CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa

Confrontación y Resignificación de la geometría escolar del profesorado de matemáticas de secundaria

TESIS

Que presenta

María Antonieta Rodríguez Ibarra

Para obtener el grado de

DOCTORA EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directora de la Tesis

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Ciudad de México ENERO 2023

Dedicatoria

A Julio, Elena y Julieta Tafolla, por su amor y motivación.

A mi mamá, por su inmensa ayuda, amor y sus enseñanzas en mi andar personal y académico.

A mi papá, por siempre creer en mí y darme ánimos.

A mis hermanas, fieles compañeras.

A mis abuelas, por todo su amor.

Al Guty, por todo su apoyo.

A toda mi familia, mi sostén siempre.

Agradecimientos

A la Dra. Gisela Montiel Espinosa por todo el apoyo brindado y la oportunidad de concluir este proyecto.

A mis sinodales por todas sus observaciones y el tiempo dedicado para la revisión: Dra. Rosa María Farfán Márquez, Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez, Dr. Gonzalo Zubieta Badillo y Dr. José Luis Soto Munguía, quien para mi, ha sido más que un maestro.

A los y las profesoras participantes de las diferentes etapas de esta experiencia.

A mis compañeras y compañeros del Seminario de grupo, en especial a Olivia S.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo brindado para la realización de esta investigación.

CVU 333896

Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav).

Agradezco a la Universidad de Sonora por el apoyo brindado para continuar preparándome.

Índice general

Resumen

Este es el reporte de una investigación doctoral, centrada en los elementos que emergen cuando se confronta la geometría escolar de docentes de matemáticas de secundaria, a partir de la generación de espacios construidos para promover que se discuta y se dialogue en torno a situaciones problema de geometría, diseñadas con ese propósito. El documento se organizó en seis capítulos que se describen muy generalmente a continuación.

En el Capítulo 1 se hace un estudio de la conformación de la escuela secundaria en México, ubicando en ella el eje curricular de nuestro interés *Forma, Espacio y Medida*. Aquí se incluyen los análisis de algunas pruebas estandarizadas aplicadas a estudiantes y a docentes, con preponderancia de los resultados en el eje señalado, y el de una experiencia con el seguimiento a una profesora en un seminario con base en problemas geométricos. Ambos análisis dieron pie al surgimiento de algunas ideas directrices para la investigación.

En el Capítulo 2 se delimita la investigación, atendiendo a tres rubros de interés. Por una parte, se analizaron los planteamientos teóricos con los que se ha abordado la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría; por otra, se analizaron estudios sobre el desarrollo del pensamiento geométrico con énfasis en lo visual y, finalmente, estudios sobre el papel del profesor en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Estos elementos condujeron a considerar la necesidad de formular preguntas de investigación dirigidas a conocer y/o identificar recursos epistemológicos y didácticos que profesores construyen o identifican ante situaciones de confrontación en el ámbito de la geometría escolar.

En el Capítulo 3 se presentan los elementos teóricos de la investigación, provenientes de la **Teoría Socioepistemológica** así como lo relativo a los **Saberes Docentes**.

El Capítulo 4 versa sobre los aspectos metodológicos generales de la investigación y en particular de los **Experimentos de Desarrollo Docente**. Se describen algunas de las adecuaciones que se realizaron en las fases metodológicas y sus respectivas acciones, ante la problemática originada por la contingencia surgida por la epidemia de COVID 19.

Una vez implementada la propuesta con profesores, en el Capítulo 5 se presenta el análisis de los datos obtenidos, identificando acciones y actividades del profesorado al realizar tareas geométricas, los recursos didácticos y epistemológicos que surgen al confrontar actividades enmarcadas en la geometría escolar y que son diferentes a los problemas escolares típicos y, por último, los Saberes Docentes que se ponen de manifiesto con estas experiencias.

Los resultados obtenidos, por ejemplo que las y los docentes recurren, al resolver problemas geométricos, al trazado de líneas auxiliares, analizan relaciones geométricas entre segmentos, identifican triángulos semejantes, validan resultados mediante construcciones geométricas, comparan construcciones geométricas, se condensan en el Capítulo 6, en el que se da

respuesta a las preguntas de investigación y se enuncian algunas reflexiones surgidas con relación a los hallazgos encontrados.

Abstract

This is the report of a doctoral research focused on the elements that emerge when confronting the school geometry of high school mathematics teachers, based on the generation of spaces built to promote discussion and dialogue around problem situations of geometry, designed for that purpose. This document is organized in six chapters described very generally below.

In Chapter 1 a study is made of the conformation of the secondary school in Mexico, locating in it the curricular axis of our interest: *Shape, Space and Measure*. In this chapter the analysis of some standardized tests applied to students and teachers is included, with a preponderance of the results in the indicated axis, it also includes the analysis of an experience with the follow-up of a teacher in a seminar based on geometric problems. Both analyses gave rise to some guiding ideas for research.

In Chapter 2 the research is delimited, focusing on three subjects of interest. On the one hand, the theoretical approaches with which the problem of teaching and learning geometry has been addressed were analyzed; on the other, studies on the development of geometric thinking with an emphasis on the visual were analyzed and finally, studies on the role of the teacher in the teaching and learning of geometry. These elements led to the need to formulate research questions aimed at knowing and/or identifying epistemological and didactic resources that teachers build or identify in confrontational situations in the field of school geometry.

In Chapter 3, the theoretical elements of the research are presented, coming from the **Socioepistemological Theory** as well as what is related to **Teacher Knowledge**.

Chapter 4 deals with the general methodological aspects of the research and of the **Teacher Development Experiments**. Some of the adjustments that were made in the methodological stages and their respective actions due to the contingency that arose from the COVID 19 epidemic are described.

Once the proposal has been implemented with teachers, Chapter 5 presents the analysis of the data obtained, identifying teachers' actions and activities when performing geometric tasks, the didactic and epistemological resources that arise when confronting activities framed in school geometry and that are different from typical school problems and finally, the **Teacher Knowledge** that is revealed with these experiences.

The results obtained, for example, that teachers resort to drawing auxiliary lines when solving geometric problems, analyze geometric relationships between segments, identify similar triangles, validate results through geometric constructions, compare geometric constructions,

are condensed in Chapter 6, in which the research questions are answered and some reflections that arise in relation to the findings are stated.

Introducción

Qué enseñar, para qué enseñar y cómo enseñar han sido cuestionamientos y preocupaciones constantes de la institución llamada escuela. Estas preguntas también toman sentido cuando son expresadas para el caso del conocimiento matemático, y de la misma manera continúan siendo válidas si son reformuladas para el caso del conocimiento geométrico.

En este sentido, una de las temáticas presente en las propuestas curriculares para el nivel básico en México, es el estudio de la geometría, incluido en el Eje denominado "Forma, espacio y medida", el cual tiene entre sus propósitos desarrollar en los estudiantes el pensamiento geométrico. Asumiendo que el profesorado es quien concreta y da vida a lo que se encuentra plasmado en los documentos curriculares, nos preguntamos ¿qué deben saber de Geometría los profesores de matemáticas de secundaria y cuáles deben ser sus prácticas en las aulas? ¿De qué manera podrá incidirse en el desarrollo del pensamiento geométrico de profesores en ejercicio? ¿Cuáles son los saberes geométricos y cuáles los saberes docentes que debe desarrollar un profesor, de tal manera que sus prácticas logren incidir en los procesos de aprendizaje de sus estudiantes?

Se considera que dada la diversidad de factores que afecta su práctica profesional, el profesorado no ha logrado modificar el enfoque de enseñanza basado en el dominio de contenidos, principalmente referido a definiciones y algoritmos. La hipótesis apunta hacia la falta de experiencias que permitan al propio profesorado contrastar este enfoque con uno que promueva el desarrollo del pensamiento geométrico.

En esa dirección, se planificó, se desarrolló, se analizaron resultados y se valoró un proyecto de investigación que se interesó por conocer qué sucede y cuáles son los elementos que emergen al ubicar a profesores en un contexto de experimentación en donde, mediante la discusión y el diálogo, se confrontan sus conocimientos geométricos escolares cuando resuelven situaciones problema diseñadas con ese propósito. Todo ello con la finalidad de promover que esa confrontación de conocimientos genere una resignificación y posterior transformación de ese conocimiento en saber. Dichas situaciones problema involucran la realización de tareas geométricas diferentes a las típicamente escolares.

Dicho estudio, en cada una de sus etapas, fue soportado teóricamente por los siguientes elementos de la **Teoría Socioepistemológica:** Modelo de anidación de prácticas (en sus dos primeros niveles); confrontación y resignificación; cambio en la relación del docente con la matemática escolar y pensamiento matemático, los cuales se describiran a detalle en un apartado posterior. Además, se incluyó el constructo **Saberes Docentes.** Fue orientado metodológicamente mediante los **Experimentos de Desarrollo Docente.**

Capítulo 1. Problemática

Con la intención de determinar el punto de partida de esta investigación, se hizo una revisión de los aspectos generales de la escuela secundaria en México, centrándose en el campo formativo de interés: *Pensamiento Matemático* y en particular el eje *Forma, Espacio y Medida*, que es donde se concentran los contenidos geométricos. Esta revisión dio pie a conocer el contexto donde se desenvuelven las actividades del profesorado de matemáticas. Además, se revisaron algunos libros de texto oficiales para conocer cómo se propone el estudio de algunos contenidos geométricos. De las revisiones anteriores fue posible identificar el descuido del trabajo propiamente geométrico.

En la sección 1.2, se reporta la observación del trabajo de una profesora de matemáticas durante su participación en una experiencia de desarrollo docente, lo cual permitió reconocer las condiciones bajo las cuales el profesorado puede realizar modificaciones a su práctica docente. A partir de lo expuesto en el Capítulo se consideró apropiada la configuración de espacios de diálogo y trabajo con el profesorado de matemáticas en torno a lo geométrico a partir de reconocer la falta de éstos.

1.1. La escuela secundaria en México

El último nivel de la Escuela Básica en México es la secundaria, la cual tiene una duración de tres años y la cursan alumnos de entre 12 y 15 años de edad aproximadamente. Existen diferentes modalidades de educación secundaria: general, técnica y telesecundaria. En las tres modalidades, el rasgo del perfil de egreso referente al pensamiento matemático es: “Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para modelar y analizar situaciones. Valora las cualidades del pensamiento matemático.” (SEP 2017, p.27)

El enfoque pedagógico declarado en el plan y programas de estudios menciona que la resolución de problemas “es tanto una meta de aprendizaje como un medio para aprender contenidos matemáticos y fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio.” (SEP 2017, p.163)

Para el estudio del pensamiento matemático en la educación básica (preescolar, primaria y secundaria), se ha convenido dividir los contenidos matemáticos en tres ejes temáticos: (1) Número, álgebra y Variación, (2) Forma Espacio y Medida, y (3) Análisis de datos.

Forma, Espacio y Medida

Es en este eje temático en donde se encuentran concentrados los contenidos geométricos que los y las alumnos de secundaria deben aprender y el profesorado es responsable de enseñar. En la Tabla 1 se muestran los aprendizajes esperados por grado académico

Eje: Forma, Espacio y Medida	Aprendizajes esperados		
	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
Figuras y Cuerpos geométricos	Analiza la existencia y unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros, y determina y usa criterios de congruencia de triángulos.	Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.	Construye polígonos semejantes. Determina y usa criterios de semejanza de triángulos. Resuelve problemas utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente
Magnitudes y medidas	Calcula el perímetro de polígonos y del círculo, y áreas de triángulos y cuadriláteros desarrollando y aplicando fórmulas. Calcula el volumen de prismas rectos cuya base sea un triángulo o un cuadrilátero, desarrollando y aplicando fórmulas.	Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra). Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos. Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.	Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.

Tabla 1. Aprendizajes esperados del eje Forma, Espacio y Medida para los tres grados de la secundaria. Elaboración propia con base en SEP (2017)

De los diez aprendizajes esperados en la Tabla 1, declarados para este eje, se puede apreciar que cuatro de ellos están centrados en la parte algorítmica promoviendo que el estudiantado realice cálculos a partir de la aplicación de una fórmula, por lo que un profesor o profesora que busque que sus estudiantes alcancen esos aprendizajes, tendrá que dedicar gran parte del tiempo de clase a ello, dejando limitadas oportunidades para promover otros aspectos vinculados al estudio de la forma y el espacio.

Con elementos vertidos en las secciones previas, en esta investigación se considera que la matemática escolar tiende a priorizar los procesos aritméticos, algebraicos y analíticos (según el nivel educativo), dejando de lado aquellos vinculados propiamente con la forma, espacio y medida; provocando, además, que los diagramas, mapas, gráficos o figuras se conviertan, en el mejor de los casos, en representaciones ilustrativas de los conceptos matemáticos. Es decir, la matemática escolar no da la oportunidad de desarrollar el pensamiento geométrico porque está centrada en el dominio de objetos, cuya institucionalización, es predominantemente algebraica.

1.1.1. **Evaluaciones nacionales**

Como parte de la preocupación de las instituciones educativas de elevar sus estándares de calidad y de mejorar el aprovechamiento de sus estudiantes, se han diseñado pruebas estandarizadas que se aplican de manera periódica a estudiantes de distintos grados escolares. Los resultados de las diversas evaluaciones aplicadas a nuestro sistema educativo muestran una realidad muy distinta a la deseada o esperada, tanto de nuestros estudiantes como de los profesores o aspirantes a serlo. A continuación, se muestran los resultados para el nivel básico.

PLANEA (Plan Nacional para las Evaluaciones de los Aprendizajes), fue una prueba anual diseñada y aplicada por el INEE a partir del 2015, que tuvo como propósito general conocer la medida en que los estudiantes logran el dominio de un conjunto de aprendizajes clave en diferentes momentos de la educación obligatoria. Planea evaluó Aprendizajes clave en Lenguaje y Comunicación, y Matemáticas. Los resultados de la prueba se expresaban de dos maneras:

a. En una escala de 200 a 800 puntos.

b. En cuatro niveles de logros dependiendo de lo que los alumnos eran capaces de hacer, los cuales se muestran en la Tabla 1, para el caso de Matemáticas. En el nivel I se ubican estudiantes que obtienen puntuaciones que representan un logro *insuficiente* de los aprendizajes clave del currículum, lo que refleja carencias fundamentales que dificultan el aprendizaje futuro. En el nivel II, se ubican los estudiantes que tienen un logro apenas *indispensable* de los aprendizajes clave del currículo. En el nivel III, los estudiantes tienen un logro *satisfactorio*. En el nivel IV, aquellos que tienen un logro *sobresaliente* de los aprendizajes clave del currículo.

A continuación, mostramos el comparativo del porcentaje nacional, de estudiantes de tercero de secundaria, por nivel de logro educativo en 2015 y 2017.

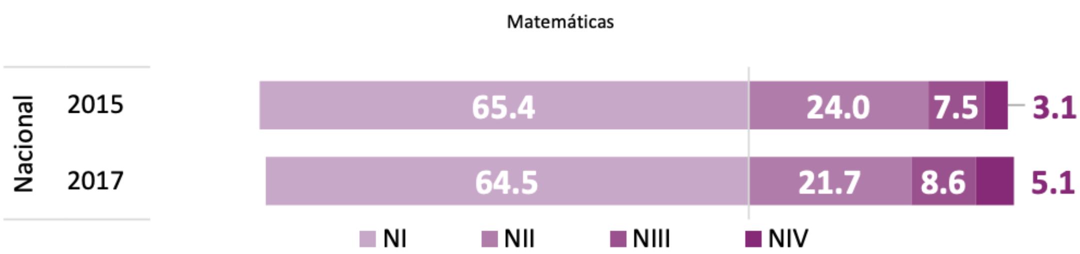


Tabla 2. Porcentaje de estudiantes por niveles de logro en PLANEA, tercero de secundaria en Matemáticas, 2015-2017. Fuente: *https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/08/PLANEA_Resultados-Secundaria-2017.pdf*

Como se puede apreciar en la Tabla 2, tanto en el 2015 como en el 2017, más del 60% de los estudiantes evaluados, se ubican en el nivel I. Si bien los alumnos están en condiciones de resolver problemas que implican estrategias de conteo básicas (visuales), o que suponían comparar o realizar cálculos con números naturales, no lograron calcular perímetros de círculos ni calcular áreas de figuras compuestas, a pesar de que estas temáticas sí están contenidas en los aprendizajes propuestos y que tienen que ver con el manejo de cálculos y algoritmos; este último hecho sugiere la existencia de problemas que requieren el manejo apropiado de conocimiento geométrico.

En PLANEA 2017, la evaluación estuvo conformada por 141 reactivos, de los cuales 44 corresponden al eje Forma, Espacio y Medida, que es donde se ubica el interés de esta investigación. El 86 % de los estudiantes se ubican en los niveles insuficiente y apenas indispensable (I y II). En la Tabla 3, se muestran los niveles de logro referidos a este eje.

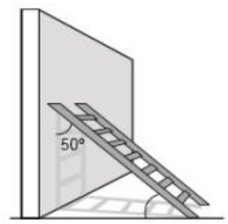
Forma, espacio y medida			
Nivel I	**Nivel II**	**Nivel III**	**Nivel IV**
Los alumnos:	Los alumnos:	Los alumnos:	Los alumnos:
• Resuelven problemas que implican comparar el volumen de cilindros de manera visual.	• Reconocen las relaciones de los ángulos que se forman entre paralelas cortadas por una transversal, el desarrollo plano de cilindros y las secciones que se generan al cortar un cono. • Calculan el volumen de prismas rectos.	• Resuelven problemas que implican el teorema de Pitágoras, propiedades de los ángulos en círculos o triángulos y relaciones de semejanza de triángulos. • Utilizan la imaginación espacial para reconocer el desarrollo plano de conos y la generación de sólidos de revolución y calculan el área de figuras compuestas.	• Resuelven problemas de transformación de figuras, propiedades de los ángulos de polígonos, mediatrices, bisectrices y razones trigonométricas. • Calculan el área de sectores circulares y coronas, así como el volumen de cilindros y conos.

Tabla 3. Niveles de logro de PLANEA tercero de secundaria 2017 en Matemáticas para Forma, Espacio y Medida. Fuente: https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/08/PLANEA_Resultados-Secundaria-2017.pdf

Ilustrando el desempeño de los estudiantes en los reactivos del eje mencionado, en la Figura 1 se presenta uno de los reactivos de la prueba PLANEA 2017, el cual corresponde al nivel de logro 3, de acuerdo a lo descrito en la Tabla 3. Únicamente 38% de los alumnos examinados resolvió correctamente el reactivo, eligiendo la opción D. Para resolverlo es necesario que los estudiantes conozcan que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º; que un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90º y que realicen operaciones básicas. El bajo porcentaje de respuestas correctas de este reactivo es solo una muestra de la necesidad de fortalecer los contenidos geométricos, en particular, aquellos relacionados con las propiedades y relaciones de los triángulos.

Eje	Forma, espacio y medida.
Tema	Figuras y cuerpos.
Aprendizaje esperado	Justifica la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo o polígono y utiliza esta propiedad en la resolución de problemas.
Especificación del reactivo	Resolver problemas que impliquen el cálculo de las relaciones de los ángulos interiores de los triángulos o paralelogramos.

La imagen muestra una escalera recargada en una pared y junto con el piso forman un triángulo rectángulo.



A) 130°

B) 90°

C) 50°

D) 40°

¿Cuánto mide el ángulo formado por la escalera y el piso?

Figura 1. Reactivo correspondiente al eje Forma Espacio y Medida de la prueba PLANEA 2017. Fuente: [*https://www.mejoredu.gob.mx/wp-content/uploads/2019/08/P1D321.pdf*](https://www.mejoredu.gob.mx/wp-content/uploads/2019/08/P1D321.pdf)

Evaluación del Desempeño Docente

Reconociendo el importante papel que desempeña el profesor en el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, se han creado mecanismos que ayuden a regular el ingreso, la promoción, permanencia y reconocimiento de éstos en el sistema educativo, entendiéndose cada uno como los define la Coordinación Nacional del Servicio Profesional Docente (CNSPD, 2016):

- **Ingreso:** proceso de acceso formal al Servicio Profesional Docente.
- **Promoción:** acceso a una categoría o nivel docente superior al que se tiene, sin que ello implique necesariamente cambio de funciones a un puesto o función de mayor responsabilidad y nivel de ingresos.
- **Reconocimiento:** distinciones, apoyos y opciones de desarrollo profesional que se otorgan al personal que destaque en el desempeño de sus funciones.
- **Permanencia:** continuidad en el servicio educativo, con pleno respecto a derechos constitucionales.

Para el proceso de promoción, los aspirantes a ingresar al Servicio Profesional Docente (SPD), presentan una serie de evaluaciones que consideran diferentes aspectos del perfil de ingreso tales como conocimientos disciplinares y conocimientos relacionados a los planes y programas de estudio que se desarrollan en la asignatura que concursan.

Para el caso de Matemáticas, los resultados nacionales obtenidos por los aspirantes a ingreso al SPD, se muestran en la Tabla 4

Tipo de evaluación	Grupo de desempeño												
	A		B		C		D		Idóneo		No idóneo		Total
Matemáticas Docente	426	10.1 %	649	15.4 %	1519	36.0 %	0	0 %	2594	61.4 %	1631	38.6 %	**4225**

Tabla 4. Número y porcentaje de sustentantes por grupo de desempeño en el concurso de oposición para el ingreso a la educación básica en el área de Matemáticas, ciclo escolar 2017-2018. Adaptado de http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/portal-docente-2014-2018/content/ba/docs/2017/ingreso/estadisticas/cuadro2.gif

Los posibles resultados de los aspirantes en el proceso de evaluación son: **Resultado idóneo,** los aspirantes con estos resultados conforman los grupos de desempeño e ingresan a las listas de prelación para el ingreso; o bien, **Resultado no idóneo**, los aspirantes con estos resultados no ingresan a las listas de prelación y no podrán ser considerados para el ingreso al SPD. Para el ciclo 2017-2018, de los 4225 aspirantes en matemáticas, el 61.4 % se consideró como idóneo para desempeñarse como docente en el nivel básico.

Respecto a los grupos de desempeño mostrados en la Tabla 4, estos están conformados de acuerdo a los siguientes criterios:

Criterios para formar parte de un grupo de desempeño	
Grupos de desempeño	**Descripción**
A	En los tres exámenes obtuvo el nivel de desempeño III
B	En dos exámenes obtuvo el nivel de desempeño III y en el otro nivel de desempeño II
C	En un examen obtuvo el nivel de desempeño III y en los otros dos el nivel de desempeño II
D	En los tres exámenes obtuvo el nivel de desempeño II

Tabla 5. Criterios para formar parte de un grupo de desempeño en el concurso oposición para el ingreso a la educación básica. Disponible en http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/portal-docente-2014-2018/ba/ingreso/criterios_basicos/

Los niveles a los que hace mención la Tabla 5, refieren a lo que un aspirante es capaz de hacer, en términos generales:

- Nivel I significa un dominio insuficiente de los conocimientos y habilidades que se consideran indispensables para un adecuado desempeño docente;
- Nivel II, el aspirante muestra un dominio suficiente y organizado de los conocimientos y habilidades que se juzgan indispensables para un adecuado desempeño docente,
- Nivel III, además de mostrar un dominio suficiente y organizado de los conocimientos y habilidades contemplados en el instrumento, demuestra una amplia capacidad para utilizarlos en una diversidad de situaciones didácticas.

De acuerdo a los datos mostrados anteriormente, sólo el 10 % de los aspirantes con resultado idóneo, obtuvo Nivel III de desempeño en los tres exámenes que conforman la evaluación.

Cabe señalar que de acuerdo a lo que establece la convocatoria del SPD, para que un aspirante pueda presentar la evaluación en Matemáticas, tiene que tener grado de licenciatura en alguna de las carreras que consideran afines al área, las cuales son: Actuaría, Aeronáutica, Civil, Economía, Educación Media en Físico-Matemáticas, Educación Media en Matemáticas, Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas, Eléctrica y Electrónica, Enseñanza de las Matemáticas, Estadística, Finanzas, Física, Geofísica, Industrial, Matemáticas Aplicadas, Matemáticas Educativas, Mecánica, Mecatrónica, Robótica o Sistemas Computacionales. De aquí, que los profesores de matemáticas de secundaria cuentan con una formación profesional diversa.

Con relación a los profesores de matemáticas en servicio que tomaron la evaluación de permanencia, en el ciclo escolar 2017-2018, la CNSPD pone a disposición los siguientes resultados:

	Presentes	Destacado		Bueno		Suficiente		Insuficiente	
	Número	**Número**	**%**	**Número**	**%**	**Número**	**%**	**Número**	**%**
Docente Educación Secundaria Técnica Matemáticas	15	0	0%	7	41.2%	4	23.5	4	23.55%
Docente Educación Secundaria General Matemáticas	25	0	0%	2	6.9%	11	37.9	12	41.45%

Tabla 6. Resultados por tipo de evaluación y grupo de desempeño del personal docente en Educación Básica 3ª oportunidad. Adaptado de CNSNP(2017)

Respecto a la evaluación para la promoción, no contamos con datos de los resultados de los profesores, en la Tabla 7 se muestran las implicaciones dentro del servicio profesional docente dependiendo del resultado que los maestros hayan tenido.

Evaluación del Desempeño

Resultados	Implicaciones en el SPD
No suficiente	Regularización por tutoría y formación continua
Suficiente	Permanencia por 4 años y participación en programas de desarrollo profesional.
Destacado	Participa en el Programa de Promoción en la Función
Incremento	Ascenso en el Programa de Promoción en la Función

Tabla 7. Implicaciones en SPD de acuerdo con el resultado de la evaluación para la promoción. Fuente:http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/portal-docente-2014-2018/content/general/docs/VBReglamento_final_2015.pdf

Cabe mencionar que, en los resultados de las evaluaciones docentes no se proporcionan de manera detallada qué contenidos matemáticos y didácticos se evalúan y la intención de mostrar aquí este tipo de datos es la de resaltar áreas de oportunidad para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Reflexiones acerca de los resultados de las evaluaciones

Es evidente que, en las pruebas estandarizadas reportadas anteriormente, los resultados poco favorecedores ponen en la mesa de discusión la preparación de estudiantes y docentes, al menos en el área de Matemáticas. Además, han generado, al menos a nivel social, una serie de presiones y tensiones dirigidas hacia el profesorado mexicano; pues con frecuencia se les hace responsables de lo que algunos califican como un “desastre en el ámbito educativo”.

Sin embargo, gracias a la investigación científica se han construido perspectivas alternativas; dentro de las cuales hemos elegido la que reconoce al discurso Matemático Escolar (dME) como lo que orienta, prioritariamente, las decisiones didácticas en la práctica docente, es decir, lo que lleva a los docentes a repetir las mismas clases aún con escasos logros en el aprendizaje de sus estudiantes.

Desde el planteamiento particular de la Teoría Socioepistemología (TS) se sostiene que:

> Al momento de introducir el *saber* al aula se producen *discursos* que facilitan la comunicación de los conceptos y procedimientos matemáticos y en consecuencia el saber se *despersonaliza y descontextualiza*. Este proceso permite la formación de consensos sobre qué y cómo enseñar, que se alcanzan a costa de una pérdida *en el sentido y significado* original del saber, reduciéndolo a temas aislados, cuidadosamente secuenciados denominados “contenidos” o “unidades temáticas” de una asignatura. Estos discursos, que validan la introducción del saber matemático al sistema educativo, y que legitiman un nuevo sistema de razón, reciben el nombre genérico de *discurso Matemático Escolar* y son vistos como medio para lograr una participación consensuada en el ámbito didáctico. (Cantoral, 2013, p.26)

En este sentido, Montiel (2010) comenta que para poder implementar un diseño innovador en el aula de matemáticas, producto de la investigación, debe considerarse a la escuela como un escenario que impone ciertas condiciones en su funcionamiento y al profesor como la figura en quien se deposita la mayor responsabilidad de la actividad didáctica escolarizada. Por lo que introducir propuestas didácticas que rediseñen el dME no puede limitarse a secuencias que el profesorado deba de seguir como algortimo. Al contrario, debe de haber un reconocimiento y valoración de todo aquello que fundamenta la propuesta.

Lo anterior, demanda de un trabajo cercano con el profesorado, que les permita conocer y valorar que pueden existir propuestas, distintas a las marcadas por el dME, que son suceptibles de llevar a su salón de clases.

1.1.2. Geometría escolar: abandono del trabajo geométrico

La geometría ha formado parte siempre de la matemática escolar, sin embargo ha sufrido, al igual que otros contenidos curriculares, modificaciones a lo largo del tiempo. En este sentido se señala, por ejemplo, que:

> …se ha priorizado la enseñanza de la geometría analítica, haciendo uso de herramientas algebraicas y dejando de lado la visualización de objetos geométricos y sus propiedades y es este aporte visual lo que añade a la geometría un factor que no se debe descuidar sobre todo en la resolución de problemas. (Mammana et al, 1998, p. 8).

Estos autores también mencionan que la enseñanza de la geometría de hoy oscila entre el aspecto visual, computacional, algebraico y sus aplicaciones, y son *todas* estas maneras de ver a la geometría las que debieran tener un impacto en el aula en los distintos niveles escolares. Sin embargo, en muchos salones de clase las construcciones con regla y compás han desaparecido, a pesar de que se reconoce que la construcción geométrica abona a la comprensión y significado de nociones geométricas (Sinclair y Bruce, 2015).

Por ejemplo, en la Figura 2 se muestra un fragmento de un libro oficial de texto de Matemáticas 3 de secundaria. La sección está destinada a resolver problemas geométricos, sin embargo, éstos se limitan a encontrar el valor faltante en una figura dada. En la Figura 3, se muestra un problema geométrico que aparece en la guía del maestro de Matemáticas 3. En donde también la resolución de los problemas geométricos se basa principalmente en encontrar valores faltantes para figuras dadas.

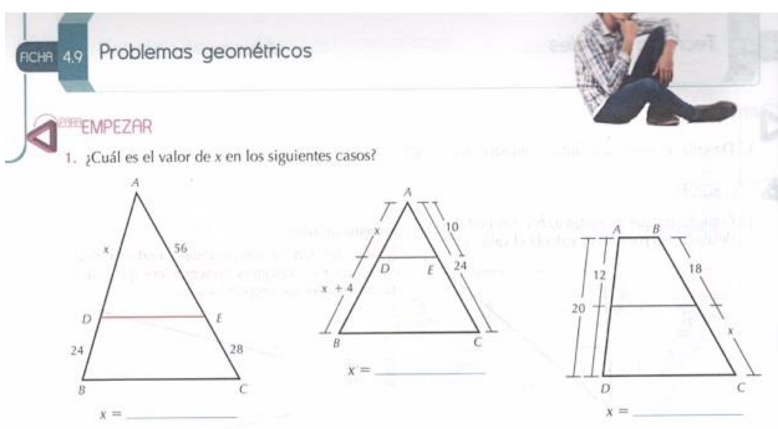


Figura 2. Ejemplo de problemas geométricos propuestos en el libro de texto Matemáticas 3. Las Matemáticas para resolver problemas cotidianos. Pág. 49. Ed. Esfinge

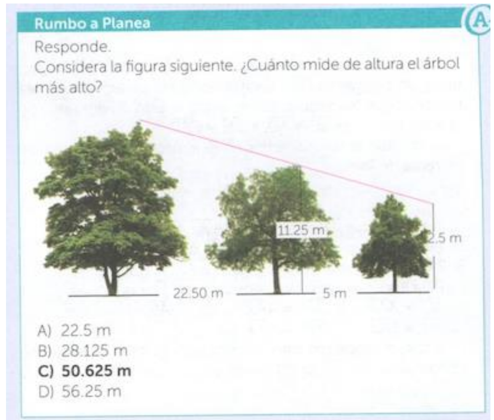


Figura 3. Ejemplo de problema geométrico propuestos en el libro de texto Matemáticas 3. Guía para el maestro. Pág. 124. Ed. Castillo.

Emplear a las figuras geométricas como imágenes fijas donde no se dé la oportunidad de discutir acerca de su construcción o de sus propiedades geométricas, puede provocar que se presenten dificultades como las reportadas por diversos autores (Jaime et al, 1992; Clements y Battista, 1992; Barrantes y Zapata, 20015) referente al uso de figuras prototípicas, puesto que se toma la posición de una figura como parte de la definición, por lo que en muchos casos, cuando las figuras aparecen en una posición distinta a la prototipo no se es capaz de reconocerle. Barrentes y Zapata (2015) mencionan al respecto que: "libros de textos presentan figuras geométricas mediante un único dibujo o un número tan pequeños de ellos que el alumno construye esquemas conceptuales estándar sobre ellas (cuadriláteros, prismas, etc.) que suelen alejarse de la verdadera definición del concepto" (p. 57).

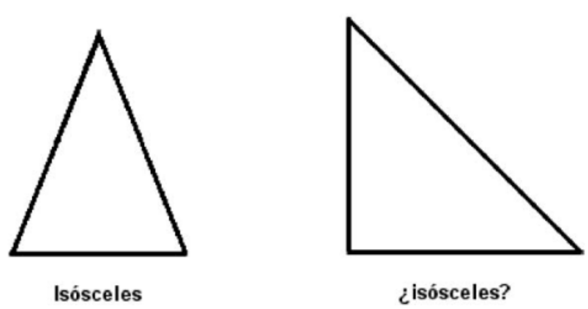


Figura 4. Ejemplo de una dificultad asociada al uso de figuras prototípicas. Reportada por Barrentes y Zapata (2015, p.61)

Si bien, desde los trabajos de investigación de Duval (2005) se habla de la importancia del proceso de construcción en el aprendizaje de la geometría, poca investigación se ha enfocado en este elemento (Sinclair, Cirillo y de Villiers, 2017) y, sobre todo, poco impacto ha tenido en la enseñanza. Aunque, esto ha cambiado ligeramente gracias a los Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) como mencionan Montiel y Scholz (2021), en relación a la enseñanza de la trigonometría:

> … el trabajo geométrico demanda más tiempo para la actividad matemática y ésta puede ser una de las razones por las que el enfoque aritmético o algebraico domine en la escuela para enseñar el contenido trigonométrico. Al respecto, los ambientes de geometría dinámica aportan variables prácticas didácticas que pueden permitir reducir los tiempos y ampliar las exploraciones que realiza un estudiante en procesos de construcción geométrica. (p. 17)

Considerando tanto el valor pragmático como el valor epistémico de cada tecnología (AGD, lápiz-papel, manipulables, entre otras), la creación de un ecosistema híbrido (en el sentido de Rubio-Pizzorno y Montiel, 2020) puede favorecer la centración en el trabajo geométrico, donde se promuevan, además de la construcción de conocimientos geométricos, procesos visuales y espaciales, así como argumentaciones y validaciones; todos ellos fundamentales para el desarrollo del pensamiento geométrico.

1.2. Una experiencia de trabajo con profesores de educación básica: Seminario de integración digital a la práctica docente

Con la intención de tener un acercamiento con profesores de matemáticas de nivel básico al trabajar en una experiencia de desarrollo profesional en geometría, se observó y analizó el desempeño de una profesora a lo largo de un seminario que buscaba la integración digital a la práctica docente. Dado que interesaba observar si la profesora construía nuevos significados durante la experiencia y si se producían modificaciones en sus prácticas habituales, se consideró que, aunque la maestra trabajó con contenidos de sexto grado de primaria, dado el enfoque y la tradición escolar del sistema educativo mexicano durante toda la educación básica, lo realizado por ella proporcionaba evidencias iniciales para perfilar posibles preguntas de investigación. La observación se realizó a partir de las grabaciones de audio y video derivadas de la investigación de Rubio-Pizzorno (2018), también se tuvo acceso a los productos que la maestra elaboró durante el seminario. A continuación, se presenta una síntesis donde se expone la estructura, propósitos del seminario y en particular el trabajo realizado por una de sus integrantes.

En el seminario participaron cuatro profesores de matemáticas del nivel básico, el objetivo era integrar la tecnología digital a la práctica profesional a través de la planeación y diseño de actividades geométricas. La experiencia se dividió en cinco etapas:

1. Introducción: se acordaron las fechas de trabajo, así como la estructura del seminario y se definió el contenido matemático que se abordaría en el diseño de las actividades.
2. Apresto tecnológico: se profundizó en el uso de algunas herramientas tecnológicas que se podrían utilizar para el diseño de las actividades.
3. Confrontación: se discutieron algunos aspectos teóricos para apoyar el diseño tales como, Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, así como algunas investigaciones en Educación Matemática que integran tecnología, en particular, geometría dinámica para confrontar significados.
4. Diseño de una actividad geométrica: se integró la experiencia docente del profesor, los resultados de investigación en matemática educativa, así como el conocimiento y la experiencia de los docentes para diseñar tareas en ambientes de geometría dinámica.
5. Retroalimentación: una vez diseñadas las tareas, se pusieron a discusión de manera grupal.

La profesora Abigail

Una de los cuatro profesores participantes del seminario, fue Abigail, la cual estaba impartiendo sexto grado de primaria al momento de participar. La profesora decidió trabajar con contenidos del Bloque V de Matemáticas 6, del eje Forma, Espacio y Medida: Conservación de área, marcado en el programa oficial de la Secretaría de Educación Pública vigente. Si bien es cierto que la profesora no se encontraba laborando en secundaria, en estos momentos el interés estaba puesto en identificar si a partir de la participación en un escenario de desarrollo docente, la profesora podía construir significados geométricos, no necesariamente escolares. No se tuvo la intención de extrapolar los resultados de esta experiencia hacia docentes de secundaria sino, como se señaló antes, contar con algunas evidencias iniciales de la influencia que puede llegar a tener un trabajo con las características previamente descritas.

Los recursos institucionales con los que la maestra contó fueron:

- El libro de texto: Desafios Matemáticos 6
- El programa oficial de sexto grado de matemáticas
- El modelo Educativo 2016

A continuación, se presentan el objetivo institucional, así como la primera y última versión del objetivo que elaboró Abigail. Cabe destacar que, entre estas versiones, la profesora vivió un proceso de negociación entre lo que marca la institución, su experiencia docente y los resultados de las investigaciones analizadas.

Objetivo Institucional	Armado y desarmado de figuras en otras diferentes. Análisis y comparación del área y el perímetro de la figura original, y la que se obtuvo.
Objetivo Abigail (primera versión)	Que los alumnos identifiquen que el perímetro de una figura puede cambiar cuando se descompone en otras, pero el área se conserva, esto con la ayuda del tangram y recurso GeoGebra.
Objetivo Abigail (última versión)	Reconocer la relación de congruencia (igualdad) entre perímetro y área para identificar que el perímetro de una figura puede cambiar cuando se descompone en otras figuras, pero el área se conserva, mediante la exploración con polígonos que tienen igual área.

Tabla 8: Redacción de los objetivos a lo largo del seminario

Podemos apreciar que en la redacción de la primera versión del objetivo, se destaca el papel de los recursos a utilizar, tanto que forman parte del mismo enunciado; mientras que en la versión final no lo hace de manera explícita, esto podría deberse a que la profesora los considera como parte natural de la actividad matemática.

