Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Expansión Perturbativa de alto orden de la gravedad a partir de la teoría de Yang-Mills en el formalismo de la doble copia

Tesis que presenta

Everardo Rivera Oliva

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Héctor Hugo García Compeán**

Ciudad de México

Enero, 2023

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mis padres, Margarita y Sergio, por siempre brindarme su gu´ıa y apoyo incondicionales para alcanzar todas mis metas e incentivar mi superación. A mi tía, Bety, por todo el esfuerzo que hace para que yo pueda dedicarme enteramente a todos mis proyectos. A mi hermano, Sergio Alejandro, por su paciencia y tolerancia en momentos de frustración.A mi colega y amigo, César, por ser mi fiel acompañante en este camino.A mi novia, Alondra, por escucharme, aguantarme, entenderme y ser mi confidente en esta aventura.

Al mismo tiempo estoy especialmente agradecido con el Dr. Hugo Garc´ıa Compean por todo el acompañamiento, orientación y dirección brindados para la realizacion de este trabajo de tésis. Su guía y enseñanza resultan trascendentes para este estudiante.

Seguidamente agradezco al departamento de f´ısica del CINVESTAV, IPN y todos sus miembros, por haberme dado una formación en ciencias físicas de calidad internacional y permitir mi desarrollo completo en esta área. En particular, agradezco y reconozco firmemente al Dr. Sergio Tomás y a Mariana por todo el apoyo, entendimiento y soporte brindado durante toda mi estancia.

Por último agradezco al CONACYT por brindarme los recursos económicos para poder dedicarme de tiempo completo a mis estudios en f´ısica.

Dedicatoria

Para aquel con la curiosidad suficiente para terminar de leer. . .

Resumen

Se da un repaso de teor´ıa no-Abeliana de Gauge enfocado en Yang-Mills. Se estudia la dualidad BCJ y el formalismo de la Doble Copia para cálculo de amplitudes en Gravedad dilatónica a partir de Yang-Mills tanto a nivel de amplitudes de árbol como a nivel de soluciones clásicas. Se describe el método desarrollado por Luna et al para el cálculo de soluciones clásicas pertubativas a nivel lineal en Gravedad dilatónica a través de aplicar el formalismo de la Doble Copia a la teor´ıa de Yang-Mills.

Posteriormente se propone un método alternativo al de Luna et al para encontrar correcciones perturbativas de alto orden a nivel de soluciones clásicas en Gravedad dilatónica a partir de suponer válido el formalismo de la doble copia en Yang-Mills para diagramas cúbicos y cuárticos, al cual se nombra Conjetura Extendida de la Doble Copia. De esta manera se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales por orden de perturbación para determinar las correcciones perturbativas al gravitón gordo.

Por último se aplica el método alternativo derivado a métricas de agujeros negros de Schwarzschild, Reisnner Nordström, Kerr con rotación lenta y Kerr-Newman con rotación lenta así como se presenta una discusión del soporte que aportan las aplicaciones a la validez de la conjetura y se proponen caminos posibles para probarla.

Abstract

A review of non-Abelian Gauge theory with a focus on Yang-Mills is given. The BCJ duality and the Double Copy formalism for the calculation of amplitudes in dilatonic Gravity from Yang-Mills are studied, both at the level of tree amplitudes and at the classical solutions level. The method developed by Luna et al for calculating classical perturbative solutions at the linear level in Dilatonic Gravity is described by applying the Double Copy formalism to Yang-Mills theory.

Subsequently, an alternative method to that of Luna et al is proposed to find high-order perturbative corrections at the classical solutions level in Dilatonic Gravity based on assuming valid double copy formalism in Yang-Mills for cubic and quartic diagrams, to which called Extended Double Copy Conjecture. In this way, a set of differential equations is obtained by perturbation order to determine the perturbative corrections to the fat graviton.

Finally, the alternative method derived is applied to black hole metrics including Schwarzschild, Reisnner Nordström, Kerr with slow rotation and Kerr-Newman with slow rotation metrics, a discussion of the importance that the applications contribute to the validity of the conjecture possible ways to prove it are proposed.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Orígenes y problemática

Durante los últimos dos siglos de existencia de la humanidad ha habido un enorme avance en el campo de la Física en sus dos vertientes: teórica y experimental. En la mayor´ıa de las ocasiones siendo un hallazgo experimental inexplicable, o no esperado, el precursor de la necesidad de desarrollar una nueva teoría física que ayude a explicar el fenómeno en cuestión. Casos como el efecto fotoeléctrico, la catástrofe del ultravioleta y la dispersión del ultravioleta, rompieron paradigmas en el conjunto de teor´ıas f´ısicas con las que se describía nuestro entorno a inicios del siglo XX, comúnmente llamada física clásica, y dieron paso a la llamada física moderna, con el nacimiento de la Mecánica Cuántica y la Relatividad General.

La Relatividad General es la teoría de gravitación con mayor aceptación en la comunidad f´ısica al d´ıa de hoy, propuesta por Albert Einstein [1] en 1915. Dicha teoría nos ayuda a explicar los fenómenos físicos que suceden a la escala de planetas, estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias, con cuerpos muy masivos y con velocidades muy grandes (cercanas a la velocidad de la luz). Por otro lado, la Mecánica Cuántica es la teoría que nos ayuda a explicar los fenómenos físicos que suceden a la escala de los átomos, electrones y otras part´ıculas elementales que componen el universo. A diferencia de la Relatividad General que se le atribuye a una sola persona, la Mecánica Cuántica fue

construida por diversos personajes, empezando con las ideas de los cuantos de energía de Planck alrededor de 1900 hasta los desarrollos de Bohr, Von Neumann, Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Pauli, Feynman y otros.
Existe un problema de compatibilidad entre ambas teorías, al cual no entraremos en detalle, sin embargo cabe mencionar que la forma en que están construidas estas dos teorías es muy diferente. La Mecánica Cuántica es una teoría estadística, no determinista, mientras la Relatividad General es una teoría clásica y determinista.

Actualmente en la comunidad de físicos existe la conjetura de que las teorías físicas fundamentales, es decir, aquellas que explican las 4 interacciones elementales: interacción nuclear fuerte y débil, electromagnetismo y gravedad, deben de ser naturalmente teorías cuánticas. De las 4 interacciones, tenemos teorías cuánticas para la interacción fuerte (llamada cromodinámica cuántica) y la interacción débil y electromagnética (teoría electrodébil) mediante las cuales se genera el llamado Modelo Estándar de partículas. Sin embargo, para el caso de la gravedad no existe una teoría cuántica aceptada y probada experimentalmente.

El lenguaje mayormente utilizado para el estudio de las interacciones elementales desde una perspectiva cuántica es la Teoría Cuántica de Campos (TCC). A pesar de que la TCC sirve para estudiar fenómenos de dispersión y ligados, la mayoría de experimentos que se pueden realizar para poner a prueba una teoría son experimentos de dispersión. La forma más sencilla de estudiar fenómenos de dispersión dentro de la TCC es mediante la introducción de los diagramas de Feynman. A manera intuitiva, los diagramas de Feynman son grafos en el espacio-tiempo de momentos, que a través de las llamadas reglas de Feynman nos permiten calcular la amplitud de dispersión. De manera un poco más formal, dichos diagramas representan la expansión perturbativa de la integral de caminos de Feynman asociada al sistema.

Los diagramas de Feynman nos permiten aprender mucho de las interacciones físicas a niveles más bajos de perturbación y adquirir una noción física del proceso. Sin embargo, como un todo, pueden resultar no muy eficientes al crecer de manera muy rápida conforme al orden de perturbación. A pesar de haber algunos desarrollos que permiten aligerar los cálculos como sugiere Dixon en [2], para interacciones a órdenes superiores resulta muy díficil, incluso con ayuda de software, calcular las amplitudes de dispersión a través de diagramas de Feynman. Para ejemplificar este crecimiento en el número de diagramas, considera una interacción de dispersión de 4 gluones, la amplitud de dispersión $A(1234)$ considera 4 diagramas de Feynman, sin embargo, para una interacción de 8 gluones $A(12345678)$ se consideran millones de diagramas de Feynman, es decir, el doblar el número de gluones desborda el número de diagramas a considerar. Sin embargo, la mayoría de estos diagramas se cancelan o suman 0 a la amplitud total.

En el caso de gravedad, ha habido avances en el cálculo de amplitudes de dispersión. Bryce DeWitt en [3-5] trata la cuantización perturbativa de la gravedad, incluyendo la formación de las reglas de Feynman para fenómenos gravitacionales. Partiendo del diagrama de 3-puntos para la teoría de Yang-Mills:

$$\frac{\delta S^3}{\delta A^a_\mu \delta A^b_\nu \delta A^c_\gamma} = f^{abc}\left[(p^\rho - q^\rho)\eta^{\mu\sigma} + (q^\mu - r^\mu)\eta^{\sigma\rho} + (r^\sigma - p^\sigma)\eta^{\rho\mu}\right], \qquad (1.1)$$

DeWitt encontró la expresión análoga en gravedad perturbativa para el diagrama de 3-puntos:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S^3}{\delta h_{\mu\nu}\delta h_{\sigma\tau}\delta h_{\rho\lambda}} = sym \Big[& -\frac{1}{4}P(pq\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\tau}\eta^{\rho\nu}) - \frac{1}{4}P(p^\sigma p^\tau\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda}) \\ & + \frac{1}{4}P(pq\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\tau}\eta^{\rho\lambda}) + \frac{1}{2}P(pq\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}\eta^{\tau\lambda}) \\ & + P(p^\sigma p^\lambda\eta^{\mu\nu}\eta^{\tau\rho}) - \frac{1}{2}P(p^\rho p^\lambda\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\tau}) \\ & - \frac{1}{2}P(p^\tau q^\mu\eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\lambda}) + \frac{1}{2}P(p^\rho p^\lambda\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\tau}) \\ & + P(p^\sigma q^\lambda\eta^{\tau\mu}\eta^{\nu\rho}) + P(pq^\mu\eta^{\tau\rho}\eta^{\lambda\nu}) - P(pq\eta^{\nu\sigma}\eta^{\tau\rho}\eta^{\lambda\mu})\Big],\end{aligned} \qquad (1.2)$$

dónde P hace referencia a realizar la suma sobre todas las permutaciones de las ternas de momentos (p, μ, ν),(q, σ, τ),(r, ρ, λ) y sym hace referencia a tener que simetrizar las expresiones que salgan de dicha suma.

La interacción de 3-puntos en la teoría de Yang-Mills contiene 6 términos, por el contrario, el equivalente en gravedad contiene 171 términos, 28 veces más que Yang-Mills. Incluso, el aumentar los diagramas de 3 a 4 puntos, incrementa el número de términos a 2580, por lo que incluso a órdenes pequeños resulta muy complicado, largo e ineficiente realizar cálculos de dispersión mediante diagramas de Feynman en gravedad.

Recientemente, el trabajo de Bern, Carrasco y Johansson (BCJ) en [6, 7] ha abierto una nueva manera de hacer cálculos de amplitudes de dispersión en gravedad a partir de una teoría no abeliana de gauge. Dicho formalismo que es revisado en el capítulo 2 se basa en la dualidad BCJ, la cual nos permite en un gauge en particular, hacer que los factores cinemáticos en la amplitud de una teoría no-abeliana de gauge tengan las mismas propiedades de antisimetría que los factores de color, así como satisfacer la indentidad de Jacobi. Esto derivando en el formalismo de la doble copia, el cual una vez establecido dicho gauge, nos permite encontrar la amplitud de un proceso de dispersión en gravitación a partir del cálculo de la amplitud en una teoría no abeliana de gauge. Esto nos permite trabajar únicamente en la teoría no-abeliana, la cual tiene menos diagramas por trabajar que la gravitación.

El desarrollo del formalismo de la doble copia se ha extendido no solo a nivel de amplitudes, sino también a nivel de ecuaciones de movimiento y soluciones clásicas por Luna et al en [8], siendo equivalente cualquiera de las 2 perspectivas a nivel árbol. A partir de la ecuación de Yang-Mills en un gauge donde se cumpla la dualidad BCJ, se computan las amplitudes a primer orden de perturbación en la teoría de color y posteriormente se aplica la doble copia para trasladar a amplitudes en gravedad y soluciones clásicas perturbativas. Sin embargo, en ambos casos, no existe un formalismo general cerrado a seguir más allá del primer orden de perturbación. Existen prescripciones para órdenes superiores como en [8] dónde se necesitan construir lagrangianos artificiales para cada orden de perturbación que además agregan campos no locales y sin un significado físico directo.

En el presente trabajo se extiende el trabajo realizado en [8] por Luna et al, tomando una dirección diferente, se propone resolver de forma iterativa la ecuación de Yang-Mills a todos los órdenes de perturbación para posteriormente aplicar el formalismo de la doble copia a través de asumir la validez de la misma para diagramas cuárticos y obtener las amplitudes de dispersión asociadas a cualquier orden de perturbación. A su vez, se traducen dichas amplitudes al espacio de posiciones para obtener las correcciones perturbativas a nivel de soluciones clasicas. Por último se aplican las expresiones obtenidas a métricas de agujeros negros en relatividad general llegando hasta segundo orden de perturbación.

1.2. Justificación

La forma actual de obtener correcciones a nivel de amplitudes sin lazos en gravedad a través de la doble copia tiene una complejidad en el tiempo de cálculo considerable más allá del primer orden de perturbación. Lo mismo sucede a nivel de soluciones clásicas, en dónde, sólamente para algunos casos de sistemas particulares podemos estudiar de forma práctica la dispersión a través del formalismo de la doble copia. Monteiro et al obtienen en [9] una forma cerrada para estudiar procesos dispersivos en métricas de agujeros negros que admiten una representación en coordenadas tipo Kerr-Schild. En adición a esto, dicho autor en [10] trabaja en el sector dual de Yang-Mills y MHV. De igual manera Luna et al en [11] encuentran una relación cerrada para espacios-tiempo tipo D mediante la doble copia de Weyl. Posteriormente White [12] deriva la doble copia de Weyl a partir de aplicar twistor theory. Por otro lado, Luna et al en [8] estudian correcciones perturbativas al gravitón gordo a nivel de soluciones clásicas a primer orden , y proponen un método para correcciones de orden superior en base a la construcción de lagrangianos auxiliares para cada orden de perturbación que cumplan explícitamente la dualidad BCJ y contengan únicamente diagramas con vértices de 3 puntos. Una vez construido el lagrangiano se deben encontrar las ecuaciones de movimiento y aplicar el formalismo de la doble copia, sin embargo, no existe una expresión general desarrollada mediante este método que nos permita obtener las correcciones perturbativas al gravitón gordo a orden n arbitrario para cualquier sistema físico de interés.

1.3. Objetivos

El presente trabajo se realiza buscando cumplir los siguientes objetivos:

- Encontrar una expresión general para la amplitud de dispersión en gravedad perturbativa para cualquier orden de perturbación a partir de la aplicación de la doble copia, partiendo del lagrangiano clásico de Yang-Mills.
- Encontrar una expresión general para las soluciones clásicas en gravedad perturbativa para cualquier orden de perturbación a partir de la aplicación de la doble copia, partiendo del lagrangiano clásico de Yang-Mills.
- Encontrar las ecuaciones de movimiento clásicas en gravedad perturbativa para cualquier orden de perturbación a partir de la aplicación de la doble copia, partiendo del lagrangiano clásico de Yang-Mills.

En el capítulo 1 se presenta una breve descripción de la problemática tratada, la justificación y objetivos del trabajo. Enseguida en el capítulo 2 se da un repaso a la Teoría de Gauge, se introduce la dualidad BCJ y el formalismo de la Doble Copia. A continuación en el capítulo 3 se repasa el formalismo de la Doble Copia a nivel de soluciones clásicas en Gravedad dilatónica a partir de Yang Mills. Acto seguido en el capítulo 4 se propone un procedimiento alternativo para el cálculo de correcciones perturbativas en soluciones clásicas a órdenes superiores. Después en el capítulo 5 se aplica el procedimiento alternativo a métricas de agujeros negros de Schwarzschild, Reisnner Nordström, Kerr y Kerr-Newman con rotación lenta. Por último en el capítulo 6 se presentan las conclusiones obtenidas del trabajo y las perspectivas a futuro del mismo.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Repaso de la Teoría de Gauge

En la presente sección se da un repaso general de la teoría no-abeliana de gauge culminando en la teoría de Yang-Mills.

2.1.1. Simetrías No-abelianas de Gauge

Grupo $SO(N)$

Comenzaremos siguiendo el formalismo desarrollado por Srednicki en [13]. Considere una teoría de N campos escalares reales que nombraremos ϕ_i con densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ dado por la siguiente ecuación:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi_i\partial_{\mu}\phi_i - \frac{1}{2}m^2\phi_i\phi_i - \frac{1}{16}\lambda(\phi_i\phi_i)^2, \tag{2.1}$$

en dónde estamos utilizando la convención de suma de Einstein [1] y la representación con signatura positiva de la métrica de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1). \tag{2.2}$$

La densidad lagrangiana descrita en (2.1) es invariante ante el grupo de transformaciones SO(N) de la forma:

$$\phi_i(x) \to R_{ij}\phi_j(x)\,. \tag{2.3}$$

El grupo de transformaciones SO(N) está formado por el conjunto de matrices ortogonales con determinante positivo $\{R\}$ de dimensión $N \times N$, esto es:

$$SO(N) = \{R \in M_{N\times N} | R^T = R^{-1}, \det R = +1\}, \tag{2.4}$$

dónde $M_{N\times N}$ es el espacio de matrices con entradas reales de dimensión $N \times N$.

Una de las propiedades más importantes de este grupo es que cualquiera de sus elementos se puede obtener a partir del mapeo exponencial de un conjunto de transformaciones infinitesimales base de dicho grupo. A continuación nos enfocamos en estudiar las mencionadas transformaciones. Considere una transformación infinitesimal de SO(N):

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \vartheta_{ij} + O(\vartheta^2), \tag{2.5}$$

dónde R es una matriz ortogonal que cumple:

$$R^T_{ij} = R^{-1}_{ij}\,. \tag{2.6}$$

Sustituyendo (2.5) en (2.6) tenemos:

$$\delta_{ji} + \vartheta_{ji} + O(\vartheta^2) = \delta ij - \vartheta_{ij} + O(\vartheta^2), \tag{2.7}$$

la cual implica:

$$\vartheta_{ij} = -\vartheta_{ji}\,. \tag{2.8}$$

Es decir, ϑ_{ij} es una matriz con elementos reales y además es antisimétrica. En consecuencia, es conveniente expresarla en términos de un conjunto de matrices hermitianas $(T^a)_{ij}$ que formen una base del espacio de matrices antisimétricas de $N \times N$. La dimensión del mencionado espacio de matrices es conocido y tiene un valor de $\frac{1}{2}N(N-1)$, motivo por el cual el índice $a \in 1, \frac{1}{2}N(N-1)$. Es decir, existen $\frac{1}{2}N(N-1)$ matrices T^a hermitianas, antisimétricas y linealmente independientes. Existen distintas representaciones de las matrices T^a, aquí las definimos de la siguiente manera:

- -i para alguna posición por encima de la diagonal principal
- +i para alguna posición por debajo de la diagonal principal
- 0 en todos los demas elementos

De esta modo, las matrices T^a satisfacen la regla de normalización dada por:

$$Tr(T^aT^b) = 2\delta^{ab}\,. \tag{2.9}$$

Teniendo ya delimitada la base de matrices hermitianas antisimétricas T^a dada por (2.9) podemos reescribir ϑ como combinación lineal de estas:

$$\vartheta_{jk} = i\vartheta^a T^a_{jk}, \tag{2.10}$$

dónde $\{\vartheta_a\}$ es un conjunto de $\frac{1}{2}N(N-1)$ parámetros infinitesimales reales. Al conjunto de matrices $\{T^a\}$ se le conoce como las matrices generadoras de SO(N). Es decir, el producto de cualesquiera dos matrices T^a, T^b $\in$ SO(N) es otra matriz T^c $\in$ SO(N). Esta relación de cerradura implica que el conmutador de dos matrices generadoras debe ser una combinación lineal de matrices generadoras:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c\,. \tag{2.11}$$

A los factores numéricos f^{abc} que aparecen en (2.11) se les conocen como constantes de estructura del grupo y la relación misma especifica el álgebra de Lie. El valor que toman las constantes de estructura del grupo determinan si el grupo es abeliano o no-abeliano:

- G es abeliano si $f^{abc} = 0$
- G es no-abeliano si $f^{abc} \neq 0$

Para el caso de SO(N) tenemos que:

- SO(2) es abeliano
- SO(N) es no-abeliano para $N \geq 3$

Multiplicando (2.11) por T^d y obteniendo la traza del resultado con la ayuda de (2.9) obtenemos las constantes de estructura del grupo:

$$f^{abd} = -\frac{i}{2} Tr \left([T^a, T^b] T^d \right) . \tag{2.12}$$

En adición, utilizando las propiedades cíclicas de la traza encontramos que f^{abc} debe ser completamente antisimétrico ante cualquier cambio de un par de índices. Además, tomando el complejo conjugado de (2.12) se requiere que f^{abc} sean a su vez parámetros reales. Por último, f^{abc} satisface la identidad de Jacobi:

$$f^{abd}f^{dce} + f^{bcd}f^{dae} + f^{cad}f^{dbe} = 0 . \tag{2.13}$$

Grupo $SU(N)$

Considere ahora una teor´ıa de N campos escalares complejos ϕ_i con densidad lagrangiana L dada por:

$$\mathrm{L} = -\partial^\mu \phi_i^\dagger \partial_\mu \phi_i - m^2 \phi_i^\dagger \phi_i - \frac{1}{4} (\phi_i^\dagger \phi_i)^2 . \tag{2.14}$$

La densidad descrita en (2.14) es invariante ante el grupo de transformaciones U(N):

$$\phi_i(x) \to U_{ij} \phi_j(x) , \tag{2.15}$$

dónde $U(N)$ se define como el grupo de matrices unitarias $N \times N$, esto es:

$$U(N) = \{ U \in Q_{N\times N} | U^\dagger = U^{-1} \} . \tag{2.16}$$

Todas las matrices de U(N) pueden ser expresadas en términos de un parámetro ϑ como:

$$U_{ij} = e^{-i\theta} u_{ij} , \tag{2.17}$$

en dónde $u \in U(N)$ y $det(u_{ij}) = 1$. Al conjunto de matrices $\{u\}$ se les conoce como el grupo de matrices unitarias especiales $N \times N$, esto es, $SU(N)$.

Las transformaciones del grupo $SU(N)$ pueden ser descritas por medio de transformaciones infinitesimales del mismo grupo. Considere una transformación infinitesimal de SU(N):

$$u_{ij} = \delta_{ij} - i\vartheta^a T^a_{ij} + O(\vartheta^2)\,. \tag{2.18}$$

De nueva cuenta, ϑ^a es un conjunto de parámetros reales infinitesimales. Consecuentemente, la unitariedad de u implica que las matrices generadoras sean hermitianas, y la restricción de determinante +1 implica su traza nula:

$$T^{a\dagger} = T^a\,, \tag{2.19}$$

$$Tr(T^a) = 0\,. \tag{2.20}$$

A diferencia de SO(N), la dimensión de SU(N) es $N^2 - 1$, que es el número de matrices $N \times N$ linealmente independientes que satisfacen (2.20). Por otra parte, al igual que SO(N) existen distintas maneras de seleccionar las matrices T^a, sin embargo es conveniente que respeten la normalización dada en la sección anterior por (2.9). Para esto construimos las matrices de la siguiente manera:

- Escogemos las $\frac{1}{2}N(N-1)$ matrices T^a de SO(N)
- Construimos $\frac{1}{2}N(N-1)$ matrices con alguna entrada +1 por encima de la diagonal y +1 por debajo de la misma.
- Construimos $N - 1$ matrices diagonales con 1 en su diagonal principal seguidos de un $-N$ en cualquier posición de la misma.

De esta manera obtenemos las $N^2 - 1$ matrices generadoras de SU(N) satisfaciendo la condición de normalización (2.9). Al igual que para el caso de SO(N), SU(N) satisface reglas similares de conmutación de sus generadores y sus coeficientes de estructura se obtienen de manera análoga:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c\,, \tag{2.21}$$

$$f^{abd} = -\frac{i}{2}Tr\left([T^a, T^b]T^d\right)\,. \tag{2.22}$$

En el mismo sentido, las constantes de estructura son completamente antisimétricas y satisfacen la identidad de Jacobi. La diferencia radica en el valor de los coeficientes de estructura y las matrices generadoras mismas T^a al ser un grupo de dimensión diferente.

2.1.2. Teoría no-Abeliana de Gauge

Construida la teoría preliminar de los grupos $SO(N)$ y $SU(N)$ estamos preparados para estudiar la teoría no abeliana de gauge. Para ello seguiremos el formalismo de Srednicki [13]. Considere una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ compuesta de N campos escalares o espinoriales a los cuales llamaremos indistintamente $\phi_i(x)$ y que es invariante ante una simetría continua de $SU(N)$ o $SO(N)$:

$$\phi_i(x) \to U_{ij}\phi_j(x)\,. \tag{2.23}$$

dónde U_{ij} es una matriz especial unitaria $N \times N$ para $SU(N)$ o una matriz ortogonal especial para el caso de $SO(N)$. La simetría descrita en (2.23) se le conoce como simetría global. Este nombre proviene del hecho de que la matriz de transformación U no depende de las coordenadas del espacio-tiempo, por lo que toma el mismo valor en todo el espacio-tiempo. En el caso en que las transformaciones U dependan explícitamente de las coordenadas del espacio-tiempo tenemos una simetría local:

$$U_{ij} = U_{ij}(x)\,. \tag{2.24}$$

Para fines de este trabajo, desarrollaremos solo el caso $SU(N)$.

