CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

Análisis algebraico de Viète y Descartes: La ecuación paramétrica y la algebrización de la geometría. Un acercamiento epistemológico y lingüístico-multisemiótico

TESIS

Que presenta

M. en C. Luis Alberto López-Acosta

Para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directora de la tesis

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Ciudad de México FEBRERO, 2023

Agradezco al

Consejo Nacional de Ciencia y tecnología (Conacyt)

por brindarme el apoyo económico

para realizar mis estudios de doctorado.

Luis Alberto López Acosta

Becario No. 339429

Dedico este trabajo a:

A mí mismo.

A Alba e Ivanna.

Mi familia y seres queridxs.

Agradecimientos

Agradezco a Dios y a la vida por un sinfín de experiencias de todo tipo que resultaron en este proceso del doctorado y que han forjado una persona muy diferente a la que inició. Porque estoy vivo al igual que las personas que más me importan. También por haberme concedido el regalo de mi hermosa familia, aquella que siempre estuvo ahí para apoyarme. Y de manera muy especial por el regalo de ser padre de una niña que no deja maravillarme cada día. Pero, por sobre todas las cosas, agradezco que en los momentos más duros y difíciles que nos ha tocado afrontar, aun cuando el panorama parecía oscurecerse y la desesperación se hacía presente, aparecía una luz que nos reconfortaba infinitamente.

La primera persona a la que le debo este gran logro personal es a ti mi amor, Alba. Porque no me imagino lo difícil que debió ser para ti el aguantar mis ausencias, mis estados emocionales, los cambios radicales en nuestras vidas, el arrastrarles en todo este proceso y muchísimas cosas más, que seguramente fueron muy duras y pesadas para cargar en tus hombros, por estar haciendo este trabajo. No existen palabras para expresarte todo el amor que te tengo y lo agradecido que estoy por haberte conocido, porque estemos juntos y por todo el amor que siempre me has dado. Eres de verdad mi gran soporte y mi más grande cómplice en esta aventura que llamamos vida. Aquella persona que me hace sentir seguro y confiado de las decisiones más importantes de ella y con quien deseo seguir compartiendo muchísimas más aventuras hasta el fin de nuestros días. Te amo con todo mi ser mi amor.

A ti hija, mi mayor regalo, mi mayor fuente de mi felicidad y alegría. Te agradezco especialmente a ti porque has aguantado mucho en este proceso. En todas las ocasiones que no hemos podido compartir algún tiempo juntos, aun cuando me lo pedías y con mucho pesar te lo negaba. Te pido mil disculpas por todos esos momentos que debieron ser muy duros para ti. No lo merecías mi amor. Gracias por hacerme sentir un padre muy amado. Te prometo que vendrán tiempos mejores y los aprovecharemos al máximo. También te amo con todo mi ser Ivanna, mi regalo de Dios, te amo hasta Júpiter mi Fidita.

A mi papá y mamá, Luis y Oliva, por estar siempre apoyándome a mí y a mi familia en nuestras decisiones y en los momentos difíciles. Por toda la contención que nos dan cuando lo necesitamos. También ustedes son un pilar importante en mi vida. Los amo también y le pido a Dios que me permita tenerles muchos años conmigo. A mi abuelo Chucho y abuelas Argelia y Lupita, que en paz descansen y que en vida me apoyaron en todo lo que pudieron. También a mi hermano Omar por estar ahí también en momentos importantes, por siempre estar dispuesto a escucharnos y, sobre todo, porque siempre que coincidimos nos demuestras el gran amor que nos tienes. También te amo hermano y deseo lo mejor para ti y tu familia. De igual manera agradezco a mi suegra Nelly, por las innumerables ocasiones y situaciones en las que nos ha apoyado y salvado, brindándome también contención. Por la sinceridad de sus palabras, el recibimiento en su familia y también por hacerme sentir como un hijo. Gracias por ser como una segunda madre para mí y por confiar en nuestras decisiones.

A la doctora Gisela Montiel por todo su apoyo a lo largo de nueve años como mi asesora, por su confianza, por ayudarme a construir el proyecto y por su gran orientación para llevarlo a buen puerto. Doctora, no tengo más que admiración hacia usted, no solo por su calidad como académica, sino también por su calidad humana y la forma en la que me ha guiado en este proceso. También agradezco sobremanera, la protección que sentí de su parte en momentos en los que me sentí amenazado y la apertura para escucharme. El doctorado no hubiera sido lo mismo sin usted. Me siento privilegiado por haber sido su alumno.

Al doctor Daniel Rodríguez, por las enormes contribuciones al trabajo y sobre todo a mi formación. Por todo lo que he aprendido con su acompañamiento y apoyo incondicional, gracias al cual, pude acercarme a un mundo completamente nuevo y que me apasiona tanto como para seguirlo explorando. Gracias porque ha sido también un asesor en este proceso.

Al resto del sínodo por sus aportaciones y discusiones durante este largo período, a la doctora Rosa Ma. Farfán, a la doctora Dominique Manghi, al doctor Armando Solares y a la doctora Avenilde Romo. La discusión con ustedes ha contribuido sin duda a la mejora de este trabajo.

A mis amigos de siempre, porque durante todo este tiempo procuramos permanecer juntos y celebrar el conocernos, a Julio, Irene, Melby, Josué, Claudio, Caro y Mario. También a mis colegas y nuevos amigos de los seminarios con los que entablábamos buenos debates durante nuestra formación y que, sin preverlo, el respeto hacia su capacidad intelectual y académica también se convirtió en un lazo de amistad. A Fabián, Diana, Eduardo, Gerardo, Sergio, Luis Carlos, Carlos Eduardo, Melvin, Karen y Ma. Antonieta.

También agradezco a mis colegas de la Facultad de Matemáticas de la UADY, Eddie, Landy y Martha por ayudarme a descubrir una de mis más grandes pasiones y por confiar en mí para regresar al origen; donde conocí a muchas otras personas que me recordaron porqué inicié este camino hace ya mucho tiempo. A todas y todos mis estudiantes, gracias por todos los momentos vividos y por haberme reforzado lo mucho que amo lo que hago.

Finalmente, agradezco también a dos personas por haberme extendido su mano en un momento sumamente difícil para mí y mi familia que parecía no tener fin, al Ing. David Cardeña Ruz y a mi exalumna Maleni Padilla. Su increíble calidad humana y aprecio hacia mi persona es algo que nunca voy a olvidar. Mis mejores deseos para ustedes.

Luis

Enero de 2023

Índice

RESUMEN

En el siguiente reporte se presenta el desarrollo y resultados de una investigación doctoral que presenta aportes hacia el campo de la enseñanza y aprendizaje del álgebra y de la geometría analítica, para el nivel bachillerato.

En la investigación partimos de la intención de estudiar las características del álgebra en el bachillerato, puesto que, como se argumenta en el trabajo, las primeras revisiones bibliográficas dieron muestra de que si bien la enseñanza y aprendizaje del álgebra han sido ampliamente explorados y estudiados, existen aún dificultades y falta de conceptualizaciones, no solo de ese tipo de aprendizajes, sino también de sus didácticas en este nivel; principalmente porque la mayor parte de los resultados sobre el desarrollo del pensamiento algebraico se centran en los niveles básicos de la escolaridad (Thompson, 2017), no así para los niveles posteriores. Socas (2011), menciona justamente que, a pesar de los avances en materia de la didáctica del álgebra en general, aún no se tienen bien definidas las metas de aprendizaje del álgebra para los distintos niveles educativos. Por ejemplo, es muy común, como en otras áreas, que los contenidos matemáticos y su didáctica, tanto en niveles básicos como en el bachillerato coincidan casi totalmente, exceptuando en el mejor de los casos, el nivel de dificultad.

En este sentido, el álgebra en el bachillerato sigue siendo un dominio susceptible de ser estudiado, más aún cuando continúa siendo una asignatura en el currículum vista como una fuente de ansiedad (Tall, 2017) y que, por lo tanto, limita el avance académico de jóvenes estudiantes (Mason, 2017; Reeder, 2017; Stacey y Chick, 2004;). Incluso en estudios como (Adelman, 2006; Stein, Kaufman, Sherman, y Hillen, 2011; Steward y Reeder, 2017; Thompson, 2017) se muestra cómo existe una correlación importante en el éxito de los cursos de nivel superior con el dominio del álgebra. Estas razones fueron el punto de partida del interés de la investigación que presentamos.

Las revisiones bibliográficas posteriores nos orientaron a considerar que la problemática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra posee una doble complejidad, en tanto que implica no solo un cambio conceptual (ver Kieran, 2007; Kilpatrick, et. al. 2001 citado en Cai y Knuth, 2011, Serres, 2007; Sfard, 1995), sino también del desarrollo de capacidades metalingüísticas (ver Drouhard y Teppo, 2004; Halliday, 1993; McGregor y Priece, 1999; Pimm, 1987; Schleppegrell, 2007). Esto por la doble caracterización del ágebra como lenguaje y como actividad matemática que involucra conjuntos de conocimientos específicos. De ahí que se

optara por estudiar el álgebra del bachillerato en torno a dos dimensiones, la primera epistemológica y la segunda lingüística.

Encontramos que los resultados relativos al lenguaje algebraico son limitados, toda vez que, la mayor parte de las investigaciones sobre el lenguaje en matemáticas, abordan consideraciones respecto al lenguaje matemático en general y no se particularizan los distintos subdominios de las matemáticas como la geometría, la trigonometría y el álgebra; es decir, la mayoría de los estudios asumen que el lenguaje matemático es un sistema semiótico universal que no se modifica por el uso que se le da en distintas áreas de las matemáticas. Como consecuencia, los estudios lingüísticos centran su atención principalmente en las características semánticas y sintácticas de su simbolismo (Chico, 2018), dejando de lado el uso de otros recursos semióticos que contribuyen a la producción de significados algebraicos como las imágenes y lo lingüístico. Incluso es común que el lenguaje algebraico sea confundido con los símbolos que forman parte de este sistema semiótico más amplio.

Bajo estas ideas, y con base en la revisión bibliográfica para delimitar el objeto de estudio, nos decidimos a estudiar *la naturaleza del Pensamiento y Lenguaje Algebraico, que fue desarrollado por Viète y Descartes durante la época del Renacimiento.* Este pensamiento y lenguaje algebraico ha sido caracterizado por autores como Sasaki (2003) como *análisis algebraico* y como argumentamos en el trabajo se caracterizó por la creación de un objeto matemático nuevo en el Renacimiento: *la ecuación paramétrica*.

La decisión principal para centrarnos en el análisis algebraico de Viète y Descartes fue principalmente por nuestro interés en el álgebra del bachillerato, puesto que consideramos que, en este nivel educativo, los planes y programas de estudio en este nivel demandan que los estudiantes desarrollen un pensamiento y lenguaje algebraico más cercano a lo que estos matemáticos construyeron. Basta con considerar que los contenidos de las asignaturas típicas de este nivel exigen del dominio del álgebra simbólica para resolver problemas, así como del uso del álgebra para el tratamiento de los lugares geométricos, como las cónicas en la asignatura de geometría analítica. Incluso cuando se trabaja con las asignaturas de precálculo, las expresiones algebraicas deben adquirir el estatus de representantes de curvas.

La aproximación hacia el objeto de estudio considera tres tipos de análisis: uno histórico-epistemológico desde la *Teoría Socioepistemológica*, otro lingüístico desde la *Lingüística Sistémico-Funcional* y un tercero fundamentado en el *Análisis Sistémico-Funcional de Discursos Multimodales*. La estrategia metodológica empleada para enmarcar el proyecto del análisis algebraico en el

Estudio Histórico-Epistemológico, fue la comparación de la actividad matemática manifiesta en algunos textos de Viète y Descartes con otros algebristas previos para identificar diferencias en términos de nociones, métodos de resolución, tipos de problemas, el rol del simbolismo algebraico, y mecanismos de validez para definir una operatividad simbólica.

Complementariamente, a esta comparación se realizó un análisis del contexto de significación relativo al análisis algebraico de Viète y Descartes, con el que se recuperan las condiciones socioculturales que se consideran influyeron en sus maneras de pensar, construir y fundamentar sus respectivas construcciones de esta nueva forma algebraica de pensar. Los hallazgos del Estudio Histórico-Epistemológico permitieron el establecimiento de consideraciones epistemológicas para replantear la actividad analítica-algebraica escolar, razón por la cual, nos propusimos realizar un estudio exploratorio con tres estudiantes de bachillerato en el cual se les planteó resolver tareas analítico-algebraicas que contemplaron tales consideraciones para robustecerlas, pues como menciona Radford (1998), la historia no puede ser normativa para la didáctica.

Dentro de los resultados más relevantes que se reportan se encuentran la descripción de la distinción entre la actividad algebraica de Viète y Descartes en comparación con otros algebristas previos. Asimismo, se propone una hipótesis epistemológica que explica la naturaleza de la actividad matemática que permitió a Viète y Descartes la construcción de la ecuación paramétrica, objeto que no existía previamente a ellos y que, por tanto, contribuyó a un cambio de paradigma en la actividad algebraica en particular y en la actividad matemática en general que devino de esta invención. Esta hipótesis enfatiza el rol del tipo de problemas que ambos matemáticos resolvieron en la construcción de sus respectivos análisis algebraicos, dejando ver la relevancia de problemas geométricos complejos en la construcción de la cantidad paramétrica. Por lo tanto, el rumbo de la investigación fue llevando del álgebra *per se* hacia un *álgebra para la geometría* (Oaks, 2018), es decir, hacia la geometría analítica. Lo encontrado en la exploración con estudiantes ayudó a determinar elementos más finos de esta actividad matemática y que son viables de abordarse en el aula de matemáticas.

Se describen también las características de los discursos de Viète y Descartes analizados, las cuales muestran cómo los elementos sobre los que se habla en sus discursos corresponden a una combinación de polinomios, ecuaciones y magnitudes geométricas. Se muestra que sus discursos estructuran un significado lógico complejo por el tipo de problemas que resolvían. También se describen los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos encontrados en los textos analizados de ambos matemáticos, dejando ver una compleja articulación de tres recursos semióticos: lenguaje natural, simbolismo e imágenes visuales. Respecto a estos tres recursos se muestra que la gramática visual, la cual atiende a la cohesión entre los recursos del simbolismo y lenguaje natural con las imágenes visuales, no se encuentra desarrollada al mismo nivel que los textos actuales de matemáticas, ni de quienes participaron en el estudio exploratorio.

ABSTRACT

The following report presents the development and results of a doctoral research that presents contributions to the field of teaching and learning of algebra and analytical geometry at the high school level.

In the research we start from the aim of studying the characteristics of algebra in high school, since, as argued in the work, the first literature review showed that although the teaching and learning of algebra have been widely explored and studied, there are still difficulties and lack of conceptualizations, not only regarding to learning, but also to didactics at this level; mainly because most of the results on the development of algebraic thinking are focused on the basic levels of schooling (Thompson, 2017), not so for later levels. Socas (2011), rightly mentions that, despite the advances in the didactics of algebra in general, the learning goals of algebra for the different educational levels are still not well defined. For instance, it is very common, as in other areas, that both mathematical content and didactics, in basic and high school levels, coincide almost completely. In the best of the cases, the difference would be the difficulty level of the problems.

Thus, high school algebra continues to be a domain susceptible to study, even more so when it continues to be a subject in the curriculum seen as a source of anxiety (Tall, 2017) and which, therefore, limits the academic progress of young students (Mason, 2017; Reeder, 2017; Stacey and Chick, 2004;). Even in some other studies (Adelman, 2006; Stein, Kaufman, Sherman, & Hillen, 2011; Steward & Reeder, 2017; Thompson, 2017) it is shown how there is a significant correlation in upper-level course success with algebra proficiency. These reasons were the starting point for the research interest we present.

Subsequent literature reviews guided us to consider that the problem of teaching and learning algebra has a double complexity, because it involves not only a conceptual change (see Kieran, 2007; Kilpatrick, et. al. 2001 cited in Cai and Knuth, 2011, Serres, 2007; Sfard, 1995), but also the development of metalinguistic skills (see Drouhard and Teppo, 2004; Halliday, 1993; McGregor and Priece, 1999; Pimm, 1987; Schleppegrell, 2007). This is due to the double characterization of algebra as a language and as a mathematical activity, involving specific sets of knowledge. Hence, it was decided to study high school algebra along two dimensions, the first epistemological and the second linguistic.

We found that the results related to algebraic language are limited, since most of the research on language in mathematics deals with considerations regarding mathematical language in general and the different subdomains of mathematics such as geometry, trigonometry and algebra are not particularized; that is, most studies assume that mathematical language is a

universal semiotic system that is not modified by the use given to it in different areas of mathematics. Therefore, linguistic studies focus their attention mainly on the semantic and syntactic characteristics of its symbolism (Chico, 2018), leaving aside the use of other semiotic resources that contribute to the production of algebraic meanings such as images and the linguistic. It is even common for algebraic language to be confused with the symbols that are part of this broader semiotic system.

Under these ideas and based on the literature review to delimit the object of study, we decided to study the nature of Algebraic Thought and Language, which was developed by Viète and Descartes during the Renaissance era. This algebraic thought and language have been characterized by authors such as Sasaki (2003) as algebraic analysis and as we argue in the report, it led to the creation of a new mathematical object: the parametric equation.

The main decision to focus on the algebraic analysis of Viète and Descartes was mainly due to our interest in high school algebra, since we consider that, at this educational level, students are engaged to develop an algebraic thought and language closer to what these mathematicians constructed. It is enough to consider that the contents of the typical subjects at this level require the mastery of symbolic algebra to solve problems, as well as the use of algebra for the treatment of geometric places, such as conics in the subject of analytical geometry. Even when working with pre-calculus subjects, algebraic expressions must acquire the status of representations of curves.

The approach to the object of study considers three types of analysis: the first is historical-epistemological framed in the Socioepistemological Theory, the second is linguistic based on Systemic-Functional Linguistics and a third one based on Systemic-Functional Analysis of Multimodal Discourses. The methodological strategy used to frame the algebraic analysis project in the Historical-Epistemological Study, was the comparison of the mathematical activity manifested in some texts by Viète and Descartes with other previous algebraists to identify differences in terms of notions, methods of resolution, types of problems, the role of algebraic symbolism, and validity mechanisms to define a symbolic operativity.

Complementary to this comparison, an analysis of the context of meaning, related to the algebraic analysis of Viète and Descartes was carried out, including the sociocultural conditions that are considered to have influenced their ways of thinking, constructing and founding their respective methods for this new algebraic way of thinking. The findings of the Historical-Epistemological Study allowed us to establish epistemological considerations to rethink the school analytic-algebraic activity, which is why we proposed to carry out an exploratory study with three high school students in which they were asked to solve analytic-algebraic tasks according to these epistemological considerations in order to make them more robust, since, as Radford (1998) mentions, history cannot be normative for didactics.

Among the most relevant results reported are the description of the distinction between the algebraic activity of Viète and Descartes in comparison with other previous algebraists. We propose an epistemological hypothesis that explains the nature of the mathematical activity that allowed Viète and Descartes to construct the parametric equation, an object that did not exist before them and that, therefore, contributed to a change of paradigm in the algebraic activity in particular and in the mathematical activity in general that resulted from this invention. This hypothesis emphasizes the role of the type of problems that both mathematicians solved in the construction of their respective algebraic analysis, showing the relevance of complex geometric problems in the construction of parametric quantity. Therefore, the direction of the research was leading from algebra per se towards an algebra for geometry (Oaks, 2018), i.e., towards analytic geometry. What we found in the exploration with students helped to determine more delicate elements of this mathematical activity that are feasible to address in the mathematics classroom.

The characteristics of Viète's and Descartes' discourses analyzed are also described, which show how the elements discussed in their discourses correspond to a combination of polynomials, equations, and geometric magnitudes. It is shown that their discourses structure a complex logical meaning because of the type of problems they solved. The Intersemiotic Mechanisms and Systems found in the analyzed texts of both mathematicians are also described, showing a complex articulation of three semiotic resources: natural language, symbolism, and visual images. Regarding these three resources, it is shown that the visual grammar, which attends to the cohesion between the resources of symbolism and natural language with visual images, is not developed at the same level as the current mathematics texts, nor of those who participated in the exploratory study.

.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

1

Introducción al problema de investigación

1.1 La problemática de la enseñanza-aprendizaje del álgebra y el análisis algebraico

Dentro de los dominios de investigación en Matemática Educativa, el campo del Pensamiento Algebraico es uno de los que más atención ha recibido, tal y como señalan Charalambos y Pitta-Pantazzi (2016)

> En particular, seguimos presenciando un énfasis desproporcionado de los estudios sobre el sentido numérico y las operaciones, así como sobre el álgebra, y menos estudios sobre el espacio y la geometría, la estadística, la medición y las probabilidades (Charalambos y Pitta-Pantazi, 2016, p. 36).

Quizás esto se deba, por un lado, a las dificultades recurrentes que se han reportado con respecto al tránsito del dominio aritmético hacia el dominio algebraico por las y los estudiantes en los sistemas educativos de todo el mundo, a saber, *el nivel de abstracción*, *la sorprendentemente relación problemática y multifacética con el aprendizaje aritmético previo*, *la necesidad de adquirir fluidez en la manipulación simbólica* y *la necesidad de hacer transiciones del pensamiento procedimental al pensamiento estructural* (Stacey y Chick, 2004). En términos didácticos, una consideración importante es el hecho de que la matemática escolar promueve una gran carga sobre el dominio algebraico en toda la escolaridad media y media superior, lo cual implica que el éxito o fracaso de las y los estudiantes dependa en gran medida de su pericia. Basta con identificar en asignaturas y/o contenidos del bachillerato mexicano, tales como Geometría Analítica, Trigonometría, Precálculo y Cálculo Diferencial e Integral —las cuales conforman casi la totalidad de las asignaturas que un(a) joven debe aprobar en dicho nivel— cómo el discurso escolar demanda de una manipulación simbólica avanzada, que en muchos de los casos se logra sin sentido alguno (Harel, Fuller, y Rabin, 2008).

En otra línea de ideas, de acuerdo con los reportes del Instituto Nacional para la Evaluación Educativa [INEE] (2017), si se consideran los resultados de las pruebas nacionales en México como la del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) en 2017, puede identificarse que el 66.2% de los estudiantes que rindieron esta prueba se encuentran en el Nivel 1 —el más básico de cuatro niveles en los que se segmenta a la población estudiantil de acuerdo con los criterios de la prueba—, en el cual se ubican estudiantes que "tienen dificultades para realizar operaciones con fracciones y operaciones que combinen *incógnitas o variables (representadas con letras),* así como para establecer y analizar relaciones entre dos variables". De aquí que, se establece que respecto al eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, los estudiantes del Nivel 1 tienen "dificultades para emplear algoritmos aritméticos más elaborados y *dificultades importantes en el dominio del álgebra*", mientras que respecto al eje Cambio y Relaciones se "tienen *dificultades para reconocer y establecer, algebraica o gráficamente, la relación de dependencia de dos variables*".

Por lo tanto, estas y muchas otras circunstancias han llevado a afirmar que en muchos casos el Álgebra escolar es un factor importante en la deserción escolar; es decir, una variable por la que un porcentaje significativo de la población no continúa sus estudios en los niveles superiores (Mason, 2017; Reeder, 2017; Stacey y Chick, 2004).

Así, si bien la vasta producción que nos ha dejado este campo de investigación ha permitido con el tiempo desarrollar gran cantidad de acercamientos a la enseñanza del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico, coincidimos con Socas (2011) cuando menciona que a pesar de los avances, no se tienen bien definidas las metas de aprendizaje para el álgebra para cada uno de los distintos niveles educativos, ocasionando que no exista una diferencia sustancial en el tratamiento didáctico que reciben los contenidos algebraicos en la educación media y media superior. En el mejor de los casos, la diferencia se da en cuanto al nivel de complejidad de los contenidos.

Complementariamente, otra razón por interesarnos en el álgebra del bachillerato fue el hecho de que la mayor parte de los resultados sobre el desarrollo del pensamiento algebraico, como argumentan algunos trabajos se centran en la educación primaria y secundaria, no así para los niveles posteriores (Thompson, 2017).

Estas consideraciones fueron el punto de partida y justificación inicial para plantear la investigación.

No obstante, a medida que el trabajo fue avanzando, y con ello las revisiones bibliográficas, se asumió un carácter dual para el problema de investigación, toda vez que, el tipo de álgebra del bachillerato no solo promueve una forma de pensamiento sino también de un dominio y uso del álgebra como lenguaje. De esta manera, esta segunda consideración implicó la construcción de un marco conceptual que permitiera el estudio del lenguaje. De aquí que el problema de investigación posea dos dimensiones: una epistemológica y una lingüística. La primera porque nos interesó determinar los procesos de construcción del álgebra asociada al nivel bachillerato, mientras que la segunda se incluyó con la intención de comprender las características del álgebra como lenguaje multisemiótico.

En el capítulo 2 se presentan, de manera sintética, los resultados de las tres revisiones iniciales que permitieron dar sentido y justificar el problema de investigación. Especificamos que nuestro objeto de estudio reside en la actividad matemática y el discurso algebraico asociados con el análisis algebraico de Viète y Descartes producida en la época del Renacimiento, todo desde una aproximación epistemológica y otra lingüística-multisemiótica.

En el capítulo 3 se aborda el diseño de la investigación que se propuso para dar respuesta al problema de investigación. El estudio se dividió en dos fases, de las cuales en la primera nos enfocamos al EHE y los análisis lingüísticos-multisemióticos de textos antiguos. La segunda fase del estudio correspondió a una Investigación Basada en el Diseño mediante la metodología de la Entrevista Basada en Tareas con tres estudiantes de bachillerato, así como los respectivos análisis lingüísticos-multisemióticos de sus textos.

En el capítulo 4 se describe la fundamentación teórica, la cual conforma un marco conceptual que recupera elementos de dos teorías. La primera teoría corresponde a la Teoría Socioepistemólica (Cantoral, 2013). La segunda corresponde a la Teoría Lingüística Sistémico-Funcional (Halliday, 1982). El tercer enfoque corresponde a una ampliación de esta segunda teoría para el estudio de discursos multimodales (O'Halloran, 2005). En este sentido, la dimensión epistemológica fue abordada con planteamientos de la Socioespistemología, mientras que la lingüística y multisemiótica por la Lingüística Sistémico-Funcional y el Análisis Sistémico-funcional del Discurso Multimodal, respectivamente.

En el capítulo 5 se especifican los análisis llevados a cabo en la primera fase del estudio, junto con las consideraciones metodológicas y metódicas respectivas a cada uno de los análisis.

En el capítulo 6 presentamos los resultados derivados de esta primera fase del estudio, destacando la gramática funcional y los mecanismos y sistemas de intersemiosis encontrados en los textos de algebristas antiguos. Asimismo, presentamos las consideraciones epistemológicas derivadas del Estudio Histórico-Epistemológico del análisis algebraico y la ecuación paramétrica. Estas consideraciones permitieron el diseño de las actividades que se propusieron en la fase experimental con estudiantes, abordando lo que denominamos *la algebrización de la geometría*.

En el capítulo 7 se especifican los análisis llevados a cabo en la segunda fase del estudio, junto con las consideraciones metodológicas y metódicas respectivas a cada uno de los análisis.

En el capítulo 8 presentamos los resultados derivados de la segunda fase del estudio, destacando, al igual que en la primera fase, la gramática funcional y los mecanismos y sistemas de intersemiosis encontrados en los textos de la y los estudiantes participantes en la experimentación. Al respecto de la dimensión epistemológica, se muestran las comparaciones y profundizaciones relativas a las consideraciones epistemológicas provenientes del Estudio Histórico-Epistemológico del análisis algebraico y la ecuación paramétrica en la primera fase. Lo obtenido permitió construir una mirada más completa de las implicaciones de este tipo de actividad matemática.

En el capítulo 9 se presentan los resultados finales del estudio, mostrando los aspectos más relevantes que responden a las preguntas de investigación planteadas, y que integran los resultados de la primera y segunda fase de estudio. En los resultados lo encontrado aporta hacia consideraciones epistemológicas para la didáctica de la geometría analítica centradas en la práctica de *algebrización de la geometría*. Asimismo, se especifican las características gramaticales y multisemióticas del discurso analítico algebraico en términos amplios.

En el capítulo 10 presentamos las conclusiones del estudio, señalando consideraciones relativas a la actividad algebraica en general, el rol de las dos dimensiones abordadas en el estudio, sobre el fenómeno de intersemiosis, y la geometría analítica escolar. A partir de estas, realizamos una discusión con la que destacamos las principales aportaciones del estudio llevado a cabo al campo de la Matemática Educativa.

Cabe señalar que por el volumen de los datos analizados, se decidió omitir partes de los análisis en el cuerpo del documento para agilizar la lectura. No obstante, para cada método y análisis se presenta al menos un ejemplo, con la intención de dar cuenta del proceso completo llevado a cabo. Todos los análisis omitidos en el cuerpo del documento, así como, transcripciones y revisiones bibliográficas se incluyen como anexos. Estos anexos fueron divididos en dos partes, cada una correspondiente a las dos fases del estudio y pueden encontrarse en las secciones 12 y 13 respectivamente.

2

Delimitación del problema de investigación

Lo que presentaremos a continuación son las consideraciones principales arrojadas por las revisiones bibliográficas, que fueron transformando, durante distintas fases, el problema de investigación hasta el objeto de estudio definitivo. Este proceso dependió de tres revisiones bibliográficas principales, las cuales han sido reportadas ya en los trabajos de Torres-Corrales, López-Acosta, y Montiel (2020), López-Acosta y Rodríguez-Vergara (2021) y López-Acosta y Montiel (2021, 2022). En los Anexos del apartado 12.6 incluimos los resúmenes de estas revisiones.

2.1. Revisión bibliográfica

En la primera revisión bibliográfica nos enfocamos en trabajos que describieran la naturaleza del pensamiento algebraico para tener un punto de partida en la investigación. Se revisaron distintos documentos compilatorios sobre los estados actuales de la investigación en este tópico (véase anexo 12.6.1).

Identificamos en algunos trabajos (p. ej., Bednarz, Kieran, y Lee, 1996) que la naturaleza del pensamiento algebraico y su didáctica dependen de los distintos tipos de acercamientos y posturas al respecto. A partir de estas ideas, una primera versión del problema estuvo centrada en el pensamiento algebraico como una forma de pensamiento caracterizado por *la construcción* y *operatividad* de un lenguaje simbólico. De aquí se plantearon la primera hipótesis y preguntas de investigación, considerando también el carácter de la actividad humana o de la práctica por el planteamiento socioepistemológico de partida[1], pues de entrada nos interesaba abordar el problema desde la Teoría Socioepistemológica:

Hipótesis: *El pensamiento algebraico se relaciona con las condiciones socioculturales que permiten a las personas construir y operar sobre lenguajes simbólicos dentro de contextos específicos.*

Preguntas de investigación iniciales:

1. ¿Qué elementos de la actividad humana matemática permiten la *construcción del símbolo*?
2. ¿Cuáles son los mecanismos que permiten *la constitución de un lenguaje matemático simbólico*, socialmente compartido?
3. ¿Qué elementos de la actividad humana generan la *necesidad matemática de manipulación de lo simbólico*?

[1] Esta hipótesis y preguntas de investigación formaron parte del anteproyecto doctoral sometido a evaluación por el colegio de doctorado del Depto. de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Puesto que en estas preguntas e hipótesis inicial se asumía como característica principal la construcción y operatividad de lenguajes simbólicos, se realizó una revisión de antecedentes respecto al lenguaje en dos fases (véase anexo 12.6.2). En la primera fase, a su vez, se realizaron dos revisiones principales, la primera sobre compilaciones relativas al estudio del lenguaje, orientada por dos preguntas: *¿qué es el lenguaje matemático?* y *¿cómo se estudia el lenguaje matemático?* La segunda, sobre los referentes teóricos empleados en los estudios sobre el lenguaje matemático, que se orientó por las preguntas: *¿cómo se usa esta teoría para estudiar el lenguaje matemático?* y *¿cuáles son los principios de la teoría empleada?* Esta primera fase tuvo una duración aproximada de un año.

La revisión de la segunda fase se realizó sobre las fuentes referenciadas en los trabajos de la primera fase que se consideraran relevantes para un entendimiento más profundo del lenguaje y cómo estudiarlo. Se priorizaron en ambas fases los referentes que establecieran caracterizaciones del lenguaje matemático, y de ser posible del algebraico con la finalidad de construir un marco teórico y metodológico adecuado para el estudio del lenguaje algebraico.

De esta segunda revisión identificamos que los estudios se han centrado principalmente en las características semánticas y de reglas formales respecto al simbolismo algebraico (Chico, 2018), por ejemplo, dificultades lingüísticas relativas al tránsito del lenguaje natural al simbólico, en términos de la interpretación de las regularidades discursivas de enunciados matemáticos, así como en la traducción y comprensión de problemas de palabras (MacGregor y Price, 1999) y en la manipulación de los símbolos algebraicos (Bednarz, Kieran, y Lee, 1996, Harel, Fuller, y Rabin, 2008; Mason, 1996; McGregor y Price, 1999).

Se identificó un grupo reducido de investigaciones lingüísticas que proponen una mirada multisemiótica, en la cual el lenguaje matemático trasciende al simbolismo pues se compone de al menos tres recursos semióticos que interactúan entre sí para producir significados de los discursos algebraicos: *lenguaje natural*, *escritos simbólicos algebraicos*, y *representaciones compuestas algebraicas* (ver Drouhard y Teppo, 2004; Morgan, 2014; Morgan, Craig, Schuette, y Wagner, 2014; Moschkovich, Wagner, Bose, y Rodrigues, 2018; O'Halloran, 2005, 2007, 2015a; Schleppegrell, 2007).

Estos trabajos, que consideramos contemporáneos, permitieron justificar la importancia del estudio en la dimensión lingüística, puesto que identificamos las dos aportaciones principales del estudio en esta dimensión en tanto, se identificaron como áreas poco estudiadas o nulas:

a) La primera es la necesidad por conceptualizar y estudiar el lenguaje matemático como un lenguaje multisemiótico, es decir, un lenguaje que produce significados a partir de más de un recurso semiótico; a saber, *lenguaje natural*, *simbolismo* e *imágenes visuales*

(Drouhard y Teppo, 2004; Morgan, 2014; Morgan, et al., 2014; Moschkovich et al., 2018; O'Halloran, 2005, 2007 y 2015a; Schleppegrell, 2007).

b) La segunda es la necesidad que destacan algunos trabajos por estudiar e identificar "el desarrollo de las competencias y los conocimientos lingüísticos necesarios" (Morgan et al., 2014, p. 843) en el quehacer matemático por parte de los estudiantes.

Asimismo, a propósito de los elementos incorporados al problema de investigación, como resultado final de esta segunda fase se tomó postura teórica para el estudio de esta dimensión. Las principales consideraciones teóricas fueron las siguientes:

a) Se consideró a la *Teoría Lingüística Sistémico-Funcional* (LSF de aquí en adelante) de M.A.K. Halliday como la postura principal para el estudio del lenguaje. Esta decisión se debió al hecho de que se identificó que los trabajos que usaban esta teoría proponían elementos concretos de análisis gramaticales, a diferencia del grueso de la mayoría de los trabajos. En la revisión se observó que la gran mayoría de los trabajos presentaban consideraciones lingüísticas amplías (a diferencia de trabajos como los de Kirschner (1987, 2001) y Kirshner y Awtry (2004) sin especificar herramientas analíticas concretas que permitieran llevar a cabo los análisis.
b) Los trabajos de Kay O'Halloran, basados en la Teoría LSF proponen una marco para el análisis multimodal, denominado *Análisis Sistémico-Funcional del Discurso Multimodal* (ASFDM de aquí en adelante), dejando ver que los discursos multimodales y multisemióticos producen el fenómeno de *intersemiosis* entre los tres recursos semióticos *lenguaje natural — simbolismo matemático — imágenes visuales* que caracterizan al lenguaje matemático. Asumimos que esto nos permitiría dar cuenta de la complejidad del lenguaje matemático en términos multisemióticos.

Cabe destacar que la Teoría Lingüística Sistémico-Funcional y el Análisis Sistémico-Funcional del Discurso Multimodal pertenecen al campo de la lingüística y no al de la ME, generando una dificultad para su comprensión por parte del investigador, pues no se contaba con esta formación de base. Por esta razón, se decidió realizar movilidad estudiantil por un semestre con el investigador experto en LSF, Dr. Daniel Rodríguez-Vergara de la Universidad Nacional Autónoma de México para estudiar los métodos de análisis de la LSF y comprender mejor el ASFDM; así mismo se estableció contacto con la investigadora creadora del ASFDM Kay, L. O'Halloran quien proporcionó material bibliográfico para profundizar en el entendimiento del método de análisis.

Con base en estas especificidades se construyeron nuevas hipótesis que dirigirían la investigación:

1. La construcción del lenguaje algebraico implica actos de *intersemiosis entre el lenguaje natural, simbolismo matemático e imágenes visuales*. Esta hipótesis amplió lo descrito en la primera pregunta de investigación planteada al inicio, relativa a los aspectos de la actividad humana que permiten construir el símbolo, en el sentido de que se reconoce que el Lenguaje Algebraico no solo consiste en un sistema de símbolos. Para identificar estos aspectos sería fundamental una problematización del Lenguaje Algebraico visto como una producción del tipo de Pensamiento Algebraico.
2. Antes de estar en posición de identificar las competencias lingüísticas de estudiantes al abordar y escribir textos algebraicos sería necesario determinar qué elementos *gramaticales funcionales* están presentes en los textos algebraicos.

Por lo tanto, como resultado de esta segunda revisión, el problema de investigación incorporó las siguientes preguntas:

Preguntas de investigación:

1. ¿Qué elementos de la actividad humana matemática permiten la construcción del símbolo?
2. ¿Cuáles son los mecanismos que permiten la constitución de un lenguaje matemático simbólico, socialmente compartido?
3. ¿Qué elementos de la actividad humana generan la necesidad matemática de manipulación de lo simbólico?
4. ¿Cuál es la gramática funcional del lenguaje algebraico?
5. ¿Cómo se produce la intersemiosis entre los tres elementos del lenguaje algebraico simbólico en los algebristas y en los estudiantes?