Aunque la profesora, a partir de las reflexiones, producto de lo discutido y analizado en el Seminario hace modificaciones en el objetivo de su diseño y por ende en las actividades que propone a los estudiantes, es importante señalar que la redacción de la versión final de este objetivo es confusa ya que declara una relación de congruencia (igualdad) entre el perímetro y área. Aunque en el discurso de la profesora se hace evidente que no está considerando que el perímetro y área de un figura son iguales (relación de congruencia como ella la llama), es relevante destacar que en el objetivo escrito no logra concretar esas ideas.

Otro aspecto importante a señalar es que, durante la experiencia, la profesora reconoció que los programas oficiales, centran su atención en el dominio de fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas, dejando de lado el papel de la medición en su conceptualización, lo cual ella intenta promover en su diseño.

Diseño de las tareas geométricas

Dentro de la etapa 5: retroalimentación, se vivieron varios procesos de profundización y trabajo con especialistas en el área, lo cual permitió también que los diseños propuestos de manera inicial fueran transformándose hasta contar con una versión final que es la que se presentaría en esta etapa. Para el caso del diseño de la profesora Abigail, se pudo observar cómo su actividad se transformó, partiendo de tareas muy relacionadas a lo que el libro oficial "Desafíos Matemáticos" propone. A continuación, hacemos la comparación de estas dos actividades:

Propuesta de actividad del libro oficial para trabajar el contenido matemático seleccionado

Figura 5. Página 150 del libro de texto de sexto grado: Desafíos Matemáticos

Diseño inicial de la profesora Abigail

Actividad 1: Conocer el tangram

Actividad 2: Formar un cuadrado con el tangram

Dentro de esta actividad se pregunta:

- ¿Cómo identificamos el perímetro y área de una figura?
- ¿Qué podemos hacer para calcular el perímetro y área de una figura?
- ¿Qué área y perímetro ocupa la figura?

Cuestionamientos que la profesora relaciona con los conceptos, la medición y el cálculo del área y perímetro de una figura. Después de estas tareas se procede a escribir el concepto de área y perímetro, cómo se mide y las fórmulas necesarias para finalmente resolver la actividad del libro.

Diseño final de la profesora Abigail

El diseño se dividió en seis tareas, las cuales se describen a continuación:

Tarea 1: *Reforzamiento*. Se solicita a los alumnos que señalen el perímetro y área en diferentes figuras planas, también se les hacen algunos cuestionamientos para indagar la concepción que tienen de estos dos conceptos.

Tarea 2: *Comparando perímetro y área*. Se comparan perímetro y área de figuras planas. Considerando en todos los casos figuras con la misma área pero diferente perímetro y forma, esta etapa es sólo de exploración, no se confrontan las respuestas.

Tarea 3: *Reconociendo el tangram*. Los alumnos harán distintas configuraciones figurales utilizando todas las piezas del tangram

Tarea 4: *Identificación del área que ocupan las figuras del Tangram*. Se les solicita a los alumnos que utilizando todas las piezas del tangram formen un cuadrado para después centrar la discusión acerca del área ocupada por el tangram. Para obtenerla usarán regla, para que todos manejen una misma unidad de medida.

Tarea 5: *Armado de figuras con el tangram*. Los alumnos tienen que formar dos figuras distintas utilizando todas las piezas del tangram. Por ejemplo, un pato o un perro, como muestra la Figura 6:

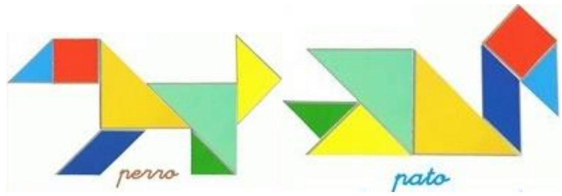


Figura 6. Ejemplo de figuras formadas con tangram.

Se cuestiona acerca de si existe diferencia entre el perímetro y el área de las dos figuras. Se pedirá argumentar su respuesta y validarla usando la medición o el cálculo.

Tarea 6: ¡*A trabajar con GeoGebra*! Se formarán figuras con ayuda de GeoGebra para calcular su área y perímetro y así concluir sobre la preservación del área aunque el perímetro se modifique.

Reflexiones a partir de la experiencia de la profesora Abigail

De la observación del trabajo de la profesora durante su participación en el Seminario, se destaca lo enriquecedor que resultó el proceso de negociación que, de acuerdo con Rubio-Pizzorno (2018, p.136), se configura un proceso negociación para la elaboración de diseños didácticos entre tres polos: experiencia docente, resultados de investigación en educación matemática y atención al ambiente del diseño. Lo cual se puede apreciar en las modificaciones que hizo la profesora a su diseño: de la versión inicial a la final, así como en su discurso al momento de presentarlo.

Se observó cómo Abigail empezó a diversificar y a enriquecer el tipo de cuestionamientos y acciones que solicitaba a los estudiantes. También empezó a incorporar distintos aspectos como: pensar en su propio conocimiento, valorar lo que hacen sus estudiantes, cuestionar la manera en cómo se aborda determinado saber en el libro de texto así como realizar las modificaciones que consideraba pertinentes. A lo largo del trabajo desarrollado por la Abigail, puede reconocerse que es posible que los profesores realicen modificaciones a su práctica habitual.

El fenómeno que se reconoce en esta experiencia, es que cuando los profesores van al aula se enfrentan a variables como el tiempo o planeaciones rígidas, que hacen que se sinteticen procesos y contenidos, y es aquí donde se absorben, por ejemplo, los procesos de construcción geométrica, de aquí que nos planteemos interrogantes como la siguiente: **¿cómo podemos lograr que el profesor incorpore los aspectos manifestados en la experiencia de la profesora Abigail en su práctica docente?**

1.3. Reflexiones finales del Capítulo

Lundsgard (1998) reflexiona acerca de la evolución que ha tenido la enseñanza de la geometría y menciona que, por ejemplo, hace 75 años no se tenían los problemas que se tienen actualmente. Conforme las sociedades del conocimiento han ido progresando se cuenta con más contenidos que se pueden incorporar a las aulas, diferentes enfoques didácticos, nuevas maneras de enseñar, se advierte sobre los distintos tipos de aprendizajes, la incursión de las tecnologías tales como los softwares de geometría dinámica y diferentes aspectos que antes no se consideraban en una enseñanza tradicional.

Dado este panorama, se identificó un escenario de oportunidad al cambiar la perspectiva de investigación que atendía sólo la forma en cómo enseñan los profesores y cómo aprenden los estudiantes, hacia atender el qué enseñamos y qué aprendemos, cuando abordamos los contenidos geométricos. Para ir más allá de la descripción del estado actual, se plantea hacerlo modificando eso que tradicionalmente se enseña, en un escenario de trabajo con profesores de matemáticas de secundaria en servicio; poniendo énfasis en aspectos propiamente geométricos.

Varias interrogantes surgen al tomar esta perspectiva: ¿cómo se da esta transformación en el trabajo con el profesorado? ¿confrontar los acercamientos aritmético/algebraico con el trabajo geométrico, le da la oportunidad de construir nuevos significados alrededor de la geometría escolar?, ¿se provoca un proceso de desarrollo del pensamiento geométrico?, ¿se movilizan otros conocimientos del profesor al poner atención y modificar ‘el qué enseñamos’? Aunque se reconoce que estas preguntas resultan de interés y podrían ser susceptibles de estudio, esta investigación no pretende dar respuesta a todas. En capítulos subsecuentes, se delimitará el objeto de estudio, los objetivos y la perspectiva desde donde se abordará la problemática planteada.

Capítulo 2. Revisión bibliográfica

Para delimitar y refinar el planteamiento de esta investigación, en una etapa inicial, se establecieron estrategias de búsqueda bibliográfica y posteriormente categorías, sin embargo, conforme avanzó la revisión, se consideró pertinente refinarlas. Los sucesivos cambios se muestran la siguiente sección y la versión final está consignada en la Etapa 2.

2.1 Estrategia de búsqueda y categorías

Etapa 1. En esta primera etapa, se inició la búsqueda de artículos de investigación, tesis, capítulos de libros, entre otros, considerando dos categorías principales, una relativa al trabajo con profesores y la otra centrada en el pensamiento geométrico. Cada una de éstas se dividió en subcategorías, como se muestra en la Figura 7. Como las categorías no eran excluyentes, todas aquellas investigaciones que abordaran la intersección entre éstas resultaron de mayor interés, es decir, estudios o investigaciones que abordaran el trabajo con profesores y el pensamiento geométrico.

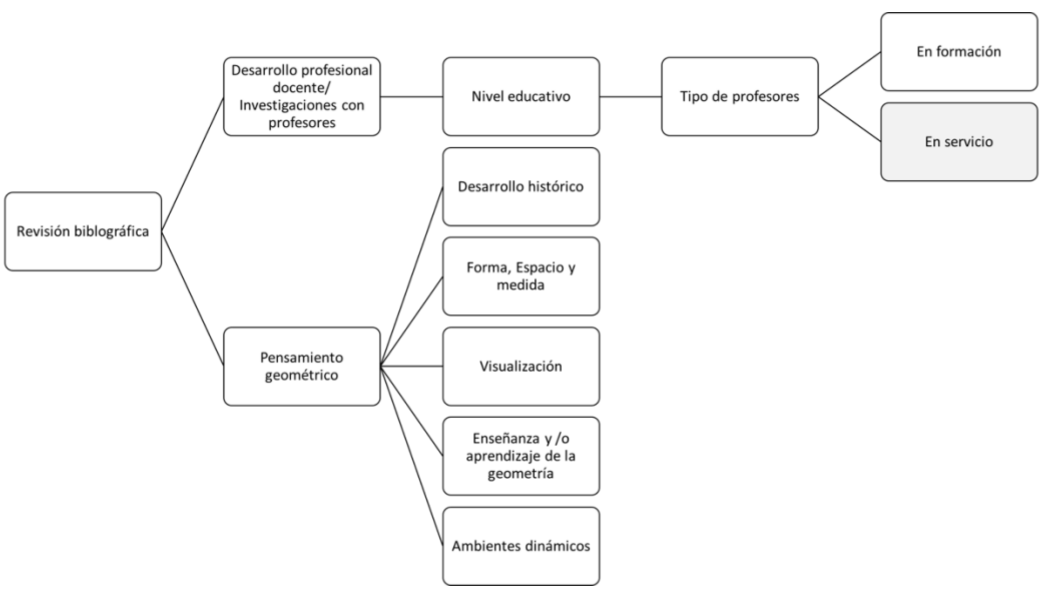


Figura 7. Esquema de las categorías de clasificación de la revisión bibliográfica en la Etapa 1.

Dentro de las investigaciones o estudios del pensamiento geométrico nos interesaban particularmente aquellas relacionadas con los contenidos matemáticos presentes en el currículo de la escuela secundaria mexicana sobre todo los que tuvieran que ver con geometría, es por eso que se incluyó la subcategoría de Forma, Espacio y Medida, que es uno de los tres ejes temáticos en los que está organizado dicho currículo. La intención de dividir la matemática de la educación básica en ejes temáticos es trabajar de manera integradora y no segmentada en donde se asigne el mayor peso a los contenidos matemáticos.

A medida que la búsqueda y revisión fue avanzando, se consultaron publicaciones que se consideraron relevantes para esta investigación, pues en ellas se reportaban los avances más significativos en los últimos años en el campo de la educación en geometría (Sinclair, Bussi, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung, y Owens, 2016; Sinclair, Cirillo y de Villiers, 2017; Jones y Tzekaki, 2016). A partir de lo reportado en estos artículos se reformularon las categorías de la etapa 1.

Etapa 2. En esta segunda etapa de la revisión bibliográfica y considerando lo reportado en Sinclair, et al. (2016) se reformularon las categorías de búsqueda, quedando de la siguente manera:

- Teorías sobre el aprendizaje de la geometría
- Avances en la comprensión del razonamiento visoespacial
- Avances en la comprensión del papel de las tecnologías digitales
- Estudios con profesores de matemáticas

A continuación, se presenta lo relativo a cada una de las categorías de esta segunda etapa

2.2 Teorías sobre el aprendizaje de la geometría

En esta sección se aborda lo referente al uso y desarrollo de teorías que se han planteado el problema de estudiar aspectos relativos al pensamiento geométrico.

2.2.1 Niveles de razonamiento de Van Hiele

La teoría desarrollada por los profesores holandeses Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele sobre el razonamiento geométrico ha sido un referente clásico en la disciplina, tanto para hacer investigación, como para el diseño didáctico. En ella se incluye un apartado instructivo, el cual sugiere al profesor una manera en que los alumnos pueden desarrollar su razonamiento geométrico a partir de un método descriptivo que se conoce como los niveles de Van Hiele.

Según Afonso (2003), en esta teoría se establece un primer nivel donde los alumnos perciben a las figuras por su forma y no por sus propiedades. En el segundo, los alumnos son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y que poseen propiedades matemáticas. En el tercer nivel, los alumnos empiezan a desarrollar su capacidad de razonar matemáticamente, por ejemplo, hacen razonamientos deductivos y comprenden el significado de una definición. En el cuarto nivel, los alumnos pueden realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones de varios pasos ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una proposición. En el quinto y último nivel, los alumnos son capaces de trabajar en distintos sistemas axiomáticos prescindiendo de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática.

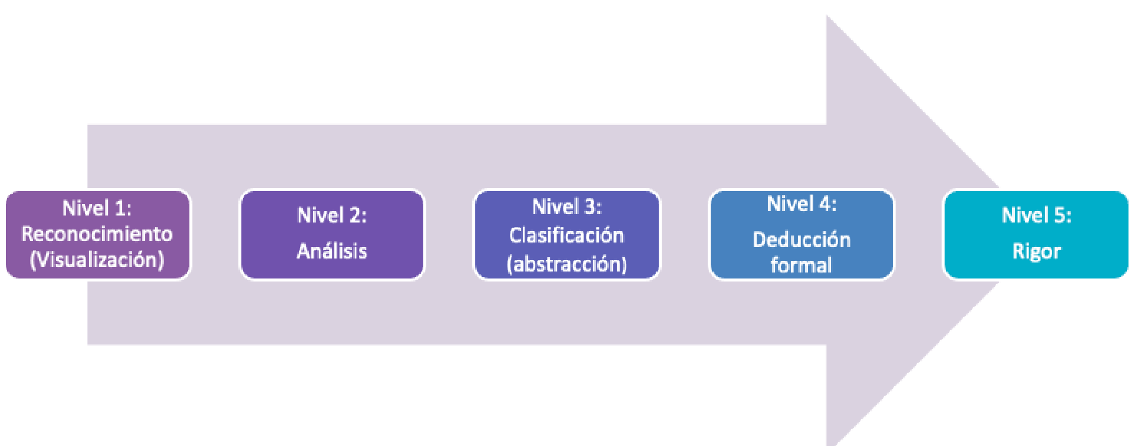


Figura 8: Niveles de razonamiento de Van Hiele. Elaboración propia con base en Afonso (2003)

En este modelo el paso de un nivel a otro es independiente de la edad, más bien depende del tipo de actividades o experiencias a los que la persona se enfrente. Generalmente los últimos dos niveles son alcanzados por aquellos que se dedican a estudiar con mayor profundidad a la matemática, en particular a la geometría.

También se recomienda a los profesores de geometría que planeen la enseñanza siguiendo las que denominaron como “Fases del aprendizaje”. Para que un estudiante pueda pasar de un nivel de razonamiento a otro superior, tendrá que pasar por todas las fases.

Afonso (2003) reporta en su tesis doctoral el tipo de estudios que se han realizado alrededor de los niveles de razonamiento de Van Hiele y las agrupa de la siguiente manera: investigaciones dirigidas a confirmar si los niveles de Van Hiele describen exactamente el pensamiento geométrico de los alumnos; aquellas que estudian la continuidad o discretitud del modelo; investigaciones acerca de la globalidad de todos los niveles en todos los conceptos geométricos: otras que tratan de la jerarquía y secuencialidad de los niveles; estudios dedicados a determinar en qué niveles se ha venido realizando habitualmente la enseñanza-aprendizaje de la geometría así como la presentación de la misma en diferentes libros de texto y por último investigaciones sobre la existencia única de los cinco niveles.

La mayoría de las investigaciones que reporta Afonso (2003) se realizaron en la década de los ochenta. La autora comenta que el modelo se publicó a mitad de la década de los 50 y fue tal su impacto que a partir de los años 60 la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas lo toma como base para el diseño del nuevo currículo de matemáticas, pero hasta la década de los 70 es que comienza su difusión y uso en el mundo occidental.

Si bien en la actualidad este modelo se sigue utilizando en diferentes investigaciones y por algunos profesores interesados en el diseño y valoración de tareas geométricas, existen posturas que no comparten que el pensamiento geométrico puede ser clasificado por niveles que sean secuenciales, lineales y discretos. Como lo reportan Sinclair et al., (2017): “Ha habido más críticas sobre la suposición de que el pensamiento se produce en niveles y que, por lo tanto, los estudiantes pueden ser identificados como "en un nivel".”(p. 458). En este mismo estudio se reportó que a partir de la investigación de Battista (2017, citado por Sinclair et al. (2017)) el número de estudios que utilizan el enfoque tradicional del modelo de Van

Hiele han disminuido y que esto se debe a diversos factores tales como: (1) los niveles pueden no ser suficientemente operacionales; (2) el modelo es de naturaleza descriptiva y evaluativa, prestando menos atención a cómo es que se desarrolla el razonamiento geométrico; (3) no considera aspectos semióticos o epistemológicos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y (4) la descripción de los niveles no está articulada con tareas particulares y con las herramientas que se pueden utilizar en el aula.

Aunque se reconoce el impacto que el modelo ha tenido a lo largo de los años y el uso que investigadores y profesores le han dado, en esta investigación no está puesto el interés en decir o describir qué nivel o dominio tienen los profesores de matemáticas de secundaria respecto a ciertas tareas geométricas, en su lugar, nos interesa fomentar espacios de trabajo con el profesorado para discutir y reflexionar acerca del trabajo geométrico, a fin de que puedan valorar lo enriquecedor que podría ser promoverlo en sus aulas.

2.2.2 Teoría de la aprehensión figural y la construcción dimensional

Duval (1998) afirma que “Enseñar geometría es más complejo y comúnmente menos exitoso que enseñar operaciones numéricas o álgebra elemental; entonces, ¿por qué enseñar geometría a todos los estudiantes? O más aún, ¿por qué enseñar geometría?” (p. 37). Para dar respuesta a este tipo de cuestionamientos, el autor explica que se debe considerar la complejidad cognitiva de la actividad geométrica y que ésta considera tres procesos cognitivos que cumplen funciones epistemológicas específicas:

- Visualización: proceso de considerar las representaciones espaciales, las exploraciones heurísticas de una situación compleja y para ilustrar una proposición o enunciado.
- Construcción mediante herramientas: la construcción de configuraciones puede servir como modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos representados.
- Razonamiento: en su relación con los procesos discursivos para la extensión del conocimiento, para la demostración y explicación.

Los tres procesos se pueden trabajar de manera separada. De tal forma que la visualización no dependa de una construcción: hay acceso a las figuras, de cualquier manera que hayan sido construidas. Y aún si la construcción guía a la visualización, los procesos de construcción dependen sólo de las conexiones entre propiedades matemáticas y las restricciones técnicas de las herramientas usadas.

Duval (2005) menciona que la geometría es un área del conocimiento que demanda de la unión de dos registros de representación: por un lado, la visualización de las formas para representar el espacio y por otro lado, el lenguaje para enunciar las propiedades. Declara que los problemas del aprendizaje de la geometría provienen del hecho de que estos dos registros se han tratado por separado. En particular, señala que la geometría de la escuela procede de una manera incorrecta, por ejemplo, se asume que los estudiantes podrán "ver" propiedades de un objeto tridimensional en dos dimensiones. Duval propone como punto de partida la construcción, no sólo con regla y compás, sino también considerar, dobleces de papel, empleo de plantillas, entre otros.

En la investigación de Gal y Linchevski (2010), centrada en identificar dificultades geométricas en estudiantes de secundaria, utilizaron la noción de aprehensión figurativa. Concluyeron que es dificil para los estudiantes discriminar las características visuales relevantes de las que no lo son en una figura geométrica, argumentan que resulta complicado para los estudiantes el "ir más alla", a primera vista, de una figura geométrica, resultado de la percepción visual. Es decir, declaran que la percepción visual no es suficiente y que incluso puede obstaculizar el uso y desarrollo de los conceptos y las propiedades geométricas.

De las aportaciones de Duval, destacamos el papel tan importante que le da a las construcciones no sólo como un medio para acceder a una situación, sino como un recurso para hacer geometría. Esta aportación se consideró importante con miras a poder incorporarla como un elemento trascendente en futuros diseños dirigidos hacia los docentes. Nótese cómo esta postura de Duval difiere de lo propuesto por los Van Hiele marcando una ruta claramente diferenciada para estudiar los procesos de construcción de los saberes geométricos.

2.2.3 Espacios de Trabajo Geométrico

Otro enfoque de investigación son los Paradigmas geométricos y los Espacios de Trabajo Geométrico (ETG), acercamientos encabezados principalmente por Kuzniak (2004). El autor plantea tres tipos de geometrías o paradigmas geométricos:

1. La Geometría natural (GI) en donde los objetos son materiales, se recurre a la intuición como argumento y la validación es empírica por confrontación de la realidad, por ejemplo, el ángulo ABC es recto porque lo veo o porque usé el transportador para medirlo;
2. La Geometría axiomática natural (GII) donde se trabaja con objetos ideales y es aquí donde surge la necesidad de contar con definiciones, teoremas, etc. Se apoya fuertemente en la GI y considera como base la geometría euclidiana, en GII la manera de producir conocimiento es por medio de un sistema deductivo que se basa esencialmente en la demostración; y
3. La Geometría axiomática formalista (GIII), al igual que en la GII sus objetos son ideales, este paradigma emerge con el nacimiento de las geometrías no euclidianas. En este paradigma los objetos están desconectados de la realidad y solo dependen de los axiomas y de sus definiciones, pero el contacto con la percepción de las figuras se ha perdido.

A diferencia de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, estos paradigmas no son jerarquizables, es decir, dependiendo del tipo de actividad que la persona realice puede pasar de GI a GII o de GII a GI, por ejemplo.

Los ETG se definen como el ambiente en el cual se concibe la reflexión fruto de la interacción entre un individuo y los problemas geométricos, es un ambiente organizado por y para el geómetra (persona que se enfrenta a una tarea de geometría). En este modelo teórico se consideran diferentes espacios de trabajo geométrico: de referencia, idóneo y personal. El de referencia está definido de manera ideal en función de criterios matemáticos. El idóneo son los espacios definidos en términos didácticos, de ahí que el usuario de este espacio es el profesor y el personal está definido por un geómetra, producto de la reflexión de los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica, de acuerdo a sus conocimientos matemáticos.

Sinclair et. al. (2017) mencionan que los ETG proporcionan un lente para interpretar los tipos de geometrías involucradas en las matemáticas escolares, lo cual podría ayudar a identificar las dificultades que tanto alumnos como profesores pueden presentar al resolver tareas geométricas.

2.2.4 Aproximaciones socioculturales

Por otra parte, algunos investigadores han reportado la importancia de considerar el entorno y las condiciones en las que las personas enseñan y aprenden geometría. En ese sentido Owens (2014) reporta en su investigación que en algunas comunidades indígenas en donde existen un estrecho trabajo con la Tierra, se emplean diferentes artefactos culturales para su representación, los cuales difieren de la geometría euclideana por lo cual se representan en distintos marcos de referencia, como el uso de cuadrículas ortogonales.

Owens (2014) también resalta la importancia de reconocer a las matemáticas más allá de cálculos aritméticos y centrarse en procesos, ya que es aquí donde se puede aprovechar la fortaleza de las matemáticas culturales, lo cual se puede promover en las matemáticas escolares. De esta manera, las identidades ecoculturales de los estudiantes pueden fomentar la autorregulación y la capacidad de respuesta para fomentar una fuerte identidad matemática.

Otra investigación que apoya las ideas planteadas por Owens es la de Luitel (2009), quien aborda el problema de la educación matemática culturalmente descontextualizada que enfrentan los estudiantes en Nepal, un país culturalmente diverso con más de 90 grupos lingüisticos. La autora destaca la importancia de ver a las matemáticas desde una visión multidimensional considerando el contexto y la cultura de quien aprende. Además comenta que, "considerar esta visión multidimensional de la naturaleza de las matemáticas puede convertirse en un aspecto clave para concebir espacios pedagógicos y curriculares inclusivos, los cuales son muy necesarios para la educación matemática" (p. 383).

2.3 Avances en la comprensión del razonamiento visoespacial

Iniciamos esta sección destacando que a partir de la revisión de la literatura, encontramos que no hay un único término relativo a lo espacial, algunos autores se refieren a él como visualización (Clements, 2012), otros como pensamiento espacial (Newcombe y Stieff, 2012), razonamiento espacial (Davis y grupo de estudio de razonamiento espacial 2015), razonamiento visoespacial (Healy y Powell, 2013; Lowrie, Logan y Scriven, 2012; Owens, 2014). Sin embargo, son muestra de cómo, desde diferentes aproximaciones, se reconoce la importancia que tiene éste, como clave en el pensamiento matemático (Mix y Battista, 2018;

Young, Levine y Mix, 2018) y, para algunos investigadores, componente esencial de las disciplinas STEM (por las siglas en inglés de: Science, Technology, Engieenering and Mathematics) (Atit, Uttal y Stieff, 2020).

Whiteley, Sinclair y Davis (2015) sostienen que el razonamiento espacial siempre ha sido una capacidad vital para la acción humana y el pensamiento, pero éste no siempre ha sido identificado o apoyado en la escuela (p.3). En este sentido, algunas investigaciones han reportado que existen una relación entre el razonamiento espacial y el pensamiento geométrico. Sack, Vazquez y Moral (2010) mencionan que el razonamiento espacial ahora se considera un componente vital del pensamiento matemático y necesario para la resolución de problemas (p. 113).

Xistouri, Pitta-Pantazi (2006) realizaron una investigación con 492 estudiantes de diferentes grados de nivel primaria a los que les aplicaron dos test que abordaban el concepto de simetría y rotación. Como parte de sus conclusiones reportan que para mejorar el aprendizaje del concepto de simetría, es importante desarrollar habilidades espaciales.

En su investigación Lowrie et. al. (2012), realizan un análisis del curriculum australiano y señalan que existe la ausencia en éste de prácticas relacionadas con el razonamiento visoespacial. En este sentido, declaran que esta ausencia puede tener un impacto en el quehacer de los profesores en el salón de clases. Además, sugieren que es importante promover algún programa de desarrollo profesional docente que dote a los profesores de oportunidades de aprendizaje conectadas conceptualmente.

De manera similar a lo que reporta Lowrie et. al. (2012), reconocemos que en el currículo de educación básica mexicana no aparece de manera explícita la promoción del razonamiento visoespacial, sin embargo, en las diferentes evaluaciones estandarizadas que se aplican a los estudiantes se demanda de ellas para la resolución de algunos ítems lo cual los deja en condiciones poco favorables para responder de manera correcta, ver por ejemplo uno de los reactivos liberados de Planea (2015) correspondiente al nivel de logro III, donde se solicita seleccionar la figura resultante al girar un cuerpo geométrico. http://planea.sep.gob.mx/content/ba/docs/2015/reactivos_tipicos/Matematicas_09_2015_Niveles_de_logro.pdf

En el estudio de Lee, Sovrano y Spelke (2012) se muestra cómo la geometría tiene una naturaleza intuitiva y cómo las personas pueden desarrollar nociones geométricas a edades tempranas en contextos no escolares. Los autores trabajaron con niños de 2 años las nociones de ángulo, longitud, distancia y dirección en situaciones de orientación y navegación. Reportan que los niños se reorientaron usando distancias y direcciones, lo que los lleva a reconocer que ante este tipo de tareas, los niños emplean nociones de la geometría euclideana formal a pesar de su corta edad.

Newcombe y Stieff (2012) sostienen la idea de que la visualización cobra un papel cada vez más relevante en el aprendizaje de las matemáticas, pero también en el aprendizaje de las ciencias, pues para comunicar información comúnmente hacemos uso de fotografías, diagramas, gráficas, entre otros; sin embargo, las personas no necesariamente interpretan de manera eficaz lo que éstas muestran, por lo que es importante centrar la atención en la visualización. En su investigación aseguran que existe evidencia concluyente de que las habilidades espaciales se pueden mejorar mediante la capacitación, es decir, que es desarrollable.

Si se reconoce que el razonamiento visoespacial tiene un fuerte sustento intuitivo y que éste es posible de desarrollar en escenarios no escolares y desde edades tempranas, se esperaría que en la escuela se potenciara, sin embargo, al menos en lo reportado para esta investigación, no hay evidencia de que esto esté pasando. De aquí que sea natural el cuestionar, qué tipo de actividades se pueden promover para desarrollar el razonamiento visoespacial.

2.4 Avances en la comprensión del papel de las tecnologías digitales

Cada vez es más frecuente el uso de tecnologías digitales en los salones de clase, sin embargo, se reconoce que su uso no ha sido entendido con suficiente detalle, Sinclair et al. (2016) mencionan que “Los desarrollos de la última década han dado lugar a nuevos desafíos en el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría” (p. 11); por su parte, Trgalova, Soury-Lavergne y Jahn, (2011) reconocen que no es suficiente poner a disposición de los profesores los recursos tecnológicos, es necesario considerar el tema de la formación del profesorado en este tipo de ambientes e involucrarles en el diseño de recursos didácticos.

Uno de los desarrollos tecnológicos que más ha impactado el aprendizaje y la enseñanza de la geometría y su investigación han sido los ambientes de geometría dinámica (AGD), las revisiones de Sinclar, et al (2016) y Sinclair, et al (2017) dan cuenta de ello no solo en las discusiones relativas al uso de tecnología, sino de aquellas donde se reportan aportaciones en torno a la demostración, la elaboración de conjeturas, el cambio de discurso, el rol de los gestos, entre otros. Entre los AGD usados en la investigación se encuentran Cabri, Sketchpad, Cinderella y GeoGebra, de los cuales destacamos el último no solo por las ventajas didácticas que ofrece sino por ser un software de libre acceso. Además ofrece la posibilidad de trabajar en comunidad, compartiendo los recursos creados de forma abierta. Algunas de las características de estos ambientes son:

- El “arrastre” de los objetos construidos, lo que les da el carácter dinámico a las construcciones.
- La animación de figuras.
- El trabajo en dos y tres dimensiones.
- La traza o huella, que permite observar el comportamiento o trayectoria de un objeto al arrastrarlo.

2.4.1 Algunas aportaciones de la investigación en AGD

Un autor que ha desarrollado investigación acerca del aprendizaje sobre todo en geometría es Arcavi (2000), quien menciona que hay ciertas características del trabajo en ambientes dinámicos que los profesores deben promover, y que a continuación enunciamos:

a) La visualización en geometría:

La visualización generalmente se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual (Hershkowitz, 1989, p. 75). Estas acciones sobre las figuras geométricas hacen de la visualización un componente crucial en el aprendizaje de los conceptos geométricos.

b) La experimentación

Además de la visualización, el desempeño con los ambientes dinámicos permite a los estudiantes aprender a experimentar, y "a apreciar la facilidad de obtener muchos ejemplos..., para buscar casos extremos, ejemplos adversos y de carácter no estereotipados..." (Yerushalmy, 1993, p. 82).

c) El efecto sorpresa

Es poco probable que los estudiantes encaucen fructíferamente su experimentación. Las actividades curriculares, tales como las situaciones problema, deben ser diseñadas de tal manera que los tipos de preguntas formuladas a los alumnos puedan jugar papeles significativos al plantearse en la profundidad e intensidad de un aprendizaje experimental. Un requerimiento significativo a los estudiantes, que puede acompañar a la experimentación, podría consisitir en exigirles que hagan predicciones explícitas sobre el resultado de un cierto fenómeno o acción que estén a punto de abordar. Al realizar tales predicciones haciendolas explícitas se:

a) Impulsa a los estudiantes para que sean más claros acerca de cómo prevén la situación en la que van a trabajar,

b) Orienta a los estudiantes a la posición de crear sus "propias predicciones" y así es probable que tengan más cuidado en lo que piensan sobre esto, y como consecuencia, se comprometan más con la situación, y

c) Crea expectativas y motivaciones para la experimentación real. El reto es encontrar situaciones en las cuales el resultado de la actividad sea inesperado o contra-intuitivo, de tal forma que la sorpresa (o el desconcierto) generada cree una clara diferencia con las predicciones explícitamente enunciadas. Éste puede ser el detonador para nutrir la propia necesidad de los estudiantes para reanalizar su conocimiento y predicciones, estableciendo oportunidades para lograr un aprendizaje significativo.

d) La retroalimentación

Las sorpresas descritas anteriormente originan diferencias entre una expectativa explícita de una cierta acción y del resultado de esa acción.

e) Necesidad de pruebas y demostraciones

Dreyfus y Hadas (1996) discuten y ejemplifican cómo es posible usar en beneficio propio una acción en cada sorpresa del estudiante, a fin de que infunda y alimente la necesidad para la justificación y la prueba. Siguiendo una sorpresa, muchos estudiantes pueden sentir la necesidad de justificar el resultado obtenido, o quizás no explícitamente, pero exige de otros o de ellos una respuesta a su "por qué"' (o el "por qué no").

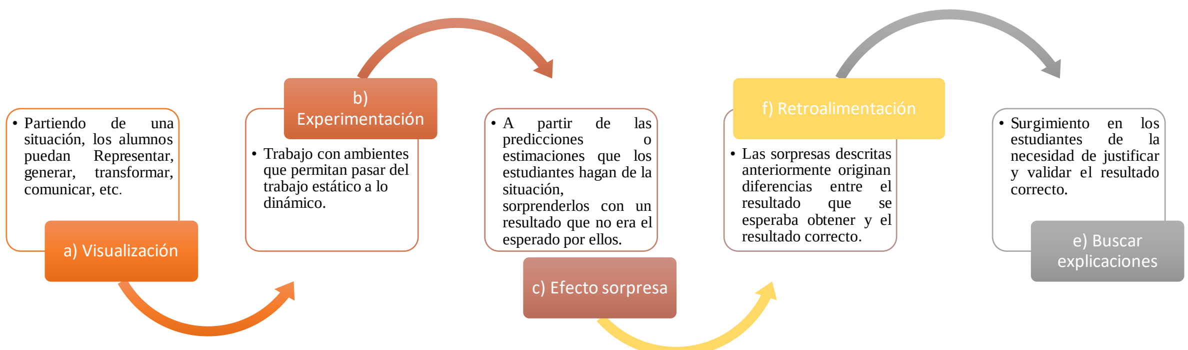


Figura 9. Distintas características que se pueden promover al trabajar en ambientes dinámicos para la enseñanza de la geometría. Fuente: elaboración propia.

Por otro lado, Gol Tabaghi y Sinclair, (2013) reportan en su investigación que el uso de un entorno de geometría dinámica en la enseñanza de conceptos relativos al álgebra lineal permitió a los estudiantes ampliar sus concepciones, sobre todo geométricas. Concluyen que a través de la interacción con la geometría dinámica los estudiantes mostraron una mayor coordinación entre las diferentes representaciones.

Otra investigación que reporta la importancia del uso de ambientes de geometría dinámica, es la de Lee y Chen (2014), el estudio se centra en el aprendizaje de la geometría plana en estudiantes de secundaria, se trabaja con los temas de suma de ángulos interiores y exteriores de polígonos. Los estudiantes se dividieron de manera aleatoria en dos grupos a los que se les aplicó un pre-test y un post-test. En el primer grupo se trabajó con objetos manipulables virtuales y en el otro grupo con objetos manipulables físicos. Como parte de sus resultados, dan evidencia de cómo el grupo que trabajó con un ambiente virtual tuvo un mejor rendimiento en el post-test y mostró una mejor actitud ante las tareas.

Diversas investigaciones han puesto el foco en el diseño de tareas con el uso de ambientes de Geometría Dinámica pues reconocen la posibilidad de promover en los estudiantes la exploración, establecimiento y prueba de conjeturas, generalización, entre otras. Fahlgren y Brunstr (2014) proponen el siguiente modelo para el diseño de tareas con el uso de AGD (p. 9):

El punto de partida deberá ser la descripción de la situación matemática para después:

(a) Hacer una construcción adecuada de la situación en un AGD como GeoGebra y estudiar la posición y el comportamiento de los objetos intervinientes, para poder establecer una conjetura .

(b) Utilizar el AGD para apoyar o refutar su conjetura.

(c) Explicar con sus propias palabras por qué su conjetura es verdadera.

(d) Construir una demostración.

(e) Hacer nuevas conjeturas, sustentar o refutar, explicar y demostrar.

Los autores reportan que al aplicar el modelo han encontrado que los estudiantes utilizan elementos adicionales a la construcción inicial para explorar y explicar propiedades geométricas, el uso de la herramienta “arrastre” juega un papel importante en las fases de exploración y prueba, además, solicitar que expliquen por qué su conjetura es válida de manera escrita fomenta la reflexión de la situación.

Otro autor que también ha puesto interés en el diseño de tareas con AGD es Leung (2011), reconoce que el uso de estos ambientes impulsa un cambio de paradigma en la enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar. En particular señala, que el modo “arrastre” resulta una herramienta importante para facilitar la interacción con los objetos geométricos dinámicos.

Trgalova, Soury-Lavergne y Jahn (2011) realizaron un estudio con 22 profesores de matemáticas de secundaria, los cuales tenían alrededor de 6 años de experiencia y la mayoría eran "principiantes" en el uso de AGD. Se les ofreció una sesión de 2.5 horas de trabajo en donde los profesores resolvían y analizaban una serie de tareas diseñadas para alumnos de secundaria que incluían el uso de tecnología. Como parte de los resultados reportados mencionan que los profesores mostraron interés por conocer el cómo se realizaban las construcciones utilizadas en las actividades, señalaron además que sería importante contar con una guía para que el profesor pudiera implementarlas, que incluyera respuestas esperadas por los estudiantes, posibles dificultades que pudieran presentarse y cómo se pudieran resolver. Respecto al uso del AGD, los docentes afirmaron que éste fue imprescindible para la resolución de las actividades, en particular el modo arrastre ya que favorecía la comprobación de propiedades geométricas.

Investigaciones como la anterior dan evidencia de que es posible involucrar a los profesores en el uso de AGD pero su aplicación y posible implementación en el aula no es natural ni inmediata y en muchos casos, requiere de que los y las profesoras cuenten no sólo con las herramientas digitales, sino que tengan la oportunidad de vivir experiencias en donde se pongan a discusión aspectos técnicos, matemáticos y didácticos.

Si bien es cierto que la mayoría de las investigaciones presentadas en esta sección están centradas en el aprendizaje de la geometría, no así en la enseñanza, no se debe perder de vista que cuando se trabajan situaciones problema en espacios de formación de profesores, en ese momento las y los profesores son sujetos que están realizando procesos congnitivos con miras a construir y desarrollar saberes geométricos. Estos procesos cognitivos y estas experiencias se integraran al bagaje al cual podrán recurrir cuando desarrollen su labor docente. Es en este sentido que se valoran los resultados de investigación que han sido descritos.