Como vimos en la sección (2.1.1), podemos escribir una transformación infinitesimal de $SU(N)$ en la forma:

$$U_{jk}(x) = \delta_{jk} - ig\vartheta^a(x)T^a_{jk} + O(\vartheta^2)\,. \tag{2.25}$$

A diferencia de (2.18), insertamos una constante de acoplamiento g por conveniencia para los cálculos. Los índices de matriz $\{i, j\}$ corren de 1 a N, la dimensión de las matrices, mientras los índices de grupo $\{a\}$ corren de 1 a $N^2 - 1$, la dimensión del grupo. Las matrices generadoras del grupo $\{T^a\}$ satisfacen la relación (2.21), pero toman una normalización diferente por convención:

$$Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} . \quad (2.26)$$

De igual manera definimos un campo SU(N) de gauge $A_\mu(x)$ como una matriz de dimensión $N \times N$, hermitiana, antisimétrica y sin traza con la propiedad de transformación bajo $SU(N)$:

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) . \quad (2.27)$$

A esta regla de transformación la llamamos transformación de gauge. Dado que SU(N) es un grupo continuo, podemos escribir cualquier transformación $U(x)$ del grupo mediante el mapeo exponencial del producto de sus generadores y un conjunto de parámetros reales $\Gamma^a(x)$ propios de cada transformación:

$$U(x) = exp\left[-ig\Gamma^a(x)T_a\right] . \quad (2.28)$$

Así mismo, definimos la derivada covariante como:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x) . \quad (2.29)$$

Aplicando la derivada covariante a $\phi_j(x)$ podemos escribir de forma explícita la regla:

$$(D_\mu\phi)_j(x) = \partial_\mu\phi_j(x) - igA_\mu(x)_{jk}\phi_k(x) . \quad (2.30)$$

La derivada covariante resulta conveniente dada la forma que transforma bajo $U(x)$:

$$D_\mu \rightarrow U(x)D_\mu U^\dagger(x) . \quad (2.31)$$

Haciendo la sustitución $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ en todos los términos de derivada de $\mathcal{L}$ hacemos que $\mathcal{L}$ sea invariante de gauge, asumiendo que la densidad lagrangiana original tiene una simetría SU(N) global. Sin embargo, se sigue necesitando un término cinético para $A_\mu(x)$ para tener dinámica en el sistema. Para ello, definimos el campo de fuerza:

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] . \quad (2.32)$$

Dada la transformación (2.31) de D_μ bajo $U(x)$, $F_{\mu\nu}(x)$ cambia bajo una transformación de gauge como:

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{\dagger}(x)\,. \tag{2.33}$$

Por tanto, construimos el término cinético invariante de gauge para el campo de gauge de SU(N):

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{2}Tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\,. \tag{2.34}$$

Por su parte, como definimos el campo de gauge $A_\mu(x)$ hermitiano y sin traza podemos expresarlo en término de las matrices generadoras de SU(N):

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T^a\,. \tag{2.35}$$

Utilizando (2.26) en (2.35) podemos invertir la ecuación para encontrar $A^a_\mu(x)$, esto a partir de multiplicar (2.35) por T^b y obteniendo la traza del producto:

$$A^a_\mu(x) = 2Tr(A_\mu(x)T^a)\,. \tag{2.36}$$

De manera análoga podemos expresar $F_{\mu\nu}$ en términos de las matrices generadoras:

$$F_{\mu\nu}(x) = F^a_{\mu\nu}(x)T^a\,, \tag{2.37}$$

y aplicar el mismo razonamiento para despejar $F^a_{\mu\nu}(x)$:

$$F^a_{\mu\nu}(x) = 2Tr(F_{\mu\nu}T^a)\,. \tag{2.38}$$

Sustituyendo (2.38) en (2.33) tenemos:

$$\begin{aligned} F^c_{\mu\nu}T^c &= \partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu \; T^c - igA^a_\mu A^b_\nu[T^a, T^b] \\ &= \partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu + gf^{abc}A^a_\mu A^b_\nu \; T^c\,. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Esto es:

$$F^c_{\mu\nu} = \partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu + gf^{abc}A^a_\mu A^b_\nu \tag{2.40}$$

Expresando $F_{\mu\nu}(x)$ en términos de T^a como en (2.37) y sustituyendo en (2.26) obtenemos una forma del término cinético para el campo de gauge independiente de las matrices generadoras:

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} F^{c\mu\nu} F^{c}_{\mu\nu} . \quad (2.41)$$

Como podemos observar de (2.40), las constantes de estructura del grupo f^{abc} definen la naturaleza de la teoría de gauge:

- Si $f^{abc} \neq 0$ tenemos una teoría no abeliana de gauge, también llamada teoría de Yang-Mills.
- Si $f^{abc} = 0$ tenemos una teoría abeliana de gauge.

2.1.3. Ecuación de Yang-Mills

A partir del Lagrangiano dado en (2.41) construimos el llamado lagrangiano de Yang-Mills de forma idéntica:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F^{c\mu\nu} F^{c}_{\mu\nu} . \quad (2.42)$$

dónde $F_{\mu\nu}(x)$ está dado por (2.40) y satisface todas las relaciones dadas en (2.1.2). Aplicando el principio de mínima acción, traducido en las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtienen las ecuaciones de Yang-Mills:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{a}_{\gamma}} = \partial^{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta} A^{a}_{\gamma})} , \quad (2.43)$$

esto es:

$$\partial^{\mu} F^{a}_{\mu\nu} + g f^{abc} A^{b\mu} F^{c}_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.44)$$

A (2.44) se le conoce como la ecuación de Yang-Mills sin fuentes y sin masa.

Sin embargo, podemos agregar un término de masa m y de fuente J^{a} a las ecuaciones para obtener la ecuación de Yang-Mills con masa y fuentes:

$$\partial^{\mu} F^{a}_{\mu\nu} + g f^{abc} A^{b\mu} F^{c}_{\mu\nu} - m^{2} A^{a}_{\nu} = J^{a}_{\nu} . \quad (2.45)$$

Como podemos apreciar, (2.44) se puede obtener a partir de (2.45) haciendo $m = 0, J^{a}_{\nu} = 0$. Esto es, la ecuación de Yang-Mills sin fuentes y sin masa es un caso límite particular de la ecuación de Yang-Mills con fuentes y con masa.

Es conveniente expresar (2.45) en términos únicamente del campo de gauge A^a, para ello escogemos el gauge de Lorenz para trabajar las ecuaciones:

$$\partial^\mu A^a_\mu = 0\,. \tag{2.46}$$

Calculando la derivada del campo de fuerza:

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} = \partial^2 A^a_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc}\left(\partial^\mu A^b_\mu A^c_\nu + A^b_\mu \partial^\mu A^c_\nu\right). \tag{2.47}$$

Dado el gauge en que estamos trabajando, el segundo y tercer término de (2.47) se desvanecen:

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} = \partial^2 A^a_\nu + g f^{abc} A^b_\mu \partial^\mu A^c_\nu. \tag{2.48}$$

Sustituyendo en la ecuación de Yang-Mills sin fuentes y sin masa obtenemos:

$$\begin{aligned} &\partial^2 A^a_\nu + g f^{abc} A^b_\mu \partial^\mu A^c_\nu + g f^{abc} A^{b\mu} \partial_\mu A^c_\nu \\ &- g f^{abc} A^{b\mu} \partial_\nu A^c_\mu + g^2 f^{abc} f^{cde} A^{b\mu} A^d_\mu A^e_\nu = 0\,. \end{aligned} \tag{2.49}$$

De igual forma la ecuación de Yang-Mills con fuentes y con masa:

$$\begin{aligned} &\partial^2 A^a_\nu + g f^{abc} A^b_\mu \partial^\mu A^c_\nu + g f^{abc} A^{b\mu} \partial_\mu A^c_\nu - g f^{abc} A^{b\mu} \partial_\nu A^c_\mu \\ &+ g^2 f^{abc} f^{cde} A^{b\mu} A^d_\mu A^e_\nu - m^2 A^a_\nu = J^a_\nu\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Como se puede apreciar en (2.50), la ecuación de Yang-Mills es una ecuación diferencial parcial de segundo orden no lineal debido a los términos producto $A\partial A$ y $A^b A^d A^e$, motivo por el cual no hay un método de solución analítico para resolver dicha ecuación.

Amplitudes en teoría no-abeliana de gauge de color

A nivel de árbol se puede escribir la amplitud completa de un proceso de dispersión en una teoría de color considerando todas las partículas en la representación adjunta de $SU(N_c)$ mediante la siguiente descomposición parcial de amplitudes dada en [13] por Srednicki:

$$\mathcal{A}_n^{\text{tree}}(1,2,\ldots,n) = g^{n-2} \sum_{P(2,3,\ldots,n)} Tr[T^{a_1} \ldots T^{a_n}] A_n^{\text{tree}}(1,2,3,\ldots,n), \tag{2.51}$$

donde A_n^{tree} representa una amplitud parcial de un proceso de dispersión de color ordenado a nivel árbol consistente de n patas. Las matrices T^a son los generadores del grupo de color y en ellas se encuentra codificado el color de cada una de las n patas externas del diagrama. La suma en (2.51) es sobre todas las permutaciones no cíclicas de las últimas $n-1$ patas, lo que es equivalente a todas las posibles permutaciones de las n patas dejando la primera pata fija. Existen otras descomposiciones que se pueden realizar utilizando las constantes de estructura del grupo f^{abc}, como las realizadas por Del Duca en [14, 15], sin embargo, para fines de este trabajo nos quedaremos con la representación de amplitudes parciales. De la misma forma, en [2, 16] se presenta una generalización de (2.51) para introducir loops.

Por otro lado, las amplitudes a nivel árbol de una teoría de color satisfacen un conjunto de relaciones y propiedades importantes ya conocidas que resultan muy útiles al momento de intentar hacer cálculos dispersivos. Primeramente, tenemos las propiedades cíclicas y de reflexión:

$$A_n^{\text{tree}}(1,2,\ldots,n) = A_n^{\text{tree}}(2,3,\ldots,n,1), \tag{2.52}$$

$$A_n^{\text{tree}}(1,2,\ldots,n) = (-1)^n A_n^{\text{tree}}(n,n-1,\ldots,2,1). \tag{2.53}$$

A continuación, del trabajo de Kleiss [17] tenemos la propiedad subcíclica conocida como la identidad de desacoplamiento del fotón:

$$\sum_{\sigma \text{cyclic}} A_n^{\text{tree}}(1,\sigma(2,3,\ldots,n)) = 0. \tag{2.54}$$

En (2.54) la suma corre sobre todas las permutaciones de las $n-1$ últimas patas del proceso. Dicha identidad se obtiene a través de reemplazar la matriz generadora T^{a_1} en (2.51). Esto tiene la interpretación física de reemplazar la primera pata del diagrama por un fotón. Dado que los fotones no se acoplan directamente a las partículas en la representación adjunta la amplitud debe desvanecerse.

Por último introducimos las relaciones propuestas en [17] por Kleiss-Kuijf:

$$A_n^{\text{tree}}(1, \{\alpha\}, n\{\beta\}) = (-1)^{n_\beta} \sum_{\{\sigma\}_i \in OP(\{\alpha\},\{\beta^T\})} A_n^{\text{tree}}(1, \{\sigma\}_i, n) . \qquad (2.55)$$

La suma es sobre todas las permutaciones ordenadas $OP(\{\alpha\}, \{\beta^T\})$, dónde:

$$\{\alpha\}, \{\beta^T\} = \{\alpha\} U \{\beta^T\} . \qquad (2.56)$$

En esta notación $\{\beta^T\}$ se refiere al conjunto $\{\beta\}$ con los elementos en orden invertido. Por último entenderemos por permutación ordenada a cualquier permutación que mantiene el orden dentro de cada uno de los subconjuntos $\{\alpha\}$,$\{\beta^T\}$.

2.2. Dualidad BCJ

Del estudio de la teor´ıa no abeliana de gauge se tiene que una amplitud de n-puntos a nivel árbol puede escribirse de forma general como:

$$A_n^{\text{tree}}(1, 2, 3..., n) = g^{n-2} \sum_{i \in \rho} \frac{n_i c_i}{\prod_{\alpha_i} s_{\alpha_i}} . \qquad (2.57)$$

En (2.57) la suma corre sobre todos los diagramas de vértices de 3 puntos denotados por ρ, c_i corresponde a los factores de color de la teoría específica y n_i a los numeradores cinemáticos de la misma. A su vez, los factores s_{α_i} representan los inversos de los propagadores asociados al canal α_i.

Los factores de color c_i que aparecen en (2.57) son obtenidos del i-ésimo diagrama asignando a cada vértice de 3 puntos con una constante de estructura $\tilde{f}^{abc}$, en dónde $\tilde{f}^{abc}$ es un reescalamiento de las constantes de estructura naturales de la teor´ıa:

$$\tilde{f}^{abc} = i\sqrt{2} f^{abc} = Tr([T^a, T^b], T^c) . \qquad (2.58)$$

En el mismo sentido, se asigna a cada línea interna del i-ésimo diagrama el valor δ^{ab}.

Una propiedad fundamental de las constantes de estructura $\tilde{f}^{abc}$ es que satisfacen la identidad de Jacobi. Considere el conjunto de diagramas de vértices de 3 puntos, siempre se pueden reacomodar los diagramas en tríadas de (s, t, u) con factores de color dados por:

$$c_s = \tilde{f}^{a_1a_2b}\tilde{f}^{ba_3a_4}, \quad c_t = \tilde{f}^{a_1a_4b}\tilde{f}^{ba_2a_3}, \quad c_u = \tilde{f}^{a_1a_3b}\tilde{f}^{ba_4a_2} \tag{2.59}$$

de forma tal que se satisfaga la identidad de Jacobi:

$$c_s + c_t + c_u = 0\,. \tag{2.60}$$

Del trabajo realizado por Bern, Carrasco y Johansson en [6, 7] se llegó a la famosa dualidad BCJ, también llamada conjetura BCJ, la cual establece que el conjunto de numeradores cinemáticos de los diagramas en una teoría no-abeliana de gauge como los que aparecen en (2.57) pueden reacomodarse en tríadas de 3 diagramas (s, t, u) de forma tal que si los factores asociados de color c_s, c_t, c_u satisfacen la identidad de Jacobi entonces los numeradores cinemáticos asociados n_s, n_t, n_u también satisfacen la identidad de Jacobi. Esto es:

$$c_s + c_t + c_u = 0 \quad \rightarrow \quad n_s + n_t + n_u = 0\,. \tag{2.61}$$

A este resultado se le conoce como dualidad BCJ, también llamada dualidad de cinemática de color. A pesar de la belleza matemática de la conjetura (2.61), en general:

$$n_s + n_t + n_u \quad 0\,. \tag{2.62}$$

Ahora bien, los numeradores cinemáticos n_i que aparecen en (2.57) no son únicos, sino que son dependientes del gauge en que se trabaja la teoría. De esta manera es posible encontrar nuevos numeradores cinemáticos a través de una transformación generalizada de gauge:

$$n_i \rightarrow n_i + \Delta_i\,. \tag{2.63}$$

Las transformaciones generalizadas de gauge son una combinación de transformaciones de gauge con algunas otras operaciones, como lo pueden ser las redefiniciones de los campos gluónicos. La amplitud de dispersión (2.57) al ser invariante de gauge generalizado, no debe cambiar su valor bajo esta transformación, esto es:

$$g^{n-2}\sum_{i\epsilon\rho}\frac{n_i c_i}{\prod_{\alpha_i} s_{\alpha_i}} = g^{n-2}\sum_{i\epsilon\rho}\frac{n_i c_i}{\prod_{\alpha_i} s_{\alpha_i}} + g^{n-2}\sum_{i\epsilon\rho}\frac{\Delta_i c_i}{\prod_{\alpha_i} s_{\alpha_i}}\,. \tag{2.64}$$

Implicando una restricción en las transformaciones generalizadas de gauge, obligándolas a cumplir que:

$$g^{n-2}\sum_{i\epsilon\rho}\frac{\Delta_i c_i}{\prod_{\alpha_i} s_{\alpha_i}} = 0\,. \tag{2.65}$$

Por último, la dualidad representada en (2.61) necesita una condición adicional para ser cumplida. Dicha condición establece que los numeradores cinemáticos n_i deben de satisfacer las mismas relaciones de antisimetría que satisfacen los factores de color asociados c_i. Por ejemplo, si el i–ésimo factor de color es antisimétrico bajo el intercambio de dos patas, entonces el i–ésimo numerador cinemático deberá ser antisimétrico ante dicho cambio, esto es:

$$c_i \to -c_i \quad \to \quad n_i \to -n_i\,. \tag{2.66}$$

Por último, cabe enfatizar que la dualidad BCJ no solo se mantiene a nivel árbol. Tanto Bern en [18] como Carrasco en [19] extendieron la dualidad a nivel de loops. Para fines de este trabajo bastará la dualidad a nivel árbol.

2.3. Formalismo de la Doble Copia

2.3.1. Doble Copia

La segunda parte importante del trabajo de Bern, Carrasco y Johansson en [6, 7, 20] es la conjetura de la doble copia. Dicha conjetura nos permite calcular una amplitud en procesos de dispersión de gravedad a nivel árbol a partir de la composición de teorías no-abelianas de gauge.

La doble copia establece que una vez que se han encontrado los numeradores cinemáticos n_i que aparecen en (2.57) para una amplitud de n patas en una teor´ıa no-abeliana de gauge y un gauge en que se cumpla la dualidad BCJ entonces mediante el siguiente procedimiento podemos encontrar una amplitud de n patas en una teoría de gravedad a nivel árbol:

1. Reemplazar $g \to \frac{\kappa}{2}$, con $\kappa = \sqrt{32\pi G}$.
2. Remover los factores de color c_i para cada diagrama.
3. Reemplazar los factores de color removidos por nuevos factores cinemáticos $\{\tilde{n}_i\}$ provenientes de cualquier otra teoría no-abeliana de gauge.

Haciendo estas modificaciones obtenemos:

$$\mathcal{M}_n^{\text{tree}} = i \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{n-2} \sum_{i\in\Gamma} \frac{n_i \tilde{n}_i}{\prod_{\alpha_i} p_{\alpha_i}^2} . \tag{2.67}$$

La conjetura de la doble copia establece que M_n^{tree} dada en (2.67) corresponde a la fórmula para la amplitud de dispersión en gravedad de n patas. Nuevamente, Γ representa el conjunto de todos los diagramas de vértices de 3 puntos. Esta conjetura ha sido verificada y entendida hasta 8 puntos en el formalismo de teoría de cuerdas a través de las relaciones KLT en los trabajos de Bern y Elvang [21-23].

El nombre "doble copia"proviene del hecho de tener dos numeradores cinemáticos de dos teorías de gauge en el numerador de (2.67). También interpretando a la gravedad como el "cuadrado"de la teoría de gauge, a pesar que no nos referimos literalmente a la operación de elevar al cuadrado una cantidad, sino al hecho de que tenemos el producto de dos factores cinemáticos. La simplicidad de (2.57) sugiere que la estructura básica de las amplitudes de una teoría de gravedad es esencialmente idéntica a la de una teoría no abeliana de gauge. Por otro lado, no hemos establecido a que teoría de gravedad corresponde la amplitud de dispersión (2.67). Como menciona White en [24] la respuesta depende de la selección de teorías de gauge para calcular los numeradores cinemáticos. La forma más simple de la doble copia conocida en la literatura consiste en la teoría de Yang-Mills siendo copiada con ella misma. Dicha doble copia corresponde a Relatividad General acoplada a una partícula escalar llamada el dilatón y un tensor antisimétrico. Otras correspondencias de teorías de gauge hacia gravedad son enlistadas en [24] por White.

Así mismo, la conjetura de la doble copia ha sido extendida a nivel de lazos en los trabajos de Bern y White [24, 25], por lo que hay forma de construir amplitudes de procesos de dispersión en gravedad a partir de teorías de gauge no solo a nivel árbol, sino también a nivel de lazos.

Por último, cabe destacar que la conjetura de la doble copia ha sido verificada a nivel de L loops a través de analizar dispersión de partículas en regímenes de energía especiales. En los límites de alta energía del centro de masa los trabajos de Sotome, Sabio y Melville [26-31] muestran la validez de la conjetura, por otro lado, en el régimen de partículas con velocidades muy altas intercambiando gravitones o gluones de baja energía los trabajos de [32-38]. Mas allá de estos regímenes, no existe una prueba formal de la conjetura de la doble copia, como menciona White [24] en mayor razón debido a la falta de una prueba formal de la dualidad BCJ.

2.3.2. Cero Copia

Como se vio, la la doble copia consiste en remover los factores de color c_i de la amplitud de dispersión de una teoría de gauge a nivel árbol A_n^{tree} y reemplazarlos por numeradores cinemáticos $\tilde{n}_i$ de otra teoría de gauge.

En contraste, podemos realizar el proceso opuesto, esto es, remover los numeradores de color n_i de la amplitud de dispersión A_n y reemplazarlos por factores de color $\tilde{c}_i$ provenientes de alguna otra teoría de gauge, esto es:

$$T_n^{tree}(1, 2, 3..., n) = \tilde{g}^{n-2} \sum_{i \epsilon \rho} \frac{c_i \tilde{c}_i}{\prod_{\alpha_i} p^2_{\alpha_i}} . \tag{2.68}$$

A (2.68) se le conoce como la cero copia de la teoría no-abeliana de gauge. La cero copia de las teorías de gauge corresponde a amplitudes de dispersión en teorías no necesariamente físicas, como es la teoría escalar biadjunta. Sin embargo, a pesar de que nos dirigen a teorías no físicas, hay evidencia que la dinámica de estas teorías es heredada vía la doble copia por las teorías de gauge y gravedad. Las correspondencias vía cero copia han sido estudiadas por Nohle, Borsten y otros en [39-41].

2.3.3. Simple Copia

La conjetura de la doble copia codificada a través de la dualidad BCJ puede trabajarse en ambas direcciones. En el desarrollo de (2.3.1) y (2.3.2) trabajamos en una sola dirección, partiendo de una teoría de gauge y llegando a una teoría de gravedad. Sin embargo, el camino se puede recorrer en dirección opuesta, partir de una teor´ıa de gravedad y llegar a una teor´ıa de gauge.

Considere la amplitud de dispersión a nivel árbol de un proceso de n patas de gravedad en una teoría de gravitación arbitraria:

$$\mathcal{M}_n^{\text{tree}} = i \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{n-2} \sum_{i\in\Gamma} \frac{n_i \tilde{n}_i}{\prod_{\alpha_i} p^2_{\alpha_i}} . \tag{2.69}$$

El proceso de la simple copia nos permite encontrar la amplitud de dispersión de una teor´ıa de gauge a partir de la teor´ıa de gravedad a partir de aplicar el siguiente procedimiento:

- Reemplazar la constante de gravedad $\frac{\kappa}{2}$ por la constante de acoplamiento de la teor´ıa de gauge g.
- Remover uno de los numeradores cinemáticos $\tilde{n}_i$.
- Reemplzar los numeradores removidos por factores de color de una teor´ıa de color c_i.

Al seguir dicho procedimiento obtenemos:

$$\mathcal{A}_n^{\text{tree}}(1, 2, 3..., n) = g^{n-2} \sum_{i\in\rho} \frac{n_i c_i}{\prod_{\alpha_i} p^2_{\alpha_i}} . \tag{2.70}$$

A (2.70) se le conoce como la simple copia de (2.69). La simple copia nos permite pasar de una teoría de gravitación a una teoría no-abeliana de gauge.

De esta manera, se dice que la teor´ıa no-abeliana de gauge a nivel de amplitudes es la ra´ız cuadrada de una teor´ıa de gravedad en el entendido que una teoría no abeliana de gauge tiene la raíz cuadrada de numeradores cinemáticos en las amplitudes que tiene una teor´ıa de gravedad.

En s´ıntesis, la dualidad BCJ nos permite tener una correspondencia bidireccional entre teorías no-abelianas de gauge y teorías de gravedad a través de los procedimientos de la doble copia, que permite pasar de la teor´ıa de gauge hacia gravedad y la simple copia, que permite pasar de la teor´ıa de gravedad hacia la de gauge.

Capítulo 3

Gravedad dilatónica a partir de Yang-Mills

En este cap´ıtulo presentaremos el panorama general de estudio de la teor´ıa de dispersión de gravedad dilatónica a partir de la teoría de Yang-Mills.

3.1. Gravedad dilatónica

La gravedad dilatónica es una teoría física consistente de la relatividad general de Einstein [1] acoplada a un campo escalar, llamado dilatón ϕ y, a una dos-forma $B_{\mu\nu}$ conocida como el campo de Kalb-Rammond. La acción que representa esta teoría está dada por la siguiente ecuación:

$$S = \int d^D \sqrt{-g} \left[\frac{2}{\kappa^2} R - \frac{1}{2(D-2)} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{6} e^{-\frac{2\kappa\phi}{D-2}} H^{\lambda\mu\nu} H_{\lambda\mu\nu} \right], \tag{3.1}$$

dónde $\kappa = \sqrt{32\pi G}$, g el determinante de la métrica, D la dimensión de la teor´ıa y $H_{\mu\nu}$ es el campo de fuerza asociado a $B_{\mu\nu}$. Recordemos que $B_{\mu\nu}$ son las componentes de la dos-forma B_2 (campo de Kalb-Rammond), esto es:

$$B_2 = \frac{1}{2!} B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu . \tag{3.2}$$

Por tanto $H_{\lambda\mu\nu}$ son las componentes del campo de fuerza H_3 asociada a B_2:

$$H_3 = \frac{1}{3!} H_{\lambda\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \,, \tag{3.3}$$

$$H_3 = dB_2 \,, \tag{3.4}$$

Pero:

$$dB_2 = \frac{1}{3!} [\partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu}]\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \,. \tag{3.5}$$

Sustituyendo (3.5) y (3.3) en (3.4) obtenemos el valor de las componentes del campo de fueza $H_{\lambda\mu\nu}$:

$$H_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} \,. \tag{3.6}$$

Nos interesa estudiar el l´ımite lineal de (3.1), para lo cual expresaremos la métrica del sistema, $g_{\mu\nu}$, parametrizándola en términos de la desviación $h_{\mu\nu}$, que dicha métrica tiene de la métrica plana de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$. medida en términos de la constante de acoplamiento κ, esto es:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \,. \tag{3.7}$$

Aplicando el principio de m´ınima accion a (3.1) tomando el l´ımite lineal de la métrica (3.7) obtenemos las ecuaciones de movimiento para los campos $h_{\mu\nu}, \phi, B_{\mu\nu}$ a primer orden de perturbación κ:

$$\partial^2 h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial^\rho + \partial_\mu \partial_\nu h + \eta_{\mu\nu} \quad \partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \partial^2 h \quad = 0 \,, \tag{3.8}$$

$$\partial^2 B_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\rho B_{\rho\nu} + \partial_\nu \partial^\rho B_{\rho\mu} = 0 \,, \tag{3.9}$$

$$\partial^2 \phi = 0 \,. \tag{3.10}$$

La ecuación (3.8) para $h_{\mu\nu}$ se puede simplificar de manera sustancial mediante la introducción de un nuevo campo tensorial $\mathrm{H}_{\mu\nu}$ definido a través de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa \mathrm{H}^{\mu\nu} \,. \tag{3.11}$$

Bajo este nuevo campo, a orden lineal:

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\,. \tag{3.12}$$

A partir de (3.8) se construye la ecuación de movimiento para $H_{\mu\nu}$:

$$\partial^2 H_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\rho H_{\rho\nu} - \partial_\nu\partial^\rho H_{\rho\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma H_{\rho\sigma} = 0\,. \tag{3.13}$$

Por otra parte, (3.8) transforma bajo una transformación lineal de gauge inducida por $x'^\mu = x^\mu - \kappa y^\mu$:

$$H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \partial_\mu y_\nu + \partial_\nu y_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial\cdot y\,. \tag{3.14}$$

De esta manera, definimos el gauge de Donder como el gauge en que la ecuación de movimiento para H está dada por:

$$\partial^2 H_{\mu\nu} = 0\,. \tag{3.15}$$

3.2. Yang-Mills a orden lineal

Recordamos del capítulo 2, que la ecuación de movimiento la teoría de Yang-Mills está dada por:

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + g f^{abc} A^{b\mu} F^c_{\mu\nu} = 0\,. \tag{3.16}$$

