parte imaginaria de un número complejo era un número imaginario; es decir, identificaron a iy como la parte imaginaria del número complejo representado por el punto en el plano cuyas coordenadas son (x, y). Cabe aclarar que el plano complejo y el plano cartesiano son diferentes. El plano cartesiano está formado por dos ejes perpendiculares, el eje X y el eje Y, ambos de la misma naturaleza y cada uno representado por la recta real. El plano complejo en cambio está formado por dos ejes perpendiculares, el eje real y el eje imaginario; la unidad de medida del eje real es de naturaleza diferente a la unidad de medida del eje imaginario: aunque ambos ejes son rectas, la naturaleza matemática de las magnitudes que representan es diferente. Los estudiantes entrevistados transitaron del plano cartesiano al plano complejo sin prestar atención a esta sutileza matemática.

En este tenor y reconociendo que los tres estudiantes entrevistados (así como varios de sus compañeros que contestaron el cuestionario) se refirieron al plano cartesiano o al plano complejo como una representación de los números complejos, los tres señalaron al punto (0, 1) como la representación en el plano del número i. Ninguno de los estudiantes entrevistados explicó con argumentos sólidos por qué ese punto y no otro representaba al número i.

Los estudiantes utilizaron las representaciones $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$ y $z = r\left(e^{i\theta}\right)$ con limitaciones. Uno de ellos asoció a un número complejo dos ángulos diferentes y que no eran equivalentes (un número complejo tiene como argumento un ángulo φ que puede escribirse como $\varphi + 2k\pi$ con $k \in Z$, el ángulo $\varphi + 2k\pi$ se considera un ángulo equivalente a φ). Además, los alumnos restringieron dichas representaciones a números con módulo (representado por r) igual a 1. Por otra parte, se debe destacar que no lograron conectar la representación $z = x + iy$ con alguna de las representaciones anteriores. Esto muestra que para los estudiantes las representaciones $z = x + iy$ y $z = r(cos\theta + i\ sen\theta)$ son prácticamente ajenas entre sí, y lo mismo sucede con $z = x + iy$ y $z = r\left(e^{i\theta}\right)$.

Teniendo en cuenta que los estudiantes conocieron diversas representaciones de los números complejos, cada una con ventajas y desventajas para enfrentar determinados problemas que implican la manipulación de números complejos, vale la pena hacer notar que todos recurrieron a la representación $z = x + iy$ y a los algoritmos aritméticos relacionados con esta representación para enfrentar los problemas planteados en el cuestionario y en las entrevistas. Los estudiantes resolvieron de manera aceptable los problemas algebraicos que se les propusieron sin recurrir a las representaciones que implicaban conocer el argumento del número complejo en cuestión o su módulo. Para los estudiantes fue poco o nada significativo saber de la existencia de las representaciones en las que intervienen elementos geométricos.

Con relación a las metáforas que se logró identificar en las conceptuaciones que los estudiantes mostraron de los números complejos se destaca que ninguno logró pasar del dominio fuente al dominio destinatario completamente. Como se especificó en el capítulo relacionado con el marco teórico (Capítulo II), conceptualizar un dominio matemático en términos de otro tiene sus riesgos, siendo el más peligroso terminar por creer que las entidades matemáticas de las cuales nos valemos para construir un nuevo concepto son ese nuevo concepto. Los estudiantes entrevistados asumieron que i es el punto del plano con coordenadas (0, 1) por definición.

Los alumnos que compartieron sus concepciones de los números complejos en las entrevistas pudieron resolver, en esencia, las ecuaciones cuadráticas de segundo grado que implicaban la manipulación de números complejos. Aunque su conceptualización de los números complejos no era sólida, esto no impidió la correcta resolución de las ecuaciones propuestas. Esto es evidencia de que un estudiante de licenciatura puede resolver problemas algebraicos que impliquen el manejo de cantidades complejas sin conocer el porqué de un número complejo. Pero considerando que los estudiantes entrevistados realizaban estudios en la Facultad de Ciencias de la UNAM, resulta poco comprensible que tengan que asumir la existencia de una entidad matemática como el número i como el producto de una definición conveniente. Como ya se ha expuesto, en algunos libros de texto que aparecen en las bibliografías de los temarios de las materias de álgebra y variable compleja I se presenta al número i como un número que permite resolver ecuaciones de segundo por medio de la extensión del campo de los números reales. En las clases observadas, los profesores definían i como $\sqrt{-1}$. Los estudiantes tenían referentes como la longitud, que les permitía comprender la naturaleza de la unidad real. Con relación a la unidad imaginaria las cosas eran distintas; no se presentaba un referente "físico" o un modelo claro que permitiera comprender por qué la unidad imaginaria puede verse como el punto (0,1) del plano complejo.