A partir de lo reportado en esta sección consideramos conveniente involucrar al profesorado en experiencias de trabajo con AGD en las que la resolución de las tareas con esta herramienta, los conduzca a la discusión sobre sus potencialidades geométricas y didácticas.

2.5 Estudios con profesores de matemáticas

Considerando la importancia que tiene el y la profesora de matemáticas en los procesos de aprendizaje y enseñanza en particular de lo geométrico, en esta sección presentamos algunas investigaciones que fueron realizadas con profesores de matemáticas

Diversas investigaciones se han propuesto indagar sobre los conocimientos geométricos que tienen los y las profesoras pues lo relacionan de manera directa con la calidad de su enseñanza. Fujita y Jones (2006), realizaron un estudio en el que trabajaron con profesores de primaria en la clasificación de cuadriláteros (Figura 10). Como parte de sus resultados los autores reportan que los profesores contar con una débil comprensión de la relación jerárquica de los cuadriláteros.

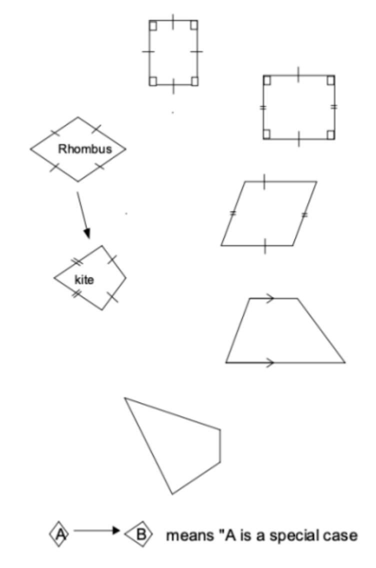


Figura 10. Cuadriláteros por clasificar como parte de las tareas propuestas por Fujita y Jones (2006)

Por su parte, Alatorre, Flores y Mendiola (2012) realizaron un estudio con profesores en servicio de nivel primaria, en donde se les pedía que resolvieran algunas situaciones relativas a la desigualdad del triángulo. Como parte de sus resultados las autoras concluyen que a pesar de que algunos profesores pudieran haber estudiado la desigualdad del triángulo en su tránsito por el bachillerato, no lo estudiaron durante su formación docente y puede ser esa una de las razones por las cuáles el tratamiento que se le da a los triángulos en el aula es superficial. Para algunos maestros siempre era posible dibujar un triángulo, sin importar la medida de sus lados pues en la práctica, la medida solo tiene dos usos: clasificar el tipo de triángulo y la aplicación directa de fórmulas para el cálculo del área o perímetro; por lo que el cuestionamiento respecto a la posibilidad de si los triángulos puedan construirse o no, podría parecer hasta absurda en algunos casos.

La investigación de Son (2006) se interesó en explorar las concepciones de los maestros en formación de primaria y secundaria sobre la simetría reflexiva y las comparó con sus estrategias de enseñanza. Empleando el modelo de Van Hiele, los resultados mostraron que los profesores en formación tenían una comprensión limitada de la simetría reflexiva y confundían la simetría con la rotación. Sus deficiencias los llevaron a utilizar enfoques de enseñanza procedimentales en su intento de ayudar a los estudiantes a comprender la simetría y las construcciones simétricas.

Markovits, Rosenfeld y Eylon (2006), afirman que las creencias de los docentes juegan un papel muy importante en el qué y cómo enseñan a sus estudiantes y en las formas en las que sus alumnos aprenden. En su investigación aplicaron un test a 25 profesores de educación inicial (preescolar), los resultados dan evidencia de un desarrollo bajo en sus habilidades visuales vinculadas a lo geométrico, tales como: estimación, memorización visual, reproducción, entre otras. En algunos casos, su rendimiento era similar al de sus estudiantes. Los autores comentan que los resultados no les parecen tan sorprendentes pues los y las profesoras por lo general no cuentan con programas donde se les prepare o desarrollen este tipo de habilidades.

Cirillo (2011) describe las experiencias de un profesor de matemáticas de secundaria con poca experiencia, que trabaja para mejorar la forma de enseñar pruebas geométricas durante sus primeros tres años de servicio. Dado que el maestro principiante tenía una sólida formación en matemáticas, el estudio mostró cómo el conocimiento del contenido "no es necesariamente una preparación suficiente para enseñar a demostrar" (p. 247). El autor destaca la importancia de considerar el conocimiento del contenido pedagógico.

Investigaciones como las de Cirilo (2011) ponen de manifiesto la dificil labor que tienen los y las profesores de matemáticas, en particular al considerar que la formación de éstos puede ser diversa y que no necesariamente durante su formación profesional profundizaron en aspectos didácticos.

Sinclair y Bruce (2015) realizaron un estudio con la intención de reportar las nuevas oportunidades dentro de la educación geométrica en primaria, entre las que destacan la importancia del razonamiento espacial, el papel de las representaciones gráficas en la construcción de significados geométricos, la importancia de las tecnologías digitales, entre otros. En sus reflexiones finales, comentan que un área fértil para investigar es la preparación docente y el aprendizaje profesional, en su revisión únicamente reportan un estudio centrado en el profesor de geometría.

2.6 Reflexiones a partir de la revisión

La revisión bibliográfica realizada ha permitido dar cuenta que hay evidencia acerca de problemáticas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría en distintos niveles educativos. Aunque socialmente se acepta que es difícil aprender y enseñar matemáticas, se asume que haciendo investigación en el campo de la Matemática Educativa te tendrán elementos para poder tomar acciones y decisiones con sustento en ese terreno; es decir, orientadas al qué (matemática) enseñar y cómo hacerlo.

Otro aspecto a señalar de la revisión, es que se ha podido detectar cómo los diferentes enfoques teóricos se han planteado el problema de estudiar el razonamiento geométrico, estableciendo ya sea niveles, procesos o etapas que den indicios de él. Además, se puede identificar que los enfoques que se incluyeron en esta revisión centran su atención, algunos en el razonamiento y otros en el pensamiento geométrico, analizando diferentes aspectos, pero tienen en común el importante papel que se le asigna a la interacción con la representación de los objetos geométricos.

Se destaca también la importancia del uso de ambientes de geometría dinámica para la enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar y la evolución que éstos han tenido a lo largo de las últimas décadas (Sinclair et al., 2016; 2017; Arcavi, 2000). Su uso brinda la posibilidad de promover aspectos relativos al razonamiento visoespacial y el pensamiento geométrico. Haciendo énfasis en la necesidad de que los y las profesores tengan acercamientos no solo a las herramientas tecnológicas sino a experiencias que les permitan reflexionar respecto a su uso y sus potencialidades didácticas (Trgalova et al., 2011).

Con relación a las investigaciones relacionadas con el profesor, una de las líneas de investigación obedece al interés por conocer cómo es el conocimiento geométrico-matemático de las y los profesores (Fujita y Jones, 2006; Alatorrre, 2012; Son, 2006). Por otro lado, un aspecto importante a destacar de la revisión se refiere a aquellos estudios que señalan que no es suficiente contar con una formación geométrica sólida, es necesario que se discutan aspectos pedagógicos (Cirillo, 2011).

2.7 Planteamiento del problema de investigación

A partir de la revisión de la literatura y de la oportunidad de observar el trabajo de la profesora Abigail en un escenario de trabajo con profesores, se considera que es necesario propiciar más espacios donde se promuevan momentos de confrontación de la matemática escolar, en particular en lo relativo a lo geométrico, que les permita vivir experiencias encaminadas a desarrollar conocimiento geométrico.

Considerando que en la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria en México domina el tratamiento de los contenidos aritméticos y algebraicos, y que aún para el trabajo sobre el contenido geométrico se promueven enfoques aritmético-algebraicos, –es decir, que si bien hay presencia de objetos y nociones geométricas en el discurso, la actividad matemática escolar gira en torno a cálculos aritméticos y algebraicos, así como reconocimiento de formas para su clasificación–; se plantea que al abordar situaciones que confronten la actividad matemática asociada con cada enfoque (artimético-algebraico y geométrico), se ponga a discusión cómo el trabajo geométrico le abona al desarrollo del pensamiento geométrico, y que las y los profesores puedan identificar elementos tanto epistemológicos (que son propios de ese saber) como didácticos (que son pertinentes para su enseñanza y aprendizaje) para una posible innovación en el aula.

2.7.1Preguntas de investigación

P1. ¿Qué recursos epistemológicos construyen o identifican las y los profesores en una experiencia de confrontación de la geometría escolar?

P2. ¿Qué recursos didácticos construyen o identifican las y los profesores en una experiencia de confrontación para la innovación didáctica de la geometría escolar y qué variables externan como condicionantes para esta innovación?

2.7.2 Objetivo de la investigación

Describir cuáles son los recursos epistemológicos y didácticos que construyen o identifican las y los profesores en una experiencia de confrontación de la geometría escolar.

Capítulo 3. Consideraciones teóricas

En este capítulo expondremos los elementos teóricos que dan soporte a la investigación, los cuales están enmarcados en los constructos de la Teoría Socioepistemológica orientados a la problematización de la matemática escolar (Reyes-Gasperini, 2016; Montiel, 2016) y el constructo de Saberes Docentes, en la línea de investigación de Ruth Mercado (Mercado, 1991; 1994; Mercado y Luna, 2013; Mercado y Rockwell, 1988).

3.1 Teoría Socioepistemológica

Dada la problemática y las aportaciones actuales en la disciplina, nos proponemos una investigación cualitativa en el campo del desarrollo profesional docente, desde un paradigma social, en particular desde el planteamiento de la Teoría Socioepistemológica, o simplemente Socioepistemología, y la perspectiva que propone para problematizar el saber.

La Teoría Socioepistemológica se plantea como objeto de estudio *la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional*, y "dado que este conocimiento se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento" (Cantoral, 2013, p. 62), y, consecuentemente condiciona las relaciones entre el saber matemático, los estudiantes y el profesor. Por ello su *postura social* propone "un cambio en la centración: dejar de analizar exclusivamente a los conceptos matemáticos para empezar a analizarse juntamente con las prácticas que acompañan a su producción y que hacen posible su trascendencia de una generación a otra" (Cantoral, 2013, p. 46), precisando que dicha descentración no implica el abandono del objeto matemático.

Para explicar la construcción social del conocimiento matemático se modelan, entonces, las dinámicas del *saber* o *conocimiento puesto en uso*, considerando válida toda forma de saber matemático (popular, técnico y culto), pues reconoce que en su conjunto constituyen la sabiduría humana (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2015).

Se entiende por *uso* la forma en que es empleada la matemática, sea ésta implícita o explícita; y para su estudio atendemos su carácter situado en prácticas matemáticas contextualizadas y su funcionalidad al seno de un grupo social determinado (Cabañas, 2011; Rotaeche, 2012; Tuyub y Buendía, 2018).

Para dar cuenta del desarrollo de prácticas, la Teoría propone una anidación –de prácticas– que organiza *acciones*, *actividades* y *prácticas socialmente compartidas* (Figura 11); denominada también *progresión pragmática* por resaltar el quehacer humano en torno a la demanda matemática de una tarea (dentro y fuera del aula), en la que se reconoce una relación simbiótica entre el sujeto (y su participación) y la (constitución de una) práctica (López-Acosta y Montiel-Espinosa, 2022; Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021).

Figura 11: Modelo de anidación de prácticas con base en: Cantoral (2019)

Se entiende por *acciones* a la relación directa del sujeto con el objeto matemático, se trata de formas de actuar producto de construcciones previas, tanto en el marco del discurso escolar como en escenarios extra-escolares, que pueden no ser conscientes. Por su parte, las *actividades* se entienden como articulación y organización intencional de las *acciones*. En este nivel el quehacer del sujeto es influenciado por la interacción social, y en ésta se toma consciencia plena del porqué de su quehacer contextualizado. A su vez, una articulación y organización de actividades configura una *práctica socialmente compartida*, nivel en donde la práctica es intencionada, reiterada y consensuada.

Bajo la premisa de que, desde una mirada basada en prácticas, “la racionalidad no reside únicamente en pensar o actuar de acuerdo con un conjunto de reglas de razonamiento, sino también, en examinar si la aplicación de una regla es adecuada o no dentro del contexto de una práctica específica” (Xiang, 2008, p. 104), en recientes investigaciones socioepisemológicas se ha dimensionado el contexto en tres niveles para explicar en detalle la relación entre el uso del conocimiento situado en prácticas y el contexto que lo enmarca.

En particular, Torres-Corrales y Montiel-Espinosa (2021, p. 210) proponen los niveles:

- *Contexto cultural*: que refiere a la pertenencia a grupos humanos específicos y con él se reconocen influencias en el comportamiento e interacciones sociales de los sujetos o grupos involucrados;

- *Contexto situacional*: es con el que se reconoce el rol del tiempo, el lugar y las condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática;

- *Contexto de significación*: el que da forma y sentido a la matemática en juego.

En la presente investigación, consideramos sólo el análisis en los niveles de contexto situacional y de significación debido a decisiones metodológicas que precisaremos con más detalle en el siguiente capítulo. Asimismo, utilizamos únicamente los niveles de acciones y actividades de la progresión pragmática, por permitirnos acotar al objeto de estudio. Con esto tratamos con los aspectos observables y explícitos de la práctica: lo que se hace y lo que se dice, pero en su estudio se reconocen también aspectos no observables e implícitos que subyacen y emergen de ellas (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021).

El emergente social más relevante para esta investigación, dentro del planteamiento teórico de la Socioepistemología, es el significado. La Socioepistemología postula que el significado (matemático) deviene del uso situado que se les da a los objetos (matemáticos) y a sus procesos asociados en la actividad práctica (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015); por lo que el desarrollo de prácticas en distintos contextos permitirá que estos significados se pongan en funcionamiento en situaciones nuevas y, bajo la misma consideración de emergente social, se *resignifique* (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021).

“Hablar de resignificación del conocimiento matemático busca entonces generar un cambio en las explicaciones de la problemática educativa relativa a las matemáticas que cambia desde centrar el objeto matemático hacia las prácticas y usos relacionados epistemológicamente con él” (Tuyub y Buendía, 2018, p. 14).

Esta mirada desde el uso del conocimiento situado en prácticas contextualizadas es la forma en que la Socioepistemología problematiza el saber (matemático) en su explicación del fenómeno didáctico; cuestiona el estatus de la matemática escolar, como lo (único) que puede enseñarse y aprenderse, reconociendo usos que provienen de diversos escenarios y enriquecen el discurso escolar. En este cambio hacia usos relacionados epistemológicamente con el objeto matemático, en particular desde la mirada docente, se orienta el presente proyecto de investigación.

Los resultados de investigación socioepistemológica se socializaron y trabajaron en diversos espacios de desarrollo profesional docente desde décadas atrás, y desde las investigaciones de Lezama (Lezama y Farfán, 2001; Lezama, 2005) comenzaron a reportarse los resultados de estas experiencias, a propósito de que el profesorado no solo tiene interés en el conocimiento matemático, sino en su enseñanza.

3.1.1 Socioepistemología y Desarrollo profesional docente

Al hacer objeto de estudio la interacción del profesor con los resultados de investigación, provenientes de estudios socioepistemológicos, se identificaron momentos de confrontación y resignificación de la matemática escolar. En un principio se habló de confrontación de concepciones (García-Zatti y Montiel, 2008), sin embargo, las diversas experiencias de trabajo con profesores evidenciaron que dicha confrontación y posterior resignificación se da en relación con diversas cuestiones epistémicas:

- En el propio trabajo matemático del profesor, a partir de la construcción y reconocimiento de nuevos argumentos y procedimientos para la resolución de tareas (Montiel, 2005).

- En el reconocimiento, por parte del profesor, de usos del conocimiento y construcción de significados en los estudiantes al valorar su actividad matemática, usando como referente los resultados de investigación y la experiencia propia con los diseños fundamentados (Montiel, 2010).

- En la inclusión de prácticas que intencionalmente provoquen la construcción de nuevos significados, en el diseño elaborado por los profesores participantes de un espacio de desarrollo profesional docente (Montiel, 2016).

A partir de estas experiencias de trabajo e investigación se reconoce que la confrontación permite al docente "valorar los significados construidos en torno al discurso Matemático Escolar, para evidenciar que existen otros, propios de la matemática en juego, que se invisibilizan o se pierden en el proceso de transposición didáctica" (Rubio-Pizzorno, 2018).

En los trabajos de Montiel se identifica esta confrontación como necesaria para lograr que la matemática escolar sea resignificada por el profesor, que es el saber con el que interactúa en su práctica; este hecho constituyó uno de los puntos de partida del estudio sobre empoderamiento docente de Reyes-Gasperini (2016).

En esta línea de trabajo e investigación, Reyes-Gasperini (2016) caracteriza la relación que se logra entre el profesorado y el saber como *problematización* (ahora) de la *matemática escolar*, como aquello que propicia un cambio de relación con el conocimiento matemático escolar, relación sustentada en prácticas que a su vez genera una nueva dinámica profesional en distintas dimensiones de su práctica docente. Lograr trastocar todas estas dimensiones es el objetivo del programa de empoderamiento.

Esta investigación, si bien requiere de provocar un cambio en la relación del docente con la matemática escolar, a propósito de la escasez de investigaciones socioepistemológicas relativas al pensamiento geométrico, comienza estudiando los momentos de confrontación y resignificación en situación de aprendizaje con el docente siguiendo la ruta de trabajo e investigación de Montiel (2005, 2009, 2010, 2016).

3.1.2 El cambio de relación con el saber –matemático escolar–

Se entiende que al trabajar con el profesorado su quehacer y dominio de conocimientos esté normado por un discurso Matemático Escolar (dME), entendido éste en el sentido que plantea Soto: "como un sistema de razón que ha normado las prácticas y representaciones sociales de los agentes educativos provocando un tipo de exclusión a partir de una violencia simbólica" (Soto, 2010; Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015, p. 59). Cabe señalar que la exclusión a la que refiere Soto es particular de la construcción social de conocimiento matemático, planteamiento enmarcado en la teoría Socioepistemológica y desarrollado en las secciones previas.

En este sentido, en la investigación interesa provocar lo que la línea de empoderamiento docente ha denominado *"un cambio en la relación del docente con el saber*" (Figura 12): de centrarse en los objetos a centrarse en las prácticas, reconociendo los usos en juego, que son propios del conocimiento matemático en juego y los significados involucrados –o en construcción– en la organización de prácticas.

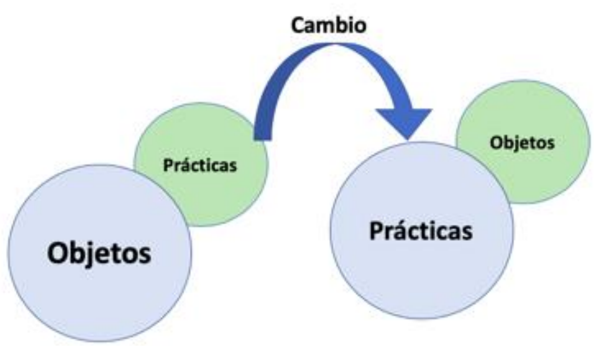


Figura 12. Cambio de relación con el saber desde una visión socioepistemológica. Fuente: Reyes-Gasperini (2016, p. 73)

Partiendo de la problemática expuesta en el primer capítulo, lo que se propone en la presente investigación es un cambio de relación con el saber geométrico escolar en el profesorado: de centrarse en los contenidos y objetos geométricos –tradicionalmente apoyados en prácticas aritméticas y algebraicas– a centrarse de forma prioritaria en prácticas geométricas al abordar los contenidos geométricos, dando oportunidad al profesorado de confrontar el tipo de herramientas, procedimientos y argumentos que se detonan de las prácticas aritméticas-algebraicas (PAA) en contraste con aquellos que se detonan de las prácticas geométricas (PG).

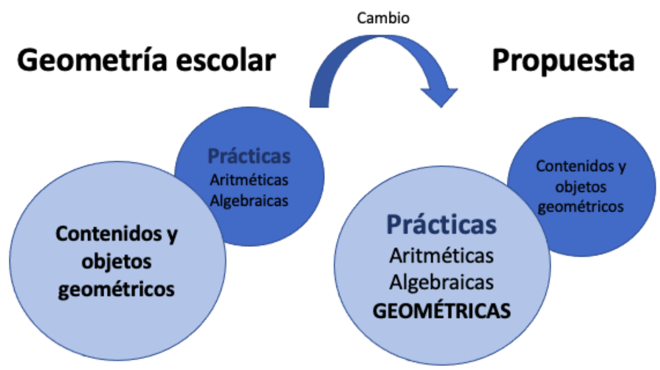


Figura 13. Propuesta de cambio de relación con los contenidos y objetos geométricos. Fuente: Elaboración propia.

Esta atención puntual a la estructura del dME y sus efectos en la construcción de significado matemático, permite un espacio de discusión y reflexión con y entre docentes que favorece una relación bidireccional entre la teoría (producto de la investigación en Matemática Educativa) y la práctica (educativa en matemáticas), dando oportunidad a que docentes tomen bajo su control y se adueñen del saber que enseñan –se empoderen, en el sentido de (Reyes-Gasperini, 2016)– e investigadores reconozcan la realidad que buscan impactar (Montiel, 2016).

Uno de los planteamientos didácticos más notables de la Socioepistemología, por su innovación basada en rediseños al dME –es decir, cambios relativos al saber y su epistemología de partida–, se ha dado en torno al *desarrollo del pensamiento matemático* (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, Garza, 2000) y se fueron dando alrededor de la visualización y el lenguaje gráfico (Cantoral y Montiel, 2001; Farfán, 2013), el cambio y la variación (Dolores, 1999; Cordero, Muñoz y Solís, 2003); el pensamiento trigonométrico (Montiel, 2013), pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini, 2013), entre otros.

En su carácter didáctico, este constructo resulta de interés para la investigación, tanto por lo que se provoque en el profesorado como en lo que se perciba como posible desarrollo en el estudiantado a partir de la reflexión docente, en el proceso de confrontación y resignificación de la matemática escolar. Por lo que precisaremos un poco más en su caracterización.

3.1.3 Pensamientos matemático y geométrico

El pensamiento matemático refiere a “la diversidad de formas en que piensan las personas que se interesan por identificar, caracterizar o modelar conceptos y procesos propiamente matemáticos en ámbitos diversos, reconocido en la actividad humana y, por lo tanto, desarrollable entre todos los seres humanos y en cualquier contexto”. (Cantoral et al. 2015, p. 13).

Otro aspecto importante a considerar es que “... el pensamiento matemático no está enraizado ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana...” (Cantoral, et al. 2000).

Por lo anterior asumiremos que el *pensamiento geométrico* integra las distintas formas de razonar ante una situación, priorizando el *razonamiento geométrico* y considerando al *razonamiento* como la forma de actuar ante una tarea (Torres-Corrales y Montiel, 2020). De tal manera que *pensar geométricamente* demande de usar herramientas, procesos, argumentos asociados a diversas prácticas matemáticas priorizando las geométricas, como son: el trazo, la medición, la construcción, el estudio de las propiedades geométricas de las figuras, entre otras; con lo que se logre que la Geometría sea entendida como la forma en que se estudia e interactúa con el entorno que nos rodea y como un lenguaje para comunicar la experiencia espacial de quien aprende.

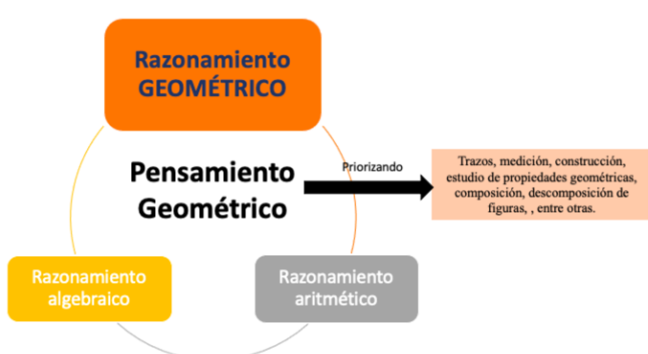


Figura 14. Pensamiento Geométrico. Fuente: Elaboración propia.

3.2 Saberes Docentes

Para identificar si se movilizan otros conocimientos del profesorado, no sólo los matemáticos, al poner atención y modificar ‘el qué enseñamos’, se decidió incorporar a esta investigación el constructo teórico de los Saberes Docentes. Éstos son entendidos como el “conocimiento que los maestros tienen sobre la enseñanza y que desarrollan durante el ejercicio cotidiano de la docencia” (Mercado y Rockwell, 1988; Mercado, 1991, 1994; citado por Mercado y Luna, 2013, p.11). Si bien, las situaciones problemas se han diseñado para que se desarrollen fuera del aula de clase, se reconoce que el profesor continuamente piensa en sus estudiantes y en lo que éstos harían al intentar resolverlas.

Mercado señala también en su investigación cómo los alumnos siempre están presentes en el diálogo que los profesores establecen con diferentes voces (sociales) durante la enseñanza, así como en las decisiones que los profesores toman antes y durante la enseñanza y en muchas de sus dudas y reflexiones. De aquí que consideramos que el profesor, aunque esté en diferentes escenarios, nunca deja de ser profesor y siempre toma en consideración a su alumnado.

Mercado (1991) afirma que “los maestros se forman en la resolución cotidiana de su trabajo, en los contextos educativos y momentos históricos particulares en que éste se lleva a cabo. Durante esos procesos los maestros se apropian de saberes históricamente construidos sobre la tarea docente” (p.69). La apropiación a la que se refiere la autora toma sus bases de las ideas de Heller y refiere que “Apropiarse de esos saberes implica una relación activa con ellos: se reproducen, se rechazan, se reformulan y se generan otros saberes desde las situaciones concretas de enseñanza a las que se enfrenta cada maestro.” (p.70).

Mercado afirma que los maestros se apropian de los saberes necesarios para su enseñanza en diferentes ámbitos: en el trabajo en el aula, con la interacción con sus estudiantes, con los materiales curriculares, con sus colegas, con los padres y con toda noticia o información que les llega de la escuela, pero también fuera de ella, que esté relacionada con la enseñanza. (Mercado y Luna, 2013, p.14).

En su investigación, Mercado reconstruyó algunos saberes docentes y los caracterizó como dialógicos, históricos (presentan huellas provenientes de distintas épocas y ámbitos sociales) y socialmente construidos (lo que hacen y dicen los maestros, no puede verse como una construcción individual). Estos saberes docentes contenían voces provenientes de reformas educativas presentes y pasadas, de experiencias de actualización de los maestros, así como de experiencias de docencia pasada, entre otras. (Mercado y Luna, 2013, p.12).

Así, el interés estará en identificar los saberes que el profesor emplea ante las tareas que resuelve en las situaciones planteadas. Saberes que coexisten de manera articulada en su quehacer, y que resultan decisivos en su relación con la matemática que enseña.

Para los intereses de esta investigación, no es suficiente conocer cuáles conocimientos tiene o no el profesor de matemáticas, la intención es que ellos tengan la oportunidad de vivir una experiencia en donde puedan poner en funcionamiento sus saberes y que se den cuenta que éstos no son estáticos, que se movilizan, es decir, que es posible incorporar nuevos significados a la matemática escolar. En este sentido, lo que se busca es iniciar un proceso de confrontación-resignificación a partir del diálogo entre los diferentes saberes docentes.

3.3 Refinamiento del problema de investigación

A partir de lo descrito en este Capítulo, se ha considerado conveniente el refinar las preguntas y objetivo de investigación.

Preguntas de investigación

P1. ¿Qué recursos epistemológicos construyen o identifican las y los profesores en una experiencia de confrontación de la geometría escolar?

P2. ¿Qué recursos didácticos construyen o identifican las y los profesores en una experiencia de confrontación para la innovación didáctica de la geometría escolar y qué variables externan como condicionantes para esta innovación?

P3. ¿Qué saberes docentes se manifiestan en las y los profesores durante una experiencia de confrontación de la geometría escolar?

Se está considerando a los recursos epistemológicos en el sentido en que los plantea Duval (1998), es decir, como necesarios para el aprendizaje de aspectos geométricos; recordando que para el autor estos recursos son la visualización, la construcción y el razonamiento. En específico para esta investigación se desea identificar qué tipo de recursos asociados a la construcción, al trabajo con figuras, argumentos, procedimientos, entre otros, se detonan cuando se confrontan prácticas aritmético-algebraicas con prácticas geométricas, y los participantes reconocen relevantes para que sus estudiantes aprendan los conceptos en juego.

Objetivo de la investigación

OG. Describir cuáles son los recursos epistemológicos y didácticos que construyen o identifican las y los profesores en una experiencia de confrontación de la geometría escolar, y su relación con los saberes docentes que se manifiestan en este proceso.

Capítulo 4. Metodología

4.1 Investigación basada en el diseño

Dado que se reconoce la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, conocer y comprender qué es lo que sucede en los salones de clases, ha despertado el interés tanto de docentes como de investigadores. Esta situación ha derivado en el surgimiento de distintas metodologías de investigación orientadas a dar explicaciones respecto a ello; una de esas metodologías es la Investigación Basada en el Diseño o investigación de diseño (Design-based research). (Collins et al. 2004)

De acuerdo con Molina et al. (2011), la investigación basada en el diseño es un paradigma de investigación de naturaleza cualitativa, el cual "persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico" (p.75), y cuyo objetivo es: "Analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación" (p. 76).

De aquí que los estudios bajo esta metodología están orientados a entender los procesos de enseñanza y aprendizaje donde el mismo investigador se encuentra implicado. Un aspecto importante de mencionar es que estos estudios "no buscan explicaciones causales sino comprender mejor los procesos estudiados" (Rinaudo y Donolo, 2010 p.19). Es decir, la investigación debe poder explicar por qué y cómo funcionan los diseños y no únicamente limitarse a explicar si éstos funcionaron o no.

4.2 Experimentos de enseñanza

Dentro de la Investigación Basada en el Diseño (IBD), se enmarcan los experimentos de enseñanza. De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos (o profesores, dependiendo del tipo de experimento de enseñanza) y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000).

Valverde (2014), señala que los experimentos de enseñanza no se limitan al diseño y prueba de intervenciones:

> Las sesiones de implementación incluyen determinados supuestos y exigencias específicas teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje, reflejan un compromiso para comprender las relaciones entre teoría, plan de acción diseñado y práctica, al mismo tiempo que el análisis previsto de cada sesión específica puede contribuir a elaborar teorías localizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de un contenido específico. (p.6).

Cobb et al. (2003), puntualizan que existen diferentes tipos de experimentos de enseñanza, dependiendo de quiénes son los participantes, cuál es el espacio para observar, la duración del estudio (horas, meses, años), los objetivos de la investigación, etc. Entre estos estudios, se destacan:

- **Experimentos de diseño "uno a uno",** un equipo de investigación conduce sesiones de enseñanza con un número reducido de estudiantes con el objetivo de crear en menor escala, la ecología del aprendizaje del aula, de manera que se pueda estudiar con una mayor profundidad (Cobb y Steffe, 1983; Steffe y Thompson, 2000).
- **Experimentos con todo el grupo** (whole-class experiment), un equipo de investigación trabaja con un profesor (el cual puede o no pertenecer al equipo de investigación). El equipo se hace cargo de la enseñanza del grupo. (Cobb, 2000; Confrey y Lachance, 2000; Gravemeijer, 1994).
- **Experimentos sobre el desarrollo del conocimiento de profesores en formación**, en los cuales un equipo de investigación ayuda, organiza y estudia la formación de los futuros docentes (Simon, 2000).
- **Experiencia de Desarrollo Docente** (Teacher development experiment), en los cuales el equipo de investigación colabora con profesores en servicio para apoyar en su desarrollo. (Simon, 2000).

4.2.1 Experiencia de Desarrollo Docente (Teacher Development Experiment)

Dadas las características de nuestro objeto de estudio y los objetivos planteados en esta investigación hemos seleccionado como guía metodológica un experimento de enseñanza particular, al que hemos traducido como "Experiencia de Desarrollo Docente" o metodología EDD, por ser una metodología diseñada para trabajar con profesores en servicio. Simon (2000) emplea el término Teacher Development Experiment (EDD) como un intento de distinguirse de los Experimentos de enseñanza, que, si bien reconoce son la base de estos estudios no están centrados en el profesor, ya sea en formación o en servicio.

Aunque desde la Investigación Basada en el Diseño, el uso del término experimento no guarda relación con su empleo en estudios experimentales o cuasi-experimentales, en los cuales se trabaja con grupos control, en esta investigación utilizaremos el término Experiencia, por considerar que describe mejor el tipo de trabajo que se plantea desarrollar, además, desde nuestra postura teórica, no se estudiará al profesor, sino que se trabajará con él.

A continuación, se expondrá una descripción general de esta metodología, retomando el trabajo de Valverde (2014), así como los aspectos que contribuyen de manera específica a este proyecto de investigación.

En esta metodología la investigadora o investigador a cargo promueve el desarrollo de los profesores como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención, tomando en consideración que el desarrollo de los profesores de matemáticas implica tanto lo pedagógico como lo matemático, y este desarrollo sucede no sólo en las clases de matemáticas, sino también en cursos de actualización, en su salón de clases, en los Consejos Técnicos escolares, discusiones con sus colegas, etc.

Otro aspecto importante que menciona Simon (2000) es que desde esta perspectiva el desarrollo del profesor refiere al conjunto de cambios en los conocimientos, creencias, habilidades que sustentan la capacidad de las y los profesores para llevar a cabo sus labores con éxito.

El profesor-investigador

El profesor-investigador es el responsable de la promoción el desarrollo de los y las profesoras participantes a través de actividades planeadas. En todas las sesiones de trabajo es necesario recolectar la información mediante grabaciones de audio y/o video. Después de cada intervención se reúne con su equipo de trabajo para analizar la sesión previa, generar o modificar las siguientes intervenciones.

El doble papel de investigador y profesor proporciona una oportunidad para que desarrolle conocimiento a través de múltiples iteraciones del ciclo de reflexión-interacción. Además de que le es posible experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los profesores participantes (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000).

En las interacciones con las y los profesores participantes, el profesor-investigador pone en uso su conocimiento personal y su intuición, así como el compartido por el equipo de investigación, incluyendo las conjeturas que se hayan realizado respecto al fenómeno estudiado. La interpretación de las interacciones le permite respaldar o constatar algunos aspectos de su conocimiento o concepciones. Este ciclo iterativo de reflexión-interacción entre el profesor-investigador y las y los profesores participantes es de vital importancia puesto que es lo que permite mejorar la comprensión del fenómeno. Molina et al. (2011) mencionan que se espera que todos los participantes de la experiencia construyan aprendizajes.

El observador

El observador es una pieza clave en esta metodología ya que complementa a la profesora-investigadora y amplifica el poder analítico del grupo de investigación, en particular:

a) Representa una perspectiva diferente a la del investigador-profesor
b) Puede observar cosas que el investigador-profesor no vea o complementarlas
c) Pone a discusión las interpretaciones y formulaciones del investigador-profesor
d) Introduce explicaciones alternativas para el análisis de datos
e) Por su naturaleza colaborativa, requiere del investigador-profesor para articular y comunicar sus ideas (y viceversa)

Será importante que quien desempeñe el rol de observador conozca previamente las situaciones a resolver y los propósitos de la Experiencia.

Análisis en curso y retrospectivo

En esta metodología se requiere de dos niveles de análisis de los datos:

- En curso o continuos, ocurren durante y entre las sesiones de trabajo con las y los profesores participantes. Son la base para las intervenciones espontáneas que puedan generar información adicional con el profesorado.

- Retrospectivo, se enfoca en un bloque o conjunto total de las sesiones de trabajo con los profesores. Este análisis implica una cuidadosa revisión estructurada de todos los registros relevantes de la experiencia de enseñanza. El propósito de este análisis es continuar desarrollando modelos explicativos del desarrollo matemático de los profesores participantes de la experiencia.

Cada nivel de análisis sirve al investigador de forma particular.

Construcción del Modelo

Uno de los propósitos de los experimentos de enseñanza, donde está enmarcado el EDD, es que se puedan generar modelos explicativos relativos al desarrollo de las y los profesores durante la Experiencia, para lo cual es importante considerar los análisis en curso y retrospectivos.

Grabación

Es importante registrar en video y audio la actividad en el aula, de manera que incluya a la profesora-investigadora y a los docentes, por lo que es recomendable que se cuente con dos videocámaras ubicadas en posiciones estratégicas, que permitan el registro de las interacciones de los participantes. La revisión de los episodios de enseñanza, así como la transcripción de fragmentos de éstos son esenciales para la realización de los análisis en curso y retrospectivo.

Preparación para el estudio

Para iniciar el estudio EDD, es útil recopilar cierta información de los profesores participantes, ya que pueden ayudar al equipo de investigación a dar sentido sobre algunas de sus acciones o creencias. Para esta investigación se diseñó un cuestionario (Anexo 1) que las y los profesores responderán antes de iniciar la Experiencia. El cuestionario aborda aspectos técnicos de su formación, tales como: años de servicio, grado máximo de estudio, asistencia a cursos de formación, etc. También se les pregunta acerca de temas de carácter pedagógico, por ejemplo, cómo desarrollan ciertos temas geométricos en clase y qué tipo de ejercicios o problemas propone a sus estudiantes.

Fases

Cobb y Gravemeijer (citados en Molina et al., 2011) distinguen 3 fases en el desarrollo de los experimentos de enseñanza donde enmarcamos a los Experimentos de Desarrollo Docente: preparación de la experiencia, implementación y análisis retrospectivo de los datos.

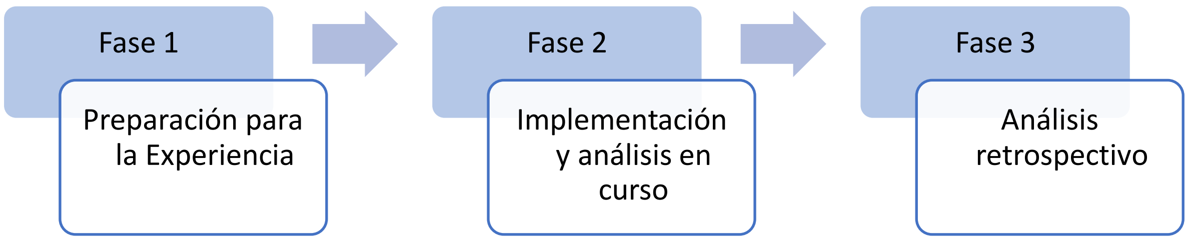


Figura 15. Fases de la Experiencia de Desarrollo Docente

A continuación, mostramos las acciones contempladas en cada una de las fases, adaptadas para esta investigación.