Como ha sido mostrado por diversos autores en [24] la doble copia de la teor´ıa de Yang-Mills descrita por (3.16) corresponde a la teor´ıa de gravedad dilatónica descrita por (3.1). Dicha ecuación es una ecuación diferencial parcial, no-lineal, de segundo orden, para la cual no existe un método de solución general. Sin embargo, como desarrolla Luna et al en [8] se puede buscar una solución de manera perturbativa en una expansión en series de la constante de acoplamiento. A primer orden de perturbación:

$$A^a_\mu = A^{(0)a}_\mu + g A^{(1)a}_\mu\,. \tag{3.17}$$

Por el principio de la doble copia, el gravitón gordo así como el gravitón pueden ser expresados también de manera perturbativa en series de potencias de la constante de acoplamiento en la teoría de gravedad, esto es:

$$H^{\mu\nu} = H^{(0)\mu\nu} + \frac{k}{2}H^{(1)\mu\nu}, \tag{3.18}$$

$$h^{\mu\nu} = h^{(0)\mu\nu} + \frac{k}{2}h^{(1)\mu\nu}. \tag{3.19}$$

El proceso de solución consiste en sustituir (3.17) en (3.16) desechando todos los términos mayores a $O(g)$ en la ecuación. Para ello, es necesario recordar la definición del tensor de fuerza:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{3.20}$$

Dada la libertad de selección de gauge para la ecuación de Yang-Mills (3.16) se trabaja en el gauge de Donder por simplicidad de las ecuaciones:

$$\partial^\mu A^a_\mu = 0. \tag{3.21}$$

Con la solución propuesta (3.17) a primer orden de perturbación, las derivadas parciales y el producto de campos de color:

$$\partial_\mu A^a_\nu = \partial_\mu A^{(0)a}_\nu + g\partial_\mu A^{(1)a}_\nu, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} A^b_\mu A^c_\nu &= (A^{(0)b}_\mu + gA^{(1)b}_\mu)(A^{(0)c}_\nu + gA^{(1)c}_\nu) \\ &= A^{(0)b}_\mu A^{(0)c}_\nu + gA^{(0)b}_\mu A^{(1)c}_\nu + gA^{(1)b}_\mu A^{(0)c}_\nu. \end{aligned} \tag{3.23}$$

De forma que el tensor de fuerza a primer orden está dado por:

$$F^{(1)a}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{(0)a}_\nu + g\partial_\mu A^{(1)a}_\nu - \partial_\nu A^{(0)a}_\mu - g\partial_\nu A^{(1)a}_\mu + gf^{abc}A^{(0)b}_\mu A^{(0)c}_\nu. \tag{3.24}$$

Su derivada parcial está dada por:

$$\begin{aligned}\partial^{\mu}F^{(1)a}_{\mu\nu} = {} & \partial^2 A^{(0)a}_{\nu} + g\partial^2 A^{(1)a}_{\nu} - \partial_{\nu}\partial^{\mu}A^{(0)a}_{\mu} - g\partial_{\nu}\partial^{\mu}A^{(1)a}_{\mu} \\ & + gf^{abc}\partial^{\mu}A^{(0)b}_{\mu}A^{(0)c}_{\nu} + gf^{abc}A^{(0)b}_{\mu}\partial^{\mu}A^{(0)c}_{\nu}\,.\end{aligned} \tag{3.25}$$

De la misma manera:

$$\begin{aligned}gf^{abc}A^{b\mu}F^{c}_{\mu\nu} &= gf^{abc}A^{(0)b\mu}\left(\partial_{\mu}A^{(0)c}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{(0)c}_{\mu}\right) \\ &= gf^{abc}A^{(0)b\mu}\partial_{\mu}A^{(0)c}_{\nu} - gf^{abc}A^{(0)b\mu}\partial_{\nu}A^{(0)c}_{\mu}\,.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Utilizando la condición del gauge de Lorenz (3.21) obtenemos las ecuaciones para el campo de color a orden 0 y 1 en perturbación de g, esto es:

$$\partial^2 A^{(0)a}_{\mu} = 0\,, \tag{3.27}$$

$$\partial^2 A^{(1)a}_{\nu} = -2f^{abc}A^{(0)b\mu}\partial_{\mu}A^{(0)c}_{\nu} + f^{abc}A^{(0)b\mu}\partial_{\nu}A^{(0)c}_{\mu}\,. \tag{3.28}$$

A partir de (3.27) observamos que a orden 0 de perturbación, el campo de color debe cumplir la ecuacion de onda, la cual admite soluciones tipo onda plana así como soluciones tipo Coulomb. Por otro lado, la ecuación a primer orden de perturbacion, continúa siendo no lineal.

Como se menciona [8], la doble copia es mejor entendida en el espacio de momentos por lo que se trasladan las ecuaciones (3.27) y (3.28) mediante una transformación de Fourier. Para ello es conveniente definir la siguiente notación siguiendo [8]:

$$\int d\!\!{}^{-}{}^{D}p\,F(p) = \int \frac{d^{D}p}{(2\pi)^{D}}F(p)\,, \tag{3.29}$$

$$\delta\!\!{}^{-}{}^{D}(p) = (2\pi)^{D}\delta(p)\,. \tag{3.30}$$

A partir de estas definiciones computamos las transformadas de Fourier de los campos de color:

$$A_\nu^{(1)a}(x) = \int d\bar{}p e^{ipx} A_\nu^{(1)a}(p), \tag{3.31}$$

$$A_\nu^{(0)c}(x) = \int đp_3 e^{ip_3x} A_\nu^{(0)c}(p_3), \tag{3.32}$$

$$A^{(0)b\mu}(x) = \int đp_2 e^{ip_2x} A^{(0)b\mu}(p_2). \tag{3.33}$$

Se calculan los términos que aparecen en (3.27) y (3.28):

$$\partial^2 A_\nu^{(1)a} = -\int d\bar{}p p^2 e^{ipx} A_\nu^{(1)a}(p), \tag{3.34}$$

$$A^{(0)b\mu}\partial_\mu A_\nu^{(0)c} = i\int đp_2 đp_3 p_{3\mu} A^{(0)b\mu}(p_2) A_\nu^{(0)c}(p_3) e^{i(p_2+p_3)x}, \tag{3.35}$$

$$A^{(0)b\mu}\partial_\nu A_\mu^{(0)c} = i\int đp_2 đp_3 p_{3\nu} A^{(0)b\mu}(p_2) A_\mu^{(0)c}(p_3) e^{i(p_2+p_3)x}. \tag{3.36}$$

Sustituyendo de vuelta en (3.28) se obtiene:

$$\begin{aligned} -\int đe^{ipx} p^2 A_\nu^{(1)a}(p) = -2if^{abc} &\int đp_2 đp_3 p_{3\mu} A^{(0)b\mu}(p_2) A_\nu^{(0)c}(p_3) e^{i(p_2+p_3)x} \\ + if^{abc} &\int đp_2 đp_3 p_{3\nu} A^{(0)b\mu}(p_2) A_\mu^{(0)c}(p_3) e^{i(p_2+p_3)x}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

La ecuación (3.37) es la representación de Fourier de la ecuación de Yang-Mills a primer orden de perturbación en g. El objetivo es despejar $A_\nu^{(1)a}(p)$, para esto, se procede a multiplicar (3.37) por e^{ip_1x} e integrar sobre x, esto es:

$$
\begin{aligned}
-\int dx \int \bar{d}p\, p^2 e^{ipx} A^{(1)a}_{\nu}(p) &\\
= -2if^{abc} \int dx \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3\, p_{3\mu} A^{(0)b\mu}(p_2) A^{(0)c}_{\nu}(p_3) e^{i(p_2+p_3)x} &\\
+ if^{abc} \int dx \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3\, p_{3\nu} A^{(0)b\mu}(p_2) A^{(0)c}_{\mu}(p_3) e^{i(p_2+p_3)x}. &
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Recordando la representación de Fourier de la función delta de Dirac:

$$
\bar{\delta}(p - p') = \int dx\, e^{i(p-p')x}, \tag{3.39}
$$

sustituyendo esta en (3.38) e integrando con la función delta se obtiene:

$$
\begin{aligned}
-p_1^2 A^{(1)a}_{\nu}(-p_1) = -2if^{abc} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3\, \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) p_{3\mu} A^{(0)b\mu}(p_2) A^{(0)c}_{\nu}(p_3) &\\
+ if^{abc} \int \bar{d}p_2 \bar{d}\, \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) p_3 p_{3\nu} A^{(0)b\mu}(p_2) A^{(0)c}_{\mu}(p_3). &
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

De esta manera se despeja $A^{(1)a}_{\nu}$:

$$
\begin{aligned}
A^{(1)a}_{\nu}(-p_1) = \frac{2if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3\, \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) p_{3\mu} A^{(0)b\mu}(p_2) A^{(0)c}_{\nu}(p_3) &\\
- \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3\, \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) p_{3\nu} A^{(0)b\mu}(p_2) A^{(0)c}_{\mu}(p_3)\ . &
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Sin embargo, de la forma en que está expresada (3.41) no se percibe explícitamente la dualidad BCJ, por lo cual se procederá a realizar una serie de manipulaciones algebraicas conforme a [8].

Primeramente se levanta el índice espacial multiplicando por η^{μ}_{ν}:

$$
\begin{aligned}
A^{(1)\mu a}(-p_1) = {} & \frac{2if^{abc}}{p_1^2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)\eta^{\mu\nu}p_{3\gamma}A^{(0)b\gamma}(p_2)A^{(0)c}_{\nu}(p_3) \\
& - \frac{if^{abc}}{p_1^2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)\eta^{\mu\nu}p_{3\nu}A^{(0)b\gamma}(p_2)A^{(0)c}_{\gamma}(p_3)\ .
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Se simplifican los términos que aparecen en las integrales:

$$
\begin{aligned}
\eta^{\mu\nu}p_{3\gamma}A^{(0)b\gamma}(p_2)A^{(0)c}_{\nu}(p_3) &= p_{3\alpha}\eta^{\alpha\beta}A^{(0)b}_{\beta}\eta^{\gamma\mu}A^{(0)c}_{\gamma}(p_3) \\
&= p_3^{\beta}\eta^{\gamma\mu}A^{(0)b}_{\beta}(p_2)A^{(0)c}_{\gamma}(p_3)\ ,
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

$$
\eta^{\mu\nu}p_{3\nu}A^{(0)b\gamma}(p_2)A^{(0)c}_{\gamma}(p_3) = p_3^{\mu}\eta^{\beta\gamma}A^{(0)b}_{\beta}(p_2)A^{(0)c}_{\gamma}(p_3)\ ,
\tag{3.44}
$$

De esta manera (3.41):

$$
\begin{aligned}
A^{(1)\,\mu a}(-p_1) = {} & \frac{2if^{abc}}{p_1^2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_3^{\beta}\eta^{\gamma\mu}A^{(0)b}_{\beta}(p_2)A^{(0)c}_{\gamma}(p_3) \\
& - \frac{if^{abc}}{p_1^2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_3^{\mu}\eta^{\beta\gamma}A^{(0)\,b}_{\beta}(p_2)A^{(0)\,c}_{\gamma}(p_3)\ .
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

En segundo lugar, se procede a expresar la primera integral en (3.45) que contiene un factor de 2 como dos integrales con un factor de 1, reemplazando $\beta \to \gamma$ al ser índices mudos:

$$
\begin{aligned}
A^{(1)\,\mu a}(-p_1) = \frac{if^{abc}}{p_1^2} & \int \bar{d}p_1\bar{d}p_2\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_3^{\beta}\eta^{\gamma\mu}A^{(0)b}_{\beta}(p_2)A^{(0)c}_{\gamma}(p_3) \\
& + \int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_3^{\gamma}\eta^{\beta\mu}A^{(0)b}_{\gamma}(p_2)A^{(0)c}_{\beta}(p_3) \\
& - \int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_3^{\mu}\eta^{\beta\gamma}A^{(0)b}_{\beta}(p_2)A^{(0)c}_{\gamma}(p_3)\ .
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

En la segunda integral presente en (3.46) se intercambian las variables de integración $p_2 \to p_3$ y $b \to c$. Además se utiliza la antisimetría del factor de color:

$$f^{acb} = -f^{abc} . \tag{3.47}$$

Sustituyendo en (3.45) se obtiene:

$$\begin{aligned} A^{(1)\mu a}(-p_1) = \frac{i f^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d} p_1 \bar{d} p_2 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) \Big[& p_3^\beta \eta^{\gamma\mu} - p_2^\gamma \eta^{\beta\mu} \\ & - p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} \Big] A_\beta^{(0)b}(p_2) A_\gamma^{(0)c}(p_3) . \end{aligned} \tag{3.48}$$

Posteriormente se utiliza la conservación del momento expresándolo en una manera conveniente:

$$p_3^\beta = \frac{p_3^\beta - p_2^\beta - p_1^\beta}{2} , \tag{3.49}$$

$$p_2^\gamma = \frac{p_2^\gamma - p_1^\gamma - p_3^\gamma}{2} , \tag{3.50}$$

$$p_3^\mu = \frac{p_3^\mu - p_2^\mu - p_1^\mu}{2} . \tag{3.51}$$

Entonces:

$$p_3^\beta \eta^{\gamma\mu} = \frac{(p_3 - p_2)^\beta \eta^{\gamma\mu} - p_1^\beta \eta^{\gamma\mu}}{2} , \tag{3.52}$$

$$-p_2^\gamma \eta^{\beta\mu} = \frac{(p_1 - p_2)^\gamma \eta^{\beta\mu} + p_3^\gamma \eta^{\beta\mu}}{2} , \tag{3.53}$$

$$-p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} = \frac{(p_2 - p_3)^\mu \eta^{\beta\gamma} + p_1^\mu \eta^{\beta\gamma}}{2} . \tag{3.54}$$

En seguida se sustituyen (3.52),(3.53) y (3.54) en (3.48):

$$A^{(1)\mu a}(-p_1) = \frac{if^{abc}}{2p_1^2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)\Big[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} - p_2^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + p_3^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] A^{(0)b}_{\beta}(p_2)A^{(0)c}_{\gamma}(p_3)\,. \tag{3.55}$$

A su vez, se utiliza la expresión de Fourier para la condición del gauge de Lorenz:

$$\int \eta^{\mu\nu}p_{\nu}e^{ipx}A^{(0)a}_{\mu}(p)\bar{d}p = \int \bar{d}p\,p^{\mu}A^{(0)a}_{\mu}(p)e^{ipx} = 0\,. \tag{3.56}$$

Multiplicando por $e^{-ip'x}$ e integrando sobre x en (3.56) se obtiene:

$$\int dx\bar{d}p\,e^{i(p-p')x}p^{\mu}A^{(0)a}_{\mu} = \int \bar{d}p\,\delta(p-p')p^{\mu}A^{(0)a}_{\mu}(p) = 0\,. \tag{3.57}$$

Esto es:

$$p^{\mu}A^{(0)a}_{\mu}(p) = 0\,. \tag{3.58}$$

Por tanto:

$$p_2^{\beta}A^{(0)b}_{\beta}(p_2) = p_3^{\gamma}A^{(0)c}_{\gamma} = 0\,. \tag{3.59}$$

Posteriormente se sustituye (3.58) en (3.56):

$$A^{(1)\mu a}(-p_1) = \frac{if^{abc}}{2p_1^2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)\Big[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} + p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] A^{(0)b}_{\beta}(p_2)A^{(0)c}_{\gamma}(p_3)\,. \tag{3.60}$$

Para el último término en la integral $p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma}$ se vuelve a utilizar la conservación del momento:

$$\begin{aligned}
\frac{if^{abc}}{p_1^2}\int & \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma}A_{\beta}^{(0)b}(p_2)A_{\gamma}^{(0)c}(p_3) \\
= -\frac{if^{abc}}{p_1^2}\int & \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_2^{\mu}A_{\beta}^{(0)b}(p_2)A_{\gamma}^{(0)c}(p_3) \\
-\frac{if^{abc}}{p_1^2}\int & \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_3^{\mu}A_{\beta}^{(0)b}(p_2)A_{\gamma}^{(0)c}(p_3)\,.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

En la primera integral del lado derecho de (3.61) intercambiamos $p_2 \rightarrow p_3$:

$$\begin{aligned}
\frac{if^{abc}}{p_1^2}\int & \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma}A_{\beta}^{(0)b}(p_2)A_{\gamma}^{(0)c}(p_3) \\
= -\frac{if^{abc}}{p_1^2}\int & \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_3^{\mu}A_{\beta}^{(0)b}(p_3)A_{\gamma}^{(0)c}(p_2) \\
-\frac{if^{abc}}{p_1^2}\int & \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_3^{\mu}A_{\beta}^{(0)b}(p_2)A_{\gamma}^{(0)c}(p_3)\,.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Posteriormente se sustituye $\beta \rightarrow \gamma$ en la primera integral del lado derecho de (3.62):

$$\begin{aligned}
\frac{if^{abc}}{p_1^2}\int & \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma}A_{\beta}^{(0)b}(p_2)A_{\gamma}^{(0)c}(p_3) \\
= -\frac{if^{abc}}{p_1^2}\int & \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_3^{\mu}A_{\gamma}^{(0)b}(p_3)A_{\beta}^{(0)c}(p_2) \\
-\frac{if^{abc}}{p_1^2}\int & \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_3^{\mu}A_{\beta}^{(0)b}(p_2)A_{\gamma}^{(0)c}(p_3)\,.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Por último se intercambian $b \rightarrow c$ en (3.63) y se usa la antisimetría del factor de color $f^{acb} = -f^{abc}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{if^{abc}}{p_1^2}\int d\bar{}p_2 d\bar{}p_3 \delta\bar{}(p_1+p_2+p_3) p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma} A_{\beta}^{(0)b}(p_2) A_{\gamma}^{(0)c}(p_3) \\
&= \frac{if^{abc}}{p_1^2}\int d\bar{}p_2 d\bar{}p_3 \delta\bar{}(p_1+p_2+p_3) p_3^{\mu} A_{\gamma}^{(0)c}(p_3) A_{\beta}^{(0)b}(p_2) \\
&- \frac{if^{abc}}{p_1^2}\int d\bar{}p_2 d\bar{}p_3 \delta\bar{}(p_1+p_2+p_3) p_3^{\mu} A_{\beta}^{(0)b}(p_2) A_{\gamma}^{(0)c}(p_3)\,.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

De esta manera se obtiene la correción a primer orden de perturbación $O(g)$ al campo de color en el espacio de Fourier, dada por:

$$\begin{aligned}
A^{(1)\mu a}(-p_1) = \frac{if^{abc}}{2p_1^2}\int d\bar{}p_2 d\bar{}p_3 \delta\bar{}(p_1+p_2+p_3)\ \big((p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} \\
+ (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\big)\ A_{\beta}^{(0)b}(p_2) A_{\gamma}^{(0)c}(p_3)\,.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

La expresión (3.65) tiene la forma explícita por la doble copia, en dónde el factor cinemático cumple las mismas relaciones de antisimetría que el factor de color. En este caso el factor de color es el factor de estructura de grupo f^{abc} el cual es completamente antisimétrico ante cualquier intercambio de 2 índices y además satisface la identidad de Jacobi.

De esta manera el factor cinemático:

$$n^{\beta\gamma\mu}(p_1, p_2, p_3) = (p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\,, \tag{3.66}$$

cumple el ser completamente antisimétrico y la identidad de Jacobi. De esta manera podemos aplicar el principio de la doble copia para obtener la corrección a primer orden de perturbación al gravitón gordo, esto mediante la regla de sustitución:

$$A_{\mu}^{(0)a}(p) A_{\nu}^{(0)b}(p) \to H_{\mu\nu}^{(0)}(p)\,. \tag{3.67}$$

Aplicando la regla (3.67) a (3.65) se obtiene la corrección a primer orden al gravitón gordo:

$$
\begin{aligned}
H^{(1)\mu\mu'}(-p_1) = \frac{1}{4p_1^2}\int & đ^D p_2\, đ^D p_3\, \bar{\delta}^D(p_1+p_2+p_3)\, \Big[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} \\
& + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \Big[(p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} \\
& + (p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] H^{(0)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(p_3) .
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

De esta manera, teniendo una solución al gravitón gordo a orden 0, $H^{(0)}_{\beta\beta}$ se puede conocer la corrección a primer orden de perturbación a dicho gravitón gordo.

3.3. Mas allá del orden lineal

Como se vio en el capítulo 2, para poder aplicar el principio de la doble copia entre una teoría de gauge no abeliana y una teoría de gravedad, se tiene que trabajar en un gauge donde las soluciones a las amplitudes de la teoría de gauge incorporen la dualidad BCJ. En la sección 3.2 se desarrolló el formalismo para obtener las correcciones a primer orden al gravitón gordo a partir de la teoría de Yang-Mills. Sin embargo, el proceso a órdenes perturbativos más altos no se ha trabajado de forma general para la teoría.

Para órdenes mayores de perturbación se construyen lagrangianos de Yang-Mills para cada orden de perturbación los cuales incorporan explícitamente la identidad de Jacobi siguiendo el formaliso de Tolotti en [42]. Sin embargo estos lagrangianos tienen las desventajas de ser no locales y contener vértices de Feynman con un número infinito de campos además de tener que construirse uno para cada orden de perturbación, así como la introducción de campos que no tienen un significado físico.

Por estas razones, se procedió a expandir el trabajo realizado por Luna [8] y otros de resolver la ecuación de Yang-Mills a orden lineal y posteriormente aplicar la doble copia hacia una fórmula recurrente general a orden n sin la necesidad de construir ningún lagrangiano especial para cada orden de perturbación ni vértices con interacciones de campos infinitos.

Dicho desarrollo involucra la resolución de la ecuación de Yang-Mills completa a cualquier orden de perturbación y la posterior aplicación de la doble copia, los cuales se desarrollan a continuación.

Capítulo 4

Procedimiento alternativo al de Luna et al

En este capítulo se realiza el cálculo de la corrección a un orden arbitrario de las soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills y se establece la noción de la doble copia a dicho orden.

4.1. Solución de Yang-Mills a orden arbitrario

Nuevamente, se inicia a partir de la ecuación de Yang-Mills completa:

$$\partial^{\mu} F^{a}_{\mu\nu} + g f^{abc} A^{b\mu} F^{c}_{\mu\nu} = 0, \tag{4.1}$$

dónde el tensor de fuerza está dado por:

$$F^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{a}_{\mu} + g f^{abc} A^{b}_{\mu} A^{c}_{\nu} \tag{4.2}$$

Sustituyendo (4.2) en (4.1) obtenemos la ecuación de Yang-Mills completamente en términos del potencial de color:

$$\begin{aligned} &\partial^2 A^a_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} \partial^\mu A^b_\mu A^c_\nu + g f^{abc} A^b_\mu \partial^\mu A^c_\nu \\ &+ g f^{abc} A^{b\mu} \left(\partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu + g f^{ade} A^d_\mu A^e_\nu \right) = 0 \,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Se continúa trabajando en el gauge de De Donder $\partial^\mu A^a_\mu = 0$, por tanto (4.3):

$$\begin{aligned} &\partial^2 A^a_\nu + g f^{abc} A^b_\mu \partial^\mu A^c_\nu + g f^{abc} A^{b\mu} \partial_\mu A^c_\nu \\ &- g f^{abc} A^{b\mu} \partial_\nu A^c_\mu + g^2 f^{abc} f^{cde} A^{b\mu} A^d_\mu A^e_\nu = 0 \,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Se propone una solución para el campo de color A^a_ν como una expansión en serie de potencias de la constante de acomplamiento:

$$A^a_\nu = \sum_{j=0}^{\infty} g^j A^{(j)a}_\nu \,. \tag{4.5}$$

Debido a que es de interés encontrar una solución perturbativa en serie de potencias, cuestiones de convergencia de la expresión (4.5) no serán considerados.