Nótese que hasta este punto, las primeras tres preguntas aún no se enfocaban en el análisis algebraico de Viète y Descartes y la construcción de la ecuación paramétrica. Este aspecto fue obtenido después de la tercera revisión bibliográfica.

En esta tercera revisión la intención fue obtener un entendimiento respecto al desarrollo del álgebra simbólica y su naturaleza, tratando de identificar las raíces de la operatividad simbólica, tal y como se proponía con estas tres primeras preguntas de investigación tan amplias. Por lo tanto, se plantearon como guía las siguientes preguntas *¿cuál fue el desarrollo del álgebra simbólica?*, *¿qué tipos de operatividad simbólica estuvieron presentes a lo largo de la historia?*, *¿qué justificaba la operatividad del simbolismo algebraico?*, *¿cuáles fueron las circunstancias sociales y culturales que definieron dichos lenguajes?*

En este sentido se revisaron trabajos dentro de la ME y fuera de ella que abordaran el desarrollo del Álgebra para tener referentes histórico-epistemológicos que permitieran entender la génesis y razón de ser del pensamiento y lenguaje Algebraico y la operatividad simbólica (ver anexo

12.6.3). Como ya se mencionó, dentro de esta revisión se procuró consultar trabajos clásicos frecuentemente citados y utilizados en la disciplina, así como estudios más recientes que proveyeron información actualizada, desde nuevas perspectivas, y específica respecto al desarrollo del álgebra en distintas épocas.

De acuerdo con la revisión realizada, dos ideas aportaron de manera significativa a la delimitación del problema de investigación. El primero, es el hecho de que el desarrollo de las ideas y métodos algebraicos, y por ende la operatividad algebraica, no dependió del simbolismo matemático actual. Esto, implicó que la hipótesis inicial sobre la idea de que el Pensamiento Algebraico dependía de la capacidad para la manipulación de lenguajes simbólicos no era del todo adecuada. Por lo tanto, esto conllevó una consideración sobre el objeto de estudio declarado en un principio, puesto que desde el inicio existía un interés en la capacidad de la actividad algebraica de conformar la herramienta del simbolismo como medio para la síntesis y creación de conocimiento.

Por otro lado, respecto a lo correspondiente sobre la operatividad algebraica, la revisión también dejó ver la amplia gama de rutas para estudiar el origen de la operatividad, lo cual se consideró hubiese resultado complejo atender bajo la inquietud inicial de una perspectiva exhaustiva sobre la operatividad, como las preguntas de investigación planteaban. Esto porque como puede verse con los ejemplos de resolución de problemas analizados, la operatividad algebraica podría estudiarse desde una gran variedad de métodos y nociones algebraicas.

En este sentido, se identificó que la investigación pudiera haberse dirigido sobre alguna de las siguientes rutas como objeto de estudio:

1. Si se consideran las aportaciones de Radford (1995, 1996, 2001) por ejemplo, puede decirse que el principio de la operatividad algebraica se le debe a los desarrollos de las culturas mesopotámicas, en las cuales se desarrollaron los métodos de:
    a. la falsa posición, cuya justificación epistémica —en el sentido de Heeffer (2014)— estaba basada en un razonamiento hipotético y proporcional.
    b. la geometría de cortar y pegar (Høyrup, 2002), está basada en un razonamiento figural que recurre al uso de formas geométricas planas (cuadrados, rectángulos, etc) para determinar los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas.

   Ambos métodos son en esencia distintos por lo que consistirían en dos posibilidades. Sin embargo, es lo que el mismo Radford ha explorado en sus trabajos.

2. Otra ruta podría ser estudiar las técnicas Diofantinas para expresiones arbitrarias como las mostradas en el ejemplo del problema 8 del libro segundo de *La Arithmetica*: “Toma

el cuadrado de un múltiplo aleatorio de ς del cual la raíz cuadrada de 16 sea sustraída" (Diofanto, traducción basada en Meskens, 2010, p. 58).

3. Respecto al mismo Diofanto, también podrían estudiarse la operatividad que definió en términos proto-simbólicos[2]—en el sentido de Heeffer (2009)—, es decir, en términos de especies o tipos de cantidades, lo cual permitió, incluso para Viète y Descartes sus desarrollos simbólicos más complejos.
4. Una ruta más podría ser estudiar la vasta producción de los árabes, puesto que ellos si bien muestran los vestigios de los métodos de las culturas tanto mesopotámicas como griegas también desarrollaron más allá dichos métodos. Incluso lograron determinar métodos sofisticados de solución para ecuaciones de grado tres que involucraban las cónicas de Apollonio. Este es el caso de Omar Khayyam (1048-1131).

Elegir alguna de estas cuatro rutas como objeto de estudio hubiera implicado la recolección de más fuentes originales, distintas a las ya recolectadas durante la revisión, lo cual, incluso no se sabía si hubiera sido posible.

Otras rutas para elegir pudieron haber sido las siguientes:

5. Estudiar la operatividad algebraica sobre las ecuaciones mismas, es decir, el operar a la ecuación como un objeto, inicialmente encontrado en Cardano (1539) y completado en el trabajo de Buteo (1559) (Heffeer, 2010), en donde la introducción de más de una incógnita jugó un rol esencial. Para esto habría que atender, las fases que declara Heeffer (2010) respecto a la constitución de la ecuación simbólica:
   a. La expansión de los operadores aritméticos a los polinomios.
   b. Igualación de expresiones polinómicas.
   c. Introducción de la segunda incógnita.
   d. Expansión de operadores aritméticos a ecuaciones.
   e. Introducción de letras para múltiples incógnitas.
   f. Manipulación sistemática de ecuaciones lineales para eliminar incógnitas.
6. Estudiar la operatividad cuya justificación epistémica está basada en la validez de las operaciones aritméticas, lo cual, permitió trabajar y asumir cantidades que no eran aceptadas para manipularlas como si lo hubiesen sido, tales como los números negativos y números imaginarios. Por ejemplo, el caso de Dardi, citado en Høyrup (2010) quien justifica el producto de dos números negativos, el caso de cómo Cardano justifica el producto de $\sqrt(-15) \cdot \sqrt(-15)$, o el de Bombelli quien muestra que la

[2] Se considera que el simbolismo de Diofanto no correspondería por cuestiones ontológicas a un modo simbólico de representación. Este aspecto se detalla en el apartado 12.1.3.1 en el cual se asume la postura de Klein (1968).

multiplicación de dos números con cantidades imaginarias podía dar un resultado entero (ver Figura 101).

7. Estudiar la operatividad relativa a la solución de ecuaciones de grado mayor que dos. Tanto desde las aproximaciones árabes, como las de los italianos Tartaglia, Bombelli, Ferrari, Cardano para determinar reglas para ecuaciones cúbicas, cuárticas y mayor de cuatro, bajo condiciones específicas.
8. Estudiar la operatividad relativa a las ecuaciones paramétricas, la cual se dio en el período de Viète y Descartes. Donde las ecuaciones paramétricas permitieron un cambio de paradigma en la forma en la que el simbolismo era utilizado, designando un modo simbólico de tratamiento a las literales y no como tipos de cantidades, además de que permitió la transición hacia un significado nuevo de la noción de número.

Por lo tanto, dada esa amplia gama de posibilidades, se eligió una de estas rutas como objeto de estudio, la cual resultaba cercana a los planteamientos iniciales en la investigación, principalmente por el nivel educativo de interés, delimitando así el trabajo al estudio de la *operatividad relativa a las ecuaciones paramétricas*. Como se ahondará en el apartado 5.3 y en el Anexo 12.1, durante el renacimiento y el proyecto humanista francés, en particular se concibe al álgebra como una ciencia independiente de la aritmética y de la geometría y se produce el *análisis algebraico —arte analítico* para Viète y *Mathesis universalis* para Descartes—.

A pesar de elegir solo una de todas las posibilidades identificadas, la revisión bibliográfica permitió construir un panorama amplio, aunque general del desarrollo de la operatividad y el álgebra simbólica, lo cual a su vez permitió seleccionar de estos mismos ejemplos algunos para analizar con la intención de entender la diferencia en la actividad algebraica, tanto desde su naturaleza epistemológica como lingüística, de los algebristas previos a Viète y Descartes.

Cabe destacar que la elección de esta ruta se fundamenta también en los hallazgos hechos en otro grupo de trabajos que abordan los trabajos de Viète y Descartes y la noción de parámetro.

De manera sintética podemos destacar lo siguiente:

No encontramos estudios relativos al origen de la ecuación paramétrica, sin embargo, encontramos algunos trabajos dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (p. ej., Bolea, 2003; Bosch y Gascón, 2010, 2011; Gascón, 1994-95, 1999; Chevallard, 1989; Ruiz-Munzón), en los cuales se señala que la mayoría de las investigaciones en el campo del álgebra asumen acríticamente un modelo del álgebra como *aritmética generalizada* (Bolea, 2003). Este modelo, en esencia, considera al álgebra como un fenómeno que trasciende de la aritmética, es decir, una abstracción de las propiedades aritméticas en forma de símbolos literales. Es de aquí, según estos autores de donde proviene la centración en el simbolismo algebraico como condición definitoria del álgebra, así como el paradigma de tránsito de la aritmética al álgebra.

Estos trabajos mencionan que este modelo deja de lado el carácter más general de la actividad algebraica. Por lo tanto, el álgebra elemental escolar posee un carácter prealgebraico que difiere en esencia de su producción original. Bolea (2003, p. 45) menciona las siguientes características de este carácter prealgebraico de la *aritmética generalizada*:

1. Se identifica una autonomía respecto a los distintos bloques de los conocimientos (como ecuaciones, igualdades notables, etc.) algebraicos, a diferencia del trabajo matemático original en el que estos bloques son integrados para modelar y resolver el problema o situación.
2. El rol que atribuye la escuela a las letras es el de incógnita, mencionando que los parámetros están ausentes. Por lo tanto, las fórmulas algebraicas no funcionan como modelos algebraicos.
3. Los diferentes sistemas numéricos, como el caso de los números enteros no se estudian como procedentes de cuestionamientos algebraicos, contexto en el que surgen.
4. Hay ausencia del proceso de nominación y denominación de las incógnitas en distintos momentos de la actividad algebraica, como el caso de lo que se conoce como cambio de variable.
5. Se identifica como inexistente el trabajo sobre los objetos algebraicos conceptualizados como objetos *per se*.

Por lo tanto, para estos(as) autores(as) (Bolea, 2003; Gascón, 1994-1995, 1999; Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2010, 2011), tomando como referencia a Chevallard (1989), una de las características esenciales para que la actividad algebraica sea considerada como tal es la utilización sistemática de parámetros e incógnitas: “La fuerza del álgebra, entonces, es lo que hoy llamaríamos el uso de parámetros, es decir, variables del sistema cuyos valores se asumen conocidos” (Chevallard, 1989, p. 45).

No obstante, en otros trabajos y *handbooks* del campo se ha puesto de manifiesto que el estudio del parámetro no se ha atendido de manera significativa en la investigación (ver Furinguetti y Paola, 1994; Warren, Trigueros y Ursini, 2016). A decir de Warren, Trigueros y Ursini (2016):

> A pesar del importante papel que desempeñan los parámetros, éstos parecen haber sido descuidados por investigadores de álgebra [...] En los últimos diez años los investigadores se han interesado menos en el uso y la comprensión de los parámetros por parte de los estudiantes, a pesar de que en estudios anteriores se ha informado de que los estudiantes tienen muchas dificultades cuando encuentran parámetros en las expresiones algebraicas. (pp. 86-87).

Las investigaciones que han abordado este concepto han mencionado principalmente que los estudiantes manifiestan dificultades para interpretarlos, y por lo tanto, para distinguirlos de otros conceptos como la variable y la incógnita (Bardini, Radford y Sabena, 2005; Bloedy-Vinner, 2001; Drijvers, 2003; Furinguetti y Paola, 1994). Estas dificultades como algunos advierten (Bloedy-Vinner, 2001; Drijvers, 2003) se debe al múltiple rol que pueden jugar en las expresiones, similar al caso de la variable. Entre estos múltiples roles Drijvers (2003) señala los siguientes: marcador de posición, cantidad cambiante, generalizador e incógnita.

Se reconoce entonces que las investigaciones principalmente han estudiado la comprensión de estudiantes en actividades que obedecen la significación moderna del parámetro, es decir, no muestran o destacan la naturaleza de su génesis o el cambio conceptual en la actividad algebraica que implica el uso sistemático de parámetros e incógnitas. En algunos trabajos como el de Drijvers (2003) se hace un estudio histórico del parámetro, sin embargo, la discusión se centra, como en muchos de los casos, en detallar la fase del álgebra simbólica, el momento en el que surgió, refiriendo al salto que da Viète al álgebra simbólica y lo que permitió para la actividad algebraica, sin ser exhaustivo en las características que le permitieron su emergencia.

En relación con esta última consideración, los trabajos de Gascón (1989, 1994-1995, 1999) proponen un modelo para la actividad algebraica que se basa en los trabajos de Piaget y García (1982) y Klein (1968), en los que el parámetro juega un rol esencial pues

a. permite considerar un campo más amplio de problemas (aritméticos, geométricos, combinatorios, etc);
b. permite construir un simbolismo que denota tanto datos conocidos como desconocidos de manera que da pie a la construcción de ecuaciones paramétricas que representan las estructuras subyacentes del problema y por lo tanto permite soluciones geométricas o aritméticas;
c. permite la construcción de funciones con distintos tipos de variables que actúan como modelos algebraicos del sistema subyacente al problema;
d. permite descubrir las condiciones de existencia del objeto desconocido y la dependencia de las variables "conocidas" respecto de las variables "desconocidas"; y
e. permite también la determinación de las condiciones de existencia de objetos diferentes de los propuestos para su estudio.

Posteriores formulaciones de estas premisas han llevado a la construcción de un modelo que describe el *proceso de algebrización* (Ruiz-Munzón, 2010, Ruíz-Munzón, Bosch y Gascón, 2011; Ruíz-Munzón, Bosch y Gascón, 2017), el cual se basa en la consideración del planteamiento de preguntas relativas a la técnica, en el sentido de Chevallard, 1989, en el que en la última fase del modelo de algebrización de la actividad matemática, como ellos refieren, no se "hace ningún tipo de distinción entre incógnitas y parámetros. Es en esta tercera etapa, donde aparece plenamente el trabajo con las fórmulas algebraicas y donde consideramos que culmina el proceso de algebrización elemental" (Ruíz-Munzón, 2010, p. 362).

Si bien coincidimos con los planteamientos que estos autores realizan sobre la actividad algebraica relativa al parámetro, en el trabajo de Ruiz-Munzón (2010) se destaca que el modelo deja como pregunta abierta el proceso de algebrización de la geometría con relación al modelo de la actividad algebraica y otras instituciones matemáticas escolares. De hecho, este es un aspecto que también Kieran (2007) ha mencionado como un rubro pendiente en la investigación en álgebra, junto con el estudio de niveles superiores a los básicos. Esta investigadora plantea ciertas preguntas relacionadas con la relación entre los gráficos y el simbolismo algebraico y considera que el contenido matemático que se aborde respecto a estas preguntas debe:

> ir más allá de las situaciones lineales para abarcar, por ejemplo, situaciones cuadráticas y trigonométricas, así como sistemas de ecuaciones. Se necesita investigación en el estudiante de nivel de secundaria superior y universidad en una variedad mucho más amplia de contenido algebraico de lo que se ha estudiado hasta ahora (p. 738).

Estos aspectos son de especial relevancia pues al igual que la dimensión lingüística permiten marcar las aportaciones del trabajo en la dimensión epistemológica. Indagar en la dirección que nos propusimos permite extender estos modelos de la algebrización considerando la carga geométrica, el rol del parámetro, así como contribuir a la necesidad de relacionar otros tipos de contenidos con el álgebra, además de tocar contenidos que se consideran más allá de los niveles básicos, aspectos que la literatura reporta como necesarios por explorar.

Así, como producto de esta última revisión bibliográfica se obtuvo el problema de investigación definitivo, el cual se describe a continuación.

2.2. Planteamiento del problema de investigación

Con base en todas estas consideraciones, el estudio que nos propusimos abordar incluye dos dimensiones que, desde nuestra postura, consideramos que permite robustecer el estudio del álgebra en el bachillerato: una epistemológica y una lingüística-multisemiótica.

Como ya se ha mencionado y producto de la tercera revisión se identificó que el proyecto de Viète y Descartes resultaba de especial interés por el hecho de que las tipificaciones iniciales respecto al álgebra simbólica son atribuidas a estos dos personajes principalmente, además de que resultaba esencialmente diferente a la tradición algebraica previa. A tal grado que adquirió una importancia singular en el desarrollo de la matemática posterior a ellos valiéndose de sus características como sistema semiótico, lo cual se desprendió del ímpetu de ambos matemáticos por reformular el método de análisis geométrico.

Este elemento, junto con las consideraciones de la dimensión lingüística permitieron definir las hipótesis y preguntas de investigación rectoras del trabajo:

Hipótesis:

- Hipótesis 1. *El lenguaje desarrollado por Viète y Descartes trascendió al uso adoptado por los previos algebristas. El álgebra simbólica se transformó en una herramienta sintetizadora del discurso hacia una herramienta sobre la cual era posible investigar, descubrir y construir nuevos conocimientos, a partir de casos generales*.

- Hipótesis 2. *Antes de estar en posición de identificar las competencias lingüísticas de estudiantes al abordar y escribir textos algebraicos sería necesario determinar qué elementos gramaticales funcionales están presentes en los textos algebraicos.*
- Hipótesis 3. *La construcción del Lenguaje Algebraico implica actos de intersemiosis entre el lenguaje natural, simbología específica e imágenes visuales.*

Preguntas de investigación:

- P1. *¿Cuáles fueron las implicaciones de la reformulación del método de análisis en la creación del análisis algebraico de Viète y Descartes, y cómo influyó esta actividad matemática en la emergencia de la ecuación paramétrica?*
- P2. *¿Qué particularidades posee la actividad matemática del análisis algebraico y qué particularidades son manifestadas en la actividad matemática de estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas relativos al análisis algebraico?*
- P3. *¿Cuál es la gramática funcional del lenguaje algebraico simbólico de Viète y Descartes y de estudiantes en el análisis algebraico?*
- P4. *¿Qué características presentan los textos algebraicos de algebristas y estudiantes en términos de intersemiosis?*

Cabe mencionar que con ecuación paramétrica nos referimos a las ecuaciones que contenían parámetros y variables. Este tipo de ecuaciones estaban ausentes en la tradición algebraica previa a Viète y Descartes. Tal como se argumenta en las revisiones y en el EHE, es este primero quien inicia con la construcción de estas ecuaciones, mientras que el segundo logró sistematizar y mejorar el método de Viète al librar el obstáculo de la dimensión.

3

Diseño de la investigación

3.1 Diseño de investigación

De acuerdo con el objeto de estudio, la investigación está catalogada como descriptiva, en tanto, se busca entender y mostrar las características tanto epistemológicas como lingüísticas relativas al análisis algebraico de Viète y Descartes, mediante la comparación con algunos casos de algebristas previos a ellos, así como en la indagación sobre los recursos gramaticales funcionales en los textos algebraicos. Además de lo correspondiente en ambos casos con estudiantes cuando resuelven tareas relativas a al análisis algebraico y los textos que producen.

3.2 Diseño metodológico

En este sentido se determinó dividir la investigación en dos fases:

1. **Primera fase**. Caracterizar el análisis algebraico de Viète y Descartes, así como su Gramática Funcional y los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos.
   Se contemplaron los siguientes análisis para este cometido:
   - <u>Análisis 1.</u> Estudio Histórico Epistemológico del análisis algebraico de Viète y Descartes.
   - <u>Análisis 2.</u> Análisis de la Gramática Funcional de algunos textos de Viète y Descartes comparándolos con textos de otros algebristas de distintas épocas para determinar similitudes y diferencias respecto a sus gramáticas.
   - <u>Análisis 3.</u> Análisis Multisemiótico para determinar la forma en la que se emplean los recursos semióticos del Lenguaje Algebraico en Viète y Descartes, así como los mecanismos y sistemas que son movilizados.
   - <u>Análisis 4.</u> Análisis de la actividad matemática algebraica de Viète y Descartes comparándolos con la de otros algebristas de distintas épocas para determinar similitudes y diferencias respecto a su forma de emplear el álgebra.

   En conjunto estos análisis permiten caracterizar los aspectos correspondientes al objeto de estudio, pero particularmente en los algebristas de la historia, razón por la cual se consideró realizar una exploración con estudiantes para robustecer lo encontrado en el EHE relativo a la emergencia de la ecuación paramétrica y el análisis algebraico.

2. **Segunda fase.** Realizar una *Investigación Basada en el Diseño* (IBD de aquí en adelante) (Bakker y van Eerde, 2015) para la exploración con estudiantes con la intención de robustecer las hipótesis epistemológicas derivadas del EHE de la primera fase. Con robustecer nos referimos a que se complementarán las consideraciones epistemológicas históricas con los procesos cognitivos de estudiantes para identificar otros elementos que podrían formar parte de esta actividad matemática.

De acuerdo con la categorización de Cobb, Confrey, diSessa, Leher y Schauble (2003) la IBD realizada se cataloga como un *diseño uno a uno* en el que “se lleva a cabo una serie de sesiones de enseñanza con un pequeño número de alumnos. El objetivo es crear una versión a pequeña escala de una ecología del aprendizaje que pueda estudiarse en profundidad y en detalle” (p. 9).

Para ello, se contemplaron los siguientes momentos:

- Momento 1. Construcción del diseño de intervención orientado por la *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* (Simon, 1995, 2014) relativa a las características sustanciales de la hipótesis epistemológica derivada del EHE.
- Momento 2. Experimentación y Análisis Retrospectivo (Cobb, *et. al.*, 2003) del diseño para probar la hipótesis epistemológica e identificar la Gramática Funcional y mecanismos de intersemiosis puestos en juego por los estudiantes.

A continuación, se muestra un esquema del diseño metodológico de la investigación en el que se ilustra lo anterior.

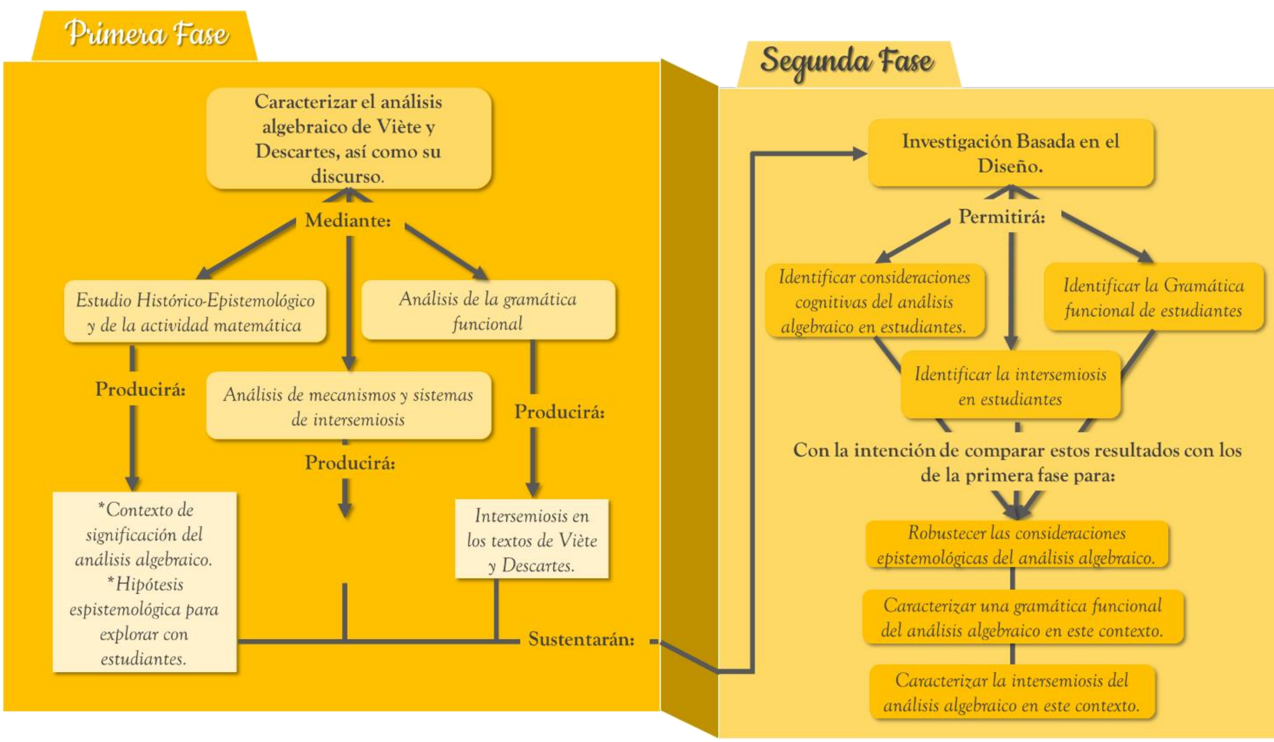


Figura 1. Esquema del diseño metodológico

4

Fundamentación teórica y metodológica

4.1 Teoría Socioepistemológica

La Teoría Socioepistemológica (TS, de aquí en adelante) es un enfoque teórico dentro de la Matemática Educativa que se sitúa dentro de los paradigmas socioculturales, en los cuales las aproximaciones teóricas buscan resaltar la relación entre lo social y lo individual. Uno de los aspectos más característicos de estos enfoques es lo que Lerman (2000) señala:

> [...] el significado, el pensamiento y el razonamiento [se ven] como productos de la actividad social. Esto va más allá de la idea de que las interacciones sociales proporcionan una chispa que genera o estimula la actividad de construcción de sentido interno de un individuo (p. 23).

En particular la TS privilegia justo este carácter de la producción del saber intentando "centrarse en la agencia y en los efectos reguladores de la(s) práctica(s)" (Lerman, 2000, p. 38). En este sentido, para la TS el saber matemático se construye bajo necesidades humanas que le dan sentido, significado y un carácter situado (Cantoral, 2013). Es decir, es a la luz de prácticas sociales que regulan y orientan la actividad de quienes construyen el conocimiento que las nociones matemáticas surgen. Nuevamente, esta relación, como menciona Lerman (2000) es constitutiva y propia de los fenómenos sociales:

> [...] cuando una persona se integra a la práctica, ella o él ya ha cambiado. La persona tiene una orientación hacia la práctica, o tiene objetivos que la han llevado hacia la práctica, incluso si deja la práctica al poco tiempo. Se puede expresar ese cambio observando que la práctica se ha convertido en la persona. Para incorporar esos desarrollos, sugiero que la unidad de análisis se extienda a persona-en la práctica-en la persona (p. 38, traducción propia).

Por esta razón la TS considera como uno de sus principios fundamentales que la construcción del conocimiento matemático es *racionalmente contextualizada*, es decir, es una función del contexto, en el sentido de que a partir de la experiencia de las personas en los contextos específicos se delimita y sitúa su racionalidad, y por tanto, su epistemología se vuelve inherente a estos, permeando así su relación con el conocimiento (*relativismo epistemológico*).

Las prácticas sociales, desde esta postura, son entendidas como un "conjunto organizado de actividades y acciones objetivas e intencionales para atender a una situación dada" (Cantoral, 2013, p. 327). La construcción de conocimiento se considera entonces como una progresión pragmática de la actividad matemática en términos de *acciones* —intervenciones para adaptarse al medio o a la solución de un problema— y *actividades* —organización consciente de acciones mediadas por artefactos culturales como otros objetos matemáticos—, que a su vez, determinan *prácticas socialmente compartidas* —emergentes sociales relativos al tratamiento de situaciones específicas resultantes de la articulación consciente y deliberada de las acciones y actividades con un fin determinado.

Por lo tanto, desde esta perspectiva, estudiar el saber matemático le obliga a reconocer la relación dialéctica entre éste y el sujeto cognoscente y socioculturalmente moldeado a lo largo de su historia. Es decir, analizar y comprender el conjunto de paradigmas, transformaciones y progresos epistemológicos sustentados en necesidades, usos, situaciones o experiencias de grupos humanos particulares que permitieron su desarrollo (Cordero y Silva-Crocci, 2012). Su fin entonces es la modelación de la construcción social del saber matemático.

4.1.3 Carácter sistémico del conocimiento matemático

La TS promueve una postura sistémica que, con base en los planteamientos originales de la escuela didáctica francesa, asume el estudio de la construcción del saber matemático desde las variables clásicas del triángulo didáctico (Chevallard, 1985), a las cuales incorpora la dimensión social y la agencia de la transposición didáctica en los procesos de difusión y construcción de conocimiento. De manera que, los tres polos *saber*, *alumno* y *profesor* se consideran poseen una herencia cultural, social, circunstancial, particular, pragmática y situada que le ha permitido emerger y evolucionar (Cantoral, 2013), por lo cual es necesario integrar a la comprensión el contexto social de los tres polos.

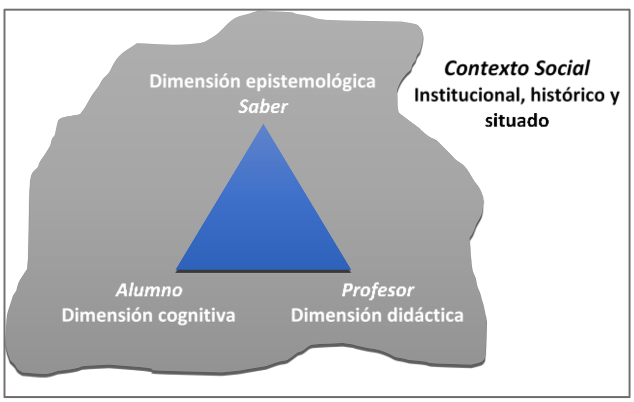


Figura 2. Triángulo didáctico socioepistemológico (Cantoral, 2013)

De esta manera, de acuerdo con Cantoral (2013) el análisis sistémico del saber matemático involucra entonces una reflexión desde cuatro dimensiones:

1. <u>**Dimensión Cognitiva**</u>. Refiere a los mecanismos mentales que son puestos en juego al momento en el que las personas se enfrentan a situaciones que demandan del pensamiento matemático. Es decir, existen esquemas de pensamiento que son construidos bajo necesidades intrínsecas respecto a las situaciones específicas con las que se está en contacto.

2. **Dimensión Epistemológica.** Refiere a las formas en las que las personas construyen conocimiento matemático.
3. **Dimensión Didáctica.** Refiere a los mecanismos de difusión institucional del conocimiento matemático. Son los medios por los cuales el conocimiento se transmite, reproduce, o bien, se enseña en un escenario social específico, como la escuela, el barrio, en los oficios, etc. Esta dimensión alude a lo que se está difundiendo sobre ese saber y cómo se está difundiendo.
4. **Dimensión Social.** Esta dimensión como se ha mencionado, si bien se cataloga como una de las cuatro dimensiones para enfatizar la naturaleza social de todo conocimiento, lo cierto es que es un elemento que constituye al conocimiento matemático en todas sus dimensiones, por lo tanto, propiamente dicho es una subdimensión de las otras tres. De manera que en el análisis de las dimensiones cognitiva, epistemológica y didáctica siempre se busca la naturaleza social del conocimiento, es decir, de la funcionalidad y uso del conocimiento matemático.

Esto quiere decir que para atender a una mejora de los procesos didácticos de las matemáticas, se considera que esa matemática en juego es un elemento fundamental que tiene que ser analizado profunda y detenidamente; donde se cuestiona si la forma institucional en la que se encuentra es inamovible, única o la más pertinente (lo didáctico); los mecanismos del pensamiento que lo caracterizan (lo cognitivo); sus condiciones de producción en tanto progresos y restricciones epistemológicas (lo epistemológico); siempre mirando las condiciones socioculturales que lo permean reconociendo sus usos en los distintos escenarios (Montiel y Buendía, 2012) (lo social). En este sentido, "se lo ubica en el tiempo y el espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa" (Cantoral, Montiel, y Reyes-Gasperini, 2014, p. 97).

En esencia, es común que las distintas investigaciones en Socioepistemología profundicen de manera más puntual sobre alguna o algunas de las dimensiones, pues atender el conjunto de las dimensiones de manera profunda requeriría de consideraciones metodológicas complejas.

Como se explicará en el método, para esta investigación se profundiza en las dimensiones epistemológica y cognitiva.

4.1.4 Problematización del saber matemático

La *problematización del saber matemático* es un constructo fundamental para las investigaciones socioepistemológicas que se ha constituido como la estrategia metodológica para estudiar la construcción del conocimiento matemático, a través del análisis de las manifestaciones del *uso* del conocimiento en distintos escenarios, desde los históricos, profesionales, cotidianos, así como en el sistema educativo (Montiel y Buendía, 2012).

En todos estos casos, se da cuenta de las racionalidades contextualizadas, los relativismos epistemológicos y las resignificaciones progresivas del saber específico sujeto al análisis. En conjunto, los modelos producidos por la problematización tienden a destacar cómo la praxis condiciona el actuar de los individuos, por lo tanto, se generan hipótesis de la normatividad que dicha praxis tiene en los grupos humanos aludidos.

4.1.5 Los Estudios Histórico-Epistemológicos

Los Estudios Histórico-espistemológicos —también denominados *historización* a partir de Cantoral (2013)— tienen como intención en esta teoría determinar las circunstancias socioculturales que permitieron la emergencia de los saberes matemáticos, y conlleva más que una narrativa cronológica de los hechos históricos, pues el interés es comprender al interior de los marcos contextuales —donde el saber es generado— modelos epistemológicos situados del desarrollo conceptual (Montiel y Buendía, 2012; Cantoral, 2013; Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015; Espinoza, 2009; Espinosa-Ramírez, Vergara-Gómez, y Valenzuela-Zúñiga, 2018), pero más importante aún, como argumentamos más adelante, determinar los *contextos de significación de las nociones matemáticas*.

En términos amplios, estos contextos de significación en la TS tienen como objetivo construir hipótesis epistemológicas relativas a los saberes objeto de estudio, las cuales recuperan lo que en el campo de los EHE se han caracterizado como como contribuciones epistemológicas (Barbin, Guillemette, y Tzanakis, 2020), es decir, explicaciones relativas a las causas, motivaciones, rupturas, problemas, o invenciones que permiten la construcción de los conocimientos. Con estas contribuciones se conceptualizan modelos epistemológicos para reorientar y confrontar los modelos epistemológicos escolares dominantes para incorporar elementos epistemológicos soslayados en la racionalidad escolar relativa a esos saberes. Tal y como se hace en otras posturas teóricas, denominadas por Gascón (2014), como programas epistemológicos:

> Podemos así caracterizar los enfoques o las teorías didácticas que forman parte del programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas, inaugurado por la TSD (Gascón, 1998, 2003, 2013), como aquellos que cuestionan los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las diversas instituciones y, lo que es más importante, como aquellos que elaboran explícitamente modelos epistemológicos alternativos de los diferentes ámbitos de las matemáticas y los utilizan como sistema de referencia para construir fenómenos didácticos y para formular y abordar los problemas didácticos asociados (p. 109).

Como se ha mencionado antes, el reconocimiento de una epistemología situada, como lo conciben los paradigmas socioculturales, enfatiza la relevancia que tiene el contexto en la construcción y condicionamiento de las actividades, ideologías, prácticas y acciones de los grupos humanos.

Espinoza (2009) argumenta que este tipo de visión sobre la construcción del saber implica un tránsito hacia la significación progresiva y no en los significados, toda vez que los significados son solo fijos bajo situaciones específicas, por lo que son dependientes de las distintas situaciones específicas en donde se pongan en uso, permitiendo dilucidar un panorama más amplio sobre la actividad matemática:

> Si el conocimiento tiene historia, entonces el significado mismo del conocimiento variará [con] base [en] lo temporal. Para ciertos episodios E_i históricos, el conocimiento tendrá un cierto significado S_i asociado. De esta manera ya no podremos hablar del "significado" del conocimiento como tal, sino que la perspectiva se amplía a considerar los "procesos de comprensión de significado". Esto nos lleva a posicionarnos en una dirección "pragmática" del conocimiento matemático, en donde el significado varía con base al contexto y al uso del conocimiento [Sic] (p. 20).

Así, Espinoza (2009) continúa mencionando:

> más que el "significado", el interés está en la construcción de significados en un contexto específico con una racionalidad situada a éste, y donde el conocimiento tiene un significado S_i específico relativo al contexto C_i. Es por esto que más que hablar de significado, utilizaremos la noción de "significación", la cual es entendida como un proceso de adquisición progresiva del significado, proceso que está situado a cierto contexto en base al cual el significado S_i variará en función de C_i (p. 20).

4.1.5.1 Las dimensiones del contexto en los estudios histórico-epistemológicos

Tomando como referencia los trabajos de Espinoza (2009) y Espinoza y Cantoral (2010), el contexto, denominado en estas como *Contexto de Significación* ha sido caracterizado como una noción compuesta de tres dimensiones:

- *La dimensión situacional*. Corresponde al conjunto de factores o circunstancias que explican las características más personales de lo que está siendo objeto de estudio.

> la dimensión situacional puede discutir sobre la pertinencia de incluir la vida del autor de la obra, su cuna y familia, su ámbito laboral, el ámbito sociopolítico de su época, en lo relativo a las implicancias en los cambios de las estructuras educacionales y científicas, por ejemplo, o también la producción científica del autor, sus producciones relativas a la epistemología del conocimiento o algunas cartas con sus colegas, las instituciones publicadoras de las obras, los evaluadores de las obras, los destinatarios de las obras, etc. (Espinoza, 2009, p. 27)

- *La dimensión sociocultural*: Establece las características sociales que determinan grupos culturales específicos. Se busca con esto explicar la naturaleza de los escenarios socioculturales en los que se encuentra el objeto de estudio, "los cuales están definidos por prácticas culturales específicas que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos" (Espinoza y Cantoral, 2010, p. 892).

- *La dimensión de la racionalidad*: Son los elementos racionales que como producto de estar situados socioculturalmente, justifican el quehacer de las personas, es decir, "aquellas creencias y concepciones que son la base de su racionalidad, la cual afecta las acciones y los pensamientos de las personas a las que incluye" (Espinoza, 2009, p. 28). Cabe resaltar que la noción de racionalidad es concebida por Espinoza, desde las posturas de Toulmin (1972) y Villoro (1989), sobre la cual se señala:

> [A]l ser relativas al contexto, las razones que validan una racionalidad pueden ser no solo el pensamiento lógico y formal, sino también la intuición, la funcionalidad, la emoción, una experiencia personal profunda, el consenso de una multitud, creencias arraigadas, concepciones mágicas o metafísicas, la fe, el sentido común o incluso una corazonada (Espinoza y Cantoral, 2010, p. 892).