Fase 1: Preparación para la experiencia
– Definir el problema de investigación. – Justificar el interés y la necesidad de realizar el estudio. – Elegir, justificar la elección y describir a los participantes del estudio. – Diseñar la secuencia de intervenciones. – Diseñar los instrumentos de recolección de datos. – Identificar metodologías de enseñanza acordes a los objetivos de investigación planteados. – Seleccionar al equipo observador y discutir con él los objetivos de cada situación problema. – Elaborar hipótesis de investigación relativas al problema en estudio, que puedan ser contrastadas, a partir de las intervenciones en la experiencia. – Identificar los objetivos de la intervención. – Diseñar la siguiente intervención tomando en cuenta: el análisis de los datos, los resultados de la revisión bibliográfica y los objetivos planteados. – Elaborar hipótesis respecto a los resultados que se esperan obtener en la intervención. Intentar prever las reacciones de los profesores y las dificultades que se pudieran presentar. – Ubicar el experimento dentro de un contexto teórico más amplio en el que se enmarque el modelo teórico emergente.

Tabla 10: Acciones que conforman la fase 1, preparación para la experiencia. Fuente: Adaptada de Molina et al. (2011).

Fase 2: implementación y análisis en curso	
Antes de cada intervención	– Identificar los objetivos de la intervención. – Terminar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible. – Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención. – Finalizar la selección de los métodos de recolección de datos.
En cada intervención	– De considerarse pertinente, tomar notas de la intervención por parte de la profesora- investigadora. – Si es necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con sus objetivos. – Recolectar los datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.
Después de cada intervención	– Analizar los datos recolectados en la intervención. – Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.

Tabla 11: Acciones que conforman la fase 2, implementación. Fuente: Adaptada de Molina et al. (2011)

Fase 3: Análisis retrospectivo
– Transcribir los aspectos relevantes de las videograbaciones. – Organizar los datos colectados. – Analizar los datos colectados de forma conjunta. – Dar respuesta a los objetivos del estudio. – Contrastar los resultados obtenidos con los de otros estudios. – Generar explicaciones del aprendizaje o desarrollo de los profesores, de las tareas realizadas, de los cambios que son considerados aprendizaje o desarrollo de los profesores durante la experiencia, entendiendo éstos como los provocados por las maneras de operar y las situaciones problema puestas en juego por el profesor investigador.

Tabla 12: Acciones que conforman la fase 3, Análisis retrospectivo. Fuente: Adaptada de Molina et al. (2011) y Valverde (2014)

Criterios de evaluación de la Investigación Basada en el Diseño

Respecto a la evaluación de la calidad de los estudios de diseño, que es donde enmarcamos las Experiencias de Desarrollo Docente, hay tres aspectos que son importantes mencionar: fiabilidad, replicabilidad y capacidad de generalización.

Molina et al., (2011) mencionan que la fiabilidad es el grado en el que las inferencias o afirmaciones son razonables y justificables y se mide en términos de que:

a) El análisis haya sido sistemático y haya permitido la confirmación o refutación de conjeturas.
b) Los criterios utilizados para las argumentaciones sean explícitos, lo cual permitiría a otros investigadores monitorear el análisis.
c) Las argumentaciones y afirmaciones finales puedan ser justificadas siguiendo las sucesivas fases del análisis.
d) El análisis haya sido revisado por otros investigadores.

La replicabilidad se refiere a la capacidad de repetir la investigación, considerando dos posibles escenarios: que, al repetirlo, se obtengan resultados similares a la investigación inicial, lo cual incrementa la confianza en ésta, o bien, se obtengan resultados diferentes y esto puede deberse ya sea a que los resultados iniciales se produjeron por efecto del azar, o bien, por una falta de control de las variables que han contaminado la investigación inicial (efecto de control).

Respecto a la capacidad de generalización Molina et al., (2011) se refieren a ella como aquellos,

> …aspectos del proceso de aprendizaje estudiado que pueden repetirse potencialmente en otros contextos o situaciones. Realizando estudios posteriores que utilicen el modelo obtenido como material conceptual a ser reorganizado, el modelo elaborado será sustituido por otro más avanzado. Así, se comprueban los resultados del primer estudio y se desarrolla el modelo de modo que es aplicable a un mayor número de contextos, aumentando, por tanto, su *capacidad de generalización*. (p. 79).

En este sentido, no se considera que los resultados de la Experiencia sean generalizables en el sentido estricto de la palabra.

Limitaciones

Dentro de las limitaciones que se advierten respecto al uso de la Investigación Basada en el Diseño, se encuentra la gran cantidad de datos que se recogen, provenientes de grabaciones de audio y video, las cuáles son importantes para comprender con detalle qué es lo que sucedió en la Experiencia.

4.3 Prueba Piloto

Con la intención de mejorar la comprensión de cada una de las fases metodológicas descritas anteriormente, se decidió realizar una prueba piloto con un grupo de profesores y profesoras de matemáticas, en Rodríguez-Ibarra & Montiel (2021) se encuentra una versión más detallada de los resultados. A continuación, se reporta de manera sintética la experiencia y las reflexiones derivadas de ella.

4.3.1 Preparación para la prueba piloto

Considerando los procesos de confrontación-significación que se buscaban provocar en el profesorado, en esta fase se realizaron las siguientes acciones:

- Se establecieron los objetivos de la experiencia.
- Se diseñó una Situación Problema que se tituló “*Estimando la temperatura*”.
- Se seleccionaron a los participantes del estudio: 2 profesores y tres profesoras de matemáticas de secundaria.
- Se estimó la duración de la experiencia: 2 sesiones de 2.5 horas.
- Se diseñaron los instrumentos de recolección de datos: cuestionario inicial (Anexo 1), cuaderno de notas para los observadores (Anexo 2).

4.3.2 Implementación de la prueba piloto

La experiencia se desarrolló en las instalaciones de la Universidad de Sonora, en un salón equipado con mesas de trabajo. Se les pidió a las y los profesores participantes que llevaran su equipo de cómputo portátil. Se videograbaron las dos sesiones; se ubicaron dos videocámaras en partes estratégicas del aula a fin de que se tuvieran diferentes ángulos del salón y poder grabar las diferentes interacciones entre los participantes.

El equipo investigador estuvo conformado por la asesora de la investigación (directora de tesis), la profesora-investigadora (la tesista) y dos observadores especialistas en Matemática Educativa. La profesora-investigadora y los observadores tuvieron una reunión previa para explorar y discutir la situación problema, los objetivos de la puesta en escena y el instrumento de registro de datos de los observadores. Después de cada una de las sesiones, el equipo investigador discutió los aspectos más relevantes de la sesión (análisis en curso).

En esta experiencia de trabajo con profesores y se implementó, en un primer momento, la situación problema *Estimando la temperatura*. En ella se buscaba que el profesorado realizara estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover un significado geométrico del Teorema de Tales. Dentro de las tareas se utilizó material manipulable y tecnología digital (Applet de GeoGebra). En un segundo momento en la experiencia, se discutió y reflexionó respecto a las intencionalidades didácticas de la situación problema y el papel del trabajo geométrico.

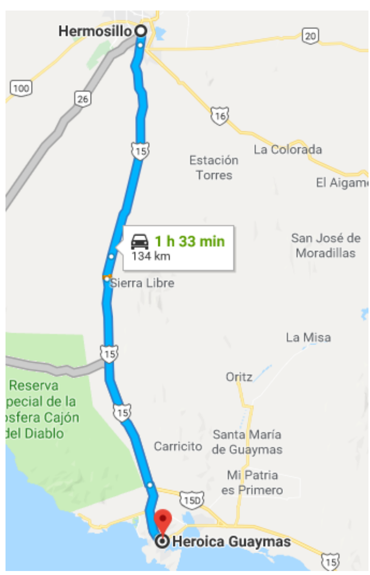


Figura 16. Mapa de la carretera entre la ciudad de Hermosillo y la Ciudad de Guaymas (Google, s.f.). En la situación de aprendizaje se les pide a los profesores que, conociendo las temperaturas de Hermosillo y Guaymas, estimen temperaturas de puntos intermedios.

4.3.3 Resultados de la prueba piloto

En las primeras tareas de la situación problema, las cuales tenían la intención de que se involucraran en el contexto de la temperatura y su estimación, las y los profesores mostraron interés. Como se tenía contemplado, las primeras estrategias de solución estaban centradas en prácticas aritmético-algebraicas (PAA), por ejemplo, el cálculo de proporciones y el cálculo del promedio de dos cantidades, esta última la más utilizada. De manera general, en esta primera parte de la situación, las respuestas estaban más orientadas al cómo y no al por qué, es decir, no se profundizaba en las justificaciones.

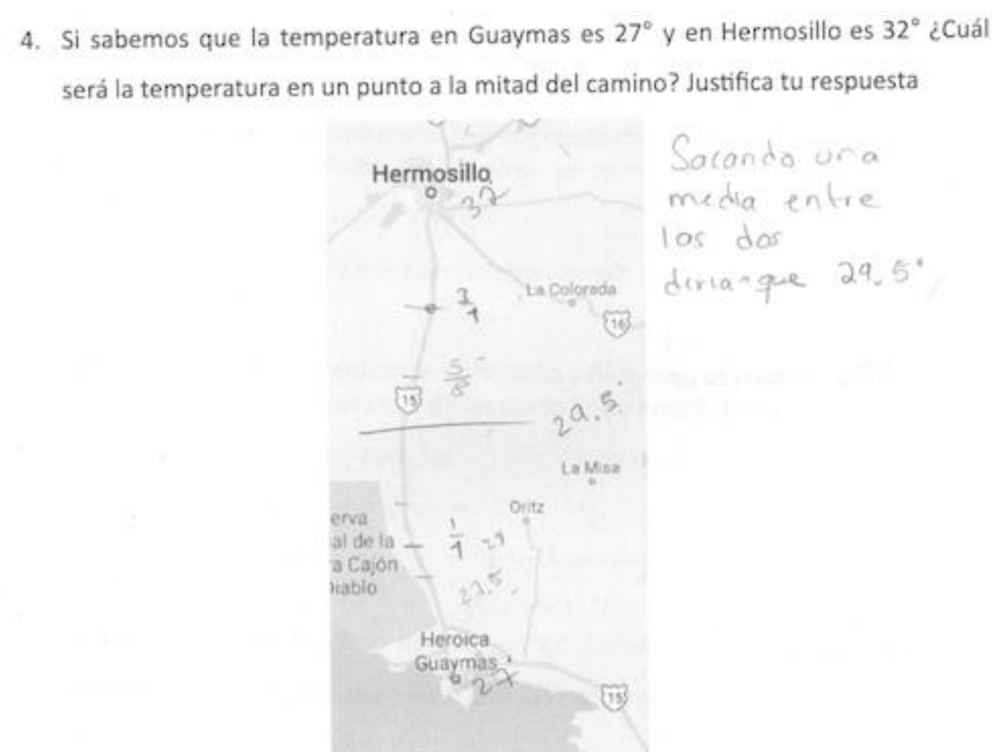


Figura 17. Respuesta de un profesor a la pregunta 4 de la situación de aprendizaje.

En una segunda fase, trabajando con el material manipulable (mapa de la Figura 18 y regleta) y el software de geometría dinámica, se les hicieron cuestionamientos directos acerca de cómo se podría abordar la situación de manera geométrica.

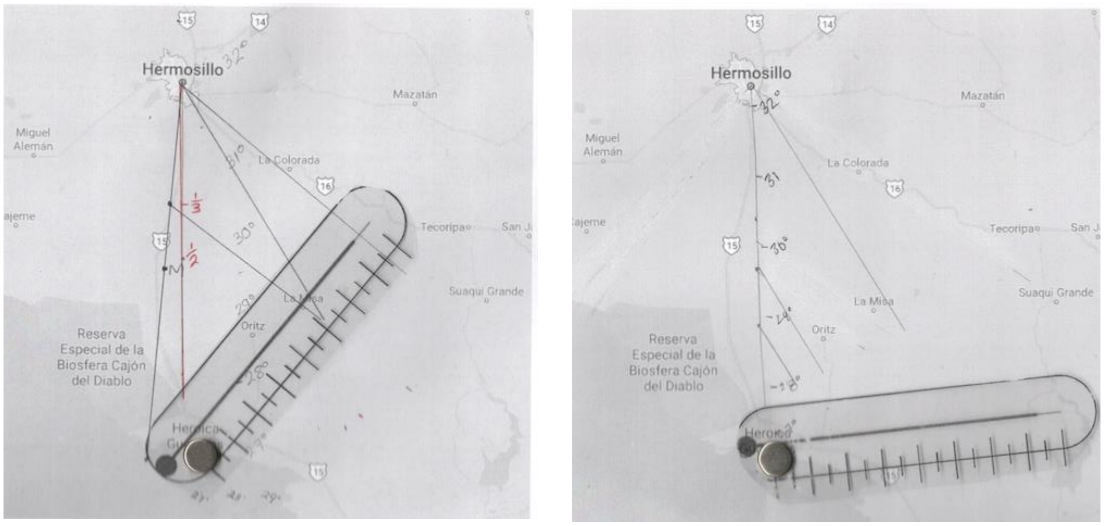
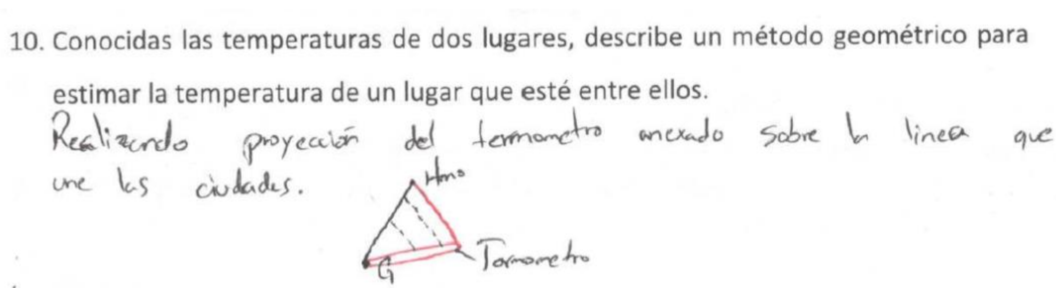
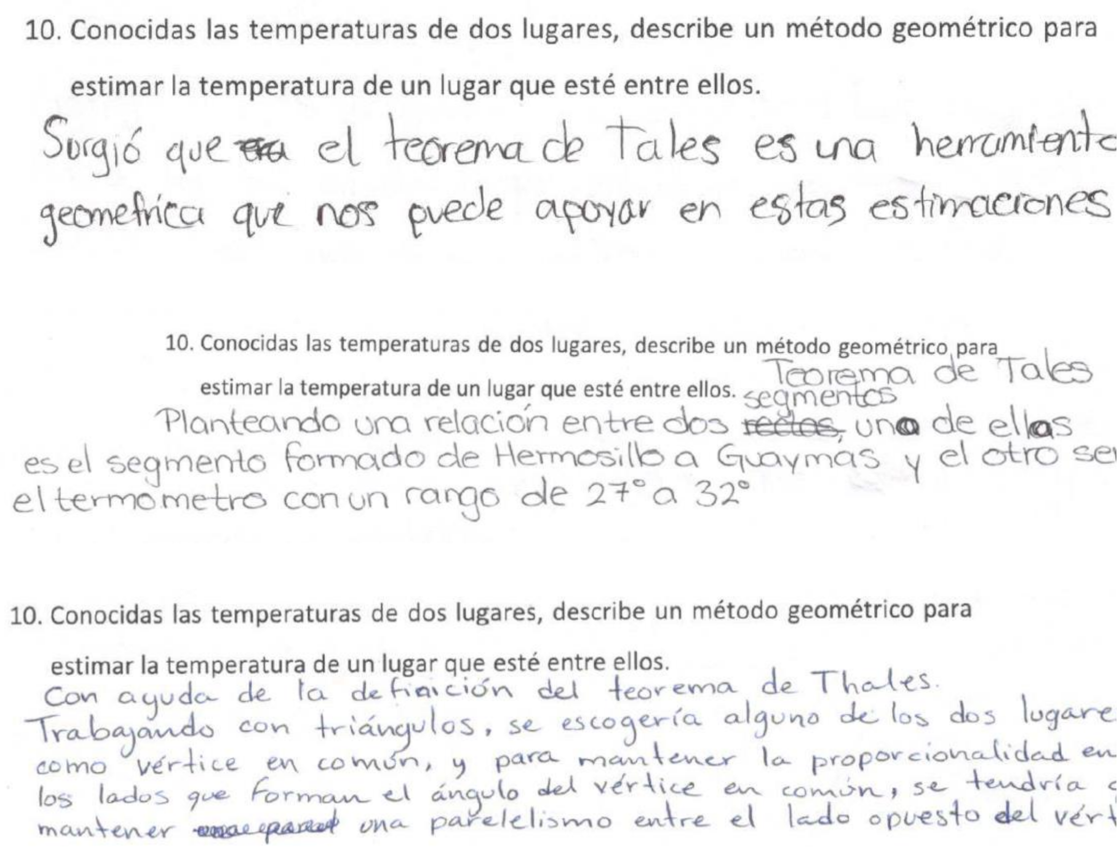


Figura 18. Material manipulable utilizado por dos profesores para resolver la situación.

Dentro de la etapa de cierre de la situación, se les pedía a los profesores que, de manera individual, considerando las discusiones que se habían generado en el grupo y del trabajo con el software, describieran un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos. En la Figura 19 se muestran las respuestas de cuatro profesores, en donde podemos apreciar que, aunque las respuestas están vinculadas al uso del teorema de Tales, la concreción con que se describe el método es distinto. En ninguna de las respuestas se rescata del todo la conclusión, en tanto al método geométrico, que se formuló en la discusión grupal. Sin embargo, se pone en evidencia que, dado que la situación se los demandó, los profesores entran en un proceso de confrontación-resignificación que les permite resolver una misma tarea matemática (estimar la temperatura), a partir de nuevas estrategias y argumentos.


10. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos.

Realizando proyección del termometro anexado sobre la linea que une las ciudades.


10. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos.

Surgió que el teorema de Tales es una herramienta geométrica que nos puede apoyar en estas estimaciones

10. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos.

Teorema de Tales

Planteando una relación entre dos ~~rectas~~ segmentos, una de ellas es el segmento formado de Hermosillo a Guaymas y el otro ser el termometro con un rango de 27° a 32°

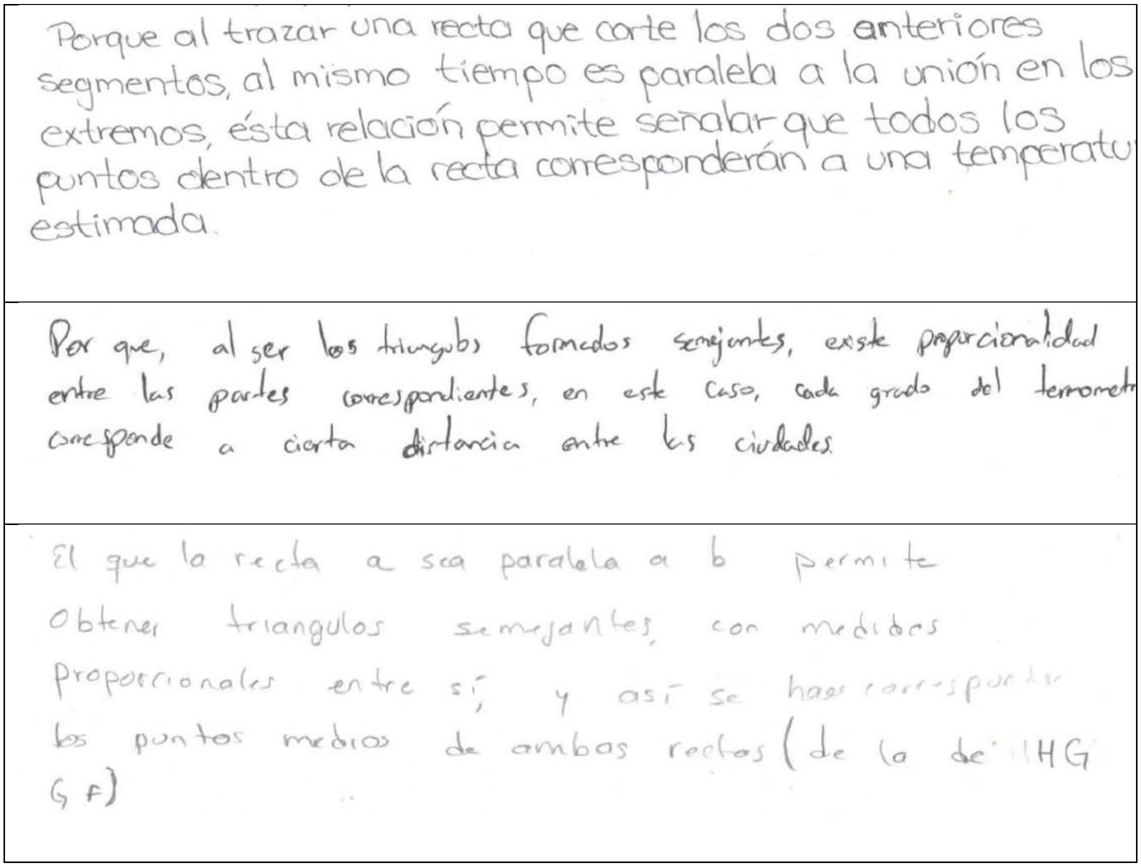
10. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos.

Con ayuda de la definición del teorema de Thales.
Trabajando con triángulos, se escogería alguno de los dos lugare como vértice en común, y para mantener la proporcionalidad en los lados que forman el ángulo del vértice en común, se tendría q mantener ~~[illegible]~~ una paralelismo entre el lado opuesto del vért

Figura 19. Respuesta de cuatro profesores a la pregunta 10 de la situación de aprendizaje.

También se reconoció evidencia del proceso de confrontación-resignificación cuando al pedirles que justifiquen por qué el método geométrico que describieron funciona, los profesores dan muestra de una gama más amplia de formas de razonar y resolver la situación, que al hacerlo de manera inicial con las aproximaciones aritméticas, en donde, a pesar de que la actividad lo solicitaba, no se incluyeron argumentos del porqué su respuesta era correcta.

Si bien las argumentaciones dadas en la pregunta 11 muestran algunas limitaciones, al menos, en lo escrito por los profesores, identificamos al poner a discusión este tipo de situaciones se enriquecen los significados en torno a lo geométrico.



Porque al trazar una recta que corte los dos anteriores segmentos, al mismo tiempo es paralela a la unión en los extremos, ésta relación permite señalar que todos los puntos dentro de la recta corresponderán a una temperatu estimada.

Por que, al ser los triangulos formados semejantes, existe proporcionalidad entre las partes correspondientes, en este caso, cada grado del termometr corresponde a cierta distancia entre las ciudades.

El que la recta a sea paralela a b permite obtener triangulos semejantes con medidas proporcionales entre sí, y así se hace corresponder los puntos medios de ambas rectas (de la de IHG GF)

Figura 20. Respuesta de tres profesores a la pregunta 11 de la situación de aprendizaje.

Al final, en la discusión grupal, sin que la actividad se los demandara, los profesores reflexionaron respecto a las ventajas de introducir el teorema de Tales en un entorno geométrico contrastándolo con la manera en cómo usualmente lo promueven algunos libros de textos y cómo ellos lo han abordado en el aula. Sin embargo, concluyeron que, aunque era posible resolver la situación de manera geométrica, a sus estudiantes les resultaría más familiar utilizar métodos aritméticos-algebraicos.

4.3.4 Reflexiones de la prueba piloto

A manera de reflexión queremos señalar que, si bien a partir de esta experiencia de trabajo con el profesorado se vio la necesidad de hacer cambios en la situación planteada a fin de promover un mayor trabajo geométrico, pudimos reconocer que al proponer a las y los profesores trabajar con tareas no típicamente escolares, donde se pongan en uso nociones geométricas, en algunos casos resulta desafiante debido al peso que tiene el discurso Matemático Escolar en su actividad matemática y en su práctica docente. En ese sentido, se decidió realizar cambios en el diseño de las situaciones problema, con el objetivo de refinarlos; esto es, las situaciones problema ya no estarían orientadas a provocar de manera forzosa estrategias geométricas de inicio. Por el contrario, se esperarían las resoluciones aritméticas y algebraicas que permitieran, en fases posteriores, la confrontación con el trabajo geométrico para dar cuenta de la riqueza –en relación con los argumentos, significados y procedimientos– que se desprenden de éste. Así, resultó necesaria introducir una etapa de discusión y reflexión con los participantes, que permitiera profundizar en los saberes docentes.

Otro aspecto importante que queremos destacar es que, durante el desarrollo de toda la experiencia, los profesores manifestaron estar pensando en el tipo de respuestas que sus alumnos darían ante los cuestionamientos o bien, cómo es que adaptarían la situación para llevarla al aula, poniendo especial interés en ajustarla para cumplir con los tiempos marcados por el programa y las condiciones de su salón. Aquí podemos reconocer que las fuentes más importantes en la conformación de los saberes docentes fueron la voz de los estudiantes y la preocupación por atender aspectos institucionales vinculados a los tiempos asignados para cada tema.

4.4 Adaptaciones metodológicas por COVID 19

Debido a la contingencia sanitaria derivada por COVID 19, fue necesario realizar adaptaciones metodológicas por la modalidad de trabajo que el profesorado seleccionó (una primera sesión presencial y las demás virtuales). Tomando en cuenta que las acciones en las fases metodológicas descritas previamente habían sido planeadas para trabajo presencial con profesores, a continuación, se describen las fases de la experiencia con las adaptaciones pertinentes.

4.4.1 Fase 1: Preparación para la Experiencia

A partir de los resultados de la prueba piloto y con la intención de propiciar más oportunidades para que el profesorado pudiera vivir momentos de confrontación-resignificación de la matemática escolar, en particular de lo geométrico, se configuró la siguiente estructura para la experiencia:

Número de sesión	Objetivo	Duración	Modalidad
1	– Realizar presentación de la profesora-investigadora y los participantes. – Explicar los objetivos y dinámica de trabajo de la experiencia. – Aplicar cuestionario inicial. – Entregar carta consentimiento de participación. – Entregar los materiales manipulables que se usan en las situaciones problemas. – Explicar aspectos técnicos del uso de lecciones en GeoGebra.	2.5 horas	Presencial
2	– Resolver y analizar situación problema 1	2.5 horas	Virtual
3	– Resolver y analizar situación problema 2	2.5 horas	Virtual
4	– Discutir y reflexionar de manera general acerca de lo vivido en las sesiones 2 y 3. – Realizar valoración final de la experiencia de Desarrollo Docente – Despedir a los participantes.	2.5 horas	Virtual

Tabla 13. Estructura de la Experiencia

Situaciones problema

Se diseñaron dos situaciones problema con el objetivo de que el profesorado iniciara un proceso de confrontación-resignificación al resolverlas y discutirlas de manera grupal. Las situaciones tienen las siguientes características:

- Se componen de cuatro etapas
  - **Inicio:** en esta etapa se trata de que los participantes se acerquen a la situación problema, la entiendan y se familiaricen con el contexto a trabajar.
  - **Desarrollo:** en esta etapa se espera que los participantes den respuesta a tareas matemáticas poniendo en uso sus conocimientos, que formulen y validen con o sin uso de tecnología sus conjeturas, que compartan sus resultados con el grupo.

- **Cierre:** en esta etapa, si es que no surgió antes, se propone a los participantes el uso de herramientas geométricas para resolver ciertas tareas de las situaciones. Además, se espera que en esta parte de la situación los profesores puedan a partir de las discusiones grupales, establecer conclusiones generales respecto a lo que se estuvo trabajando a lo largo de la situación.
- **Reflexión:** una vez resuelta la actividad matemática, en este apartado se trata de que las y los profesores discutan acerca de los contenidos matemáticos que se desarrollaron, posibles intenciones didácticas y adaptaciones para llevar a sus aulas. En esta etapa se tratará de promover el diálogo entre las distintas voces sociales de las y los profesores.

- Se considera el uso de material físico manipulable, así como recursos digitales.
- Se consideran contextos extra-matemáticos.
- Se incluyen momentos de reflexión y discusión grupales respecto al contenido matemático y aspectos didácticos abordados en la situación.

Si bien, las situaciones problemas pueden ser abordadas o resueltas en su mayoría con prácticas (herramientas, procedimientos o argumentaciones) aritmético-algebraicos, se tratará de reflexionar respecto a lo enriquecedor que resulta la incorporación de prácticas geométricas.

En la siguiente tabla declaramos los objetivos de cada situación problema

Situación Problema	**Objetivo**
Estimando la temperatura	Promover una interpretación geométrica del Teorema de Tales.
Antenas telefónicas	Enriquecer el significado de la mediatriz a partir de su construcción.

Tabla 14. Objetivos de cada una de las situaciones problemas que conforman la Experiencia

A continuación, se describen las intencionalidades de cada etapa de las situaciones problema

Situación problema 1: Estimando la temperatura

Etapa 1: Inicio (Tareas 1-3)

En esta etapa se trata de que los participantes se involucren en el contexto de la situación, conozcan las funciones del Servicio Meteorológico Nacional, quien es el encargado de proporcionar información del estado del clima en México, y reconozcan la importancia de conocerla.

Etapa 2: Desarrollo (Tareas 4-14)

En esta etapa se espera que los participantes den respuesta a tareas matemáticas poniendo en uso sus conocimientos, que formulen y validen conjeturas y que compartan sus resultados con el grupo.

De las tareas 4-8 se trata de que las y los participantes realicen conjeturas respecto a cómo es la temperatura en algún punto entre las dos ciudades. Se espera que las justificaciones de los y las participantes se apoyen en prácticas aritmético-algebraicas (PAA) como el cálculo del promedio de dos magnitudes.

En las tareas 9 y 10 se promueve que los y las participantes, con base en lo contestado en las preguntas anteriores, establezcan y validen un método para estimar temperaturas y lo compartan de manera grupal.

A partir de la tarea11, en caso de que los participantes no lo hayan hecho, la profesora-investigadora orientará la discusión a un ambiente geométrico, es decir, invitarles a pensar cómo dar respuesta a la situación de la estimación de temperaturas utilizando prácticas geométricas (PG), para lo cual, se les proporciona material físico (mapa, termómetro y regla). Se espera que los y las participantes realicen trazos auxiliares a fin de establecer relaciones geométricas de la situación.

En las tareas 13 y 14, se trabajará con un applet de GeoGebra, en el cual, las y los participantes podrán ver en pantalla una representación dinámica de la situación trabajada con el material físico. Se busca que a pesar de “arrastrar” los diferentes puntos visibles en el modelo dinámico, se puedan generalizar las relaciones geométricas identificadas en las tareas 11 y 12, es decir, se puedan detectar las relaciones que permanecen invariantes.

Etapa 3: Cierre (Tareas 15-18)

En esta etapa, si es posible, todos los participantes presentarán el método geométrico para estimar las temperaturas y argumentarán por qué funciona. Además, compararán con el método aritmético propuesto anteriormente. En caso de que no haya surgido en la etapa de Desarrollo, aquí se abordará el Teorema de Tales y la relación que tiene éste con el modelo geométrico planteado por los participantes.

Etapa 4: Reflexiones a partir de la situación 1 (Tareas 19-23)

En esta etapa se trata de que los participantes reflexionen respecto a los contenidos matemáticos que estuvieron presentes en la situación, así como que valoren la pertinencia de trabajar este tipo de situación con sus estudiantes y determinen sus intencionalidades. También se dirige la reflexión a distinguir entre el tipo de herramientas, procedimientos y argumentos que surgieron al resolver la situación inicial usando PAA y PG.

Situación problema 2: Antenas telefónicas

Etapa 1: Inicio (Tareas 1-4)

En esta etapa se trata de que los y las participantes se involucren en el contexto de la situación, que relacionen las antenas telefónicas descritas en la situación con las que han visto en su entorno e iniciar con la discusión respecto a cómo se distribuyen por la ciudad.

Etapa 2: Desarrollo (Tareas 5-12)

En esta etapa se espera que los participantes den respuesta a tareas matemáticas poniendo en uso sus conocimientos, que formulen y validen sus conjeturas, que compartan sus resultados con el grupo.

De las tareas 5 a la 14 se trata de que las y los participantes trabajen sobre el mapa de papel, haciendo divisiones en regiones dependiendo del número de antenas y las coberturas de éstas. Se espera que las y los participantes usen el concepto de distancia para hacer las divisiones.

Se busca orientar la discusión a que se identifiquen aquellos puntos del mapa que están a la misma distancia entre antenas.

Es importante promover en esta etapa y antes del uso del applet GeoGebra el trabajo grupal, permitiendo que cada participante presente la división del mapa a fin de comparar y enriquecer la discusión.

En la tarea 15 se trabajará con un applet de GeoGebra, que mostrará en la Vista Gráfica el mismo mapa con el que ya han trabajado en papel. La finalidad aquí es que exploren y utilicen las distintas herramientas del software para validar sus respuestas previas.

En la tarea 17, se trabajará con otro applet de GeoGebra, donde será visible la división en regiones (polígonos de Voronoi), se podrá manipular el número y la posición de las antenas. A partir de la exploración y discusión se espera (en caso de que los participantes no lo hayan mencionado antes) que surja el concepto de mediatriz como lugar geométrico clave para la división en regiones

Etapa 3: Cierre (Tareas 18-24)

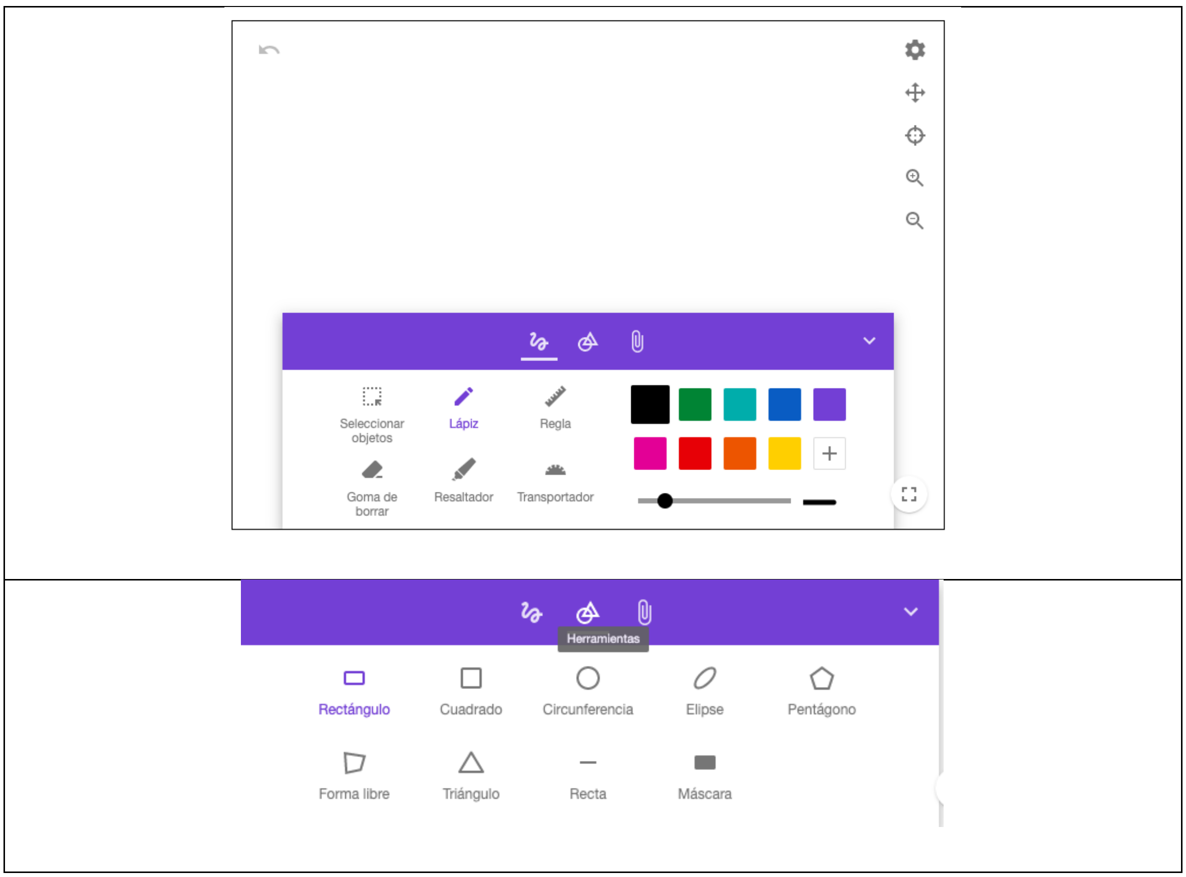
En esta etapa de la actividad se espera que las y los participantes puedan hacer conjeturas o conclusiones respecto a cómo se hace la división de regiones dependiendo del número de antenas y poniendo de manifiesto las propiedades geométricas de la mediatriz. Es importante mencionar que el tipo de argumentos que se esperan, pueden ser intuitivos y vinculados a la experiencia con uso de los applets de la etapa de desarrollo.

Etapa 4: Reflexiones a partir la situación 2 (Tareas 25-30)

En esta etapa se invita a las y los participantes a reflexionar respecto a los contenidos matemáticos que estuvieron presentes en la situación y las posibilidades didácticas de la situación. Además, a pensar en adaptaciones o bien, otros contextos en donde se pueda plantear la situación.

- **Lecciones y Classroom de GeoGebra**

Dado que las dos situaciones problema se resolverían de manera virtual y una parte importante a analizar eran las respuestas del profesorado a las tareas de las situaciones y a la reflexión final, se decidió utilizar la herramienta *Lecciones GeoGebra*, ya que brindaría la posibilidad de registrar diferentes respuestas, es decir, no sólo respuestas de tipo texto, sino también aquellas que requieran de un dibujo, una construcción o adjuntar archivos, además de hacer uso de las diferentes herramientas que ofrece GeoGebra, como se puede ver en la Figura 21. Agregado a lo anterior, se pueden insertar en la lección applets previamente construidos para su manipulación, un aspecto que las dos situaciones problema incluían. Otro punto que se consideró para la selección fue el fácil acceso, es decir, no es necesario que se descargue e instale alguna aplicación, el profesorado podría ingresar a las lecciones por medio de un código y sin necesidad de contar con una cuenta GeoGebra.



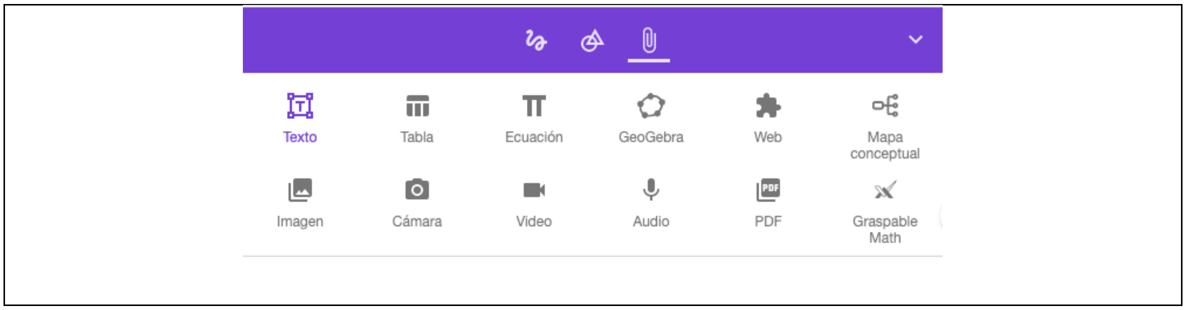


Figura 21. Diferentes herramientas dentro de la lección GeoGebra para responder a las tareas.