Sustituyendo (4.5) en (4.4) obtenemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} g^j \partial^2 A^{(j)a}_\nu + 2 f^{abc} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g^{j+k+1} A^{(j)b\mu} \partial_\mu A^{(k)c}_\nu \\ &- f^{abc} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g^{j+k+1} A^{(j)b\mu} \partial_\nu A^{(k)c}_\mu \\ &+ f^{abc} f^{cde} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g^{j+k+l+2} A^{(j)b\mu} A^{(k)d}_\mu A^{(l)e}_\nu = 0 \,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Se procede a agrupar los términos que aparecen en la ecuación (4.6) en potencias de g. Para el término con la doble sumatoria introducimos un nuevo índice de suma:

$$j' = j + k + 1. \tag{4.7}$$

De esta manera se despeja el índice de suma k:

$$k = j' - j - 1. \tag{4.8}$$

Dado que $k \geq 0$ entonces $j' - j - 1 \geq 0$, esto implica:

$$j \leq j' - 1, \tag{4.9}$$

es decir, el precio de introducir el nuevo índice j' para tener una misma potencia de g en todas las sumatorias es el enredamiento de los nuevos índices de suma. De la misma manera, para el término con triple suma en (4.6):

$$j' = j + k + l + 2. \tag{4.10}$$

De forma análoga, despejando l:

$$k = j' - j - l - 2. \tag{4.11}$$

Como $k \geq 0$ entonces:

$$l \leq j' - j - 2. \tag{4.12}$$

Sustituyendo (4.9), (4.11) en (4.6) la ecuación de Yang-Mills toma la forma:

$$\begin{aligned}\sum_{j'=0}^{\infty} g^{j'} \partial^2 A_\nu^{(j')a} + 2f^{abc} \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{j'-1} g^{j'} A^{(j)b\mu} \partial_\mu A_\nu^{(j'-j-1)c} \\ + f^{abc} f^{cde} \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{j'-j-2} g^{j'} A^{(j')b\mu} A_\mu^{(j'-j-l-2)d} A_\nu^{(l)e} = 0.\end{aligned} \tag{4.13}$$

En (4.13) todos los términos tienen una misma suma sobre potencias $g^{j'}$, debido a la independencia lineal de los polinomios, la única forma de cumplir la ecuación es que los coeficientes que acompañana a cada potencia $g^{j'}$ sean

0, esto es:

$$\partial^2 A_\nu^{(j')a} + 2f^{abc}\sum_{j=0}^{j'-1} A^{(j)b\mu}\partial_\mu A_\nu^{(j'-j-1)c} - f^{abc}\sum_{j=0}^{j'-1} A^{(j)b\mu}\partial_\nu A_\mu^{(j'-j-1)c} + f^{abc}f^{cde}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{j'-j-2} A^{(j)b\mu}A_\mu^{(j'-j-l-2)d}A_\nu^{(l)e} = 0. \tag{4.14}$$

Además como $l \geq 0$ entonces:

$$j \leq j' - 2. \tag{4.15}$$

Esto limita la suma sobre el índice j :

$$\partial^2 A_\nu^{(j')a} + 2f^{abc}\sum_{j=0}^{j'-1} A^{(j)b\mu}\partial_\mu A_\nu^{(j'-j-1)c} - f^{abc}\sum_{j=0}^{j'-1} A^{(j)b\mu}\partial_\nu A_\mu^{(j'-j-1)c} + f^{abc}f^{cde}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2} A^{(j)b\mu}A_\mu^{(j'-j-l-2)d}A_\nu^{(l)e} = 0. \tag{4.16}$$

Es decir, de acuerdo a la solución perturbativa propuesta, la ecuación de Yang-Mills se convierte en un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales dadas por (4.16). Como el objetivo es nuevamente aplicar la doble copia, transformamos (4.16) al espacio de Fourier:

$$\begin{aligned}
&-\int đp\, e^{ipx} p^2 A_\nu^{(j')a}(p) \\
&+ if^{abc}\sum_{j=0}^{j'-1}\int đp_2 đp_3\, e^{i(p_2+p_3)x} A^{(j)b\mu}(p_2)\Big[2p_{3\mu}A_\nu^{(j'-j-1)c}(p_3) - p_{3\nu}A_\mu^{(j'-j-1)c}(p_3)\Big] \\
&+ f^{abc}f^{cde}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\int đp_2 đp_3 đp_4\, e^{i(p_2+p_3+p_4)x} A^{(j)b\mu}(p_2)A_\mu^{(j'-j-l-2)d}(p_3)A_\nu^{(l)e}(p_4) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Con el objetivo de despejar $A_\nu^{j'(a)}$ multiplicamos (4.17) por e^{ip_1x} e integramos sobre x, recordando la representación de Fourier de la delta de Dirac (3.39), obtenemos:

$$
\begin{aligned}
A_\nu^{(j')a}(-p_1) = \frac{1}{p_1^2}\Bigg[& i f^{abc}\sum_{j=0}^{j'-1}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)A^{(j)b\gamma}(p_2) \\
& \Big[2p_{3\gamma}A_\nu^{(j'-j-1)c}(p_3) - p_{3\nu}A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3)\Big] \\
& + f^{abc}f^{cde}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{d}p_4\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \\
& A^{(j)b\gamma}(p_2)A_\gamma^{(j'-j-l-2)d}(p_3)A_\nu^{(l)e}(p_4)\Bigg] .
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Elevamos el índice de (4.18) multiplicando por η^μ_ν:

$$
\begin{aligned}
A^{(j')\mu a}(-p_1) = \frac{1}{p_1^2}\Bigg[& i f^{abc}\sum_{j=0}^{j'-1}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)A^{(j)b\gamma}(p_2) \\
& \Big[2p_{3\gamma}\eta^{\mu\nu}A_\nu^{(j'-j-1)c}(p_3) - p_{3\nu}\eta^{\mu\nu}A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3)\Big] \\
& + f^{abc}f^{cde}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{d}p_4\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \\
& \eta^{\mu\nu}A^{(j)b\gamma}(p_2)A_\gamma^{(j'-j-l-2)d}(p_3)A_\nu^{(l)e}(p_4)\Bigg] .
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Considere las integrales que aparecen en la sumatoria simple en (4.19):

$$
\begin{aligned}
& \frac{2if^{abc}}{p_1^2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_{3\gamma}\eta^{\mu\nu}A^{(j)b\gamma}(p_2)A_\nu^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
& - \frac{if^{abc}}{p_1^2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)p_{3\nu}\eta^{\mu\nu}A^{(j)b\gamma}(p_2)A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3) .
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Simplifcando los integrandos:

$$\eta^{\mu\nu} p_{3\gamma} A^{(j)b\gamma}(p_2) A_\nu^{(j'-j-1)c}(p_3) = p_3^\beta \eta^{\mu\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3), \tag{4.21}$$

$$p_{3\nu} \eta^{\mu\nu} A^{(j)b\gamma}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3) = p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3). \tag{4.22}$$

Entonces (4.20) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
&\frac{2if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) p_{3\gamma} \eta^{\mu\nu} A^{(j)b\gamma}(p_2) A_\nu^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
&- \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) p_{3\nu} \eta^{\mu\nu} A^{(j)b\gamma}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
&= \frac{2if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) p_3^\beta \eta^{\mu\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
&- \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Por simplicidad en la notación, definimos:

$$\begin{aligned}
y \equiv \sum_{j=0}^{j'-1} & \frac{2if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) p_{3\gamma} \eta^{\mu\nu} A^{(j)b\gamma}(p_2) A_\nu^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
&- \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) p_{3\nu} \eta^{\mu\nu} A^{(j)b\gamma}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Sustituyendo (4.23) en (4.24):

$$\begin{aligned}
y = \sum_{j=0}^{j'-1} & \frac{2if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) p_3^\beta \eta^{\mu\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
&- \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Ahora expresamos el factor de 2 de la primera integral en (4.25) en una suma de 2 integrales, intercambiando $\beta \to \gamma$:

$$
\begin{aligned}
y = {} & \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) p_3^{\beta} \eta^{\mu\gamma} A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
& + \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) p_3^{\gamma} \eta^{\mu\beta} A_{\gamma}^{(j)b}(p_2) A_{\beta}^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
& - \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) p_3^{\mu} \eta^{\beta\gamma} A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) .
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

En la integral de en medio en (4.26) intercambiamos $p_2 \to p_3$, $b \to c$ y utilizamos la antisimetría del factor de color $f^{acb} = -f^{abc}$:

$$
\begin{aligned}
y = {} & \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) \left(p_3^{\beta} \eta^{\mu\gamma} - p_3^{\mu} \eta^{\beta\gamma} \right) A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
& - \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) p_2^{\gamma} \eta^{\mu\beta} A_{\gamma}^{(j)c}(p_3) A_{\beta}^{(j'-j-1)b}(p_2) .
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

En el último término de (4.27) definimos un nuevo índice de suma:

$$
w = j' - j - 1 . \tag{4.28}
$$

Despejando j:

$$
j = j' - w - 1 \tag{4.29}
$$

Como $j \geq 0$ entonces:

$$
w \leq j' - 1 . \tag{4.30}
$$

Entonces (4.27) está dado por:

$$y = \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) \left(p_3^\beta \eta^{\mu\gamma} - p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} \right) A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3)$$
$$- \sum_{w=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1 + p_2 + p_3) p_2^\gamma \eta^{\mu\beta} A_\gamma^{(j'-w-1)c}(p_3) A_\beta^{(w)b}(p_2) . \quad (4.31)$$

Como w es un índice de suma mudo, podemos renombrarlo como j y juntar todos los términos en (4.31):

$$y = \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) \left(p_3^\beta \eta^{\mu\gamma} - p_2^\gamma \eta^{\mu\beta} \right. \quad (4.32)$$
$$\left. - p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} \right) A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3) .$$

Utilizando la conservacion del momento:

$$p_3^\beta = \frac{p_3^\beta - p_2^\beta - p_1^\beta}{2} , \quad (4.33)$$

$$p_2^\gamma = \frac{p_2^\gamma - p_1^\gamma - p_3^\gamma}{2} , \quad (4.34)$$

$$p_3^\mu = \frac{p_3^\mu - p_2^\mu - p_1^\mu}{2} . \quad (4.35)$$

Se tiene:

$$p_3^\beta \eta^{\gamma\mu} = \frac{(p_3 - p_1)^\beta \eta^{\gamma\mu} - p_2^\beta \eta^{\gamma\mu}}{2} , \quad (4.36)$$

$$-p_2^\gamma \eta^{\beta\mu} = \frac{(p_1 - p_2)^\gamma \eta^{\beta\mu} + p_3^\gamma \eta^{\beta\mu}}{2} , \quad (4.37)$$

$$-p_3^{\mu}\eta^{\beta\gamma} = \frac{(p_2 - p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} + p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma}}{2}. \tag{4.38}$$

Sustituyendo en :

$$y = \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) \Big[(p_3 - p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1 - p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2 - p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} - p_2^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + p_3^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma} \Big] A^{(j)b}_{\beta}(p_2) A^{(j'-j-1)c}_{\gamma}(p_3). \tag{4.39}$$

Ahora, expresemos la condición del gauge de De Donder en el espacio de Fourier:

$$\partial^{\mu}A^{a}_{\mu} = \sum_{j=0}^{\infty} g^{j}\partial^{\mu}A^{(j)a}_{\mu} = 0. \tag{4.40}$$

Esto implica:

$$\partial^{\mu}A^{(j)a}_{\mu} = 0. \tag{4.41}$$

En el espacio de Fourier:

$$\int \eta^{\mu\nu}p_{\nu}e^{ipx}A^{(j)a}_{\mu}(p)\bar{d}p = \int \bar{d}p p^{\mu}A^{(j)a}_{\mu}(p)e^{ipx} = 0. \tag{4.42}$$

Multiplicando (4.42) por $e^{-ip'x}$ e integrando sobre x obtenemos:

$$\int dx\bar{d}p e^{i(p-p')x}p^{\mu}A^{(j)a}_{\mu} = \int \bar{d}p\delta(p - p')p^{\mu}A^{(j)a}_{\mu}(p) = 0. \tag{4.43}$$

Lo que implica:

$$p^{\mu}A^{(j)a}_{\mu}(p) = 0. \tag{4.44}$$

Sustituyendo (4.44) en (4.39) tenemos:

$$y = \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) \Big[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} + p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma} \Big] A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) . \tag{4.45}$$

Resulta de interés simplificar el último término entre paréntesis que aparece en (4.45), para ello utilizamos conservación del momento:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma} A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) \\ &= -\sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_2^{\mu}\eta^{\beta\gamma} A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_3^{\mu}\eta^{\beta\gamma} A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) . \end{aligned} \tag{4.46}$$

En la primera integral del lado derecho en (4.46) intercambiamos $p_2 \to p_3$:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_1^{\mu}\eta^{\beta\gamma} A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) \\ &= -\sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_3^{\mu}\eta^{\beta\gamma} A_{\beta}^{(j)b}(p_3) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_2) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_3^{\mu}\eta^{\beta\gamma} A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) . \end{aligned} \tag{4.47}$$

Posteriormente intercambiamos $\beta \to \gamma$ en (4.47):

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{j'-1} \frac{i f^{abc}}{2p_1^2} \int & \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_1^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
= - \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{i f^{abc}}{2p_1^2} \int & \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\gamma^{(j)b}(p_3) A_\beta^{(j'-j-1)c}(p_2) \\
- \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{i f^{abc}}{2p_1^2} \int & \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3)\,.
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

Por último intercambiamos $b \rightarrow c$ y se aplica la antisimetría del factor de color $f^{acb} = -f^{abc}$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{j'-1} \frac{i f^{abc}}{2p_1^2} \int & \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_1^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
= \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{i f^{abc}}{2p_1^2} \int & \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\gamma^{(j)c}(p_3) A_\beta^{(j'-j-1)b}(p_2) \\
- \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{i f^{abc}}{2p_1^2} \int & \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3)\,.
\end{aligned} \tag{4.49}
$$

Como se vio (4.28)-(4.1) podemos intercambiar los índices en los productos $A_\beta^{(j)b} A_\gamma^{(j'-j-1)c} = A_\beta^{(j'-j-1)b} A_\gamma^{(j)c}$, por tanto (4.49):

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{j'-1} \frac{i f^{abc}}{2p_1^2} \int & \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_1^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3) \\
= \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{i f^{abc}}{2p_1^2} \int & \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3) A_\beta^{(j)b}(p_2) \\
- \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{i f^{abc}}{2p_1^2} \int & \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \delta(p_1+p_2+p_3) p_3^\mu \eta^{\beta\gamma} A_\beta^{(j)b}(p_2) A_\gamma^{(j'-j-1)c}(p_3)\,.
\end{aligned} \tag{4.50}
$$

Esto es:

$$\sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int d\!\!^{-}p_2 d\!\!^{-}p_3 \delta(p_1 + p_2 + p_3) p_1^{\mu} \eta^{\beta\gamma} A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) = 0 . \quad (4.51)$$

Sustituyendo (4.51) en (4.45) obtenemos:

$$y = \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int d\!\!^{-}p_2 d\!\!^{-}p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) \Big((p_3 - p_1)^{\beta} \eta^{\gamma\mu} + (p_1 - p_2)^{\gamma} \eta^{\beta\mu} \quad (4.52)$$
$$+ (p_2 - p_3)^{\mu} \eta^{\beta\gamma} \Big) A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3) .$$

Sustituyendo en la expresión para el campo de color:

$$A^{(j')\mu a}(-p_1) = \sum_{j=0}^{j'-1} \frac{if^{abc}}{2p_1^2} \int d\!\!^{-}p_2 d\!\!^{-}p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) \Big((p_3 - p_1)^{\beta} \eta^{\gamma\mu}$$
$$+ (p_1 - p_2)^{\gamma} \eta^{\beta\mu} + (p_2 - p_3)^{\mu} \eta^{\beta\gamma} \Big) A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-1)c}(p_3)$$
$$+ \frac{f^{abc} f^{cde}}{p_1^2} \sum_{j=0}^{j'-2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} \int d\!\!^{-}p_2 d\!\!^{-}p_3 d\!\!^{-}p_4 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$$
$$\eta^{\mu\nu} A^{(j)b\gamma}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-l-2)d}(p_3) A_{\nu}^{(l)e}(p_4) . \quad (4.53)$$

Ahora estudiaremos el término en (4.53) con doble sumatoria. Por simplicidad en notación definimos:

$$s = \frac{f^{abc} f^{cde}}{p_1^2} \sum_{j=0}^{j'-2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} \int d\!\!^{-}p_2 d\!\!^{-}p_3 d\!\!^{-}p_4 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3 \quad (4.54)$$
$$+ p_4) \eta^{\mu\nu} A^{(j)b\gamma}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-l-2)d}(p_3) A_{\nu}^{(l)e}(p_4) .$$

Se expresa el integrando en (4.54) como:

$$\eta^{\mu\nu} A^{(j)b\gamma}(p_2) A_{\gamma}^{(j'-j-l-2)d}(p_3) A_{\nu}^{(l)e}(p_4) \quad (4.55)$$
$$= \eta^{\mu\epsilon} \eta^{\beta\delta} A_{\beta}^{(j)b}(p_2) A_{\delta}^{(j'-j-l-2)d}(p_3) A_{\epsilon}^{(l)e}(p_4) .$$

De forma simétrica tenemos:

$$\frac{1}{2}A^{(j)b}_{\beta}(p_2)\left[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta}A^{(j'-j-l-2)d}_{\delta}(p_3)A^{(l)e}_{\epsilon}(p_4)-\eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}A^{(j'-j-l-2)e}_{\epsilon}(p_4)A^{(l)d}_{\delta}(p_3)\right]. \tag{4.56}$$

Para el segundo término en (4.56) definimos un nuevo índice de suma:

$$m = j' - j - l - 2, \tag{4.57}$$

entonces:

$$l = j' - j - m - 2. \tag{4.58}$$

Como $l \geq 0$ entonces:

$$m \leq j' - j - 2, \tag{4.59}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} s = \frac{1}{2}f^{abc}f^{cde}\int & \bar{d}p_2\,\bar{d}p_3\,\bar{d}p_4\,\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \\ & \left[\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2} A^{(j)b}_{\beta}(p_2)\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta}A^{(j'-j-l-2)d}_{\delta}(p_3)A^{(l)e}_{\epsilon}(p_4)\right. \\ & \left. -\sum_{j=0}^{j'-j}\sum_{m=0}^{j'-j-2}\eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}A^{(m)e}_{\epsilon}(p_4)A^{(j'-j-m-2)d}_{\delta}(p_3)A^{(j)b}_{\beta}(p_2)\right]. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Como m es un índice de suma mudo, lo renombramos m y agrupamos los términos. Entonces s está dado por:

$$\begin{aligned} s = \frac{1}{2}f^{abc}f^{cde}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\int & \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{d}p_4\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \\ & A^{(j)b}_{\beta}(p_2)\left(\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta}-\eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\right)A^{(j'-j-l-2)d}_{\delta}(p_3)A^{(l)e}_{\epsilon}(p_4). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Sustituyendo (4.61) en (4.53) obtenemos la expresión deseada para el campo de color:

$$
\begin{aligned}
A^{(j')\mu a}(-p_1) = \frac{i f^{abc}}{2p_1^2} \sum_{j=0}^{j'-1} \int & \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) \Big[(p_3 - p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} \\
&+ (p_1 - p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2 - p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} \Big] A^{(j)b}_{\beta}(p_2) A^{(j'-j-1)c}_{\gamma}(p_3) \\
&+ \frac{1}{2} f^{abc} f^{cde} \sum_{j=0}^{j'-2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{d}p_4 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \\
&\Big(\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon} \Big) A^{(j'-j-l-2)d}_{\delta}(p_3) A^{(l)e}_{\epsilon}(p_4) A^{(j)b}_{\beta}(p_2) \Big] .
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

La expresión en (4.62) es la expresión para la corrección a orden j' al campo de color en el espacio de Fourier, la cual cumple de manera explícita la dualidad BCJ. Se puede observar que dicha expresión contiene interacciones de vértices de 3 y 4 puntos. No es necesario introducir vértices con más puntos de interacción.

4.1.1. Conjetura extendida de la doble copia

A pesar que (4.62) cumple la dualidad BCJ, tiene un problema fundamental para la aplicación de la doble copia: la existencia de diagramas con vértices de 4 puntos. De acuerdo al trabajo de Bern et al en [20] para aplicar la doble copia se debe expresar la amplitud de dispersión asociada en la teoría no abeliana de Gauge únicamente en términos de diagramas con vértices de 3 puntos.

Por otro lado Borsten muestra en [43] que para la teoría de Yang-Mills siempre se pueden expresar los diagramas con vértices de 4 puntos en términos de conjuntos de diagramas que incluyen únicamente vértices de 3 puntos. Esto se logra debido a la libertad que tiene la teoría para definir los numeradores cinemáticos n_i asociados a las amplitudes. El expresar los diagramas con vértices de 4 puntos en términos de conjuntos de diagramas con vértices de 3 puntos de forma efectiva produce que los numeradores cinemáticos asociados a los diagramas cúbicos cambien y se les sume una contribución proveniente de vértices con 4 puntos δ_i:

$$n_i \to n'_i = n_i + \delta_i, \tag{4.63}$$

donde δ_i es un producto de propagadores de diagramas cúbicos, momentos y helicidades de los gluones asociados a dichos diagramas. En este sentido se dice que dichos diagramas no tienen un significado f´ısico adicional dado que se expresan sus interacciones en términos de interacciones con vértices de 3 puntos.

Debido a que para Yang-Mills siempre se puede hacer esta reexpresión de diagramas, se conjetura que: "La doble copia es válida en amplitudes que satisfagan la dualidad BCJ con presencia de diagramas con vértices de 3 y 4 puntos."Llamamos a esta enunciado "Conjetura extendida de la doble copia".

Como su nombre lo indica la conjetura extendida de la doble copia es una conjetura propuesta en base a la redefinición de diagramas cuárticos a cúbicos, no se tiene una prueba con certeza si es verdadera o falsa, pero resulta plausible. En el desarrollo posterior de este trabajo se asume dicha conjetura para aplicar la doble copia a (4.62).

Existen 2 caminos posbiles generados a partir del valor de verdad de la conjetura extendida de la doble copia:

- De ser verdadera, la expresión que se obtenga para la doble copia de la amplitud de Yang-Mills correspondería a ser la doble copia de Bern, Carrasco y Johanson (BCJ) en gravedad dilatónica.
- De ser falsa, la expresión que se obtenga para la doble copia de la amplitud de Yang-Mills no necesariamente correspondería a ser la doble copia BCJ ni a representar un proceso dispersivo en gravedad dilatónica, pudiendo representar algún otro proceso dispersivo en alguna teoría de gravedad.

De esta manera, el asumir la doble copia extendida nos presenta un candidato posible, en caso de ser cierta, para mapear a cualquier orden de perturbación correcciones al gravitón gordo partiendo de Yang-Mills hacia gravedad dilatónica. Asumimos la veracidad de la conjetura de la doble copia extendida y exploramos si se soporta la conjetura en la aplicación del desarrollo obtenido de la misma.

De acuerdo a la conjetura de la doble copia extendida, aplicamos el formalismo la doble copia para obtener la corrección a orden j' al gravitón gordo $H^{(j')\mu\mu'}$:

$$
\begin{aligned}
H^{(j')\mu\mu'}(-p_1) = \frac{1}{4(p_1^2)} & \left[\sum_{j=0}^{j'-1} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) \right. \\
& \left[\left((p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\right) \right. \\
& \left. \left((p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} + (p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\right) \right] \\
& H^{(j)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{j'-2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{d}p_4 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \\
& \left[\left(\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\right)\left(\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\right) \right] \\
& \left. H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(p_3) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(p_4) H^{(j)}_{\beta\beta'} \right] .
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

Como se puede visualizar en (4.64), la corrección de orden j' al gravitón gordo presenta contribuciones. La primera contribución surge de obtener la doble de los diagramas cúbicos de Yang-Mills:

$$
\begin{aligned}
H^{(j')\mu\mu'}(-p_1)_{\text{cubic}} = \frac{1}{4(p_1^2)} & \left[\sum_{j=0}^{j'-1} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) \right. \\
& \left[\left((p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\right) \right. \\
& \left. \left((p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} + (p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\right) \right] \\
& \left. H^{(j)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \right] ,
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

mientras la segunda contribución proviene de obtener la doble copia de los diagramas cuárticos:

$$H^{(j')\mu\mu'}(-p_1)_{\text{quartic}} = +\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\int \bar{d}p_2\,\bar{d}p_3\,\bar{d}p_4\,\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \left[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\right]\left[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\right] H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(p_3)\,H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(p_4)\,H^{(j)}_{\beta\beta'} \,. \tag{4.66}$$

De esta manera, a partir de (4.64) se puede calcular de manera recursiva las correcciones al gravitón gordo a partir de $H^{(0)\mu\mu'}$.

4.2. Yang-Mills con masa y fuentes

En la sección (4.1) trabajamos la solución de forma perturbativa a cualquier orden en el espacio de Fourier a la ecuación de Yang-Mills sin masa y sin presencia de fuentes externas. En esta sección generalizaremos los resultados introduciendo un término de masa y de fuente a la ecuación.

En el gauge de De Donder, la ecuación de Yang-Mills con masa se obtiene a partir de agregar un término de masa a (4.4):

$$\partial^2 A^a_\nu + g f^{abc} A^b_\mu \partial^\mu A^c_\nu + g f^{abc} A^{b\mu}\partial_\mu A^c_\nu - g f^{abc} A^{b\mu}\partial_\nu A^c_\mu + g^2 f^{abc} f^{cde} A^{b\mu} A^d_\mu A^e_\nu - m^2 A^a_\nu = 0 \,. \tag{4.67}$$

Es decir, el único término nuevo presente es $m^2 A^a_\nu$. De esta manera, en el espacio de Fourier, la solución presentada en (4.62) se modifica simplemente reemplazando $p_1^2 \to p_1^2 + m^2$ en el denominador:

$$
\begin{aligned}
A^{(j')\mu a}(-p_1) = \frac{i f^{abc}}{2\,(p_1^2+m^2)} \Bigg[& \sum_{j=0}^{j'-1} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) \Big[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} \\
& + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} \Big] A^{(j)b}_{\beta}(p_2) A^{(j'-j-1)c}_{\gamma}(p_3) \\
& + \frac{1}{2} f^{abc} f^{cde} \sum_{j=0}^{j'-2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{d}p_4 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \\
& \left(\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\right) A^{(j'-j-l-2)d}_{\delta}(p_3) A^{(l)e}_{\epsilon}(p_4) A^{(j)b}_{\beta}(p_2) \Bigg] .
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

Nuevamente, (4.68) cumple explícitamente la dualidad BCJ, por lo que podemos encontrar la expresión para el gravitón gordo:

$$
\begin{aligned}
H^{(j')\mu\mu'}(-p_1) = \frac{1}{4(p_1^2+m^2)} \Bigg[& \sum_{j=0}^{j'-1} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) \\
& \Big[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} \Big] \\
& \Big[(p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} + (p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'} \Big] \\
& H^{(j)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{j'-2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{d}p_4 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \\
& \left(\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\right) \Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'} \Big] \\
& H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(p_3) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(p_4) H^{(j)}_{\beta\beta'} \Bigg] .
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

El caso más general es introducir a la ecuación de Yang-Mills con masa (4.67) un término de fuente de color J^a:

$$
\begin{aligned}
& \partial^2 A^a_{\nu} + g f^{abc} A^b_{\mu} \partial^{\mu} A^c_{\nu} + g f^{abc} A^{b\mu} \partial_{\mu} A^c_{\nu} - g f^{abc} A^{b\mu} \partial_{\nu} A^c_{\mu} \\
& + g^2 f^{abc} f^{cde} A^{b\mu} A^d_{\mu} A^e_{\nu} + m^2 A^a_{\nu} = J^a_{\nu}.
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

Resulta conveniente para el caso general, expandir el término de fuente J^{a}_{ν} en serie de potencias de la constante de acoplamiento:

$$J^{a}_{\nu} = \sum_{i=0}^{\infty} g^{i} J^{(i)a}_{\nu} . \tag{4.71}$$

Entonces la ecuación de YM es reescrita como:

$$\begin{aligned}
&\partial^2 A^{(j')a}_{\nu} + m^2 A^{(j')a}_{\nu} + 2f^{abc} \sum_{j=0}^{j'-1} A^{(j)b\mu} \partial_{\mu} A^{(j'-j-1)c}_{\nu} \\
&- f^{abc} \sum_{j=0}^{j'-1} A^{(j)b\mu} \partial_{\nu} A^{(j'-j-1)c}_{\mu} \\
&+ f^{abc} f^{cde} \sum_{j=0}^{j'-2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} A^{(j)b\mu} A^{(j'-j-l-2)d}_{\mu} A^{(l)e}_{\nu} = J^{(j')a}_{\nu} .
\end{aligned} \tag{4.72}$$

En el espacio de Fourier, la ecuación (4.72) modifica a (4.68) en agregar un término con fuente:

$$\begin{aligned}
A^{(j')\mu a}(-p_1) = {}& \frac{i f^{abc}}{2(p_1^2 + m^2)} \left[\sum_{j=0}^{j'-1} \int \bar{d} p_2 \bar{d} p_3 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3) \left[(p_3 - p_1)^{\beta} \eta^{\gamma\mu} \right.\right. \\
&+ (p_1 - p_2)^{\gamma} \eta^{\beta\mu} + (p_2 - p_3)^{\mu} \eta^{\beta\gamma} - p_2^{\beta} \eta^{\gamma\mu} \\
&\left. + p_3^{\gamma} \eta^{\beta\mu} \right] A^{(j)b}_{\beta}(p_2) A^{(j'-j-1)c}_{\gamma}(p_3) \\
&+ \frac{1}{2} f^{abc} f^{cde} \sum_{j=0}^{j'-2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} \int \bar{d} p_2 \bar{d} p_3 \bar{d} p_4 \bar{\delta}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \left(\eta^{\mu\epsilon} \eta^{\beta\delta} \right. \\
&\left.\left. - \eta^{\mu\delta} \eta^{\beta\epsilon} \right) A^{(j'-j-l-2)d}_{\delta}(p_3) A^{(l)e}_{\epsilon}(p_4) A^{(j)b}_{\beta}(p_2) \right] - \frac{J^{(j')\mu a}(-p_1)}{p_1^2 + m^2} .
\end{aligned} \tag{4.73}$$

La ecuación (4.73) representa la solución general a orden j' de perturbación a la ecuación de Yang-Mills con masa y en presencia de fuente en el espacio de Fourier. Además dicha expresion cumple explícitamente la dualidad BCJ por lo que nuevamente podemos utilizarla para encontrar la correción a orden j' al gravitón gordo en presencia de masa y fuentes siguiendo [8] a través de las relación:

$$J^{\mu a} \rightarrow T^{\mu\mu'} . \tag{4.74}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} H^{(j')\mu\mu'}(-p_1) = \frac{1}{4(p_1^2+m^2)} \Bigg[& \sum_{j=0}^{j'-1} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) \\ & \left[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} \right] \\ & \left[(p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} + (p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'} \right] \\ & H^{(j)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \\ & + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{j'-2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{d}p_4 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \\ & \left[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon} \right] \left[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'} \right] \\ & H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(p_3) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(p_4) H^{(j)}_{\beta\beta'} \Bigg] - \frac{T^{(j')\mu\mu'}(-p_1)}{p_1^2+m^2} . \end{aligned} \tag{4.75}$$

A partir de (4.75) se pueden calcular las correcciones a cualquier orden al gravitón gordo:

$$H^{(0)\mu\mu'}(-p_1) = - \frac{T^{(0)\mu\mu'}(-p_1)}{p_1^2 + {}^2} \tag{4.76}$$

$$
\begin{aligned}
H^{(1)\mu\mu'}(-p_1) &= \\
&= \frac{1}{4(p_1^2+m^2)} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) \Big[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} \\
&\quad + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} \Big] \Big[(p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} \\
&\quad + (p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'} \Big] H^{(0)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \\
&\quad - \frac{T^{(1)\mu\mu'}(-p_1)}{p_1^2+m^2}
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

$$
\begin{aligned}
H^{(2)\mu\mu'}(-p_1) &= \frac{1}{4(p_1^2+m^2)} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) \Big[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} \\
&\quad + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} \Big] \Big[(p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} \\
&\quad + (p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'} \Big] \Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \\
&\quad + H^{(1)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \Big] + \frac{1}{16(p_1^2+m^2)} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{d}p_4 \bar{\delta}(p_1+p_2 \\
&\quad + p_3 + p_4) H^{(0)}_{\delta\delta'}(p_3) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(p_4) H^{(0)}_{\beta\beta'}(p_2) - \frac{T^{(2)\mu\mu'}(-p_1)}{p_1^2+m^2}.
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

El cálculo de las correcciones a orden mayor a 2 puede ser revisado en el apéndice A.