Los números complejos tienen una esencia diferente a la de los números reales. Los números complejos no pueden representarse en la recta real, no son números que nos permitan medir algo como sucede con algunos números reales. Las magnitudes complejas no se generan de la misma manera que las magnitudes reales, su ontología es diferente. Las representaciones que se manejan en los cursos de álgebra y de variable compleja I tienen algunas limitaciones que no permiten apreciar esa naturaleza diferente y que promueven considerar a la unidad imaginaria i como una definición necesaria.

Observaciones obtenidas mediante los instrumentos aplicados a los estudiantes del CCH Vallejo

Los estudiantes del CCH Vallejo que participaron contestando el cuestionario estaban poco familiarizados con los números complejos. Para algunos fue la primera vez que trabajaron con ellos. Una de las principales dificultades que enfrentaron estos estudiantes fue concebir las raíces cuadradas de los números negativos como entes matemáticos existentes.

Las tres estudiantes entrevistadas tenían arraigadas, en diferente medida, sus concepciones previas de las raíces cuadradas de los números negativos. En los tres casos las alumnas expusieron que las raíces cuadradas de los números negativos no existían. Sin embargo, cuando en clase la profesora definió al número i como $\sqrt{-1}$, las estudiantes lo aceptaron pero comenzaron a generar concepciones limitadas sobre este número.

En general los estudiantes de bachillerato reconocieron a i como un símbolo que les permitió identificar a los números complejos. Si un número cualquiera estaba acompañado de i, ése era un número complejo; si se les presentaba un número real, dicho número no pertenecía al conjunto de los números complejos por carecer del símbolo que marcaba la diferencia, el símbolo i. Así, para las estudiantes entrevistadas, i era un símbolo que permitía reconocer a los números complejos.

Evidencia de las concepciones limitadas de las estudiantes entrevistadas es que no pudieron distinguir adecuadamente entre un número imaginario y un número complejo. Si bien todo número imaginario es un número complejo, no todo número complejo es un número imaginario. Una de las estudiantes entrevistadas se refirió a los números complejos como aquellos números de la forma bi y explicó que los números imaginarios eran las raíces cuadradas de los números negativos; es decir, números de la forma $\sqrt{-n}$ siendo n un número natural. Debe mencionarse que la principal diferencia entre estos dos tipos de números, según esta estudiante, es la presencia de i como símbolo. Por otra parte, las tres estudiantes se refirieron a las raíces cuadradas de los números negativos como números imposibles de obtener, decían: "no existen".

Respecto al número i, a pesar de que la profesora lo definió en clase como $\sqrt{-1}$, las tres estudiantes entrevistadas externaron que i podía ser un número cualquiera. Una de las alumnas entrevistadas, a diferencia de las otras dos, utilizó i para resolver las ecuaciones cuadráticas que se le propusieron; sin embargo, sólo le concedió el carácter de herramienta útil para librar los obstáculos de operar con las raíces cuadradas de números negativos. Al respecto afirmó que por medio de i los algoritmos conocidos para las raíces cuadradas de los números positivos podían aplicarse a las raíces cuadradas de los números negativos y el problema de la imposibilidad de obtener dichas raíces cuadradas quedaba superado.

Otra situación interesante fue que las estudiantes buscaron referentes para tratar de explicarse a sí mismas los números complejos. Dos de ellas recurrieron a metáforas fundamentales, es decir, utilizaron metáforas cuyo dominio fuente está fuera de las matemáticas y basado en las experiencias diarias del individuo que las utiliza, mientras que el dominio destinatario se encuentra en las matemáticas. Ambas estudiantes utilizaron metáforas vinculadas a los números negativos y una de ellas externó que el nombre mismo de números complejos la había hecho pensar en números complicados y su referente más próximo a los números complicados fueron los números negativos. Sin embargo, aunque las dos estudiantes utilizaron metáforas fundamentales relacionadas con los números negativos, destaca que únicamente mencionaron cantidades enteras negativas. Así, se exhiben concepciones limitadas incluso de los números reales.