Para implementar cada una de las tres lecciones (una para cada situación y otra para las reflexiones finales), se empleó *GeoGebra Classroom*, herramienta que ofrece la posibilidad, en este caso, de que el equipo investigador pudiera monitorear en tiempo real las respuestas y el avance de cada uno de los participantes (Figura 22), además, de ser necesario, entrar a la lección de algún participante y apoyar en aspectos técnicos o retomar elementos para las discusiones grupales.

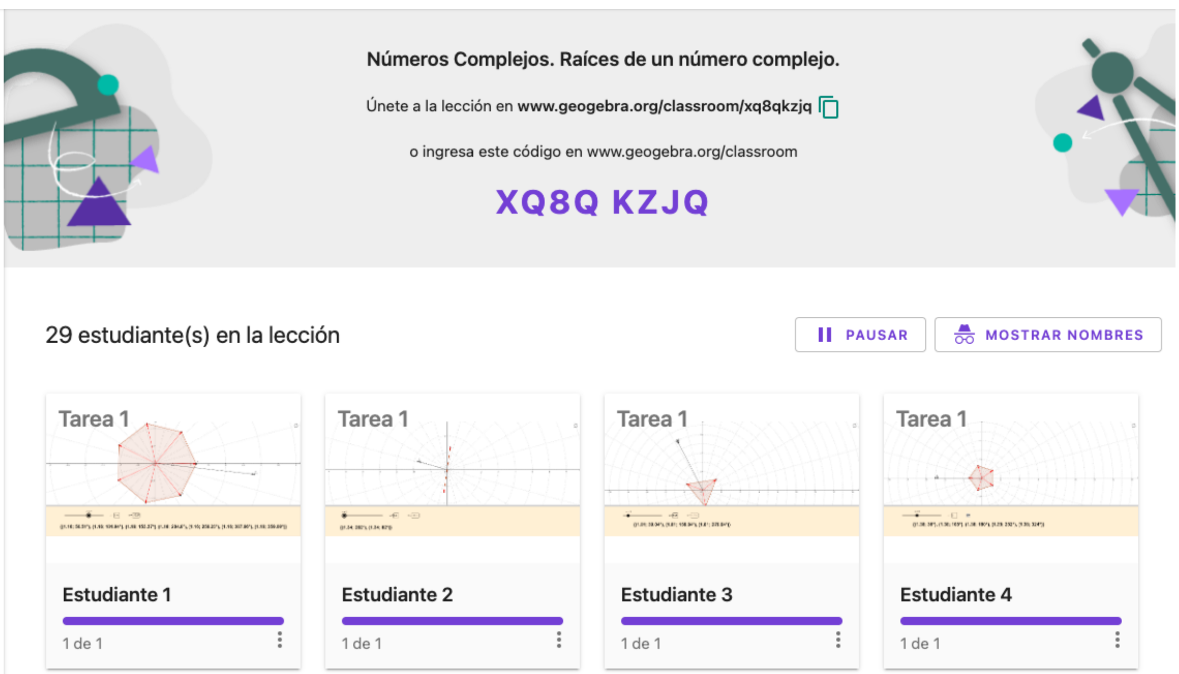


Figura 22. Ejemplo de cómo se ve el progreso de los participantes de una lección en GeoGebra Classroom.

Considerando importante que los participantes no se adelantaran o se saltaran momentos, se decidió crear lecciones separadas para cada sesión de la experiencia. En la siguiente tabla se presentan los links de acceso para cada lección:

Lección	Link de acceso
Situación problema 1: Estimando la temperatura	https://www.geogebra.org/classroom/eguv5b8u
Situación problema 2: Antenas telefónicas	https://www.geogebra.org/classroom/pwa7nxqx
Reflexiones finales	https://www.geogebra.org/classroom/scjyrvts

Tabla 15. Links de acceso para cada lección

Una versión adaptada para impresión de las situaciones puede consultarse en el Anexo 3.

En la situación problema 2 se consideró que se podría prescindir del material manipulable puesto que en la lección de GeoGebra se incluyó el mapa y las herramientas para trazar en él, por lo que la versión en papel podría no resultar de utilidad, sin embargo, finalmente se decidió incluirlo en los materiales a entregar a los participantes.

- **Equipo de investigación**

  En la modalidad de trabajo en línea, el equipo de investigación estuvo conformado por la profesora-investigadora y una asesora especialista en el área; se decidió que no era necesario contar con un observador u observadora por las características de GeoGebra Classroom y la grabación de pantalla de todas las videollamadas.

- **Registro de la información**

  Los instrumentos de registro de información fueron:

  - Cuestionario inicial: aborda aspectos de su formación, tales como años de servicio, grado máximo de estudio, asistencia a cursos de formación, etc.

Incluye preguntas sobre temas de carácter pedagógico, por ejemplo, cómo desarrollan ciertos temas geométricos en clase y qué tipo de ejercicios o problemas trabaja con sus estudiantes (Anexo 1).

- Grabación en video de la sesión presencial: en la sesión 1 de la experiencia se grabó con dos videocámaras ubicadas estratégicamente para una mayor cobertura del aula.
- Grabaciones de las videollamadas.
- Las lecciones de GeoGebra contestadas por cada uno de los participantes.
- Las notas de la profesora-investigadora por sesión.

Selección de los participantes

Para conocer la disponibilidad de horario y la modalidad en la cual preferían participar se les aplicó el siguiente formulario https://forms.office.com/r/UCRN2JpqE9 (Anexo 5). De nueve profesores y profesoras que respondieron, se consideró como único criterio de selección que fueran profesores o profesoras de secundaria en servicio y que pudieran asistir a la totalidad de las sesiones, lo que llevó a seleccionar a tres profesoras y un profesor.

4.4.2 Fase 2: implementación y análisis en curso

La primera sesión se llevó a cabo de manera presencial en el centro de cómputo del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora; dos de las profesoras no pudieron asistir, por lo que se conectaron vía Zoom y se les hizo llegar la carpeta con los materiales manipulables.

Se inició con la presentación de todos los participantes y después se les explicaron los objetivos de la Experiencia y del cómo se estarían usando los datos generados. Los participantes estuvieron de acuerdo y firmaron la carta consentimiento (Anexo 4) y contestaron el cuestionario inicial.

En la siguiente tabla se muestran algunas características de los participantes, con base en sus respuestas al cuestionario inicial (Anexo 1)

	Profesora 1 (P1)	Profesora 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesora 4 (P4)
Formación	Licenciada en Matemáticas. Maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa	Licenciada en Informática. Maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa	Licenciado en Física y Maestro en Ciencias con especialidad en Física	Licenciada en Administración de empresas
Años de experiencia docente	8 años	8 años	6 años	25 años
Cursos de formación	Ninguno	Ninguno	Ninguno	Desarrollo de Competencias. Estrategias Docentes. Filosofía de la educación
Herramientas didácticas que utiliza en su práctica docente	Libro de texto Computadora Pizarrón Internet	Libros de texto Videos tutoriales Aplicaciones digitales	Resolución de problemas prácticos. Elaboración de mapas mentales Juegos de Rol	GeoGebra Power Point Juego de geometría Plano cartesiano Calculadora
Materias que imparte	Matemáticas 1 y 2 (Secundaria) Matemáticas 1, 2, 3 y 4 (Preparatoria)	Informática Tecnología y por impartir Matemáticas	Matemáticas 1, 2 y 3 Física 1, 2 y 3 (Secundaria)	Matemáticas 3 (Secundaria) Cálculo Finanzas Probabilidad Física Contabilidad (Preparatoria)

¿Utiliza tecnología en sus clases?	Plataforma Google Meet Google Classroom Documentos de Google Pizarrón virtual GeoGebra	Planeo usar GeoGebra en la clase de Matemáticas	Cañón, encuestas (quizizz, menti). GeoGebra	Power point GeoGebra Videos tutoriales Word (office) Cañón

Tabla 16. Características de las y el profesor participante en la Experiencia. Con base en las respuestas del cuestionario aplicado en la Sesión 1.

Las tres profesoras y el profesor tenían familiaridad con el uso del software GeoGebra, sin embargo, no habían utilizado las lecciones, por lo cual se les mostraron los pasos para entrar a una lección de prueba y se les dieron instrucciones para registrar sus. Se concluyó la sesión con la entrega de los materiales.

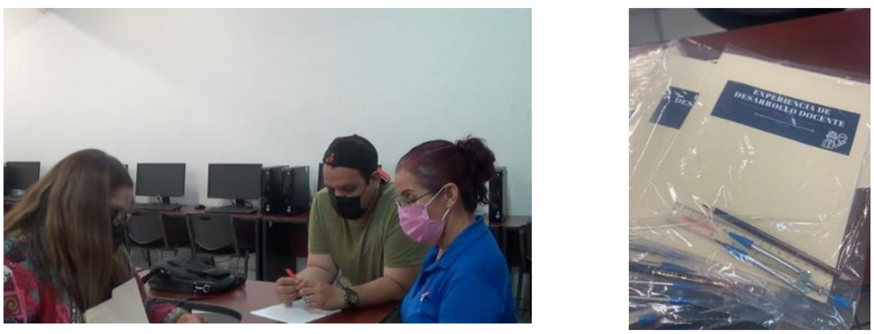


Figura 23. Sesión 1 de la Experiencia de Desarrollo Docente.

Las siguientes tres sesiones se realizaron a través de la plataforma Zoom, las y el profesor se conectaron con audio y video activo y por el chat de las videollamadas se enviaron los links de acceso a las lecciones. Se les explicó que habría momentos de trabajo individual y grupales y la importancia de registrar por escrito sus respuestas.

Al término de cada sesión, la profesora-investigadora realizó anotaciones y una descripción de lo más significativo. Además, se realizaron reuniones con la asesora de la investigación después de cada sesión para analizar lo ocurrido; producto del análisis en curso se decidió realizar algunas modificaciones en la Situación Problema 2. Por ejemplo en la Tarea 4 de S2, en la versión inicial se les proporcionaba únicamente un renglón de espacio para registrar la respuesta y se incluyó un cuadro interactivo para que pudieran utilizar las diversas herramientas de GeoGebra.

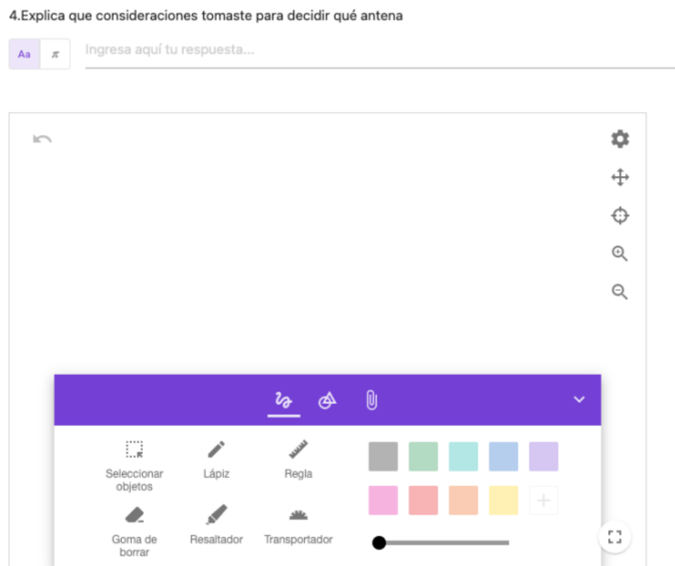


Figura 24. Modificaciones en la Tarea 4 S2 a partir del trabajo en la Situación 1.

Otra modificación que se hizo fue en el apartado de reflexiones finales y la estructura de la última sesión con la intención de provocar mayores discusiones grupales.

4.4.3 Fase 3: Análisis retrospectivo

En la primera etapa del análisis se revisaron y organizaron los instrumentos de recolección de datos; las respuestas del profesorado a las lecciones se vaciaron en una matriz (Anexo 6) a fin de concentrar la información. Se revisaron las videograbaciones de las tres sesiones virtuales, a partir de lo cual se identificaron los momentos de discusión grupal y que no necesariamente quedaron en el registro escrito en las lecciones de GeoGebra y se hicieron transcripciones.

Una vez realizado lo anterior se identificaron las *acciones* y *actividades*, del modelo de anidación de prácticas, a partir de centrar nuestra atención en *lo que se hace* y en *lo que se dice* para así poder determinar qué *recursos didácticos*, qué *recursos epistemológicos* y qué *saberes docentes* manifestaron las y el profesor durante la experiencia.

Capítulo 5. Análisis y resultados

El análisis se realizó, en un primer momento, usando el modelo de anidación de prácticas en los dos primeros niveles, acción y actividades, cuestionándonos lo que el profesorado hizo y lo que dijo que hizo en torno a los diferentes momentos de la experiencia. Para analizar la segunda y tercera sesión, que es en donde se resolvieron las situaciones problema, se decidió dividir el análisis según las etapas de diseño (inicio, desarrollo, cierre y reflexión); los datos se tomaron a partir de la matriz de respuestas de las situaciones (Anexo 6), de las grabaciones de video y de las notas de la profesora investigadora.

En un segundo momento, se realizó un análisis con miras a identificar los Saberes Docentes, así como los recursos epistemológicos y didácticos que el y las profesoras pusieron en juego y construyeron al participar en las distintas tareas contempladas en la Experiencia.

A continuación, se presenta el análisis por momentos, incluyendo algunas evidencias extraídas de las lecciones GeoGebra:

5.1 Análisis de la Situación problema 1: Estimando la temperatura

Situación problema 1: Estimando la temperatura **Etapa: Inicio (Tareas 1-3)**		
Tarea	Acciones ¿qué hace?	Tipo de prácticas
3. Si conocemos la temperatura de dos ciudades ¿Cómo será la temperatura en un lugar que esté entre ellos? ¿Podría cambiar de manera drástica? ¿Qué información necesitamos para estimar la temperatura de este lugar?	El y las profesoras mencionaron una temperatura media. P4: *“calculando la media o el promedio de ambas ciudades. Sería muy inusual que entre dos puntos variara la temperatura bruscamente”*	PAA *Argumentos* asociados al cálculo de la media aritmética

Aunque en la tarea 3 no se pedía realizar explícitamente ningún cálculo, en las cuatro respuestas es notorio cómo se hace alusión a una práctica aritmético-algebraica comúnmente usada en la escuela, promediar cantidades. En particular P4 responde cómo se calcularía, en lugar del cómo sería la temperatura. Además, parece que se confunde "estar entre" con punto medio, o bien hay poca claridad sobre el hecho de que gráficamente el promedio de dos cantidades es el punto medio.

<table>
<tr><th colspan="3">Situación problema 1: Estimando la temperatura
Etapa: Desarrollo (Tareas 4-10)</th></tr>
<tr><td>Tarea</td><td>Acciones
¿qué hace?</td><td>Tipo de prácticas</td></tr>
<tr><td>4. Si sabemos que la temperatura en Guaymas es 27° y en Hermosillo es 32° ¿Cuál será la temperatura en un punto a la mitad del camino? Justifica tu respuesta</td><td>P1: Calcular la media
P2: Promediar las temperaturas y redondear al entero mayor, justificar en términos de la cercanía de las ciudades
P3: Promediar las temperaturas y redondear al entero mayor
P4: Promediar las temperaturas y redondear al entero menor
En los cuatro casos la justificación estaba centrada en el contexto de la situación, mencionando la cercanía y conocimiento que tiene sobre las ciudades, y no en porqué el objeto matemático media aritmética sería un buen estimador.</td><td>PAA
Procedimiento:
Cálculo de la media</td></tr>
<tr><td>6. ¿y a la tercera parte?</td><td>P1, P2, P3 y P4: Calcular la diferencia en grados entre las dos ciudades; dividir entre 3; sumar ese resultado a la temperatura del punto de partida y redondear.</td><td>PAA
Herramientas:
suma, división, resta</td></tr>
<tr><td>9. De manera general, conocidas las temperaturas de Hermosillo y Guaymas, ¿cómo le podrías explicar a alguien cómo estimar la temperatura de un punto que esté entre las dos ciudades?</td><td>P1, P2 y P4: Sacar la diferencia de temperatura de las ciudades; dividir la diferencia entre la proporción de interés
P3: Propone considerar un ascenso lineal en la temperatura y realizar una gráfica</td><td>PAA
Herramientas:
suma, división, resta
Procedimientos:
Graficación en el plano cartesiano
Cálculo de la media</td></tr>
<tr><td colspan="3">Actividad: Considerar un comportamiento proporcional de las temperaturas entre dos ciudades y emplear recursos aritméticos.</td></tr>
</table>

Al estimar la temperatura a una tercera parte de la distancia entre las ciudades, los participantes ofrecieron diferentes respuestas. La base de todas considera un comportamiento proporcional de la situación, pero se toman diferentes consideraciones al momento de establecer la estimación, en la discusión grupal se plantean los argumentos de manera individual y se acuerda que, al ser una estimación, los argumentos vertidos son válidos.

Aproximadamente 29°.Hay 5° grados de diferencia entre Hermosillo y Guaymas. Una tercera parte lo podremos considerar como 5/3 ≈ 1.666, entonces cada tercera parte varía esa cantidad en grados. Cómo nos interesa la tercera parte más cercana a Guaymas y la temperatura ascienda hacia Hermosillo, entonces le agregamos a 1.6 a la temperatura = 28.6, así lo aproximamos al entero más cercano (29°).	Casi 31° por la misma proporción que comente	29	28.7°

Figura 25. Respuestas de los cuatro participantes a la Tarea 6 S1.

En algunas de las respuestas se puede notar cómo los participantes usan el conocimiento que tienen del contexto y contestan en función de eso. Por ejemplo, tomar como referencia que normalmente "hace más calor" en Hermosillo que en Guaymas.

30° aprox por promedio y por la cercania de las ciudades	30 grados. debido a que el clima es desértico en esa región.	Aproximadamente 29°, si consideramos la cercania de las ciudades y la similitud del clima para ambas

Figura 26. Respuestas de P2, P3 y P4 a la Tarea 4 S1.

Tarea 8

8. Se toma la temperatura en un punto entre Hermosillo y Guaymas y el termómetro registra 30° ¿A qué distancia aproximadamente se hizo la toma?

Aa π Antes de llagar a los "pocitos", un poco antes de la mitad

Figura 27. Respuesta de P2 a la Tarea 8 S1.

Un aspecto que llamó la atención fueron las respuestas respecto al cómo poder determinar qué tan buena es la estimación, pues tres de los participantes proponen realizar físicamente el experimento, es decir, registrar las temperaturas de Hermosillo y Guaymas y hacer el viaje hasta la ubicación que esté a la mitad, tercera, cuarta parte, etc. y tomar la temperatura ahí y valorar. La profesora P4 menciona que la manera en la que realiza la estimación es a través de una fórmula conocida (media aritmética), y le parece suficiente para determinar que la estimación es buena, aunque después de escuchar las argumentaciones del resto del grupo comparte la idea de realizar físicamente el viaje. En este momento en la discusión se pone de manifiesto que está pensando en sus estudiantes y lo atractivo que podría resultarles hacerlo.

En la Tarea 9, sorprende que P3 ofrece una estrategia diferente que no había utilizado y tampoco la emplea en las preguntas posteriores, sin embargo, al compartir esta respuesta en el grupo, a las profesoras les parece atractivo poder vincular la situación a un plano cartesiano porque es un tema que se ve en la escuela secundaria y que sus estudiantes podrían relacionar y aplicar.

Podríamos graficar las temperaturas en un plano cartesiano (eje horizontal para distancias) procurando respetar escalas, trazar una línea entre ambos puntos (para considerar una ascenso lineal en la temperatura), colocar el punto en el que se quiere estimar la temperatura y fijarnos donde la vertical desde este punto interseca a la recta que pasa por los primeros puntos. La coordenada "y" que tenga esta intersección aproximaría la temperatura.

Figura 28. Respuesta de P3 a la Tarea 9 S1.

En la explicación de P3 comenta que sería provechoso el incorporar el plano cartesiano por si los y las estudiantes cuestionaran respecto a la no linealidad de la situación y se pudiera analizar gráficamente qué otro tipo de comportamiento resulta más conveniente.

<table>
<tr><th colspan="3">Situación problema 1: Estimando la temperatura
Etapa: Desarrollo (Tareas 11-14)</th></tr>
<tr><td>Tarea</td><td>Acciones
¿qué hace?</td><td>Tipo de prácticas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">11. ¿Cómo podrías utilizar el material que se te ha proporcionado (mapa, termómetro y regla) para estimar las temperaturas?</td><td rowspan="2">P1: Adaptar el material manipulable a la solución aritmética previa considerando la medida a escala de la distancia
P3: Trazar circunferencias
P4: Dividir el termómetro y tomarlo como un eje de coordenadas cartesiano donde cada punto lo relaciona temperatura y ubicación</td><td>PAA
Herramientas
resta, división
Procedimientos
Regla de tres
Eje de coordenadas</td></tr>
<tr><td>PG
Herramientas
regla
Procedimientos
Medir distancias
Trazar circunferencias</td></tr>
<tr><td>15. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la</td><td>P1: Trazar líneas para formar un triángulo y relacionar la distancia entre ciudades con la diferencia de temperatura y aplicar regla de tres</td><td>PAA
Herramientas
Plano cartesiano
Procedimientos
Regla de tres</td></tr>
</table>

temperatura de un lugar que esté entre ellos	P2: Calcular la proporción de temperatura en un punto, considerando una distancia fija entre ciudades P3: Construir triángulos semejantes y usar razones para encontrar el valor faltante. P4. Usar el termómetro y la distancia entre las ciudades como ejes de coordenadas	Ubicación de puntos en un plano cartesiano
		PG *Herramientas* Teorema de Tales Triángulos semejantes *Argumentos geométricos* *Procedimientos* Trazar líneas Construcción de triángulos
Actividad: Calcular proporciones; usar semejanza de triángulos		

En la tarea 11, donde se solicitaba que se utilizara el material manipulable (mapa, termómetro y regla) para estimar la temperatura, las y el profesor, en un primer momento muestran incertidumbre del cómo utilizarlo y dan muestra de querer adaptar la estrategia aritmética utilizada previamente; sin embargo, en un segundo momento, después de manipular el material, surgen nuevas estrategias como las propuestas por P3 y P4, las cuáles a partir de la discusión grupal, son desechadas por considerar que no son tan buena estimación como cuando se usa la media aritmética. En particular P3 menciona en la discusión grupal que consideró la estrategia propuesta debido a que en el paquete de materiales que se les entregó venía un compás, por lo tanto, se debía de usar de alguna manera.

Realizar una suerte de curvas de nivel (pero de temperatura) creando círculos espaciados una misma distancia, digamos 5 cm. y tomar el termómetro para poner los grados en el. luego checar cuantos grados se mueve la temperatura cuando pasas de una curva a otra.

Figura 29. Respuesta de P3 a la Tarea 11 S1.

Un aspecto importante a resaltar es que el material manipulable entregado a las y el profesor eran iguales, es decir, el termómetro y el mapa tenían la misma medida en los cuatro casos, además, la medida del termómetro coincidía con la distancia a escala entre las ciudades en el mapa de papel, lo cual pudo haber sido poco favorecedor al momento de analizar la situación, puesto que la estrategia aritmética pudo ser explicada en términos del material. Por lo que la profesora-investigadora, de manera grupal, planteó el caso en el que se quisiera estimar la temperatura utilizando un termómetro que no coincidiera con la distancia, ya sea que fuera más pequeño o más grande. Esta pregunta fue clave para que surgieran otro tipo de razonamientos y argumentos. Se vinculó esta pregunta con la manipulación en el applet de GeoGebra, donde se podían ver diferentes casos, lo cual no era posible con el material manipulable y además ayudó a entender la nueva situación planteada.

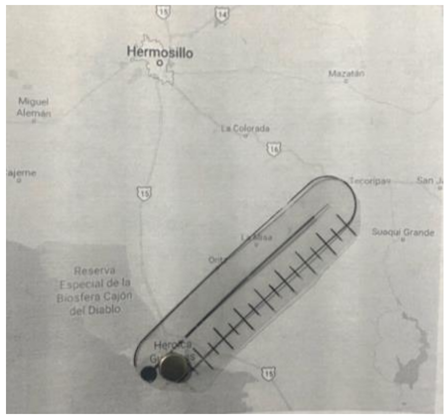


Figura 30. Imagen del material manipulable usado en la Situación 1. Mapa a escala y termómetro movible.

Una vez manipulado el applet, en la Tarea 14, se les solicita explícitamente un método geométrico que pueda estimar la temperatura; tanto en el discurso como en las respuestas que dan en la lección se nota un cambio en el tipo de argumentación, en específico se alude al Teorema de Tales. La aparición del Teorema surge a partir de poder ver diferentes configuraciones (posición y medida del termómetro) lo cual lo relacionamos con que pudieron establecer una relación entre las figuras prototípicas con las que se estudia el Teorema en la escuela y lo que veían en pantalla.

P1	Utilizar las proporciones y el Teorema de Tales (dibujando las líneas correspondientes que conforman a un triángulo para relacionar visualmente la distancia entre ciudades y la diferencia de temperaturas entre éstas). Una vez determinado el valor faltante en la proporcióny dependiendo del lugar en el que se encuentre el punto al que queremos estimar la temperatura, se sumaría o restaría la cantidad obtenida a las temperaturas que tenemos en los extremos.

P2	Con la relación de las temperaturas proporcionales, considerando que la distancia total es 10
P3	Realizar triángulos semejantes entre la línea que une Guaymas con Hermosillo y el termómetro, después de identificados los segmentos usar razones de semejanza para encontrar el faltante.
P4	Usando un plano de dos dimensiones: Eje x temperatura y eje y distancia entre los dos puntos

Figura 31. Respuestas a la Tarea 14 S1 de las y el profesor.

Situación problema 1: Estimando la temperatura Etapa: Cierre (Tareas 15-18)		
Tarea	Acciones ¿qué hace?	Tipo de prácticas
16. Explica por qué el modelo anterior funciona	P1: Relacionar la diferencia de temperaturas y la distancia entre las ciudades para encontrar la temperatura en un punto P2: Verificar el resultado con el uso del Teorema de Tales P3: Argumentar en términos de la veracidad del Teorema de Tales P4: Sustentar su funcionalidad en términos del Teorema de Tales	PAA *Procedimientos* Relaciones entre cantidades Regla de tres
		PG *Argumentos* Teorema de Tales *Procedimiento* Teorema de Tales
18. Si comparamos el método para estimar temperaturas presentado en la pregunta 9 con el de la pregunta 13, ¿cuáles son sus diferencias?, ¿consideras que uno es mejor que otro? Argumenta tu respuesta	P1: Afirmar que los métodos son casi iguales P2, P3 y P4: Reconocer la diferencia entre los métodos de solución planteados	PAA *Argumentos*
		PG *Argumentos*
Actividad: Reconocer la aplicabilidad del Teorema de Tales en una situación		

Otro aspecto importante que se destaca es la no necesidad de justificar afirmaciones o procedimientos cuando éstos emplean o se sostienen de nociones matemáticas que son consideradas “sólidas”, como el Teorema de Tales o la media aritmética, lo cual se puede apreciar en las respuestas de P3, P4 y P5 a la Tarea 16.

P2	Porque al verificar el resultado de la relación con el teorema de tales se confirmo con los resultados obtenidos anteriormente
P3	Por estar sustentado sobre teoremas como el de Tales, que se ha probado que funciona en incontables veces a lo largo de la historia.
P4	Porque al localizar la temperatura de cualquier punto intermedio se puede usar teorema de tales o regla de proporcion

Figura 32. Respuestas de P2, P3 y P4 a la Tarea 16 S1

Al preguntarles respecto a las diferentes estrategias utilizadas en la Situación (Estrategia aritmética-Estrategia geométrica) las y el profesor consideraron que las dos son correctas y que tener la posibilidad de trabajar las dos le abona a la situación; sin embargo, consideran que la Estrategia Geometría es más precisa argumentando lo que en otras respuestas ya había aparecido respecto a la potencia del Teorema utilizado.

P2	Si son diferentes, y considera que no hay método mejor que otro perc si necesario conocer las diferentes maneras de resolver un mismo problema, y poder explicarlo (geométrico, algebraico)
P3	uno requiere un conocimiento más agudo sobre temas de geometría (pregunta 13) el otro es mas sensible a las escalas y su mal uso (pregunta 9). Para mi, me quedo con el de la pregunta 13 ya que considero que por estar sustentado en teoremas es más fuerte, mas considero un poco más accesible para todos los que sepan graficar el de la pregunta 9.
P4	Hay diferencias claro. Anteriormente usamos un método aritmético, en esta parte usamos un método geométrico. Pienso que ambos son buenos. Me atrevería a decir que el geométrico es mejor y más explícito.

Figura 33. Respuestas de P2, P3 y P4 a la Tarea 18 S1

En la etapa de Reflexiones de la Situación, la maestra P4 tuvo que dejar la reunión, pero contestó las preguntas faltantes antes de iniciar la sesión 3. En la pregunta d) donde se les cuestiona acerca de qué papel jugó el trabajo geométrico en la situación, el profesorado contestó lo siguiente:

P1	Principalmente en el applets, en la aplicación del teorema de tales y en el plano cartesiano. Con lo cual se dio solución al problema
P2	Jugó un papel importante ya que nos ayudó a complementar y mejorar nuestros métodos de resolución.

P3	Fue el protagonista del show
P4	Abrió un mejor camino para calcular lo que se pide. Más explicito y es un general un mejor recurso

Figura 34. Respuestas a la pregunta d) de etapa de Reflexión

Respecto a los Saberes Docentes y los Recursos didácticos

Para esta parte del análisis se revisaron, además de las respuestas a las lecciones, las grabaciones de las sesiones, puesto que las discusiones que se generaban de manera grupal no quedaban necesariamente en el registro escrito y justo en estos espacios de interacción e intercambio de ideas se observaron aspectos de interés para esta investigación. En este segundo momento de análisis se hará uso de algunos episodios tomados a partir de las videograbaciones. A continuación, se presenta los resultados relativos a este momento:

En la Tarea 9, cuando P3 comparte su respuesta de manera grupal, acompaña la lectura de ésta con la siguiente explicación: "*pienso que me entenderían mejor las personas o los estudiantes, o bueno, no sé, los alumnos en principio deberían de tener una habilidad algebraica para entenderlo de las dos opciones".*

A lo que P4 contestó: "*Hay que recordar que estamos siempre al frente, bueno, que los estudiantes con los que trabajamos no tienen siempre las mismas habilidades y en ocasiones a mí me ha pasado que yo me encasillo con un método pero no es el único para encontrar un respuesta y conforme P3 iba describiendo me estaba gustando mucho la idea porque muchos alumnos o nosotros también, aprendemos más rápido cuando vemos una gráfica en lugar de una fórmula por ejemplo, las fórmulas dan miedo, sobre todo a los niños de la secundaria los tienen aterrorizados; las fórmulas, aunque son más fáciles y prácticas para uno, es mucho más fácil aplicar una fórmula pero para los niños es más fácil identificar puntos en una gráfica, entonces se podrían alternar los métodos y como comento, hay diferentes formas de aprender y diferentes alumnos que aprenden de esas maneras, entonces mejor poner las dos opciones, o a lo mejor puede haber más".*

P1 también comentó*:* "*Yo no agregué nada de gráfica pero cuando estaba tratando de escribir también pensé, sería más fácil explicárselo a los niños de secundaria, por ejemplo, más fácil con un dibujito, incluso para uno mismo,…, unos somos más visuales, yo queriéndolo hacer mental, ¿para qué batallo pues? sí puedo apoyarme en las gráficas…yo creo que es importante complementar con los dos, tanto con las operaciones a realizar y explicarles el método y complementar con las gráficas para aquellos alumnos que sean más visuales, a veces queda la info en el aire y no aterrizan la idea y a veces con los dibujitos o dibujar la recta se dan una mejor idea y comprenden mejor".*

De la discusión grupal se puede apreciar cómo el y las profesoras están pensando en sus estudiantes y en el conocimiento que tienen de éstos, argumentando en términos de lo que estarían en condiciones de hacer o entender. Además, ponen de manifiesto experiencias previas al comentar las estrategias que les han funcionado con sus estudiantes. La profesora P3 también comparte sus concepciones respecto al uso de las fórmulas y el impacto que tienen en sus estudiantes.

En la Tarea 10, al preguntarles respecto a la validación de su método, en la discusión grupal dos de las profesoras comentaron lo siguiente:

P4: "*Probar con varias distancias, ahora intenta con un tercio, con un cuarto, con un quinto, con un décimo hasta que el alumno entienda que dependiendo de la distancia le dará diferentes temperaturas".*

P1: "*o hasta al revés, en el punto que dice la temperatura a 30º, pues ya le vamos variando, ahora lo que me preocupa es saber la distancia entonces nada más vamos realizando el procedimiento inverso para llegar al punto de referencia que nos interesa".*

Aunque en la tarea no se pedía que se reflexionara respecto al cómo es que podría explicar la situación a sus estudiantes, tanto P4 como P1 dan muestra de estar pensando en ellos puesto el tono de voz que utiliza P1 en su participación, hace alusión a estarle dando indicaciones del qué hacer a sus estudiantes.

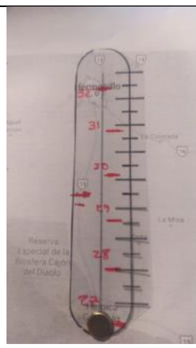
Otro punto que resaltar es la Tarea 11 donde el profesor P3 pregunta si es posible usar el compás, dado que viene en la carpeta de material, pero en la actividad no se ha hecho explícito su uso. Y comenta "*si viene en los materiales seguro es porque quieren que lo usemos, yo así le hago*". Su comentario da evidencia de estar pensando en su rol como profesor y sus experiencias. Además, da cuenta de la necesidad de querer cumplir con lo que él considera que se espera.

Situación problema 1: Estimando la temperatura		
Tarea	**Recursos didácticos**	**Saberes docentes**
9. De manera general, conocidas las temperaturas de Hermosillo y Guaymas, ¿cómo le podrías explicar a alguien cómo estimar la temperatura de un punto que esté entre las dos ciudades?	– Plano cartesiano – Explicación de distintos métodos para resolver una misma situación – Uso de gráficas y representaciones figurales	– Considerar las dificultades de sus estudiantes. – Argumentar en términos de lo que sus estudiantes pueden hacer – Concepciones de la matemática – Experiencias previas
10. ¿Cómo podrías validar o argumentar	– Analizar varios casos particulares para obtener	– Generar explicaciones para sus estudiantes

que el método descrito en la pregunta anterior funciona?	una relación (Generalización) – Realizar procedimiento inverso	

Respecto a los Recursos epistemológicos

Considerando que éstos surgen o se detonan cuando hay momentos de confrontación entre prácticas aritmético-algebraicas y prácticas geométricas, se identifica lo siguiente:

<table>
<tr><td colspan="3">Situación Problema 1: Estimando la Temperatura</td></tr>
<tr><th colspan="2">Momento de confrontación</th><th>Recursos Epistemológicos</th></tr>
<tr><td>
PAA</td><td>

PG</td><td>– Trazado de segmentos auxiliares en la figura
– Análisis de relaciones geométricas entre segmentos
– Identificación de triángulos semejantes</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descripción del momento: La primera parte de la situación (hasta antes de la discusión grupal de la Tarea 13), se resolvió utilizando herramientas, procedimientos y argumentos algebraicos (PAA) basándose principalmente en la aplicación de la proporcionalidad y el cálculo de la media aritmética. A partir de la manipulación con el applet (Tarea 13), en particular al cambiar las condiciones iniciales con el material manipulable, (que la longitud del termómetro ya no coincidiera con la distancia entre las ciudades), se reconoció que el método aritmético-algebraico ya no era funcional lo que les llevó a buscar un uso alternativo del termómetro, (que no había surgido hasta el momento), siendo aquí en donde empiezan a aparecer las primeras ideas geométricas. Las primeras nociones geométricas surgieron al trazar proyecciones (trazos auxiliares) para analizar relaciones geométricas entre segmentos e identificar figuras semejantes a partir de los trazos auxiliares (triángulos). A partir de esta identificación surge como un resultado aplicable a la situación el Teorema de Tales, al usarlo pueden encontrar la estimación de la temperatura en un punto entre las ciudades, independientemente de la distancia entre entre ellas, lo cual no era posible en el acercamiento inicial.</td></tr>
</table>

A partir de la reflexión y discusión grupal de este momento de confrontación es que las y el profesor reconocen que, si bien los métodos de solución que se habían propuesto asociados a las PAA son una buena manera de dar solución a la situación, el método geométrico asociado a PG brinda la posibilidad de discutir otras nociones matemáticas, en particular geométricas, lo cual enriquece la actividad matemática.

5.2 Análisis de la Situación problema 2: Antenas telefónicas

En la etapa de inicio, los primeros cuestionamientos relativos al contexto de las antenas permitieron que el grupo empezara a hacer conjeturas respecto al cómo y qué criterios se utilizan para ubicarlas en una región, algunas basadas en experiencias profesionales previas (P3 comentó que por un trabajo previo en una empresa bancaria tenía cierto conocimiento del cómo se distribuían) y otras basadas en la intuición.

Debido a que la profesora P3 se conectó a la videollamada desde su dispositivo móvil, algunas tareas de la actividad, sobre todo las relacionadas con el trabajo de los applets las realizó de manera física, con el material que se le proporcionó en la primera sesión. Para no perder registro de su actividad se le solicitó enviara fotos de las Tareas por medio del chat de la videollamada al momento de realizarlas. Para el caso de el y las otras profesoras, al momento de compartir sus construcciones, compartieron pantalla de la videollamada para mostrarlas.

A continuación, se muestran los resultados del análisis a fin de determinar las acciones y actividades de acuerdo al Modelo de Anidación de Prácticas.

Situación problema 2: Antenas telefónicas **Etapa: Inicio (Tareas 1-4)**		
Tareas	Acciones ¿qué hace?	Tipo de prácticas
3. En la Figura 1, se muestra la ubicación de dos antenas telefónicas, ¿cuál antena (A1, A2) consideras que reciba la señal de un usuario que esté en el punto P? y 4. Explica que consideraciones tomaste para decidir qué antena	P1, P2 y P3: Determinar la respuesta a partir de la percepción visual considerando la menor distancia P4: Medir la distancia del punto P a cada una de las antenas	PG *Herramientas* Regla *Procedimiento* Medir distancias Comparación de medidas *Argumento* distancia

En la pregunta 3, los cuatro dieron la misma respuesta, sin embargo, las consideraciones para responder fueron de diferente naturaleza. P1 y P2 hicieron una estimación a partir de la percepción visual y P3 y P4 utilizaron herramientas de medición para determinar o corroborar su respuesta.

<table>
<tr><th colspan="3">Situación problema 2: Antenas telefónicas
Etapa: Desarrollo (Tareas 5-9)
Para dos antenas telefónicas</th></tr>
<tr><td>Tareas</td><td>Acciones
¿qué hace?</td><td>Tipo de prácticas</td></tr>
<tr><td>6. Marca en el mapa la región que consideres que le corresponde a cada una de las antenas, utiliza un color diferente para cada región.