4.3. Regresando al espacio de posiciones

A través del principio de la doble copia, se obtuvo una expresión general para la corrección a orden j arbitrario al gravitón gordo en gravedad dilatónica dado por (4.75) en el espacio de Fourier. Resulta muy conveniente encontrar la forma de las ecuaciones para las correcciones al gravitón gordo en el espacio de posiciones. Para ello aplicamos la transformada inversa de Fourier a (4.75):

$$
\begin{aligned}
H^{(j')\mu\mu'}(x) = & \int \bar{d}p_1 e^{ip_1 x} \frac{1}{4(p_1^2+m^2)} \left[\sum_{j=0}^{j'-1} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3) \right. \\
& \left[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} \right] \left[(p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} + (p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'} \right] \\
& H^{(j)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{j'=2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{d}p_4 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \\
& \left[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon} \right] \left[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'} \right] \\
& \left. H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(p_3) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(p_4) H^{(j)}_{\beta\beta'} \right] \\
& - \int \bar{d}p_1 e^{ip_1 x} \frac{T^{(j')\mu\mu'}(-p_1)}{p_1^2+m^2}.
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

Se calcula el laplaciano de (4.79):

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(j)\mu\mu'}(x) = & - \int \bar{d}p_1 p_1^2 e^{ip_1 x} \frac{1}{4(p_1^2+m^2)} \left[\sum_{j=0}^{j'-1} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{\delta}(p_1+p_2 \right. \\
& + p_3) \left[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} + (p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} \right. \\
& \left. + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma} \right] \left[(p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} + (p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} \right. \\
& \left. + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'} \right] H^{(j)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{j'=2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} \int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{d}p_4 \bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4) \left[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} \right. \\
& \left. \left. - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon} \right] \left[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'} \right] H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(p_3) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(p_4) H^{(j)}_{\beta\beta'} \right] \\
& + \int \bar{d}p_1 p_1^2 e^{ip_1 x} \frac{T^{(j')\mu\mu'}(-p_1)}{p_1^2+m^2}.
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) = &-\frac{1}{4}\int \text{đ}p_1 e^{ip_1x}\Bigg[\sum_{j=0}^{j'-1}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3)\\
&\Big[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu}+(p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu}+(p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big]\\
&\Big[(p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'}+(p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'}+(p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big]\\
&H^{(j)}_{\beta\beta'}(p_2)H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(p_3)\\
&+\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{d}p_4\\
&\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3+p_4)\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta}-\eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\\
&\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'}-\eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big]\\
&H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(p_3)H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(p_4)H^{(j)}_{\beta\beta'}\Bigg]\\
&+\int \text{đ}p_1 e^{ip_1x}T^{(j')\mu\mu'}(-p_1)\,,
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) = &-\frac{1}{4}\int \text{đ}p_1 e^{ip_1x}\Bigg[\sum_{j=0}^{j'-1}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{\delta}(p_1+p_2\\
&+p_3)\Big[(p_3-p_1)^{\beta}\eta^{\gamma\mu}+(p_1-p_2)^{\gamma}\eta^{\beta\mu}\\
&+(p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big]\Big[(p_3-p_1)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'}+(p_1-p_2)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'}\\
&+(p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big]H^{(j)}_{\beta\beta'}(p_2)H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(p_3)\\
&+\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\int \bar{d}p_2\bar{d}p_3\bar{d}p_4\bar{\delta}(p_1+p_2+p_3\\
&+p_4)\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta}-\eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'}\\
&-\eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big]H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(p_3)H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(p_4)H^{(j)}_{\beta\beta'}\Bigg]\\
&+T^{(j)\mu\mu'}(x)\,.
\end{aligned}
\tag{4.82}
$$

Se realiza la integral en p_1 en (4.82):

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\Bigg[& \sum_{j=0}^{j'-1}\int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 e^{-ip_2x}e^{-ip_3x} \\
& \Big[(2p_3+p_2)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - (2p_2+p_3)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \\
& \Big[(2p_3+p_2)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - (2p_2+p_3)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] \\
& H^{(j)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \\
& + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 \bar{d}p_4 e^{-ip_2x}e^{-ip_3x}e^{-ip_4x} \\
& \Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big] \Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big] \\
& H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(p_3) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(p_4) H^{(j)}_{\beta\beta'} \Bigg] + T^{(j)\mu\mu'}(x)\,.
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

Las integrales en la doble suma en (4.83) son las transformadas inversas de Fourier de H:

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\Bigg[& \sum_{j=0}^{j'-1}\int \bar{d}p_2 \bar{d}p_3 e^{-ip_2x}e^{-ip_3x} \\
& \Big[(2p_3+p_2)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - (2p_2+p_3)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \\
& \Big[(2p_3+p_2)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - (2p_2+p_3)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] \Bigg] \\
& H^{(j)}_{\beta\beta'}(p_2) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(p_3) \\
& - \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2} \Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big] \Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big] \\
& H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(x) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(j)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + T^{(j')\mu\mu'}(x)\,.
\end{aligned}
\tag{4.84}
$$

Se expresan los gravitones gordos en las integrales de (4.84) en término de su integral de Fourier:

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\Bigg[\sum_{j=0}^{j'-1}\int & đp_2 đp_3 đy đz\, e^{ip_2(y-x)} e^{ip_3(z-x)} \\
& \Big[(2p_3+p_2)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - (2p_2+p_3)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (p_2-p_3)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \\
& \Big[(2p_3+p_2)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - (2p_2+p_3)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (p_2-p_3)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big]\Bigg] \\
& H^{(j)}_{\beta\beta'}(y) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(z) \\
& -\frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big] \\
& H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(x) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(j)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + T^{(j')\mu\mu'}(x)\,.
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

Se establecen condiciones frontera desvanecientes para H en los infinitos, de modo que:

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\Bigg[\sum_{j=0}^{j'-1}\int & đp_2 đp_3 đy đz\, e^{ip_2(y-x)} e^{ip_3(z-x)} \\
& \Big[(2\partial_z+\partial_y)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - (2\partial_y+\partial_z)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y-\partial_z)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \\
& \Big[(2\partial_z+\partial_y)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - (2\partial_y+\partial_z)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y-\partial_z)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big]\Bigg] \\
& H^{(j)}_{\beta\beta'}(y) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(z) \\
& +\frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big] \\
& H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(x) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(j)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + T^{(j')\mu\mu'}(x)\,.
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

Realizando las integrales de momentos se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) = {} & -\frac{1}{4}\left[\sum_{j=0}^{j'-1} \int \bar{d}y\,\bar{d}z\,\bar{\delta}(x-y)\bar{\delta}(z-x)\right. \\
& \Big[(2\partial_z+\partial_y)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - (2\partial_y+\partial_z)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_z)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \\
& \Big[(2\partial_z+\partial_y)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - (2\partial_y+\partial_z)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_z)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] \\
& \left. H^{(j)}_{\beta\beta'}(y) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(z)\right] \\
& + \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2} \Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big] \\
& H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(x) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(j)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + T^{(j')\mu\mu'}(x)\,.
\end{aligned}
\tag{4.87}
$$

Simplificando con las funciones delta obtenemos la ecuación diferencial para el gravitón gordo en el espacio de posiciones:

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) = {} & -\frac{1}{4}\left[\sum_{j=0}^{j'-1} \int \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)\right. \\
& \Big[(2\partial_x+\partial_y)^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - (2\partial_y+\partial_x)^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \\
& \Big[(2\partial_x+\partial_y)^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - (2\partial_y+\partial_x)^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] \\
& \left. H^{(j)}_{\beta\beta'}(y) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(x)\right] \\
& + \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2} \Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big] \\
& H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(x) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(j)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + T^{(j')\mu\mu'}(x)\,.
\end{aligned}
\tag{4.88}
$$

A pesar de que (4.88) representa una gran simplificación a las ecuaciones que inicialmente se obtuvieron en el espacio de Fourier, sigue presentando grados de libertad que se pueden eliminar a través de la condición del Gauge de De Donder. Para la j-ésima corrección perturbativa al campo de color la condición de De Donder:

$$\partial^{\mu} A^{j}_{\mu} = 0, \tag{4.89}$$

Se traslada al gravitón gordo:

$$\partial^{\mu} H_{\mu\mu'} = 0. \tag{4.90}$$

De esta manera, aplicando (4.90) en (4.88) la ecuación para la j-ésima corrección quitando los grados de libertad asociados al gauge, está dada por:

$$\begin{aligned}
\partial^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(j')\mu\mu'}(x) = & -\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{j'-1}\Bigg[\int \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)\Big[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} \\
& + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big]\Big[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} \\
& + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] H^{(j)}_{\beta\beta'}(y) H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(x)\Bigg] \\
& + \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} \\
& - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big] H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(x) H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(j)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + T^{(j')\mu\mu'}(x).
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Desarrollando esta fórmula general para los primeros órdenes de perturbación, tenemos:

$$\partial^2 H^{(0)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(0)\mu\mu'}(x) = T^{(0)\mu\mu'}(x), \tag{4.92}$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(1)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(1)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)
&\Big[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \\
&\Big[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] \\
&H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
&+ T^{(1)\mu\mu'}(x)\,,
\end{aligned}
\tag{4.93}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(2)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(2)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)
&\Big[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \\
&\Big[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] \\
&\Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(1)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\Big] \\
&+ \frac{1}{16}\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big] \\
&\Big[H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x)\Big] \\
&+ T^{(2)\mu\mu'}(x)\,,
\end{aligned}
\tag{4.94}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(3)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(3)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)
&\Big[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \\
&\Big[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] \\
&\Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(2)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(1)}_{\beta\beta'}(y)H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(2)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\Big] \\
&+ \frac{1}{16}\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big] \\
&\Big[H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta}(x) \\
&+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x)\Big] \\
&+ T^{(3)\mu\mu'}(x)\,.
\end{aligned}
\tag{4.95}
$$

4.4. Resolviendo caso arbitrario

El resultado obtenido en (4.91) muestra que la j-ésima corrección al gravitón gordo en el espacio de posiciones sigue una ecuación de Klein-Gordon no homogénea, en dónde la fuente de dicha no homogeneidad es una mezcla de los gravitones gordos de órdenes menores a j y las fuentes verdaderas, esto es:

$$\partial^2 H^{(j)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(j)\mu\mu'}(x) = f^{(j)\mu\mu'}(x), \tag{4.96}$$

dónde:

$$f^{(j)\mu\mu'}(x) = f_g^{(j)\mu\mu'}(x) + T^{(j)\mu\mu'}(x), \tag{4.97}$$

$f_g^{(j)\mu\mu'}$ es una fuente efectiva producida por las correcciones al gravitón gordo de menor orden:

$$\begin{aligned} f_g^{(j')\mu\mu'}(x) = &-\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{j'-1}\int d^4y\,\delta^4(x-y) \\ &\left[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\right] \\ &\left[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\right] \\ &H^{(j)}_{\beta\beta'}(y)H^{(j'-j-1)}_{\gamma\gamma'}(x) \\ &+\frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\left[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\right]\left[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\right] \\ &H^{(j'-j-l-2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(l)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(j)}_{\beta\beta'}(x)\,. \end{aligned} \tag{4.98}$$

A pesar de que en general, (4.97) tiene una forma no trivial y complicada de computar, la ecuación general a resolver en (4.96) es la ya conocida ecuación de Klein-Gordon en presencia de una fuente efectiva. Para ello se requiere encontrar la función de Green $G(x, x')$ asociada a dicha ecuación. Para ello nos enfocaremos en resolver la ecuación escalar de Klein-Gordon:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \nabla^2\Phi - m^2\Phi = -4\pi g(\vec{x}, t) \tag{4.99}$$

Expresamos $\Phi(x,t)$ y $g(x,t)$ en términos de su expansión de Fourier en el tiempo:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(x,w)e^{iwt}dw\,, \tag{4.100}$$

$$g(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,w)e^{iwt}dw\,. \tag{4.101}$$

De esta manera, la ecuación de Klein-Gordon:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt}\left(w^2+\nabla^2-m^2\right)V(x,w)dw = -4\pi\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt}g(x,w)dw\,. \tag{4.102}$$

Dicha ecuación implicando que los integrandos sean equivalentes:

$$\nabla^2\Phi(x,w) + (w^2 - m^2)\Phi(x,w) = -4\pi g(x,w)\,. \tag{4.103}$$

(4.103) es una ecuación tipo Helmholtz, la cual nos permite trabajar únicamente con operadores diferenciales espaciales. Definimos $k^2 = w^2 - m^2$, entonces:

$$\nabla^2\Phi(x,w) + k^2\Phi(x,w) = -4\pi g(x,w)\,. \tag{4.104}$$

Existen 2 funciones de Green asociadas a (4.104), la llamada función de Green retardada que preserva causalidad y la función de Green avanzada:

$$G_k^{\pm}(\vec{x},\vec{x}',w) = \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,. \tag{4.105}$$

Definimos $R = |\vec{x}-\vec{x}'|, \tau = t - t'$ entonces las funciones de Green completas están dadas por:

$$G^{\pm}(R,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm ikR}}{R}e^{-iw\tau}dw\,. \tag{4.106}$$

En nuestro caso, nos interesa la función retardada G^+ dado que preserva causalidad:

$$G^{+}(R,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikR}}{R}e^{-iw\tau}dw\,. \tag{4.107}$$

Recordando la definición de k, se expande en teorema del binomio:

$$k = \sqrt{w^2 + m^2} = w + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(3/2-m)} m^{2m} w^{1-2m} . \tag{4.108}$$

De esta manera:

$$e^{iwR} = e^{iwR} e^{i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(3/2-m)} m^{2m} w^{1-2m}} . \tag{4.109}$$

Se expande el exponencial con la suma en el exponente:

$$e^{iwR} e^{i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(3/2-m)} m^{2m} w^{1-2m}} = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{i^q}{q!} \sum_{k_1,\ldots,k_q} \frac{\Gamma(3/2)}{\prod_{s=1}^{q} \Gamma(k_s+1)\Gamma(3/2-k_s)} m^{2\sum_{s=1}^{q} k_s} w^{q-2\sum_{s=1}^{q} k_s} . \tag{4.110}$$

Sustituyendo en (4.107) calculamos la función de Green retardada:

$$G^+(R,\tau) = \frac{\delta(\tau-R)}{R} + \frac{1}{2\pi R} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{i^q}{q!} \sum_{k_1,\ldots,k_q} \frac{\Gamma(3/2)^q}{\prod_{s=1}^{q} \Gamma(k_s+1)\Gamma(3/2-k_s)} m^{2\sum_{s=1}^{q} k_s} \int_{-\infty}^{\infty} w^{q-2\sum_{s=1}^{q} k_s} e^{-iw(\tau-R)} dw . \tag{4.111}$$

La integral en puede ser fácilmente computada mediante cálculo de residuos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^{q-2\sum_{s=1}^{q} k_s} e^{-iw(\tau-R)} dw = \pi \frac{i^{q-2\sum_{s=1}^{q} k_s} (R-\tau)^{q-1-2\sum_{s=1}^{q} k_s}}{(q-1-2\sum_{s=1}^{q} k_s)!} \tag{4.112}$$

De esta manera la función de Green completa está dada por:

$$G^+(R,\tau) = \frac{\delta(\tau-R)}{R} + \frac{1}{2R} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_q} \frac{i^{q-2\sum_{s=1}^{q} k_s} \Gamma(3/2)^q (R-\tau)^{q-1-2\sum_{s=1}^{q} k_s}}{(q-1-2\sum_{s=1}^{q} k_s)! \prod_{s=1}^{q} \Gamma(k_s+1)\Gamma(3/2-k_s)} \tag{4.113}$$

Ahora definimos el tiempo retardado t' como:

$$t_{\text{ret}} = t - R . \tag{4.114}$$

De esta manera la solución a la ecuación de Klein-Gordon:

$$\Phi(\vec{x},t) = \int \frac{g(\vec{x}',t')_{\mathrm{ret}}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k_1\ldots k_q}^{\infty} \int \frac{i^{q-2\sum_{s=1}^{q} k_s}\,\Gamma(3/2)^q g(\vec{x}',t')(|\vec{x}-\vec{x}'|-(t-t'))^{q-1-2\sum_{s=1}^{q} k_s}}{(q-1-2\sum_{s=1}^{q} k_s)!\prod_{s=1}^{q}\Gamma(k_s+1)\Gamma(3/2-k_s)|\vec{x}-\vec{x}'|}. \tag{4.115}$$

Por tanto, la corrección a orden j al gravitón gordo está dada por:

$$H^{(j)\mu\mu'}(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f^{(j)\mu\mu'}(\vec{x}',t')_{\mathrm{ret}}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' - \frac{1}{8\pi}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k_1\ldots k_q}^{\infty}\int \frac{i^{q-2\sum_{s=1}^{q} k_s}\,\Gamma(3/2)^q f^{(j)\mu\mu'}(\vec{x}',t')(|\vec{x}-\vec{x}'|-(t-t'))^{q-1-2\sum_{s=1}^{q} k_s}}{(q-1-2\sum_{s=1}^{q} k_s)!\prod_{s=1}^{q}\Gamma(k_s+1)\Gamma(3/2-k_s)|\vec{x}-\vec{x}'|}. \tag{4.116}$$

El caso límite en que $m = 0$:

$$H^{(j)\mu\mu'}(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f^{(j)\mu\mu'}(\vec{x}',t')_{\mathrm{ret}}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'. \tag{4.117}$$

La cual corresponde a ser la solución a la ecuación de onda. Por otra, parte, si además $H(x)$ no depende del tiempo:

$$H^{(j)\mu\mu'}(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f^{(j)\mu\mu'}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'. \tag{4.118}$$

La cual corresponde a ser una solución a la ecuación de Poisson. Por último comentamos que siempre se puede añadir un término constante a cada una de estas soluciones que nos permita normalizar el comportamiento alrededor de algún punto de interés.

A pesar de que estas fórmulas de solución resultan generales, en muchas ocasiones, cuando hay presente alguna simetría en el sistema resulta más práctico resolver las ecuaciones diferenciales directamente.

Capítulo 5

Aplicaciones

En este capítulo se aplica la teoría obtenida en el capítulo 4 en métricas de gravitación específicos.

5.1. Aplicacion del método

Habiendo trabajado la teor´ıa para obtener las correcciones perturbativas a orden arbitrario para el gravitón gordo $H^{(j)\mu\mu'}(x)$ asumiendo la conjetura de la doble copia extendida, podemos proceder a aplicarla a escenarios específicos en teoría de color o teoría de gravedad. El método se resume en los siguientes pasos:

1. Construir $H^{(0)\mu\mu'}$. Esto a partir de expandir una métrica en gravedad en la forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + kh^{(0)}_{\mu\nu} + O(k^2)$ y seleccionar $H^{(0)\mu\mu'} = h^{(0)\mu\mu'}$ ó a partir de un campo de color $A^{\mu} = A^{(0)} + O(g^2)$, mediante la aplicación del principio de la doble copia $H^{(0)\mu\mu'} = A^{(0)\mu}A^{(0)\mu'}$.
2. Resolver las ecuaciones dadas por (4.91) en el espacio de posiciones para obtener la j-esima corrección a H.
3. (Opcional) Cálculo de amplitudes de dispersión en teoría de gravedad/color.

En el caso presentado en esta sección, se trabajarán directamente con soluciones de agujeros negros en relatividad general, particularmente:

- Solución de Schwarzschild
- Solución de Reissner–Nordström
- Solución de Kerr con rotación lenta
- Solución de Kerr-Newman con rotación lenta

Para las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström se trabajarán hasta correcciones de segundo orden de perturbación mientras que para las soluciones de Kerr y Kerr-Newman con rotación lenta se trabajarán únicamente correcciones a primer orden de perturbación.

5.2. Solución de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas de Boyer-Lindsquist está dada por:

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_s}{r})dt^2 + (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 , \tag{5.1}$$

dónde r_s es el radio de Schwarzschild:

$$r_s = 2GM = \frac{k^2}{2}\frac{M}{4\pi} . \tag{5.2}$$

A partir de (5.1) se observa que:

$$h^{(0)}_{00} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} , \tag{5.3}$$

$$h^{(0)}_{11} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} . \tag{5.4}$$

5.2.1. Singularidad desnuda

Se puede tomar únicamente a la singularidad desnuda de Schwarzschild en lugar de a la métrica completa, esto es:

$$H^{(0)}_{00}(r) = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} , \tag{5.5}$$

$$H^{(0)}_{\mu\mu'}(r) = 0, \quad \mu\mu' \neq (0,0)\,. \tag{5.6}$$

De esta manera se calcula la primera corrección al gravitón gordo a partir de (4.93):

$$\partial^2 H^{(1)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int đy\,\delta(x-y)\left[2\partial^\beta_x\eta^{\gamma\mu} - 2\partial^\gamma_y\eta^{\beta\mu} + (\partial_x - \partial_y)^\mu\eta^{\beta\gamma}\right]\left[2\partial^{\beta'}_x\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial^{\gamma'}_y\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\right] H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\,. \tag{5.7}$$

Es decir, la fuente se debe únicamente a los gravitones de órdenes más bajos. Se realiza la computación de la fuente a través de código desarrollado en Maple (ver Apéndice B), con lo cual se obtiene:

$$\nabla^2 H^{(1)11}(r) = -\frac{k^2M^2}{128\pi^2r^4}\,. \tag{5.8}$$

Debido a la simetría esférica, el laplaciano se simplifica a una sola variable:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dH^{(1)11}}{dr}\right) = -\frac{k^2M^2}{128\pi^2r^4}\,. \tag{5.9}$$

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos la corrección a primer orden al gravitón gordo:

$$H^{(1)11}(r) = -\frac{k^2M^2}{256\pi^2r^2}\,. \tag{5.10}$$

Reexpresando en términos de $\frac{k}{2}$ se tiene:

$$H^{(1)11}(r) = -\left(\frac{k}{2}\right)^2\frac{M^2}{4(4\pi r)^2}\,. \tag{5.11}$$

Una vez conocida la corrección a primer orden al gravitón gordo, se calcula la corrección a segundo orden a partir de (4.94)

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(2)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int & \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y) \\
& \left[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\right] \\
& \left[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\right] \\
& \left[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(1)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\right] \\
& + \frac{1}{16}\left[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\right]\left[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\right] \\
& H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \quad .
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

En este caso, dado que únicamente $H^{(0)}_{00} \neq 0$ el segundo término en (5.12) se anula:

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(2)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int & \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y) \\
& \left[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\right] \\
& \left[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\right] \\
& \left[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(1)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\right] \quad .
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

La fuente a segundo orden de perturbación resulta:

$$
\nabla^2 H^{(2)00}(r) = -\frac{k^3 M^3}{512\pi^3 r^5} . \tag{5.14}
$$

Nuevamente debido a la simetría esférica la ecuación diferencial es ordinaria con solución dada por:

$$
H^{(2)00}(r) = -\left(\frac{k}{2}\right)^3 \frac{M^3}{6(4\pi r)^3} . \tag{5.15}
$$

Por último cabe mencionar que para este problema estudiado la contribución de los diagramas cuarticos a segundo orden de perturbación es 0:

$$
H^{(2)\mu\mu'}(r)_{\mathrm{quartic}} = 0 \tag{5.16}
$$

Es decir, únicamente los diagramas cúbicos son los que contributen al gravitón gordo.

5.2.2. Solución completa

Ahora se considera la solución completa de Schwarzschild tomando como gravitones gordos iniciales:

$$H^{(0)00} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r}, \tag{5.17}$$

$$H^{(0)11} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r}. \tag{5.18}$$

Mediante el código en Maple computamos las fuentes que aparecen en la corrección a primer orden al gravitón gordo (5.3):

$$\nabla^2 H^{(1)00}(r) = \frac{k^2 M^2}{16\pi^2 r^4}, \tag{5.19}$$

$$\nabla^2 H^{(1)11}(r) = -\frac{k^2 M^2}{64\pi^2 r^4}. \tag{5.20}$$

Ambas ecuaciones resultan ser ordinarias con soluciones dadas por:

$$H^{(1)00}(r) = {\frac{k}{2}}^{2} \frac{2M^2}{(4\pi r)^2}, \tag{5.21}$$

$$H^{(1)11}(r) = -{\frac{k}{2}}^{2} \frac{M^2}{2(4\pi r)^2}. \tag{5.22}$$

Teniendo las correcciones a primer orden al gravitón gordo, se calcula la fuente a segundo orden para obtener la ecuación de la corrección de orden 2:

$$\nabla^2 H^{(2)00}(r) = \frac{11k^3 M^3}{256\pi^3 r^5}, \tag{5.23}$$

$$\nabla^2 H^{(2)11}(r) = -\frac{3k^3 M^3}{512\pi^3 r^5}. \tag{5.24}$$

Debido a la simetría esférica, (5.23) y (5.24) se vuelven ecuaciones ordinarias con soluciones dadas por:

$$H^{(2)00}(r) = {\frac{k}{2}}^{3} \frac{11}{3}\frac{M^3}{(4\pi r)^3}, \tag{5.25}$$

$$H^{(2)11}(r) = -\left(\frac{k}{2}\right)^3 \frac{1}{2}\frac{M^3}{(4\pi r)^3}. \tag{5.26}$$

El cálculo puede proseguirse de forma iterativa hasta el orden de corrección deseado. Por último cabe mencionar que para este problema estudiado la contribución de los diagramas cuárticos a segundo orden de perturbación es 0:

$$H^{(2)\mu\mu'}(r)_{\text{quartic}} = 0 \tag{5.27}$$

Es decir, únicamente los diagramas cúbicos son los que contributen al gravitón gordo.