4.1.5.2 Categorías de análisis para el estudio histórico-epistemológico

Espinoza (2009) propone un modelo para los EHE desde la perspectiva de la TS, para determinar el contexto de significación, el cual, como puede notarse en la descripción sobre dicha noción, corresponde, por lo general, con el estudio de un tratado matemático (obra como la ha entendido Espinoza), de un autor específico. En particular su trabajo trata sobre el estudio del tratado de Lagrange sobre la Teoría de las Funciones Analíticas, por lo tanto, el EHE se realiza para comprender el contexto situacional de Lagrange y la publicación de este tratado matemático.

Para ello, Espinoza (2009) propone las siguientes categorías que deben ser explicitadas para el tratado de Lagrange:

- *Una producción con historia*: Con la cual se sitúa el tratado matemático como un objeto producido bajo circunstancias históricas particulares que involucra aspectos individuales y colectivos. En palabras de Espinoza (2009) se busca:

> entender los acontecimientos que incidieron y mediaron su producción. Por tanto, para entender las condiciones de producción, consideraremos elementos de su vida personal, su época y su vida profesional [...] entender las condiciones de producción de la obra y las intencionalidades subyacentes de este proceso, para tener elementos que nos permitan caracterizar la racionalidad involucrada y los medios de significación utilizados por el autor o la época para significar el conocimiento matemático involucrado. (p. 31).

- *Un objeto de difusión*: Se considera que todo libro, es producido con una intencionalidad, por lo cual, resulta importante determinarla y develar cuál era el objetivo del autor con esa producción.

> estudiaremos los elementos pertenecientes a las condiciones de difusión de la obra, de lo cual hacemos una exploración en el autor de la obra y sus destinatarios, el medio de difusión, el tipo de producción y las condiciones relativas a estas [...]. Para poder entender esto, necesitamos entender también una visión general del periodo histórico considerado (Espinoza, 2009, p. 32).

- *Parte de una expresión intelectual más global*: Espinoza establece que cada tratado matemático pertenece a un conjunto global de otras ideas, es un fragmento de la evolución intelectual del autor, por lo cual es importante no solo estudiar el tratado que está siendo objeto de estudio, sino otras fuentes del autor que permitan comprender mejor los saberes que este pone en juego en dicho tratado.

> además de la obra estudiada, consideraremos las obras con temas relacionados a la obra estudiada y las obras más relevantes de la producción científica del autor, además de algunos ensayos de corte epistemológico y metafísico y algunas correspondencias entre matemáticos (Espinoza, 2009, p. 33).

Respecto a este punto, como se discutirá en las consideraciones metodológicas y de método, para analizar y entender el proyecto analítico algebraico de Descartes y Viète, hubiese resultado imposible hacerlo considerando únicamente los tratados donde plasman estas ideas.

4.1.5.3 El contexto de significación dentro en la actividad matemática

Si bien la propuesta de Espinoza (2009) respecto al contexto permite situar la producción matemática, se considera que un nivel más delicado de lo contextual, que debe especificarse en la problematización, es el relativo a la actividad matemática específica en la que surge el conocimiento. Es decir, el contexto del problema o situación matemática en la que el saber está siendo concebido y esta puede provenir de otro tipo de contextos que no sean exclusivamente matemáticos, por ejemplo, el caso de la ingeniería en robótica (véase Torres - Corrales y Montiel 2019, 2020). Esto se puntualiza por el hecho de que las descripciones de las dimensiones del contexto de situación pudieran quedar, justamente a un nivel que transcienda a la actividad matemática. En este sentido, bajo las tres dimensiones, existe una actividad matemática específica (en el contexto de una actividad puramente matemática o no) que debe entenderse también con base en los esquemas de pensamiento matemático que la permiten. A este nivel convenimos en denominarlo *contexto de la situación específica* (López-Acosta y Montiel, 2021b, 2022).

4.1.6 Estratificación de lo sociocultural en la investigación

Con base en los trabajos previos sobre la caracterización de la dimensión sociocultural y su influencia en la construcción del saber matemático se consideró pertinente establecer un modelo estratificado de las dimensiones del contexto de significación propuestos por Espinoza (2009), en concordancia también con la postura LSF de Halliday (1982), partiendo de la caracterización de *contexto cultural* de Malinowski (1960) como una manera visual de comprender cómo la actividad matemática se encuentra permeada por niveles contextuales más abstractos.

Se considerará pues que la dimensión sociocultural, en tanto "prácticas culturales específicas que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos" (Espinoza y Cantoral, 2010, p. 892), responden tal cual a un *contexto cultural*, en el sentido de Malinowski (1960), quien, desde una postura antropológica, señala que la cultura es un producto de momentos en los que los seres humanos tratan de cubrir siempre las demandas del mundo que los rodea, tanto natural como artificial. En este sentido, se generan primeramente necesidades básicas que aluden a necesidades orgánicas y de raza, para posteriormente definir necesidades imperativas instrumentales, que aluden a necesidades producidas por los mismos colectivos para conformar estándares de vida, y finalmente, autoimponerse necesidades imperativas integrativas, relacionadas con idiosincrasias. En este sentido, la postura de Malinowski destaca una relación funcional entre la cultura y el quehacer de las personas conforme se organizan en instituciones cada vez más complejas.

En síntesis, para Malinowski (1960) la cultura es:

> [U]na parte integral compuesta de instituciones parcialmente autónomas y parcialmente coordinadas. Está *integrado en una serie de principios* como la comunidad de sangre a través de la procreación; la contigüidad en el espacio relacionada con la cooperación; *la especialización en actividades*; y por último, pero no por ello menos importante, *el uso del poder en la organización política*. Cada cultura debe su plenitud y autosuficiencia al hecho de que satisface toda la gama de necesidades básicas, instrumentales e integradoras (p. 38, nuestro énfasis).

En este sentido, pueden contemplarse como incluyentes las tres dimensiones del contexto de Espinoza (2009), puesto que estas relaciones funcionales entre los individuos con su entorno cultural claramente definirán racionalidades contextualizadas, condiciones situacionales específicas y, por supuesto en el caso de la cultura matemática, prácticas matemáticas específicas. Estos elementos, como se mostrarán en los análisis fueron detectados y conceptualizados por niveles.

De manera que desde esta perspectiva que se adopta en la investigación se considera que el *contexto de la situación específica* es un subconjunto de otros tipos de contexto, tal y como se muestra en la Figura 3.

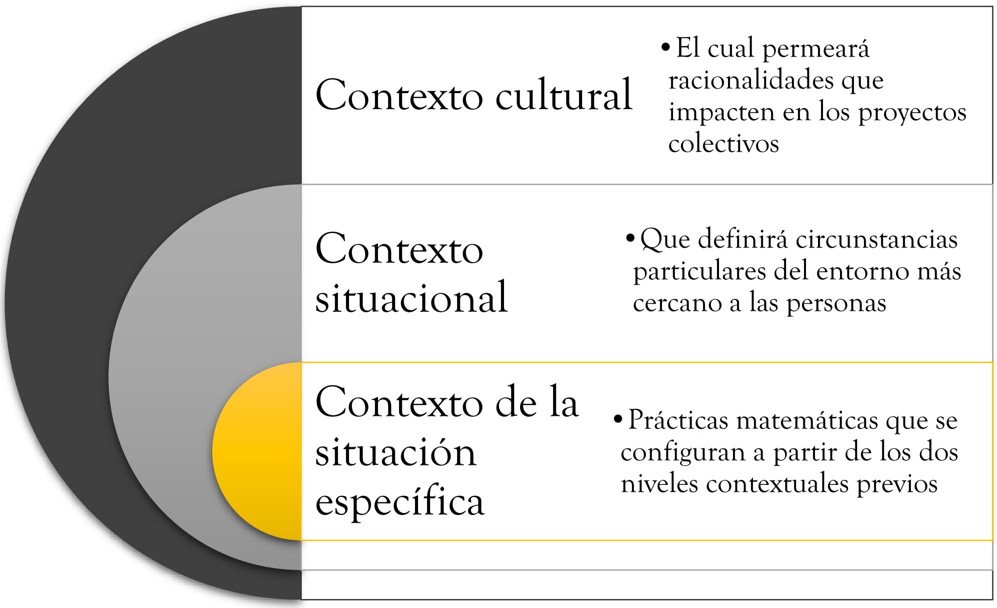


Figura 3. Estratificación del contexto de significación (basado en Espinoza, 2009 y Espinoza y Cantoral, 2010)

En el análisis de los proyectos de Viète y Descartes, fue esta estratificación la que se siguió para estudiar el contexto de significación del saber, así como para estructurar la narrativa resultante de este estudio.

4.1.7 Análisis de la actividad matemática y progresión pragmática

La *problematización del saber*, como ya se ha mencionado, trata sobre el análisis del conocimiento puesto en uso, lo cual implica que para ello las investigaciones socioepistemológicas, generalmente designen un conocimiento específico para la problematización. Así en palabras de Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015 p. 14) la problematización es un "proceso mediante el cual se realizan análisis de obras originales <u>de una pieza de conocimiento</u>".

En el caso de esta investigación, se dio una diferencia importante con el típico estudio socioepistemológico, toda vez que, por la naturaleza del objeto de estudio, no se hizo una problematización del saber, sino más bien de una *actividad matemática*, entendiendo por esta en términos amplios al quehacer humano con fines de entendimiento, explicación y resolución de problemas en el que se recurren a una diversidad saberes matemáticos.

De este modo, se adaptó el método de análisis que se propone en Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015) para el análisis de los libros de texto, puesto que se alude explícitamente a la actividad matemática, como tal, presente en los libros de texto estudiados.

El método consiste en dos fases:

1. *Fase descriptiva*: se contextualiza y sitúa el tema [...] en el sistema educativo mexicano del nivel básico (primaria y secundaria) (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015 p. 18). Para nuestro caso esta fase consiste en una descripción global de la actividad matemática sujeta al análisis en tanto, objetivo y síntesis del proceso de resolución.
2. *Fase de análisis cualitativo*: "análisis cualitativo de la actividad matemática que propone el libro, a partir de las *acciones* concretas que debe llevar a cabo quien trabaja con él" (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015 p. 18, énfasis en el original). Para esta fase se determinan los niveles de *acción* y *actividad* como parte del modelo de progresión pragmática (anidación de prácticas). Para cada uno de los niveles se recurre a cuestionamientos analíticos: ¿qué hace? y ¿cómo lo debe hacer? para el nivel de acción; ¿para qué lo debe hacer? para el nivel de actividad. En nuestro caso, se agregaron otros cuestionamientos como *¿cuál es la justificación espistémica*[3] *de la actividad matemática?* y *¿cuál es el rol del simbolismo en la actividad matemática?*
   Este tipo de cuestionamientos analíticos permitirían la caracterización de la actividad algebraica de los algebristas analizados.

[3] En el sentido de Heeffer (2014).

4.2 Lingüística Sistémico-Funcional

La Lingüística Sistémico-Funcional (LSF) es una teoría dentro de las corrientes sociolingüísticas centrada en un criterio funcional de la lengua (Halliday, 1982), lo cual significa que está interesada en develar aquello que la lengua puede hacer por el hablante, es decir, identificar las funciones que el lenguaje cumple para los individuos: “se trata de explicar la naturaleza de la lengua, su organización interna y su conformación en términos de las funciones que ha desarrollado para servir” (Halliday, 1982, p. 27).

La intención de la LSF es estudiar la naturaleza social del lenguaje y de su uso (Halliday, 1982; van Dijk, 2012). En palabras de Halliday:

> Una teoría funcional no es una teoría sobre los procesos mentales que concurren en el aprendizaje de la lengua materna; es una teoría acerca de los procesos sociales que confluyen en él. Está vinculado con el lenguaje entre personas (inter-organismos) y, por tanto, aprender a hablar se interpreta como el dominio de un potencial de comportamiento por parte del individuo. Desde esa perspectiva, la lengua es una forma de interacción, y se aprende mediante ella; en lo esencial eso es lo que hace posible que una cultura se transmita de una generación a otra (Halliday, 1982, p. 29).

Para la LSF el lenguaje es un sistema semiótico que permite construir y expresar la realidad de las personas. Por ello considera que el lenguaje es un potencial de significado, en tanto que, está sujeto a condiciones socioculturales que lo organizan.

> Interesa lo que la lengua puede hacer, o mejor dicho, lo que el hablante, niño o adulto, pueden hacer con ella; y que se trata de explicar la naturaleza de la lengua, su organización interna y su conformación en términos de las funciones que ha desarrollado para servir (Halliday, 1982, p. 27).

La LSF se centra en describir el uso y las funciones del lenguaje que lo caracterizan como un sistema semiótico, es decir, como un sistema que produce y carga consigo significados:

> La cuestión no consiste en saber qué peculiaridades de vocabulario, de gramática o de pronunciación pueden considerarse directamente por referencia a la situación; la cuestión es qué tipos de factores de situación determinan cuáles tipos de selección del sistema lingüístico (Halliday, 1982, p. 47).

4.2.1 Lo funcional de la Lingüística Sistémico-Funcional

El carácter funcional del lenguaje se ha descrito en el apartado anterior. Es decir, para la LSF, el interés es estudiar el lenguaje desde una postura *interorganismos*; una postura que atiende a la comprensión de las características socioculturales que determinan el sistema de decisiones que permite a los individuos convivir con su entorno. Por lo tanto, Halliday (1982) argumenta que independientemente de las culturas y los medios en los que se desenvuelve el lenguaje existen algunas funciones que debe cumplir:

1. Interpretar toda nuestra experiencia, reduciendo los fenómenos infinitamente variados del mundo que nos rodea, y también de nuestro mundo interno, los procesos de nuestra conciencia, a un número manejable de clases de fenómenos: tipos de procesos, acontecimientos y acciones, clases de objetos, de gente y de instituciones, y así por decirlo (Halliday, 1982, p. 33).

2. Expresar algunas relaciones lógicas elementales como "y", "o" y "si", lo mismo que las creadas por el propio lenguaje, como "a saber", "dice" y "significa" (Halliday, 1982, p. 34).

3. Expresar nuestra participación, como hablantes, en la situación del discurso; los papeles que asumimos nosotros mismos y que imponemos a los demás; nuestros deseos, nuestros sentimientos, nuestras actitudes y nuestros juicios (Halliday, 1982, p. 34).

4. El lenguaje tiene que hacer todo eso simultáneamente, de una manera en que se vincule todo lo que se dice con el "contexto de situación"; en otras palabras, tiene que ser capaz de estar organizado como discurso pertinente, y no solo como palabras y oraciones de un libro de gramática o de un diccionario (Halliday, 1982, p. 33).

De acuerdo con Halliday (1982), las demandas socioculturales que se ha impuesto al lenguaje han permitido configurar dichas funciones y, son estas últimas las que consecuentemente proveen de una morfología al lenguaje, así como un camino evolutivo. De manera que han constituido una semántica y una base para la gramática de este, toda vez que la gramática puede pensarse como una forma de organizar y articular significados de un sistema de estructuras existentes.

4.2.1.1. Metafunciones Ideacional, Interpersonal y Textual de la Lingüística Sistémico-Funcional

Las cuatro funciones descritas anteriormente son las que conforman la base de las funciones que constituyen el lenguaje adulto según Halliday (1982) y que han sido denominadas dentro de la teoría como *metafunciones*. Estas son el núcleo de la teoría.

1. **Metafunción Ideacional.** Es el componente por el cual el lenguaje codifica la experiencia cultural y el hablante codifica su experiencia individual como miembro de esa cultura; expresa los fenómenos del entorno. Esta Metafunción se compone a su vez de dos metafunciones:
   a. *Metafunción Experiencial*. "se refiere a cómo el lenguaje representa la experiencia del mundo en el nivel de la cláusula" (Halliday y Mathiessen, 2004, citados en Hodgson-Drysdale, 2014, p. 55).

   b. *Metafunción Lógica*. "se refiere a las relaciones entre cláusulas y cómo se usa el lenguaje para crear conexiones lógicas entre varios elementos de un texto para crear un todo coherente" (Halliday y Mathiessen, 2004, citados en Hodgson-Drysdale, 2014, p. 55).
2. **Metafunción Interpersonal.** Es el componente por el cual el hablante se inmiscuye en el contexto de situación, tanto al expresar sus propias actitudes, juicios y propios juicios como tratar de influir en las actitudes y en el comportamiento de otros
3. **Metafunción Textual.** Es el componente que da la textura. Expresa la relación del lenguaje con su entorno, incluso el entorno verbal y el entorno no verbal, el entorno situacional.

4.2.2 Lo sistémico de la Lingüística Sistémico-Funcional: La estratificación del lenguaje

El carácter sistémico de la LSF se atribuye a que el Lenguaje es concebido como un sistema sociosemiótico que contiene dos planos; uno del *contenido*, es decir, en el que se encuentran los significados y de la *expresión*, en el que son materializados. Dentro de estos dos planos, se encuentran tres niveles (Halliday y Matthiessen, 1999):

1. **Semántica.** Es el sistema de significado que se realiza en la lexicogramática
2. **Lexicogramática.** Es el sistema de formulación (es decir, estructuras gramaticales y elementos léxicos). Es un conjunto de opciones subordinadas por paradigmas que generan redes entre signos lingüísticos que corresponden a la estructura del texto (Menéndez, 2010). Este se realiza a través de la fonología y grafología.
3. **Fonología/Grafología.** Son los sistemas de sonido y de escritura.

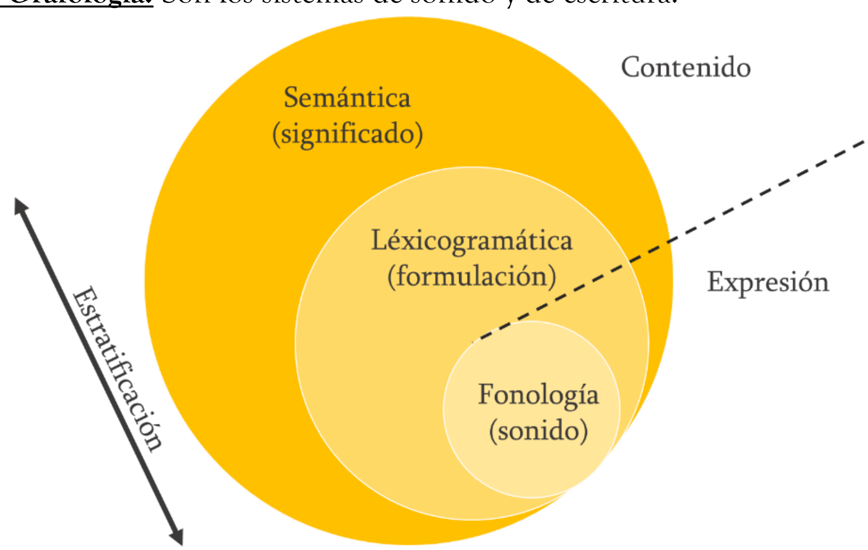


Figura 4. Lenguaje como sistema (Adaptado de Halliday y Matthiessen, 1999)

Los primeros dos niveles (semántica y lexicogramática) son los componentes del lenguaje que construyen el contenido del significado, mientras que el último nivel (fonología y grafología) son componentes que permiten la evocación del significado.

Nótese que dentro de la LSF el nivel de pragmática del lenguaje no es incluido, puesto que de partida la postura del lenguaje de la teoría apunta hacia el uso funcional del lenguaje, por lo que hablar de lenguaje sin uso es un absurdo. No obstante, la noción de uso del lenguaje es compleja (Halliday, 1982).

> En lo esencial, lo que eso implica es que el lenguaje solo surge a la existencia cuando funciona algún medio. No experimentamos el lenguaje en el aislamiento – si lo hiciéramos no lo reconoceríamos como lenguaje –, sino siempre en relación con algún escenario, con algún antecedente de personas, actos y sucesos de los que derivan su significado las cosas que se dicen (Halliday, 1982, p. 42).

El diagrama de estratificación (Figura 4) del lenguaje es relevante para entender fenómenos como la *metáfora gramatical*, la cual es un recurso del lenguaje que caracterizan a los discursos especializados, como los científicos.

O'Halloran (2005), organiza de la siguiente manera el modelo de estratificación de Halliday:

LENGUAJE	
Plano del CONTENIDO	**Semántica del discurso**
	Párrafo y Texto (Relaciones a lo largo del discurso)
	Lexicogramática
	Complejos Clausulares
	Cláusula
	Grupos de palabras
	Palabras
Plano de la EXPRESIÓN	**Tipografía/Grafología y Fonología**

Tabla 1. Estratificación del Lenguaje (O'Halloran, 2005)

A continuación, se describe de manera más específica la estratificación del lenguaje por medio de la explicación de cada uno de los componentes

4.2.2.1 Semántica del discurso: Texto

El texto refiere a una unidad de significado en uso coherente: cohesiva léxico-gramaticalmente y consistente en registro y género (Eggins, 2004, citados en Menéndez, 2010, p. 222). "Es con lo que los oyentes y lectores se relacionan e interpretan. El término 'texto' se refiere a cualquier instancia de lenguaje, en cualquier medio, que tenga sentido para alguien que conozca el idioma" (Halliday y Matthiessen, 2014, p. 3).

4.2.2.2 Lexicogramática: Palabra

"Unidad lingüística, dotada generalmente de significado, que se separa de las demás mediante pausas potenciales en la pronunciación y blancos en la escritura" (RAE, 2019). Desde la LSF, se considera a la palabra como elementos del discurso que no tienen existencia independiente a la propia realidad del discurso (Matthiessen, Teruya y Lam, 2010, p. 19). Dentro de la clasificación clásica de las palabras se pueden encontrar, los sustantivos, verbos, adjetivos, adverbios, etc.

4.2.2.3 Lexicogramática: Grupos de palabras

Combinaciones de palabras construidas sobre la base de relaciones lógicas particulares (Halliday, 1994). Hay cuatro tipos de grupos de palabras (Halliday, 1994; Halliday y Matthiessen, 2014):

- Grupos nominales: Son grupos en los que típicamente el núcleo es un sustantivo. Por ejemplo: *la <u>casa</u> blanca*; *esta <u>ecuación</u> cuadrática resultante.*
- Grupos verbales: Son grupos en los que el núcleo es un verbo. Por ejemplo: *se habría <u>subido</u>*; *habría <u>multiplicado</u>*.
- Grupos adverbiales: Son grupos en los que el núcleo es una adverbio y sirven para premodificar o postmodificar. Por ejemplo: *tan <u>rápido</u> [[como sea posible]]*; *<u>perpendicularmente</u> sobre el punto C.*
- Frases prepositivas: Se componen de una preposición y un grupo nominal. Por ejemplo: *por la mañana*; *en ambos lados de la ecuación*.

4.2.2.4 Lexicogramática: Cláusula

La cláusula es la unidad mínima de significado del lenguaje dentro la LSF, pues como tal:

> es la unidad gramatical del rango más alto en la escala de rango lexicogramátical [...] Es el punto de entrada o dominio o un número de sistemas simultáneos dentro de las metafunciones textuales, interpersonales y experienciales. En muchos idiomas (quizás todos), los sistemas más centrales son TEMA (textual), MODO (interpersonal) y TRANSITIVIDAD (experiencial) (Matthiessen, Teruya y Lam, 2010, pp. 71-72).

Una cláusula debe contener como mínimo un Proceso, que es realizado por un grupo verbal.

Ejemplos de cláusulas, en las que se subraya el grupo verbal:

- <u>Divide</u> por 3 ambos lados de la ecuación

- Trazar un círculo
- Como he demostrado
- Demuéstrese

4.2.2.5 Lexicogramática: Complejos clausulares

Los complejos clausulares son una "combinación táctica de cláusulas interdependientes formadas a través de relaciones lógico-semánticas de proyección y expansión" (Matthiessen, Teruya y Lam, 2010, p. 72).

Ejemplo de complejos clausulares (subrayando los grupos verbales en cada cláusula), donde por convención en LSF para separar dos cláusulas se usan las dos diagonales //:

- // Multiplica luego cosa por cosa, // resulta tesoro, //
- // Si Z es 100,000,000, // estos son los triángulos://
- // Dices, entonces, // que si tal número es x^6, // su raíz cuadrada es necesariamente x^3 // y dos veces su raíz cúbica es $2x^2$. //

4.2.3 Los sistemas simultáneos en la cláusula y en el complejo clausular

El análisis de la Gramática Funcional (GF) se lleva a cabo al nivel de la cláusula. Esto quiere decir que la cláusula es la unidad de análisis. Desde la postura LSF los significados *experienciales*, *lógicos*, *interpersonales* y *textuales*, son expresados simultáneamente en la cláusula. Cada uno de estos significados se proyectan en sistemas que son objetivados a nivel gramatical por palabras y grupos de palabras.

4.2.3.1 Sistema de TRANSITIVIDAD

Respecto a los significados experienciales, estos se analizan a través del sistema de TRANSITIVIDAD, el cual representa una configuración de la experiencia de los individuos, expresando *Procesos* sobre lo que experimentan uno o más actores, denominados *Participantes,* se encuentran aludidos bajo ciertas *Circunstancias*. En este sentido el sistema de transitividad trata sobre la configuración de Participantes, Procesos y Circunstancias que representan a través de la cláusula la experiencia. Por ello, Halliday (2004) se refiere a la cláusula en este sentido como la *cláusula como representación*.

Por ejemplo, en la cláusula: *He dividido diez en dos partes;*

Se tiene la configuración

He dividido	diez	en dos partes;
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**

4.2.3.2 Sistemas de MODO y MODALIDAD

Respecto a los significados Interpersonales, estos se analizan a través de los sistemas de MODO y MODALIDAD. Los significados presentes en la cláusula desde este sistema funcionan para establecer relaciones entre las personas, es decir, la cláusula se ve desde este sistema como *intercambio* (Halliday, 1994). Implica que se actúa sobre los demás por medio del potencial de significado del lenguaje, puesto que se pueden solicitar y ofrecer bienes y servicios, o información (Halliday, 1994).

El sistema de MODO trata sobre la función del habla, puesto que las cláusulas pueden ser indicativas o imperativas. Mientras que el sistema de MODALIDAD alude a la polaridad en el discurso, es decir, sobre lo positivo o negativo en la forma en que el mensaje se puede interpretar, si existen gradaciones de probabilidad y usualidad, habilidad, inclinación, permiso o necesidad. Es decir, este sistema deja ver la forma en la que el discurso refleja la postura del hablante o los juicios que emite.

En la cláusula *He dividido diez en dos partes;*

Se tiene la configuración

He	dividido	Diez	en dos partes;
Finito	**Predicador**	**Complemento**	**Adjunto**

Donde el hablante —Sujeto en la terminología LSF— está elidido, es decir, no aparece en el discurso.

La cláusula, proveniente de un texto de al-Khwârizmî es del tipo Indicativa: Informativa. Por lo tanto, el Sujeto solo está indicando cierta información, no hay recursos de modalidad, pues no expresa probabilidad. Es un discurso que no está sujeto a la duda solo expresa objetivamente un procedimiento.

4.2.3.3 Sistema de TEMA y REMA

Respecto a los significados Textuales, estos se analizan típicamente a través del sistema de TEMA y REMA. Los significados presentes en la cláusula desde este sistema son los que definen sobre lo que se está hablando, refleja la forma de organización de lo que se expresa. Es decir, la cláusula adquiere el estatus de *mensaje* (Halliday, 1994).

El Tema es el foco del mensaje, es de o sobre qué o quién se está hablando (escribiendo), “es sobre lo que el mensaje se refiere: el punto de partida sobre lo que el hablante está por decir” (Halliday, 1994, p. 38). El Rema define el desarrollo del mensaje (Halliday, 1994; Matthiessen, Teruya y Lam, 2010).

En la misma cláusula *He dividido diez en dos partes;*

Se tiene la configuración

He dividido	Diez en dos partes;
Tema	**Rema**

4.2.3.4 Sistema de TAXIS y LÓGICO-SEMÁNTICO

Los significados lógicos se analizan a través del sistema de TAXIS, los cuales se dan a nivel del complejo clausular, es decir, cuando una o más cláusulas se combinan para conformar significados interdependientes (Matthiessen, Teruya y Lam, 2010; Thompson, 2014). Esto permite que, a nivel semántico, se proyecten o expandan los significados de una cláusula a otra, conformando a su vez el sistema de relaciones LÓGICO-SEMÁNTICAS.

Cuando los significados de dos o más cláusulas tienen una relación igual se le denomina relación lógica de *Parataxis*, lo cual quiere decir, que cada cláusula contiene significados independientes pero que en conjunto conforman un significado más robusto. Por ejemplo, en el siguiente caso, en el que cada cláusula presenta información cada una en igualdad de estatus:

// Multiplica luego cosa por cosa, // resulta tesoro, //

Cuando los significados de dos o más cláusulas tienen una relación de dependencia se le denomina relación lógica de *Hipotaxis*, lo cual quiere decir, los significados entre cláusulas conforman una coordinación de significados dependientes.

Por ejemplo, en el siguiente caso, en el que se identifica una dependencia de la segunda hacia la primera, puesto que hay una condicional:

// Si Z es 100,000,000, // estos son los triángulos://

4.2.4 El Lenguaje como Semiótica Social

Bajo la consideración de que el sistema social puede ser entendido como una construcción de significados (como un sistema semiótico) y, que además el lenguaje es un medio semiótico que permite el intercambio de significados, puede decirse entonces que el lenguaje es un sistema sociosemiótico (Halliday, 1982), pues a través de este (aunque no exclusivamente), la realidad y el sistema social son construidos y encarnados.

Por otro lado, este intercambio de significados se efectúa en contextos o situaciones particulares, los cuales son denominados "contextos sociales"[4], que a su vez son instanciaciones del sistema social, es decir, escenarios que encarnan realidades y estructuras de la cultura que organizan a los individuos y, por tanto, las formas en las que los discursos son generados (Halliday, 1982).

Según Halliday (1982), un contexto social determinado puede interpretarse a partir de tres elementos fundamentales:

1. **Campo.** Se refiere al marco institucional en que se produce un trozo de lenguaje, e incluye no solo el tema de que se trata sino también toda la actividad del hablante o del participante en determinado marco [podríamos agregar: "y también la de otros participantes"]
2. **Tenor.** Se refiere a la relación entre participantes… no solo a la variación de la formalidad… sino… también a cuestiones como la permanencia o cosas por el estilo de la relación y el grado de carga emotiva que hay en ella…
3. **Modo.** se refiere al canal de comunicación adoptado: no solo a la elección entre médium hablado y médium escrito, sino a elecciones mucho más detalladas [podríamos agregar: "y a otras elecciones vinculadas con el papel del lenguaje en esa situación"] (p. 33).

La premisa de Halliday (1982) es que el lenguaje establece un puente entre la realidad social y los sistemas de opciones que los individuos realizan para transmitir y construir significados. Por ello, los elementos de los contextos sociales, *campo*, *tenor* y *modo*, son realizados a través de los significados *ideacionales*, *interpersonales* y *textuales* respectivamente.

Componente del contexto social	Componente semántico-funcional mediante el que se realiza típicamente
1. Campo (contexto social)	Experiencial
2. Tenor (Relación social)	Interpersonal
3. Modo (Modo simbólico)	Textual

Tabla 2. Relación entre el contexto de situación y las metafunciones (Halliday, 1982)

El **registro** corresponde a la variedad de uso que depende de la situación, mientras que el **género**, está relacionado con las convenciones de uso (Menéndez, 2010). Tanto el género como el registro son los aspectos que describen el contexto en el que el lenguaje está enmarcado y estos dependen de las condiciones socioculturales que lo permea.

[4] Las ideas sobre los contextos y sistemas sociales son constructos que Halliday recupera de perspectivas sociológicas que describen las relaciones y estructuraciones de la sociedad, en las que el lenguaje se presume fundamental. Una de estas perspectivas es la de Basil Bernstein.

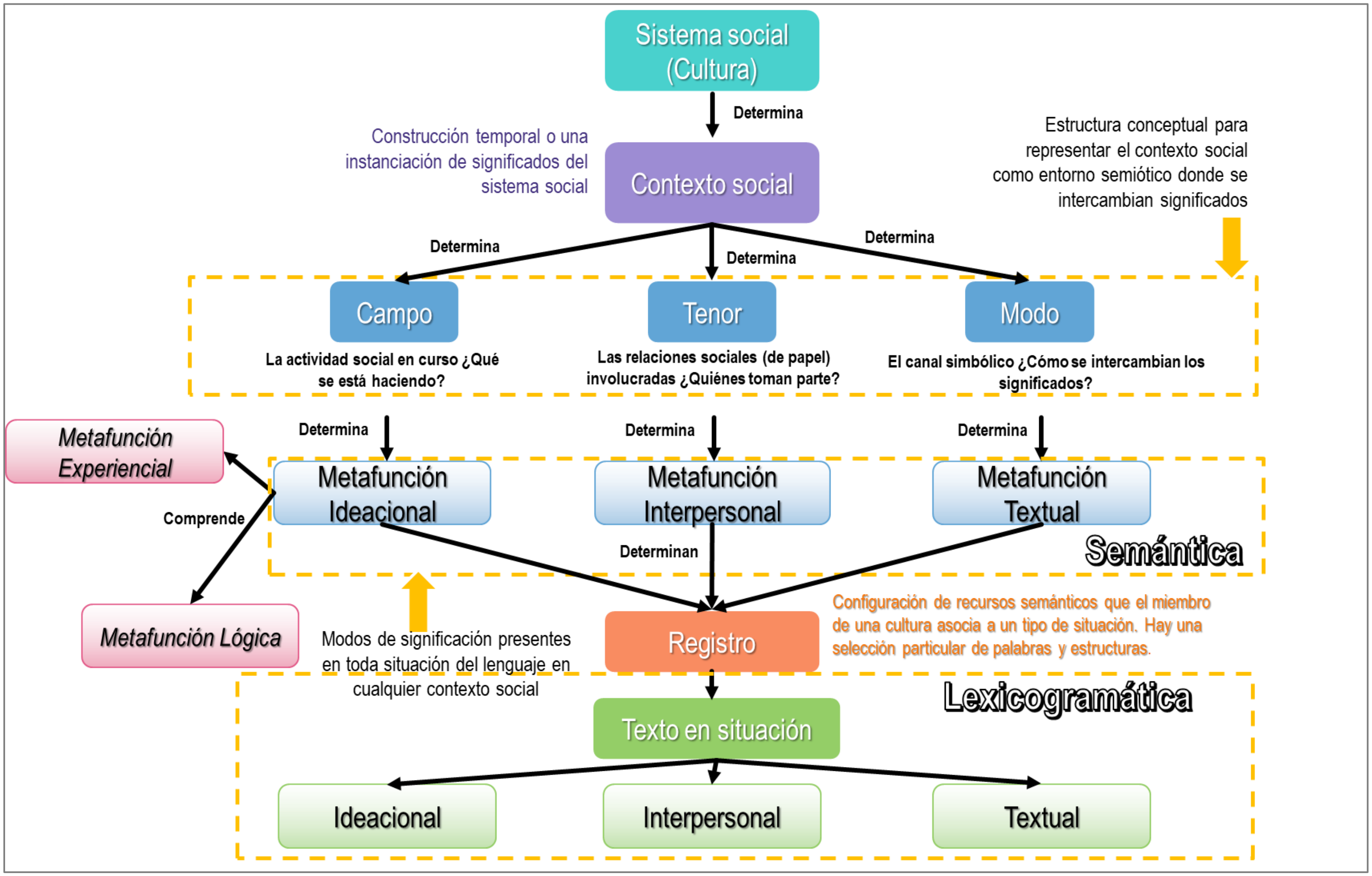


Figura 5. Lenguaje como Semiótica Social (Adaptado de Halliday, 1982)

4.3 Multimodalidad y Multisemiosis

En términos generales la multimodalidad o el estudio de discursos multimodales, es un campo de investigación emergente dentro de la lingüística (O'Halloran, 2005), como resultado del reconocimiento de que el estudio del lenguaje basado en únicamente la oralidad y la escritura representa una visión limitada para comprender el fenómeno de la comunicación (Crawford Camiciottoli y Fortanet-Gómez, 2015), puesto que en conjunto el lenguaje es un recurso que funciona junto con otros recursos semióticos (O'Halloran, 2004, 2005).

No obstante, como consecuencia de los estudios multimodales, también se han creado metodologías y teorías para atender el análisis de tipos de discursos compuestos de más un recurso semiótico. Por lo tanto, "la multimodalidad puede entenderse como una teoría, una perspectiva o campo de investigación o una aplicación metodológica" (Jewitt, 2009, p. 12, citado en O'Halloran y Smith, 2011).

Como teoría y perspectiva de investigación la multimodalidad consiste en enfoques que tienen como intención primordial "comprender la contribución de varios recursos semióticos [...] en los estudios de comunicación" (Crawford Camiciottoli y Fortanet-Gómez, 2015, p. 1); por lo que "[e]l análisis e interpretación del uso del lenguaje se contextualiza en conjunto con otros recursos semióticos que se utilizan simultáneamente para la construcción del significado" (O'Halloran, 2004, p. 1).

En esta investigación se adopta la postura planteada por O'Halloran (2005), en la que caracteriza los términos más representativos relativos a la multimodalidad de la siguiente manera (O'Halloran, 2005):

- *Modo*: se utiliza para referirse al canal (auditivo, visual o táctil, por ejemplo) a través del cual tiene lugar la actividad semiótica.
- *Medio*: para los recursos materiales del canal.
- *Género:* para tipos de texto como la Narrativa (que se realiza a través del lenguaje en forma oral o escrita).
- *Multisemiótico*: se utiliza para los textos que se construyen a partir de más de un recurso semiótico.
- *Multimodal*: es usado para discursos que involucran más de un modo de semiosis. (p. 20)

Bajo estas consideraciones, el discurso matemático, como otros científicos, por ejemplo, puede adquirir ambas acepciones, es decir, como multisemiótico y multimodal. Será *multisemiótico* cuando se considera un discurso dentro de un único *modo* como el visual tratándose de un texto escrito, como los analizados en la primera etapa de la investigación. En el cual se recurre al lenguaje, simbolismo e imágenes visuales, tal y como se ha mencionado en el apartado 12.6.2.2.