7. Explica qué criterio utilizaste para hacer la división anterior</td><td>P1: Trazar circunferencias con centro en A1 y A2 respectivamente y radio la distancia entre ellas
P2: Trazar circunferencias con centro en A1 y A2 y radio el punto P. Después comparar visualmente el tamaño de las circunferencias
P3: Trazar circunferencias con centro en A1 y A2 y el radio a la mitad de la distancia entre ellas
P4: Trazar circunferencias con centro en P y radios las distancias a A1 y A2 respectivamente</td><td>PG
Herramientas
Compás
Radio
Procedimientos
Trazar circunferencias
Comparación de medidas
Comparación de circunferencias
Argumentos
Distancia
Comparación de áreas (sin cálculo)
Punto medio</td></tr>
<tr><td>8. ¿Existen ubicaciones que se encuentren a la misma distancia de las antenas? Márcalos en el mapa</td><td>P1: Trazar circunferencias con centro en A1 y A2 respectivamente y radio la distancia entre ellas y luego trazar un segmento que una las intersecciones de las circunferencias
P2: Solución 1: Determinar el punto medio entre las dos antenas (un único punto). Después considerar todos los puntos que estén sobre la mediatriz/ Solución 2: Trazar un segmento de A1 a A2 y calcular el punto medio, después trazar recta perpendicular al segmento y que pase por el punto medio
P3: Calcular la distancia entre las antenas, con la regla de GeoGebra medir la mitad del segmento, con el transportador de GeoGebra medir un ángulo de 90º
P4: Determinar el punto medio entre las antenas, después construir dos circunferencias con centro en A1 y A2</td><td>PAA
Herramientas
División
PG
Herramientas
Puntos de intersección
Punto medio
Regla
Compás
Segmentos
Transportador
Recta tangente
Recta perpendicular
Ángulo recto
Procedimientos
Trazar la mediatriz
Determinar el punto medio</td></tr>
</table>

	y radio el punto medio y trazar la recta tangente a las circunferencias que pase por el punto medio	*Argumentos* mediatriz Punto medio Recta tangente
9. ¿Qué criterio crees que se use en los casos de la pregunta anterior para determinar qué antena recibe la señal?	P1: Considerar una tercera antena P2, P3 y P4: Considerar la antena menos saturada	
Actividad: Dividir regiones de un plano; Construir un modelo geométrico		

Un aspecto que surgió a partir de las interacciones grupales fue el de la saturación de la señal, es decir, el y las profesoras estuvieron de acuerdo que basándose únicamente en la ubicación (posición geográfica) de un dispositivo móvil, le corresponde una única antena, sin embargo, se cuestionaron acerca de qué pasaría si esa antena se encuentra saturada por la alta demanda de dispositivos y qué impacto tendría en el modelo que plantearon.

Al pedirles que marcaran en el mapa la región que le corresponde a cada antena, podemos ver los diferentes tipos de razonamientos y argumentos.

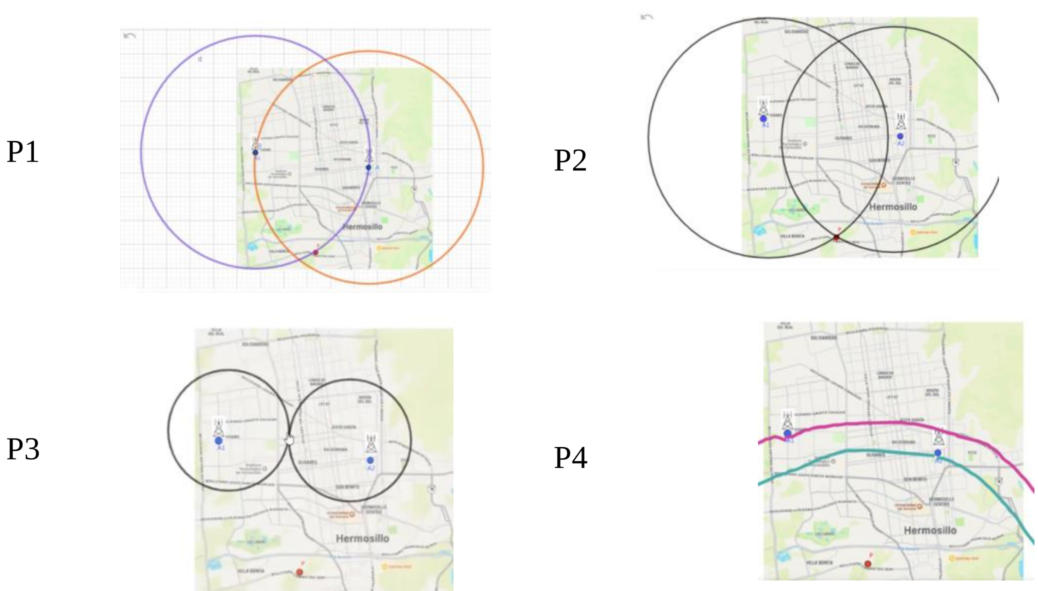


Figura 35. Respuestas a la Tarea 6 S2

Como se puede apreciar en la Figura anterior las cuatro respuestas muestran una distribución distinta de la cobertura de las antenas. Un aspecto que se discutió a partir de que cada participante mostrara al grupo su modelo fue respecto a la “optimización” de la cobertura.

Por ejemplo, en los modelos presentados por P1, P2 y P4 suponen regiones compartidas del plano para las antenas y aunque no se descartaba la idea de que para ciertas ubicaciones se podrían compartir las antenas, se reconoció que las intersecciones entre las dos coberturas no serían las ideales en términos prácticos. En el modelo propuesto por P3 ninguna de las antenas le daría cobertura al punto P, sin embargo, el profesor comenta que priorizo la no intersección. P4 comentó no sentirse satisfecha con su modelo, pero no se le había ocurrido plantearlo de otra manera.

Otro aspecto que surgió en la discusión grupal es que tres de los participantes utilizaron el punto P para realizar sus construcciones, es decir, que la división de la cobertura de las antenas dependía de la posición de P, que era un punto móvil en el mapa, por lo que entre el y las profesoras concluyeron que eso no podría ser posible o no sería conveniente.

Después de la Tarea 7, la profesora-investigadora tomó la decisión de hacer una consideración que no estaba contemplada en el diseño y que surgió a partir de que el grupo constantemente argumentaba en torno a la saturación (entendida como la cantidad de dispositivos conectados a una sola antena) y que cambiaría la distribución de las áreas de cobertura. Por lo cual se les comentó que como no se tenía acceso a mayor información para poderla considerar no se haría, aunque se reconocía como un factor de relevancia en términos de la situación. Esto nos da muestra de que, aunque la situación se ha matematizado, el contexto inicial sigue jugando un papel prioritario al momento de dar respuesta a las Tareas.

Al preguntarles en la Tarea 8 respecto a cuáles ubicaciones del plano quedarían a la misma distancia de las dos antenas, P1, P2 y P3 trazaron un segmento de recta roja como se puede ver en la Figura 36. Un aspecto que no se consideró en el diseño de la situación y que se considera importante incluir en una segunda versión de la situación, es el que se registre por escrito el cómo construyeron ese segmento de recta; en la discusión grupal si se explicó cómo.

La respuesta por escrito de la profesora P4 no se corresponde con su explicación verbal derivado de problemas técnicos con su dispositivo.

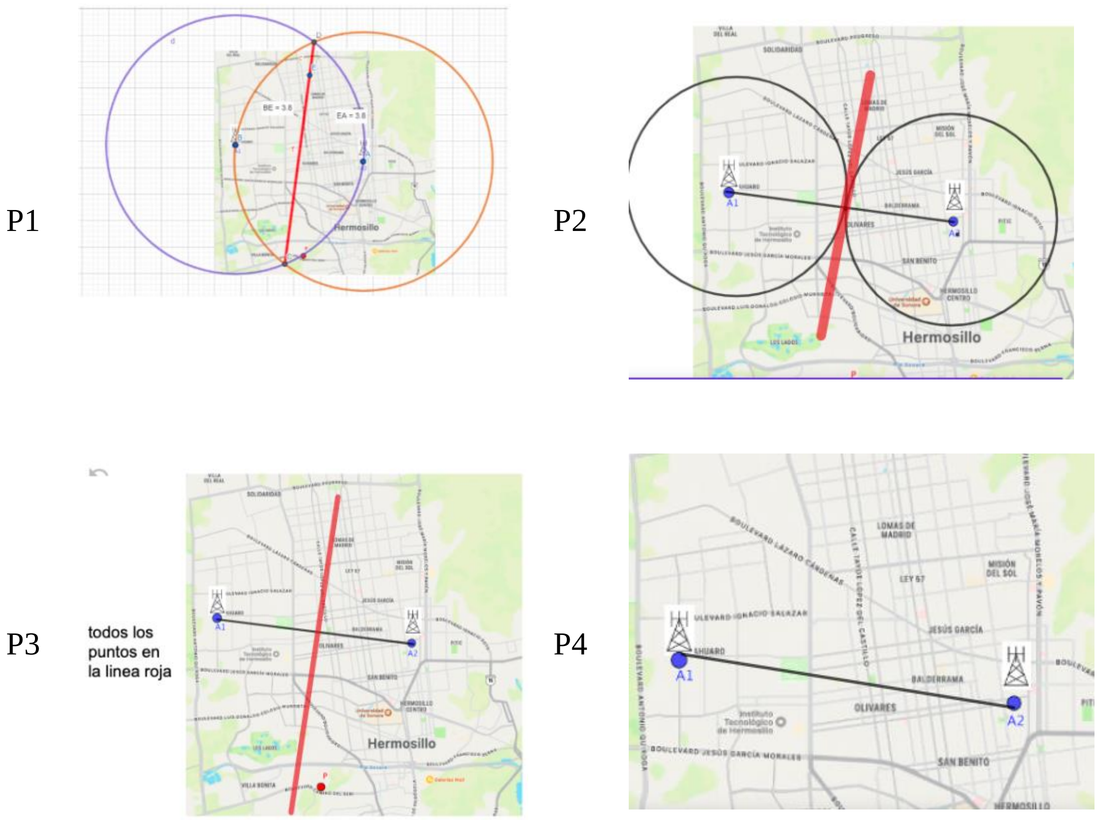


Figura 36. Respuestas a la Tarea 9 S2

En la Tarea 11 se les pide que al igual que en el caso anterior, utilicen el mapa proporcionado para delimitar las áreas de cobertura de cada antena, llama la atención que P1, emplea un procedimiento similar al caso de las dos antenas, aunque ya se había comentado las desventajas de éste. Los profesores P3 y P2 si tomaron en consideración lo comentado para el caso anterior e hicieron cambios en su modelo, sin embargo, la justificación del cómo se hizo la construcción daba indicios de que se buscaba reducir las intersecciones entre las tres circunferencias, pero con poca reflexión sobre los aspectos geométricos empleados. La profesora P4, con ayuda de regla, compás y el mapa en físico hizo una construcción y fue la única que retomó la discusión de las tareas previas y utilizó la mediatriz en su construcción. Cada integrante del grupo presentó su modelo y explicó cómo se construyó; el y las profesoras retroalimentaban los modelos, por ejemplo, para el modelo del profesor P3, se le señaló que en su división había una sección del plano para la cual no se le correspondía ninguna antena, y aunque reconoció que era una falla en su división, dio una explicación en términos de la situación, mencionando que había ciertos ubicaciones o lugares en donde los dispositivos no tienen señal.

En la siguiente figura se muestran las modificaciones que hizo la profesora P2 a su modelo. La primera versión la construyó fuera de la lección de GeoGebra por sentirse más familiarizada con las herramientas de la versión que ella usualmente emplea. Para construir este modelo construyó tres circunferencias con centro en cada una de las antenas y radio la distancia a A2 (para el caso de las circunferencias con centro en A1 y A3), para la circunferencia en A2 tomó como radio la distancia a A1, argumentó su construcción en términos del contexto de la situación, pero sin apoyo de las nociones geométricas. Al momento de explicar su construcción, la profesora manifestó no sentirse conforme con las intersecciones entre las circunferencias por lo que en su segunda versión del modelo con la intención de reducir las regiones de intersección cambia el radio de las circunferencias, pero sin sustento geométrico, es decir, construyó las circunferencias con centro en cada antena y el radio lo determinó con base en su percepción visual.

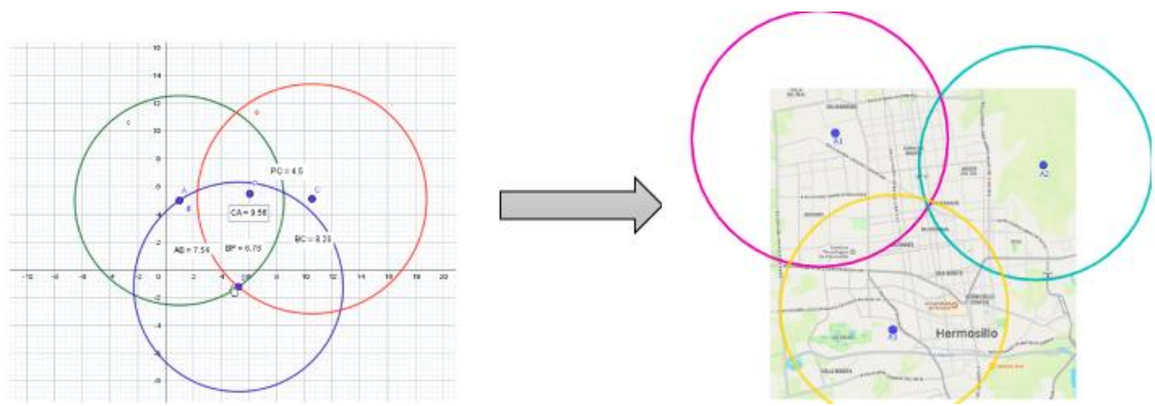


Figura 37. Modificaciones al modelo de la profesora P2

P1 P3 P4

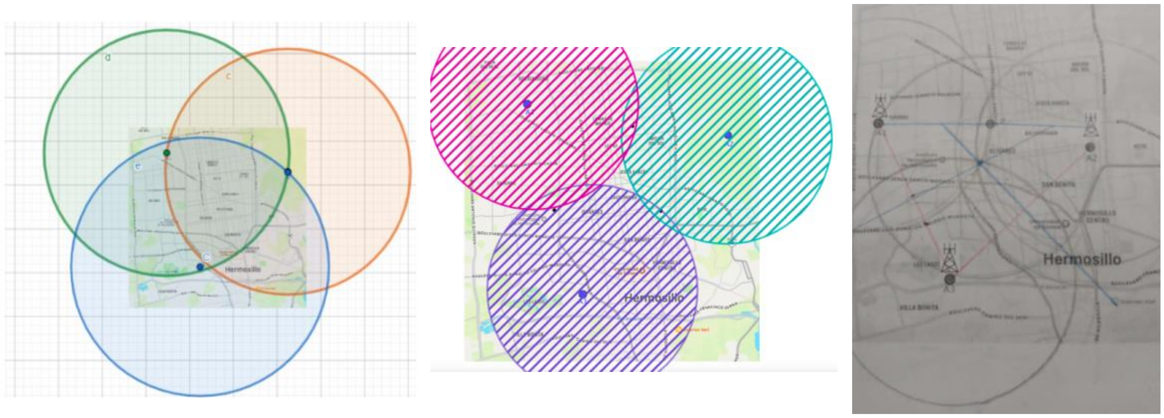


Figura 38. Respuestas a la Tarea 11 S2

Una vez presentada la construcción de las y el profesor, la discusión grupal siguió y el grupo pidió a la profesora P4 que explicara con mayor detalle su construcción. Como la profesora no tenía la posibilidad de compartir pantalla, P4 le dio las indicaciones paso a paso a P1 para realizar la construcción en GeoGebra y que los demás pudieran ir viendo en pantalla, por lo que el y las profesoras realizaron en las tareas posteriores se vio influenciado por lo discutido en este momento.

Situación problema 2: Antenas telefónicas **Etapa: Desarrollo (Tareas 10-15)** **Para tres antenas telefónicas**		
Tareas	Acciones ¿qué hace?	Tipo de prácticas
11. Marca en el mapa las regiones correspondientes para cada antena, utiliza un color diferente para cada región 12. Explica cómo es que hiciste la división anterior	P1: Construir tres circunferencias con centro en A1, A2 y A3 respectivamente y tomando como radio de las primeras dos la distancia entre ellas y como radio de la circunferencia con centro A3, la distancia a la antena más cercana P2: Construir tres circunferencias con centro en cada una de las antenas y radio la distancia a A2 (para el caso de las circunferencias con centro en A1 y A3), para la circunferencia centrada en A2 tomó como radio la distancia a A1 P3: Construir tres circunferencias con centro en cada antena y radio variable determinado por la percepción visual	PG *Herramientas* Compás regla *Procedimientos* Trazar circunferencias Comparación de medidas Comparación de circunferencias Construcción de triángulo Trazo de mediatriz Determinar circuncentro

	P4: Construir un triángulo tomando como vértice cada una de antenas. Trazar la mediatriz a cada uno de sus lados, marcar el punto de intersección (circuncentro) y trazar tres circunferencias con centro en cada una de las antenas y radio el circuncentro.	*Argumentos* Distancia Comparación de áreas (sin cálculo) Condiciones para trazar circunferencias dados tres puntos
14.Explora las diferentes herramientas y úsalas para validar las divisiones realizadas en el mapa (pregunta 11) 15. Describe aquí qué herramientas y cómo las utilizaste para validar tu procedimiento	P1, P2, P3: Trazar la mediatriz de los segmentos que unen a las antenas, marcar el circuncentro. Trazar tres circunferencias considerando como centro la antena y radio la distancia de cada una al circuncentro. P4: Construir un triángulo tomando como vértice cada una de antenas. Trazar la mediatriz a cada uno de sus lados, marcar el punto de intersección (circuncentro) y trazar tres circunferencias con centro en cada una de las antenas y radio el circuncentro.	PG *Herramientas* Regla Compás Segmentos Radio *Procedimientos* Trazar circunferencias Determinar circuncentro Punto medio Mediatriz *Argumentos*
Actividad: Dividir regiones de un plano; Construir un modelo geométrico		

En las Tareas 16 y 17 se les muestra un applet en donde pueden activar la casilla de regiones y se les muestra en pantalla la división de regiones utilizando el diagrama de Voronoi (no se les menciona en la actividad). Se les solicita que comparen su división con la propuesta en el applet y posteriormente que muevan la posición de las antenas para observar cómo cambian las regiones que corresponderían al área de cobertura; en los cuatro casos reconocen a la mediatriz en la división del applet, aunque solo dos profesores lo registran en su respuesta escrita.

En la discusión grupal de la Tarea 17, a partir de explorar diferentes posiciones de las antenas, se reconoce que la construcción propuesta por P4 es consistente con la división propuesta en el applet, y se identifica que la mediatriz es el elemento clave para poder hacer las divisiones.

Situación problema 2: Antenas telefónicas Etapa: Desarrollo y Cierre (Tareas 16-24) Para tres antenas telefónicas		
Tareas	Acciones ¿qué hace?	Tipo de prácticas
17. Cambia la posición de las antenas y observa el comportamiento de las regiones, ¿qué forma geométrica identificas que divide una región de otra?	P1 y P2: Identificar a la mediatriz en una construcción P3: Identificar la relación entre el número de lados del polígono y el número de antenas P4: Clasificar una figura a partir de la medida de sus lados	PG *Procedimientos* Identificar y establecer relaciones a partir de la exploración y manipulación
20. A partir de la exploración y análisis del applet anterior, ¿qué lugar geométrico divide en regiones todas las ubicaciones del mapa para asignar la antena correspondiente?	P1: Identificar un triángulo P2: Determinar que el lugar geométrico que divide las regiones son las circunferencias trazadas con apoyo de las mediatrices P3: Identificar al circuncentro P4: Identificar a polígonos irregulares	PG *Procedimientos* Identificar y establecer relaciones a partir de la exploración y manipulación
21. ¿Qué propiedades tiene ese lugar geométrico?	P1 y P3: Dar la definición de circuncentro como lugar geométrico P2: Dar la definición de circunferencia como lugar geométrico P4: Relacionar al polígono regular con la posición de la antena	PG *Argumentos* Circuncentro Circunferencia
Actividad: Identificar nociones y relaciones geométricas		

A partir de analizar la división con el applet y de lo trabajado a lo largo de la situación, en la Tarea 24 se pide que expliquen un procedimiento para dividir el mapa de Hermosillo conociendo la ubicación de las antenas. Es importante mencionar que en el registro escrito las y el profesor no escribían todo lo que comentaban de manera verbal en lo grupal. Sin embargo, se puede apreciar una diferencia entre los argumentos iniciales que estaban centrados en poco uso de recursos geométricos y más orientado a la percepción visual.

P1	Consideramos tres antenas y trazamos un triángulo al cuál trazaremos sus mediatrices y el circuncentro. Después tomaremos solo un segmento de la mediatriz que inicie del baricentro hacia el lado correspondiente del triángulo
P2	Identificar el centro de los puntos dados, apoyados de las mediatrices y trazar una circunferencia de la antena al nuevo centro identificado en el procedimiento anterior.

P3	Trazar las mediatrices de cada segmento de recta entre antenas y ayudándonos con los puntos de intersección de estas crear las regiones.
P4	TRAZANDO MEDIATRICES ENTRE DOS ANTENAS

Figura 39. Respuestas a la Tarea 24 S2

En la etapa de Reflexiones de la Situación, las y el profesor mostraron interés por la actividad considerando que los contenidos que se desarrollaron competen a lo marcado por el programa de secundaria y consideraron que podría ser atractiva para sus estudiantes y que es una manera alternativa de darle significado a nociones geométricas, como el circuncentro o la mediatriz.

Respecto a los Saberes Docentes y los Recursos didácticos

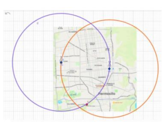
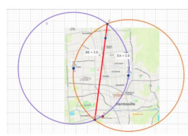
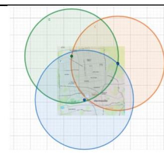
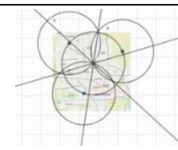
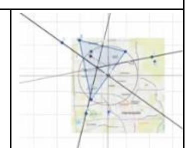
Un aspecto importante a señalar es que, debido a las características de esta segunda situación, vinculadas al trabajo geométrico que se propone, las y el profesor, si bien mostraron interés en la situación, también se cuestionaron respecto de sus prácticas tradicionales, saliendo de lo que coloquialmente se conoce como "zona de confort", lo cual se ve reflejado en el tipo de respuestas y argumentos. En este sentido, a diferencia de la situación 1, donde de manera inicial se tenía un método de estimación (aritmético) reconocido en la matemática escolar, lo cual les permitió manifestar recursos didácticos y Saberes docentes, en esta segunda situación fue hasta el momento de reflexión en donde se identifica la emergencia de éstos.

Situación problema 2: Antenas telefónicas		
Etapa	**Recursos didácticos**	**Saberes docentes**
Reflexiones de la situación	– Seleccionar contextos atractivos para sus estudiantes	– Considerar los intereses de sus estudiantes
	– Utilizar GeoGebra para realizar construcciones	– Experiencias previas – Conocimiento de sus estudiantes
		– Conocimiento del currículo

Dentro de esta etapa, al preguntarles respecto a qué modificaciones o adaptaciones se le harían a la situación para llevarla al aula con sus estudiantes, el profesorado consideró que no era necesario hacerle modificaciones, salvo la posibilidad de proponer otros contextos que pudieran ser más atractivos para sus estudiantes, tales como, regiones de reparto de servicio de comida.

Respecto a los Recursos epistemológicos

En esta Situación, se reconoce una diferencia respecto al momento de confrontación, porque identificamos que, sí hubo una confrontación y posterior resignificación, pero en torno a las prácticas geométricas, es decir, confrontando prácticas geométricas con prácticas geométricas.

<table>
<tr><th colspan="5">Situación Problema 2: Antenas telefónicas</th></tr>
<tr><th colspan="5">Momento de confrontación</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Descripción del momento: En las primeras tareas (para dos y tres antenas) con la intención de determinar el área de cobertura de cada una de las antenas, se realizaron construcciones, tomando como referencia la percepción visual; es decir, se trazaron circunferencias con centro en cada una de las antenas y los radios se determinaron a partir de encontrar en el plano ubicaciones consideradas pertinentes (“a ojo”) en términos del contexto de la situación, en particular, tratando de reducir las intersecciones entre las circunferencias (áreas de cobertura). Se reconoce que, si bien las herramientas empleadas corresponden a prácticas geométricas, su justificación no. Conforme avanza la situación, se analizan casos en donde la percepción visual resulta no ser un buen criterio y surge la necesidad de buscar otro tipo de construcciones (modelo de división de regiones) que den respuesta a la situación pero que se apoyen de nociones geométricas. En este momento de la situación (Tarea 11) a partir de la discusión grupal y de la exposición de los modelos de construcción de las y el participante, se realizan nuevas construcciones en GeoGebra para validar una de las propuestas; en este momento se observa un cambio en el lenguaje utilizado para argumentar, se ofrecen justificaciones verbales más robustas (aunque no necesariamente se corresponden con las escritas). En las tareas siguientes (16 y 17), se comparan las divisiones del mapa propuestas por la situación (regiones de Voronoi) con las construidas por el grupo, y se discute sobre las diferencias en las construcciones concluyendo que la base geométrica es la misma, solo que en una situación se usa un criterio estricto de distancia y en el propuesto por el grupo se toman regiones circulares por considerar la forma en que la antena emite su cobertura.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos epistemológicos:</td><td colspan="3">– Validar un resultado realizando una construcción geométrica
– Reconstruir un modelo
– Identificar relaciones geométricas en una construcción
– Comparar construcciones geométricas
– Argumentar utilizando nociones geométricas</td></tr>
</table>

Respecto a la sesión de Reflexiones finales

Esta última sesión se llevó a cabo de manera virtual por medio de la plataforma ZOOM, conectándose el y las profesoras con video y audio. En la introducción a la sesión se les recordó que la finalidad de la Experiencia no era en ningún momento el decirles qué o cómo deberían de enseñar algún contenido matemático, si no el de propiciar un espacio de reflexión en torno a ciertas situaciones matemáticas para profundizar respecto a las posibilidades matemáticas y didácticas de proponer un trabajo alternativo al que se contempla usualmente en la matemática escolar.

En un segundo momento, y con la intención de recuperar o profundizar en aspectos que surgieron durante las dos sesiones anteriores, se elaboró una presentación con diapositivas. No era intención de la profesora-investigadora profundizar en los aspectos teóricos o metodológicos que se consideraron para el diseño de la Experiencia pero si el que se pudiera discutir lo relativo al trabajo geométrico que realizaron por lo que se inició preguntando de manera general, ¿qué es hacer geometría? Las respuestas a este cuestionamiento no surgieron de manera inmediata, las y el profesor hicieron una pausa antes de responder, P1 mencionó que nunca se lo había cuestionado y por ende no tenía una respuesta clara. A continuación, se muestra una transcripción de las respuestas verbales expresadas por las participantes

P1	"Utilizar a las figuras a partir de sus propiedades para poder aplicarlas a ciertas situaciones, por ejemplo ayer que estábamos trabajando con los triángulos, o las distancias, las mediatrices, todo eso, lo aplicamos en ciertos contextos"
P2	"Resolver problemas a través de figuras geométricas"
P3	No contestó
P4	"Uno nomás se queda con la definición que te dan: Geometría es una parte de las matemáticas que … pero la verdad la definición es lo que menciona la maestra (P2) utiliza las figuras geométricas para resolver problemas"

Tabla 17. Transcripción de las participantes a la pregunta ¿qué es hacer geometría?

Después se les preguntó, ¿cómo se enseña la geometría?, lo cual se reconoció que era una pregunta importante porque impacta directamente con lo que él y las profesoras hacen en sus salones de clase.

P1	“Tomamos varias situaciones en la cual podemos aplicar pues los contenidos de la geometría, por ejemplo, cuando estamos trabajando con los perímetros o estamos trabajando áreas, utilizamos las figuras geométricas para poder aplicarlas, por ejemplo, como cercar un terreno con ciertas dimensiones o la superficie… tratamos de agarrar contextos reales.” “…en un inicio no es como que vayamos a enseñarles todo este rollo de perímetros, áreas, volúmenes, etcétera, primero que nada, a identificar figuritas y después conforme va madurando los niños, como van pasando de grados escolares también aumenta el grado de dificultad y los contenidos...”
P2	No participó en esta parte
P3	“Lo que han estado diciendo las compañeras es muy acertado, yo agregaría que es importante enseñar trazos, utilizar herramientas que nos permitan generar estas figuras geométricas, como regla, compás. Por definición etimológica sería bueno checar que es como la medición de la tierra ¿no?, entonces, a lo mejor también el estudio de cómo se miden las cosas, medir cosas se hace geometría…. Para enseñar lo hacemos parecido, tratamos de presentar problemas en donde para resolverlos tenemos que medir de alguna manera, alguna figura geométrica o algo por el estilo”
P4	“Se inicia con el conocimiento de las figuras geométricas en sí y una vez conocidas las figuras geométricas en dos dimensiones entonces ya se aplican en los contextos que comenta la maestra P1. Para sacar perímetro de un terreno, por ejemplo, se tendría que conocer de inicio que es un rectángulo, que es un cuadrado para que los muchachos visualicen la figura y luego ya la apliquen a algo cotidiano”.

Tabla 18. Transcripción de las participantes a la pregunta ¿cómo se enseña la geometría?

Después se mostraron dos reactivos de geometría uno de PLANEA y otro de PISA, los cuales tuvieron un bajo nivel de logro. Se analizaron los reactivos para identificar qué es lo que las y los alumnos tendrían que conocer o poner en funcionamiento para poder responder correctamente ambos reactivos. Para el caso de PLANEA se reconoce que para poder responder el reactivo es necesario que se conozcan y empleen algunas propiedades geométricas, en particular, la suma de los ángulos internos de un triángulo rectángulo. Por otro lado, para responder el reactivo de PISA se concluyó que no es suficiente conocer propiedades ya que en un primer momento se tiene que comparar áreas de figuras no regulares, después calcular área y perímetro de una figura no regular. Para lo cual las y los estudiantes tendrán que realizar estimaciones, argumentación geométrica.

En esta parte fue importante resaltar que no estábamos comparando de manera directa qué y cómo evalúan estas pruebas, sino resaltar la naturaleza distinta de la actividad geométrica que se tiene que realizar para resolver de manera correcta cada uno de los reactivos.

También como parte de la discusión se mostraron algunos resultados dentro de Matemática Educativa que reportan dificultades en el aprendizaje y enseñanza de la geometría. El y las profesoras pudieron identificar que las dificultades reportadas en esas investigaciones les ha tocado vivirlas en sus salones de clases.

Otro aspecto en el cual se reflexionó fue respecto al uso de la tecnología, en este caso, la que fue utilizada dentro de las Situaciones de Aprendizaje. En particular, se les preguntó acerca de qué papel jugaron los applets de GeoGebra en la resolución de las situaciones,

P1	En la primera situación no lo utilizamos en un inicio puesto que la mayoría iniciamos con soluciones aritméticas. Después se nos fue guiando al uso de éste mediante la manipulación de un applet, lo que nos llevó a considerar un teorema que no habíamos contemplado anteriormente. De esta forma logramos encontrar una mejor estrategia para la resolución de la situación. En la segunda situación empezamos utilizando GeoGebra para realizar trazos como apoyo para encontrar las regiones de cobertura de las antenas. En mi caso, me ayuda mucho utilizarlo en este tipo de situaciones ya que es muy práctico y me permite realizar trazos, manipular, analizarlos y modificar rápidamente sin complicaciones a comparación de un trabajo con el juego de geometría físico.
P2	En el primer ejercicio nos ayudó de manera visual, pero en el segundo nos apoyamos para la construcción de posibles soluciones. Considero que su uso no fue tan simple,
P3	En la primera situación nos ayudó a visualizar la aplicación de propiedades geométricas. En la segunda nos ayudó a construir las regiones y también a visualizarlas. Considero que se usó de distinta forma en cada una, pero al final de cuentas fue usado de manera exploratoria.
P4	Permitió visualizar el problema planteado y contemplar distintas variables modificando resultados

Tabla 19. Respuestas a la pregunta 1 de Reflexiones finales.

En las respuestas se puede apreciar que se reconoce un uso distinto del software en las dos Situaciones, en particular, la respuesta de P1 hace alusión a cómo con el uso le fue posible encontrar una solución alternativa de la situación que no se había considerado de manera inicial. Lo cual se complementa con lo que respondieron en la siguiente pregunta en donde se les cuestionó acerca del trabajo geométrico que realizaron, en la siguiente Figura se muestran las respuestas.

P1	Formó parte fundamental en la resolución de las situaciones. Creo que si no hubiésemos implementado el trabajo geométrico hubiésemos tenido mayor dificultad para resolver los planteamientos.
P2	Tuvo el papel central sobre todo al dirigirnos hacia dicho trabajo geométrico, fue interesante como nos guiaste hacia el trabajo Geométrico de una forma muy natural

P3	En retrospectiva y aunque me cueste decirlo, porque me gusta mucho la tecnología y GeoGebra, alrededor de esto estuvieron centradas las situaciones... hacer trabajo geométrico
P4	En la primera situación inicialmente no tuvo mucha relevancia pero modificando el enfoque fue muy útil, ya que simplificó mucho el planteamiento del problema

Tabla 20. Respuestas a la pregunta 2 de Reflexiones finales.

En la respuesta escrita de P3 no queda clara la idea central de la misma, por lo cual, durante la sesión se le preguntó a qué se refería y el profesor comentó que durante la Experiencia (EDD) había podido cuestionarse respecto a cómo estaba impartiendo sus clases de geometría y el uso que le daba al software, el cual era distinto de cómo se trabajó en las Situaciones. Un aspecto que resultó interesante también fue que P3 esperó al término de la sesión, cuando ya no estaban las profesoras y cuando ya se había pausado la grabación para comentar a la profesora-investigadora que tenía pocas expectativas de la Experiencia pero que estaba sorprendido de conocer una propuesta diferente a lo que él hace en su aula. Que, en particular, él concebía que aprovechaba las herramientas de GeoGebra pero que, al revalorar, su uso se limitaba a una extensión de lo que podría hacer en el pizarrón con regla y compás.

Otro aspecto del cual se estuvo discutiendo fue respecto a la importancia de incluir trabajo geométrico con sus estudiantes, de manera general, el grupo consideró que efectivamente es importante que se incluya, pero dando muestra de que se está pensado que ese trabajo geométrico esté más vinculado a lo trabajado en la EDD

P1	Si. Ahora considero que es importante no solo promoverlo si no también darle un énfasis más activo, creo que esto les permite comprender mejor los contenidos y desarrollar habilidades no puras de la matemática como el manipular material y construir figuras.
P2	Si, para mostrarle a los estudiantes que la Geometría es muy distinta al álgebra y que si bien es cierto se requiere para concretar algunas soluciones la Geometría tiene su lado interesante y aplicable a la vida cotidiana
P3	Definitivamente, para lograr desarrollar conocimientos sólidos y lograr así aprendizajes significativos. Y es que, en lo que respecta a la parte de geometría, me he topado con varios estudiantes que se notan con deficiencias, incluso yo tengo algunas de estas.
P4	Muy importante. Siento que los estudiantes carecen de visualización geométrica y se limitan solo a los conocimientos básicos cuando es tan amplio el campo de la geometría

Tabla 21. Respuestas Reflexiones finales.

En las respuestas del apartado de Reflexiones finales, la profesora P1 da muestra de un proceso de reflexión respecto a la importancia de promover un trabajo geométrico activo que le permita a los estudiantes enriquecer su conocimiento geométrico y sobre todo, que pueda considerar que existen situaciones susceptibles de llevar al salón de clases en donde no es necesario indicarles la estrategia de solución o bien, los contenidos a abordar, y que el hecho de que se puedan presentar otras estrategias a las típicamente escolares no la desvía de sus objetivos, si no que puede favorecerlos para el desarrollo del pensamiento matemático.

Pregunta 4 P1	Mayormente ha sido con un énfasis pasivo y poco activo. Complementando la pregunta anterior, la última ocasión en la cual fue un poco más activo el trabajo geométrico, fue en la construcción de prismas y me di cuenta que a pesar de que los alumnos ya habían estudiado el volumen de estas figuras, al momento de construirlas y pedirles que calcularan el volumen de éstas, como que no lo lograban vincular lo que ya habían estudiado antes con las figuras que ahora ya tenían en físico. Por lo que se tuvo que hacer una intervención y aprovechando las figuras, se les volvió a indicar cuales eran sus elementos y cómo hacer el cálculo que se buscaban.
Pregunta 5 P1	No. Generalmente el trabajo que realizamos en clase lo hacemos indicando qué herramientas son las que van a utilizar y como se van a utilizar, dejándoles muy poco espacio para que ellos razonen o piensen en una estrategia para llevar a cabo la resolución del la situación.
Pregunta 6 P1	Me gustó la forma en la cual se puede llevar a cabo la resolución de un problema o una situación sin indicar qué es lo que va a utilizar como herramienta para la resolución de éste. Me gustaría llevar esto a cabo, creo que de esta manera mis estudiantes pueden plantear sus propias estrategias, verificar si funcionan y de no ser así, permitirles el intercambio de ideas y estrategias con el resto de los compañeros para lograr encontrar una mejor estrategia. Definitivamente, lo tomaré en cuenta en mis planeaciones.

Tabla 22. Respuestas de la profesora P1 a las preguntas 4, 5 y 6.

Capítulo 6. Conclusiones y discusión

6.1 Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones de esta investigación, la cual se centró en la generación de un espacio de trabajo, diálogo y reflexión con profesores y profesoras de matemáticas de secundaria con énfasis en aspectos geométricos para describir los recursos epistemológicos y didácticos, así como los Saberes Docentes que construyen o identifican en este tipo de experiencias.

Respondiendo a las preguntas de investigación

Para dar respuesta a las preguntas de investigación, a partir de los resultados del análisis presentado en el Capítulo anterior, se reconocen dos momentos de confrontación en la Experiencia, relativos a cada una de las Situaciones problemas; los cuales, por la naturaleza y las intenciones de éstas, detonaron momentos de confrontación entre prácticas aritmético-algebraicas con prácticas geométricas (Situación 1) pero también confrontación dentro de las mismas prácticas geométricas (Situación 2) lo cual permitió que el profesorado robusteciera el tipo de herramientas y argumentos empleados. Esta distinción entre el tipo de confrontación de las Situaciones se relacionó con el tipo de recursos epistemológicos, didácticos y los Saberes Docentes que el profesorado manifestó.

Respecto a la primera pregunta de investigación

P1. ¿Qué recursos epistemológicos construyen o identifican las y los profesores en una experiencia de confrontación de la geometría escolar?