5.3. Solución de Reisnner Nordström

La métrica de Reissner-Nördstrom es una generalización de la métrica de Schwarzschild representando el exterior de un agujero negro de Schwarzschild con carga eléctrica Q. La métrica en coordenadas esféricas está dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta d\phi^2, \tag{5.28}$$

dónde:

$$r_s = 2GM = \frac{k^2}{2}\frac{M}{4\pi}, \tag{5.29}$$

$$r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0} = \frac{k^2}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}. \tag{5.30}$$

De esta manera se identifica la aproximación a orden cero al gravitón:

$$h^{(0)}_{00} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} - \frac{k}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{5.31}$$

$$h^{(0)}_{11} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} - \frac{k}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{5.32}$$

A partir de (5.31) y (5.32) se construye el gravitón gordo a orden cero:

$$H^{(0)\mu\mu'} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} + \frac{k}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} - \frac{k}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.33}$$

Mediante (5.33) se computan las fuentes a primer orden para el gravitón gordo y se construyen las ecuaciones de movimiento a partir de :

$$\nabla^2 H^{(1)00}(r) = -2 \left(-\frac{kM}{4\pi r^3} + \frac{3kQ^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \right) \left(\frac{kM}{8\pi r} - \frac{kQ^2}{64\pi^2\epsilon r} \right) , \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 H^{(1)11}(r) = \frac{1}{2} \Bigg[& - \left(-\frac{kM}{4\pi r^3} + \frac{3kQ^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \right) \left(-\frac{kM}{8\pi r} + \frac{kQ^2}{64\pi^2\epsilon_0 r^2} \right) \\ & + \left(\frac{kM}{8\pi r^2} - \frac{kQ^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^3} \right)^2 - \left(\frac{kM}{8\pi r} - \frac{kQ^2}{64\pi^2\epsilon_0 r^2} \right) \Bigg] \\ & \left(\frac{kM}{4\pi r^3} - \frac{3kQ^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \right) + \left(-\frac{kM}{8\pi r^2} + \frac{kQ^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^3} \right) . \end{aligned} \tag{5.35}$$

Ambas ecuaciones dependen únicamente de r, por lo que las ecuaciones se vuelven ordinarias con soluciones dadas por:

$$H^{(1)00}(r) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{2M}{(4\pi r)^2} - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{4MQ^2}{3\epsilon_0(4\pi r)^3} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{Q^4}{4\epsilon_0(4\pi r)^4} , \tag{5.36}$$

$$H^{(1)11}(r) = -\left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{M}{2(4\pi r)^2} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{MQ^2}{3\epsilon_0(4\pi r)^3} - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{Q^4}{24\epsilon_0(4\pi r)^4} . \tag{5.37}$$

Tomando el límite $Q \to 0$ se obtiene las correcciones de la métrica de Schwarzschild:

$$H^{(1)00}(r) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{2M}{(4\pi r)^2} , \tag{5.38}$$

$$H^{(1)11}(r) = -\left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{M}{2(4\pi r)^2} . \tag{5.39}$$

Conocidas las correcciones a primer orden, se computa las fuentes a segundo orden de perturbación y se construyen las ecuaciones de movimiento a partir de (5.12):

$$\nabla^2 H^{(2)00}(r) = -2\left(-\frac{kM}{4\pi r^3} + \frac{3kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^4} - \frac{Q^4k^2}{24576\pi^4\varepsilon^2 r^4} - \frac{M^2k^2}{128\pi^2 r^2} + \frac{MQ^2k^2}{768\pi^3\varepsilon r^3}\right)$$
$$-2\left(-\frac{5Q^4k^2}{1024\pi^4\varepsilon^2 r^6} - \frac{3M^2k^2}{16\pi^2 r^4} + \frac{MQ^2k^2}{16\pi^3\varepsilon r^5}\right)\left(\frac{kM}{8\pi r} - \frac{kQ^2}{64\pi^2\varepsilon r^2}\right), \tag{5.40}$$

$$\nabla^2 H^{(2)11}(r) = -\frac{-\frac{kM}{4\pi r^3} + \frac{3kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^4} - \frac{Q^4k^2}{4096\pi^4\varepsilon^2 r^4} - \frac{M^2k^2}{32\pi^2 r^2} + \frac{MQ^2k^2}{192\pi^3\varepsilon r^3}}{2}$$
$$+\left(\frac{kM}{8\pi r^2} - \frac{kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^3}\right)\left(\frac{Q^4k^2}{1024 r^5\pi^4\varepsilon^2} + \frac{M^2k^2}{16 r^3\pi^2} - \frac{MQ^2k^2}{64\pi^3 r^4\varepsilon}\right)$$
$$-\frac{\left(-\frac{5Q^4k^2}{1024\pi^4\varepsilon^2 r^6} - \frac{3M^2k^2}{16\pi^2 r^4} + \frac{MQ^2k^2}{16\pi^3\varepsilon r^5}\right)\left(-\frac{kM}{8\pi r} + \frac{kQ^2}{64\pi^2\varepsilon r^2}\right)}{2}$$
$$-\frac{\left(\frac{kM}{8\pi r} - \frac{kQ^2}{64\pi^2\varepsilon r^2}\right)\left(-\frac{5Q^4k^2}{6144\pi^4\varepsilon^2 r^6} - \frac{3M^2k^2}{64\pi^2 r^4} + \frac{MQ^2k^2}{64\pi^3\varepsilon r^5}\right)}{2}$$
$$+\left(-\frac{kM}{8\pi r^2} + \frac{kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^3}\right)\left(\frac{Q^4k^2}{6144 r^5\pi^4\varepsilon^2} + \frac{M^2k^2}{64 r^3\pi^2} - \frac{MQ^2k^2}{256\pi^3 r^4\varepsilon}\right)$$
$$-\frac{\left(-\frac{Q^4k^2}{24576\pi^4\varepsilon^2 r^4} - \frac{M^2k^2}{128\pi^2 r^2} + \frac{MQ^2k^2}{768\pi^3\varepsilon r^3}\right)\left(\frac{kM}{4\pi r^3} - \frac{3kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}\right)}{2}. \tag{5.41}$$

Las ecuaciones (5.40) y (5.41) son ecuaciones ordinarias en r con soluciones dadas por:

$$H^{(2)00}(r) = \left(\frac{k^2}{2}\right)^3\left[\frac{11}{3}\frac{M^3}{(4\pi r)^3} - \frac{119}{36\epsilon_0}\frac{M^2Q^2}{(4\pi r)^4} + \frac{143}{120\epsilon_0^2}\frac{MQ^4}{(4\pi r)^5} - \frac{19}{120\epsilon_0^3}\frac{Q^6}{(4\pi r)^6}\right], \tag{5.42}$$

$$H^{(2)11}(r) = \left(\frac{k^2}{2}\right)^3\left[-\frac{1}{2}\frac{M^3}{(4\pi r)^3} + \frac{11}{24\epsilon_0}\frac{M^2Q^2}{(4\pi r)^4} - \frac{71}{480\epsilon_0^2}\frac{MQ^4}{(4\pi r)^5} + \frac{5}{288\epsilon_0^3}\frac{Q^6}{(4\pi r)^6}\right]. \tag{5.43}$$

Nuevamente tomando el límite $Q \to 0$ se recupera el caso de Schwarzschild. Por último cabe mencionar que para este problema estudiado la contribución de los diagramas cuárticos a segundo orden de perturbación es 0:

$$H^{(2)\mu\mu'}(r)_{\mathrm{quartic}} = 0 \tag{5.44}$$

Es decir, únicamente los diagramas cúbicos son los que contributen al gravitón gordo.

5.4. Solución de Kerr con rotación lenta

La métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist está dada por el elemento de línea:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{r_s r}{\Sigma}\right)dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2}{\Sigma}\sin^2\vartheta\right)\sin^2\vartheta d\phi^2 \\ &- 2\frac{r_s r a \sin^2\vartheta}{\Sigma}dt d\phi , \end{aligned} \tag{5.45}$$

dónde las coordenadas de Boyer-Lindquist están dadas por:

$$x = \sqrt{r^2 + a^2}\sin\vartheta\cos\phi , \tag{5.46}$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2}\sin\vartheta\sin\phi , \tag{5.47}$$

$$z = r\cos\vartheta . \tag{5.48}$$

Además:

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\vartheta \tag{5.49}$$

$$\Delta = r^2 - r_s r + a^2 , \tag{5.50}$$

$$r_s = 2GM = \frac{k^2}{2}\frac{M}{4\pi} . \tag{5.51}$$

La aproximación de rotación lenta se toma considerando únicamente términos a lo más $O(a)$, esto es, cualquier término que contenga a^2 y superiores se desprecia. De esta manera:

$$x = r\sin\vartheta\cos\phi , \tag{5.52}$$

$$y = r \sin\vartheta \sin\phi\,, \tag{5.53}$$

$$z = r\cos\vartheta\,. \tag{5.54}$$

Las coordenadas de Boyer-Lindquist se convierten en las coordenadas esféricas habituales. A su vez:

$$\Sigma = r^2\,, \tag{5.55}$$

$$\Delta = r^2 - r_s r\,. \tag{5.56}$$

De esta manera la métrica (5.45) toma la forma:

$$ds^2 = -(1-\frac{r_s}{r})dt^2 + (1-\frac{r_s}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\phi^2 - 2\frac{r_s}{r}a\sin^2\vartheta dt d\phi\,. \tag{5.57}$$

Se identifica el gravitón a orden cero de perturbación:

$$h^{(0)}_{00} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r}\,, \tag{5.58}$$

$$h^{(0)}_{11} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r}\,, \tag{5.59}$$

$$\overset{(0)}{h}_{03} = \overset{(0)}{h}_{30} - \frac{kMa\sin^2\vartheta}{4\pi r}\,. \tag{5.60}$$

Se utilizan dichas aproximaciones como orden cero al gravitón gordo:

$$H^{(0)}_{00} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r}\,, \tag{5.61}$$

$$H^{(0)}_{11} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r}\,, \tag{5.62}$$

$$\overset{(0)}{H}_{03} = \overset{(0)}{H}_{30} - \frac{kMa\sin^2\vartheta}{4\pi r}\,. \tag{5.63}$$

En este caso, al obtener las fuentes a cualquier orden habrá dependencia en r, ϑ, motivo por el cual las ecuaciones diferenciales se deben de resolver con función de Green tal y como se realizó en (4.118). Calculando las fuentes a primer orden mediante código Maple obtenemos:

$$f^{(1)\mu\mu'}(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{k^2M^2}{16\pi^2r^4} & 0 & 0 & \frac{k^2M^2 a\sin^4(\theta)}{8\pi^2r^2} \\ 0 & -\frac{k^2M^2}{64\pi^2r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k^2M^2 a\sin^4(\theta)}{8\pi^2r^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.64}$$

Se observa que los elementos $f^{(1)00}, f^{(1)11}$ son idénticos a los encontrados en el caso de Schwarzschild completo (5.19), (5.20) por lo cual las correcciones a primer orden son idénticas a (5.21), (5.22):

$$H^{(1)00}(r) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{2M^2}{(4\pi r)^2}, \tag{5.65}$$

$$H^{(1)11}(r) = -\left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{M^2}{2(4\pi r)^2}. \tag{5.66}$$

Para encontrar $H^{(1)03}$ utilizamos la convolución con la función de Green dada en (4.118):

$$H^{(1)03}(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f^{(1)03}(x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'. \tag{5.67}$$

En este caso, al existir simetría axial es conveniente expandir la función de Green en polinomios de Legendre y funciones radiales:

$$H^{(1)03}(x) = -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r^{l+1}}\int_0^r\int_0^\pi r'^{l+2} f^{(1)03}(r',\vartheta')P_l(\cos\vartheta')\sin\vartheta' d\vartheta' dr' \right. \\ \left. + r^l\int_r^\infty\int_0^\pi \frac{f^{(1)03}(r',\vartheta')}{r'^{l-1}}P_l(\cos\vartheta')\sin\vartheta' d\vartheta' dr'\right]. \tag{5.68}$$

Se requiere expresar la parte angular de $f^{(1)03}(r,\vartheta)$ en una expansión de Legendre para aprovechar la ortogonalidad de los polinomios. Para ello recordamos que:

$$\sin^4\vartheta = (1-\cos^2\vartheta)^2 = 1 - 2\cos^2\vartheta + \cos^4\vartheta. \tag{5.69}$$

Además:

$$P_0(\cos\vartheta) = 1\,, \tag{5.70}$$

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{3}\left[P_0(\cos\vartheta) + 2P_2(\cos\vartheta)\right]\,, \tag{5.71}$$

$$\cos^4\vartheta = \frac{1}{35}\left[7P_0(\cos\vartheta) + 20P_2(\cos\vartheta) + 8P_4(\cos\vartheta)\right]\,, \tag{5.72}$$

Esto es:

$$\sin^4\vartheta = \frac{8}{15}P_0(\cos\vartheta) - \frac{16}{21}P_2(\cos\vartheta) + \frac{8}{35}P_4(\cos\vartheta)\,. \tag{5.73}$$

Recordando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\vartheta)P_k(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk}\,. \tag{5.74}$$

Se procede a realizar la integral en ϑ':

$$\int_0^{\pi} \sin^4\vartheta P_l(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = \frac{16}{15}\delta_{l0} - \frac{32}{105}\delta_{l2} + \frac{16}{315}\delta_{l4}\,. \tag{5.75}$$

Sustituyendo en (5.68):

$$H^{(1)03}(x) = -\frac{k^2 M a^2}{16\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{16}{15}\delta_{l0} - \frac{32}{105}\delta_{l2} + \frac{16}{315}\delta_{l4}\right)\left(\frac{1}{r^{l+1}}\int_0^r r'^l dr' + r^l\int_r^{\infty}\frac{1}{r'^{l+1}}dr'\right)\,. \tag{5.76}$$

Se realizan las integrales en r':

$$\int_0^r r'^l dr' = \frac{r^{l+1}}{l+1}\,. \tag{5.77}$$

Para $l \neq 0$:

$$\int_r^{\infty}\frac{1}{r'^{l+1}}dr' = \frac{1}{l r^l}\,. \tag{5.78}$$

Para $l = 0$, se necesita escoger un punto de refercia $r_0 \neq \infty$ similar a lo que sucede en electrostática con el problema del potencial debido a una línea infinita de carga:

$$\int_r^{r_0}\frac{1}{r'^{l+1}}dr' = \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)\,. \tag{5.79}$$

Sustituyendo las integrales en (5.76) se obtiene:

$$H^{(1)03}(r) = -\frac{k^2M^2a}{16\pi^2}\left[\frac{16}{15}\left(1+\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)\right) - \frac{32}{105}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \frac{16}{315}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)\right], \quad (5.80)$$

$$H^{(1)03}(r) = -\frac{k^2}{2}\frac{M^2a}{4\pi^2}\left[\frac{188}{225} + \frac{16}{15}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)\right]. \quad (5.81)$$

Definimos el parámetro $\rho = \frac{188}{225} + \frac{16}{15}\ln\frac{r_0}{r}$,de esta manera la corrección a primer orden al gravitón gordo de Kerr con rotación lenta está dado por:

$$H^{(1)\mu\mu'}(r) = \begin{pmatrix} -\frac{k^2}{2}\frac{2M^2}{(4\pi r)^2} & 0 & 0 & -\frac{k^2}{2}\frac{M^2a\rho}{4\pi^2} \\ 0 & -\frac{k^2}{2}\frac{M^2}{(4\pi r)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k^2}{2}\frac{M^2a\rho}{4\pi^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.82)$$

Observe que si se toma el límite con $a \to 0$ se recupera la corrección a primer orden a la métrica de Schwarzschild. Se puede continuar el cálculo de correcciones a órdenes superiores, sin embargo, resulta una tarea no trivial.

5.5. Solución de Kerr-Newman con rotación lenta

La métrica de Kerr-Newman en coordenadas de Boyer-Lindquist está dada por el elemento de l´ınea:

$$ds^2 = \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\vartheta^2\right)\Sigma^2 - (dt - a\sin^2\vartheta d\phi)^2\frac{\Delta}{\Sigma} + \left((r^2+a^2)d\phi - a\,dt\right)^2\frac{\sin^2\vartheta}{\Sigma}, \quad (5.83)$$

dónde las coordenadas de Boyer-Lindquist están dadas por:

$$x = \sqrt{r^2+a^2}\sin\vartheta\cos\phi, \quad (5.84)$$

$$y = \sqrt{r^2+a^2}\sin\vartheta\sin\phi, \quad (5.85)$$

$$z = r\cos\vartheta. \quad (5.86)$$

Además:

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta\,, \tag{5.87}$$

$$\Delta = r^2 - r_{\mathrm{s}} r + a^2 + r^2_{\mathrm{Q}} \tag{5.88}$$

$$r_{\mathrm{s}} = 2GM = \frac{k^2}{2}\frac{M}{4\pi}\,, \tag{5.89}$$

$$\frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0} = \frac{k^2}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\,. \tag{5.90}$$

En el caso de rotación lenta se desprecian todos los términos $O(a^2)$ y mayores:

$$x = r \sin\vartheta \cos\phi\,, \tag{5.91}$$

$$y = r \sin\vartheta \sin\phi\,, \tag{5.92}$$

$$z = r \cos\vartheta\,. \tag{5.93}$$

Las coordenadas de Boyer-Lindquist se convierten en las coordenadas esféricas habituales. A su vez:

$$\Sigma = r^2\,, \tag{5.94}$$

$$\Delta = r^2 - r_{\mathrm{s}} r + r^2_{\mathrm{Q}} \tag{5.95}$$

De esta manera la métrica de Kerr-Newman con rotación lenta toma la forma:

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & -\left(1 - \frac{r_{\mathrm{s}}}{r} + \frac{r^2_{\mathrm{Q}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_{\mathrm{s}}}{r} + \frac{r^2_{\mathrm{Q}}}{r^2}} + r^2 d\vartheta^2 \\ & + r^2 \sin^2\vartheta d\phi^2 - 2\left(\frac{r_{\mathrm{s}}}{r} - \frac{r^2_{\mathrm{Q}}}{r^2}\right) a \sin^2\vartheta dt d\phi\,. \end{aligned} \tag{5.96}$$

De (5.96) se obtiene la aproximación a orden cero al gravitón:

$$h^{(0)}_{00} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} - \frac{k}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,, \tag{5.97}$$

$$h^{(0)}_{11} = \frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} - \frac{k}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,, \tag{5.98}$$

$$h^{(0)}_{03} = h^{(0)}_{30} = -2a \sin^2\vartheta \left(\frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} - \frac{k}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)\,. \tag{5.99}$$

Se construye la aproximación a orden cero al gravitón gordo:

$$H_{00}^{(0)} = -\frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} - \frac{k}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{5.100}$$

$$H_{11}^{(0)} = -\frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} - \frac{k}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{5.101}$$

$$H_{03}^{(0)} = H_{30}^{(0)} = -2a\sin^2\vartheta\left(\frac{k}{2}\frac{M}{4\pi r} - \frac{k}{16\pi}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right). \tag{5.102}$$

Se calculan las fuentes a primer orden de perturbación:

$$f^{(1)00} = -2\left(-\frac{kM}{4\pi r^3} + \frac{3kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}\right)\left(\frac{kM}{8\pi r} - \frac{kQ^2}{64\pi^2\varepsilon r^2}\right), \tag{5.103}$$

$$f^{(1)11} = -\frac{\left(-\frac{kM}{4\pi r^3} + \frac{3kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}\right)\left(-\frac{kM}{8\pi r} + \frac{kQ^2}{64\pi^2\varepsilon r^2}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{kM}{8\pi r^2} - \frac{kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^3}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{kM}{8\pi r} - \frac{kQ^2}{64\pi^2\varepsilon r^2}\right)\left(\frac{kM}{4\pi r^3} - \frac{3kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}\right)}{2} + \frac{\left(-\frac{kM}{8\pi r^2} + \frac{kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^3}\right)^2}{2}, \tag{5.104}$$

$$f^{(1)03} = 4ar^2\sin^4\vartheta\left(\frac{kM}{8\pi r} - \frac{kQ^2}{64\pi^2\varepsilon r^2}\right)\left(\frac{kM}{4\pi r^3} - \frac{3kQ^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}\right). \tag{5.105}$$

Para (5.103) y (5.104) se resuelve la ecuación diferencial (5.3) aprovechando la simetría esférica:

$$H^{(1)00}(r) = \left(\frac{k}{2}\right)^2\left(\frac{2M^2}{(4\pi r)^2} - \frac{4}{3\epsilon_0}\frac{MQ^2}{(4\pi r)^2} + \frac{1}{4\epsilon_0^2}\frac{Q^4}{(4\pi r)^4}\right), \tag{5.106}$$

$$H^{(1)11}(r) = -\left(\frac{k}{2}\right)^2\frac{M}{2(4\pi r)^2} + \left(\frac{k}{2}\right)^2\frac{MQ^2}{3\epsilon_0(4\pi r)^3} - \left(\frac{k}{2}\right)^2\frac{Q^4}{24\epsilon_0(4\pi r)^4}, \tag{5.107}$$

$$H^{(1)00}(r) = \left(\frac{k}{2}\right)^2\frac{2M}{(4\pi r)^2} - \left(\frac{k}{2}\right)^2\frac{4MQ^2}{3\epsilon_0(4\pi r)^3} + \left(\frac{k}{2}\right)^2\frac{Q^4}{4\epsilon_0(4\pi r)^4}. \tag{5.108}$$

Para $H^{(1)03}$ se necesita calcular (5.68) y resulta conveniente expandir en Polinomios de Legendre $\sin^4\vartheta$ como en (5.73):

$$
\begin{aligned}
H^{(1)03}(x) = &- \frac{k^2 M a}{16\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{16}{15}\delta_{l0} - \frac{32}{105}\delta_{l2} + \frac{16}{315}\delta_{l4}\right)\left(\frac{1}{r^{l+1}}\int_0^r r'^{l} dr' + r^{l}\int_r^{\infty}\frac{1}{r'^{l+1}}dr'\right) \\
&+ \frac{k^2 M Q^2 a}{32\pi^3\epsilon}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{16}{15}\delta_{l0} - \frac{32}{105}\delta_{l2} + \frac{16}{315}\delta_{l4}\right)\left(\frac{1}{r^{l+1}}\int_0^r r'^{l-1} dr' + r^{l}\int_r^{\infty}\frac{1}{r'^{l+2}}dr'\right) \\
&- \frac{3k^2 Q^4 a}{1024\pi^4\epsilon_0^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{16}{15}\delta_{l0} - \frac{32}{105}\delta_{l2} + \frac{16}{315}\delta_{l4}\right)\left(\frac{1}{r^{l+1}}\int_0^r r'^{l-2} dr' + r^{l}\int_r^{\infty}\frac{1}{r'^{l+3}}dr'\right).
\end{aligned}
\tag{5.109}
$$

Realizando las integrales:

$$
\begin{aligned}
H^{(1)03}(r) = &- \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{M^2 a}{4\pi^2}\left(\frac{188}{225} + \frac{16}{15}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)\right) \\
&+ \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{MQ^2 a}{8\pi^3\epsilon_0}\left(\frac{188}{225r} + \frac{16}{15}\frac{1}{r}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{3Q^4 a}{256\pi^4\epsilon_0^2}\left(-\frac{8}{9r^2}\right).
\end{aligned}
\tag{5.110}
$$

El cálculo se puede continuar de forma iterativa hasta el orden de perturbación deseada. Por último si se toma el límite $Q \to 0$ se recuperan las correcciones a primer orden a la solución de Kerr.

Capítulo 6

Conclusiones y Perspectivas

En aras de cerrar este trabajo, se presentan los resultados de mayor importancia obtenidos:

1. El método de solución perturbativo construido en (4.1) reproduce los resultados para la singularidad desnuda del agujero negro de Schwarzschild obtenido por Luna et al.

2. La contribución de la doble copia de los diagramas cuárticos es cero para los casos trabajados hasta segundo orden de perturbación, $H^2_{\text{quartic}} = 0$.

3. El método de solución perturbativo construido en la sección (4.1) constituye un método general para resolver de manera completa la ecuación de Yang-Mills con masa y fuentes de forma perturbativa, dicha solución siendo aceptable a todos órdenes cuando es convergente.

4. La expresión (4.62) obtenida de forma perturbativa es aplicable a cualquier proceso de dispersión a nivel árbol en presencia de fuentes para el calculo de amplitudes en la teor´ıa de Yang-Mills a cualquier orden de perturbación. Dicha expresión resulta ser mucho más simple que las expansiones en diagramas de Feynman.

5. El cálculo de las correcciones perturbativas en la conjetura de la doble copia extendida (4.91) tiene una complejidad en el tiempo de $O(n^4)$ lo

cual resulta ser un orden alto de complejidad para órdenes de perturbación grandes.

6. La solución obtenida a través del formalismo para la métrica de Kerr-Newman reproduce de forma correcta los casos l´ımites hacia las correcciones de las métricas de Kerr, Reissner-Nordström y Schwarzschild.

   El hecho que el formalismo desarrollado en (4.91), asumiendo la validez de la conjetura de la doble copia extendida reproduzca los resultados trabajados en la literatura da soporte a la viabilidad de la conjetura a pesar de no probarla. Esto va en mutuo acuerdo con el fenomeno observado en las aplicaciones trabajadas en el cap´ıtulo 5 en dónde $H^2_{\mathrm{quartic}} = 0$, es decir, los diagramas cuárticos parecen no aportar nada a las correcciones perturbativas y sólamente los diagramas cúbicos tienen aportaciones no nulas. Debido a estos fenómenos observados, vale la pena continuar en trabajos posteriores la validez de la conjetura de la doble copia extendida.

   Otro de los enfoques que tiene mucho valor explorar más a fondo es el de reexpresar las amplitudes de los diagramas de vértices de 4 puntos en términos de diagramas con vértices de 3 puntos para la expresión (4.62). Como se mencionó en el trabajo, el reexpresar los diagramas cuárticos de esta manera provoca una contribución extra a los numeradores cinemáticos de los diagramas cúbicos:

$$n'_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{i}} + \delta_{\mathrm{i}}, \tag{6.1}$$

   dónde n_{i} es el valor original del numerador cinemático en (4.62), el cuál cumple la dualidad BCJ y δ_{i} es el factor adicional asociado a la reexpresión de los diagramas cuárticos. El valor que toma cada δ_{i} depende del diagrama en cuestión. Se sabe que los numeradores cinemáticos tienen libertad de definición bajo una transformación generalizada de Gauge, es decir, si n'_{i} representa el factor cinemático asociado a un diagrama cúbico en particular, entonces:

$$n''_{\mathrm{i}} = n'_{\mathrm{i}} + \Delta_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{i}} + \delta_{\mathrm{i}} + \Delta_{\mathrm{i}} \tag{6.2}$$

dónde Δ_i satisface (2.65).