Por otro lado, será *multimodal* cuando se analice el discurso con más de un *modo* como la actividad de aula, puesto que en la actividad de aula se recurre a los modos auditivos y visuales principalmente, como la que se propone analizar en la segunda etapa de la investigación.

En términos generales, O'Halloran (2005) considera que:

> Las matemáticas y las ciencias se consideran construcciones "multisemióticas"; es decir, discursos formados a través de elecciones de los sistemas de signos funcionales de lenguaje, simbolismo matemático y visualización. Estos discursos son comúnmente constituidos como textos escritos, aunque las matemáticas y las ciencias no se limitan a estas formas de actividad semiótica. Allí son muchos géneros 'multimodales' diferentes que constituyen las matemáticas y las prácticas científicas; por ejemplo, conferencias, documentos de conferencias, software programas e investigaciones de laboratorio (p. 10).

Dentro de la LSF los trabajos más prominentes respecto al análisis del discurso matemático los ha realizado Kay O'Halloran. A partir de su estudio del discurso matemático construyó una aproximación teórica y metodológica para el Análisis Multimodal Sistémico Funcional del Discurso (ASFDM), con el cual O'Halloran (2007b) plantea como objetivos los siguientes:

> i) la elaboración de marcos SF para explorar la funcionalidad y los sistemas gramaticales para imágenes visuales matemáticas y el simbolismo matemático.
> ii) la teorización del significado que surge de la combinación de la utilización de los tres recursos semióticos en forma escrita, impresa y electrónica
> iii) la investigación sobre el impacto de la tecnología computacional de las matemáticas; y
> iv) la elaboración de nuevas aproximaciones al análisis del discurso del aula para incorporar el rango de recursos semióticos que entran en juego; por ejemplo, la mirada, el gesto, la acción, objetos tridimensionales y las características arquitectónicas de la sala. (p. 79)

4.3.1 El discurso matemático desde el ASFDM

El modelo del Análisis Sistémico Funcional del Discurso Multimodal (ASFDM) desarrollado por Kay O'Halloran (O'Halloran, 2005, 2007, 2008, 2011, 2012, 2014, 2015b), es un enfoque que amplía la perspectiva de la LSF hacia el estudio de los discursos multimodales y multisemióticos como las matemáticas, de donde surgió. De acuerdo con O'Halloran (2007, p. 79) "[e]l estudio del discurso lingüístico por sí solo tiene limitaciones teóricas que tienen el potencial de simplificar y distorsionar la naturaleza real de las prácticas pedagógicas en las aulas de matemáticas", motivo por el cual, al análisis multimodal resulta óptimo para el estudio del discurso matemático.

Dentro de los resultados más importantes que O'Halloran ha obtenido con sus análisis multimodales ha logrado determinar las características de la gramática funcional del discurso matemático, basándose en el análisis SF construyendo sus propios modelos de la estratificación de cada uno de los recursos semióticos del discurso matemático. Para el lenguaje natural, se basa en la estratificación establecida en LSF, mientras que para el simbolismo matemático propone su estratificación y para las imágenes visuales retoma la estratificación de otros modelos como el de O'Toole (1994, citado en O'Halloran, 2005, 2007).

4.3.1.1 Modelo de estratificación para el simbolismo matemático

El modelo de estratificación para el simbolismo matemático que propone O'Halloran (2005), se muestra en la siguiente tabla:

SIMBOLISMO MATEMÁTICO	
Plano del CONTENIDO	**Semántica del discurso**
	Relaciones Interenunciados
	Lexicogramática
	Enunciados (o complejos clausulares)
	Cláusulas
	Expresiones
	Elemento
Plano de la EXPRESIÓN	**Tipografía y Grafología**

Tabla 3. Estratificación del simbolismo matemático (O'Halloran, 2005)

Al igual que en la estratificación del lenguaje se describen a continuación cada uno de los componentes de los estratos.

4.3.1.1.1 Semántica del discurso: Relaciones Interenunciados

Son relaciones que se dan entre partes del discurso. Por ejemplo:

Sea $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = 2x$

Calcular $f(g(2))$.

Donde en la cláusula Calcular $f(g(2))$ se denota una relación que vincula el enunciado $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = 2x$. En este sentido el simbolismo ha desarrollado funciones gramaticales que permiten relacionar enunciados.

4.3.1.1.2 Lexicogramática: Elementos

Los elementos son componentes simbólicos que en paralelismo con las palabras en el lenguaje son unidades lingüísticas que son separadas por espacios en la escritura. Por ejemplo: operadores $=, +, -, \times, \div, \ldots$; literales $x, y, z, a, b, c, \ldots$; números $1, 2, 3, \ldots$; relaciones lógicas $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$; entre otros.

4.3.1.1.3 Lexicogramática: Expresiones

Combinaciones de elementos que conforman grupos de símbolos con signficado limitado, pues no incluyen Procesos. Por ejemplo: $3x + 4$; $\forall\, x$, $f(x)$, $(x^2 + 2)(x - 4)$, etc. Que podrían traducirse al lenguaje natural como "tres equis más cuatro"; "para toda equis"; "efe de equis"; "la multiplicación del cuadrado de equis, más dos, por equis menos 4", los cuales pueden compararse con los Grupos de palabras en el Lenguaje.

4.3.1.1.4 Lexicogramática: Cláusulas

Las cláusulas simbólicas son relaciones entre expresiones por medio de Procesos simbólicos como <, >, ≥, =, ≠, ≈, ≡, ∈, ∉,... etc. Por ejemplo: $2x + 4 = 5$; $\forall x \in \mathbb{R}$; $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$. Que podría traducirse en el lenguaje natural como "El doble de equis, más cuatro es igual a cinco"; "Para toda equis que se encuentra/está/pertenece en/a los números reales"; "El triángulo ABC es congruente con el triángulo EFG".

4.3.1.1.5 Lexicogramática: Enunciados

Los enunciados son equivalentes a los complejos clausulares en el lenguaje. Por ejemplo: $x + 5 = 10 \Longrightarrow x = 5$; $\Delta ABC \approx \Delta EFG \Leftrightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{EG}$. Que podría traducirse en el lenguaje natural como "equis más cinco es igual a diez, implica que equis es igual a cinco"; "// El triángulo ABC es semejante al triángulo EFG // si y sólo si // AB es a EF como BC es a FG // como AC es a BG //".

4.3.1.2 Modelo de estratificación para las imágenes visuales

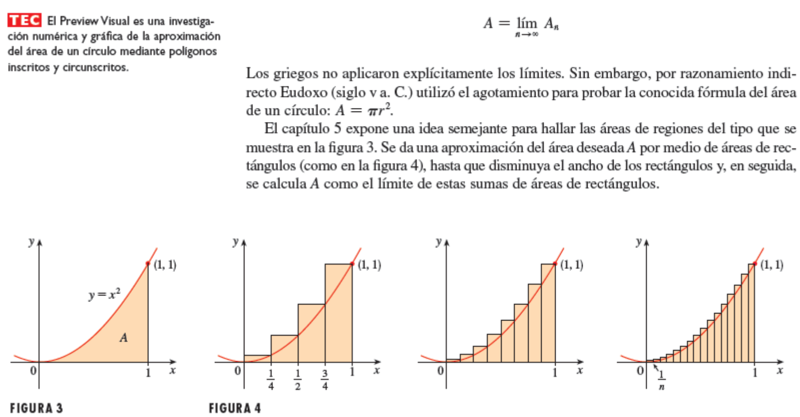
El modelo de estratificación para las imágenes visuales que emplea O'Halloran (2005, 2007), basándose en O'Toole (1994) se muestra en la siguiente tabla:

IMÁGENES VISUALES	
Plano del CONTENIDO	**Semántica del discurso**
	Relaciones Intervisuales
	Trabajo/Género
	Lexicogramática
	Episodio
	Figura
	Partes
Plano de la EXPRESIÓN	**Gráficos**

Tabla 4. Estratificación de las imágenes (O'Halloran, 2005)

4.3.1.2.1 Semántica del discurso: Relaciones Intervisuales

Son relaciones que representan secuencias de imágenes visuales que vinculan diferentes tipos de Episodios (O'Halloran, 2005, 2007). Por ejemplo, en la Figura 6, en la que las imágenes de las figuras 3 y figura 4 consisten en una secuencia de imágenes con las que se intenta mostrar, a partir de una curva específica ($y = x^2$) en la figura 3, una forma en la que se puede aproximar al área debajo de una curva, es por medio de ir disminuyendo la base de los rectángulos cada vez más, de manera que se tienda a cero.


TEC El Preview Visual es una investigación numérica y gráfica de la aproximación del área de un círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos.

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Los griegos no aplicaron explícitamente los límites. Sin embargo, por razonamiento indirecto Eudoxo (siglo v a. C.) utilizó el agotamiento para probar la conocida fórmula del área de un círculo: $A = \pi r^2$.

El capítulo 5 expone una idea semejante para hallar las áreas de regiones del tipo que se muestra en la figura 3. Se da una aproximación del área deseada A por medio de áreas de rectángulos (como en la figura 4), hasta que disminuya el ancho de los rectángulos y, en seguida, se calcula A como el límite de estas sumas de áreas de rectángulos.

Figura 6. Ejemplo de relaciones intervisuales (Steward 2008, p. 3)

4.3.1.2.2 Semántica del discurso: Trabajo/Género

El Trabajo/Género es el diagrama[5] total, es decir, la gráfica, la figura geométrica, el gráfico computacional y se configura como el resultado de la interacción de Episodios, Figuras y Partes en la visualización (O'Halloran, 2005, 2007).

En el caso de la Figura 6 corresponde al diagrama completo que incluye las figuras 3 y figura 4, que describe en términos amplios un método para aproximar el área bajo una curva específica.

4.3.1.2.3 Lexicogramática: Episodio

Es la configuración de Participantes, Procesos y Circunstancias plasmados en las imágenes (O'Halloran, 2005, 2007). En el caso de la Figura 6, cada figura 1 y 2, contiene un Episodio cada una en la que se tienen como Participantes a la curva $y = x^2$ y los rectángulos; como Procesos se tienen la construcción de los rectángulos, disminución de las bases de los rectángulos; como Circunstancias la idea de que la las bases deben ser cada vez más y más pequeñas, o sea tendientes a cero.

4.3.1.2.4 Lexicogramática: Figura

Las Figuras son los participantes en los Episodios (O'Halloran, 2005, 2007). La curva $y = x^2$ y los rectángulos en la Figura 6.

4.3.1.2.5 Lexicogramática: Parte

Son otros constituyentes en la visualización como los títulos, los ejes coordenados, etiquetas, puntos de intersección, etc. En la Figura 6, las Partes son todos los elementos del diagrama que contribuyen para comprender la relación entre la curva y los rectángulos, como el eje coordenado, pues a partir de este se conceptualiza la curva y la forma en la que se aproxima el área pues sobre el eje x se ubican las bases de los rectángulos, también se tienen las etiquetas que designa a cada eje y las de las cantidades que denotan el tamaño del intervalo de las bases de los rectángulos, etc.

4.3.2 Intersemiosis

Uno de los objetivos dentro del AMSFD es el estudio de la intersemiosis que se da entre los distintos recursos semióticos que componen los discursos multimodales y multisemióticos.

[5] Por diagrama O'Halloran (2005, p. 133), citando a Borowsky y Borwein (1989), considera que incluyen en términos amplios las representaciones y relaciones pictóricas, tales como diagramas de Venn, figuras geométricas y otras figuras como las encontradas en la teoría de grafos y la topología.

Esto es, la producción de significado articulado entre los distintos recursos semióticos. En el caso de las matemáticas, del simbolismo, imágenes visuales y lenguaje natural. Esta característica en los discursos se genera por el hecho de que cada recurso semiótico aisladamente tiene un potencial de significado limitado, por lo que requiere de otros recursos para construir y expandir su límite de significado.

> El lenguaje, el simbolismo y las imágenes visuales funcionan juntos en el discurso matemático para crear un circuito semántico que permita expansiones semánticas más allá de lo imaginable a través de las contribuciones individuales. El potencial de significado resultante de las matemáticas se extiende más allá de lo posible a través de la suma de los tres recursos. Siguiendo este punto de vista, el éxito de las matemáticas como discurso se deriva del hecho de que se basa en los potenciales de significado del lenguaje, las imágenes visuales y el simbolismo de maneras muy específicas. Es decir, los sistemas de discurso, gramática y presentación para cada recurso han evolucionado para funcionar como redes de sistemas interconectados en lugar de fenómenos aislados (O'Halloran, 2005, p. 159).

Este fenómeno de intersemiosis implica que se dé lugar a "transiciones semióticas, o movimientos entre recursos semióticos" (O'Halloran, 2005, p. 159), fenómeno que a su vez es denominado *resemiotización* (Iedema, 2003, citado en O'Halloran, 2005) que se pueden dar tanto a nivel discursivo (Macrotransiciones) como a nivel lexicogramatical (Microtransiciones) (O'Halloran, 2005).

Con base en la consideración de la intersemiosis O'Halloran (2005, 2007, 2008) plantea como modelo general del AMSFD el ilustrado en la Tabla 5:

IDEOLOGÍA				
COMBINACIÓN GENÉRICA				
COMBINACIÓN DE REGISTRO				
CONTEXTO	INTERSEMIOSIS MINI GÉNEROS, ÍTEMS, COMPONENTES y SUBCOMPONENTES			
CONTENIDO	LENGUAJE	IMÁGENES VISUALES MATEMÁTICAS	SIMBOLISMO	OTROS
	INTERSEMIOSIS Semántica del Discurso			
	Discurso	Relaciones Intervisuales Trabajo	Relaciones Interenunciados	
	INTERSEMIOSIS Gramática			
	Complejo Clausular Cláusula Grupo de palabras Palabra	Episodio Figura Parte	Enunciados Cláusula Expresión Elemento	
EXPRESIÓN	INTERSEMIOSIS Materialidad			
	Grafología, Tipografía y Gráficos			

Tabla 5. Análisis Multimodal Sistémico-Funcional del Discurso (O'Halloran, 2008)

Con el cual no solo se involucra un análisis gramatical al interior de cada recurso semiótico, sino la articulación entre cada uno de ellos tanto a nivel gramatical como discursivo, donde los textos matemáticos como producciones sujetas al contexto cumplen ciertos propósitos y, por lo tanto, cumplen con cierta estructura específica, es decir, *géneros* (O'Halloran, 2007). En particular, los textos matemáticos están compuestos por Mini-géneros como reportan Baldry y Thibault (2004), quienes retoman la distinción que hace Bakhtin (1986) respecto a géneros primarios y géneros secundarios.

4.3.2.1. Sistemas de Intersemiosis entre recursos semióticos en el discurso matemático

O'Halloran (2005, 2007, 2008) propone que la intersemiosis entre los tres recursos semióticos del discurso matemático se puede ver desde el punto de vista Metafuncional, a través de Sistemas de opciones que permiten desarrollar el potencial del significado intersemiótico. Estos son los siguientes[6]:

Metafunción Textual		
Estrato	Sistema	Descripción
Semántica del Discurso	Identificación Intersemiótica	Mecanismos de Cohesión para la Referencia Intersemiótica. Estos Incluyen elementos que operan entre recursos a través de Referencia Directa y Repetición Intersemiótica (por ejemplo, x) y referencia semánticca (por ejemplo, "variable" y x). Esta descripción retoma el trabajo realizado por Martin (2002) respecto a los recursos de cohesión discursiva. La identificación "Está relacionad[a] con recursos para el rastreo de participantes en el discurso. Este sistema incorpora el trabajo previo sobre cohesión referencial en un marco que considera tanto las formas en las cuales los participantes son introducidos dentro de un texto y la forma en la que se les rastrea una vez introducidos" (Martin, 2002, p. 54). Por Referencia se entienden: "los recursos para identificar un elemento participante y circunstancial cuya identidad es recobrable. En el inglés los recursos relevantes incluyen demostrativos, el artículo definido, pronombres, comparativos, y los adverbios fóricos aquí, allá, y entonces" (Martin, 2002, p. 53).
	Mezcla Intersemiótica	Refiere al uso selecciones de recursos semióticos que son empleados sistemáticamente en otro recurso semiótico. Como en el caso de las imágenes que incluyen más de un recurso semiótico, simbolismo y lenguaje natural.

[6] Se describen únicamente a los sistemas que han sido empleados en esta fase de la investigación. Faltan los sistemas relativos a la Metafunción Interpersonal. Asimismo, faltan también los sistemas relativos al estrato de la visualización. Para consultar la versión completa ver O'Halloran (2005, pp. 167-170).

	Vínculos discursivos	Ligaduras a través del texto.
	Subtítulos	El uso de subtítulos para identificar partes del texto que son referenciadas a lo largo del mismo
Léxico-Gramática	Sustitución Intersemiótica	Sustitución de un término por otro (por ejemplo, x por AB, o el $+$ para la adición)
	Adopción Intersemiótica	Uso de elementos funcionales entre recursos semióticos (por ejemplo, x).
	Deixis	Uso de Deícticos en el lenguaje (por ejemplo "esta" curva) compensado por participantes generalizados en el simbolismo y la visualización.
	Etiquetas	Refiere al uso de Etiquetas que usan múltiples recursos semióticos.
Metafunción Experiencial		
Estrato	Sistema	Descripción
Semántica del Discurso	Ideación Intersemiótica	Secuencias de actividades y relaciones que se expanden a lo largo de recursos semióticos a través de la repetición directa (por ejemplo, sea AB terminada en C) y equivalencia intersemiótica, en términos de sinonimia, antonimia, hiponimia, meronimia y colocación. Taxonomías que se extienden a lo largo de recursos (por ejemplo, tipos de triángulos)
	Subtítulos	El uso de subtítulos para identificar partes del texto que son referenciadas a lo largo del mismo.
Léxico-Gramática	Relaciones de Transitividad	El uso de Procesos Relacionales para establecer relaciones identificativas entre recursos semióticos, por ejemplo, sea $AB = x$. Selecciones de Transitividad que se sobreponen, por ejemplo, A y B tienen significado en la gramática de las imágenes visuales, y la gramática del lenguaje.
	Lexicalización, Simbolización y visualización	Mantenimiento en procesos, participantes y circunstancias y agencia de configuraciones a través de: (i) Lexicalización de elementos simbólicos y visuales (por ejemplo, "distancia" por "h" y "____") (ii) Simbolización de elementos léxicos y visuales (por ejemplo, "h" por "línea" y "___") (iii) Visualización de elementos léxicos y simbólicos (por ejemplo, "____" por "distancia" y "h").
	Metáfora Semiótica	Cambios en el estatus funcional e introducción de nuevos procesos, participantes y elementos circunstanciales (por ejemplo, la introducción de un triángulo visualmente el cual se simboliza y lexicaliza), cambios en la agencia.
	Etiquetas	Refiere al uso de Etiquetas que usan múltiples recursos semióticos.
Metafunción Lógica		
Estrato	Sistema	Descripción
Semántica del Discurso	Secuencias de implicación	Refiere a recursos cohesivos y estructurales entre los recursos semióticos (por ejemplo, Conjunciones lingüísticas y estructurales, Adjuntos Conjuntivos, y ligaduras cohesivas, y flechas señalando hacia otros recursos semióticos)
Léxico-Gramática	Relaciones lógico-semánticas	Recursos cohesivos y conjuntivos entre los recursos semióticos.

	Interrelación de espacialidad y temporalidad	Refieren a las transformaciones textuales simbólicas y visuales en las que se recurre a relaciones de espacio y temporalidad.
	Metáfora Semiótica	Cambios en el estatus funcional e introducción de nuevos procesos, participantes y elementos circunstanciales (por ejemplo, la introducción de un triángulo visualmente el cual se simboliza y lexicaliza), cambios en la agencia.

Tabla 6. Sistemas intersemióticos de las Metafunciones Experiencial, Lógica y Textual adaptado de O'Halloran (2005, 2007, 2008)

4.3.3 Mecanismos de intersemiosis

Los discursos multimodales y multisemióticos deben valerse de mecanismos que les permitan desarrollar el potencial de significado de sus distintos recursos y modos semióticos. Basándose en el discurso matemático, O'Halloran (2005, 2007, 2008) ha propuesto un conjunto de mecanismos intersemióticos que producen la intersemiosis. Para explicar los mecanismos, se hará con base en un ejemplo. La Figura 7 corresponde a un extracto de una actividad de un libro que trata la definición del límite de una función. Este tipo de texto es el que ha empleado O'Halloran para ilustrar los mecanismos.

2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

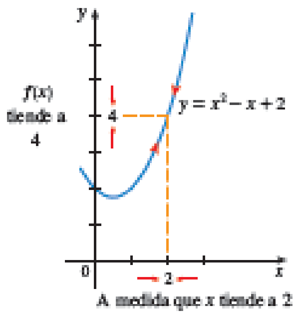


FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $\qquad f(x) \to L \qquad$ cuando $\qquad x \to a$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Figura 7. Ejemplo de Mecanismos de intersemiosis (Steward, 2008, p. 88)

4.3.3.1 Cohesión semiótica

Los sistemas de opción funcionan para hacer el texto cohesivo dentro y a lo largo de los Mini-géneros[7], Ítems[8] y Componentes[9]. Hay un alto grado de repetición involucrando relaciones co-contextualizadoras a lo largo de los tres recursos semióticos.

En el ejemplo de la Figura 7 se identifican dos Mini-Géneros: El primero relacionado con el planteamiento del problema y el segundo relativo a la definición del concepto matemático. Como Ítems se observan el Problema (con Componentes: la contextualización del problema por medio del enunciado, la imagen de la figura 1, la tabla y el análisis de lo representado en la tabla y la figura) y la Definición del concepto matemático (con Componentes: definición de la notación del concepto matemático y explicación del concepto matemático en términos de la nueva notación).

Hay cohesión semiótica en tanto que, a través de los componentes de cada Ítem, se recurre a la Referencia, pues hay repetición sistemática de los componentes; por ejemplo, en el Componente de análisis del problema se hace referencia a la *figura 1* y *la tabla* para aludir al comportamiento, o bien cuando se repite $\lim_{x \to a} f(x) = L$, en el segundo Item en ambos Componentes de la definición de la nueva notación y la explicación.

4.3.3.2 Adopción semiótica

Los sistemas de opción de un recurso semiótico son incorporados como sistemas de opción dentro de otro recurso semiótico. Elementos simbólicos aparecen en los enunciados lingüísticos: "los valores correspondientes de t y v".

---

[7] De acuerdo con Baldry y Thibault (2004), los Mini-géneros derivan de la noción de *géneros primarios* con base en Bakhtin (1986), los cuales se consideran recursos prefabricados para la conformación de textos. Por ejemplo, se mencionan: *Pregunta-Respuesta*, *Problema-Solución*, *Definición-Explicación*, entre otros.

[8] "Un ÍTEM es cualquier instanciación de cualquier sistema de creación de significado que es soportado por la tecnología de hipertexto, y hasta la fecha, estos recursos semióticos incluyen los recursos lingüísticos, visuales, musicales y fonéticos" (Kok, 2004, p. 134). "Son elementos de los textos matemáticos que funcionan como unidades discernibles a través de opciones sistemáticas de las gramáticas del lenguaje natural, simbolismo e imágenes visuales" (O'Halloran, 2005, p.159).

[9] Se interpretan como partes constitutivas de distintos recursos semióticos que contribuyen a la construcción de la estructuración de los significados en cada Ítem.

Se identifican casos como: "Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2"; "El límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". Donde se incorpora en el lenguaje natural elementos del simbolismo.

4.3.3.3 Mezcla semiótica

Ítems consisten en sistemas de opciones de diferentes recursos semióticos.

Nótese cómo en la figura 1, se incorporan elecciones del lenguaje natural y del simbolismo como elementos constituyentes de la visualización. Por ejemplo: "$f(x)$ tiende a 4" y "a medida que x tiende a 2".

4.3.3.4 Yuxtaposición y espacialidad

Mini-géneros, Ítems, Componentes y elementos constitutivos son organizados composicionalmente para facilitar la intersemiosis.

La disposición espacial, en términos de centrado y de espaciado lineal, que se emplean con la tabla de datos y la expresión algebraica contribuyen a que estos elementos sean concebidos como la información importante.

4.3.3.5 Transición semiótica

Se da cuando los sistemas de opción resultan en movimientos discursivos intersemióticos llamados macro-transiciones, las cuales, cambian el discurso de un mini-género, Ítem, y componente hacia otro.

Del componente de la contextualización del planteamiento del problema con base en la explicación detallada, se transita hacia la tabla, es decir, toda la descripción se simplifica en la tabla, y posteriormente se transita a la figura 1, la gráfica de la función para articular lo que sucede a nivel numérico y visual, nuevamente se transita hacia el componente de la expresión algebraica.

Contextualización del problema → Tabla → Gráfica → Expresión algebraica.

4.3.3.6 Metáfora semiótica

La noción de metáfora es de suma relevancia dentro de la teoría de Halliday. Esta alude a que existen incongruencias tanto a nivel semántico como lexicogramatical. La incongruencia se refiere al estatus funcional de cada elemento. Esto se explica a partir de la estratificación de la semántica y lexicogramática.

Halliday menciona que existe un *principio de congruencia* entre las categorías semánticas y gramaticales, el cual implica que respecto a las categorías semánticas: Las *secuencias* son realizadas en *nexos clausulares*; Las *figuras* son realizadas en *cláusulas*; y Los *elementos* se realizan en *elementos clausulares*. Mientras que respecto a las categorías gramaticales: De los tipos de elementos los *participantes* se realizan en *grupos nominales*; Los *procesos* se realizan en *grupos verbales*; y Las *circunstancias* se realizan en *grupos adverbiales* y *frases preposicionales*. Esto se resume en la Tabla 7.

CONGRUENCIA EN RANGO		CONGRUENCIA EN ESTATUS (ELEMENTOS)	
semántico	***gramatical***	***semántico***	***gramatical***
secuencia	nexo clausular	cosa (entidad)	sustantivo (/grupo nominal)
figura	Cláusula	cualidad	adjetivo (en el grupo nominal)
elemento	grupo/frase	proceso	verbo (/grupo verbal)
		circunstancia (1)	adverbio (/grupo adverbial)
		circunstancia (2)	frase prepositiva
		proceso menor	preposición
		relación	conjunción

Tabla 7. Principio de congruencia de las categorías semánticas y gramaticales (Halliday, 1998, p. 40)

Por ejemplo, considérense la diferencia entre las sentencias (Halliday, 1998, p. 34):

"*Glass cracks more quickly the harder you press on it*"

"*Glass crack growth rate is associated with applied stress magnitude*"

En donde puede notarse, en primera instancia, que la primera sentencia está conformada por dos cláusulas, mientras que la segunda por solo una cláusula. Asimismo, puede notarse también que mientras los procesos *cracks* y *press* de la primera sentencia han sido convertidos en otras clases gramaticales en la segunda sentencia, grupo nominales.

Este cambio en el estatus de la categorías gramaticales y semánticas incongruentes de los elementos es lo que se conoce como *metáfora gramatical*. De manera que la metáfora gramatical aborda la congruencia en la forma en la que los significados son construidos al nivel de las clases de rango y de elementos.

Por lo tanto, la Metáfora gramatical produce cambios al nivel de rango semántico y gramatical. Ejemplos de esto es la conversión de una "cualidad" a "cosa", o bien cuando un "proceso" es convertido en "cosa". Una vez hecho este proceso la "cosa" puede ser medida y convertirse en participante. Considérese nuevamente el ejemplo de las sentencias "*Glass cracks more quickly the harder you press on it*" y "*Glass crack growth rate is associated with applied stress magnitude*", en el que procesos, relaciones conjuntivas y circunstancias se convierten en "cosas" dando paso a la creación de grupos nominales, así como al nivel semántico, la secuencia de dos figuras de la primera sentencia se transforma en una única cláusula.

En el caso de los Discursos Multisemióticos, O'Halloran (2000, 2005, 2007, 2015a, 2015b) identificó que existen también metáforas que se dan en los tránsitos de un recurso semiótico a otro, en los cuales también se identifican relaciones incongruentes. Este tipo de metáforas, como señala O'Halloran corresponden a una expansión de la metáfora gramatical de Halliday y las denomina *Metáforas Semióticas*, las cuales se caracterizan por el hecho de que "Cambios metafóricos ocurren donde los estatus de los elementos funcionales no son preservados y nuevos elementos son introducidos" (O'Halloran, 2007, p. 94).

Por ejemplo: El grupo nominal "los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2" se transforma en enunciaciones simbólicas del tipo $x \leftrightarrow f(x)$, $1.0 \leftrightarrow 2.000000$, $1.5 \leftrightarrow 2.750000$, etc... En este sentido hay un cambio en el estatus funcional, puesto que, en la escala de rango, se dio un salto del tipo:

LENGUAJE NATURAL	SIMBOLISMO MATEMÁTICO
Semántica del discurso	**Semántica del discurso**
Texto	Relaciones Interenunciados
Lexicogramática	**Lexicogramática**
Complejos clausulares	Enunciados
Cláusulas	Cláusulas
Grupos	Expresiones
Palabras	Elemento

Tabla 8. Relaciones incongruentes (metafóricos) entre Lenguaje Natural y Simbolismo

5

Análisis en la primera fase del estudio

5.1 Consideraciones metodológicas generales de la primera fase

5.1.1 Sobre el EHE del análisis algebraico y su contexto de significación

Para el EHE se siguió la estructura de categorías de análisis de Espinoza (2009) (ver sección 4.1.5.2) con una adaptación que nos permitiera analizar los proyectos del análisis algebraico de Viète y Descartes, y sus implicaciones sobre la actividad algebraica. Cabe resaltar que en la narrativa que se hace respecto a la problematización del análisis algebraico de Viète y Descartes no se hace referencia explícita a las categorías, aunque sirvieron como estructura conceptual para la recolección de las fuentes de información y del análisis. La estructura de la narrativa sigue la estructura de la estratificación contextual: *Contexto cultural*, *Contexto situacional* y *Contexto de la situación específica*.

En este sentido, las categorías de análisis fueron extendidas de la siguiente manera:

- *Una producción con historia–Un proyecto con historia*: Se reconoció al proyecto de desarrollo del análisis algebraico— *arte analítico* para Viète y *Mathesis Universalis* para Descartes—por parte de Viète y Descartes como una producción individual con historia.
- *Un objeto de difusión—Un proyecto de difusión*: Puesto que no se habla de un libro como tal, se toma al proyecto del análisis algebraico como una forma nueva de hacer matemáticas que ambos autores pretendieron difundir en sus distintos escritos.
- *Parte de una expresión intelectual más global–El proyecto como expresión intelectual más global*: Se consideró que el proyecto del análisis algebraico tenía como fin responder a necesidades intelectuales específicas de ambos autores.

5.1.2 Sobre el análisis LSF y AMSFD

Para el análisis de la Gramática Funcional, no se incluyó la Metafunción Interpersonal, puesto que, por un lado, se buscó principalmente estudiar sobre qué habla el discurso algebraico y cómo habla (Metafunción experiencial), cuál es su complejidad lógica en tanto discurso (Metafunción lógica) y cómo se estructura el discurso para expresar el mensaje (Metafunción textual). Por otro lado, es claro identificar en el discurso algebraico el Modo en tanto formas imperativas y con Modalidad alta en tanto, las elecciones gramaticales no dan lugar a que se pongan en duda lo que se dice. Esto ha sido reportado por O'Halloran (2005) de manera detallada. De la misma manera, en el AMSFD tampoco se incluye el análisis de esta Metafunción.

En el caso de la Metafunción Textual, se tomó la decisión de analizar todos los temas de las cláusulas y no únicamente las unidades T.

Por otro lado, en el análisis se hizo la distinción entre los Participantes Retóricos y Participantes Simbólicos para distinguir entre Participantes que no se encuentran inmersos en el recurso semiótico del simbolismo y aquellos que sí.

En el caso de los Análisis Multimodales de los mecanismos intersemióticos y de sistemas intersemióticos se limitan a la identificación de la presencia de estos.

5.1.3 Sobre el *corpus* de los análisis lingüísticos y de la actividad algebraica

Como se especificó en el capítulo 3 del diseño de investigación, se realizaron dos tipos de análisis, uno lingüístico basado en la LSF y otro epistemológico basado en la TS. Para ambos casos estos análisis se hicieron en dos etapas y en dos corpus diferentes. Esto se decidió puesto que para entender las características particulares de los discursos algebraicos de Viète y Descartes consideramos necesario compararlos con los discursos de otros algebristas de distinta época.

Los análisis se dividieron en dos etapas:

- Etapa 1. Análisis de la Gramática Funcional del discurso algebraico general y Análisis Socioepistemológico de la actividad matemática algebraica general.
- Etapa 2. Análisis multimodal de los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos de los discursos de Viète y Descartes y Análisis Socioepistemológico de la actividad algebraica de Viète y Descartes.

5.1.3.1 Etapa 1 de análisis

La primera etapa de los análisis se realizó sobre un corpus conformado de algunos de los ejemplos mostrados en la tercera revisión bibliográfica sobre la operatividad algebraica. Los textos que conforman este *corpus* son traducciones al español de algunos originales, o bien, de otras traducciones que fueron comparados con los textos originales, o traducciones referenciadas cuando no se pudo localizar el original. Esto permitió en ocasiones realizar adaptaciones a la traducción con base en los originales.

1. Traducción al inglés por Høyrup del texto del problema babilonio BM 13901 #1 que aparece en Høyrup (1986, p. 450, 2002, p. 52). En la traducción se consideró pertinente emplear la notación anacrónica decimal para facilitar el seguimiento del procedimiento de resolución, pues el texto original emplea la notación sexagesimal.
2. Traducción al inglés de Meskens (2010) del texto del problema 8 del segundo libro de *La Arithmetica* de Diofanto. Se empleó la notación simbólica anacrónica que emplea Meskens en su traducción para facilitar el seguimiento del procedimiento de resolución. Contrastado con Heath (1885, p. 173).

3. Sin traducción. Se usó el texto original de Puig (1998, pp. 14-15) que ya se encontraba en español, el cual, a su vez, es una traducción del problema quinto del apartado "de los seis problemas" del *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqâbala* de al-Khwârizmî. Contrastado con la versión de Rosen (1831, p. 39) sobre el tratado original.
4. Traducción al inglés de Witmer (1993, pp. 243-246) del problema VI del capítulo XXXIX del *Ars Magna* de Cardano. Se empleó la notación simbólica anacrónica que emplea Witmer en su traducción para facilitar el seguimiento del procedimiento de resolución. Contrastado con la versión original de Cardano (1545, fol. 75).
5. Texto original en italiano *L'Algebra* de Bombelli (1579, pp. 279-280).
6. Texto original en latín *Logistica [...]* de Buteo (1559, pp. 190-191).
7. Traducción al inglés de Witmer (1983, pp. 403-405) de la Proposición XVI de *Supplementum Geometriae* de Viète. Se empleó la notación simbólica anacrónica que emplea Witmer en su traducción para facilitar el seguimiento del procedimiento de resolución. Contrastado con el original de Viète (1646, pp. 248-249).
8. Sin traducción. Se usó el texto original de Rossell (1947, pp. 79-80), que ya se encontraba en español y que es una traducción del texto original del ejemplo que propone Descartes en el Libro II de *La Géométrie*. Contrastado con el original de Descartes (1637, pp. 319-322).

5.1.3.2 Etapa 2 de análisis

La segunda etapa del análisis se realizó sobre diferentes corpus para cada análisis. Para el Análisis Multimodal de los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos el *corpus* consistió de tres problemas y para el Análisis Socioepistemológico de la actividad de Viète y Descartes se usaron tres problemas por cada autor (incluyendo los dos analizados en la etapa 1). Todos los textos analizados son traducciones al español, exceptuando el de al-Khwârizmî.

- El *corpus* elegido para el Análisis Multimodal de los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos es el siguiente:

1. Sin traducción. Se usó el texto original de Puig (1998, pp. 10-13) que ya se encontraba en español, el cual, a su vez, es una traducción de la Demostración de la quinta forma normal del *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqâbala* de al-Khwârizmî. Contrastado con la versión de Rosen (1831, p. 16) sobre el tratado original.
2. Traducción al inglés de Witmer (1983, pp. 403-405) de la Proposición XVI de *Supplementum Geometriae* de Viète. Se empleó la notación simbólica anacrónica que emplea Witmer en su traducción para facilitar el seguimiento del procedimiento de resolución. Contrastado con el original de Viète (1646, pp. 248-249).

3. Sin traducción. Se usó el texto original de Rossell (1947, p. 79-80), que ya se encontraba en español, el cual, a su vez, es una traducción del texto original del Ejemplo que propone Descartes en el Libro II de *La Géométrie*. Contrastado con el original de Descartes (1637, 319-322).

Cabe resaltar que para este análisis se incorporó un texto de al-Khwârizmî, debido a que en el *corpus* de la primera etapa ninguno de los textos, a excepción de los de Viète y Descartes, incluía imágenes. Fue necesario incorporar el de al-Khwârizmî para comparar los mecanismos y recursos intersemióticos de Viète y Descartes con la tradición previa. Se consideró apropiado esta elección del texto de al-Khwârizmî puesto que el tipo de imágenes que se emplearon en el período posterior a este algebrista árabe y previo a Viète eran compatibles. Y, suponiendo además que este matemático árabe fue el primer matemático en la tradición algebraica que incorpora imágenes explícitas se consideró relevante.

- El *corpus* elegido para el Análisis Socioepistemológico de la actividad de Viète y Descartes es el siguiente:

  - Viète

  1. Traducción al inglés de Witmer (1983, pp. 83-84) de la Zetética I del Primer Libro de Zetética de *Zeteticorum libri quinque* de Viète. Se empleó la notación simbólica anacrónica que emplea Witmer en su traducción para facilitar el seguimiento del procedimiento de resolución. Contrastado con el original de Viète (1615, fol. 1).
  2. Traducción al inglés de Witmer (1983, pp. 205-207) del Capítulo XV del Primer tratado: sobre la comprensión de las ecuaciones, del *Æqvationvm Recognitione Et Emendatione Tractatus Duo* de Viète. Se empleó la notación simbólica anacrónica que emplea Witmer en su traducción para facilitar el seguimiento del procedimiento de resolución. Contrastado con el original de Viète (1615, pp. 39-40)
  3. Traducción al inglés de Witmer (1983, pp. 403-405) de la Proposición XVI de *Supplementum Geometriae* de Viète. Se empleó la notación simbólica anacrónica que emplea Witmer en su traducción para facilitar el seguimiento del procedimiento de resolución. Contrastado con el original de Viète (1646, pp. 248-249).