Una de las estudiantes entrevistadas intentó explicar una representación geométrica de los números complejos basada en el modelo de la parábola que no se interseca con el eje X y las raíces del polinomio asociado a esa parábola. Sin embargo, no pudo determinar con éxito la ubicación en el plano de alguno de los números que ella misma propuso como números complejos. La estudiante externó que no tenía claro cómo representar geométricamente un número complejo, no podía ubicarlo en el plano.

Para explicar, los números imaginarios (aunque verbalmente se refirió a los números complejos), razonó de la siguiente manera: Existe una raíz del polinomio $ax^2 + bx + c$ que es parte de la parábola pero no está en ella, está en el eje X; las coordenadas de ese punto resuelven la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, es decir, ese punto está en la parábola y está en el eje, aunque en la parábola no lo podamos ver.

Las reflexiones de la estudiante se fundamentaron en sus conocimientos relacionados con el modelo de la parábola y las raíces de un polinomio de segundo grado en el campo de los números reales. Al encontrarse con el mismo modelo, pero teniendo como contexto un dominio numérico más amplio (del que ella no era consciente), surgió un conflicto cognitivo que hasta el momento de la entrevista no logró superar. Ante las preguntas de la entrevista es probable que la estudiante haya notado por primera vez que los criterios que, según ella, le permitían distinguir un número imaginario en determinada situación algebraica (encontrar las raíces de un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$) son ambiguos, pues al cambiar la situación en el mismo contexto geométrico ese mismo número podría no ser un número imaginario. Por otra parte, cuando a la estudiante se le presentaron ecuaciones cuadráticas del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ sin un contexto geométrico específico, no vinculó el problema con sus concepciones geométricas, incluso externó implícitamente en la entrevista que la resolución de ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene relación con la geometría. Así, el modelo geométrico que se relaciona con las metáforas encontradas en los razonamientos de la estudiante no es muy fructífero en cuanto a la construcción adecuada del concepto de número complejo.

En otro orden de ideas, la unidad imaginaria i desempeña un papel importante en las concepciones de las estudiantes entrevistadas: todas lo concibieron como un símbolo que les permitía identificar un nuevo conjunto de números y a la vez manipular aritméticamente cantidades que en cursos anteriores calificaron de inexistentes. Sin embargo, el número i es más que un símbolo, es un número de características diferentes a la unidad de los números reales.

Las tres estudiantes buscaron referentes que les permitieran comprender qué es un número complejo. Dos de ellas recurrieron a sus experiencias diarias sin obtener resultados favorables, mientras la tercera estudiante recurrió a las matemáticas mismas tratando de deducir en el modelo de la parábola que no se interseca con el eje de las *X*'s la ubicación de algunos números complejos. Para las tres estudiantes resultó complicado, según los resultados obtenidos en sus cuestionarios y en las entrevistas, conceptuar a la unidad imaginaria i como la unidad de un nuevo conjunto de números que en cursos anteriores se consideró como un conjunto inexistente: el conjunto de los números imaginarios. Sin la posibilidad de conceptuar adecuadamente este conjunto, la conceptuación de los números complejos resultó más complicada y limitada.

La importancia del número i en las conceptuaciones de los estudiantes entrevistados

De los estudiantes entrevistados, 5 de ellos resolvieron adecuadamente las ecuaciones cuadráticas propuestas en el cuestionario, sólo una estudiante de bachillerato consideró que no era posible obtener las raíces cuadradas de los números negativos. Los estudiantes de licenciatura así como una estudiante de bachillerato emplearon la aritmética de los números complejos, una de las estudiantes del CCH dejó indicadas las soluciones en términos de raíces cuadradas de números negativos. Las concepciones que cada uno de los estudiantes tenía sobre los números complejos eran limitadas. Sin embargo esto no impidió, como se ha mostrado, que los estudiantes pudieran resolver problemas con este tipo de números.

Para las estudiantes del CCH no fue claro qué tipo de número es el número i, cómo se puede representar en el plano, y si dicha representación tiene alguna utilidad. A pesar de esto, sus concepciones de los números complejos estaban sustentadas en i. Para los estudiantes de licenciatura i es un número definido convenientemente como $\sqrt{-1}$. Lo utilizaban en varias representaciones de los números complejos y geométricamente lo ubicaban como un punto en el plano complejo con coordenadas (0, 1) sin entender cabalmente porque esto ocurría así. De este modo, comprender la naturaleza de i permitiría comprender la naturaleza misma del conjunto de los números complejos.