Dado que n_i satisface la dualidad BCJ, una solución sería encontrar una transformación generalizada de Gauge Δ_i tal que:

$$\Delta_i = -\delta_i \tag{6.3}$$

De esta manera, las amplitudes provenientes de diagramas cuárticos no aportarían nada a la amplitud total, lo cual provocaría que la conjetura de la doble extendida fuera válida y que además $H_{\text{quartic}} = 0$ a todo orden de perturbación. A su vez, también probaría que (4.62) es la doble copia BCJ de Yang-Mills correspondiente a gravedad dilatónica.

Por último existe un punto en particular que no se trabajó y que vale la pena continuar en un trabajo posterior, esto es, las funciones de transformación.

Las funciones de transformación F representan al conjunto de transformaciones generalizadas de gauge que se necesitan realizar para pasar del gravitón gordo al gravitón de la gravedad dilatónica, esto es:

$$F : H \to h. \tag{6.4}$$

En el formalismo trabajado, se necesita obtener estas funciones de manera perturbativa:

$$F^{\mu\mu'}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j}{2^j} F^{(j)\mu\mu'}(x). \tag{6.5}$$

Dichas funciones nos permitirían obtener directamente las correcciones a cualquier orden de perturbación al gravitón a partir del gravitón gordo, de esta manera, expandiendo el formalismo de la doble copia a encontrar soluciones clásicas perturbativas en gravedad dilatónica en el marco de Gauge de la gravedad dilatónica a partir de soluciones clásicas perturbativas de una teor´ıa de color tipo Yang-Mills. Sin embargo, no existe una expresión generalizada a ningún orden de perturbación para obtener estas funciones. Lo más cercano que se tiene es encontrar dichas funciones a partir del conocimiento a priori del gravitón y el gravitón gordo por lo que desarrollar esta parte del formalismo resulta de alto valor para mapear soluciones clásicas en teoría no abeliana de Gauge hacia Gravedad.

Apéndice A

Correcciones órdenes superiores

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(1)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(1)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int & \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)\Big[2\partial^{\beta}_x\eta^{\gamma\mu} - 2\partial^{\gamma}_y\eta^{\beta\mu} \\
& + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big]\Big[2\partial^{\beta'}_x\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial^{\gamma'}_y\eta^{\beta'\mu'} \\
& + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] H^{(0)}_{\beta\beta'}(y) H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
& + T^{(1)\mu\mu'}(x)
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(2)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(2)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int & \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)\Big[2\partial^{\beta}_x\eta^{\gamma\mu} - 2\partial^{\gamma}_y\eta^{\beta\mu} \\
& + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big]\Big[2\partial^{\beta'}_x\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial^{\gamma'}_y\eta^{\beta'\mu'} \\
& + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big]\Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y) H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\beta\beta'}(y) H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\Big] \\
& + \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} \\
& - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big] H^{(0)}_{\delta\delta'}(x) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + T^{(2)\mu\mu'}(x)
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(3)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(3)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)\,\Big[\Big(2\partial^\beta_x \eta^{\gamma\mu} - 2\partial^\gamma_y \eta^{\beta\mu} \\
+ (\partial_y - \partial_x)^\mu \eta^{\beta\gamma}\Big)\Big(2\partial^{\beta'}_x \eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial^{\gamma'}_y \eta^{\beta'\mu'} \\
+ (\partial_y - \partial_x)^{\mu'} \eta^{\beta'\gamma'}\Big)\Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y) H^{(2)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
+ H^{(1)}_{\beta\beta'}(y) H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(2)}_{\beta\beta'}(y) H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\Big]\Big] \\
+ \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-2}\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} \\
- \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big]\Big[H^{(1)}_{\delta\delta'}(x) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x) H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(1)}_{\beta\beta'}(x)\Big] + T^{(3)\mu\mu'}(x)
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(4)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(4)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)\,\Big[\Big(2\partial^\beta_x \eta^{\gamma\mu} - 2\partial^\gamma_y \eta^{\beta\mu} \\
+ (\partial_y - \partial_x)^\mu \eta^{\beta\gamma}\Big)\Big(2\partial^{\beta'}_x \eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial^{\gamma'}_y \eta^{\beta'\mu'} \\
+ (\partial_y - \partial_x)^{\mu'} \eta^{\beta'\gamma'}\Big)\Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y) H^{(3)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
+ H^{(1)}_{\beta\beta'}(y) H^{(2)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(2)}_{\beta\beta'}(y) H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
+ H^{(3)}_{\beta\beta'}(y) H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\Big]\Big] \\
+ \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-2}\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} \\
- \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big]\Big[H^{(2)}_{\delta\delta'}(x) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
+ H^{(1)}_{\delta\delta'}(x) H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x) H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
+ H^{(1)}_{\delta\delta'}(x) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x) H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(2)}_{\beta\beta'}(x)\Big] + T^{(4)\mu\mu'}(x)
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(5)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(5)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int & \bar{d}^4 y\, \bar{\delta}^4(x-y) \Big[2\partial^{\beta}\eta^{\gamma\mu}_{x} - 2\partial^{\gamma}\eta^{\beta\mu}_{y} \\
& + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big] \Big[2\partial^{\beta'}_{x}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial^{\gamma'}_{y}\eta^{\beta'\mu'} \\
& + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big] \Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y) H^{(4)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\beta\beta'}(y) H^{(3)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(2)}_{\beta\beta'}(y) H^{(2)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
& + H^{(3)}_{\beta\beta'}(y) H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(4)}_{\beta\beta'}(y) H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x) \Big] \\
+ \frac{1}{16} \sum_{j=0}^{j'-2} \sum_{l=0}^{j'-j-2} & \Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon} \Big] \Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} \\
& - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'} \Big] \Big[H^{(3)}_{\delta\delta'}(x) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x) H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x) H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x) H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x) H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x) H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x) H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x) H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x) H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) \Big] + T^{(5)\mu\mu'}(x)
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(6)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(6)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int d\bar{y}\,\bar{\delta}(x-y)\Big[&2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} \\
&+ (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big]\Big[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} \\
&+ (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big]\Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(5)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
&+ H^{(1)}_{\beta\beta'}(y)H^{(4)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(2)}_{\beta\beta'}(y)H^{(3)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
&+ H^{(3)}_{\beta\beta'}(y)H^{(2)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(4)}_{\beta\beta'}(y)H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
&+ H^{(5)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\Big] \\
+ \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2}&\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} \\
&- \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big]\Big[H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x)\Big] + T^{(6)\mu\mu'}(x)
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2 H^{(7)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(7)\mu\mu'}(x) = -\frac{1}{4}\int \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y) & \Big[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} \\
& + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big]\Big[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} \\
& + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big]\Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(6)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\beta\beta'}(y)H^{(5)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(2)}_{\beta\beta'}(y)H^{(4)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
& + H^{(3)}_{\beta\beta'}(y)H^{(3)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(4)}_{\beta\beta'}(y)H^{(2)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
& + H^{(5)}_{\beta\beta'}(y)H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(6)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\Big] \\
+ \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-j-2} & \Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} \\
& - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big]\Big[H^{(5)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(5)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) \\
& + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(5)}_{\beta\beta'}(x)\Big] + T^{(7)\mu\mu'}(x)
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial^2 H^{(8)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(8)\mu\mu'}(x) = \\
&-\frac{1}{4}\int \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)\left[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\right] \\
&\left[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\right] \Big(H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(7)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(1)}_{\beta\beta'}(y)H^{(6)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
&+ H^{(2)}_{\beta\beta'}(y)H^{(5)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(3)}_{\beta\beta'}(y)H^{(4)}_{\gamma\gamma'}(x) + \\
&H^{(4)}_{\beta\beta'}(y)H^{(3)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(5)}_{\beta\beta'}(y)H^{(2)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(6)}_{\beta\beta'}(y)H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(7)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\Big) \\
&+\frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'=2}\sum_{l=0}^{j=2}\left[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\right]\left[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\right]\Big(H^{(6)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + \\
&H^{(5)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(5)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(6)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(5)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(5)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) + \\
&H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) \\
&+ H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(5)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(5)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(6)}_{\beta\beta'}(x) + \\
&T^{(8)\mu\mu'}(x)
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial^2 H^{(9)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(9)\mu\mu'}(x) \\
&= -\frac{1}{4}\int \bar{d}y\,\bar{\delta}(x-y)\Big[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big]\Big[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'} \\
&\qquad - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big]\Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(8)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(1)}_{\beta\beta'}(y)H^{(7)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
&\qquad + H^{(2)}_{\beta\beta'}(y)H^{(6)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(3)}_{\beta\beta'}(y)H^{(5)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(4)}_{\beta\beta'}(y)H^{(4)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(5)}_{\beta\beta'}(y)H^{(3)}_{\gamma\gamma'}(x) \\
&\qquad + H^{(6)}_{\beta\beta'}(y)H^{(2)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(7)}_{\beta\beta'}(y)H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(8)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\Big] \\
&+ \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{2}\sum_{l=0}^{2}\Big(\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big)\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'} \\
&\qquad - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big]\Big[H^{(7)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(6)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(5)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(5)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(6)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(7)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(6)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(5)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(5)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(6)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(5)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(5)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(5)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(5)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(5)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(6)}_{\beta\beta'}(x) \\
&\qquad + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(6)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(7)}_{\beta\beta'}(x)\Big] + T^{(9)\mu\mu'}(x)
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial^2 H^{(10)\mu\mu'}(x) - m^2 H^{(10)\mu\mu'}(x)\\
&= -\frac{1}{4}\int d^{D}y\,\delta^{D}(x-y)\Big[2\partial_x^{\beta}\eta^{\gamma\mu} - 2\partial_y^{\gamma}\eta^{\beta\mu} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu}\eta^{\beta\gamma}\Big]\Big[2\partial_x^{\beta'}\eta^{\gamma'\mu'}\\
&\qquad - 2\partial_y^{\gamma'}\eta^{\beta'\mu'} + (\partial_y - \partial_x)^{\mu'}\eta^{\beta'\gamma'}\Big]\Big[H^{(0)}_{\beta\beta'}(y)H^{(9)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(1)}_{\beta\beta'}(y)H^{(8)}_{\gamma\gamma'}(x)\\
&\quad + H^{(2)}_{\beta\beta'}(y)H^{(7)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(3)}_{\beta\beta'}(y)H^{(6)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(4)}_{\beta\beta'}(y)H^{(5)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(5)}_{\beta\beta'}(y)H^{(4)}_{\gamma\gamma'}(x)\\
&\quad + H^{(6)}_{\beta\beta'}(y)H^{(3)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(7)}_{\beta\beta'}(y)H^{(2)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(8)}_{\beta\beta'}(y)H^{(1)}_{\gamma\gamma'}(x) + H^{(9)}_{\beta\beta'}(y)H^{(0)}_{\gamma\gamma'}(x)\Big]\\
&\quad + \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{j'-2}\sum_{l=0}^{j'-2}\Big[\eta^{\mu\epsilon}\eta^{\beta\delta} - \eta^{\mu\delta}\eta^{\beta\epsilon}\Big]\Big[\eta^{\mu'\epsilon'}\eta^{\beta'\delta'}\\
&\qquad - \eta^{\mu'\delta'}\eta^{\beta'\epsilon'}\Big]\Big[H^{(8)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(7)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(6)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(5)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(5)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(6)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(7)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(8)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(0)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(7)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(6)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(5)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(5)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(6)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(7)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(1)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(6)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(5)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(5)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(6)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(2)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(5)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(5)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(3)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(4)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(4)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(4)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(3)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(5)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(5)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(5)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(3)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(5)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(2)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(6)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(6)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(2)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(6)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(1)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(7)}_{\beta\beta'}(x) + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(1)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(7)}_{\beta\beta'}(x)\\
&\qquad + H^{(0)}_{\delta\delta'}(x)H^{(0)}_{\epsilon\epsilon'}(x)H^{(8)}_{\beta\beta'}(x)\Big] + T^{(10)\mu\mu'}(x)
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

Apéndice B

Códigos Maple

Se proporciona el código utilizado para el cálculo de correcciones perturbativas aplicado en el cap´ıtulo 5 para los 4 casos trabajados:

- Métrica de Schwarzschild.
- Métrica de Reissner-Nordström.
- Métrica de Kerr con rotación lenta.
- Métrica de Kerr-Newman con rotación lenta.

Dicho código consta de 5 scripts desarrollados mediante el software Maple por lo que para poder correr dichos scripts es necesario tener el software mencionado con una licencia activa.

El código se desarrolló con el único fin de poder realizar los cálculos del capítulo 4 y tiene muchas áreas de mejora para optimizar. El autor da su autorización expresa para la utilización y modificación del mismo en cualquier trabajo sin fines de lucro, realizando la atribución correspondiente.

Schwarzschild

Se construye la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas:

$$eta := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r^2)\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\eta := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

Se introduce la aproximación de orden cero al gravitón gordo :

$$h := \begin{bmatrix} -\frac{k}{2}\ \frac{M}{4\cdot\pi\cdot r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2}\ \frac{M}{4\cdot\pi\cdot r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h := \begin{bmatrix} -\frac{k\,M}{8\,\pi\,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k\,M}{8\,\pi\,r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

Se definen una matriz de 2x4 con 2 conjuntos de coordenadas esféricas:

$$coords := \begin{bmatrix} t1 & r1 & \theta 1 & \varphi 1 \\ t2 & r2 & \theta 2 & \varphi 2 \end{bmatrix}$$

$$coords := \begin{bmatrix} t1 & r1 & \theta 1 & \varphi 1 \\ t2 & r2 & \theta 2 & \varphi 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

Se construyen los gravitones a orden cero en estos 2 sistemas de coordenadas esféricas:

$h\_1 := subs\left(t = coords[1, 1], r = coords[1, 2], \theta = coords[1, 3], \varphi = coords[1, 4], h\right)$

$$h\_1 := \begin{bmatrix} -\frac{k\,M}{8\,\pi\,r1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k\,M}{8\,\pi\,r1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$h\_2 := subs\left(t = coords[2, 1], r = coords[2, 2], \theta = coords[2, 3], \varphi = coords[2, 4], h\right)$

$$h\_2 := \begin{bmatrix} -\frac{k\,M}{8\,\pi\,r2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k\,M}{8\,\pi\,r2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Definimos el operador integral para calcular las fuentes por orden de perturbación:

$operator := (m1, \text{beta}, \text{gamma}, \text{mu}) \to 2 \cdot \text{eta}[\text{gamma}, \text{mu}] \cdot diff(m1, coords[1, \text{beta}]) - 2 \cdot \text{eta}[\text{beta}, \text{mu}] \cdot diff(m1, coords[2, \text{gamma}]) + \text{eta}[\text{beta}, \text{gamma}] \cdot diff(m1, coords[2, \text{mu}]) - \text{eta}[\text{beta}, \text{gamma}] \cdot diff(m1, coords[1, \text{mu}])$

$$operator := (m1, \beta, \gamma, \mu) \to 2\,\eta_{\gamma,\,\mu} \left(\frac{\partial}{\partial coords_{1,\,\beta}}\, m1\right) - 2\,\eta_{\beta,\,\mu} \left(\frac{\partial}{\partial coords_{2,\,\gamma}}\, m1\right) + \eta_{\beta,\,\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial coords_{2,\,\mu}}\, m1\right) - \eta_{\beta,\,\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial coords_{1,\,\mu}}\, m1\right) \tag{6}$$

Definimos una matriz de 4x4 con entradas nulas en donde se guardará las fuentes a primer orden de corrección:

$$h1\_force := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h1\_force := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Se construyen los ciclos iterativos para el cálculo de las fuentes:

```
for u from 1 to 4 do
 for v from 1 to 4 do
 calculo := 0;
 indice_x := u;
 indice_y := v;
for i from 1 to 4 do
 for j from 1 to 4 do
 for l from 1 to 4 do
 for s from 1 to 4 do
 op1 := operator(h_2[i, l]·h_1[j, s], l, s, indice_y);
 op2 := operator(op1, i, j, indice_x);
 calculo := calculo + op2;
 end do;
 end do;
 end do;
 end do;
 h1_force[indice_x, indice_y] := -1/4 ·subs(coords[2, 1] = coords[1, 1], coords[2, 2] = coords[1, 2],
     coords[2, 3] = coords[1, 3], coords[2, 4] = coords[1, 4], calculo);
 end do;
 end do;
```

Se normalizan las coordenadas a un mismo sistema coordenado:

$h1\_force := subs\left(r1 = r,\ \theta 1 = \theta,\ \varphi 1 = \varphi, h1\_force\right)$

$$h1\_force := \begin{bmatrix} \frac{k^2 M^2}{16\,\pi^2\,r^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k^2 M^2}{64\,\pi^2\,r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Se construye la ecuación diferencial para las componentes cuya fuente depende únicamente de la coordenada radial y se resuelven:

$ode := \frac{1}{r^2} \frac{d}{d r}\left(r^2 \cdot \frac{d}{d r}(f(r))\right) = h1\_force[1, 1]$

$$ode := \frac{2\,r\left(\frac{d}{dr} f(r)\right) + r^2\left(\frac{d^2}{dr^2} f(r)\right)}{r^2} = \frac{k^2 M^2}{16\,\pi^2\,r^4} \quad (9)$$

$dsolve(ode)$

$$-f(r) = \frac{\_C1}{r} + \frac{M^2 k^2}{32 \pi^2 r^2} + \_C2 \qquad \textbf{(10)}$$

$$ode := \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, r}\left(r^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, r}\left(f(r)\right)\right) = subs\left(a = 0, h1\_force[2, 2]\right)$$

$$ode := \frac{2\, r \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f(r)\right) + r^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} f(r)\right)}{r^2} = -\frac{k^2 M^2}{64 \pi^2 r^4} \qquad \textbf{(11)}$$

$$dsolve(ode)$$

$$f(r) = -\frac{\_C1}{r} - \frac{M^2 k^2}{128 \pi^2 r^2} + \_C2 \qquad \textbf{(12)}$$

Construimos la matriz de gravitones gordos a primer orden de perturbación:

$$h1 := \begin{bmatrix} -\frac{k^2 M^2}{32 \pi^2 r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k^2 M^2}{128 \pi^2 r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h1 := \begin{bmatrix} -\frac{M^2 k^2}{32 \pi^2 r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M^2 k^2}{128 \pi^2 r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(13)}$$

A su vez se construyen los gravitones gordos a primer orden de pertubación en los 2 sistemas coordenados:

$$h1\_2 := subs\left(t = coords[2, 1], r = coords[2, 2], \theta = coords[2, 3], \varphi = coords[2, 4], h1\right)$$

$$h1\_2 := \begin{bmatrix} -\frac{M^2 k^2}{32 \pi^2 r2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M^2 k^2}{128 \pi^2 r2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$h1\_1 := subs(t = coords[1, 1], r = coords[1, 2], \theta = coords[1, 3], \varphi = coords[1, 4], h1)$

$$h1\_1 := \begin{bmatrix} -\frac{M^2 k^2}{32 \pi^2 r1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M^2 k^2}{128 \pi^2 r1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Construimos una matriz de 4x4 para guardar las correcciones de segundo orden:

$$h2\_force := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h2\_force := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Corremos los ciclos iterativos para calcular las fuentes a segundo orden:

```
for u from 1 to 4 do
 for v from 1 to 4 do
 calculo := 0;
 indice_x := u;
 indice_y := v;
for i from 1 to 4 do
 for j from 1 to 4 do
 for l from 1 to 4 do
 for s from 1 to 4 do
 op1 := operator(h_2[i, l]·h1_1[j, s], l, s, indice_y) + operator(h1_2[i, l]·h_1[j, s], l, s, indice_y);
 op2 := operator(op1, i, j, indice_x);
 calculo := calculo + op2;
 end do;
 end do;
```

```
end do;
end do;
h2_force[indice_x, indice_y] := K 1/4 ·subs(coords[2, 1] = coords[ 1, 1], coords[2, 2] = coords[1, 2],
    coords[2, 3] = coords[1, 3], coords[2, 4] = coords[1, 4] , calculo);
end do;
end do;

for u from 1 to 4 do
for v from 1 to 4 do
calculo := 0;
indice_x := u;
indice_y := v;
for i from 1 to 4 do
for j from 1 to 4 do
for l from 1 to 4 do
for s from 1 to 4 do

for p from 1 to 4 do
for q from 1 to 4 do
calculo := calculo + (eta[indice_x, i]·eta[j, l] K eta[indice_x, l]·eta[j, i]) · (eta[indice_y, s]·eta[p, q]
   K eta[indice_y, q]·eta[p, s]) ·h[l, q]·h[i, s]·h[j, p];
end do;
end do;
end do;
end do;
end do;
end do;
h2_force[indice_x, indice_y] = h2_force[indice_x, indice_y] + calculo/16 ;
end do;
end do;
h2_force := subs(r1 = r, h2_force)
```

$$h2\_force := \begin{bmatrix} \frac{11\,k^3 M^3}{256\,\pi^3 r^5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K\,\frac{3\,k^3 M^3}{512\,\pi^3 r^5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(17)}$$

Se resuelven las ecuaciones diferenciales a segundo orden de perturbación:

$$ode := \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\,r}\left(r^2 \cdot \frac{d}{d\,r}\left(f(r)\right)\right) = h2\_force[1, 1]$$

$$ode := \frac{2\,r\left(\frac{d}{dr}\,f(r)\right)+r^2\left(\frac{d^2}{dr^2}\,f(r)\right)}{r^2} = \frac{11\,k^3\,M^3}{256\,\pi^3\,r^5} \tag{18}$$

$dsolve(ode)$

$$\mathrm{K}f(r) = \frac{\_C1}{r} + \frac{11\,k^3\,M^3}{1536\,\pi^3\,r^3} + \_C2 \tag{19}$$

$$ode := \frac{1}{r^2}\,\frac{d}{d\,r}\left(r^2\cdot\frac{d}{d\,r}(f(r))\right) = h2\_force[2,2]$$

$$ode := \frac{2\,r\left(\frac{d}{dr}\,f(r)\right)+r^2\left(\frac{d^2}{dr^2}\,f(r)\right)}{r^2} = \mathrm{K}\,\frac{3\,k^3\,M^3}{512\,\pi^3\,r^5} \tag{20}$$

$dsolve(ode)$

$$f(r) = \mathrm{K}\,\frac{k^3\,M^3}{1024\,\pi^3\,r^3}\,\mathrm{K}\,\frac{\_C1}{r} + \_C2 \tag{21}$$

Reisnner-Nordström

Se construye la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas:

$$\mathrm{eta} := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r^2)\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\eta := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin(\theta)^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Se introduce la aproximación de orden cero al gravitón gordo :

$$h := \begin{bmatrix} -\frac{k}{2}\,\frac{M}{4\cdot\pi\cdot r} + \frac{k}{16\cdot\pi}\,\frac{Q^2}{4\cdot\pi\cdot\mathrm{e}\cdot r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2}\,\frac{M}{4\cdot\pi\cdot r} - \frac{k}{16\cdot\pi}\,\frac{Q^2}{4\cdot\pi\cdot_{\mathrm{e}}\cdot r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h := \begin{bmatrix} -\frac{k\,M}{8\,\pi\,r} + \frac{k\,Q^2}{64\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k\,M}{8\,\pi\,r} - \frac{k\,Q^2}{64\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Se definen una matriz de 2x4 con 2 conjuntos de coordenadas esféricas:

$$coords := \begin{bmatrix} t1 & r1 & \theta 1 & \varphi 1 \\ t2 & r2 & \theta 2 & \varphi 2 \end{bmatrix}$$

$$coords := \begin{bmatrix} t1 & r1 & \theta 1 & \varphi 1 \\ t2 & r2 & \theta 2 & \varphi 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Se construyen los gravitones a orden cero en estos 2 sistemas de coordenadas esféricas:

$h\_1 := subs(t = coords[1, 1], r = coords[1, 2], \theta = coords[1, 3], \varphi = coords[1, 4], h)$

$$h\_1 := \begin{bmatrix} \mathrm{K}\frac{k\,M}{8\,\pi\,r1} + \frac{k\,Q^2}{64\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k\,M}{8\,\pi\,r1}\,\mathrm{K}\frac{k\,Q^2}{64\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$h\_2 := subs(t = coords[2, 1], r = coords[2, 2], \theta = coords[2, 3], \varphi = coords[2, 4], h)$

$$h\_2 := \begin{bmatrix} \mathrm{K}\frac{k\,M}{8\,\pi\,r2} + \frac{k\,Q^2}{64\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k\,M}{8\,\pi\,r2}\,\mathrm{K}\frac{k\,Q^2}{64\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Definimos el operador integral para calcular las fuentes por orden de perturbación:

$operator := (m1, \text{beta}, \text{gamma}, \text{mu}) \rightarrow 2 \cdot \text{eta}[\text{gamma}, \text{mu}] \cdot diff(m1, coords[1, \text{beta}])\ \mathrm{K}\ 2 \cdot \text{eta}[\text{beta}, \text{mu}] \cdot diff(m1, coords[2, \text{gamma}]) + \text{eta}[\text{beta}, \text{gamma}] \cdot diff(m1, coords[2, \text{mu}])\ \mathrm{K}\ \text{eta}[\text{beta}, \text{gamma}] \cdot diff(m1, coords[1, \text{mu}])$

$$operator := (m1, \beta, \gamma, \mu) \rightarrow 2\,\eta_{\gamma, \mu}\left(\frac{\partial}{\partial coords_{1, \beta}}\,m1\right)\mathrm{K}\,2\,\eta_{\beta, \mu}\left(\frac{\partial}{\partial coords_{2, \gamma}}\,m1\right) + \eta_{\beta, \gamma}\left(\frac{\partial}{\partial coords_{2, \mu}}\,m1\right)\mathrm{K}\,\eta_{\beta, \gamma}\left(\frac{\partial}{\partial coords_{1, \mu}}\,m1\right) \tag{6}$$

Definimos una matriz de 4x4 con entradas nulas en donde se guardará las fuentes a primer orden de corrección:

$$h1\_force := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h1\_force := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Se construyen los ciclos iterativos para el cálculo de las fuentes:

for u **from** 1 **to** 4 **do**
for v **from** 1 **to** 4 **do**
$calculo := 0;$
$indice\_x := u;$
$indice\_y := v;$
for i **from** 1 **to** 4 **do**
for j **from** 1 **to** 4 **do**
for l **from** 1 **to** 4 **do**
for s **from** 1 **to** 4 **do**
$op1 := operator(h\_2[i, l] \cdot h\_1[j, s], l, s, indice\_y);$
$op2 := operator(op1, i, j, indice\_x);$
$calculo := calculo + op2;$
end do;
end do;
end do;
end do;

$$h1\_force[indice\_x, indice\_y] := -\frac{1}{4} \cdot subs(coords[2,1] = coords[1,1], coords[2,2] = coords[1,2], coords[2,3] = coords[1,3], coords[2,4] = coords[1,4], calculo);$$

end do;
end do;