  - Descartes

  1. Sin traducción. Se usó el texto original de Rossell (1947, pp. 65-69, 82-88), que ya se encontraba en español, el cual, a su vez, es una traducción del texto original del Problema de Pappus que se encuentra seccionado en dos partes en los libros I y II de *La Géométrie* de Descartes. Contrastado con el original de Descartes (1637, pp. 309-313, 323-30).

2. Sin traducción. Se usó el texto original de Rossell (1947, pp. 146-147), que ya se encontraba en español, el cual, a su vez, es una traducción del texto original de la regla de los signos del Libro III de *La Géométrie* de Descartes. Contrastado con el original de Descartes (1637, 373).
3. Sin traducción. Se usó el texto original de Rossell (1947, pp. 79-80), que ya se encontraba en español, el cual, a su vez, es una traducción del texto original del ejemplo que propone Descartes en el Libro II de *La Géométrie*. Contrastado con el original de Descartes (1637, pp. 319-322).

Estos textos elegidos obedecen a que corresponden, en el caso de Viète, a ejemplos de su método analítico en tres tratados diferentes, en los cuales el tipo de problema es diferente. En el primer caso correspondiente a un ejemplo de álgebra aritmética, el segundo respecto al estudio de las ecuaciones y el tercero un ejemplo geométrico. En el caso de Descartes, puesto que *La Géométrie* es su único tratado matemático y todo él tiene que ver en su mayoría con problemas geométricos, se eligieron dos problemas de este tipo y un ejemplo en el que discute propiedades algebraicas de las ecuaciones. Se eligió el Problema de Pappus por el hecho de la relevancia que se identificó en el Análisis Socioepistemológico del contexto situacional.

5.2 Consideraciones de método

5.2.1. Método para el análisis de la actividad algebraica

Como ya se especificó en el apartado 4.1.7, el método que se siguió en esta fase para el análisis de la actividad algebraica es una adaptación del método de análisis de la actividad matemática que se propone en Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2005), el cual consiste en dos fases: una descriptiva y una cualitativa.

1. *Fase descriptiva*: se contextualiza y sitúa el problema que se está analizando. Se describe de manera global el objetivo y las características del problema con base en lo obtenido en el análisis histórico-epistemológico de la revisión bibliográfica. Complementariamente, se detalla el proceso de resolución.
2. *Fase de análisis cualitativo*: El análisis cualitativo tiene como finalidad responder las preguntas *¿qué se hace? ¿cómo lo hace? ¿cuál es la justificación espistémica*[10] *de la actividad algebraica?* y *¿qué papel juega el simbolismo matemático en la actividad algebraica?*
   Con la pregunta "¿Qué se hace?" se busca una caracterización general de la estructura del método de resolución, como también, las estrategias y objetivos en el proceso.

[10] En el sentido de Heeffer (2014).

La pregunta "¿Cómo lo hace?" refiere a los desarrollos específicos que permiten lograr el objetivo de la resolución, así como las estrategias empleadas.
Con la pregunta "¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad algebraica?" se busca especificar los mecanismos de validez que dan sentido y racionalidad a la resolución. Esta caracterización se retoma del trabajo de Heeffer (2014).
Finalmente, con la pregunta "¿Qué papel juega el simbolismo matemático en la actividad algebraica?" se busca especificar la función del simbolismo dentro del problema, de manera que permita identificar diferencias entre los algebristas previos a Viète y Descartes y estos últimos.

5.2.2. Método para el Análisis de la Gramática Funcional

El método de Análisis de la Gramática Funcional se basa en determinar las categorías funcionales que los elementos gramaticales manifiestan en el texto. Los textos son analizados desde cada una de las Metafunciones, en nuestro caso, Experiencial, Lógica y Textual. En este sentido se analizan desde estas tres Metafunciones los recursos semióticos del Lenguaje Algebraico de cada algebrista para determinar dichas categorías funcionales que permitan interpretar la funcionalidad del Lenguaje Algebraico. Para realizar estos análisis metafuncionales es necesario delimitar las cláusulas del texto, puesto que ésta es la unidad de análisis.

Después de los tres análisis gramaticales se condensó la información relativa a la interpretación funcional en una tabla para reportar los resultados interpretativos del análisis gramatical.

5.2.2.1. Consideraciones de la Metafunción Experiencial

La Metafunción Experiencial, como ya se mencionó en el apartado 4.2.3.1, se analiza a partir del sistema de TRANSITIVIDAD, es decir, el sistema en el que se manifiesta la configuración de Participantes, Procesos y Circunstancias. Estas categorías funcionales se encuentran a nivel semántico y su realización concreta en la gramática se da a partir de Grupos nominales, Grupos verbales y Grupos adverbiales o Frases prepositivas, respectivamente.

A su vez, a cada uno de los Participantes, Procesos y Circunstancias determinados en la cláusula se le asigna una función específica ya predeterminada en la Teoría LSF. Esto depende de los Procesos, puesto que son los que determinan el núcleo del significado experiencial, lo cual definirá funciones específicas para los Participantes y Circunstancias.

Por ejemplo, en el caso de la cláusula "He dividido diez en dos partes", se tiene la configuración:

He dividido	diez	en dos partes;
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Alcance	Producto

Donde el Proceso "He dividido" se cataloga como Proceso Material, los cuales se relacionan con el hacer, es decir, con la acción, en este caso abstracta. El Participante "diez" es sobre lo que se está actuando, aunque por ser abstracto, no se ve afectado *per se*, sino es aludido por el Proceso, lo cual, se cataloga como Alcance y la Circunstancia "en dos partes" indica la condición y/o producto de la acción; en este caso, el Producto.

Así se tienen otros tipos de Procesos como en la siguiente cláusula: "por lo tanto $x^3 + x = x^2 + 2$"

Por lo tanto	$x^3 + x$	$=$	$x^2 + 2.$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

Donde el Proceso "=" se cataloga como Proceso Relacional, los cuales se relacionan con el establecer correspondencias en términos de atributos o bien de identificadores, como en este caso, entre Participantes.

A continuación, se muestra una descripción sintética de los tipos de Procesos y los Roles funcionales que adquieren los Participantes con base en ellos. La tabla 9 es recuperada de Butt, Fahey, Feez, y Spinks, (2012, p. 81). Complementariamente a estos tipos de Procesos, O'Halloran (2005) propone que dentro del lenguaje matemático, se dan otro tipos de Procesos, que denomina Procesos Operativos, los cuales aluden a procesos que representan operaciones matemáticas como las aritméticas, las de establecimiento de relaciones proporcionales, entre otras.

Proceso	Dominio	Restricciones	Rol de Participantes
Material	Actividades exteriores: *hacer* algo	Ninguna *Cualquiera/lo que sea puede hacer*	Actor = el que hace Meta = Afectado Alcance = No afectado Beneficiario = a quién/para quién
Conductual	Comportamiento Psicológico y Fisiológico: la versión del hacer de Procesos Verbales y Mentales.	Necesidades Conciencia	Sensor = El que actúa Comportamiento/Alcance = Hecho
Mental	Actividades internas: pensar, conocer, vincular, querer, percibir, etc.	Necesidades Conciencia Características humanas	Perceptor = El que actúa Fenómeno = cosa conocida, agrado/desagrado, deseo, lo percibido.
Verbal	Volver externo lo interno: decir algo.	Ninguna Cualquiera/ lo que sea puede decir	Emisor = El que actúa Informe = Lo dicho Receptor = A quién se dijo Destinatario = Sobre quién se dice
Existencial	Introducir nuevos Participantes	Ninguna	Existente
Relacional: Atributivo	Caracterizar o asignar membresía a una clase	Ninguna	Portador = Cosa descrita Atributo = Descripción
Relacional: Identificativo	Decodificar significados conocidos y codificar nuevos	Ninguna	Identificado = Con lo que se va a identificar Identificador = La nueva entidad

Tabla 9. Tipos de Procesos y roles funcionales (adaptado de Butt, Fahey, Feez y Spins, 2012, p. 81)

5.2.2.2. Consideraciones de la Metafunción Lógica

El análisis de la Metafunción Lógica involucra el análisis de los sistemas de TAXIS y RELACIONES LÓGICO SEMÁNTICAS. Estas se estudian al nivel del complejo clausular, puesto que como ya se mencionó, los significados lógicos desde la LSF involucran la forma en la que el significado se organiza entre cláusulas.

Para el sistema de TAXIS, se sigue la convención en LSF para designar las relaciones paratácticas por medio de los números 1, 2, 3, 4…, mientras que para las relaciones hipotácticas se emplean las letras griegas α, β, γ, … y se han organizado estas relaciones de manera visual por medio de una estructuración escalonada que permita identificar las dependencias.

Para el sistema de RELACIONES LÓGICO SEMÁNTICAS de EXTENSIÓN y PROYECCIÓN, se empleó el siguiente código de colores:

EXPANSIÓN	Elaboración
	Extensión
	Realce
PROYECCIÓN	Locución
	Idea

De modo que por ejemplo, el complejo clausular:

"// Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados // y si restamos iguales de iguales, // ^NOSOTROS encontramos // que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς // y $\varsigma = \frac{16}{5}$"//."

En el análisis se ve de la siguiente manera:

β˜1	Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados
2	y si restamos iguales de iguales,
α˜α	^NOSOTROS encontramos
β˜1	que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς
2	y $\varsigma = \frac{16}{5}$.

En donde se identifican dos relaciones hipotácticas y dos paratácticas. Con una relación de Realce, dos relaciones de Extensión y una Idea.

Con este análisis es posible determinar una lectura lógica del complejo. Por ejemplo, en este caso, bajo este análisis, el mismo complejo clausular puede ser reescrito de la siguiente manera:

"//^NOSOTROS encontramos // que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς // y $\varsigma = \frac{16}{5}$"// Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados // y si restamos iguales de iguales,//."

Las RELACIONES LÓGICO SEMÁNTICAS de EXTENSIÓN y PROYECCIÓN tienen la función de, en el primer caso, expandir el significado de una cláusula por medio de otra, mientras que en el segundo caso, una cláusula proyecta el significado de una principal. Por ejemplo,

// ^NOSOTROS encontramos // que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς // [...]

Se da una relación de PROYECCIÓN entre estas dos cláusulas puesto que se está manifestando un Proceso Mental, lo cual representa una Idea que se está queriendo expresar, de modo que la idea proyectada es "que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς [...]". Además, puesto que la Idea proyectada contiene dos cláusulas:

// que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς // y $\varsigma = \frac{16}{5}$"//

Se da una relación de EXTENSIÓN, puesto que la cláusula "y $\varsigma = \frac{16}{5}$" expande el significado de la cláusula "que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς", porque agrega más información sobre esta, recurriendo a la conjunción coordinante "y".

Finalmente, entre las cláusulas:

// ^NOSOTROS encontramos [...] // Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados //

Se da una relación de EXPANSIÓN del tipo Realce, puesto que existe una relación condicionante entre ambas cláusulas en la que la segunda cláusula "enfatiza" la condición, es decir, hay un realce del significado.

5.2.2.3. Consideraciones de la Metafunción Textual

Como se explica en el apartado 4.2.3.3 para la Metafunción Textual se analiza el sistema de TEMA y REMA. El Tema en una cláusula incluye todo el contenido inicial de la cláusula hasta el primer elemento Experiencial, sea este un Proceso, Participante o Circunstancia. Por ello, el Tema puede conformarse de tres tipos de Temas, denominado Tema Mixto: Tema Experiencial, Tema Interpersonal y Tema Textual.

- El Tema Experiencial. Tiene como función mostrar el significado experiencial como punto de partida en la cláusula.
- El Tema Interpersonal. Tiene como función "indicar el tipo de interacción entre hablantes o las posiciones que están tomando" (Butt, et. al., 2012, p. 172).
- El Tema Textual. Tiene como función "conectar nuestro mensaje con el texto previo" (Butt, et. al., 2012, p. 171).

El análisis del Tema permite identificar sobre lo que trata el mensaje, en términos generales, al identificar patrones de Temas, es decir, si los Temas principalmente son Procesos, Participantes o Circunstancias. Asimismo, es posible determinar qué tipo de progresión temática siguen los textos, sin embargo, este último caso no se incluyó en los análisis.

Por ejemplo, si consideráramos una receta de cocina podrá identificarse que los Temas, no son mixtos y predominantemente son Procesos los que figuran en el Tema, puesto que la receta tiene como función enseñar a "hacer", o bien el procedimiento.

- **Freír** ajo, cebolla, jitomate cortado en trozos uniformes y chiles por 10 minutos.
- **Incorporar** fondo de pollo y cocinar por 25 minutos a fuego lento.
- **Licuar** con el fondo de pollo y de tortilla frita.
- **Colar y aromatizar** con el epazote.
- **Rectificar** sazón.
- **El caldillo** debe de quedar ligero.
- **Cortar** la tortilla en juliana, freírla y escurrir muy bien.
- **Cortar** el chile pasilla en tiras delgadas y freírlo ligeramente sin quemarlo.

- **Cortar** el aguacate en cubos pequeños.
- **Servir** en un plato la tortilla, queso, aguacate, chile, chicharrón troceado y crema
- **Agregar** el caldillo al momento de servir.

Un ejemplo de Tema Mixto sería el siguiente:

"pues, en efecto, ^LA LÍNEA EC no es otra que una hipérbola."

La cual presenta una configuración Textual:

pues,	en efecto,	^LA LÍNEA EC	no es otra que una hipérbola.
Tema			**Rema**
Textual	Interpersonal	Experiencial	Relacional: Atributivo

5.2.3. Método para el Análisis de los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos

Para el análisis de los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos se analizaron los textos empleando las descripciones y caracterizaciones para cada uno de los sistemas y mecanismos de intersemiosis que se detallan en los apartados 4.3.2 y 4.3.3. Cabe destacar que este análisis se limitó a la identificación de los sistemas y mecanismos, por lo que en el análisis solo se localizan los recursos discursivos y gramaticales que mostraban la presencia del mecanismo o sistema. Para ello, se recurrió nuevamente a un código de colores para diferenciar entre los distintos sistemas. A continuación, se muestra este código en la tabla 10:

MULTISEMIOSIS			
SIGNIFICADO TEXTUAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA		
	MEZCLA INTERSEMIÓTICA		
	ENLACES DISCURSIVOS		
	SUBTÍTULOS		
LEXICO-GRAMÁTICA	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA		
	ADOPCIÓN INTEREMIÓTICA		
	DEIXIS		
	ETIQUETAS		
SIGNIFICADO EXPERIENCIAL			
Estrato	Sistema		
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA		
	SUBTÍTULOS		
LEXICO-GRAMÁTICA	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD		
	LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN		
	METÁFORA SEMIÓTICA		
	ETIQUETAS		
SIGNIFICADO LÓGICO			
Estrato	Sistema		
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN		
LEXICO-GRAMÁTICA	LÓGICO-SEMÁNTICA		
	INTERDEPENDENCIA		
	INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD		
	METÁFORA SEMIÓTICA		

Tabla 10. Tabla empleada para el análisis de los sistemas de intersemiosis

5.3. Análisis epistemológico del análisis algebraico en el marco de su génesis[11]

5.3.1. EHE del análisis algebraico: Su contexto de significación

A continuación, se describe de manera sintética el contexto de significación del análisis algebraico de Viète y Descartes. Como se mencionó en el apartado 5.1.1, la estructura de la narrativa sigue las categorías de la estratificación del contexto de significación: *Contexto cultural*, *Contexto situacional* y *Contexto de la situación específica*. Particularmente, para agilizar la lectura presentamos las consideraciones principales del nivel más delicado del contexto de significación: el de la situación específica. Esto por el hecho de que es en este nivel en el que puede identificarse las características puntuales de la actividad matemática y los elementos que dan origen al análisis algebraico y las ecuaciones paramétricas. La descripción completa de los otros tres niveles del contexto de significación puede verse en el Anexo 12.1.

- **Contexto cultural:** Las producciones de Viète y Descartes no pueden entenderse fuera del *Renacimiento*. Esto porque como período histórico el Renacimiento fue una época singular en el desarrollo de la ciencia y del pensamiento moderno. Por ejemplo, ¿por qué razón Viète y Descartes, no mencionan como fuente de inspiración de sus métodos a la tradición matemática árabe? Y más aún, ¿por qué estaban tan preocupados por desarrollar un método universal y que permitiera resolver todos los problemas? La aportación del contexto cultural es justo la de demarcar que la *racionalidad contextualizada* de la época estaba *centrada en el desarrollo y renovación del método científico.* Esta racionalidad social incrustada en el pensamiento de ambos les indujo a elegir exclusivamente a las fuentes griegas como aquellas sobre las cuales debían erigir sus métodos. En este sentido, el contexto cultural los indujo a dos cosas: La primera, la renovación del método y la segunda, basarse exclusivamente en conocimientos griegos.
- **Contexto situacional:** Los científicos renacentistas eran hombres universales en cuanto a su profesión (Klein, 1968), pues estos, por presentar ventajas, como consecuencia de su capacidad erudita, eran contratados por reyes y príncipes para la realización de gran cantidad de actividades y tareas. Por ejemplo la construcción de puentes, máquinas para la guerra, arte, etc. Esto implicó que debían no solo tener conocimientos sobre disciplinas específicas, sino de una gran variedad; como las matemáticas, la astronomía, la geografía, la cartografía, la física, la arquitectura, la ingeniería, la mecánica, la anatomía, la óptica, entre otras más (Klein, 1968). Por lo tanto, en sus investigaciones científicas cada uno profundizó en estas disciplinas convirtiéndose en el interés

[11] Los resultados de este estudio se han reportado en López-Acosta y Montiel (2021, 2022).

científico de la época (Klein, 1968). De este modo, el objeto de estudio de ambos se va configurando y tomando texturas particulares dependiendo de los intereses y motivaciones personales dentro de más de una de estas ciencias y su relación con las matemáticas. El contexto situacional provee de una intencionalidad social más localizada al interior del contexto cultural, que deviene en personal al formar parte de este contexto y de su quehacer. Particularmente, el desarrollo de métodos matemáticos para la resolución de problemas. Ambos matemáticos, tenían intenciones de sistematizar los métodos geométricos para mejorar el estudio de otras disciplinas como la astronomía, la óptica, la filosofía, entre otras.

5.3.1.1. Contexto de la situación específica: El análisis algebraico, los problemas geométricos complejos y el surgimiento de la ecuación paramétrica

A continuación presentamos las principales consideraciones obtenidas en el EHE respecto al contexto de la situación específica en la cual se construye el análisis algebraico y, por ende, la ecuación paramétrica. En el Anexo 12.1.3.1. se presentan de manera detallada los elementos que permitieron identificar a la *renovación del análisis geométrico* como el contexto de la situación específica.

Si bien existió una separación en tiempo entre los trabajos más prominentes respecto la creación del nuevo método por parte de Viète y Descartes, ambos se embarcaron en un mismo proyecto, aunque con intenciones diferentes. Este proyecto implicó la renovación del *análisis geométrico griego*, cuya consecuencia fue la creación del *arte analítico* y la *mathesis universalis* por parte de Viète y Descartes, respectivamente, que en esencia son propuestas de una nueva ciencia en la que el álgebra simbólica cumpliría una función primordial para mejorar el método analítico.

Tanto Viète como Descartes de manera explícita o implícita aluden a los trabajos de Pappus y Theon, o bien, al análisis geométrico, sobre los cuales sus respectivos programas se edificaron.

> Hay una cierta manera de buscar la verdad en matemáticas que se dice que Platón descubrió primero. Theon lo llamó análisis, que definió como la asunción de lo que se busca como si se admitiera [y funcionara] a través de las consecuencias [de esa asunción] de lo que es cierto, en contraposición a la síntesis, que es la asunción de lo que [ya] se admite [y funciona] a través de las consecuencias[de esa asunción] para llegar a comprender lo que se busca (Viète, 1983, p. 11).

> Las largas cadenas de razonamientos, cada uno simple y fácil, que los geómetras emplean habitualmente para alcanzar sus pruebas más difíciles, me han dado motivos para suponer que todas las cosas que caen dentro del dominio del entendimiento humano se suceden de la misma manera, y que mientras uno deje de tomar algo por cierto que no es cierto y se apegue al orden

> correcto para deducir una cosa de la otra, no puede haber nada tan remoto que uno no pueda llegar a alcanzarlo, ni tan oculto que no pueda descubrirlo (Descartes, 2006, pp. 17-18).

En términos generales, siguiendo la concepción de Pappus en su tratado *Collectio* el *análisis geométrico griego* “era algo más que una herramienta heurística, [...] [e]ra una técnica matemática en sí misma, que definía un estilo matemático identificable de investigación y presentación” (Sefrin-Weiss, 2013, p. 3).

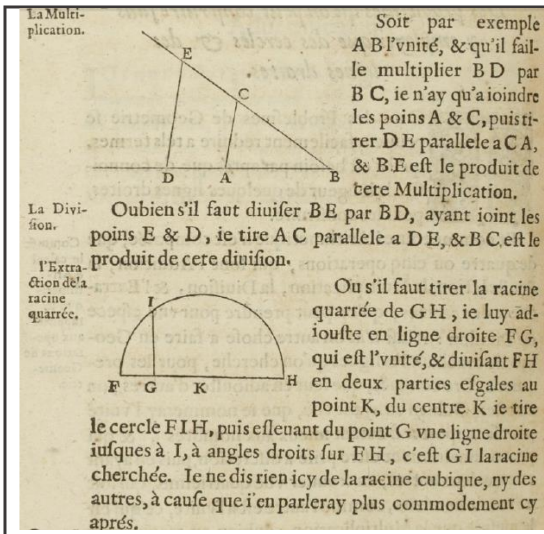
En términos estructurales, el método involucraba dos partes el *análisis* y la *síntesis* y era un método aplicable no solo a la resolución de problemas geométricos (llamado análisis problemático), sino a la demostración de teoremas geométricos (conocido como teórico). La estructura puede exponerse de la siguiente manera, de acuerdo con Sefrin-Weiss (2013, p. 5):

Etapa	Descripción
Suponga que el problema está resuelto*	
Análisis propiamente dicho: Apagoge/Epagoge	Emplea sistemáticamente estrategias de descomposición, reducción (a menudo deductivas) y de transformación (a través de construcciones auxiliares, o terminación de patrones), seguimiento hasta llegar a una situación/configuración que pueda controlar
Resolutio	Mostrar que la 'configuración final' deseada del *Apagoge* es alcanzable sin la suposición inicial *; determinar ' datos (término técnico: lo que se ' da ' en el sentido de ser constructible a partir de la información original, sin el análisis-asunción), y determinar las condiciones para la solvencia (diorismos)
Síntesis	Prueba, por lo general un *Apodeixis* clásico, por lo general a partir de una construcción (*Kataskeue*) que coincide, a menudo incluso reitera, los pasos de la *Resolutio*

Tabla 11. Esquema del método Análisis-Síntesis (adaptado de Sefrin-Weiss, 2013, p. 5)

Klein (1968) menciona que uno de los grandes descubrimientos de Viète fue la comparación que hizo entre el método algebraico de Diofanto y la estructura del análisis problemático. Viète identificó que, en la resolución de problemas algebraicos, la definición de la incógnita equivale a suponer que se conoce la solución del problema. Junto con lo anterior, la serie de deducciones para determinar una ecuación con la que se pueda obtener la solución del problema sería la parte correspondiente al *análisis* del método original. La resolución de la ecuación para determinar el valor de la incógnita y posibles soluciones se corresponde con la de *resolutio*. Finalmente, la comprobación de los valores como solución al problema planteado es la *síntesis*. Descartes, al igual que Viète identificó esta propiedad en el método Diofantino.

Como resultado de este nuevo paradigma de investigación en matemáticas creado por ambos, y con sus respectivas particularidades, el uso del álgebra transitó hacia el recurso simbólico que rige el quehacer científico, en tanto su función. Con esto se quiere decir que el lenguaje algebraico consolidó el recurso del simbolismo como un instrumento o herramienta para la construcción de fórmulas matemáticas o expresiones generales que permiten la visualización de relaciones de interés en la resolución de problemas matemáticos y de otras ciencias. Estas expresiones algebraicas no estaban en el mismo estatus que las de los algebristas precedentes a ellos, pues su potencial como herramientas visuales permitieron develar estructuras y relaciones de mayor complejidad que las presentes en los problemas típicamente aritméticos, resueltos por la tradición algebraica previa; incluyendo aquellas relaciones que no tenían aceptación para la época, como por ejemplo, las magnitudes con dimensión mayores de tres. Tanto Viète como Descartes trabajaron con ellas como si fueran aceptadas logrando descubrir conocimientos nuevos. Con este nuevo uso del simbolismo algebraico se permite generalizar la aritmetización no solo de las propiedades numéricas, sino también de las magnitudes geométricas (ver Figura 8), condensando la noción de número y con ello permitir una relación de tránsito entre la algebrización de las magnitudes geométricas y la construcción geométrica de las ecuaciones y sus soluciones.

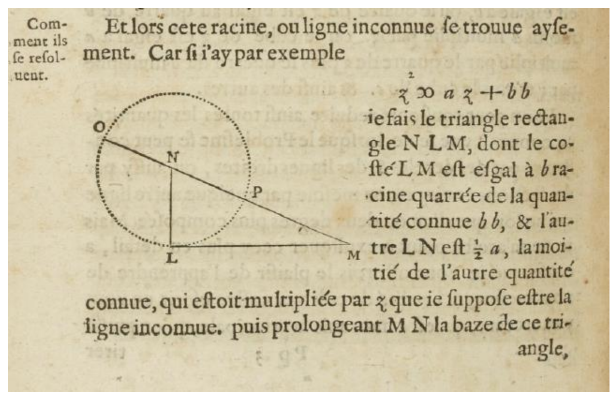


La Multiplication. Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion. Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée. Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Construcción de la multiplicación, la división y raíz cuadrada (Descartes, 1637, p. 298)



Comment ils ſe reſoluent. Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$z^{2} \infty\, a z + b b$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue $b b$, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2} a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

Construcción de la solución de la ecuación $z^2 = az + b^2$ (Descartes, 1637, p. 302)

Figura 8. Aritmetización de la geometría por Descartes

En este sentido, a diferencia de Viète y Descartes el álgebra, el simbolismo previo a ellos se configuraron como parte de una técnica de resolución de problemas en las que su función primordial era sintetizar los entes del discurso para una manipulación y explicación más económica y concisa del tratamiento de los problemas.

Ciertamente, entre Viète y Descartes, éste último llegó más lejos en el sentido de que logró resolver el obstáculo de la dimensión, con la invención ingeniosa de la unidad como referencia para la operatividad, entendida como una línea ya no atada a su condición de especie o tipo de número, y más aún de la representación figural que imperó por mucho tiempo. A pesar de no hacer alusión a este hecho, como ya se ha mencionado, Viète reflejaba en su programa a través del *genus* que definía sus especies, lo cual lo obligó a definir la ley de homogeneidad.

Quizás el hecho de que Descartes se enfocara a los problemas de *Locus* le permitió identificar que las representaciones figurales como las que mostró en las *Regulae ad directionem ingenii* no resultaban ser pertinentes para definir una operatividad de segmentos, pues en este tipo de problemas lo esencial es la relación de segmentos, lo cual podría resultar difícil al tener una interpretación figural de las dimensiones.

La consideración más relevante que surge de la renovación del análisis geométrico es que en la necesidad de probar sus métodos, ambos intentaron resolver problemas con cierto grado de complejidad, por ejemplo la trisección del ángulo (por Viète), el problema de Pappus (por Descartes) (ver Figuras 9 y 10). Estos problemas tienen la particularidad de que, contemplaban una cantidad considerable de magnitudes y relaciones que no necesariamente estaban explícitos en las imágenes, razón por la cual, consideramos que su sistema simbólico de representación también requirió de una sofisticación en tanto distinción de cantidades conocidas, desconocidas y operadores aritméticos. Algo que sus predecesores no pudieron construir por el paradigma algebraico en el que se encontraban. En este sentido, ambos llevaron más lejos la utilidad de la técnica algebraica y la convirtieron en una herramienta heurística incrustada dentro de un marco formal para investigar todo tipo de problemas, no únicamente los problemas prototípicos como ya se ha dicho.

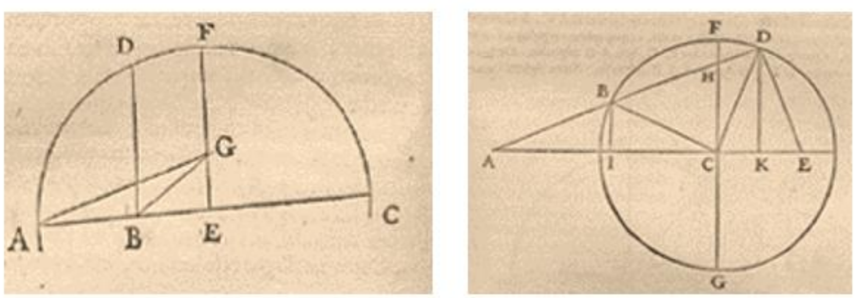


Figura 9. Problemas relativos a la trisección de ángulos en *Supplementum Geometriae* de Viète (Viète, 1646, p. 248 y p. 249 respectivamente)

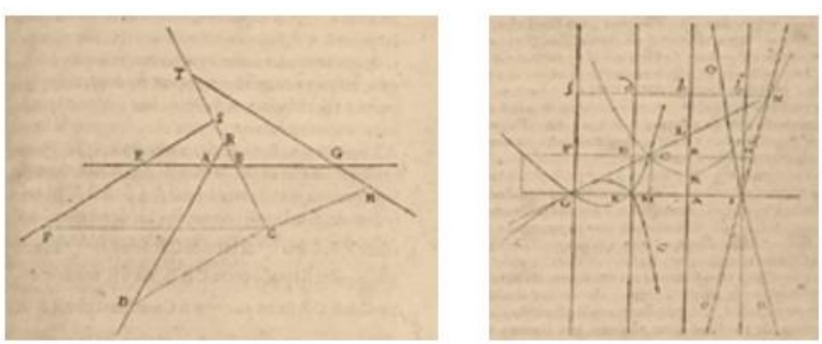


Figura 10. El problema de *Pappus* para cuatro y cinco líneas en *La Géométrie* (Descartes, 1637, p. 309 y p. 336 respectivamente)

Es así como en la reformulación del método de análisis geométrico ambos reconocieron que el álgebra permitiría elevar a un grado de perfección la forma de resolver problemas. Con el interés en la definición de un método general, los objetos de dicho método deben tener la misma particularidad, es decir, ser generales, por lo tanto, no podían limitarse a cantidades discretas o continuas, por lo tanto, les exigió de una unificación de ambos mundos: aritmética y geometría. En esta última (geometría) se considera están dos ingredientes necesarios para dar el paso del álgebra como sintetizadora del discurso hacia la herramienta de investigación, pues, por un lado, en la geometría, como menciona Stedall (2008), las cantidades son generales, por lo tanto, la cantidad algebraica requería este carácter. Y, por otro lado, el otro ingrediente complementario de lo anterior es, como ya hemos dicho, el tipo de problemas geométricos que se propusieron a resolver Viète y Descartes. En el apartado 5.3.2. se profundizará en este hecho para clarificar estas ideas.

No obstante, es importante destacar que dentro de la comunidad de historia de las matemáticas se argumenta que la geometría fue el detonante para la creación del análisis algebraico. Stedall (2011), por ejemplo, señala que la introducción de parámetros e incógnitas en el caso de Viète se debió a las exigencias de estos problemas, más que los problemas típicamente aritméticos resueltos con álgebra. En sus palabras:

> Viète le dio al álgebra una sorprendente nueva prioridad como herramienta para investigar y analizar los problemas y teoremas de la geometría clásica [...]. Esta nueva visión del alcance y el poder del álgebra le obligó a examinar la naturaleza y la construcción de ecuaciones mucho más cuidadosamente que cualquiera de sus predecesores (Stedall, 2011, p. 28, traducción propia).

Recientemente, Oaks (2018), se ha decantado a favor de esta idea mencionando que la noción de número en Viète equivale a la de una magnitud geométrica, enfatizando que Viète estaba construyendo un *álgebra para la geometría*.

Por lo tanto, como consecuencia de la naturaleza de la actividad matemática en la que ambos matemáticos se embarcaron se crea la ecuación paramétrica. Ecuación que no existía previamente a ellos, una ecuación que designa de manera sistemática operadores aritméticos y cantidades conocidas y desconocidas. Es así cómo, el producto más relevante del análisis algebraico como método entonces es la construcción de la ecuación paramétrica en el contexto de la *algebrización de la geometría*.

Cabe también destacar que la proporción jugó un rol esencial en la culminación del proyecto del análisis algebraico, toda vez que permitió enlazar de manera muy bien articulada la aritmética y la geometría. Esto debido a que dado que resulta ser una herramienta fundamental de la investigación geométrica, permitió articularse con la noción de equivalencia o de igualdad aritmética y, por lo tanto, con la ecuación algebraica. Considérese cómo Viète, en este sentido, en *De Recognitione et Emendatione Aequationum Tractatus Duo*, vincula diferentes tipos de ecuaciones de grado incluso mayor a tres y cuatro con proporciones. Así como su afirmación: "una proporción es aquella de la que se compone una ecuación y una ecuación en la que se resuelve una proporción" (Viète, 1983, p. 2).

Este papel crucial de la proporción quedará también claro en el análisis de la resolución de ciertos problemas de Viète y Descartes en el siguiente apartado.

5.3.2. Análisis de la actividad algebraica de Viète y Descartes

Para el análisis de la actividad algebraica de Viéte y Descartes como se mencionó en el método se realiza en dos partes: la primera consiste en el análisis descriptivo y la segunda en el análisis cualitativo. Al finalizar el análisis de los análisis descriptivo y cualitativo se presenta en el apartado 5.3.3 la Tabla 14 en la que se presenta de manera sintética las características generales de la actividad algebraica en todos los algebristas para dar cuenta de las diferencias en tanto la algebrización previa a Viète y Descartes y la de estos dos.

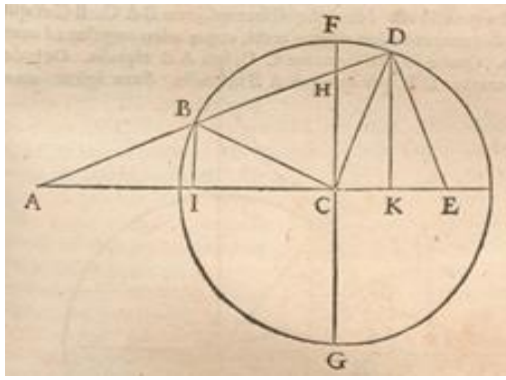
5.3.2.1. Problema 1 de Viète

Si hay dos triángulos isósceles y los lados de uno son iguales a los del otro y el ángulo de la base del segundo es igual a tres veces el ángulo base del primero, el cubo de la base del primero y el cuadrado del lado común es igual al producto de la base del segundo y el cuadrado del cuadrado del mismo lado.

Sea el primer triángulo ABC teniendo lados iguales AB y BC. Puesto que el segundo triángulo es también isósceles y tanto los ángulos base de este segundo triángulo es tres veces el ángulo BAC o BCA como es necesariamente menos que un tercio de un ángulo recto y el ángulo ABC es mayor que un ángulo recto. Sea AB y AC extendidos. De C a AB extendido, dibuja CD igual a AB. Después de D a AC extiende y dibuja DE igual también a AB. Así que hay dos triángulos isósceles, ABC y CDE. Pero CD y DE, los lados del segundo triángulo son iguales a AB y BC, los lados iguales del primer triángulo.

Más aún, tanto como los ángulos BAC y BCA es una parte de dos ángulos rectos, así el ángulo ABC [es igual a] dos ángulos rectos menos esas dos partes. El ángulo ADC es igual a este ángulo exterior, puesto que los ángulos DBC y CDB son iguales debido a la igualdad de los lados CD y CB. El ángulo exterior al ángulo DCA, más aún, es la suma de los pangulos ADC y DAC. Entonces el segundo triángulo es CDE, que es isósceles y tiene lados iguales a los lados e ABC, el primer triángulo, y tanto de sus ángulos base, denominados DCE o DEC, es tres veces el ángulo BAC o BCA. Digo entonces que *cubum de AC minus solido triplo de AC y cuadrato de AB, aequari solido de CE y cuadrato de DC o AB.*

$$AC^3 - 3(AC \times AB^2) = (CE \times CD^2) \text{ o } (CE \times AB^2)$$



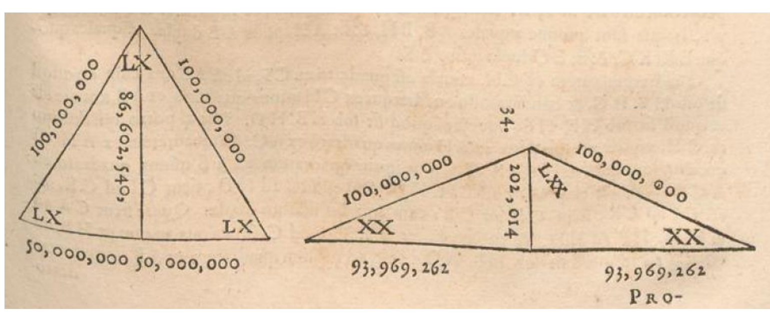
Sea un círculo descrito a la distancia CB o CD desde C, su centro, y que el diámetro FCG corte AE perpendicularmente en C y AD en H. Sean dibujados BI y DK paralelos a FG, cortando AE perpendicularmente en I y K. Por lo tanto, AI y IC son igualesy AC es el doble de AI. Entonces también AB y BH son iguales, haciendo AH el doble de AB. Así como CK y KE son iguales, haciendo CE el doble de CK. Más aún, CG^2 (que es, AB^2) es igual a $CH^2 + (FH \times HG)$ y, por conversión, $AB^2 - CH^2$ es igual a $FH \times HG$ (que es, a $BH \times HD$). Entonces, CH^2 es igual a $AH^2 - AC^2$ y AH^2 es $4AB^2$. Por lo tanto, $AC^2 - 3AB^2 = BH \times HD$. Pero $BH : HD = IC : CK$

Y $IC : CK = AC : CE$, Puesto que los términos posteriores son el doble de los primeros. Entonces $AC : CE = BH : HD$. Y consecuentemente AC es a CE como BH^2 (es decir, AB^2) es a $BH \times HD$—es decir, a $AC^2 - 3AB^2$. Por lo tanto, resolviendo la proporción, $AC^3 - 3(AC \times AB^2) = CE \times AB^2$, Como era de demostrarse.