Metáforas empleadas por los estudiantes entrevistados para conceptualizar los números complejos

Durante las entrevistas, los estudiantes hablaron de sus concepciones sobre los números complejos plasmadas en sus cuestionarios y algunos externaron reflexiones que no formaron parte de sus producciones escritas. En el análisis de los cuestionarios así como del material obtenido en las entrevistas se identificaron algunas metáforas bajo los criterios ya establecidos que se mencionan nuevamente.

Diremos que una estructura de pensamiento es una metáfora si podemos caracterizar su dominio fuente así como su dominio destinatario y si podemos identificar los mecanismos que permiten apropiarse del nuevo concepto a través del concepto conocido. En cuanto a la cognición relacionada con los números complejos, hemos reconocido como metáforas aquellas estructuras de pensamiento de los estudiantes en las que se pueden determinar tanto el dominio fuente (dentro o fuera de las matemáticas) y su correspondencia con el dominio destinatario (los números complejos), como los mecanismos que permiten al estudiante apropiarse del concepto de número complejo. Es decir, aquellos mecanismos que permitan trasladar propiedades de un dominio a otro, o que permitan transponer una serie de características y estructuras de un dominio a otro (asociar segmentos rectilíneos, asociar ángulos, sumar coordenadas, sumar segmentos geométricamente).

Se identificaron en esta investigación educativa las siguientes ocho metáforas en relación con la conceptuación de los números complejos en el ámbito escolar.

Metáfora 1: *Un número complejo es un punto en el plano complejo.*

Cuadro 6.1. Elementos de la metáfora 1.

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser un par ordenado (a, b) en el plano complejo	Ser un número complejo
Coordenada a del par ordenado (a, b)	Parte real del número complejo $a + bi$
Coordenada b del par ordenado (a, b)	Parte imaginaria del número complejo $a + bi$
Eje *Re* del plano complejo	Números reales
Eje *Im* del plano complejo	Números imaginarios

Esta metáfora es similar a otra metáfora encontrada en esta investigación que consideraremos un variante: *los números complejos son puntos en el plano cartesiano*. La diferencia radica en que la estudiante F, quien utilizó la metáfora variante, concibió a los números complejos como puntos en el plano cartesiano. Los elementos que intervienen en la metáfora variante son los casi los mismos que aparecen en el cuadro 6.1 y se observan en el cuadro 6.1.1.

Cuadro 6.1.1 Elementos de la metáfora *los números complejos son puntos en el plano cartesiano*

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser un par ordenado (x, y) en el plano cartesiano	Ser un número complejo
Coordenada x del par ordenado (x, y)	Parte real del número complejo $x + iy$
Coordenada y del par ordenado (x, y)	Parte imaginaria del número complejo $x + iy$
Eje X del plano cartesiano	Números reales
Eje Y del plano cartesiano	Números imaginarias

Metáfora 2: *Un número complejo es un punto en el plano con coordenadas polares*

Cuadro 6.2. Elementos de la metáfora 2.

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser un par ordenado (r, θ) en el plano	Ser un número complejo de la forma $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$
Coordenada r del par ordenado (r, θ)	Norma del número complejo $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$
Coordenada θ del par ordenado (r, θ)	Argumento del número complejo $z = r\,(cos\theta + i\ sen\theta)$
Eje polar del plano	Números reales positivos
Polo	Número complejo 0

Metáfora 3: *Los números complejos son vectores del espacio vectorial* R^2.

Cuadro 6.3. Elementos de la metáfora 3.

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser un vector (a, b) en el espacio vectorial R^2	Ser un número complejo.
Vector (1, 0)	Número real 1
Vector (0, 1)	Número i
El vector $k(1, 0)$ con $k \in R$	El número real k
El vector $n(0, 1)$ con $n \in R$	El número ni con $n \in R$

En este caso el estudiante identificó una base específica del espacio vectorial R^2 transponiendo las propiedades del dominio fuente, a través de la base del espacio vectorial, al dominio destinatario. Se identificó una variante de esta misma metáfora en la que no se tiene una base particular para el espacio vectorial R^2, la cual se muestra en el cuadro 6.4.

Metáfora 4: *Los números complejos son vectores en el plano*.