Para esta investigación era de interés identificar qué tipo de recursos asociados al trabajo geométrico se detonan en momentos de confrontación de la geometría escolar al resolver las Situaciones

	Recursos epistemológicos
Situación 1	– Trazar segmentos auxiliares en la figura – Analizar relaciones geométricas entre segmentos – Identificar triángulos semejantes

Situación 2	– Validar un resultado realizando una construcción geométrica – Reconstruir un modelo – Identificar relaciones geométricas en una construcción – Comparar construcciones geométricas – Argumentar utilizando nociones geométricas

Respecto a la segunda pregunta de investigación

P2. ¿Qué recursos didácticos construyen o identifican las y los profesores en una experiencia de confrontación para la innovación didáctica de la geometría escolar y qué variables externan como condicionantes para esta innovación?

Recursos didácticos	
Situación 1	– Plano cartesiano – Explicación de distintos métodos para resolver una misma situación – Uso de gráficas y representaciones figurales – Analizar varios casos particulares para obtener una relación (Generalización) – Realizar procedimiento inverso
Situación 2	– Seleccionar contextos atractivos para sus estudiantes – Utilizar GeoGebra para realizar construcciones

Como se puede observar, en la Situación 1 emergieron más recursos didácticos y desde las primeras tareas, lo cual, consideramos que obedece a lo cercano que sentían el método de solución propuesto en términos de la matemática escolar que enseñan, por lo que el profesorado realizaba propuestas de recursos didácticos que podrían emplear en su práctica para enriquecer la situación. Por otro lado, en la Situación 2, a diferencia de la primera, no se estableció de manera inicial un método o estrategia que resolviera de manera satisfactoria la situación y se fue refinando mientras se avanzaba en las tareas, fue hasta el momento de reflexión sobre la situación que se propusieron algunos recursos.

A partir de lo anterior, consideramos que cuando el profesorado tiene claridad respecto a la matemática escolar empleada en una tarea, la identifica y sabe cómo proceder si surgen de manera espontánea recursos didácticos, sin embargo, cuando la actividad matemática (geométrica en nuestro caso) no les resulta lo suficientemente familiar y no tienen identificada con claridad la matemática escolar interviniente, el profesorado no propone recursos didácticos. En síntesis, el profesorado propone recursos didácticos ante tareas matemáticas que dominan y que alguna vez han planteado a sus estudiantes.

Respecto a las variables condicionantes para esta innovación, se tenía como premisa (sobre todo por los resultados de la prueba piloto), que algunas variables que en ocasiones limitan este tipo de experiencias giran en torno al tiempo disponible para su implementación y a la falta de espacios apropiados para llevarse a acabo, como centro de cómputo o proyector, entre otros. Sin embargo, dadas las características y contexto de las y el participante (profesor y profesoras de escuelas privadas) no declararon ninguna condicionante. En los cuatro casos se externó la posibilidad y el interés por implementar las situaciones con sus estudiantes con escasas adaptaciones. Otro aspecto que favoreció a esto es que las y el profesor conocían el software GeoGebra y lo habían utilizado de alguna forma en sus clases.
Es importante aclarar que la profesora-investigadora si detectó algunas condicionantes que en un momento determinado podrían limitar la innovación, por ejemplo, concepciones insuficientes sobre algunos tópicos geométricos, en algunas ocasiones manejo limitado del software, aunque, ninguna de ellas fue declarada ni explícitamente asumida por el profesorado participante.

Respecto a la tercera pregunta de investigación

P3. ¿Qué saberes docentes se manifiestan en las y los profesores durante una experiencia de confrontación de la geometría escolar?

Saberes docentes	
Situación 1	– Considerar las dificultades de sus estudiantes. – Argumentar en términos de lo que sus estudiantes pueden hacer – Concepciones de la matemática – Experiencias previas – Generar explicaciones para sus estudiantes
Situación 2	– Considerar los intereses de sus estudiantes – Experiencias previas – Conocimiento de sus estudiantes – Conocimiento del currículo

A partir del análisis fue posible el identificar que cuando emergía un recurso didáctico en la situación también lo hacía un saber docente. Otro aspecto importante a destacar es que en múltiples ocasiones el profesorado manifestó estar pensando en el tipo de respuestas que sus alumnos darían ante los cuestionamientos, aunque la Tarea no lo solicitara. Reconocemos ahí que una fuente importante en la conformación de los Saberes docentes como voz social, es la de sus estudiantes.

Sobre la metodología EDD

La metodología EDD nos brindó herramientas para el diseño de la Experiencia, así como para la producción y organización de datos en un escenario de trabajo con profesores. En particular reconocemos la importancia del doble rol de profesora-investigadora, ya que permite un trabajo más cercano con el profesorado y una mejor inmersión en el escenario de estudio.

Consideramos que las adaptaciones realizadas a partir del cambio de modalidad por la contingencia sanitaria Covid 19 fueron pertinentes y no comprometieron los resultados de la Experiencia. Destacamos la importancia de realizar la prueba piloto, la cual sí consideró las primeras dos fases reportadas en la metodología, como un ejercicio necesario para mejorar la comprensión de las fases metodológicas.

Sobre el uso de la tecnología

La selección de los recursos tecnológicos fue un aspecto fundamental para poder llevar a cabo la Experiencia sobre todo por la transición a un ambiente de trabajo virtual.

La plataforma *Zoom,* donde se llevaron a cabo las videollamadas, en su versión premium, permitió tener sesiones de más de dos horas además de la posibilidad de compartir pantalla entre los participantes y la grabación de las sesiones, lo cual fue indispensable tanto para el análisis en curso como el retrospectivo.

El software *GeoGebra,* nos permitió incluir dentro de las Situaciones problema *applets* preconstruidos para enriquecer las discusiones. Además, las herramientas *Classroom y lecciones* tuvieron un papel central para la producción y registro de los datos ya que fueron el medio por el cual el profesorado tuvo acceso a las Situaciones. Durante la implementación, la posibilidad de estar observando en tiempo real el trabajo del grupo fue una fuente de información para las notas de la profesora-investigadora y el registro de todas las respuestas en las lecciones permitió contar con la evidencia escrita de las y el participante, teniendo la posibilidad de seguirlo consultando después de haberse llevado a cabo la Experiencia.

Sobre el diseño de las Situaciones problemas

Consideramos que las situaciones problemas diseñadas, cumplieron con las intenciones declaradas, fue posible a partir de su trabajo con profesores promover los momentos de confrontación-resignificación en torno a la geometría escolar. Aunque, a partir de esta Experiencia se identificaron algunas modificaciones a fin de promoverse mayores discusiones grupales centradas en lo geométrico. Por ejemplo, en la Situación problema 1, en el trabajo con el material manipulable, considerar que el termómetro sea de diferente medida para cada participante. Respecto a la estructura por etapas de las Situaciones consideramos conveniente su uso, sobre todo reconocemos lo importancia de la inclusión de la cuarta etapa (Reflexión), la cual no estaba contemplada en un primer diseño.

Reconocemos que el diseño de Situaciones que promuevan el trabajo geométrico no es una tarea fácil; para concretar las dos situaciones presentadas en esta investigación, hubo un proceso de selección de contextos, adaptación, diseño y rediseño. En una etapa previa, se tenían consideradas más situaciones que no fueron incluidas en la Experiencia por no cumplir con las intenciones de la misma.

Sobre el trabajo geométrico

Esta experiencia de trabajo con el profesorado de matemáticas de secundaria nos permite dar cuenta de que es posible generar espacios de diálogo y reflexión respecto a el trabajo geométrico. A las y el profesor les fue posible confrontar la geometría escolar, reconociendo la importancia de la construcción geométrica, el establecimiento de relaciones entre nociones geométricas y de la validación más allá de la percepción visual.

Un aspecto que llamó la atención fue, la dificultad del profesorado de comunicar por medio del lenguaje, tanto oral como escrito, las ideas geométricas que estaban presentes en sus construcciones. Esto podría deberse a cómo en la escuela se nos ha enseñado a comunicar información geométrica y la función del lenguaje en lo geométrico.

Finalmente, en relación con las aportaciones de la investigación, con las respuestas a las preguntas de investigación estamos aportando hacia una ruta distinta en torno al campo del desarrollo profesional docente en la educación de la geometría, que tradicionalmente se ha orientado hacia identificar y atender la falta de dominio de conocimiento geométrico. La presente investigación, por otro lado, se orientó hacia el rediseño del discurso Matemático Escolar vía el trabajo con el profesorado, en particular con situaciones de confrontación-resignificación que permitieran el reconocimiento de los significados, las herramientas y los argumentos del saber geométrico que le son propios y no están presentes en la matemática escolar. Esta geometría escolar que se confrontó es la que el sistema educativo le ha pedido al profesorado transmitir, no se trabaja así por voluntad personal sino por tradición cultural, así que cualquier cambio (rediseño) tiene implicaciones epistemológicas relevantes; de ahí que –podemos inferir– les haya sido complejo responder a la pregunta "¿qué es hacer geometría?". Por ello, parte de nuestro objeto de estudio fue identificar recursos epistemológicos desde el hacer de las y el profesor, pues estos se manifiestan en los usos que hacen del conocimiento en juego.

De la evidencia empírica surgen más preguntas y rutas de investigación, para futuras fases de trabajo con el profesorado –principalmente de acompañamiento en el aula–, principalmente problematizando saberes geométricos particulares, que en la tradición Socioepistemológica es relevante. Sin embargo, se decidió iniciar con lo geométrico como una primera etapa de inmersión en el campo del desarrollo profesional docente para tener una base de discusión y diálogo con la disciplina, el campo y el grupo de investigación.

Referencias

Afonso, M. (2003). Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio. Tesis Doctoral, Universidad de la Laguna. Departamento de Análisis Matemático.

Alatorre, S., Flores, P., y Mendiola, E. (2012). *Primary teachers' reasoning and argumentation about the triangle inequality.* Proceedings of PME 36, 2, 3–10.

Arcavi, A. (2000). Problem-driven research in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *19*(2), 141-173.

Atit, K., Uttal, D.H. & Stieff, M. (2020). *Situating space: using a discipline-focused lens to examine spatial thinking skills*. Cogn. Research 5, 19. https://doi.org/10.1186/s41235-020-00210-z

Barrantes, M., y Zapata, M. (2015). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Campo Abierto. Revista De Educación, 27(1), 55-71. Recuperado a partir de https://relatec.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985

Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado, México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona: Gedisa

Cantoral, R. (2019). Socioepistemology in Mathematics Education. InEncyclopedia of Mathematics Education. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100041-1

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y pensamiento matemático. México: Prentice Hall.

Cantoral, R. y Resendiz, E. (1997). *Aproximaciones sucesivas y sucesiones*. Colección Cuadernos Didácticos, Volumen 1. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R., y Garza, A. (2000). Desarrollo del pensamiento matemático. México: trillas.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18(1), 5-17. https://www.doi.org/10.12802/relime.13.1810

Cirillo, M. (2011). "*I'm like the Sherpa guide": On learning to teach proof in school mathematics.* Proceedings of PME 35, 2, 241–248.

Clements, D., y Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning.* In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 420–464). New York: Macmillan.

Clements, D., y Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. Journal of Mathematics Teacher Edu- cation, 14(2), 133–148.

Clements, M. (2012). A historical overview of visualisation and visualising in mathematics education. Israel: Paper presented at the Retirement Symposium of Ted Eisenberg.

Cobb, P. (2000). *Conducting teaching experiments in collaboration with teachers*. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 307-333.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). *Design experiment in Educational Research*. Educational Researcher, 32(1), 9-13.

Cobb, P., y Steffe, L. (1983). *The constructivist researcher as teacher and model builder*. Journal for Research in Mathematics Education, 14(2), 83–94.

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). *Design research: Theoretical and methodological issues*. Journal of the Learning Sciences, 13(1), 15-42.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). *Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design.* En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education. Mahwah, NJ: Erlbaum, 231–266.

Cordero, F. y Solís, M. (1997). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo.* Colección Cuadernos Didácticos, Volumen 2. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F., Muñoz, G., y Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. Colección Cuadernos Didácticos, Volumen 11. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación. Colección Cuadernos Didácticos,* Volumen 6. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Dreyfus, T., y Hadas, N. (1996). Proof as answer to the question why. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik/International Reviews on Mathematical Education*, *28*(1), 1-5.

Duval R. (1998) Geometry form a cognitive point a view, dans Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, (ed; C. Mammana and V. Villani) Dordrecht/ Boston Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2005). *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements.* Annales de Didactique et Sciences cognitives, 10, 5–53.

Fahlgren, M., y Brunstr m, M. A. (2014). *A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment*. Technology, Knowledge and Learning, 19(3), 1–29.

Farfán, R. (2013). Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de Precálculo (Vol. 1). DF, México: Secretaría de Educación Pública.

Farfán, R. y Albert, A. (1997). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades*. Colección Cuadernos Didácticos, Volumen 3. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Fujita, T., y Jones, K. (2006). *Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland*. Proceedings of PME 30, 3, 129–136.

Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry. Educational Studies in Mathematics, 74(2), 163 – 183.

García-Zatti, M. y Montiel, G. (2008). *Resignificando la linealidad en una experiencia de educación a distancia en líneaa*». Revista Electrónica de Investigación en Educación En Ciencias REIEC, 3(2), pp. 12–26.

Gol Tabaghi, S., y& Sinclair, N. (2013). *Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: the emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking.* Technology, Knowledge and Learning, 18(3), 149–164.

Google. (s.f.). [Mapa de ruta de Hermosillo-Guaymas, en Google maps]. Recuperado el 3 de Octubre, 2018, de: https://www.google.com.mx/maps/dir/Guaymas,+Son./Hermosillo,+Son./@28.493431,-111.5390862,9z/data=!3m1!4b1!4m13!4m12!1m5!1m1!1s0x86c915f4b8d01def:0x96d95402e805f984!2m2!1d-110.9089378!2d27.9178651!1m5!1m1!1s0x86ce84687adfaee5:0xb33d5395e9887ff9!2m2!1d-110.9559192!2d29.0729673

Gravemeijer, K. (1994). *Educational development and developmental research.* Journal for Research in Mathematics Education, 25(5), 443–471.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, M.V. (eds.). El proceso de llegar a ser un pr ofesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática. Granada: Ed. Comares. 1996, p. 145-169

Healy, L., y Powell, A. (2013). Understanding and overcoming “disadvantage” in learning mathematics. In: M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), Third international handbook of mathematics education. Interna- tional Handbooks of Education. New York: Springer.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry--Two Sides of the Coin. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*, 61-76.

INEE (2017). *Planea Resultados nacionales 2017*. Educación Media Superior.

Jaime, A, Chapa, A. y Gutiérrez, A. Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de textos de E.G.B. Épsilon,1992, n 23, p. 49-62

Jones, K., y Tzekaki, M. (2016). *Research on the teaching and learning of geometry*. In A. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues (pp. 109-149). Rotterdam: Sense. The published version is available at: http://dx.doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4

Kelly, A. y Lesh, R. (2000) Trends and shifts in research methods. In: Kelly, A. E. and Lesh, R. A. (eds.), Handbook of research design in mathematics and science education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 35–44.

Kuzniak, A. (2004). Paradigmes et espaces de travail géométriques. (Note pour l’habilitation à diriger des recherches). Paris, France: Institute de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques Paris VII.

Lee, C. Y., y Chen, M. (2014). *The impacts of virtual manipulatives and prior knowledge on geometry learning performance in junior high school*. Journal of Educational Computing Research, 50(2), 179–201.

Lee, S., Sovrano, V., y Spelke, E. (2012). Navigation as a source of geometric knowledge: Young children's use of length, angle, distance, and direction in a reorientation task. *Cognition*, *123*(1), 144-161. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2011.12.015

Leung, A. (2011). *An epistemic model of task design in dynamic geometry environment.* ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 43(3), 325–336.

Lezama J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad.Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8 (3), 339-362. Recuperado el 5 de mayo de 2021 de: https://www.redalyc.org/pdf/335/33508306.pdf

Lezama, J. y Farfán, R.M. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad.Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(2),161-193.

López-Acosta, L., y Montiel, G. (2022). Emergencia de las ecuaciones paramétricas en Viète y Descartes. Elementos para repensar la actividad analítica-algebraica. *Góndola*, *Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, *aceptado para su publicación en 17*(3).

Lowrie, T., Logan, T., y Scriven, B. (2012). Perspectives on geometry and measurement in the Australian Curriculum: Mathematics. *Engaging the Australian National Curriculum: Mathematics—Perspectives from the field (Online Publication)*, 71-88.

Luitel, B. C. (2009). *Culture, worldview and transformative philosophy of mathematics education in Nepal: A cultural-philosophical inquiry* (Doctoral dissertation, Curtin University).

Lundsgaard, V. (1998). General considerations on curricula designs in geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI study Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mammana, C. y Villani, V. (1998). *Introduction. Section I. Geometry and Geometry-Teaching ttrough the ages*. En C. Mammana y V. Villani (Edist.)., Perspectives on the The

Teaching Geometry for the 21th Century (pp. 1- 84). Nethertland: Kluwer Academic PubblishersPublisher.

Markovits, Z., Rosenfeld, S. y Eylon, B.S. (2006). Visual cognition: content knowledge and beliefs of preschool teachers. En Novotná, J. Moraová, H., Krátká, M. yStehlíková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Groupfor the Psychology of Mathematics Education, 4, 145-152.

Matemáticas 3: Islas, K. (2016). *Guía para el maestro*. México D.F.: Castillo

Matemáticas 3: Macías, M. (2017). *Vive Las Matematicas. Matemáticas para Resolver Problemas Cotidianos 3*. Secundaria. México: Esfinge.

Mercado, R. (1991). Los saberes docentes en el trabajo cotidiano de los maestros. *Infancia y aprendizaje*, *14*(55), 59-72.

Mercado, R. (1994). Saberes and social voices in teaching. *Education as cultural construction,* 61-70.

Mercado, R. (2002). *Los saberes docentes como construcción social*. La enseñanza centrada en los niños. México: Fondo de Cultura Económica.

Mercado, R. y Luna, M. (2013). Saber enseñar: un trabajo de maestros. Análisis de la docencia en el aula y propuestas para mejorarla. México: SM Editores.

Mercado, R., y Rockwell, E. (1988). La práctica docente y la formación de maestros. *Revista Investigación en la Escuela, 4, 65-78.*

Mix, K. y Battista, M. (2018). *Visualizing Mathematics. The role of spatial reasoning in mathematics thought.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*. Enseñanza de las Ciencias, 29(1), 75-88.

Montiel, G. (2005). *Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificacion del concepto de derivada*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(2), 219–235.

Montiel, G. (2009). (2009). *Formación docente a distancia en línea. Un modelo desde la matemática educativa*. Innovación Educativa, 9(46), 89–95.

Montiel, G. (2010). *Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(4-I), pp. 69–84.

Montiel, G. (2013). Desarrollo del pensamiento trigonométrico. Distrito Federal, México:Secretaría de Educación Pública.

Montiel, G. (2016). *Condiciones para la innovación educativa en el posgrado*. Perfiles Educativos, 38(esp), pp. 101–115.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). *Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones.* En A. Rosas y A. Romo (eds.), Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones, 61-88. México: Lectorum

Montiel, G. y Scholz, O. (2021). *Entre la razón y la función. Construcción de significados sobre la relación trigonométrica en bachillerato*. Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas 91, 10-17.

Newcombe, N., y Stieff, M. (2012). Six myths about spatial thinking. International Journal of Science Education, 34(6), 955–971

Owens, K. (2014). *Visuospatial reasoning: An ecocultural perspective for space, geometry and measurement education* (Vol. 111). Springer.

Reyes-Gasperini, D. (2013). La transversalidad de la proporcionalidad. *México: Subsecretaría de Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública*.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Oaxaca: una transformación colectiva con impacto social y educativo*. Perfiles Educativos, 38(esp), 37-66.

Rinaudo, M. C., y Donolo, D. (2010). *Estudios de diseño. Una perspectiva prometedora en la investigación educativa*. Revista de educación a distancia, (22).

Rodríguez-Ibarra, M.A; Montiel Espinoza, G. (2021). *Pensamiento geométrico: una experiencia de trabajo conprofesores de matemáticas de secundaria*. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS, 5(1), pp 50-63 (PDF) Pensamiento geométrico: una experiencia de trabajo con profesores de matemáticas de secundaria.

Rotaeche, A. (2012). Construcción de conocimiento matemático en escenarios escolares. El caso de la angularidad en el nivel básico (memoria predoctoral no publicada). CICATA-IPN, Ciudad de México.

Rubio-Pizzorno, S. (2018). *Integración digital a la práctica docente en geometría.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN. DF: México.

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2020). *Ecossistemas Educacionais Híbridos na pesquisa em Educação Matemática*. En M. Basniak y S. Rubio-Pizzorno (Org.), Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco, 119-157. Brasil: Pimenta Cultural. https://doi.org/10.31560/pimentacultural/2020.472

Sack, J., Vazquez, I., y Moral, R. (2010). *Elementary children's 3-D visualization development: Representing top-views.* Proceedings of PME 34, 4, 113–120.

Secretaría de Educación Pública, (2017). *Plan y programas de estudio*. Educación Secundaria, México. SEP.

Simon, M., (2000). *Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment.* En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 335-359.

Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). *New opportunities in geometry education at the primary school.* ZDM Mathematics Education 47(3), 319-329. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0693-4

Sinclair, N., Bartolini, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM*, *48*(5), 691-719.

Sinclair, N., Cirillo, M. y de Villiers, M. (2017). *The learning and teaching of Geometry.* En J. Cai (Ed.), Compendium for Research in Mathematics Education, 457-489.

Son, J.-W. (2006). *Investigating pre-service teachers' understanding and strategies on a student's errors of reflective symmetry*. Proceedings of PME 30, 5, 145–152

Soto, D. (2010). El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. *Una Visión Socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN. DF: México.

Steffe, L., y Thompson, P. (2000). *Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements.* En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education. Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 267-306.

Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2020). *La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa*. Nóesis. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades, 29(58-1), 24-55. http://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Torres-Corrales, D., y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación matemática*, *33*(3), 202-232.

Trgalova, J., Soury-Lavergne, S., & Jahn, A. P. (2011). Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo pro- ject. ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 43(3), 337–351.

Tuyub, I. y Buendía, G. (2017). Gráficas lineales: un proceso de significación a partir de su uso en ingeniería. *Revista de Investigación Educativa de la Rediech,* 8(15): 11-28.

Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes. Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 14(3),1-20. [fecha de Consulta 29 de Julio de 2019]. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=447/44732048014

Whiteley, W., Sinclair, N., y Davis, B. (2015). *What is spatial reasoning?* In B. Davis & the Spatial Reasoning Study Group (Eds.), Spatial reasoning in the early years (pp. 3–14). New York, NY: Routledge.

Xiang, H. (2008). Hacia una imagen contextualista de la racionalidad. *Praxis*, 62, 103-135.

Xistouri, X., y Pitta-Pantazi, D. (2006). *Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks*. Proceedings of PME 30, 5, 425–432.

Yerushalmy, M. (1993). 'Computerization in the mathematics classroom', (In Hebrew) Aleh-The Israeli Journal for Mathematics Teachers 12, 7–14.

Young, C., Levine, S. y Mix K. (2018) *The connection between spatial and mathematical ability across development.* Frontiers in Psychology 9:755. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00755

Anexos

Anexo 1. Cuestionario profesores y profesoras participantes

Datos generales del profesor o profesora de Matemáticas

Nombre	
Edad	
Formación académica	Tipo de Bachillerato: __________________________ Licenciatura: ____________________________ Generación: Posgrado:
Experiencia profesional/ académica	Años de servicio: ___________ Instituciones en donde ha laborado: Puesto que ha desempeñado: Materias que ha impartido:
Cursos de formación o actualización que haya cursado	
¿Qué herramientas didácticas utiliza en su práctica docente?	

¿Cuál es su concepción acerca de la matemática?	
¿Por qué considera que es importante enseñar/ aprender matemáticas?	
¿Cuáles considera que sean los principales problemas respecto a la enseñanza/ aprendizaje de las matemáticas?	

Anexo 2. Protocolo de observación

Nombre del obervador/observadora:

1. Datos generales		
Situación de aprendizaje: Estimando la temperatura Fecha: 13/01/2020 Hora de inicio: Hora de termino:	Descripción del espacio físico:	Número de participantes Hombres: Mujeres:
2. Durante la sesión		
¿Qué tareas realizó la facilitadora del laboratorio?	¿Cómo fue la interacción entre la facilitadora y los profesores participantes?	¿Qué tareas realizaron los profesores participantes?
¿Cómo fue la interacción entre los profesores participantes?		
3. Conocimiento didáctico-pedagógico		
¿Cómo perciben los participantes el uso de la	¿Presentan los estudiantes, dificultades	¿Qué dificultades o ventajas en términos

presentación de diapositivas por la facilitadora?	en la comprensión o uso de las hojas de trabajo? , ¿Cuáles?	didácticos promueven los recursos (presentación de diapositivas, hojas de trabajo y material concreto)?
¿Cuál fue la actitud de los participantes ante el contexto de la temperatura?		
¿Comprenden los participantes las preguntas e indicaciones presentadas por la facilitadora?	¿Presentan los participantes, dificultades en la comprensión o uso del material concreto?	Observaciones adicionales:

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Conocimiento matemático puesto en juego por los participantes</td></tr>
<tr><td>¿Qué nociones matemáticas escolares ponen en juego durante la experiencia? y ¿en qué momento?</td><td>¿Surgen ideas geométricas en la actividad?, ¿Cuáles?</td><td>¿Cuáles son las preguntas que se hacen, o hacen los estudiantes alrededor de las ideas geométricas en la actividad?</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observaciones adicionales:</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Acontecimientos de la comunidad</td></tr>
<tr><td>¿Se presentó alguna situación que favoreciera o impidiera la comprensión del tema tratado?</td><td>Describa la situación</td><td>Observaciones adicionales:</td></tr>
</table>

6. Uso del software GeoGebra		
¿Se presentó alguna dificultad o impedimento para trabajar con el software?	¿Cuál fue la actitud ante el trabajo con el software?	
7. Reacciones de la comunidad (Profesores participantes y facilitadora)		
¿Cuál fue el comportamiento y/o actitud general?	¿Cuál fue el rol de la facilitadora?	¿Cuál fue el rol de los participantes?
¿Hubo participantes líderes y/o participativos?	¿Se presentó algún comportamiento y/o actitud inusual?, ¿cuál?	Observaciones adicionales:

¿Hubo participantes que no participaron y/o subversivos?		
8. Reacciones ante la presencia de investigadores – observadores externos		
¿Existió algún acontecimiento o reacción de la comunidad que favorezca o impida que se me acepte como parte de la experiencia?	Observaciones adicionales:	
9. Registros complementarios		
¿Cuáles registros complementarios se utilizaron?	¿Cuál fue la actitud ante los registros complementarios?	
10. Comentarios generales adicionales		

Anexo 3. Situaciones problema

Situación problema 1: Estimando la temperatura

Conocer la información climatológica de México es de gran importancia para diferentes sectores de la población. Es a partir de ésta que muchas personas toman diferentes decisiones como: salir o no de viaje, ponerse suéter, salir con paraguas de casa, horarios de clases en las escuelas, aplicación de vacunas, programas y campañas sociales, entre otros.

La Comisión Nacional del Agua (CONAGUA), a través del Servicio Meteorológico Nacional (SMN) son los responsables de proveer pronósticos, alertas e información del estado del tiempo y del clima en nuestro país.

Las principales funciones del SMN son:

- Mantener informado al Sistema Nacional de Protección Civil, de las condiciones meteorológicas que puedan afectar a la población y a sus actividades económicas.
- Difundir al público boletines y avisos de las condiciones del tiempo, especialmente en la época de ciclones, que abarca de mayo a noviembre.
- Realizar estudios climatológicos o meteorológicos.
- Proporcionar al público información meteorológica y climatológica.
- Concentrar, revisar, depurar y ordenar la información, generando el Banco Nacional de Datos Climatológicos, para consulta del público.

1. ¿Consultas información climatológica para la toma de alguna decisión en tu vida? ¿Cuál?

Para estimar la temperatura, se cuenta con Estaciones Meteorológicas Automáticas (EMAS) ubicadas de manera estratégica por todo el país. Las cuales son un conjunto de dispositivos eléctricos y mecánicos que realizan mediciones de las variables meteorológicas de forma automática (sobre todo en forma numérica). En el caso de Sonora, hay ocho EMAS, ubicadas en Álamos, Caborca, El Pinacate, Hermosillo-Bahía de Kino, Nogales, San Luis Río Colorado, Sonoyta y Yécora.

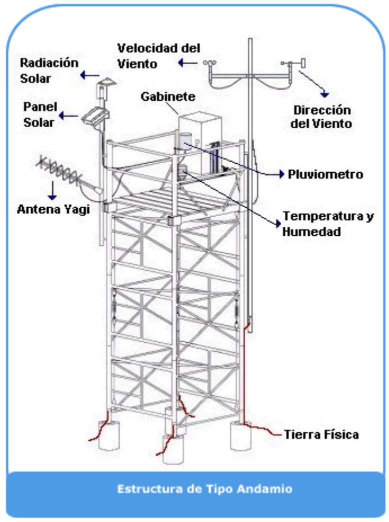


Figura 1: Tipo de estructura donde se montan las estaciones meteorológicas. Disponible en http://smn.cna.gob.mx/es/emas

2. ¿Sabes cómo los meteorólogos estiman la temperatura de un lugar que no esté cerca de alguna EMAS?

3. Si conocemos la temperatura de dos ciudades ¿Cómo será la temperatura en un lugar que esté entre ellos? ¿Podría cambiar de manera drástica? ¿Qué información necesitamos para estimar la temperatura de este lugar?

4. Si sabemos que la temperatura en Guaymas es 27° y en Hermosillo es 32° ¿Cuál será la temperatura en un punto a la mitad del camino? Justifica tu respuesta

5. ¿y a la cuarta parte del camino?

6. ¿y a la tercer parte?

7. ¿Utilizaste el mismo procedimiento para estimar la temperatura en todos las casos? De ser así, descríbelo

8. Se toma la temperatura en un punto entre Hermosillo y Guaymas y el termómetro registra 30° ¿A qué distancia aproximadamente se hizo la toma?

9. De manera general, conocidas las temperaturas de Hermosillo y Guaymas, cómo le podrías explicar a alguien cómo estimar la temperatura de un punto que esté entre las dos ciudades.

10. ¿Cómo podrías validar o argumentar que el método descrito en la pregunta anterior funciona?

Hasta el momento hemos trabajado con herramientas aritméticas para resolver los cuestionamientos previos. ¿Podremos construir un modelo geométrico que nos ayude a estimar temperaturas?

11. ¿Cómo podrías utilizar el material que se te ha proporcionado (mapa, termómetro y regla) para estimar las temperaturas?

12. Compara tu respuesta a la pregunta 11 con los demás profesores participantes y escribe si hay diferencias entre el cómo se usó el material.

Abre el archivo Estimando la temperatura.ggb

13. Completa la siguiente tabla a partir de lo que observas en pantalla

Punto	¿Qué representa?
P	
T	
A	

14. Cuando “arrastramos” el punto A, ¿qué cambia?

Cierre

15. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos.

16. Explica por qué el método anterior funciona

17. Compara tu método y la explicación con el del resto de participantes, ¿hubo consenso o alguien presentó un método distintito? De ser así, descríbelo

18. Si comparamos el método para estimar temperaturas presentado en la pregunta 9 con el de la pregunta 15, ¿cuáles son sus diferencias?, ¿consideras que uno es mejor que otro? Argumenta tu respuesta

Reflexiones a partir de la situación

A. ¿Qué contenidos matemáticos se trabajaron en la situación?

B. ¿Trabajarías esta situación con tus estudiantes?, ¿por qué?

C. ¿Qué modificaciones le harías a fin de poder llevar esta situación a tu salón de clases?

D. ¿Qué papel jugó el trabajo geométrico en la situación?

E. ¿Qué papel jugó el material manipulable y el applet de GeoGebra en la situación?

Situación Problema 2: Antenas telefónicas

Distintas compañías telefónicas, cómo parte de sus campañas publicitarias afirman tener cobertura en todo el territorio mexicano, por lo que es cada vez más común ver instalaciones de antenas de telefonía móvil en ciudades y caminos. ¿Sabes cuántas antenas hay instaladas en la ciudad de Hermosillo?, ¿cuál antena es la que proporciona el servicio cuando usas tu celular? Este tipo de cuestionamientos abordaremos en la siguiente actividad

Imagen de antenas satelitales. Tomada de: https://www.xataka.com.mx/telecomunicaciones/es-oficial-telcel-tambien-compartira-su-red-con-los-usuarios-de-at-t

1. ¿Has visto este tipo de antenas en la ciudad?, ¿dónde?

2. En la Figura 1 se muestra la ubicación de dos antenas telefónicas,
   a) ¿cuál antena (A1, A2) consideras que reciba la señal de un usuario que esté en el punto C?

   b) Explica que consideraciones tomaste para decidir qué antena

c) Comparte tu explicación con el resto de los participantes, ¿hubo diferencias en sus resultados o explicaciones? Describe

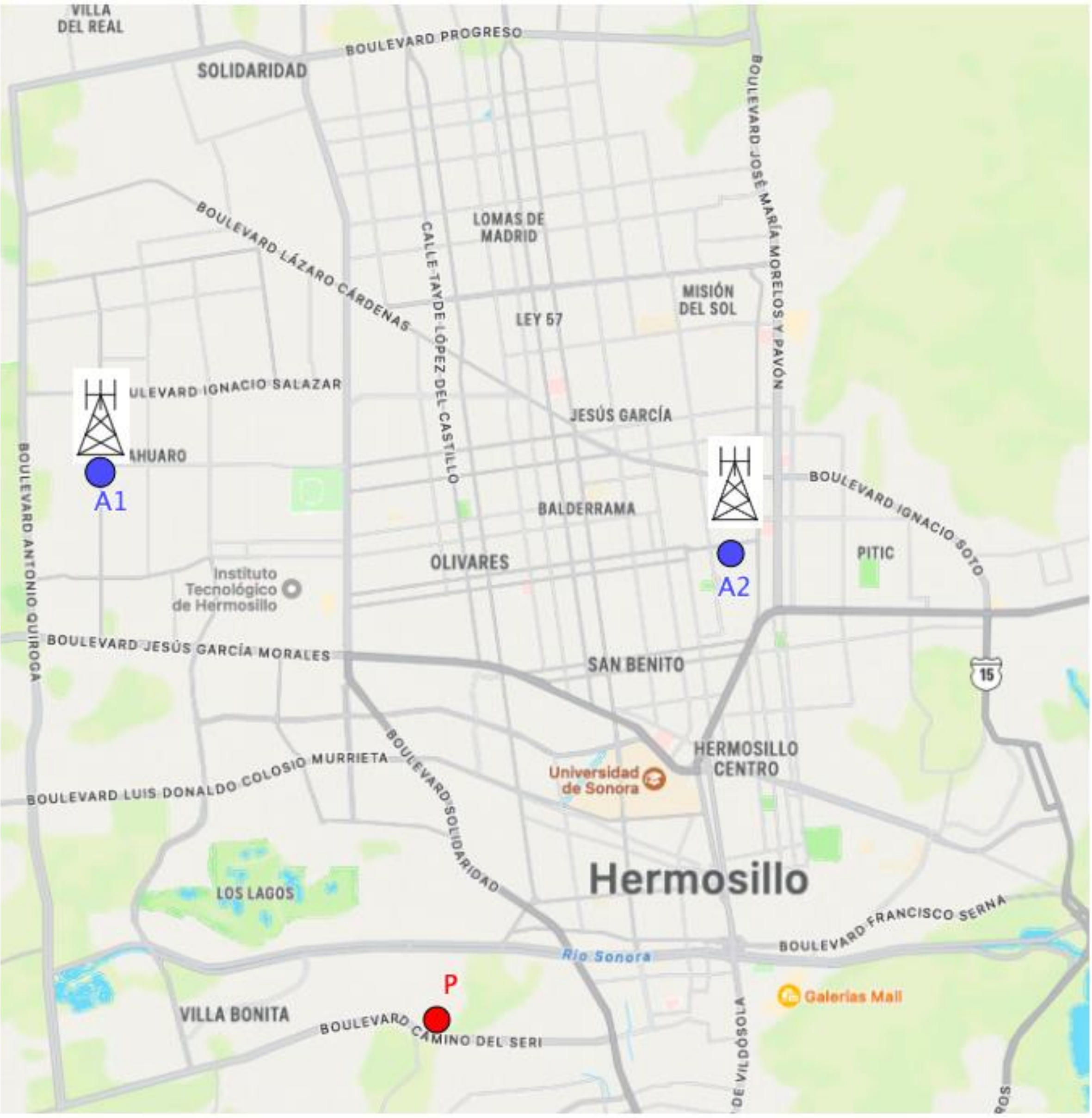


Figura 1. Mapa parcial de Hermosillo con la ubicación de dos antenas

3. Marca en el mapa la región que consideres que le corresponde a cada una de las antenas, utiliza un color diferente para cada región. Explica qué criterio utilizaste para hacer la división

4. ¿Existen ubicaciones que se encuentren a la misma distancia de las antenas? Márcalos en el mapa

5. ¿Qué criterio crees que se use en los casos de la pregunta anterior para determinar qué antena recibe la señal?