Asumiendo que Z es cualquier lado del triángulo equilátero y que, entonces, cada uno de los ángulos es un tercio de los dos ángulos rectos, $A^3 - 3Z^2A = Z^3$, Por lo tanto haciendo A la base de un triángulo isósceles el ángulo base del cual es un noveno de dos ángulos rectos.

Que sea Z 1 y A x. $x^3 - 3x = 1$.

Si Z es 100,000,000, estos son los triángulos:



5.3.2.1.1 Análisis Descriptivo

Como se muestra en el apartado 6.1.3.3 El proyecto de Viète se enmarca en la creación del análisis algebraico. Este tipo de análisis es un método general para la resolución de problemas de tipo aritmético y geométrico mediante la herramienta del simbolismo algebraico. Por lo tanto, el tipo de tareas que se identifican en Viète son tanto aritméticas como geométricas (como este caso). Esto conlleva una ampliación respecto a la noción de número, pues al aplicarse tanto a la geometría y a la aritmética el significado involucra lo discreto y continuo.

El problema que se encuentra resolviendo consiste en la demostración de una propiedad que se cumple cuando dos triángulos cumplen determinadas propiedades. Estas propiedades son que ambos son isósceles y que la medida de los ángulos de la base de uno de ellos es un tercio de la medida de los ángulos del otro, además los lados iguales de ambos triángulos son iguales. Lo que Viète demuestra es que con estas relaciones entre los dos triángulos se cumple, en términos de una ecuación, la siguiente relación: $x^3 - 3z^2x = z^3$, donde x representa la base del triángulo cuyos ángulos base tienen la medida de un tercio de las medidas del otro triángulo y z representa la medida de los lados iguales a los dos triángulos que son conocidos. En notación de Viète la ecuación se escribe de la siguiente forma: $A\ cubus\ minus\ Z\ quadrato\ ter\ in\ A, aequatur\ Z\ cubo$, que por conveniencia la denotaremos como aparece en Viète (1983) en su traducción: $A^3 - 3Z^2A = Z^3$. El proceso de solución y su descripción como se puede notar coinciden con las demostraciones geométricas. Aquí el procedimiento:

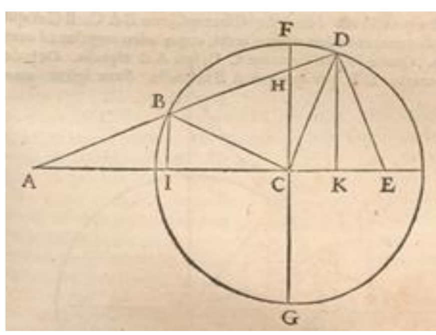
1. Establece las condiciones que deben cumplirse para poder establecer cuál será la relación geométrica que desea demostrar. De hecho, la relación que menciona al inicio no es exactamente igual a la relación planteada por la ecuación, pues en esta primera se presentan los segmentos específicos:

$cubum\ de\ AC\ minus\ solido\ triplo\ de\ AC\ y\ cuadrato\ de\ AB, aequari\ solido\ de\ CE\ y\ cuadrato\ de\ DC\ o\ AB$

Que se puede representar como se hace en Viète (1983):

$$AC^3 - 3(AC \times AB^2) = (CE \times CD^2) \text{ o } (CE \times AB^2) \text{ (*)}$$

Una vez indicada la relación se muestra la siguiente imagen:



Aunque con lo descrito en el texto original, previo a esta imagen, coincidiría más con la siguiente imagen:

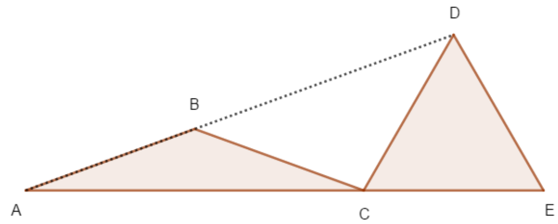


Figura 11. Construcción inicial de Viète de los triángulos en el Problema 1

Puesto que hasta después de presentar la relación a demostrar señala la construcción de un círculo.

2. Posteriormente, después de establecer la relación (*) a demostrar, inicia un proceso de construcción en el que va construyendo nuevos elementos geométricos como el círculo, un diámetro FCG perpendicular al segmento AE que lo corta, así como al segmento AD construyendo nuevos segmentos FH, HC, CG y la intersección H. Se dibujan los segmentos BI y DK siendo paralelos al diámetro FCG, construyendo así las intersecciones I y K, por lo cual la imagen correspondiente después de este proceso coincide con la presentada en el texto:

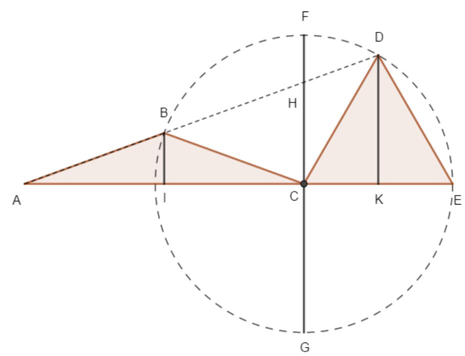


Figura 12. Construcciones auxiliares que realiza Viète para resolver el Problema 1

3. Con base en la imagen ahora se inicia el proceso de establecer las proporciones necesarias para construir la relación a demostrar. Las primeras relaciones son que $AC = 2AI$ y que $CE = 2CK$, las cuales por construcción se deducen. También que $AB = BH$, la cual no explica por qué, pero que se puede deducir considerando que si se trazan dos rectas perpendiculares a AC y a FG por los puntos A y H respectivamente, así como una recta perpendicular a AC que pase por I, se puede deducir que se cumple que los triángulos azules BVH y BIA (en la Figura 13) son congruentes, por lo tanto $AB = BH$.

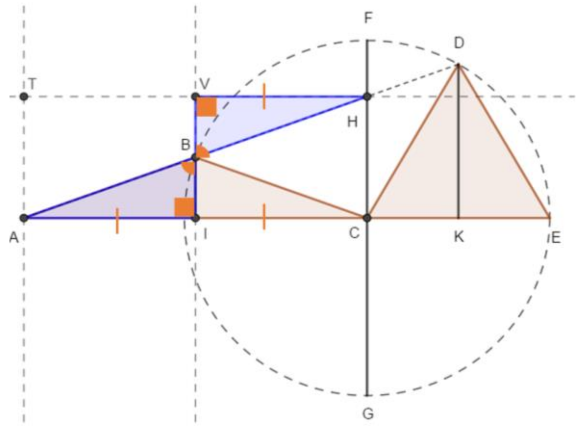


Figura 13. Primeras relaciones que establece Viète en el Problema 1

Con base en esta igualdad se dice que $AH = 2AB$.

4. Posteriormente Viète menciona otras relaciones que no justifica. Establece primero que $CG^2 = CH^2 + (FH \times HG)$, la cual puede deducirse si se considera primero que puesto que $FC = CG$, por ser ambos radios del diámetro FG. De ahí, considerando que $FC = FH + HC$ por estar conformado FC de estos dos segmentos, entonces $CG = FH + HC$, de donde al considerar sus cuadrados respectivos se tiene que $CG^2 = FH^2 + 2FH \cdot HC + HC^2$ (1).
   Por otro lado, sabiendo que también se cumple que $HG = 2HC + FH$ (véase la Figura 14), entonces también se cumple que $FH \times HG = 2HC \cdot FH + FH^2$ (2). Por lo tanto, sustituyendo (2) en (1) se obtiene la relación $CG^2 = FH \times HG + HC^2$. En donde a su vez, $CG^2 = AB^2$, puesto que $CG = BC$, por ser ambos radios y a su vez $AB = BC$ por construcción, por lo que por transitividad se cumple la relación.

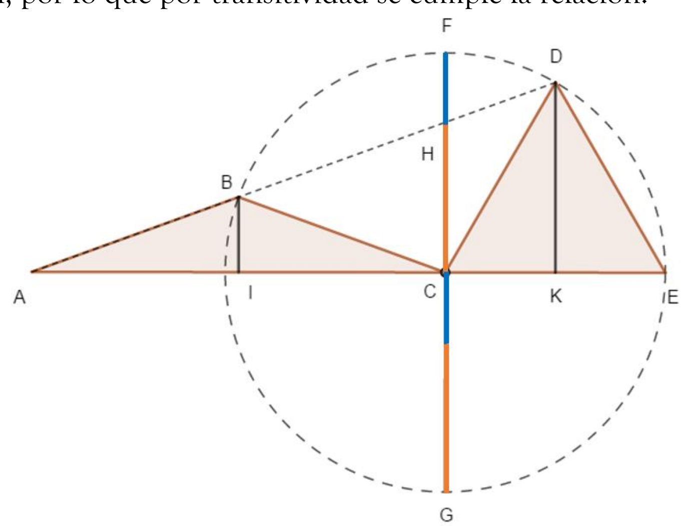


Figura 14. Relaciones respecto a un diámetro en el círculo del Problema 1

5. De esta igualdad aplicando la operación algebraica de conversión se obtiene que $AB^2 - HC^2 = FH \times HG$, de la cual Viète señala que $FH \times HG$ es igual a $BH \times HD$, relación que tampoco justifica, pero que se deduce de la relación entre la semejanza de los

triángulos HBG y HFD, por lo tanto se cumple que $\frac{BH}{FH} = \frac{HG}{HD}$, de donde sale la igualdad $FH \times HG = BH \times HD$ (véase Figura 15). Así se obtiene la ecuación $AB^2 - HC^2 = BH \times HD$.

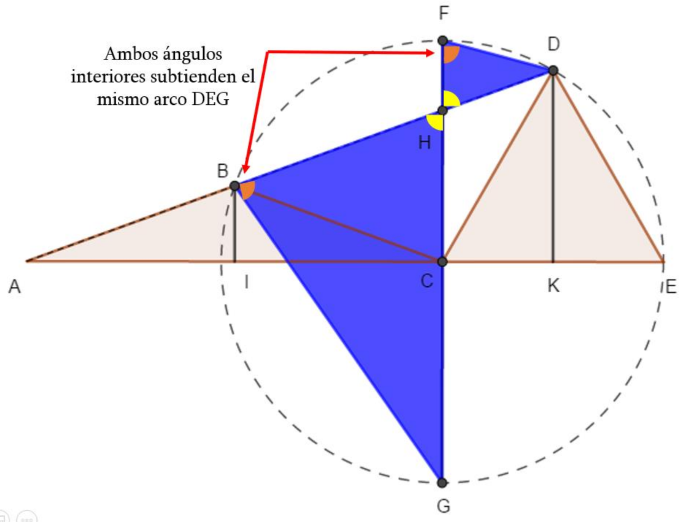


Figura 15. Relación entre dos triángulos en el Problema 1 de Viète

6. Posteriormente señala que se cumple que $CH^2 = AH^2 - AC^2$ (3), relación que tampoco justifica, pero se deduce por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo ACH. Por lo tanto, sustituyendo (3) en la ecuación $AB^2 - HC^2 = BH \times HD$, se obtiene $AB^2 - AH^2 + AC^2 = BH \times HD$ (4), de donde también se deduce que a partir de una de las relaciones iniciales ($AH = 2AB$) $AH^2 = 4AB^2$. Por lo tanto, sustituyendo el valor de AH^2en (4) se obtiene la ecuación $AC^2 - 3AB^2 = BH \times HD$ (5).
7. Luego establece otras dos relaciones: $\frac{BH}{HD} = \frac{IC}{CK}$ y $\frac{IC}{CK} = \frac{AC}{CE}$. Estas relaciones que tampoco justifica se deducen del Teorema de Tales aplicado a las rectas transversales AE y AD con los segmentos paralelos BI, CH, KD y uno que pasa por el punto E y que las cortan (véase Figura 16).

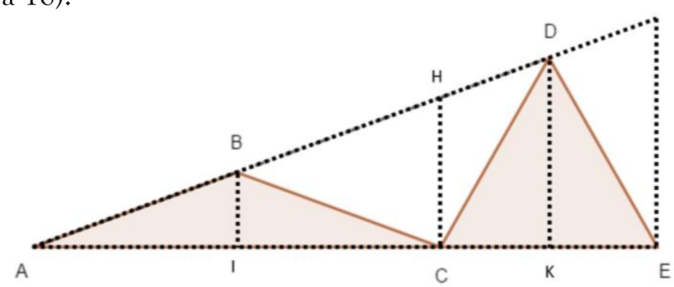


Figura 16. Relaciones relativas al Teorema de Tales entre los triángulos del Problema 1 de Viète

Por lo tanto, con base en estas dos proporciones se tiene que $\frac{BH}{HD} = \frac{AC}{CE}$. Y de aquí se obtiene que $BH \cdot CE = HD \cdot AC$, por lo que también se cumple que $BH^2 \cdot CE = BH \cdot HD \cdot AC$, multiplicando la igualdad por BH. Puesto que también se tienen las siguientes relaciones: $BH = AB$ y que por la ecuación (5) $AC^2 - 3AB^2 = BH \times HD$, entonces se tiene que $AB^2 \cdot CE = (AC^2 - 3AB^2) \cdot AC$, obteniendo así la ecuación final que se propuso a demostrar: $AB^2 \cdot CE = AC^3 - 3AB^2 \cdot AC$, o en el orden de Viète:

$$AC^3 - 3(AC \cdot AB^2) = CE \cdot AB^2$$

8. Para concluir con el problema, ahora Viète reescribe la ecuación final en términos de lo conocido y desconocido, es decir, incluyendo los parámetros e incógnitas, donde Z un parámetro o cantidad conocida se corresponde con AB, mientras que A es la incógnita que se corresponde con AC. Por lo tanto, en términos reducidos la ecuación paramétrica es

$$A^3 - 3Z^2A = Z^3$$

La Z^3 se obtiene porque $CE = AB$ pues, aunque en la imagen original no se aprecia que CE coincide con ser un radio, por la forma en la que se construye la figura resulta con esta característica, por lo que le triángulo CDE es equilátero.
9. Finalmente, como parte de la síntesis Viète asigna valores fijos para Z de manera que construye los dos triángulos resolviendo la ecuación cúbica para A, la base del triángulo ABC. Él propone primero Z=1, dejando la ecuación como $1C - 3N = 1$ ($x^3 - 3x = 1$) y luego $Z = 100000000$, valor con el cual se obtienen las medidas de los dos triángulos que muestra en el texto.

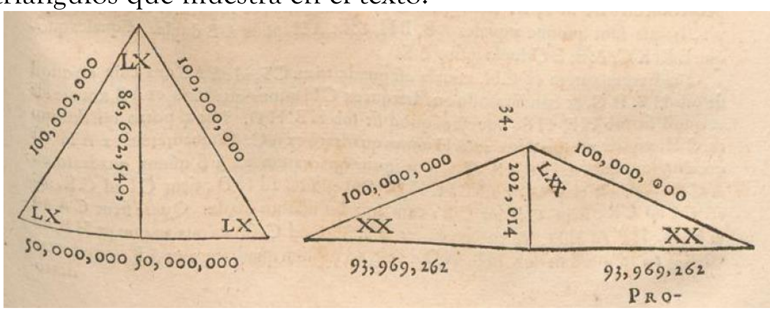


Figura 17. Triángulos resultantes en el proceso de síntesis en el Problema 1 de Viète

5.3.2.1.2. Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	Descripción
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	En primer lugar, Viète como se explica a profundidad en el apartado 6.1.3.3.1.1 describe el método del *arte analítico* compuesto de tres partes: la Zetética, la Porística y la Rética. Por lo tanto, cada parte de su método tiene una intención específica. La parte más relevante tal vez en términos algebraicos es la Zetética, puesto que es en esta etapa en la que el analista recurre a la heurística para establecer las relaciones que serán pertinentes para la construcción de la ecuación. Para ello se vale, en este ejemplo de todas las relaciones aritméticas y geométricas que puedan ser útiles para determinar la ecuación. Al final, se proponen valores específicos para los parámetros de la ecuación para construir las figuras geométricas correspondientes.

¿Para qué lo hace?	La actividad matemática que despliega Viète en este ejemplo, es sumamente vasta. Para empezar, hay que considerar que se encuentra resolviendo un problema geométrico, en el que prueba que por la forma en la que se construyeron las figuras se cumplen ciertas relaciones geométricas entre los lados y ángulos de los dos triángulos. Con base en estas relaciones lo que hace Viète es articular esas relaciones en forma de una ecuación algebraica con parámetros que le permita determinar las medidas de cualesquiera triángulos que cumplan estas relaciones geométricas. En este sentido, la ecuación paramétrica cumple la función de una fórmula pues para cualquier caso de Z se puede determinar los lados de los triángulos resultantes al resolver la ecuación para cada uno de esos casos.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	La justificación epistémica en Viète para su método en general si bien como se ha señalado por otros (Heeffer, 2014) está en una combinación entre la retórica, las nociones comunes, entre otras, lo cierto que en el caso de este problema la justificación epistémica es la correspondencia que el propio Viète destaca entre la proporción y la ecuación. En este sentido el método descrito en este problema resulta justificado por el hecho de que se puede transitar de una proporción a una ecuación, así como de otro tipo de relaciones de igualdad geométricas, como la de Pitágoras, o bien aritméticamente como relaciones entre cantidades que puedan definir igualdades de polinomios. Hay un sentido de considerar toda igualdad como susceptible de ser conceptualizada como ecuación.
¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	Nociones geométricas de semejanza y congruencia de triángulos, sobre el teorema de Pitágoras, ángulos interiores en la circunferencia, teorema de tales, la noción de proporción y sus operaciones, la de igualdad, la de ecuación, la de cuadrado de un binomio y nociones de construcción como paralelismo y perpendicularidad.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	El simbolismo que emplea Viète tiene la función de construir fórmulas generales para problemas con relaciones definidas. Con base en las ecuaciones paramétricas es posible asignar distintos valores a los parámetros para determinar soluciones específicas a esas condiciones. La función del simbolismo entonces es la de construir un recurso semiótico que permita articular de manera sintética y visual relaciones de interés tanto para el estudio de problemas, como para el descubrimiento de conocimientos vía el reconocimiento de patrones a través de la abstracción que permite el símbolo algebraico. Como ejemplo de este último aspecto se muestra el Problema 2 de Viète.

Tabla 12. Análisis cualitativo del problema 1 de Viète

5.3.2.5. Problema 2 de Descartes

Libro I De los problemas que se pueden construir sin emplear más que círculos y líneas rectas

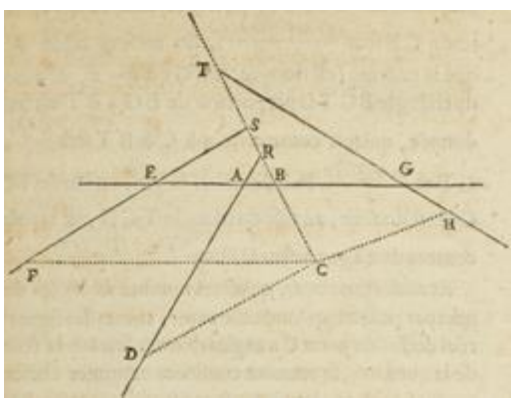
Sean AB, AD, EF, GH, etc. varias líneas dadas y debe encontrarse un punto, como C, del cual trazando otras líneas a las dadas, como CB, CD, CF y CH, de manera que los ángulos CBA, CDA, CFE, CHG, etc. sean dados, y que el producto de la multiplicación de una parte de estas líneas, sea igual al producto de la multiplicación de las otras; o bien que ellas tengan otras proporción dada, lo que ni hace, en modo alguno, más difícil el problema.

Cómo deben ponerse los términos para llegar a la ecuación en este ejemplo.

Primeramente yo supongo la cosa como ya hecha y para salir de la confusión de todas estas líneas, considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo AB y CB como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras. Sea designado x el segmento de la línea AB comprendido entre los puntos A y B; y CB sea designado y; y todas las demás líneas se prolonguen hasta que corten a estas dos también prolongadas, si es necesario y sin no le son paralelas; como se ve ellas cortan la línea AB en los puntos A, E, G y la línea BC en los puntos R, S, T.

Ahora bien, como todos los ángulos del triángulo ARB son dados, la proporción que hay entre los lados AB y BR es también dada, y la indico como de z a b; de manera que AB siendo x, RB serà $\frac{bx}{z}$ y la línea total CR será $y+\frac{bx}{z}$, pues el punto B cae entre C y R, que si cayera entre C y B sería $y-\frac{bx}{z}$ y si C cayera entre B y R, CR sería $-y+\frac{bx}{z}$.

Análogamente, los tres ángulos del triángulo DRC son dados y por consiguiente, también la proporción que hay entre los lados CR y CD, que indico como de z a c, de modo que CR siendo $y+\frac{bx}{z}$, CD será $\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{zz}$.



Después de esto, como las líneas AB, AD, y EF son dadas en posición, la distancia que hay entre los puntos A y E es también dada y si se le designa k se tendrá EB igual a $k+x$; que sería $k-x$ si el punto B cayera entre E y A; $-k+x$ se E cayera entre A y B. Y como los ángulos del triángulo ESB son todos dados, la proporción de BE a BS está también dada y designándola como z es a d se tiene que BS es $\frac{dk+dx}{z}$ y la línea total CS es $\frac{zy+dk+dx}{z}$; pero sería $\frac{zy-dk-dx}{z}$ si el punto S cayera entre B y C y sería $\frac{-zy+dk+dx}{z}$ si C cayera entre B y S. Además los tres ángulos del triángulo FSC son dados, y por lo tanto la proporción de CS a CF que es como z a e y la línea CF será $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$. Del mismo modo, AG, que designo l es dada y BG es $l-x$, pues en el triángulo BGT la proporción de BG a BT es también dada que es como z a g se tiene $CH=\frac{gzy+fgl-fgx}{zz}$.

Se ve así que cualquiera sea el número de líneas dadas, todas las líneas trazadas desde C, que forman ángulos dados, conforme al enunciado, se pueden siempre expresar, cada una por tres términos de los que uno está compuesto por la cantidad desconocida y multiplicada o dividida por alguna otra conocida, y la otra, de la cantidad desconocida x, también multiplicada o dividida por alguna otra conocida y la tercera, de una cantidad toda conocida. Se exceptúa el caso de que ellas sean paralelas, bien a la línea AB, en cuyo caso el término compuesto de la cantidad x será nulo; o bien a la línea CB, y en este caso el término compuesto de la cantidad y será nulo; lo cual está suficientemente claro para que no me detenga a explicarlo más. Y respecto a los signos "$+$" y "$-$" que se unen a estos términos, pueden ser cambiados de todas las maneras imaginables.

Además, se ve también que multiplicando varias de estas líneas la una por la otras, las cantidades x e y que se encuentran en el producto, no pueden tener cada una más que tantas dimensiones como líneas haya. De modo que ellas no tendrán nunca más de dos dimensiones cuando no se trate más que de la multiplicación de dos líneas; ni más de tres cuando no se trate más que del producto de tres; u así al infinito. [...]

Descartes (1947, pp. 79-80)

Continuación de la explicación del problema de Pappus dada en el libro precedente

Después de haber reducido todas las líneas curvas a ciertos géneros, me es fácil proseguir la demostración de la respuesta que he dado al problema de Pappus. Pues, habiendo primeramente mostrado que cuando no hay más que tres o cuatro rectas dadas, la ecuación que sirve para determinar los puntos buscados no llega más que al cuadrado, es evidente que la línea curva sobre la que se encuentran esos puntos es necesariamente alguna de las del primer género, a causa de que esta misma ecuación explica la relación que tienen todos los puntos de la línea del primer género con los de la línea recta. Y que cuando no hay más de 8 líneas rectas dadas, la ecuación no se eleva a más del cuadrado del cuadrado, y por consiguiente la línea buscada no puede ser más que del 2° género, o inferior. Y que cuando no hay más de 12 líneas rectas dadas, la ecuación no pasa del cuadrado del cubo y por consiguiente la línea buscada no es más que del 3° género, o inferior; y así las otras. Y lo mismo, como la posición de las líneas rectas dadas puede variar en todas las formas y por consiguiente hacer cambiar tanto las cantidades conocidas como los signos $+$ y $-$ de la ecuación, de todas las maneras imaginables, es evidente que no hay ninguna línea curva del primer género que no sea útil en este problema, cuando está puesto para 4 líneas rectas; ni ninguna del segundo que no sea útil cuando aquel está propuesto para 8 líneas; ni ninguna del tercero cuando aquel está propuesto en 12 y así las otras. De modo que no hay una línea curva susceptible de cálculo y que pueda ser admitida en Geometría, que no sea útil para algún número de líneas.

Solución de este problema cuando no está propuesto más que para tres o cuatro líneas

Pero es necesario que aquí, más particularmente, que yo determine y dé la manera de encontrar la línea buscada que sirve en cada caso cuando no hay más que 3 ó 4 líneas rectas dadas, y que se verá así cómo el primer género de líneas curvas no contiene otras que las tres secciones cónicas y el círculo.

Consideremos de nuevo las 4 líneas AB, AD, EF y GH dadas anteriormente y que deba hallarse otra línea sobre la que se encuentre una infinidad de puntos tales como el C, desde el cual, trazadas las 4 líneas CB, CD, CF, CH, con ángulos dados sobre las rectas dadas, resulte que CB multiplicada por CF produzca la suma igual a CD multiplicada por CH: es decir habiendo hecho

$$CB = y \qquad\qquad CD = \frac{czy+bcx}{zz}$$

$$CF = \frac{ezy + dek + dex}{zz}$$

$$\text{y } CH = \frac{gzy+fgl-fgx}{zz}$$

la ecuación es

$$yy = \frac{\left.\begin{matrix}-dekzz\\+cfglz\end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix}-dezzx\\-cfgzx\\+bcgzx\end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix}+bcfglx\\-bcfgxx\end{matrix}\right\}}{ezzz - cgzz}$$

Por lo menos suponiendo ez mayor que cg; pues si fuera menor deberán cambiarse todos los signos $+$ y $-$. Y si la cantidad y fuera nula, menor que cero que creo en esta ecuación, habiendo supuesto el punto C en el ángulo DAG, deberá suponérselo también en el ángulo DAE o EAR o RAG, cambiando los signos $+$ y $-$ según se requiera. Y si en todas estas posiciones el valor de y resulta nulo, el problema sería imposible. Pero supongámoslo posible y para abreviar los términos, en lugar de las cantidades $\frac{cfglz-dekzz}{ez^3-cgzz}$ escribamos $2m$, y en vez de $\frac{dezzx+cfgzx-bcgzx}{ez^3-cgzz}$ escribamos $\frac{2n}{z}$; tendremos así

$$yy = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$$

Cuya raíz es

$$y = m - \frac{(nx)}{z} + \sqrt{mn - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$$

Y si para abreviar, $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfg}{ez^3-cgzz}$ escribimos o y en vez de $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3-cgzz}$ escribimos $-\frac{p}{m}$, pues siendo todas las cantidades dadas, podemos designarlas como nos plazca, tenemos entonces

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$$

que debe ser la longitud de la línea BC, dejando AB o sea x indeterminada. Y es evidente que no estando el problema propuesto más que para tres o cuatro líneas se puede siempre tener tales términos, excepto que algunos de ellos puedan ser nulos, y que los signos $+$ y $-$ puedan ser cambiados de diversas maneras.

Después de esto hago KI igual y paralela a BA, de modo que ella corte de BC ka parte BK igual a m, por ser aquí $+m$; debiendo trazarse esta línea IK del otro lado si se hubiera tenido $-m$; y no la hubiera trazado si la cantidad hubiera sido nula; luego trazo IL de modo que la línea IK es a KL como z es a n; es decir que IK siendo x, KL es $\frac{n}{z}x$. Y por medios análogos, conozco la proporción que hay entre KL e IL que es como entre n y a y como KL es $\frac{n}{z}x$, IL es $\frac{a}{z}x$. Con esto hago que el punto K esté entre L y C pues es $-\frac{n}{z}x$; en cambio L estará entre K y C si se hubiera tenido $+\frac{n}{z}x$; y no habría línea IL si $\frac{n}{z}x$ hubiera sido nula.

Hecho esto, no queda para la línea LC más que estos términos:

$$LC = \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$$

Donde veo que si fueran nulos, ese punto C se econtraría en la línea recta IL; y si fueran tales que se pudiera sacar la raíz, es decir, que estando mm y $\frac{p}{m}xx$ marcados con un mismo signo $+$, oo fuese igual a $4pm$, o bien que los términos mn y ox, ó ox y $\frac{p}{m}xx$ fuesen nulos, este punto C se encontraría en otra línea recta que no sería más difícil de encontrar que IL. Pero cuando eso no ocurre, este punto C está siempre sobre una de las tres secciones cónicas, o en un círculo, uno de cuyos diámetros está en la línea IL y la línea LC es una de las que corresponden a este diámetro; o por el contrario LC es paralela al diámetro del cual aquella que está en la línea IL le corresponde; es decir que si el término $\frac{p}{m}xx$ es nulo, esa sección cónica es una *parábola*; y si está marcado por el signo $+$, es una *hipérbola* y, en fin, si está marcado por el signo $-$ es una *elipse*; excepto solamente que la cantidad aam sea igual a pzz y que el ángulo ILC sea recto, en cuyo caso se tiene un círculo en lugar de una elipse. [...]

5.3.2.5.1. Análisis Descriptivo

Como se muestra en el apartado 6.1.3.3.2.4 este problema es el que de acuerdo con historiadores como Sasaki (2003) y Boss (2001) es el que permitió a Descartes dar el salto hacia la nueva álgebra de los parámetros que tenía como base la noción de unidad en tanto línea, es decir, una unidad que fungía como la base de una aritmetización de la geometría. En este sentido le permitió librarse de los inconvenientes de la dimensión anclada a la dimensionalidad geométrica que tanto criticaba en sus trabajos filosóficos previos al *Discours de la méthode*.

El problema de Pappus es un problema de Locus que se encontraba en el libro XVII de *La Collection* de Pappus, catalogado como uno de los problemas famosos por no haber sido resuelto en términos generales por los geómetras griegos de la antigüedad como Euclides y Apollonio. Descartes retoma el problema en 1628 por un reto propuesto por el matemático Gollius para que pudiera probar la eficacia de su método del que tanto se vanagloriaba Descartes. Él plasma el esbozo general para determinar cualquier solución mostrando solo dos casos en *La Géométrie*. El primero corresponde al caso de cuatro rectas, y el segundo un caso particular para cinco rectas en el cual las cinco rectas son paralelas y perpendiculares.

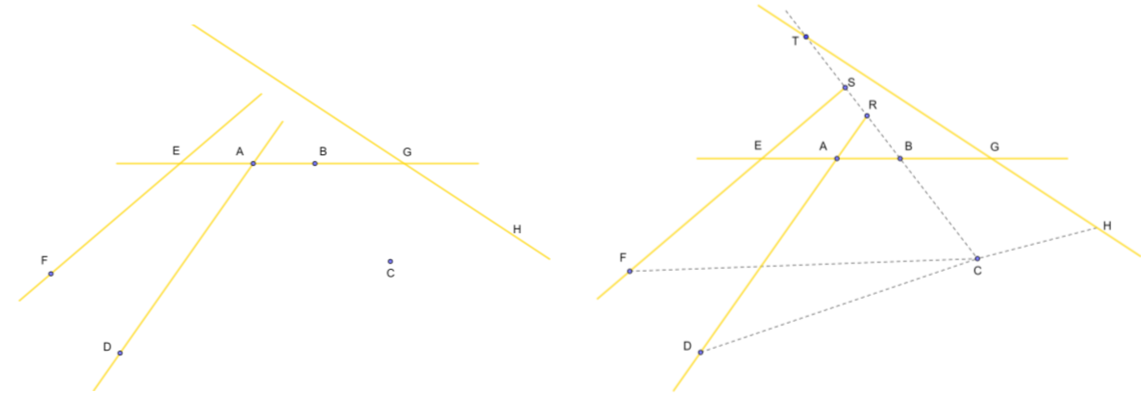
En general el problema de Pappus para Descartes representa uno de los aspectos más relevantes de *La Géométrie*. Es un problema del tipo *Locus*, o de lugar geométrico. Por un lado, este problema es significativo en tanto le permitió mostrar todo el potencial de su método analítico aplicado a problemas complejos de la época, sobre todo al considerar que ni los grandes geómetras griegos pudieron llegar tan lejos como él respecto a este problema. Por otro lado, también sirvió como articulador de su proyecto geométrico en el que se preocupaba por una reestructuración y categorización de las curvas como geométricas y mecánicas, puesto que las soluciones del problema a pesar de ser diversas dado que la construcción y ubicación de los elementos intervinientes puede generar distintos tipos de curvas que sin embargo, caen bajo la misma categoría a partir del estudio de la ecuación.

El problema de Pappus para cuatro líneas es resuelto progresivamente en los libros primero y segundo de *La Géométrie*. Esto porque en el primer libro se abordan los problemas de la geometría que pueden resolverse por medio del trazo de líneas y círculos, que son estudiados a partir del análisis de ecuaciones que se forman a partir de las relaciones establecidas por las longitudes de dos líneas que sirve como sistema de referencia para relacionar otras líneas en los problemas. De manera que, en el primer libro, en síntesis, Descartes intenta mostrar el método para determinar ecuaciones de las curvas a partir de la referencia de otras líneas con base en otras dos. De hecho, en este primer libro únicamente se trata este ejemplo de Pappus con el que finaliza el mismo, y que, sin embargo, no muestra la ecuación resultante. Es en el segundo libro destinado a discutir sobre la naturaleza de las curvas en donde termina la solución de este problema, en el cual muestra incluso un caso particular para cuando se tienen cinco líneas. Esto sucede porque en esta segunda parte de la solución del problema de cuatro líneas Descartes no solo aborda la parte analítica del problema sino también la sintética construyendo las soluciones, lo que le da pie para discutir sobre el género de estas soluciones.

El problema de Pappus para cuatro líneas consiste en determinar el lugar geométrico que cumplen los puntos que se encuentran en la intersección de cuatro líneas que son construidas a partir de otras cuatro rectas fijas formando ángulos fijos y que además cumplen la condición de que el producto de dos de ellas es igual al producto de las otras dos.

A continuación, se describe el procedimiento empleado por Descartes para la resolución del problema de Pappus.

1. El primer paso es describir el problema geométrico señalando los elementos que dan pie a la construcción. Como ya se mencionó Descartes menciona que se tienen cuatro líneas fijas AB, AD, EF y GH y que debe encontrarse un punto C del cual se tracen otras líneas CB , CD , CF y CH (las líneas punteadas) de manera que se formen ángulos predeterminados y fijos CBA, CDA, CFE, CHG con las cuatro líneas previas (véase la Figura 18). Esto implicará que se generarán las intersecciones R, S, T y A, E y G Además se debe cumplir que $CB \cdot CF = CD \cdot CH$.



Las primeras cuatro líneas fijas y el punto C

Las segundas líneas construidas desde C con ángulos específicos dados hacia las cuatro líneas iniciales

Figura 18. Las líneas en el problema de Pappus

2. El segundo paso para Descartes como indica su método es suponer que el problema está resuelto e iniciar a la designación de las cantidades conocidas y las dos desconocidas que servirán para establecer ecuaciones para cada una de las cuatro líneas de la relación $CB \cdot CF = CD \cdot CH$. Así, designa como x e y a los segmentos AB y CB respectivamente.
3. Posteriormente inicia con el establecimiento de las relaciones para obtener ecuaciones para cada línea en términos de x e y. De manera interesante Descartes solo recurre a una misma propiedad para determinar las ecuaciones para las líneas. Él menciona que por el hecho de que los ángulos CBA, CDA, CFE, CHG son dados, eso va a implicar que los seis triángulos ARB, DRC, ESB, FSC, BGT y TCH (véase Figura 19) tengan un parámetro z común, pues los cinco triángulos comparten un lado. De esta manera establece las relaciones siguientes:

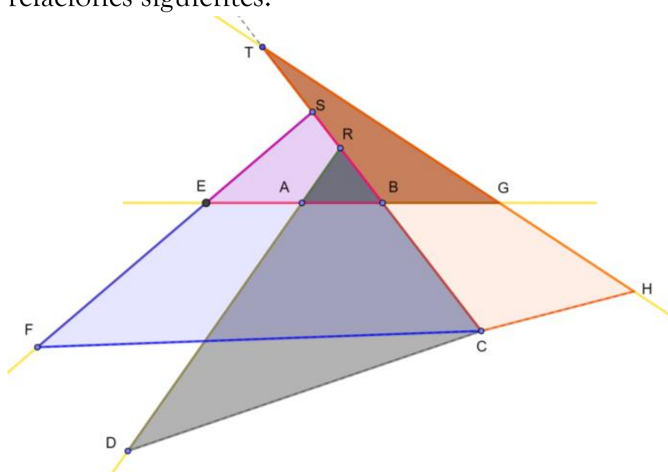


Figura 19. Triángulos relacionados por Descartes en el problema de Pappus

$\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$ en el triángulo ARB $\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}$ en el triángulo ESB $\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$ en el triángulo BGT

$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$ en el triángulo DRC $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}$ en el triángulo FSC $\frac{TC}{CH} = \frac{z}{g}$ en el triángulo TCH

Arboleda (2013) menciona que el uso de esta propiedad es porque Descartes sabe que se cumple que $\frac{AB}{BR} = \frac{senARB}{senBAR}$, puesto que los ángulos son dados. Otra forma de verificarla puede ser la siguiente:
Supongamos que se tienen los triángulos DHC, ABC, DEF y AFG, los cuales comparten el fragmento del lado DC de triángulo DHC y se les asigna una medida cualquiera a los segmentos AD, DC, CF como se muestra en la Figura 20. Existe una proporción de tal manera que $\frac{DC}{HC} = \frac{k}{a}$, así mismo si se determinan las razones análogas para todos los lados análogos a los demás triángulos se tendrían por ejemplo: $\frac{AC}{BC} = \frac{m+k}{b}$; $\frac{DF}{EF} = \frac{k+n}{c}$ y $\frac{AF}{FG} = \frac{m+k+n}{d}$. De manera que todas las razones de los lados análogos comparten la medida k del triángulo que comparten los otros tres.