Cuadro 6.4 Elementos de la metáfora 4

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser un vector en el plano cartesiano cuyo extremo inicial es (0, 0) y con extremo final (x, y)	Ser el número complejo $x + iy$
Coordenada x del punto (x, y) extremo final del vector anclado al origen	Parte real del número complejo $x + iy$
Coordenada y del punto (x, y) del extremo final del vector anclado al origen	Parte imaginaria del número complejo $x + iy$
Eje Y del plano cartesiano	Números imaginarios
Eje X del plano cartesiano	Números reales

Metáfora 5: *Los números complejos son puntos del plano complejo de la forma* (x, iy).

Cuadro 6.5. Elementos de la metáfora 5.

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser un par ordenado (x, iy) en el plano complejo	Ser un número complejo
Coordenada x del par ordenado (x, iy)	Parte real del número complejo $x + iy$
Coordenada iy del par ordenado (x, iy)	Parte imaginaria del número complejo $x + iy$
Eje *Re* del plano complejo	Números reales
Eje *Im* del plano cartesiano	Números imaginarios
Punto $(0, i)$	Número complejo i

Metáfora 6: *Los números imaginarios son las raíces de los polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, tales que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene discriminante menor que* 0.

Cuadro 6.6. Elementos de la metáfora 6.

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser una raíz del polinomio $ax^2 + bx + c$, donde $ax^2 + bx + c = 0$ tiene discriminante menor que 0	Ser un número imaginario

Metáfora 7: *Los números imaginarios son las intersecciones inexistentes de la gráfica de* $y = ax^2 + bx + c$ *con el eje* X, *donde* $ax^2 + bx + c = 0$ *tiene discriminante menor que* 0.

Cuadro 6.7. Elementos de la metáfora 7

Dominio fuente	Dominio destinatario
Ser una intersección inexistente de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ con el eje X	Ser un número imaginario
Ser un punto del eje X que soluciona la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y que no es parte de la parábola $y = ax^2 + bx + c$	Ser un número imaginario

Metáfora 8: *Los números complejos son los puntos que no están en la gráfica de la parábola* $y = ax^2 + bx + c$ *pero que son soluciones de la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$.

Cuadro 5.8. Elementos de la metáfora 8.

Dominio Fuente	Dominio destinatario
Ser un punto de la parábola $y = ax^2 + bx + c$	No ser un número complejo

Como se mencionó en el capítulo correspondiente al marco teórico de esta investigación (capítulo II), las metáforas conceptuales tienen un papel importante en la construcción de nuevo conocimiento. Es a través de la metáfora que nuestras primeras intuiciones modelan conceptos formales. Sin embargo, no todas las metáforas conducen a construcciones mentales coherentes con los saberes matemáticos que se busca que los estudiantes obtengan. Si una metáfora no cumple las expectativas deseadas no significa que sea inútil o errónea, por lo contrario, las construcciones surgidas de ella pueden arrojar luz sobre las deficiencias del estudiante o provocar un conflicto cognitivo que derive en la construcción de conocimiento más significativo.

Continuación de la investigación

En esta investigación se presentaron las concepciones de cuatro grupos de estudiantes; tres de ellos fueron grupos de licenciatura de la Facultad de Ciencias de la UNAM y el cuarto fue un grupo del CCH – UNAM (Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México) plantel Vallejo. Las concepciones recabadas son valiosas porque muestran las bases que cada estudiante se esfuerzaba por construir para alcanzar la conceptualización de los números complejos. Sin embargo, estas concepciones eran limitadas y en algunos casos los cuestionarios mostraron concepciones poco coherentes con los contenidos matemáticos abordados en las clases.

Los estudiantes fundamentaban su conocimiento de los números complejos en su conocimiento de la unidad imaginaria i. En los libros de texto se define i como $\sqrt{-1}$. Pensando a los números reales como magnitudes que pueden generarse linealmente (su modelo más conocido es la recta real), podría preguntarse sobre el modo de generar magnitudes complejas. Una de las estudiantes de bachillerato que participó en las entrevistas se refirió a los números complejos como números difíciles cuyo entendimiento requiere estudios de matemáticas de nivel licenciatura. Irónicamente, los estudiantes de licenciatura entrevistados argumentaron que el número i se define como $\sqrt{-1}$ y que su representación en el plano queda establecida por medio del punto o vector (0, 1), una concepción no muy diferente de las concepciones de los estudiantes de bachillerato.