6. Supongamos ahora que tenemos tres antenas, como se muestra en la Figura 2, ¿cuál crees que reciba la señal del punto P? Explica tu respuesta

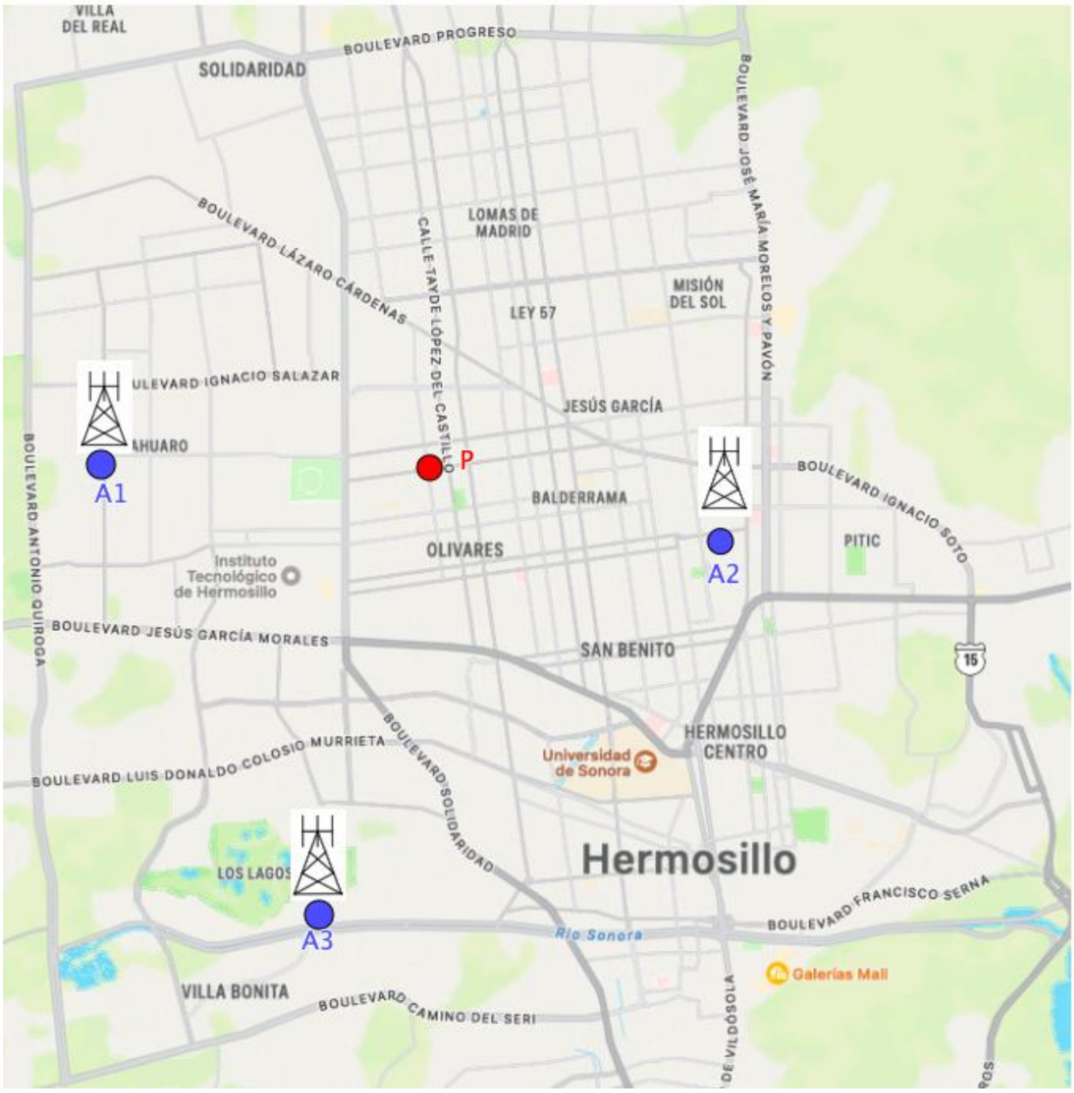


Figura 2. Mapa parcial de Hermosillo con tres antenas telefónicas

7. Marca en el mapa las regiones correspondientes para cada antena, utiliza un color diferente para cada región. Explica cómo es que hiciste la división.

8. Compara el mapa dividido en regiones con el de los demás participantes, ¿hay diferencias? Describe

9. Abre el archivo antenas.ggb, explora las diferentes herramientas y úsalas para validar las divisiones realizadas en el mapa (pregunta 7)

Describe aquí qué herramientas y cómo las utilizaste para validar tu procedimiento

10. Abre el archivo antenas2.ggb
    a. ¿la división que aparece en pantalla se corresponde con la que tu realizaste en el mapa de papel? Explica

    b. Cambia la posición de las antenas y observa el comportamiento de las regiones, ¿qué forma geométrica identificas que divide una región de otra?

11. El procedimiento que aplicaste para dividir las regiones considerando tres antenas en la Figura 2, ¿será válido para situaciones donde haya más de tres antenas telefónicas?, ¿por qué?

12. En el archivo de GeoGebra, otro punto en el mapa, el cual representará una nueva antena y observa la división de regiones, ¿qué sucede con la subdivisión de regiones construida anteriormente?

13. A partir de la exploración y análisis del archivo de GeoGebra, ¿qué figura geométrica permite dividir en regiones todas las ubicaciones del mapa para asignar la antena correspondiente?

14. ¿Qué propiedades tiene ese lugar geométrico?

15. Escribe como explicarías el procedimiento para dividir por regiones el mapa de Hermosillo a partir de conocer la cantidad y ubicación del número de antenas.

Reflexiones

1. ¿Qué conocimientos matemáticos consideras que se pusieron en juego dentro de esta situación?

2. ¿Los conceptos matemáticos propuestos en la secuencia forman parte del currículo de matemáticas para secundaria?

3. ¿Cuál consideras que es la función de GeoGebra dentro de la situación?

4. ¿En qué otros contextos consideras que se puede abordar lo trabajado en la situación? Plantea dos

5. ¿Qué modificaciones o adaptaciones le harías a la situación para trabajarla con tus estudiantes?

Anexo 4. Carta consentimiento participación

Carta consentimiento

Hermosillo, Sonora a 13 de enero de 2020

Yo, ____ ,

autorizo que se tomen registros escritos y videograbaciones de mi participación durante el trabajo a cargo de la maestra María Antonieta Rodríguez Ibarra, y que estos se utilicen **exclusivamente** con fines académicos.

Declaro que estoy al tanto de la actividad académica en la cual se enmarca mi participación y sus objetivos.

Firma

Manejo de la información: Los datos recolectados serán utilizados únicamente con fines académicos y de investigación, donde la identidad será manejada de manera anónima; además, estos datos no serán utilizados para envío de publicidad ni propaganda de ninguna índole.

Anexo 5. Formulario invitación profesorado

Cuestionario invitación para participar en una Experiencia de Desarrollo Docente

Con la intención de discutir algunos aspectos matemáticos y didácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de secundaria, tenemos el agrado de invitarle a participar en una experiencia de desarrollo docente. La duración aproximada será de 8 horas dividida en cuatro sesiones.

* Obligatorio

1. Nombre *

Escriba su respuesta

2. Correo electrónico *

Escriba su respuesta

3. ¿Le gustaría participar en la experiencia? *

- (•) Si
- ( ) No

4. ¿Por qué? *

Escriba su respuesta

5. ¿Preferiría que la experiencia se llevara a cabo en modalidad virtual o presencial?

*

Considere que en modalidad presencial se trabajaría en las instalaciones de la Universidad de Sonora cumpliendo con los protocolos dispuestos por la pandemia COVID 19 y en caso de ser virtual se seleccionaría alguna plataforma.

- (●) Virtual
- ( ) Presencial

6. ¿por qué plataforma le gustaría trabajar? *

- ( ) Zoom
- ( ) Teams
- ( ) Google meet
- ( ) Otra

7. En caso de que la modalidad en la que se ofreciera el curso no fuera la que usted seleccionó, ¿tendría algún inconveniente para participar? *

Escriba su respuesta

8. A fin de programar las sesiones de trabajo en un horario apropiado para usted, seleccione la disponibilidad que tendría para asistir *

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
3:00 pm	( )	( )	( )	( )	( )	( )
4:00 pm	( )	( )	( )	( )	( )	( )
5:00 pm	( )	( )	( )	( )	( )	( )
6:00 pm	( )	( )	( )	( )	( )	( )
7:00 pm	( )	( )	( )	( )	( )	( )

9. Dudas o comentarios

Escriba su respuesta

Anexo 6. Respuestas del profesorado a la Experiencia

Situación 1: Estimando la temperatura

Respuestas Situación 1: Estimando la Temperatura

Pregunta	P1	P2	P3	P4
¿Consultas información climatológica para la toma de alguna decisión en tu vida?, ¿Cuál?	No, a veces solo consulto para estar informada si hay pronóstico de lluvia.	Si, sobre todo en invierno ya que soy muy friolenta	Sí, para salir de viaje y al trabajo cada día	para viajar
2. ¿Sabes cómo los meteorólogos estiman la temperatura de un lugar que no esté cerca de alguna EMAS?	No	No se, pero creo que lo podrían determinar por promedios entre EMAS	A ciencia cierta no sé. Mas me imagino que estas EMAS están integradas con instrumentos capaces de medir ciertas características del aire y la evolución temporal de ciclones y anticiclones los	puede ser considerando datos pasados (base de datos) o consultando la informacion de dos EMAS seguidos
3. Si conocemos la temperatura de dos ciudades ¿Cómo será la temperatura en un lugar que esté entre ellos? ¿Podría cambiar de manera drástica? ¿Qué información necesitamos para estimar la temperatura de este	Me imagino que sería una temperatura media, se necesitaría las temperaturas de los dos lugares de referencia para poder estimar la temperatura del lugar que se encuentre entre ellos. También se podría considerar que tan cerca se encuentra de alguno de estos puntos de referencia.	La media, pero además se requerirían más datos sobre las características climatológicas de esa región	ellas, así también como de la definición de "manera drástica". Aunque, en principio, debería ser una temperatura entre las	calculado la media o el promedio de ambas ciudades. Sería muy inusual que entre dos puntos variara la temperatura bruscamente
4. Si sabemos que la temperatura en Guaymas es 27° y en Hermosillo es 32° ¿Cuál será la temperatura en un punto a la mitad del camino? Justifica tu respuesta	Considerando el cálculo de la media, 29.5° (27° + 32°) /2	30° aprox por promedio y por la cercania de las ciudades	30 grados. debido a que el clima es desértico en esa región.	Aproximadamente 29°, si consideramos la cercania de las ciudades y la similitud del clima
5. ¿y a la cuarta parte del camino?	Aproximadamente 28° (29+27)/2	28.5° pensando que aumenta 5° hasta Hermosillo una cuarta parte son 1. y feriecita	28	28.25°
6. ¿y a la tercer parte?	Aproximadamente 29°.Hay 5° grados de diferencia entre Hermosillo y Guaymas. Una tercera parte lo podremos considerar como 5/3 = 1.666, entonces cada tercera parte varía esa cantidad en grados. Cómo nos interesa la tercera parte más cercana a Guaymas y la temperatura ascienda hacia Hermosillo, entonces le agregamos a 1.6 a la temperatura = 28.6, así lo aproximamos al entero más cercano (29°).	Casi 31° por la misma proporción que comente	29	28.7°
7. ¿Utilizaste el mismo procedimiento para estimar la temperatura en todos las casos? De ser así, descríbelo	No, en la 4 y 5 fue por promedio.En la 6 fue distinto, explico el procedimiento en ese mismo reactivo.	Parecido a una tabla numérica y la dividí entre dos partes y luego en tres partes.	Suponer un ascenso lineal en la temperatura. Tomar los grados de diferencia entre las ciudades y realizar proporciones.	Para el punto medio usé un promedio, para los demás cálculos dividí los 5 grados de diferencia entre 4 o entre 3 según el caso
8. Se toma la temperatura en un punto entre Hermosillo y Guaymas y el termómetro registra 30° ¿A qué distancia aproximadamente se hizo la toma?	Se encuentra a 2/5 partes más cerca de Hermosillo.	Antes de llagar a los "pocitos", un poco antes de la mitad	A la mitad del camino, suponiendo un ascenso lineal en la temperatura desde Guaymas hasta Hermosillo.	Aproximadamente a una distancia de dos tercios de Guaymas a Hermosillo
	Podemos considerar los puntos de referencia y determinar la		Podríamos graficar las temperaturas	

9. De manera general, conocidas las temperaturas de Hermosillo y Guaymas, ¿cómo le podrías explicar a alguien cómo estimar la temperatura de un punto que esté entre las dos ciudades?	Podemos considerar los puntos de referencia y determinar la diferencia de temperaturas entre éstos. Una vez que tenemos esta diferencia, dividimos entre la cantidad de interés (sea segunda, tercera, cuarta parte, etcétera). Si la ciudad a la cual nos interesa estimar se encuenta más cerca del punto de referencia con temperatura más baja, entonces sumamos la cantidad obtenida en el paso anterior según su	Promediando las temperaturas en caso de la mitad o dividiendo la diferencia de las temperaturas en la distancia solicitada y sumando y restando este resultado a la temperatura	Podríamos graficar las temperaturas en un plano cartesiano (eje horizontal para distancias) procurando respetar escalas, trazar una línea entre ambos puntos (para considerar una ascenso lineal en la temperatura), colocar el punto en el	Tomar los grados de diferencia entre las dos ciudades y dividir por la distancia que las separa (la tercera parte, cuarta parte etc)
10. ¿Cómo podrías validar o argumentar que el método descrito en la pregunta anterior funciona?	Tomando un caso particular, como el ejemplo que se ha estado trabajando y verificar con varios puntos entre los que tenemos de referencia.	Podría ser atravez de experimentación.	Realizar un viaje hasta el punto y medir la temperatura me parece lo mejor.	Porque el método descrito es una fórmula, a la cual sólo le cambiamos la variable distancia.
11. ¿Cómo podrías utilizar el material que se te ha proporcionado (mapa, termómetro y regla) para estimar las temperaturas?	Utilizando la regla y el mapa: Determinar la diferencia de temperaturas entre Guaymas y Hermosillo. Medir la distancia entre los puntos Guaymas-Hermosillo. Considerar cuántos centímetros de diferencia hay en cada cambio de 1° de temperatura (valor unitario). Dependiendo de la distancia a calcular, resolvemos realizando una regla de tres o bien, dividiendo la distancia dada entre el valor obtenido en el punto anterior.	Graduando e termómetro con la regla y considerando la distancia	Realizar una suerte de curvas de nivel (pero de temperatura) creando círculos espaciados una misma distancia, digamos 5 cm. y tomar el termómetro para poner los grados en el. luego checar cuantos grados se mueve la temperatura cuando pasas de una curva a otra.	La división del termómetro es como un eje cartesiano. Cada temperatura se relaciona con una ubicación entre las dos ciudades.
12. Compara tu respuesta a la pregunta 11 con los demás profesores participantes y escribe si hay diferencias entre el cómo se usó el material.	Los demás compañeros utilizaron el termómetro y lo graduaron para este caso en particular. En mi caso utilicé la regla y traté de generalizarlo para poder utilizar el método en cualquier distancia	Si hay diferencia, algunos maestros utilizaron más la parte algebraicas y la solución del problema de manera más general, mientras que yo me quede en la solución del esta problema en particular	Bastante diferencia, creo que las formas de usar el material de los demás participantes son más eficientes.	Mi método sólo se basó en la graduación del termómetro, Reyna agregó la distancia en centímetros, y eso lo complementa para usar una regla de proporción. La cual puede aplicarse a cualquier tamaño de termómetro

				termómetro
13	Punto / ¿Qué representa?, ¿qué cambia al arrastrarlo? A / La temperatura más alta registrada en el termómetro que corresponde a Hermosillo T / La temperatura a estimar del punto entre las dos ciudades. C / Lugar al que queremos estimar su temperatura	Punto / ¿Qué representa?, ¿qué cambia al arrastrarlo? A / Termometro LA diferencia de temperatura T / La temperatura C / Punto que se desea estimar	Punto / ¿Qué representa?, ¿qué cambia al arrastrarlo? A / La temperatura en hermosillo T / La temperatura en el punto P C / El punto entre Hermosillo y Guaymas donde se desea calcular la temperatura	Punto / ¿Qué representa?, ¿qué cambia al arrastrarlo? A / el limite del termometro T / la temperatura en un punto ente las dos ciud C / la ubicacion geografica del punto a estimar la tempe
14 Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos	Utilizar las proporciones y el Teorema de Tales (dibujando las líneas correspondientes que conforman a un triángulo para relacionar visualmente la distancia entre ciudades y la diferencia de temperaturas entre éstas). Una vez determinado el valor faltante en la proporcióny dependiendo del lugar en el que se encuentre el punto al que queremos estimar la temperatura, se sumaría o restaría la cantidad obtenida a las temperaturas que tenemos en los extremos.	Con la relación de las temperaturas proporcionales, considerando que la distancia total es 10	Realizar triángulos semejantes entre la línea que une Guaymas con Hermosillo y el termómetro, después de identificados los segmentos usar razones de semejanza para encontrar el faltante.	Usando un plano de dos dimensiones: Eje x temperatura y eje y distancia entre los dos puntos
15. Explica por qué el modelo anterior funciona	De cierta manera nos permite calcular la variación de la temperatura para cualquier punto entre estas ciudades u otras. Solo necesitamos conocer la diferencia de temperaturas, la distancia entre éstas y la distancia del punto de interés hacia una de las ciudades. Esto último para saber si la variación de temperatura se tiene que sumar o restar.	Porque al verificar el resultado de la relación con el teorema de tales se confirmo con los resultados obtenidos anteriormente	Por estar sustentado sobre teoremas como el de Tales, que se ha probado que funciona en incontables veces a lo largo de la historia.	Porque al localizar la temperatura de cualquier punto intermedio se puede usar teorema de tales o regla de proporcion
16. Compara tu método y la explicación con el del resto de participantes, ¿hubo consenso o alguien presentó un método distinto? De ser así, descríbelo	Se resolvió de manera grupal, por lo que todos estuvimos de acuerdo en utilizar el método mencionado anteriormente	Si, se propuso el uso del teorema de tales, identificando variables conocidas y aplicando la regla de tres. Lo cual es similar a el procedimiento de la identificación de las unidades de distancia por temperatura	Hubo consenso entre los participantes.	Hubo consenso

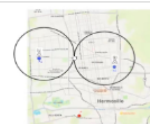
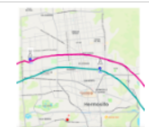
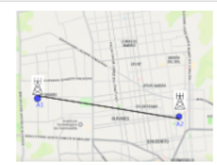
17. Si comparamos el método para estimar temperaturas presentado en la pregunta 9 con el de la pregunta 13, ¿cuáles son sus diferencias?, ¿consideras que uno es mejor que otro? Argumenta tu respuesta	Me parece practicamente el mismo método, solo que en la pregunta nueve me fui directamente a calcular el valor unitario y después calcular la variación de temperatura con la regla de tres. En este último que realizamos de manera grupal es más directo el procedimiento y más práctico.	Si son diferentes, y considera que no hay método mejor que otro pero si necesario conocer las diferentes maneras de resolver un mismo problema, y poder explicarlo (geométrico, algebraico)	uno requiere un conocimiento más agudo sobre temas de geometría (pregunta 13) el otro es mas sensible a las escalas y su mal uso (pregunta 9). Para mi, me quedo con el de la pregunta 13 ya que considero que por estar sustentado en teoremas es más fuerte, mas considero un poco más accesible para todos los que	Hay diferencias claro. Anteriormente usamos un método aritmético, en esta parte usamos un método geométrico. Pienso que ambos son buenos. Me atrevería a decir que el geométrico es mejor y más explícito.

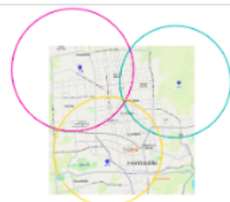
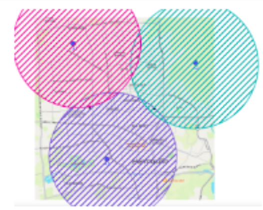
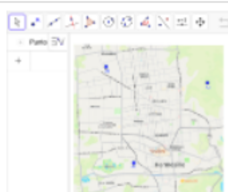
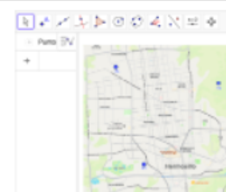
Reflexiones a partir de la situación

a. ¿Qué contenidos matemáticos se trabajaron en la situación?	Media aritmética, Variación lineal, Teorema de Tales.	Proporcionalidad, Geometría, Algebra	scalas, proporciones, Teorema de Tale	Proporción, distancia,
b. ¿Trabajarías esta situación con tus estudiantes?, ¿por qué?	Si. Es un contexto que podría interesar a los alumnos y que además pueden relacionar facilmente con su entorno. De esta forma le encontrarían mayor sentido a lo que están aprendiendo en clase.	Si, porque esta relacionada a nuestra vida cotidiana y es de interés general, lo cual ayuda que el estudiante se interese y quiera dar solución al problema con mayor entusiasmo	Sin lugar a dudas, me parece una aplicación imprescindible del Teorema de Tales.	Si. Es un buen ejemplo para enseñar los los temas de proporcion
c. ¿Qué modificaciones le harías a fin de poder llevar esta situación a tu salón de clases?	Ninguna, me pareció muy atractiva la propuesta. Me gusta que no se dan directamente procedimientos o métodos para resolver la actividad si no que a partir de conocimientos previos se puede ir construyendo la solución de la situación.	Algún material audio visual, para nosotros esta bien, pero para jóvenes creo que si requieren mayor apoyo visual o vivencias.	Me parece perfecta como está. Si a caso identificar la distancia entre Hermosillo y Guaymas.	Ninguna
d. ¿Qué papel jugó el trabajo geométrico en la situación?	Principalmente en el applets, en la aplicación del teorema de tales y en el plano cartesiano. Con lo cual se dio solución al problema	Jugó un papel importante ya que nos ayudó a complementar y mejorar nuestros métodos de resolución.	Fue el protagonista del show	Abrió un mejor camino para calcular lo que se pide. Más explicito y es un general un mejor recurso
e. ¿Qué papel jugó el material manipulable y el applet de GeoGebra en la situación?	La identificación de la necesidad de mejores método para la solución del problema, y el applet en la parte visual necesaria para tener una mejor experiencia de lo que se esta hablando	De la misma manera, nos ayudó a realizar un trabajo de manera más práctica.	Considero que el material fue bueno para activar la creatividad, el applet fue necesario para terminar la actividad ya que sin el hubiese sido muy difícil encontrar un modelo	uy práctico y fácil de explicar y entenc

Situación 2: Antenas telefónicas

Respuestas Situación 2: Antenas Telefónicas

Pregunta	P1	P2	P3	P4
1.¿Has visto este tipo de antenas en la ciudad?, ¿dónde?	No	Si, algunas en el cerro de la campana, abispas, etc	Sí, en el cerro de la campana.	SI. EN EL CERRO DE LA CAMPANA
2. ¿Qué criterio o consideraciones crees que toman las compañías telefónicas para la distribución e instalación de las antenas a fin	La altura	La altura y la amplitud de cobertura de la antena	Distribuirlas a manera de teselado triangular para que se cubra todo el territorio y reducir costos.	SUPONGO QUE EL RADIO DE COBERTURA DE LA SEÑAL Y LA CANTIDAD DE USURIOS POR ANTENA. TAMBIEN LA CAPACIDAD DEL EQUIPO INSTALADO
3. En la Figura 1, se muestra la ubicación de dos antenas telefónicas, ¿cuál antena (A1, A2) consideras que reciba la señal de un usuario que está en el punto P?	A2	El punto A2	La antena A2	YO CREO QUE LA ANTENA 2. MI RESPUESTA SE BASA EN LA LONGITUD DEL RADIO DEL PUNTO P - A1 Y P-A2
4.Explica que consideraciones tomaste para decidir qué antena	Aparenta estar más cerca	Por la cercanía entre P y A2	Considero que lo principal es la distancia a la antena, una segunda consideración sería lo saturada que esta la antena, la A2 es la antena que está más cerca al punto P	MEDI LA LONGITUD DEL RADIO DESDE EL PUNTO P A CADA ANTENA
5. Comparte tu explicación con el resto de los participantes, ¿hubo diferencias en sus resultados o explicaciones? Describe	Mismos resultados, en las explicaciones hubo diferencias. Algunos respondimos solo estimando y el resto verificaron utilizando la regla.	algunos determinaron a simple vista la respuesta otros requerimos comprobar la distancia entre P y cada uno de los puntos.	No hubo diferencia en los resultados mas si en las explicaciones: algunos usaron un método más "analítico"	NO HUBO DIFERENCIA EN LA RESPUESTA
6. Marca en el mapa la región que consideres que le corresponde a cada una de las antenas, utiliza un color diferente para cada región.				
7. Explica qué criterio utilizaste para hacer la división anterior	Tomé la antena como el centro de la región, limitandola por la circunferencia con radio igual a la distancia que hay entre la antena A1 y A2. Así, si una antena se encuentra saturada la otra antena puede cubrir la señal en cierta sección.	Las antenas tienen un área de cobertura y dejando de lado la saturación de información de las antenas por el radio de las circunferencias la más pequeña llegaría primero al punto P	Realizar círculos con centros en cada una de las antenas de radio igual a la mitad de la distancia entre estas.	UTILICE EL PUNTO P COMO CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA Y SOLO MPLIE EL RADIO HACIA A1 Y A2
8.¿Existen ubicaciones que se encuentren a la misma distancia de las antenas? Márcalos en el mapa				

9. ¿Qué criterio crees que se use en los casos de la pregunta anterior para determinar qué antena recibe la señal?	Se toma como referencia una tercer antena.	La capacidad de los equipos y la demanda en cada uno. Entonces del más veloz y con menos saturación de información. Incluso se podría tomar información de las dos antenas simultáneamente.	La carga de conexiones en las antenas parece un buen criterio para determinar esto.	LA CANTIDAD DE USUARIOS, ERGO LA SATURACION DE LA ANTENA, TAMBIEN LA CAPACIDAD DEL EQUIPO INSTALADO EN LAS ANTENAS
10. Supongamos ahora que tenemos tres antenas, como se muestra en la Figura 2, ¿cuál crees que reciba la señal del punto P? Explica tu respuesta	A2, Es la que se encuentra más cerca. Si el punto P se encuentra justo en medio de las Antenas A1 y A2, podría tomar la señal de la antena A3. Si el punto P se encuentra justo en medio de las Antenas A1 y A2, podría tomar la señal de la antena A3.	Del la antena A2 por cercanía de la antena.	A2, en una muy burda inspección se nota más cerca de la antena.	EL PUNTO P SE ENCUENTRA LIGERAMENTE MAS CERCA DE A2
11. Marca en el mapa las regiones correspondientes para cada antena, utiliza un color diferente para cada región.				
12. Explica cómo es que hiciste la división anterior	Tome en cuenta el mismo razonamiento anterior, las antenas A1 y A2 tienen la misma región. Ahora solo se agregó la región de la antena A3, tomando como radio la distancia que hay entre las antenas A3 y A2. Consideré la antena A2 por que se encuenta más lejos que la A1.	Tome el radio del Punto a la antena más cercana da cada uno, pero la redundancia es muy grande.	tomo un círculo de radio un poco más a la distancia media entre las antenas más alejadas y coloco copias de este con centro en cada antena	TOME COMO REFERENCIA UN PRIMER CIRCULO QUE PASARA POR LAS TRES ANTENAS, USANDO MEDIATRICES. LUEGO TRACE TRES CIRCUNFERENCIAS CON CENTRO EN CADA
13. Compara el mapa dividido en regiones con el de los demás participantes, ¿hay diferencias? Describelas	Hubo diferencias en la forma en la cuál se tomó el radio de cobertura de las antenas. Por ejemplo, se tomó el centro de la circunferencia que pasa por las tres antenas y su radio para poder trazar la cobertura de cada una de ellas.	Si hubo diferentes respuestas utilizando mediatrices, radios y diámetros, llegando a la conclusión que la herramienta de las mediatrices nos otorgan una mejor solución	La diferencia fue la región de intersección de los círculos, unos priorizaron que esta fuera mínima, otros óptima, y otros máxima.	EN ALGUNOS CASOS HAY EXCESO DE COBERTURA, QUE SERÍA IMPRACTICO Y EN OTROS CASOS FALTO COBERTURA EN UNA REGION DEL MAPA
14. Explora las diferentes herramientas y úsalas para validar las divisiones realizadas en el mapa (pregunta 11)				

15. Describe aquí qué herramientas y cómo las utilizaste para validar tu procedimiento	Trazo de circunferencias considerando el radio la distancia que hay entre ellas.	Mediatriz entre los puntos para construir la circunferencia con tres puntos (A1, A2 y A3). Con esto ya tenemos un nuevo centro C que nos servirá de radio entre el centro (C) y los puntos A1, A2 y A3	circunferencia: para trazar las regiones. Punto medio para estimar el radio del círculo.	CONSTRUCCION EN FISICO USANDO REGLA Y COMPAS
16. ¿La división que aparece en pantalla se corresponde con la que tu realizaste en el mapa de papel para el caso de tres antenas? Explica	Si, coincide que las líneas que se marcan corresponden a la mediatriz o la "línea roja" que consideramos al inicio.	Si, es muy cercana a la construcción con mediatrices propuesta anteriormente	no se corresponde, para empezar hay diferencia de forma en las regiones de cada antena, circulos	ES MUY PARECIDA SOLO QUE EN MI CONSTRUCCION SI HAY UNA PEQUEÑA INTERSECCION
17. Cambia la posición de las antenas y observa el comportamiento de las regiones, ¿qué forma geométrica identificas que divide una región de otra?	Son las mediatrices que surgen a partir de la distancia entre las antenas.	Se identifica el uso de las mediatrices, y con tres puntos se puede observar un triangulo incompleto (le falta un lado)	polígonos, de número de lados correspondiente al numero de antenas	POLIGONOS IRREGULARES
18. El procedimiento aplicado para dividir las regiones considerando tres antenas en la Figura 2, ¿será válido para situaciones dónde haya más de tres antenas telefónicas?, ¿por	Si, se tomarían en cuenta las 3 antenas más cercanas y se realizaría el mismo procedimiento.	Si, ya que la información se propaga de manera circular y las mediatrices no da una distancia igual para ambos centro o antenas	sí, encontrar un punto que está a la misma distancia de todas las antenas nos es intrínseco de tres antenas.	SI. ES UN CASO SIMILARS SI SE AUMENTAN LAS ANTENAS
19. A partir de la manipulación del applet ¿cómo podrías describir el cambio en las regiones cuando el número de antenas aumenta?	En algunas de ellas las áreas de cobertura se reduce dependiento del lugar dónde ubiquemos las antenas.	Cada que se aumenta una antena es una nueva circunferencia con centro en la antena y la mediatriz a la antena más cercana	el número de lados de las regiones va aumentando cuando estas no son colineales	LAS REGIONES DE COBERTURA SE HACEN MAS PEQUEÑAS
20. A partir de la exploración y análisis del applet anterior, ¿qué lugar geométrico divide en regiones todas las ubicaciones del mapa para asignar la antena correspondiente?	Triángulo	Circunferencias, apoyados de las mediatrices entre los centros se puede identificar la nueva posición	el circuncentro	UN POLIGONO IRREGULAR
21. ¿Qué propiedades tiene ese lugar geométrico?	esta a la misma distancia de todos los puntos, es el centro de una circunferencia que pasa por todos los puntos (antenas)	Puntos que equidistan de un punto llamado centro	esta a la misma distancia de todos los puntos, es el centro de una circunferencia que pasa por todos los puntos (antenas)	LA ANTENA CORRESPONDIENTE ESTA EN EL CENTRO
22. Escribe como explicarías el procedimiento para dividir por regiones el mapa de Hermosillo a partir de conocer la cantidad y ubicación del número de antenas.	Consideramos tres antenas y trazamos un triángulo al cuál trazaremos sus mediatrices y el circuncentro. Después tomaremos solo un segmento de la mediatriz que inicie del baricentro hacia el lado	Identificar el centro de los puntos dados, apoyados de las mediatrices y trazar una circunferencia de la antena al nuevo centro identificado en el procedimiento anterior.	Trazar las mediatrices de cada segmento de recta entre antenas y ayudándonos con los puntos de intersección de estas crear las regiones.	TRAZANDO MEDIATRICES ENTRE DOS ANTENAS

23.¿Qué conocimientos matemáticos consideras que se pusieron en juego dentro de esta situación?	Rectas y puntos notables en triángulo (Mediatrices y Circuncentro)	Mediatrices, Propiedades de la circunferencia, circuncentro	mediatrices y puntos notables en los triángulos, circuncentro, polígonos,...	GEOMETRIA PLANA, ESPECIFICAMENTE PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA Y LAS MEDIATRICES
24. ¿Los conceptos matemáticos propuestos en la secuencia forman parte del currículo de matemáticas para secundaria?	Si	Si, se incluía con anterioridad	definitivamente	SI
25. ¿Cuál consideras que es la función de GeoGebra dentro de la situación?	Facilitar el análisis de las posiciones de las antenas y sus regiones por medio de la manipulación de éstas.	Apoyo visual y de construcción muy importantes para las estudiantes que son visuales	ayudar a visualizar el problema y realizar los trazos más precisos	ES UNA HERRAMIENTA QUE AYUDA A VISUALIZAR LOS TRAZOS Y A HACERLOS MAS PERFECTOS
26. ¿En qué otros contextos consideras que se puede abordar lo trabajado en la situación? Plantea dos	Región para área de reparto y ubicación de negocios para alguna franquicia	En la construcción de edificios para identificar las distancias entre cada uno, área de reparto de cualquier empresa, ubicación de nuevas franquicias para identificar la mejor ubicación	Centros de distribución de compañías como Amazon. Iluminación de móviles mediante detección de movimiento con varios sensores.	UBICANDO POSICIONES EN UN PLANO CARTESIANO, CALCULANDO PUNTOS MEDIOS ENTRE DOS SEGMENTOS
27. ¿Qué modificaciones o adaptaciones le harías a la situación para trabajarla con tus estudiantes?	Ninguna	Creo que la situación planteada seria de interés para los estudiantes, por ejemplo de pizzas, de sushi, etc	poder usar las herramientas completas de GeoGebra en los espacios donde los alumnos pueden usar lápiz, regla y texto.	TRAL VEZ USARIA LUGARES CONOCIDOS COMO LA UBICACION DEL COLEGIO, UN PARQUE, SU CASA ETC. PERO LA LOGICA SERIA MUY PARECIDA

Reflexiones finales

Reflexiones Finales

Pregunta	P1	P2	P3	P4
1. Haciendo un análisis de la resolución de las dos situaciones, responde lo siguiente: ¿qué papel jugó el applet GeoGebra en cada una de as situaciones?, ¿cuál fue su función?, ¿se usó de manera similar?	En la primera situación no lo utilizamos en un inicio puesto que la mayoría iniciamos con soluciones aritméticas. Después se nos fue guíando al uso de éste mediante la manipulación de un applet, lo que nos llevó a considerar un teorema que no habíamos contemplado anteriormente. De esta forma logramos encontrar una mejor estrategia para la resolución de la situación. En la segunda situación empezamos utilizando GeoGebra para realizar trazos como apoyo para encontrar las regiones de cobertura de las antenas. En mi caso, me ayuda mucho utilizarlo en este tipo de situaciones ya que es muy práctico y me permite realizar trazos, manipular, analizarlos y modificar rapidamente sin complicaciones a comparación de un trabajo con el juego de geometría físico.	En el primer ejercicio nos ayudo de manera visual pero en el segundo nos apoyamos para la construcción de posibles soluciones. Considero que su uso no fue tan simple,	En la primera situación nos ayudó a visualizar la aplicación de propiedades geométricas. En la segunda nos ayudo a construir las regiones y también a visualizarlas. Considero que se uso de distinta forma en cada una, pero al final de cuentas fue usado de manera explorativa.	Permitió visualizar el problema planteado y contemplar distintas variables modificando resultados
2. ¿qué papel jugó el trabajo geométrico en cada una de las situaciones?	Formó parte fundamental en la resolución de las situaciones. Creo que si no hubiesemos implementado el trabajo geométrico hubiesemos tenido mayor dificultad para resolver los planteamientos.	Tuvo el papel central sobre toda al dirigirnos hacia dicho trabajo geométrico, fue interesante como nos guiaste hacia el trabajo Geométrico de una forma muy natural	En retrospectiva y aunque me cueste decirlo, porque me gusta mucho la tecnología y GeoGebra, alrededor de esto estuvieron centradas las situaciones... hacer trabajo geometrico	En la primera situación inicialmente no tuvo mucha relevancia pero modificando el enfoque fue muy útil, ya que simplificó mucho el planteamiento del problema
3. ¿Consideras importante el promover trabajo geométrico en tu salón de clases?, ¿por qué?	Si. Ahora considero que es importante no solo promoverlo si no también darle un enfasis más activo, creo que esto les permite comprender mejor los contenidos y desarrollar habilidades no puras de la matemática como el manipular material y construir figuras.	si, para mostrarle a los estudiantes que la Geometría es muy distinta al algebra y que si bien es cierto se requiere para concretar algunas soluciones la Geometría tiene su lado interesante y aplicable a la vida cotidiana	Definitivamente, para lograr desarrollar conocimientos solidos y lograr así aprendizajes significativos. Y es que, en lo que respecta a la parte de geometría, me he topado con varios estudiantes que se notan con deficiencias, incluso yo tengo algunas de estas.	Muy importante. Siento que los estudiantes carecen de visualización geométrica y se limitan solo a los conocimientos básicos cuando es tan amplio el campo de la geometría
4. ¿cómo promueves el trabajo geométrico en tu salón de clases? puedes dar un ejemplo	Mayormente ha sido con un enfásis pasivo y poco activo. Complementando la pregunta anterior, la última ocasión en la cuál fue un poco más activo el trabajo geométrico, fue en la construcción de prismas y me di cuenta que ha pesar de que los alumnos ya habían estudiado el volumen de estas figuras, al momento de construirlas y pedirles que calcularan el volumen de éstas, como que no lo lograban vincular lo que ya habían estudiado antes con las figuras que ahora ya tenían en físico. Por lo que se tuvo que hacer una intervención y aprovechando las figuras, se les volvió a indicar cuales eran sus elementos y cómo hacer el cálculo que se buscaban.	Por el momento no eh impartido esta materia, pero considero que vinculando las situaciones problemas a la vida cotidiana de los estudiantes.	planteo un problema que podamos resolver haciendo mediciones y proponiendo un modelo geométrico, animo a los estudiantes a proponer su propio "modelo" y los voy guiando hasta que coincidimos en algún punto medio, más cercano a mi modelo, claro está.	Utilizo mucho ejemplos de posicionamiento en el aula o en el exterior como distancia altura medida forma paralelismo perpendicularidad etc

5. Respecto a la pregunta anterior, el trabajo geométrico que promueves, ¿se corresponde con el cómo se promovió durante las situaciones trabajados durante esta Experiencia? Explica tu respuesta	No. Generalmente el trabajo que realizamos en clase lo hacemos indicando qué herramientas son las que van a utilizar y como se van a utilizar, dejándoles muy poco espacio para que ellos razonen o piensen en una estrategia para llevar a cabo la resolución del la situación.	???? todavía no doy clases de Geometría	no, el trabajo en estas situaciones fue mucho más dinámico y más libre.	No mucho. Pero me parece que es un buen principio para incluirlo en mis lecciones
6. Reflexión respecto a la Experiencia de Desarrollo Docente: ¿qué te llevas?	Me gustó la forma en la cuál se puede llevar a cabo la resolución de un problema o una situación sin indicar qué es lo que va a utilizar como herramienta para la resolución de éste. Me gustaría llevar esto a cabo, creo que de esta manera mis estudiantes pueden plantear sus propias estrategias, verificar si funcionan y de no ser así, permitirles el intercambio de ideas y estrategias con el resto de los compañeros para lograr encontrar una mejor estrategia. Definitivamente, lo tomaré en cuenta en mis planeaciones.	El entusiasmo por continuar preparándome, y aplicar en mis clases esta forma de encaminar a los estudiantes hacia el objeto de estudio centrado de inicia en una situación de la vida cotidiana	Un gran sabor de boca, en realidad me encantó esta experiencia, hubiese querido que durara más. Reflexiones respecto a como enseño esta parte de las matemáticas y a al respecto de las pruebas estandarizadas también me llevo. No había pensado en esto de la carencia generalizada en cuanto a geometría que arrojan estas pruebas, en realidad muy interesante este tema y aún más, como hacer para "remediarlo".	Fue un buen ejercicio sobre todo de lógica. Aplicando la geometría como no la había aplicado. Gracias