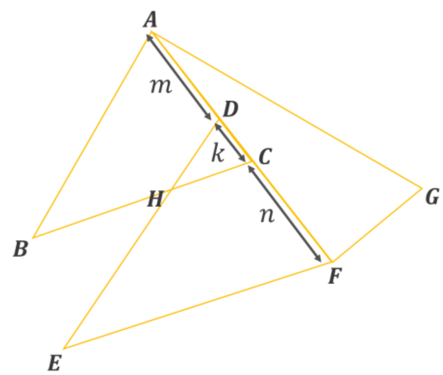


Figura 20. El parámetro z en el problema de Pappus

Así, cada proporción puede reescribirse como sigue:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{m+k}{b} = k\left(\frac{\frac{m}{k}+1}{b}\right) = \frac{k}{*}, \text{ donde } * \text{ es } \frac{1}{\left(\frac{\frac{m}{k}+1}{b}\right)}.$$

$$\frac{DF}{EF} = \frac{k+n}{c} = k\left(\frac{1+\frac{n}{k}}{c}\right) = \frac{k}{**}, \text{ donde } ** \text{ es } \frac{1}{\left(\frac{1+\frac{n}{k}}{c}\right)}.$$

$$\frac{AF}{FG} = \frac{m+k+n}{d} = k\left(\frac{\frac{m}{k}+1+\frac{n}{k}}{d}\right) = \frac{k}{***}, \text{ donde } *** \text{ es } \frac{1}{\left(\frac{\frac{m}{k}+1+\frac{n}{k}}{d}\right)}.$$

4. Con base en esta propiedad Descartes determina las ecuaciones para las cuatro líneas de la siguiente manera:

- De $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$ se obtiene que $BR = \frac{bx}{z}$, dado que $AB = x$.
- $CR = y + \frac{bx}{z}$, puesto que $CR = CB + BR$ y $CB = y$.
- Si $\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$ se obtiene que $CD = \frac{c \cdot CR}{z}$, y puesto que $CR = y + \frac{bx}{z}$. Entonces, $CD = \frac{\left[c\left(y+\frac{bx}{z}\right)\right]}{z}$, de donde se tiene que $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$.
- Puesto que las rectas están dadas en posición Descartes menciona que la distancia AE es dada, por lo cual le asigna otro parámetro k, implicando que el segmento $EB = k + x$, debido a que $EB = EA + AB$, y $AB = x$.
- Por lo tanto, si $\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}$, entonces $BS = \frac{BE \cdot d}{z} = \frac{(k+x)d}{z} = \frac{dk+dx}{z}$. Eso implica a su vez que $CS = \frac{dk+dx}{z} + y = \frac{zy+dk+dx}{z}$.
- Si $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}$, entonces $CF = \frac{e \cdot CS}{z} = \frac{\left[e\left(\frac{zy+dk+dx}{z}\right)\right]}{z} = \frac{ezy+dek+dex}{zz}$.
- Descartes recurre nuevamente a que, debido a las posiciones dadas de las líneas, el segmento AG es dado y lo denomina l, por lo que si $BG = AG - AB$, lo cual es lo mismo que $BG = l - x$, dado que $AB = x$.
- De manera que si $\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$, entonces $BT = \frac{f \cdot BG}{z}$, por lo que $BT = \frac{f(l-x)}{z} = \frac{fl-fx}{z}$. Por lo tanto, $CT = \frac{fl-fx}{z} + y = \frac{zy+fl-fx}{z}$, puesto que $CT = BT + BC$.
- Finalmente, si $\frac{TC}{CH} = \frac{z}{g}$, entonces $CH = \frac{g \cdot TC}{z} = \frac{\left[g \cdot \left(\frac{zy+fl-fx}{z}\right)\right]}{z} = \frac{gzy+fgl-fgx}{zz}$.

5. Con base en estas relaciones se efectúa la multiplicación $CB \cdot CF = CD \cdot CH$ —esto lo realiza en la continuación de la resolución en el segundo libro—lo cual da como resultado la ecuación:

$$yy = \frac{\left.\begin{matrix}-dekzz \\ +cfglz\end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix}-dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx\end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix}+bcfglx \\ -bcfgxx\end{matrix}\right\}}{ezzz - cgzz} \quad (1)$$

Que en términos anacrónicos correspondería a:

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)y + (bcgz - dez^2 - cfgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

El siguiente paso en la resolución es determinar la solución de la ecuación (1). Para ello, Descartes realiza el paso previo de simplificar la ecuación empleando otros parámetros para manipularla de manera más simple. En este sentido, designa las cantidades $\frac{cfglz-dekzz}{ez^3-cgzz}$ como $2m$, y $\frac{dezzx+cfgzx-bcgzx}{ez^3-cgzz}$ como $\frac{2n}{z}$. De modo que la ecuación (1) queda de la siguiente forma:

$$yy = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz} \quad (2)$$

6. Para resolver la ecuación (2) Descartes emplea el método de completar el cuadrado. De esta manera, (2) puede escribirse también de la siguiente manera:
$$yy = \left(2m - \frac{2n}{z}x\right)y + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz} \ (3)$$
Por lo tanto, completando el cuadrado se obtendría que:
$$\left[y - \frac{\left(2m - \frac{2n}{z}x\right)}{2}\right]^2 = \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz} + \left[\frac{\left(2m - \frac{2n}{z}x\right)}{2}\right]^2 \ (4)$$
Y puesto que $\frac{\left(2m-\frac{2n}{z}x\right)}{2} = m - \frac{nx}{z}$. Entonces, (4) se puede escribir como sigue:
$$\left[yy - \left(m - \frac{nx}{z}\right)\right]^2 = \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz} + \left[m - \frac{nx}{z}\right]^2$$
Lo cual es igual a:
$$\left[y - \left(m - \frac{nx}{z}\right)\right]^2 = \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz} + mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{z^2} \ (5)$$
Por lo tanto, resolviendo finalmente (5) se obtiene la solución:
$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{\frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz} + mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{z^2}}$$
7. Descartes vuelve a simplificar la expresión (5) estableciendo las siguientes sustituciones $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfg}{ez^3-cgzz}$ por o y $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3-cgzz}$ por $-\frac{p}{m}$. De manera que la expresión queda de la siguiente forma:
$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx} \ (6)$$
8. Descartes decide no analizar la ecuación (6) para determinar las soluciones en tanto los lugares geométricos que se obtienen con base en ésta, sino de otra ecuación más simple que no contenga los sumandos m y $-\frac{n}{z}x$ construyendo los segmentos x e y' para cumplir con esta condición. De esta manera construye los segmentos $KI = x$, $BK = m$ y $y' = LC$. Además, expresa que la construcción cumple que $\frac{IK}{KL} = \frac{z}{n}$.

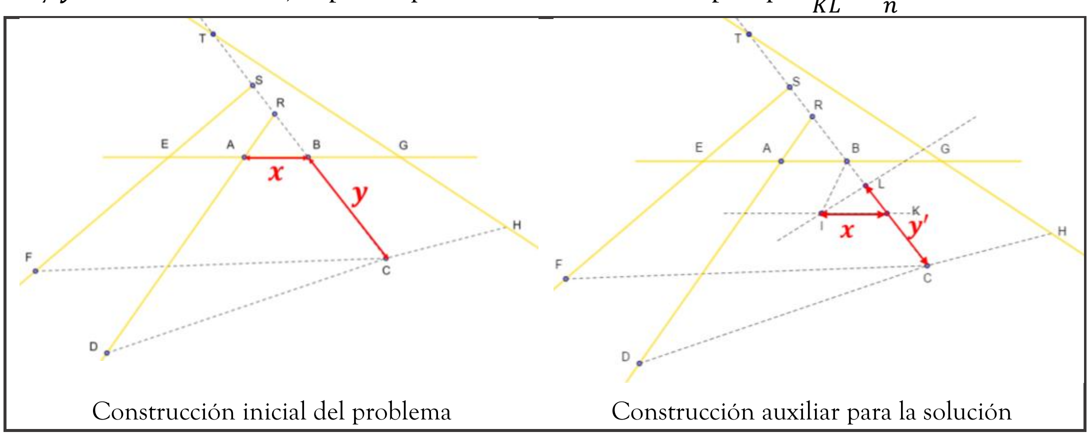


Figura 21. Construcción auxiliar de las líneas x e y en el problema de Pappus para reducir la ecuación solución

Por lo tanto, se cumple que $KL = \frac{n}{z}x$, dado que $KI = x$.

Asimismo, $KC = BC - BK$, que es lo mismo que $KC = y - m$. Por lo tanto:

$$KC = \left(m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}\right) - (m)$$

$$KC = -\frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$$

Y puesto que $y' = KL + KC$, entonces se tiene que:

$$y' = \left(\frac{n}{z}x\right) + \left(-\frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}\right)$$

Lo cual da como resultado:

$$y' = \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}\ (7)$$

Ecuación final que emplea Descartes para analizar los distintos casos dependientes de los signos de los parámetros y que definen los lugares geométricos sobre los que se encuentra C.

9. A partir de (7) entonces Descartes señala que el punto C estaría sobre una línea recta si se cumplen los siguientes tres casos:
   - *Caso 1.* Si se cumple que $mm > 0$, $\frac{p}{m}xx > 0$ y que $o^2 = 4pm$.

Así, verificando estas condiciones se tendría que:

$$y' = \sqrt{mm + \sqrt{4pm}x + \frac{p}{m}xx}$$

Lo cual sería lo mismo que

$$y' = \sqrt{\left(m + \sqrt{\frac{p}{m}}x\right)^2}\quad (8)$$

Puesto que

$$\left(m + \sqrt{\frac{p}{m}}x\right)^2 = mm + 2mx\sqrt{\frac{p}{m}} + \frac{p}{m}xx = mm + x\sqrt{\frac{4pmm}{m}} + \frac{p}{m}xx$$
$$= mm + \sqrt{4pm}x + \frac{p}{m}xx$$

Que por consiguiente (8) daría:

$$y' = m + \sqrt{\frac{p}{m}}x$$

Lo cual corresponde a la ecuación de una línea recta.

- *Caso 2.* Si $mm = 0$, $ox = 0$ y $\frac{p}{m} > 0$.

En este caso se tendría que $y' = \sqrt{\frac{p}{m}xx}$, lo cual es equivalente con

$$y' = \sqrt{\frac{p}{m}}x$$

- *Caso 3.* Si $ox = 0$ y $\frac{p}{m}xx = 0$.

En este caso se tendría que $y' = \sqrt{mm}$.

Cuando no ocurren los tres casos anteriores, entonces Descartes señala que el punto C se encontrará sobre alguna de las secciones cónicas y destaca los siguientes casos:

- *Caso 1.* Si $\frac{p}{m}xx = 0$, entonces

$$y' = \sqrt{mm + ox}$$

Lo cual es lo mismo que

$$y'^2 = mm + ox$$

Por lo tanto, C estaría sobre una parábola.

- *Caso 2.* Si $\frac{p}{m}xx > 0$, entonces

$$y' = \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$$

Por lo que elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación se obtiene que

$$y'^2 = mm + ox + \frac{p}{m}xx$$

lo cual es igual a

$$y'^2 - mm - ox - \frac{p}{m}xx = 0$$

Que dividiendo todo por $\frac{p}{m}$ y completando el cuadrado en y , se tiene que

$$\frac{(y' - 0)^2}{\frac{p}{m}} - x^2 - \frac{0}{\frac{p}{m}}x - \frac{mm}{\frac{p}{m}} = 0$$

Que a su vez es igual a

$$\frac{(y' - 0)^2}{\frac{p}{m}} - x^2 - \frac{om}{p}x - \frac{mmm}{p} = 0$$

Lo cual completando el cuadrado para x se tendría lo siguiente:

$$\frac{(y'-0)^2}{\frac{p}{m}}-\frac{\left(x+\frac{om}{2p}\right)^2}{1}-\frac{mmm}{p}+\frac{o^2m^2}{4p^2}=0$$

Que es igual a

$$\frac{(y'-0)^2}{\frac{p}{m}}-\frac{\left(x+\frac{om}{2p}\right)^2}{1}=\frac{mmm}{p}-\frac{o^2m^2}{4p^2}$$

Donde $\frac{mmm}{p}-\frac{o^2m^2}{4p^2}=\frac{4pmmm-o^2m^2}{4p^2}$

Y que dividiendo toda la ecuación por $\frac{4pmmm-o^2m^2}{4p^2}$, se obtiene que

$$\frac{\frac{(y'-0)^2}{\frac{p}{m}}}{\frac{4pmmm-o^2m^2}{4p^2}}-\frac{\frac{\left(x+\frac{om}{2p}\right)^2}{1}}{\frac{4pmmm-o^2m^2}{4p^2}}=1$$

Lo cual finalmente queda como:

$$\frac{(y'-0)^2}{\frac{4p^3}{4pm^4-o^2m^3}}-\frac{\left(x+\frac{om}{2p}\right)^2}{\frac{4p^2}{4pmmm-o^2m^2}}=1$$

Por lo tanto, el punto C estaría sobre una hipérbola.

- Caso 3. Si $\frac{p}{m}xx<0$, entonces de manera análoga al caso 2 se tendrá que el punto C estaría sobre una elipse dado que el sigo que une los dos cuadrados de x e y es positivo. Descartes exceptúa el caso para el que $aam=pzz$ y que el ángulo ILC sea recto, puesto que entonces el punto C estaría sobre una circunferencia.

10. Después de establecer los casos para los cuales se obtienen cada uno de los lugares geométricos muestra en la parte sintética de la resolución cómo construir cada uno de los lugares geométricos finalizando así la resolución del problema de Pappus para cuatro líneas.

5.3.2.5.2. Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	Descripción
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	A diferencia de la actividad matemática desplegada por Descartes en el Problema 1, para este problema como puede verse la cantidad de requerimientos para resolver el problema de Pappus para cuatro líneas es vasto. Como parte del método analítico de Descartes, al igual que el ejemplo mencionado, establece relaciones de ciertas líneas respecto a otras dos que le sirven como un sistema de referencia para obtener una ecuación que describa una relación entre todas las líneas de interés. En términos más generales, el procedimiento descrito por Descartes consiste en la explicación de las propiedades geométricas y aritméticas principales del problema, lo cual lo llevará a la designación de las cantidades conocidas y desconocidas. Posteriormente, se realiza el establecimiento de las relaciones entre las líneas sobre las que se encuentra el punto de interés (C) y con base en esas relaciones construir una ecuación que articula la propiedad descrita en el problema, que en este caso es que se cumpla la igualdad entre el producto de la multiplicación de dos pares de líneas. Una vez determinada la ecuación, Descartes realiza dos procedimientos complejos. El primero consiste en la simplificación de la ecuación resultante por medio de una nueva designación de parámetros y, el segundo simplifica aún más la ecuación construyendo otras dos líneas, una igual a x y otra diferente a y (y') pero contenida en y que al relacionarlas con las demás en la ecuación previa se eliminan ciertos términos que permitirán posteriormente un análisis más simple de los lugares geométricos a partir de los distintos casos para los parámetros involucrados. Al final de la resolución Descartes muestra cómo construir los lugares geométricos resultantes. Para determinar las relaciones Descartes, como ya se ha abordado en el Problema 1 considera que una parte fundamental es construir un sistema concreto de designación de las cantidades conocidas y desconocidas que permita manipular las relaciones de la manera más simple posible. En este ejemplo es notable la relevancia que tiene este sistema de designación que es incluso recurrente, puesto que no solo en una etapa de la resolución Descartes designa e incluye nuevos parámetros específicos, con los cuales le es posible analizar de manera más simple las relaciones dadas, con base en los distintos valores que pueden tener los parámetros de la ecuación. Del mismo modo que en el Problema 1 una vez establecido este sistema lo siguiente es valerse de cualquier tipo de relación posible que involucre una igualdad que relacione las líneas o segmentos de interés para convertir las proporciones en ecuaciones.
¿Para qué se hace?	Con base en la ecuación (7) Descartes analiza distintos casos para identificar el tipo de lugar geométrico que se obtiene para cada uno y así mostrarlos explícitamente construyéndolos. Al igual que en el problema anterior, la intención es generar una ecuación que permita describir la familia de curvas posibles dadas las condiciones del problema y catalogarlas de acuerdo con ciertos criterios. Sin embargo, este aspecto no es explicado por Descartes. Es decir, ¿cómo a partir de las ecuaciones para cada condición de los parámetros de la ecuación le es posible reconocer el tipo de cónica? Consideramos que para este aspecto es necesario un análisis más detallado sobre los teoremas de Apollonio, los cuales son citados por Descartes posteriormente en las construcciones y que se asume son la fuente para establecer cómo determinar la cónica dada la ecuación, a pesar de que estas ecuaciones no eran abordadas como tales por Apollonio.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	La justificación epistémica en Descartes parece estar asociada al hecho de que cualquier proporción o relación de igualdad puede dar pie a una ecuación, al igual que Viète. Además de que el establecimiento de una ecuación puede describir relaciones que puedan traducirse en lugares geométricos, aunque no la explica en el tratado.
¿Qué nociones matemáticas se	Semejanza de triángulos, relaciones trigonométricas, proporciones, ecuación y operaciones sobre esta.

encuentran en juego?	
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	El simbolismo que emplea Descartes tiene la función de construir, al igual que Viète fórmulas generales para problemas con relaciones definidas, pero en el tenor de relaciones de dependencia. Con base en las ecuaciones paramétricas es posible como recurso visual determinar el género de las curvas basándose en el grado y componentes de la ecuación.

Tabla 13. Análisis cualitativo del problema 2 de Descartes

5.3.3. Características de la actividad algebraica general

La siguiente tabla condensa el análisis cualitativo de la actividad algebraica de todos los problemas analizados, de manera que con ella se pretende mostrar las diferencias más relevantes respecto a la actividad algebraica.

	ACTIVIDAD ALGEBRAICA					
Algebrista	¿Qué se hace?	¿Cómo se hace?	¿Para qué se hace?	¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	¿Qué papel juega el simbolismo matemático?
Babilonio	Descripción de un procedimiento	Las cantidades representan figuras que son reconfiguradas para formar un cuadrado	Demostración de un método para un tipo de relación específica.	Razonamiento figural. El procedimiento refleja transformaciones sobre figuras geométricas.	El cuadrado de un binomio como configuración geométrica. Números fraccionarios y enteros y su aritmética.	No hay uso de simbolismo
Diofanto	Descripción de la resolución de un problema prototípico	Designación de las cantidades desconocidas y equivaler expresiones y operar las cantidades que pertenezcan a la misma especie.	Demostración de un método para un tipo de relación específica.	Razonamiento instrumental del concepto de especie. Las especies de números en Diofanto innovan en el sentido de que siguen teniendo la función de pertenencia a "clases" de números (*éidos*), pero con la diferencia de que estas clases, definen una composición multiplicativa, lo cual permite establecer un sistema operativo con ellas para la resolución de equivalencias.	Números fraccionarios y enteros y su aritmética. El cuadrado de un binomio generalizado. El número es conceptualizado como una multitud de unidades.	Sintetizador del discurso y recurso visual para especificar la especie de las cantidades.

al-Khwârizmî	Descripción de un procedimiento para resolver un problema aplicando reglas predeterminadas, tanto para reducir las equivalencias como para la determinación de las cantidades desconocidas.	Designación de las cantidades desconocidas, equivaler expresiones y operar las cantidades que pertenezcan a la misma especie, así como aplicación de reglas normales.	Demostración de un método para un tipo de relación específica.	Razonamiento instrumental del concepto de especie y Razonamiento figural.	Números fraccionarios y enteros y su aritmética. Equivalencias entre expresiones y número como especie.	No hay uso de simbolismo
Cardano	Descripción de un método de resolución de una ecuación.	Operatividad sobre la ecuación y aplicación de reglas normales.	Demostración de un método para un tipo de relación específica.	Razonamiento instrumental del concepto de especie, Razonamiento figural aritmetizado y Razonamiento simbólico.	Ecuación, aritmética de polinomios y cuadrado de un binomio.	Sintetizador del discurso y recurso visual para facilitar la operatividad y comunicación.
Bombelli	Descripción de un método de resolución de una ecuación.	Operatividad sobre la ecuación.	Demostración de un método para un tipo de relación específica.	Razonamiento instrumental del concepto de especie, Razonamiento figural aritmetizado y Razonamiento simbólico.	Ecuación, aritmética de polinomios y cuadrado de un binomio.	Sintetizador del discurso y recurso visual para facilitar la operatividad y comunicación.
Buteo	Descripción de un método de resolución para tres ecuaciones con tres incógnitas.	Operatividad sobre la ecuación.	Demostración de un método para resolver un sistema de ecuaciones.	Razonamiento basado en el método de la falsa posición y Razonamiento simbólico	Ecuación y aritmética de ecuaciones.	Sintetizador del discurso y recurso visual para facilitar la operatividad.
Viète	Demostración de una proposición que establece una relación geométrica.	Determinación de cualquier tipo de relación de equivalencia para ser tratada como ecuación. Definición de un sistema de designación entre lo conocido y desconocido.	Determinar fórmulas matemáticas que representen la familia de soluciones.	Razonamiento simbólico. El método analítico algebraico se basa en la consideración de que cualquier relación de equivalencia puede ser conceptualizada como una ecuación, principalmente	Diferentes nociones geométricas, como semejanza de triángulos, Teoremas de Tales y Pitágoras, entre otras. La noción más relevante es la de ecuación paramétrica, con la cual se articulan de manera	Recurso visual que articula relaciones de interés, distinguiendo entre cantidades dadas por las condiciones del problema (parámetros) y las

				las proporciones, como el mismo Viète establece.	simbólica y generalizada, distintas relaciones del problema. Incluso la ecuación simbólica típica del álgebra cósica, pues se distinguen los dos tipos de ecuación en el texto de Viète.	que se desean determinar (raíces).
Descartes	Resolución de un problema geométrico.	Establecimiento explícito de un sistema de designación de lo conocido y desconocido. Determinación de cualquier tipo de relación de equivalencia para ser tratada como ecuación. Estas equivalencias deben definir una ecuación que represente la relación entre las líneas que permiten la construcción del punto de la curva de interés y dos líneas de referencia.	Determinar expresiones generales para representar una familia de curvas que permita clasificar a cada una de estas.	Razonamiento simbólico. El método analítico algebraico se basa en la consideración de que cualquier relación de equivalencia puede ser conceptualizada como una ecuación, principalmente las proporciones, al igual que como Viète. Asimismo, en Descartes por el tipo de interés matemático mostrado en *La Géométrie*, da muestra de un Razonamiento geométrico-algebraico en el que establece correspondencias directas entre la ecuación y el tipo de curva, sin embargo, este razonamiento no es explicitado del todo.	Diferentes nociones geométricas, como semejanza de triángulos y Teoremas de Tales. Al igual que Viète la noción más relevante es la de ecuación paramétrica, con la cual se articulan de manera simbólica y generalizada, las relaciones geométricas que definen los puntos de la curva de interés. Con base en esta Descartes determina el género de la curva.	Recurso visual que articula relaciones de interés, distinguiendo entre cantidades dadas por las condiciones del problema (parámetros) y las que se desean determinar (raíces).

Tabla 14. Síntesis del análisis cualitativo de la actividad algebraica

5.4 Análisis lingüístico de los textos originales

En este apartado mostramos el análisis de la dimensión lingüística de los textos originales. Como se justifica en las consideraciones metodológicas, se realizaron dos tipos de análisis, uno lexicogramatical y otro multisemiótico. Para cada uno de estos se usó un *corpus* diferente por los requerimientos de cada uno de los análisis. En el caso del análisis lexicogramatical, el resto de los textos de los algebristas previos a Viète y Descartes son presentados en el Anexo. 12.3.

5.4.1. Análisis gramatical de los textos de Viète y Descartes

A continuación, se presenta el análisis gramatical funcional de los textos elegidos de Viète y Descartes. Particularmente, el análisis de las metafunciones experiencial, lógica y textual.

5.4.1.1. Metafunción Experiencial

5.4.1.1.1 Texto de Viète

1. Si hay dos triángulos isósceles

Si	hay	dos triángulos isósceles
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**
Contingencia: Condición	Existencial	Existente

2. y los lados de uno ^DE LOS TRIÁNGULOS son iguales a los del otro ^TRIÁNGULO

y	los lados de uno ^DE LOS TRIÁNGULOS	son	iguales a los del otro ^TRIÁNGULO
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

3. y el ángulo de la base del segundo ^TRIÁNGULO es igual a tres veces el ángulo base del primero ^TRIÁNGULO,

y	el ángulo de la base del segundo ^TRIÁNGULO	es	igual a tres veces el ángulo base del primero ^TRIÁNGULO,
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

4. el cubo de la base del primero ^TRIÁNGULO y el cuadrado del lado común es igual al producto de la base del segundo ^TRIÁNGULO y el cuadrado del cuadrado del mismo lado.

El cubo de la base del primero ^TRIÁNGULO y el cuadrado del lado común	es	igual al producto de la base del segundo ^TRIÁNGULO y el cuadrado del cuadrado del mismo lado.
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

5. Sea el primer triángulo ABC

Sea	el primer triángulo ABC
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

6. teniendo ^EL TRIÁNGULO ABC lados iguales AB y BC.

Teniendo	^EL TRIÁNGULO ABC	lados iguales AB y BC.
Proceso	**Participante**	**Participante**
Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

7. Puesto que el segundo triángulo es también isósceles

Puesto que	el segundo triángulo	es	también	isósceles
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Circunstancia**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Manera	Atributo

8. y cualquiera de los ángulos base de este segundo triángulo es tres veces el ángulo BAC o BCA

y	cualquiera de los ángulos base de este segundo triángulo	es	tres veces el ángulo BAC o BCA
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

9. Y ^CUALQUIERA DE LOS ÁNGULOS BASE es necesariamente menos que un ángulo recto,

y	^CUALQUIERA DE LOS ÁNGULOS BASE	es	necesariamente menos que un ángulo recto,
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

10. entonces cualquiera de los ángulos BAC y BCA es menor que un tercio de un ángulo recto

entonces	cualquiera de los ángulos BAC y BCA	es	menor que un tercio de un ángulo recto
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

11. y el ángulo ABC es mayor que un ángulo recto.

Y	el ángulo ABC	es	mayor que un ángulo recto.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

12. Sea AB y AC extendidos.

Sea	AB y AC	extendidos.
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

13. De C a AB extendido, dibuja ^TÚ CD igual a AB.

De C a AB extendido,	dibuja	^TÚ	CD	igual a AB.
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
Locación: Espacio	Relacional: Atributivo	Atributor	Portador	Atributo

14. Después de D a AC extiende ^TÚ ^DE

Después	de D a AC	extiende	^TÚ	^DE
Conector	**Circunstancia**	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Atributo	Relacional: Atributivo	Atributor	Portador

15. y dibuja ^TÚ DE [[igual también a AB.]]

y	dibuja	^TÚ	DE	igual también a AB.
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
	Relacional: Atributivo	Atributor	Portador	Atributo

16. Así que hay dos triángulos isósceles, ABC y CDE.

Así que	hay	dos triángulos isósceles, ABC y CDE.
Conjunción	**Proceso**	**Participante**
	Existencial	Existente

17. Pero CD y DE, [[los lados del segundo triángulo]] son iguales a AB y BC, [[los lados iguales del primer triángulo.]]

Pero	CD y DE , [[los lados del segundo triángulo]]	son	iguales a AB y BC, [[los lados iguales del primer triángulo.]]
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

18. Más aún, tanto como cualquiera de los ángulos BAC y BCA es una parte de dos ángulos rectos,

Más aún,	tanto como	cualquiera de los ángulos BAC y BCA	es	una parte de dos ángulos rectos,
Conector	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Manera: Comparación	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

19. así el ángulo ABC es igual a dos ángulos rectos menos esas dos partes.

Así	el ángulo ABC	es	igual a dos ángulos rectos menos esas dos partes.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

20. El ángulo ADC es igual a éste ángulo $^{\wedge}ABC$ exterior,

El ángulo ADC	es	igual a éste ángulo $^{\wedge}ABC$ exterior,
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

21. puesto que los ángulos DBC y CDB son iguales debido a la igualdad de los lados CD y CB.

Puesto que	los ángulos DBC y CDB	son	iguales	debido a la igualdad de los lados CD y CB.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo	Causa: Razón

22. El ángulo exterior al ángulo DCA, más aún, es la suma de los ángulos ADC y DAC.

El ángulo exterior al ángulo DAC	<<, más aún, >>	es	la suma de los ángulos ADC y DAC.
Participante		**Proceso**	**Participante**
Identificado		Relacional: Identificativo	Identificador

23. Entonces el segundo triángulo es CDE, [[que es isósceles]]

Entonces	el segundo triángulo	es	CDE, [[que es isósceles]]
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

24. y $^{\wedge}CDE$ tiene lados iguales a los lados de ABC, [[el primer triángulo,]]

y	$^{\wedge}CDE$	tiene	lados iguales a los lados de ABC, [[el primer triángulo,]]
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

25. y cualquiera de sus ángulos base, [[denominados DCE o DEC,]] es tres veces el ángulo BAC o BCA.

Y	cualquiera de sus ángulos base, [[denominados DCE o DEC,]]	es	tres veces el ángulo BAC o BCA.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

26. Digo ^YO <<entonces>>

Digo	^YO	<<entonces>>
Proceso	**Participante**	
Verbal	Emisor	

27. que *cubum de AC minus solido triplo de AC y cuadrato de AB, aequari solido de CE y cuadrato de DC o AB*

que	*cubum de AC minus solido triplo de AC y cuadrato de AB,*	*aequari*	*solido de CE y cuadrato de DC o AB*
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: identificativo	Identificador

28. Sea un círculo [[[[descrito a la distancia CB o CD desde C, [[su centro,]]]]

Sea	un círculo [[[[descrito a la distancia CB o CD desde C, [[su centro,]]]]
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

29. y que el diámetro FCG corte AE perpendicularmente en C

y que	el diámetro FCG	corte	AE	perpendicularmente	en C
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**	**Circunstancia**
	Alcance	Material	Meta	Manera	Locación: Espacio

30. y ^CORTE AD en H.

Y	^CORTE	AD	en H
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**
	Material	Meta	Locación: Espacio

31. Sean dibujados [[BI y DK paralelos a FG,]]

Sean dibujados	BIy DK	paralelos a FG,
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
Relacional: Atributivo	Alcance	Manera: Cualidad

32. Cortando [[AE perpendicularmente en I y K.]]

cortando	AE	perpendicularmente	en I y K.
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Circunstancia**
Material	Alcance	Manera: Cualidad	Locación: Espacio

33. Por lo tanto, AI y IC son iguales

Por lo tanto,	AI y IC	son	iguales
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Circunstancia**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

34. y AC es el doble de AI.

Y	AC	es	el doble de AI.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

35. Entonces también AB y BH son iguales,

Entonces	también	AB y BH	son	iguales,
Conector	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Circunstancia**
	Extensión: Aditivo	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

36. haciendo AH el doble de AB.

Haciendo	AH	el doble de AB
Proceso	**Participante**	**Participante**
Relacional: Identificativo	Identificado	Identificador

37. Así como CK y KE son iguales,

Así como	CK y KE	son	iguales,
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Circunstancia**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

38. haciendo CE el doble de CK.

Haciendo	CE	el doble de CK
Proceso	**Participante**	**Participante**
Relacional: Identificativo	Portador	Atributo

39. Más aún, CG^2 [[(que es, AB^2)]] es igual a $CH^2 + (FH \times HG)$

Más aún,	CG^2 [[(que es, AB^2)]]	es	igual a $CH^2 + (FH \times HG)$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

40. y, por conversión, $AB^2 - CH^2$ es igual a $FH \times HG$ [[(que es, a $BH \times HD$).]]

y,	<< por conversión,>>	$AB^2 - CH^2$	es	igual a $FH \times HG$ [[(que es, a $BH \times HD$).]]
Conjunción	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Causa: Razón	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

41. Entonces, CH^2 es igual a $AH^2 - AC^2$

Entonces,	CH^2	es	igual a $AH^2 - AC^2$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Circunstancia**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

42. y AH^2 es $4AB^2$.

Y	AH^2	es	$4AB^2$
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

43. Por lo tanto $AC^2 - 3AB^2 = BH \times HD$.

Por lo tanto	$AC^2 - 3AB^2$	$=$	$BH \times HD$.
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

44. Pero $BH : HD = IC : CK$

Pero	$BH : HD$	$=$	$IC : CK$
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

45. Y $IC : CK = AC : CE$,

Y	$IC : CK$	$=$	$AC : CE$,
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

46. Puesto que los términos posteriores son el doble de los primeros.

Puesto que	los términos posteriores	son	el doble de los primeros.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

47. Entonces $AC : CE = BH : HD$

Entonces	$AC : CE$	$=$	$BH : HD$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

48. Y consecuentemente AC es a CE como BH^2 [[(es decir, AB^2)]] es a $BH \times HD$ [[–es decir, a $AC^2 - 3AB^2$.]]

Y consecuentemente	AC es a CE	como	BH^2 [[(es decir, AB^2)]] es a $BH \times HD$ [[–es decir, a $AC^2 - 3AB^2$.]]
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

49. Por lo tanto, resolviendo la proporción,

Por lo tanto,	resolviendo	la proporción,
Conector	**Proceso**	**Participante**
	Mental	Alcance

50. $AC^3 - 3(AC \times AB^2) = CE \times AB^2$,

$AC^3 - 3(AC \times AB^2)$	$=$	$CE \times AB^2$
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Identificativo	Atributo

51. Como era de demostrarse.

Como	era de demostrarse.
Circunstancia	**Proceso**
	Mental

52. Asumiendo ^YO

Asumiendo	^YO
Proceso	**Participante**
Mental	Perceptor

53. que Z es cualquier lado del triángulo equilátero

que	Z	es	cualquier lado del triángulo equilátero
Conecctor	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

54. y que, entonces, cada uno de los ángulos es un tercio de los dos ángulos rectos,

Y que,	<<entonces,>>	cada uno de los ángulos	es	un tercio de los dos ángulos rectos,
Conjunción		**Participante**	**Proceso**	**Participante**
		Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

55. $A^3 - 3Z^2A = Z^3$.

$A^3 - 3Z^2A$	$=$	Z^3
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Identificativo	Atributo

56. Por lo tanto haciendo A la base de un triángulo isósceles, [[el ángulo base del cual es un noveno de dos ángulos rectos.]]

Por lo tanto	haciendo	A	la base de un triángulo isósceles, [[el ángulo base del cual es un noveno de dos ángulos rectos.]]
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

57. Que sea Z 1

Que sea	Z	1
Proceso	**Participante**	**Participante**
Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

58. y ^SEA A x.

Y	^SEA	A	x
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

59. (Entonces) $x^3 - 3x = 1$.

(Entonces)	$x^3 - 3x$	$=$	1
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

60. Si Z es 100,000,000,

Si	Z	es	100,000,000,
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

61. estos son los triángulos:

Estos	son	los triángulos:
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

5.4.1.1.2 Texto de Descartes

1. Como si quisiera saber

Como si	^YO	quisiera saber
Conjunción	**Participante**	**Proceso**
	Perceptor	Mental

2. de qué género es la línea EC [[que imagino descrita por la intersección de la regla GL y la pieza CNKL,]]

de qué género	es	la línea EC [[que imagino descrita por la intersección de la regla GL y la pieza CNKL,]]
Participante	**Proceso**	**Circunstancia**
Atributo	Relacional: Atributivo	Portador

3. cuyo lado KN está prolongado indefinidamente hacia C,

cuyo lado KN	está prolongado	indefinidamente hacia C,
Participante	**Proceso**	**Circunstancia**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

4. y que moviéndose ^KN sobre el plano, en línea recta

y que	moviéndose	^KN	sobre el plano,	en línea recta
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**	**Circunstancia**
	Material	Meta	Locación: Espacio	Manera: Cualidad

5. –es decir de tal manera que su lado KL se encuentre siempre aplicado sobre alguna región de la línea BA [[prolongada de uno y otro lado–]]

–es decir	de tal manera que	su lado KL	se encuentre	siempre	aplicado sobre alguna región de la línea BA [[prolongada de uno y otro lado–]]
Conector	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Circunstancia**	**Circunstancia**
	Manera	Portador	Relacional: Atributivo	Frecuencia	Atributo

6. hace mover circularmente la regla GL alrededor del punto G,

hace mover	circularmente	la regla GL	alrededor del punto G,
Proceso	**Circunstancia**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Manera: Cualidad	Alcance	Locación: Espacio

7. por estar ella ^LA REGLA GL vinculada

por estar	ella ^LA REGLA GL	vinculada
Proceso	**Participante**	**Participante**
Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

8. de tal manera que ^LA REGLA pasa siempre por el punto L.

de tal manera que	^LA REGLA	pasa	siempre	por el punto L.
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Circunstancia**	**Circunstancia**
	Existente	Existencial	Manera: Cualidad	Locación: Espacio

9. ^YO Elijo una línea recta [[como AB]]

^YO	Elijo	una línea recta [[como AB]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Actor	Material	Alcance

10. para referir ^YO a sus diversos puntos ^DE AB todos los de la línea curva EC;

para	referir	^YO	a sus diversos puntos ^DE AB todos los de la línea curva EC;
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
Causa: Propósito	Verbal	Emisor	Asunto

11. y en esta línea ^YO AB elijo un punto, [[como el A,]]

y	en esta línea AB	^YO	elijo	un punto, [[como el A,]]
Conjunción	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Locación: Espacio	Actor	Material	Alcance

12. Para ^YO empezar por él el cálculo.

Para	^YO	empezar	por él	el cálculo
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**	**Circunstancia**	**Participante**
Causa: Propósito	Actor	Material	Locación: Espacio	Meta

13. Digo ^YO

Digo	^YO
Proceso	**Participante**
Verbal	Informe

14. que ^YO elijo éste o aquella

pues	^YO	elijo	éste o aquella
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Actor	Material	Alcance

15. porque soy libre de tomarlos como quiera:

porque	^YO	soy	libre de tomarlos como quiera:
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
Causa: Razón	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

16. pues aunque haya muchas maneras de elección

pues	aunque	haya	muchas maneras de elección
Conjunción	**Circunstancia**	**Proceso**	**Participante**
	Contingencia: Concesión	Existencial	Existente

17. para hacer ^YO la ecuación más corta y más fácil,

para	hacer	^YO	la ecuación	más corta y más fácil,
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
Causa: Propósito	Relacional: Atributivo	Atribuidor	Portador	Atributo

18. siempre, << cualquiera sea la manera [[como se los tome,]] >>

siempre,	<< cualquiera	sea	la manera [[como se los tome,]] >>
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
Manera: Cualidad	Atributo	Relacional: Atributivo	Portador

19. puede hacerse [[que la línea aparezca de un mismo género,]]

puede hacerse	[[que la línea aparezca de un mismo género,]]
Proceso	**Participante**
Material	Alcance

20. como es fácil [[demostrar.]]