Se normalizan las coordenadas a un mismo sistema coordenado:

$$h1\_force := subs(r1 = r, \theta 1 = \theta, \varphi 1 = \varphi, h1\_force)$$

$$h1\_force := \Bigg[\Bigg[-2\left(-\frac{k M}{4 \pi r^3} + \frac{3 k Q^2}{32 \pi^2 \varepsilon r^4}\right)\left(\frac{k M}{8 \pi r} - \frac{k Q^2}{64 \pi^2 \varepsilon r^2}\right), 0, 0, 0\Bigg], \tag{8}$$

$$\Bigg[0, -\frac{\left(-\frac{k M}{4 \pi r^3} + \frac{3 k Q^2}{32 \pi^2 \varepsilon r^4}\right)\left(-\frac{k M}{8 \pi r} + \frac{k Q^2}{64 \pi^2 \varepsilon}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{k M}{8 \pi r^2} - \frac{k Q^2}{32 \pi^2 r^{2} r^3}\right)^2}{2} \varepsilon$$

$$-\frac{\left(\frac{k M}{8 \pi r} - \frac{k Q^2}{64 \pi^2 \varepsilon r^2}\right)\left(\frac{k M}{4 \pi r^3} - \frac{3 k Q^2}{32 \pi^2 \varepsilon r^4}\right)}{2} + \frac{\left(-\frac{k M}{8 \pi r^2} + \frac{k Q^2}{32 \pi^2 \varepsilon r^3}\right)^2}{2}, 0, 0\Bigg],$$

$$
\left[\begin{array}{c} 0,\,0,\,0,\,0 \end{array}\right],
$$

$$
\left[\begin{array}{c} 0,\,0,\,0,\,0 \end{array}\right]\Bigg]
$$

Se construye la ecuación diferencial para las componentes cuya fuente depende únicamente de la coordenada radial y se resuelven:

$$
ode := \frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(f(r)\right)\right) = h1\_force[1,1]
$$

$$
ode := \frac{2\,r\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,f(r)\right) + r^2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\,f(r)\right)}{r^2} = -2\left(-\frac{k\,M}{4\,\pi\,r^3} + \frac{3\,k\,Q^2}{32\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r^4}\right)\left(\frac{k\,M}{8\,\pi\,r} - \frac{k\,Q^2}{64\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r^2}\right) \tag{9}
$$

dsolve(ode)

$$
f(r) = -\frac{\_C1}{r} - \frac{M\,Q^2\,k^2}{192\,\pi^3\,\mathrm{e}\,r^3} + \frac{M^2\,k^2}{32\,\pi^2\,r^2} + \frac{Q^4\,k^2}{4096\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\,r^4} + \_C2 \tag{10}
$$

$$
ode := \frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(f(r)\right)\right) = subs\left(a=0,\, h1\_force[2,2]\right)
$$

$$
ode := \frac{2\,r\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,f(r)\right) + r^2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\,f(r)\right)}{r^2} = \tag{11}
$$

$$
-\frac{\left(-\frac{k\,M}{4\,\pi\,r^3} + \frac{3\,k\,Q^2}{32\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r^4}\right)\left(-\frac{k\,M}{8\,\pi\,r} + \frac{k\,Q^2}{64\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r^2}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{k\,M}{8\,\pi\,r^2} - \frac{k\,Q^2}{32\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r^3}\right)^2}{2}
$$

$$
-\frac{\left(\frac{k\,M}{8\,\pi\,r} - \frac{k\,Q^2}{64\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r^2}\right)\left(\frac{k\,M}{4\,\pi\,r^3} - \frac{3\,k\,Q^2}{32\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r^4}\right)}{2} + \frac{\left(-\frac{k\,M}{8\,\pi\,r^2} + \frac{k\,Q^2}{32\,\pi^2\,\mathrm{e}\,r^3}\right)^2}{2}
$$

dsolve(ode)

$$
f(r) = -\frac{\_C1}{r} + \frac{M\,Q^2\,k^2}{768\,\pi^3\,\mathrm{e}\,r^3} - \frac{M^2\,k^2}{128\,\pi^2\,r^2} - \frac{Q^4\,k^2}{24576\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\,r^4} + \_C2 \tag{12}
$$

Construimos la matriz de gravitones gordos a primer orden de perturbación:

$$h1 :=$$

$$\begin{bmatrix} \frac{M Q^2 k^2}{192\,\pi^3\,\mathrm{e}\,r^3} \mathsf{K} \frac{M^2 k^2}{32\,\pi^2\,r^2} \mathsf{K} \frac{Q^4 k^2}{4096\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\,r^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M Q^2 k^2}{768\,\pi^3\,\mathrm{e}\,r^3} \mathsf{K} \frac{M^2 k^2}{128\,\pi^2\,r^2} \mathsf{K} \frac{Q^4 k^2}{24576\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\,r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h1 := \left[\left[\frac{M Q^2 k^2}{192\,\pi^3\,\mathrm{e}\,r^3} \mathsf{K} \frac{M^2 k^2}{32\,\pi^2\,r^2} \mathsf{K} \frac{Q^4 k^2}{4096\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\,r^4}, 0, 0, 0\right], \left[0, \frac{M Q^2 k^2}{768\,\pi^3\,\mathrm{e}\,r^3} \mathsf{K} \frac{M^2 k^2}{128\,\pi^2\,r^2} \mathsf{K} \frac{Q^4 k^2}{24576\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\,r^4}, 0, 0\right], \left[0, 0, 0, 0\right], \left[0, 0, 0, 0\right]\right] \quad \mathbf{(13)}$$

A su vez se construyen los gravitones gordos a primer orden de pertubación en los 2 sistemas coordenados:

$$h1\_2 := subs\left(t = coords[2, 1], r = coords[2, 2], \theta = coords[2, 3], \varphi = coords[2, 4], h1\right)$$

$$h1\_2 := \left[\left[\frac{M Q^2 k^2}{192\,\pi^3\,\mathrm{e}\,r2^3} \mathsf{K} \frac{M^2 k^2}{32\,\pi^2\,r2^2} \mathsf{K} \frac{Q^4 k^2}{4096\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\,r2^4}, 0, 0, 0\right], \left[0, \frac{M Q^2 k^2}{768\,\pi^3\,\mathrm{e}\,r2^3} \mathsf{K} \frac{M^2 k^2}{128\,\pi^2\,r2^2} \mathsf{K} \frac{Q^4 k^2}{24576\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\,r2^4}, 0, 0\right], \left[0, 0, 0, 0\right], \left[0, 0, 0, 0\right]\right] \quad \mathbf{(14)}$$

$$h1\_1 := subs\left(t = coords[1, 1], r = coords[1, 2], \theta = coords[1, 3], \varphi = coords[1, 4], h1\right)$$

$$h1\_1 := \left[\left[\frac{M Q^2 k^2}{192\,\pi^3\,\mathrm{e}\,r1^3} \mathsf{K} \frac{M^2 k^2}{32\,\pi^2\,r1^2} \mathsf{K} \frac{Q^4 k^2}{4096\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\,r1^4}, 0, 0, 0\right], \quad \mathbf{(15)}$$

$$\left[0,\ \frac{M\,Q^2\,k^2}{768\,\pi^3\,\mathrm{e}\,r1^3} - \frac{M^2\,k^2}{128\,\pi^2\,r1^2} - \frac{Q^4\,k^2}{24576\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\,r1^4},\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0\right]\Big]$$

Construimos una matriz de 4x4 para guardar las correcciones de segundo orden:

$$h2\_force := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h2\_force := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Corremos los ciclos iterativos para calcular las fuentes a segundo orden:

```
for u from 1 to 4 do
 for v from 1 to 4 do
 calculo := 0;
 indice_x := u;
 indice_y := v;
for i from 1 to 4 do
 for j from 1 to 4 do
 for l from 1 to 4 do
 for s from 1 to 4 do
 op1 := operator(h_2[i, l]·h1_1[j, s], l, s, indice_y) + operator(h1_2[i, l]·h_1[j, s], l, s, indice_y);
 op2 := operator(op1, i, j, indice_x);
 calculo := calculo + op2;
 end do;
 end do;
 end do;
 end do;
 h2_force[indice_x, indice_y] := -1/4 ·subs(coords[2, 1] = coords[1, 1], coords[2, 2] = coords[1, 2],
     coords[2, 3] = coords[1, 3], coords[2, 4] = coords[1, 4], calculo);
 end do;
 end do;

 for u from 1 to 4 do
 for v from 1 to 4 do
 calculo := 0;
```

```
indice_x := u;
indice_y := v;
for i from 1 to 4 do
for j from 1 to 4 do
for l from 1 to 4 do
for s from 1 to 4 do
for p from 1 to 4 do
for q from 1 to 4 do
calculo := calculo + (eta[indice_x, i]·eta[j, l] K eta[indice_x, l]·eta[j, i])·(eta[indice_y, s]·eta[p, q]
    K eta[indice_y, q]·eta[p, s])·h[l, q]·h[i, s]·h[j, p];
end do;
end do;
end do;
end do;
end do;
end do;
h2_force[indice_x, indice_y] = h2_force[indice_x, indice_y] + calculo/16;
end do;
end do;
h2_force := subs(r1 = r, h2_force)
```

$$h2\_force := \Bigg[\Bigg[\mathrm{K}2\left(\mathrm{K}\frac{k M}{4 \pi r^3} + \frac{3 k Q^2}{32 \pi^2 \mathrm{e}\, r^4}\right)\left(\frac{M Q^2 k^2}{768 \pi^3 \mathrm{e}\, r^3} \mathrm{K} \frac{M^2 k^2}{128 \pi^2 r^2} \mathrm{K} \frac{Q^4 k^2}{24576 \pi^4 \mathrm{e}^2 r^4}\right) \tag{17}$$

$$\mathrm{K}2\left(\frac{M Q^2 k^2}{16 \pi^3 \mathrm{e}\, r^5} \mathrm{K} \frac{3 k^2 M^2}{16 \pi^2 r^4} \mathrm{K} \frac{5 Q^4 k^2}{1024 \pi^4 \mathrm{e}^2 r^6}\right)\left(\frac{k M}{8 \pi r} \mathrm{K} \frac{k Q^2}{64 \pi^2 \mathrm{e}\, r^2}\right), 0, 0, 0\Bigg],$$

$$\Bigg[0, \mathrm{K}\frac{\left(\mathrm{K}\frac{k M}{4 \pi r^3} + \frac{3 k Q^2}{32 \pi^2 \mathrm{e}\, r^4}\right)\left(\frac{M Q^2 k^2}{192 \pi^3 \mathrm{e}\, r^3} \mathrm{K} \frac{M^2 k^2}{32 \pi^2 r^2} \mathrm{K} \frac{Q^4 k^2}{4096 \pi^4 \mathrm{e}^2 r^4}\right)}{2} + \Bigg(\frac{k M}{8 \pi r^2}$$

$$\mathrm{K} \frac{k Q^2}{32 \pi^2 \mathrm{e}\, r^3}\Bigg)\left(\mathrm{K}\frac{M Q^2 k^2}{64 \pi^3 r^4 \mathrm{e}} + \frac{M^2 k^2}{16 r^3 \pi^2} + \frac{Q^4 k^2}{1024 r^5 \pi^4 \mathrm{e}^2}\right)$$

$$\mathrm{K}\frac{\left(\frac{M Q^2 k^2}{16 \pi^3 \mathrm{e}\, r^5} \mathrm{K} \frac{3 k^2 M^2}{16 \pi^2 r^4} \mathrm{K} \frac{5 Q^4 k^2}{1024 \pi^4 \mathrm{e}^2 r^6}\right)\left(\mathrm{K}\frac{k M}{8 \pi r} + \frac{k Q^2}{64 \pi^2 \mathrm{e}\, r^2}\right)}{2}$$

$$\mathrm{K}\frac{\left(\frac{k M}{8 \pi r} \mathrm{K} \frac{k Q^2}{64 \pi^2 \mathrm{e}\, r^2}\right)\left(\frac{M Q^2 k^2}{64 \pi^3 \mathrm{e}\, r^5} \mathrm{K} \frac{3 k^2 M^2}{64 \pi^2 r^4} \mathrm{K} \frac{5 Q^4 k^2}{6144 \pi^4 \mathrm{e}^2 r^6}\right)}{2} + \Bigg(\mathrm{K}\frac{k M}{\pi r^2 \, 8}$$

$$+ \frac{k Q^2}{32\,\pi^2\,\mathrm{e}\, r^3}\Bigg)\left(-\frac{M Q^2 k^2}{256\,\pi^3\, r^4\,\mathrm{e}} + \frac{M^2 k^2}{64\, r^3\,\pi^2} + \frac{Q^4 k^2}{6144\, r^5\,\pi^4\,\mathrm{e}^2}\right) - \frac{\left(\frac{M Q^2 k^2}{768\,\pi^3\,\mathrm{e}\, r^3} - \frac{M^2 k^2}{128\,\pi^2\, r^2} - \frac{Q^4 k^2}{24576\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\, r^4}\right)\left(\frac{k M}{4\,\pi\, r^3} - \frac{3\, k Q^2}{32\,\pi^2\,\mathrm{e}\, r^4}\right)}{2}, 0, 0\Bigg],$$

$$\left[0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0\right]\Bigg]$$

Se resuelven las ecuaciones diferenciales a segundo orden de perturbación:

$$ode := \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(f(r))\right) = h2\_force[1, 1]$$

$$ode := \frac{2\, r \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f(r)\right) + r^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} f(r)\right)}{r^2} = -2\left(-\frac{k M}{4\,\pi\, r^3} + \frac{3\, k Q^2}{32\,\pi^2\,\mathrm{e}\, r^4}\right)\left(\frac{M Q^2 k^2}{768\,\pi^3\,\mathrm{e}\, r^3} - \frac{M^2 k^2}{128\,\pi^2\, r^2} - \frac{Q^4 k^2}{24576\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\, r^4}\right) - 2\left(\frac{M Q^2 k^2}{16\,\pi^3\,\mathrm{e}\, r^5} - \frac{3\, k^2 M^2}{16\,\pi^2\, r^4} - \frac{5\, Q^4 k^2}{1024\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\, r^6}\right)\left(\frac{k M}{8\,\pi\, r} - \frac{k Q^2}{64\,\pi^2\,\mathrm{e}\, r^2}\right) \quad \textbf{(18)}$$

$dsolve(ode)$

$$f(r) = -\frac{19\, Q^6 k^3}{3932160\,\pi^6\,\mathrm{e}^3\, r^6} - \frac{\_C1}{r} + \frac{143\, M Q^4 k^3}{983040\,\pi^5\,\mathrm{e}^2\, r^5} - \frac{119\, M^2 Q^2 k^3}{73728\,\pi^4\,\mathrm{e}\, r^4} + \frac{11\, k^3 M^3}{1536\,\pi^3\, r^3} + \_C2 \quad \textbf{(19)}$$

$$ode := \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(f(r))\right) = h2\_force[2, 2]$$

$$ode := \frac{2\, r \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f(r)\right) + r^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} f(r)\right)}{r^2} = \quad \textbf{(20)}$$

$$-\frac{\left(-\frac{k M}{4\,\pi\, r^3} + \frac{3\, k Q^2}{32\,\pi^2\,\mathrm{e}\, r^4}\right)\left(\frac{M Q^2 k^2}{192\,\pi^3\,\mathrm{e}\, r^3} - \frac{M^2 k^2}{32\,\pi^2\, r^2} - \frac{Q^4 k^2}{4096\,\pi^4\,\mathrm{e}^2\, r^4}\right)}{2} + \Bigg(\frac{k M}{8\,\pi\, r^2}$$

$$- \frac{k Q^2}{32 \pi^2 e r^3} \Bigg) \Bigg(- \frac{M Q^2 k^2}{64 \pi^3 r^4 e} + \frac{M^2 k^2}{16 r^3 \pi^2} + \frac{Q^4 k^2}{1024 r^5 \pi^4 e^2} \Bigg)$$

$$- \frac{\left(\frac{M Q^2 k^2}{16 \pi^3 e r^5} - \frac{3 k^2 M^2}{16 \pi^2 r^4} - \frac{5 Q^4 k^2}{1024 \pi^4 e^2 r^6} \right) \left(- \frac{k M}{8 \pi r} + \frac{k Q^2}{64 \pi^2 e r^2} \right)}{2}$$

$$- \frac{\left(\frac{k M}{8 \pi r} - \frac{k Q^2}{64 \pi^2 e r^2} \right) \left(\frac{M Q^2 k^2}{64 \pi^3 e r^5} - \frac{3 k^2 M^2}{64 \pi^2 r^4} - \frac{5 Q^4 k^2}{6144 \pi^4 e^2 r^6} \right)}{2} + \Bigg(- \frac{k M}{8 \pi r^2}$$

$$+ \frac{k Q^2}{32 \pi^2 e r^3} \Bigg) \Bigg(- \frac{M Q^2 k^2}{256 \pi^3 r^4 e} + \frac{M^2 k^2}{64 r^3 \pi^2} + \frac{Q^4 k^2}{6144 r^5 \pi^4 e^2} \Bigg)$$

$$- \frac{\left(\frac{M Q^2 k^2}{768 \pi^3 e r^3} - \frac{M^2 k^2}{128 \pi^2 r^2} - \frac{Q^4 k^2}{24576 \pi^4 e^2 r^4} \right) \left(\frac{k M}{4 \pi r^3} - \frac{3 k Q^2}{32 \pi^2 e r^4} \right)}{2}$$

$dsolve(ode)$

$$f(r) = \frac{5 Q^6 k^3}{9437184 \pi^6 e^3 r^6} - \frac{\_C1}{r} - \frac{71 M Q^4 k^3}{3932160 \pi^5 e^2 r^5} + \frac{11 M^2 Q^2 k^3}{49152 \pi^4 e r^4} - \frac{k^3 M^3}{1024 \pi^3 r^3} + \_C2 \qquad \textbf{(21)}$$

$$\frac{\sin(\theta)^4 a\, k^2 M^2}{8\, r^2 \pi^2} \mathrm{K} \frac{\sin(\theta)^4 a\, k^2 M\, Q^2}{16\, r^3 \pi^3 \mathrm{e}} + \frac{3 \sin(\theta)^4 a\, k^2 Q^4}{512\, r^4 \pi^4 \mathrm{e}^2} \tag{13}$$

Bibliografía

1. Einstein, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik* **354,** 769-822. https:// doi. org / 10 . 1002 / andp . 19163540702 (1916).
2. Dixon, L. Calculating Scattering Amplitudes Efficiently. https : / / arxiv.org/abs/hep-ph/9601359 (1996).
3. DeWitt, B. S. Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory. *Physical Review* **160,** 1113-1148. https://doi.org/10.1103/physrev. 160.1113 (ago. de 1967).
4. DeWitt, B. S. Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory. *Physical Review* **162,** 1195-1239. https://doi.org/10.1103/ physrev.162.1195 (oct. de 1967).
5. DeWitt, B. S. Quantum Theory of Gravity. III. Applications of the Covariant Theory. *Physical Review* **162,** 1239-1256. https:// doi. org/10.1103/physrev.162.1239 (oct. de 1967).
6. Bern, Z., Carrasco, J. J. M. y Johansson, H. New relations for gauge-theory amplitudes. *Physical Review D* **78.** https://doi.org/10.1103/ physrevd.78.085011 (oct. de 2008).
7. Bern, Z., Carrasco, J. J. M. y Johansson, H. Perturbative Quantum Gravity as a Double Copy of Gauge Theory. *Physical Review Letters* **105.** https://doi.org/10.1103/physrevlett.105.061602 (ago. de 2010).
8. Luna, A. *et al.* Perturbative spacetimes from Yang-Mills theory. *Journal of High Energy Physics* **2017.** https : / / doi . org / 10 . 1007 / jhep04(2017)069 (abr. de 2017).

9. Monteiro, R., O'Connell, D. y White, C. D. Black holes and the double copy. *Journal of High Energy Physics* **2014.** https://doi.org/10.1007/jhep12(2014)056 (dic. de 2014).
10. Monteiro, R. y O'Connell, D. The kinematic algebra from the self-dual sector. *Journal of High Energy Physics* **2011.** https://doi.org/10.1007/jhep07(2011)007 (jul. de 2011).
11. Luna, A., Monteiro, R., Nicholson, I. y O'Connell, D. Type D spacetimes and the Weyl double copy. *Classical and Quantum Gravity* **36,** 065003. https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab03e6 (feb. de 2019).
12. White, C. D. Twistorial Foundation for the Classical Double Copy. *Physical Review Letters* **126.** https://doi.org/10.1103/physrevlett.126.061602 (feb. de 2021).
13. Srednicki, M. *Quantum Field Theory* https://doi.org/10.1017/cbo9780511813917 (Cambridge University Press, 2007).
14. Duca, V. D., Dixon, L. y Maltoni, F. New color decompositions for gauge amplitudes at tree and loop level. *Nuclear Physics B* **571,** 51-70. https://doi.org/10.1016/s0550-3213(99)00809-3 (abr. de 2000).
15. Duca, V. D., Frizzo, A. y Maltoni, F. Factorization of tree QCD amplitudes in the high-energy limit and in the collinear limit. *Nuclear Physics B* **568,** 211-262. https://doi.org/10.1016/s0550-3213(99)00657-4 (feb. de 2000).
16. Bern, Z., Dixon, L. y Kosower, D. A. PROGRESS IN ONE-LOOP QCD COMPUTATIONS. *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **46,** 109-148. https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.46.1.109 (dic. de 1996).
17. Kleiss, R. y Kuijf, H. Multigluon cross sections and 5-jet production at hadron colliders. *Nuclear Physics B* **312,** 616-644. https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90574-9 (ene. de 1989).
18. Bern, Z., Dixon, L., Dunbar, D., Perelstein, M. y Rozowsky, J. On the relationship between Yang-Mills theory and gravity and its implication for ultraviolet divergences. *Nuclear Physics B* **530,** 401-456. https://doi.org/10.1016/s0550-3213(98)00420-9 (oct. de 1998).

19. Carrasco, J. J. M., Mafra, C. R. y Schlotterer, O. Abelian Z-theory: NLSM amplitudes and ′ -corrections from the open string. *Journal of High Energy Physics* **2017.** https://doi.org/10.1007/jhep06(2017)093 (jun. de 2017).

20. Bern, Z., Dennen, T., Huang, Y.-t. y Kiermaier, M. Gravity as the square of gauge theory. *Physical Review D* **82.** https://doi.org/10.1103/physrevd.82.065003 (sep. de 2010).

21. Kawai, H., Lewellen, D. y Tye, S.-H. A relation between tree amplitudes of closed and open strings. *Nuclear Physics B* **269,** 1-23. https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90362-7 (mayo de 1986).

22. Bern, Z. y Grant, A. Perturbative gravity from QCD amplitudes. *Physics Letters B* **457,** 23-32. https://doi.org/10.1016/s0370-2693(99)00524-9 (jun. de 1999).

23. Bianchi, M., Elvang, H. y Freedman, D. Z. Generating tree amplitudes in N= 4 SYM and N= 8 SG. *Journal of High Energy Physics* **2008,** 063-063. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2008/09/063 (sep. de 2008).

24. White, C. The double copy: gravity from gluons. *arXiv:1708.07056* (2017).

25. Bern, Z., Dixon, L., Perelstein, M. y Rozowsky, J. Multi-leg one-loop gravity amplitudes from gauge theory. *Nuclear Physics B* **546,** 423-479. https://doi.org/10.1016/s0550-3213(99)00029-2 (abr. de 1999).

26. Saotome, R. y Akhoury, R. Relationship between gravity and gauge scattering in the high energy limit. *Journal of High Energy Physics* **2013.** https://doi.org/10.1007/jhep01(2013)123 (ene. de 2013).

27. Vera, A. S., Campillo, E. S. y Vázquez-Mozo, M. Á. Color-kinematics duality and the Regge limit of inelastic amplitudes. *Journal of High Energy Physics* **2013.** https://doi.org/10.1007/jhep04(2013)086 (abr. de 2013).

28. Johansson, H., Vera, A. S., Campillo, E. S. y Vazquez-Mozo, M. A. Color-Kinematics Duality in Multi-Regge Kinematics and Dimensional Reduction. https://arxiv.org/abs/1307.3106 (2013).

29. Johansson, H., Vera, A. S., Campillo, E. S. y Vazquez-Mozo, M. A. Color-kinematics duality and dimensional reduction for graviton emission in Regge limit. https://arxiv.org/abs/1310.1680 (2013).

30. Melville, S., Naculich, S., Schnitzer, H. y White, C. Wilson line approach to gravity in the high energy limit. *Physical Review D* **89.** https://doi.org/10.1103/physrevd.89.025009 (ene. de 2014).

31. Luna, A., Melville, S., Naculich, S. G. y White, C. D. Next-to-soft corrections to high energy scattering in QCD and gravity. *Journal of High Energy Physics* **2017.** https://doi.org/10.1007/jhep01(2017)052 (ene. de 2017).

32. Naculich, S. G. y Schnitzer, H. J. Eikonal methods applied to gravitational scattering amplitudes. *Journal of High Energy Physics* **2011.** https://doi.org/10.1007/jhep05(2011)087 (mayo de 2011).

33. Laenen, E., Stavenga, G. y White, C. D. Path integral approach to eikonal and next-to-eikonal exponentiation. *Journal of High Energy Physics* **2009,** 054-054. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/03/054 (mar. de 2009).

34. Weinberg, S. Infrared Photons and Gravitons. *Physical Review* **140,** B516-B524. https://doi.org/10.1103/physrev.140.b516 (oct. de 1965).

35. White, C. D. Factorization properties of soft graviton amplitudes. *Journal of High Energy Physics* **2011.** https://doi.org/10.1007/jhep05(2011)060 (mayo de 2011).

36. Akhoury, R., Saotome, R. y Sterman, G. Collinear and soft divergences in perturbative quantum gravity. *Physical Review D* **84,** 104040. https://doi.org/10.1103/physrevd.84.104040 (nov. de 2011).

37. Beneke, M. y Kirilin, G. Soft-collinear gravity. https://arxiv.org/abs/1207.4926 (2012).

38. Oxburgh, S. y White, C. D. BCJ duality and the double copy in the soft limit. *Journal of High Energy Physics* **2013.** https://doi.org/10.1007/jhep02(2013)127 (feb. de 2013).

39. Johansson, H. y Nohle, J. Conformal Gravity from Gauge Theory. https://arxiv.org/abs/1707.02965 (2017).

40. Borsten, L. D=6,N=(2,0) and N=(4,0) theories. *Physical Review D* **97.** https://doi.org/10.1103/physrevd.97.066014 (mar. de 2018).

41. Cheung, C., Shen, C.-H. y Wen, C. Unifying relations for scattering amplitudes. *Journal of High Energy Physics* **2018.** https://doi.org/10.1007/jhep02(2018)095 (feb. de 2018).

42. Tolotti, M. y Weinzierl, S. Construction of an effective Yang-Mills Lagrangian with manifest BCJ duality. *Journal of High Energy Physics* **2013.** https://doi.org/10.1007/jhep07(2013)111 (jul. de 2013).

43. Borsten, L. *et al.* Double Copy from Homotopy Algebras. *Fortschritte der Physik* **69,** 2100075. https://doi.org/10.1002/prop.202100075 (ago. de 2021).