Para enriquecer las concepciones que tienen los estudiantes, el estudio de la historia de las matemáticas con fines pedagógicos proporciona opciones viables. En 1799 Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) presentó su disertación de doctorado, que consistió en la primera demostración aceptada del teorema fundamental del álgebra. Dicha demostración es de carácter geométrico, aunque en la actualidad poco de esto se presenta en los libros de texto; en su disertación Gauss construyó las magnitudes complejas. Mediante el estudio de la historia de las matemáticas se tiene una opción para comprender la epistemología y la ontología de un concepto, no como un producto terminado sino como un proceso de construcción. Es difícil entrar en la cabeza del príncipe de las matemáticas, Carl Friedich Gauss, pero también es difícil entrar en la cabeza de los estudiantes, comprender sus procesos cognitivos y buscar maneras de ayudar a superar las dificultades que se presentan en ellos.

El siguiente paso una vez que mediante los resultados de la investigación llevada a cabo para esta tesis de maestría se ha recabado información sobre cómo los modelos actuales para comprender los números complejos generaban, en los estudiantes que participaron en esta investigación, concepciones limitadas y por tanto conceptualizaciones limitadas, consistirá en elaborar una propuesta de investigación educativa que permita enfrentarse a los obstáculos aquí mostrados y lograr una conceptuación más rica en vías de una conceptualización más provechosa de los números complejos.

REFERENCIAS

Angel, A. (2004). *Intermediate Algebra for college students*. New Jersey: Pearson Education.

Briseño, L., Carrasco, G., Martínez, P., Palmas, O., Struck, F. y Verdugo, J. (2008). *Matemáticas 3. Santillana Integral.* México D.F.: Editorial Santillana.

Cambray, R. (2003). Facilitación de la comprensión de las matemáticas. *Boletín del Departamento de Matemáticas 111* (2003, julio), 2-5. [México:Facultad de Ciencias, UNAM.]

Cárdenas, H., Lluis E., Raggi, F. y Tomas, F. (1990). *Álgebra superior*. México: Trillas.

Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM. (2003). Programas de estudios de Matemáticas. Semestres I al IV. Obtenido de http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_mateiaiv.pdf

Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.* México: FCE.

Diario Oficial de la Federación. (2011). LISTA de libros de texto autorizados por la Secretaría de Educación Pública para su uso en las escuelas secundarias del Sistema Educativo Nacional ciclo escolar 2011-2012. Obtenido de: http://basica.sep.gob.mx/dgme/pdf/normas/listaOficialLibrosSec11-12.pdf

De Oteyza, E., Carrillo, A. y Lam, E. (1996). *Algebra*. México: Prentice Hall.

Escuela Nacional Preparatoria, UNAM. (1996). Programa de estudios de la asignatura de matemáticas IV. Obtenido de: http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/cuarto/1400.pdf

Facultad de Ciencias, UNAM. (2002). Programa de estudios de la asignatura de Álgebra de la carrera de Física. Obtenido de: http://www.fciencias.unam.mx/asignaturas/100.pdf

Facultad de Ciencias, UNAM. (1983). Programa de estudios de la asignatura de variable compleja I de la carrera de Matemáticas. Obtenido de http://www.fciencias.unam.mx/asignaturas/840.pdf

Farfán, R., Cantoral, R., Montiel, G., Lezama, F., Cabañas, M., Castañeda, A., … Ferrari, M. (2008). *Matemáticas 3º*. México: Mc Graw Hill.

Font, V. y Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias, 21(3)*, 405–418.

Kurosh, A. (1994). *Curso de álgebra superior*. México: Limusa Noriega.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. Nueva York: Basic Books.

Markushevich, A. (1965). *Theory of functions of a complex variable*. Nueva Jersey: Prentice Hall.

Marsden, J. (1987). *Basic complex analysis*. Nueva York: W. H. Freeman Company.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. En: T. Nakaora y M. Koyama (eds.). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3–22. Hiroshima University.

Rossel H. y Schneider, M. (2003). Ces nombres que l'on dit "imaginaires". *Petit x*, 63, 53–71.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, *27(2)*, 4–13.

Vinner, S. (1979). The concept of complex numbers: An example of accommodation in the learning of mathematics. *Proceedings of International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Warwick, UK: Eric Reports.