Como	es	fácil	[[demostrar.]]
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
Manera: Medio	Relacional: Atributivo	Atributo	Portador

21. Después de esto, tomando un punto cualquiera de la curva, como el C,

Después de esto,	tomando	^YO	un punto cualquiera de la curva, como el C,
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Meta

22. sobre el cual supongo

sobre el cual	supongo
Circunstancia	**Proceso**
Locación: Espacio	Mental

23. que el instrumento [[que sirve para describirla]] está aplicado,

que	el instrumento [[que sirve para describirla]]	está	aplicado,
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

24. trazo por este punto C la línea CB paralela a la GA,

trazo	^YO	por este punto C	la línea CB	paralela a la GA,
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Locación: Espacio	Meta	Manera: Cualidad

25. y puesto que CB y BA son dos cantidades indeterminadas y desconocidas,

y	puesto que	CB y BA	son	dos cantidades indeterminadas y desconocidas,
Conjunción	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Causa: Razón	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

26. ^YO las designo a una y y a la otra x.

^YO	las designo	a una	y	y a la otra	x.
Participante	**Proceso**	**Participante**	**Participante**	**Participante**	**Participante**
Atributor	Relacional: Atributivo	Portador 1	Atributo 1	Portador 2	Atributo 2

27. Pero, para encontrar la relación de ambas,

Pero,	para	^YO	encontrar	la relación de ambas,
Conjunción	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Causa: Propósito	Perceptor	Mental	Fenómeno

28. considero también las cantidades conocidas [[que determinan el trazado de esa línea curva,]] tales como GA [[que denomino a;]] Kl, [[que denomino b]] y NL paralela a GA, [[que denomino c.]]

considero	también	^YO	las cantidades conocidas [[que determinan el trazado de esa línea curva,]] tales como GA [[que denomino a;]] Kl, [[que denomino b]] y NL paralela a GA, [[que denomino c.]]
Proceso	**Circunstancia**	**Participante**	**Participante**
Mental	Acompañamiento: Aditiva	Perceptor	Fenómeno

29. Luego digo:

Luego	digo:	^YO
Conjunción	**Proceso**	**Participante**
	Verbal	Emisor

30. como LN es a LK

como	LN	es a	LK
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
		Operativo	

31. o c ^ES a b,

o	c	^ES a	b
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
		Operativo	

32. así CB [[o sea y,]] es a BK [[que es por consiguiente $\frac{b}{c}y$;]]

así	CB [[o sea y,]]	es a	BK [[que es por consiguiente $\frac{b}{c}y$;]]
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
		Operativo	

33. y BL es $\frac{b}{c}y - b$;

y	BL	es	$\frac{b}{c}y - b$
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

34. y AL es $x + \frac{b}{c}y - b$.

Y	AL	es	$x + \frac{b}{c}y - b$
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

35. Además, como CB es a LB

Además,	como	CB	es a	LB
Conjunción	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Causa: Razón		Operativo	

36. y ^ES a $\frac{b}{c}y - b$,

o	y	^ES a	$\frac{b}{c}y - b$
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
		Operativo	

37. así a [[o sea GA]] es a LA [[o $x + \frac{b}{c}y - b$.]]

así	a [[o sea GA]]	es a	LA [[o $x + \frac{b}{c}y - b$.]]
Cunjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
		Operativo	

38. De manera que multiplicando la segunda ^a por la tercera ^$x + \frac{b}{c}y - b$

De manera que	multiplicando	la segunda ^a	por la tercera ^$x + \frac{b}{c}y - b$
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**
	Material	Alcance	Agente

39. se obtiene $\frac{ab}{c}y - ab$,

se obtiene	$\frac{ab}{c}y - ab$
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

40. ^$\frac{ab}{c}y - ab$ que es igual a $xy + \frac{b}{c}yy - by$,

^$\frac{ab}{c}y - ab$	que es	igual a $xy + \frac{b}{c}yy - by$,
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

41. ^ $xy + \frac{b}{c}yy - by$, que resulta multiplicando la primera^y por la última $x + \frac{b}{c}y - b$;

^ $xy + \frac{b}{c}yy - by$,	que resulta	multiplicando la primera^y por la última $x + \frac{b}{c}y - b$;
Participante	**Proceso**	**Circunstancia**
Existente	Existencial	Causa: Razón

42. y así que la ecuación [[que se debía encontrar]] es [[$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$,]]

y así que	la ecuación [[que se debía encontrar]]	es	[[$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$]]
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

43. En la cual se sabe

En la cual	se sabe
Circunstancia	**Proceso**
Locación: Espacio	Mental

44. que la línea EC es de primer género:

que	la línea EC	es	de primer género:
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

45. pues, en efecto, no es otra que una hipérbola.

Pues, en efecto,	^LA LÍNEA EC	no es	otra que una hipérbola.
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

5.4.1.2. Metafunción Lógica

5.4.1.2.1. Texto de Viète

α˜1 Si hay dos triángulos isósceles

2 y los lados de uno son iguales a los del otro

3 y el ángulo de la base del segundo es igual a tres veces el ángulo base del primero,

β el cubo de la base del primero y el cuadrado del lado común es igual al producto de la base del segundo y el cuadrado del cuadrado del mismo lado.

α Sea el primer triángulo ABC

β teniendo ^EL TRIÁNGULO ABC lados iguales AB y BC.

β˜1 Puesto que el segundo triángulo es también isósceles

2˜1 y cualquiera de los ángulos base de este segundo triángulo es tres veces el ángulo BAC o BCA

2 y ^CUALQUIERA DE LOS ÁNGULOS BASE es necesariamente menos que un ángulo recto,

α˜1 entonces cualquiera de los ángulos BAC y BCA es menor que un tercio de un ángulo recto

2 y el ángulo ABC es mayor que un ángulo recto.

Sea AB y AC extendidos.

De C a AB extendido, dibuja CD igual a AB.

1 Después de D a AC extiende

2 y dibuja DE igual también a AB.

Así que hay dos triángulos isósceles, ABC y CDE.

Pero CD y DE, [[los lados del segundo triángulo]] son iguales a AB y BC, [[los lados iguales del primer triángulo.]]

1 Más aún, tanto como cualquiera de los ángulos BAC y BCA es una parte de dos ángulos rectos,

2 así el ángulo ABC es igual a dos ángulos rectos menos esas dos partes.

β El ángulo ADC es igual a éste ángulo exterior,

α puesto que los ángulos DBC y CDB son iguales debido a la igualdad de los lados CD y CB.

El ángulo exterior al ángulo DCA, más aún, es la suma de los ángulos ADC y DAC.

1 Entonces el segundo triángulo es CDE, [[que es isósceles]]

2 y tiene lados iguales a los lados de ABC, [[el primer triángulo,]]

3 y cualquiera de sus ángulos base, [[denominados DCE o DEC,]] es tres veces el ángulo BAC o BCA.

α Digo entonces

β que $cubum\ de\ AC\ minus\ solido\ triplo\ de\ AC\ y\ cuadrato\ de\ AB, aequari\ solido\ de\ CE\ y\ cuadrato\ de\ DC\ o\ AB$

1 Sea un círculo [[[[descrito a la distancia CB o CD desde C, [[su centro,]]]]

2 y que el diámetro FCG corte AE perpendicularmente en C

3 y ^CORTE AD en H.

α Sean dibujados BI y DK paralelos a FG,

β cortando AE perpendicularmente en I y K.

1 Por lo tanto, AI y IC son iguales

2 y AC es el doble de AI.

α Entonces también AB y BH son iguales,

β haciendo AH el doble de AB.

α Así como CK y KE son iguales,

β haciendo CE el doble de CK.

1 Más aún, CG^2 [[(que es, AB^2)]] es igual a $CH^2 + (FH \times HG)$

2 y, por conversión, $AB^2 - CH^2$ es igual a $FH \times HG$ [[(que es, a $BH \times HD$).]]

1 Entonces, CH^2 es igual a $AH^2 - AC^2$

2 y AH^2 es $4AB^2$.

Por lo tanto $AC^2 - 3AB^2 = BH \times HD$.

Pero $BH: HD = IC: CK$

2˜α Y $IC: CK = AC: CE$,

β Puesto que los términos posteriores son el doble de los primeros.

1 Entonces $AC: CE = BH: HD$

2 Y consecuentemente AC es a CE como BH^2 (es decir, AB^2) es a $BH \times HD$—es decir, a $AC^2 - 3AB^2$.

α Por lo tanto, resolviendo la proporción,

β˜α $AC^3 - 3(AC \times AB^2) = CE \times AB^2$,

β Como era de demostrarse.

α˜ α Asumiendo ^YO

β˜1 que Z es cualquier lado del triángulo equilátero

2 y que, entonces, cada uno de los ángulos es un tercio de los dos ángulos rectos,

β˜1 $A^3 - 3Z^2A = Z^3$,

2 por lo tanto haciendo A la base de un triángulo isósceles, [[el ángulo base del cual es un noveno de dos ángulos rectos.]]

1 Que sea Z 1

2 y ^SEA A x.

(Entonces) $x^3 - 3x = 1$.

α Si Z es 100,000,000,

β estos son los triángulos:

5.4.1.2.2. Texto de Descartes

α Como si ^YO quisiera saber

β~α de qué género es la línea EC [[que imagino descrita por la intersección de la regla GL y la pieza CNKL,]]

β~1 cuyo lado KN está prolongado indefinidamente hacia C,

2˜1˜α y que moviéndose sobre el plano, en línea recta

2 –es decir de tal manera que su lado KL se encuentre siempre aplicado sobre alguna región de la línea BA [[prolongada de uno y otro lado–]]

β˜α hace mover circularmente la regla GL alrededor del punto G,

β˜β por estar ella vinculada

α de tal manera que pasa siempre por el punto L.

1˜α ^YO Elijo una línea recta como AB

β para referir ^YO a sus diversos puntos todos los de la línea curva EC;

2 ˜ α	y en esta línea AB elijo un punto, como el A,
β	para ^YO empezar por él el cálculo.
1 ˜ 1	^YO Digo
2 ˜ α	que elijo éste o aquella
β	porque soy libre de tomarlos como quiera:
2 ˜ β ˜ α	pues aunque haya muchas maneras de elección
β	para hacer la ecuación más corta y más fácil,
β	siempre, << cualquiera sea la manera [[como se los tome,]] >>
α ˜ α ˜ β	puede hacerse [[que la línea aparezca de un mismo género,]]
α	como es fácil demostrar.
α ˜ α	Después de esto, tomando un punto cualquiera de la curva, como el C,
β ˜ 1	sobre el cual supongo
2	que el instrumento [[que sirve para describirla]] está aplicado,
β ˜ 1	trazo por este punto C la línea CB paralela a la GA,
2 ˜ β	y puesto que CB y BA son dos cantidades indeterminadas y desconocidas,
α	^YO las designo a una y y a la otra x.
β	Pero, para encontrar la relación de ambas,
α	considero también las cantidades conocidas [[que determinan el trazado de esa línea curva]] tales como GA [[que denomino a;]] KL [[que denomino b]] y NL paralela a GA, [[que denomino c.]]
1	Luego ^YO digo:
2 ˜ α ˜ 1	como LN es a LK
2	o c ^ES a b,
β ˜ 1	así CB o sea y, es a BK [[que es por consiguiente $\frac{b}{c}y$;]]
2	y BL es $\frac{b}{c}y - b$;
3	y AL es $x + \frac{b}{c}y - b$.
α ˜ 1	Además, como CB es a LB
2	o y ^ES a $\frac{b}{c}y - b$,
β	así a [[o sea GA]] es a LA [[o $x + \frac{b}{c}y - b$.]]

1˜β	De manera que multiplicando la segunda por la tercera
α˜α	se obtiene $\frac{ab}{c}y - ab$,
β˜α	que es igual a $xy + \frac{b}{c}yy - by$,
β	que resulta multiplicando la primera por la última;
2˜α	y así que la ecuación [[que se debía encontrar]] es $yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$,
β˜1	En la cual se sabe
2˜1	que la línea EC es de primer género:
2	pues, en efecto, no es otra que una hipérbola.

5.4.1.3. Metafunción Textual

5.4.1.3.1 Texto de Viète

1	Si		hay	dos triángulos isósceles
2	y		los lados de uno ^DE LOS TRIÁNGULOS	Son iguales a los del otro ^TRIÁNGULO
3	y		el ángulo de la base del segundo ^TRIÁNGULO	es igual a tres veces el ángulo base del primero ^TRIÁNGULO,
4			el cubo de la base del primero ^TRIÁNGULO y el cuadrado del lado común	es igual al producto de la base del segundo ^TRIÁNGULO y el cuadrado del cuadrado del mismo lado.
5			Sea	el primer triángulo ABC
6			teniendo	^EL TRIÁNGULO ABC lados iguales AB y BC.
7	Puesto que		el segundo triángulo	es también isósceles
8	y		cualquiera de los ángulos base de este segundo triángulo	es tres veces el ángulo BAC o BCA
9	y		^CUALQUIERA DE LOS ÁNGULOS BASE es	necesariamente menos que un ángulo recto,
10	entonces		cualquiera de los ángulos BAC y BCA	es menor que un tercio de un ángulo recto
11	y		el ángulo ABC	es mayor que un ángulo recto.
12			Sea extendidos.	AB y AC
13			De C a AB extendido,	dibuja ^TÚ CD igual a AB.
14	Después		de D a AC	extiende ^DE
15	y		dibuja	DE [[igual también a AB.]]
16	Así que		hay	dos triángulos isósceles, ABC y CDE.
17	Pero		CD y DE , [[los lados del segundo triángulo]]	son iguales a AB y BC, [[los lados iguales del primer triángulo.]]
18	Más aún,		tanto como cualquiera de los ángulos BAC y BCA	es una parte de dos ángulos rectos,
19	así		el ángulo ABC	es igual a dos ángulos rectos menos esas dos partes.
20			El ángulo ADC	es igual a éste ángulo ^ABC exterior,
21	puesto que		los ángulos DBC y CDB	son iguales debido a la igualdad de los lados CD y CB.
22	<<, más	aún,>>	El ángulo exterior al ángulo DAC	es la suma de los ángulos ADC y DAC.
23	Entonces		el segundo triángulo	es CDE, [[que es isósceles]]
24	Y		^CDE	tiene lados iguales a los lados de ABC, [[el primer triángulo,]]
25	y		cualquiera de sus ángulos base, [[denominados DCE o DEC,]]	es tres veces el ángulo BAC o BCA.
26	<<entonces>>		^YO	Digo que

27			^SE CUMPLE	^LA RELACIÓN $AC^3 - 3(AC \times AB^2) = (CE \times CD^2)$ o $(CE \times AB^2)$
27			Sea	un círculo [[[[descrito a la distancia CB o CD desde C, [[su centro,]]]]
28	y que		el diámetro FCG	corte AE perpendicularmente en C
29	y		^CORTE	AD en H
30			Sean dibujados	BIy DK paralelos a FG,
31			cortando	[[AE perpendicularmente en I y K.]]
32	Por lo tanto,		AI y IC	son iguales
33	y		AC	es el doble de AI.
34	Entonces		También AB y BH	son iguales,
35			haciendo	AH el doble de AB
36	Así como		CK y KE	son iguales,
37			haciendo	CE el doble de CK
38	Más	aún,	CG^2 [[(que es, AB^2)]]	es igual a $CH^2 + (FH \times HG)$
39	y,		<< por conversión,>>	$AB^2 - CH^2$ es igual a $FH \times HG$ [[(que es, a $BH \times HD$).]]
40	Entonces,		CH^2	es igual a $AH^2 - AC^2$
41	y		AH^2	es $4AB^2$
42	Por lo tanto		$AC^2 - 3AB^2$	$= BH \times HD$.
43	Pero		$BH:HD$	$= IC:CK$
44	Y		$IC:CK$	$= AC:CE$,
45	Puesto que		los términos posteriores	son el doble de los primeros.
46	Entonces		$AC:CE$	$= BH:HD$
47	Y consecuentemente		AC es a CE	como BH^2 [[(es decir, AB^2)]] es a $BH \times HD$ [[–es decir, a $AC^2 - 3AB^2$.]]
48	Por lo tanto,		resolviendo	la proporción,
49			$AC^3 - 3(AC \times AB^2)$	$= CE \times AB^2$
50	Como		era	de demostrarse.
51			Asumiendo	^YO
52	que		Z	es cualquier lado del triángulo equilátero
53	Y que, <<entonces,>>		cada uno de los ángulos	es un tercio de los dos ángulos rectos,
54			$A^3 - 3Z^2A$	$= Z^3$
55	Por lo tanto		haciendo	A la base de un triángulo isósceles, [[el ángulo base del cual es un noveno de dos ángulos rectos.]]
56	Que		sea	Z 1
57	y		^SEA	A x
58	(Entonces)		$x^3 - 3x$	$= 1$.
59	Si		Z	es 100,000,000,
60			Estos	son los triángulos:
	Textual	**Interpersonal**	**Experiencial**	
		Tema		**Rema**

5.4.1.3.2. Texto de Descartes

1	Como si	quisiera	^YO	saber
2			de qué género	es la línea EC [[que imagino descrita por la intersección de la regla GL y la pieza CNKL,]]
3			cuyo lado KN	está prolongado indefinidamente hacia C,
4	y que		Moviéndose ^KN	sobre el plano, en línea recta
5	–es decir		de tal manera	que su lado KL se encuentre siempre aplicado sobre alguna región de la línea BA [[prolongada de uno y otro lado—]]
6			hace mover	circularmente la regla GL alrededor del punto G,
7			por estar ella ^LA REGLA GL	vinculada
8			de tal manera	que ^LA REGLA pasa siempre por el punto L.
9			^YO Elijo	una línea recta [[como AB]]
10			para referir ^YO	a sus diversos puntos ^DE AB todos los de la línea curva EC;
11	y		en esta línea AB	^YO elijo un punto, [[como el A,]]
12			Para ^YO empezar	por él el cálculo
13		Digo	^YO	
14	pues		^YO elijo	éste o aquella
15	porque		soy	libre de tomarlos como quiera:
16	pues		aunque haya	muchas maneras de elección
17			para hacer ^YO	la ecuación más corta y más fácil,
18			siempre,	<< cualquiera sea la manera [[como se los tome,]] >>
19		puede	hacerse	[[que la línea aparezca de un mismo género,]]
20	Como		es	fácil [[demostrar.]]
21	Después de esto,		tomando ^YO	un punto cualquiera de la curva, como el C,
22			sobre el cual	supongo
23	que		el instrumento [[que sirve para describirla]]	está aplicado,
24			trazo ^YO	por este punto C la línea CB paralela a la GA,
25	y puesto que		CB y BA	son dos cantidades indeterminadas y desconocidas,
26			^YO las designo	a una y y a la otra x.
27	Pero,		para ^YO encontrar	la relación de ambas,
28			considero también ^YO	las cantidades conocidas [[que determinan el trazado de esa línea curva,]] tales como GA [[que denomino a;]] Kl, [[que denomino b]] y NL paralela a GA, [[que denomino c.]]
29	Luego	digo:	^YO	
30	como		LN	es a LK
31	o		c	^ES a b
32	así		CB [[o sea y,]]	es a BK [[que es por consiguiente $\frac{b}{c}y$;]]
33	y		BL	es $\frac{b}{c}y - b$
34	y		AL	es $x + \frac{b}{c}y - b$

35	Además,		como CB	es a LB
36	o		y	^ES a $\frac{b}{c}y-b$
37	así		a [[o sea GA]]	es a LA [[o $x+\frac{b}{c}y-b$.]]
38	De manera que		multiplicando	la segunda ^a por la tercera ^$x+\frac{b}{c}y-b$
39			se obtiene	$\frac{ab}{c}y-ab$
40	que		^ $\frac{ab}{c}y-ab$ es	igual a $xy+\frac{b}{c}yy-by$,
41	que		^ $xy+\frac{b}{c}yy-by$, resulta	multiplicando la primera^y por la última $x+\frac{b}{c}y-b$;
42	y así que		la ecuación [[que se debía encontrar]]	es [[$yy=cy-\frac{c}{b}xy+ay-ac$]]
43			En la cual	se sabe
44	que		la línea EC	es de primer género:
45	pues,	en efecto,	^LA LÍNEA EC	no es otra que una hipérbola.
	Textual	**Interpersonal**	**Experiencial**	
		Tema		**Rema**

5.4.2. Interpretación Funcional de la Gramática del Lenguaje Algebraico

En las tablas siguientes se presenta la interpretación funcional del análisis gramatical llevado a cabo en las secciones previas. Con las descripciones de cada tabla se destacan las características de cada una de las metafunciones analizadas por cada recurso semiótico (lenguaje natural, simbolismo e imágenes visuales). Para construir estas interpretaciones se empleó la Tabla 38 del anexo 10.1, la cual consiste en una tabla de frecuencias sobre los elementos de los sistemas de TRANSITIVIDAD, TAXIS, LÓGICO-SEMÁNTICA y TEMA.

Al igual que con los análisis anteriores solo se muestran en este apartado las interpretaciones de los textos de Viète y Descartes. Para ver las interpretaciones funcionales de los demás textos analizados ver Anexo 12.4.

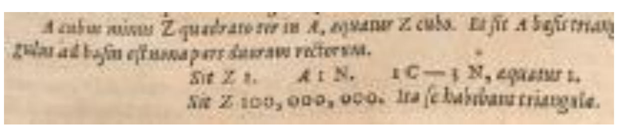
6.3.4.1 Texto de Viète

Recurso semiótico	Met. Experiencial TRANSITIVIDAD	Met. Lógica TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN	Met. Textual TEMA-REMA
Lenguaje Natural	▪ Participantes: Puede verse que, en la primera mitad del texto, los participantes son expresados de manera retórica, en tanto que en la segunda mitad los participantes predominantes son simbólicos. Por otro lado, a diferencia de todos los ejemplos anteriores, los participantes no representan números sino figuras geométricas: "*el primer triángulo*", "*los ángulos base*". ▪ Procesos: A diferencia de los ejemplos anteriores, en este discurso de Viète aparecen más tipos de procesos, sin embargo, es notoria la predominancia de los procesos relacionales, dentro de los cuales, los atributivos están más presentes. ▪ Circunstancias: Se encuentran Circunstancias del tipo: Atributo, Causa: Razón, Extensión: Aditivo, Locación: Espacio, Manera: Comparación, Manera: Cualidad, Manera: Medio.	▪ TAXIS: En el caso del texto de Viète se identifica un uso tanto de relaciones Paratácticas e Hipotácticas. ▪ R. LÓG-SEM: Se presentan principalmente relaciones semánticas de EXPANSIÓN del tipo Extensión y Realce y de PROYECCIÓN del tipo Idea.	Se identifican predominantemente Participantes como los Temas Experienciales, aunque aparecen también Temas Experienciales con Procesos. Es notable que en general, los Temas son Mixtos, por lo que hay una gran presencia también de Temas Textuales acompañando a los Experienciales. También se ve que se hace uso de más Circunstancias como Tema, a diferencia de los textos previos.
	Interpretación Funcional		
	En el caso de este texto de Viète puede interpretarse que la variedad de Procesos y la predominancia de los Relacionales por sobre los demás indica que el tipo de problema tiene	En términos generales, el texto de Viète presenta una complejidad del significado lógico pues su organización emplea relaciones	El texto en general parece estar más en un tenor deductivo, es decir, en la demostración, por la presencia de

	una estructura muy diferente a lo anteriormente analizado. Por ejemplo, a nivel discursivo, el hecho de que haya diferencias en los tipos de Participantes en partes del texto muestra que se tienen finalidades distintas en cada parte y por ello esta característica. Esto resulta comprobado cuando se considera la estructura discursiva de Viète: Zetética, Porística y Exegética, que son momentos en la resolución de los problemas. La primera parte alude al hecho de presentar los elementos necesarios que permitan construir una ecuación, lo que corresponde al uso predominante de Participantes Retóricos pues describen los elementos de la construcción geométrica que se analiza. Al final del texto vuelven a aparecer Participantes Retóricos pues en la etapa de la exegética, se deben construir las figuras solución. En este caso los Participantes Retóricos cumplen la función de *Adopción Semiótica* (O'Halloran, 2005, 2007, 2008), pues fungen para invocar en el discurso escrito los elementos de la imagen.	dependientes e independientes al interior de algunos complejos clausulares. Por ejemplo, el complejo clausular que incluye las cláusulas 7 a la 11: β˜1 Puesto que el segundo triángulo es tambi 2˜1 y cualquiera de los ángulos base de este se 2 y ^CUALQUIERA DE LOS ÁNGULOS B α˜1 entonces cualquiera de los ángulos BAC y 2 y el ángulo ABC es mayor que un ángulo Que al desplegar el significado lógico podría leerse como: (1) Entonces cualquiera de los ángulos BAC y BCA es menor […] (11) y el ángulo ABC es mayor que un ángulo recto. (7) Puesto que el segundo triángulo es también isósceles (8) y cualquiera de los ángulos base de este segundo triángulo es […] (9) y necesariamente menos que un ángulo recto. Sin embargo, se encuentran gran cantidad de otros complejos similares a los que empleaban al-Khwârizmî y Buteo que consisten en dos cláusulas como los complejos de las cláusulas (18-19), (20-21) y (23-25). 1 Más aún, tanto como cualquiera de los ángulos BAC y BCA es una 2 así el ángulo ABC es igual a dos ángulos rectos menos esas dos part β El ángulo ADC es igual a éste ángulo exterior, α puesto que los ángulos DBC y CDB son iguales debido a la igualdad El ángulo exterior al ángulo DCA, más aún, es la suma de los ángulos ADC y 1 Entonces el segundo triángulo es CDE, [[que es isósceles]] 2 y tiene lados iguales a los lados de ABC, [[el primer triángulo,]] 3 y cualquiera de sus ángulos base, [[denominados DCE o DEC,]] es t	Temas Textuales acompañando a los Experienciales. Su estructura corresponde con la forma en la que se estructuran las demostraciones en geometría. Esto también está relacionado con el proyecto de Viète y su renovación del método del análisis geométrico. En este sentido, el mensaje del texto de Viète está dividido en partes, por la estructura tripartita de su Discurso, de manera, que en la primera parte, el mensaje está en las líneas, ángulos, como elementos de los triángulos que está investigando, mientras que en la segunda parte son las líneas simbólicas y finalmente en la tercera parte nuevamente se recurre a Participantes retóricos en los Temas relativos a la "relación", "ecuación", "lados" y "triángulos".

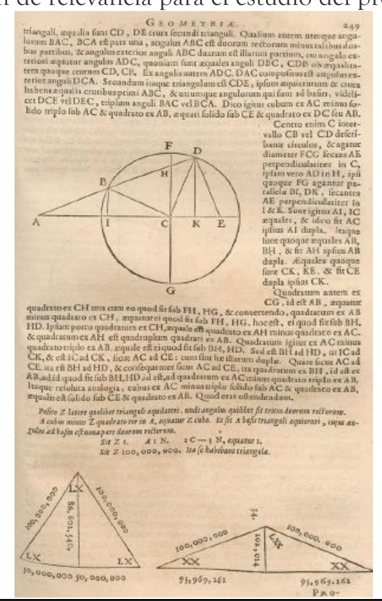
		Por lo tanto, la organización de los significados lógicos del texto claramente muestra cierta complejidad.	
Simbolismo	• <u>Participantes:</u> Los Participantes Simbólicos aparecen con mayor predominancia. Puede verse que en la primera mitad del discurso estos Participantes corresponden a figuras geométricas que han sido *resemiotizadas* (O'Halloran, 2005) por designación a través del lenguaje natural. Es decir, son empleados como una referencia a los elementos de la imagen. En la segunda mitad del discurso, se puede ver claramente que los Participantes casi en totalidad son simbólicos y estos representan ya segmentos de línea que son relacionados con otros por medio de proporciones. • <u>Procesos:</u> A diferencia de Bombelli y de Buteo, Viète no se interesó por la búsqueda de un simbolismo sintetizador como el caso de los algebristas previos a Él. Por lo tanto, los Procesos Operativos [12] no son simbolizados sistemáticamente, sin embargo, a pesar de esta característica, planteó un modo simbólico de tratamiento diferente a lo visto hasta antes de Él, determinando una nueva significación del número como cantidad continua y discreta, lo que le llevó a crear un modo simbólico de tratamiento del número. Es decir, una forma paramétrica de tratar las cantidades, a partir de simbolizarlas con las primeras vocales del alfabeto.		Se identifica que en los Temas Experienciales gran cantidad son Participantes simbólicos, la mayoría correspondientes a líneas y figuras geométricas, solo al final del texto los participantes se tornan más relacionados con las ecuaciones. Resulta complejo distinguir en el texto de Viète si la expresión simbólica corresponde en el estricto sentido a una ecuación o a solo una igualdad entre razones.
	Interpretación Funcional		
	El hecho de que la mayor parte de los Procesos Relacionales sean Atributivos puede interpretarse como el hecho de que el significado experiencial está centrado en atribuir		De esta manera, el mensaje del texto de Viète está centrado en describir los Participantes que son necesarios para

[12] Los Procesos Operativos son Procesos que aluden a las operaciones aritméticas. Estos son propuestos por O'Halloran (2005) como una extensión de los Procesos típicos del lenguaje natural.

	propiedades a los participantes. Esto tiene sentido si se considera que la mayor presencia de este tipo de procesos se da en la primera mitad del texto, lo cual está relacionado con actividad geométrica. Por ejemplo, en la cláusula 11: "*y* ***el ángulo ABC*** *es* ***mayor que un ángulo recto***." Por otro lado, la predominancia de los Procesos Relacionales Identificativos en la segunda mitad del texto corresponde con la finalidad a nivel del discurso de emplear las técnicas algebraicas para la resolución/demostración del problema. La *ecuación paramétrica* aparece después de explicar la construcción geométrica y también al final cuando las relaciones de interés son sintetizadas por medio de ella y cuando se proponen valores específicos para mostrar el resultado. La gran relevancia que tiene Viète en el desarrollo del discurso algebraico es que sus ecuaciones son todas paramétricas, es decir, no tiene coeficientes específicos como todos sus predecesores, pues como ya se mencionó, en términos ontológicos como demostró Klein (1968), la noción de número cambió a partir de Viète, al integrar la cantidad discreta y continua por la racionalidad de su *arte analítico*. Cabe resaltar también que la ecuación paramétrica adquiere un estatus diferente a la empleada por sus predecesores, pues puede interpretarse como un objeto general que condensa las relaciones más generales. La evidencia de este hecho es que los dos tipos de ecuaciones aparecen en el mismo texto de Viète:  A cubus minus Z quadrato ter in A, æquatur Z cubo. Et fit A basis trian- gulus ad basin est una pars duarum rectorum. Sit Z 1. A 1 N. 1 C — 3 N, æquatur 1. Sit Z 100,000,000. Ita se habebunt triangula.		construir una relación que señala lo que se cumple en las figuras presentadas, en este caso, los dos triángulos. Con esto, la descripción del mensaje muestra a estos Participantes y sus respectivas equivalencias para conformar la ecuación.

<table>
<tr><td></td><td>La forma en la que el simbolismo es empleado es para articular la experiencia entre los mundos de la geometría y la aritmética. Las ecuaciones de Viète podían ser usadas en problemas aritméticos como geométricos. En particular el vínculo en términos experienciales de ambos mundos que Viète encontró son las proporciones, de manera que la ecuación simbólica podía pensarse como una ecuación y viceversa. Es por ello por lo que los significados en este ejemplo corresponden más a significados geométricos que tras ser representados por medio de relaciones proporcionales permite el salto a la ecuación.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><th></th><th colspan="2">Met. Representacional/Experiencial</th><th>Met. Composicional</th></tr>
<tr><td>Imágenes</td><td colspan="2">

<u>Episodio</u>: Se consta de un solo Episodio, en donde la configuración de Participantes, Procesos y Circunstancias define la relación entre dos triángulos.
<u>Figura:</u> Se identifican dos Figuras que son los triángulos ABC y CDE.
<u>Partes:</u> Las Partes de cada Figura corresponden con las construcciones detalladas en la primera mitad del texto y sobre las cuales se realizan más construcciones para relacionar los dos triángulos. En este sentido, las Partes codifican como parte de la primera mitad del texto los significados experienciales pues ha sido construida. Por ejemplo, en la cláusula 5 se indica que: “Sea el primer triángulo ABC”. Donde el proceso existencial “Sea” visualmente se convierte en el dibujo del triángulo ABC.
Posteriormente, una vez establecida la relación a demostrar, se añaden otras Partes a las Figuras, en donde a la vez que la imagen se va conformando, se van determinando los participantes sobre los cuales se operará algebraicamente. De modo que, de estas partes, algunas se convertirán en participantes retóricos y simbólicos. Como por ejemplo, en la cláusula 26: “Sea un círculo [[[[descrito a la distancia CB o CD desde C, [[su centro,]]]]”.

</td><td>La organización del Episodio, Figura y Partes conforman un solo Diagrama en los que se pierden las Figuras.
No hay recursos gráficos que destaquen, señalen o enmarquen las Figuras y las Partes que son de relevancia para el estudio del problema.
</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Interpretación Funcional</td></tr>
</table>

	La función de la imagen en tanto aparentemente es usada por Viète es la de presentar la información de las relaciones de las Figuras (los dos triángulos) a partir del énfasis en ilustrar solo algunas de las Partes (los segmentos de línea) que articulan las dos Figuras por ser investigadas. Las características de las líneas son cuidadosamente detalladas y reiteradas por medio del lenguaje natural a través de los Participantes, Procesos y Circunstancias. Cabe detallar que el recurso de las imágenes en el discurso algebraico, si bien no es una innovación en Viète—véase, por ejemplo, Peletier (1554, p. 208 y 216)—adquiere un uso distinto a los previos algebristas pues la imagen representa a partir de Viète una realidad semiótica que está siendo analizada mediante el análisis algebraico.	El Episodio ha sido creado con la intención de resaltar las relaciones entre las dos Figuras, para ello muestra en el mismo diagrama las dos Figuras de manera conjunta. La construcción de la circunferencia es la que permite la articulación entre las Figuras en tanto permite relacionar ambas pues éstas conforman dos elementos constituyentes del Diagrama general. Por otro lado, el recurso del etiquetamiento de los elementos de las Partes servirá para *resemiotización* de estos en el simbolismo y, por consiguiente, la *adopción semiótica* en el lenguaje natural.

Tabla 15. Interpretación funcional de la gramática del texto de Viète

6.3.4.2 Texto de Descartes

Recurso semiótico	Met. Experiencial TRANSITIVIDAD	Met. Lógica TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN	Met. Textual TEMA-REMA
Lenguaje Natural	• Participantes: Similar al texto de Viète, puede verse que, en la primera mitad del texto, los Participantes son expresados de manera retórica, en tanto que en la segunda mitad los Participantes predominantes son simbólicos. Los Participantes retóricos aluden a partes del instrumento de construcción, a segmentos de línea, a ecuaciones y la curva. Por ejemplo, en las cláusulas 6 y 9: "*hace mover circularmente **la regla GL** alrededor del **punto G**,*" y "^YO *Elijo **una línea recta** [[como AB]]*".	• TAXIS: En el caso del texto de Descartes en su totalidad las cláusulas se encuentran relacionadas lógicamente, pues no hay presencia de cláusulas aisladas. Por este hecho puede identificarse que el texto de Descartes posee un alto grado de *intrincación gramatical*[13]. En particular, hay un uso predominante de relaciones Hipotácticas, aunque hay también gran cantidad de relaciones Paratácticas. • R. LÓG-SEM: Se presentan principalmente relaciones semánticas de EXPANSIÓN del tipo Extensión y Realce y de PROYECCIÓN del tipo Idea.	Se identifica un equilibrio entre los Temas Experienciales que incluyen Participantes y Procesos. Asimismo, se ve presencia relevante de Circunstancias como Tema, lo cual no fue frecuente en los textos previos.

[13] La intrincación gramatical refiere a la forma en que se organizan las estructuras gramaticales (Rodríguez, 2012).

	• Procesos: Puede verse que también en el texto de Descartes aparecen más tipos de Procesos, al igual que en el de Viète, aunque en el de Descartes hay más incidencia de los Procesos Mentales. Los Materiales siguen siendo predominantes, junto con los Relacionales. Por otro lado, se puede ver en el texto de Descartes que en algunas cláusulas recurre a *Procesos Operativos*, pero de manera retórica, es decir, no simbolizados; algo que no aparece en los textos previos. Por ejemplo en las cláusulas 35 y 36: “*Además, como CB* ***es a*** *LB* ” y “y ^***ES*** $a\frac{b}{c}y - b$,” • Circunstancias: Las Circunstancias que se emplean son del tipo: Agente, Atributo, Causa: Propósito, Causa: Razón, Contingencia: Concesión, Contingencia: Condición, Locación: Espacio, Manera: Cualidad y Manera: Medio.		
	Interpretación Funcional		
	Los significados experienciales retóricos en el discurso de Descartes muestran que está abordando un problema geométrico de construcción con la ayuda de su instrumento en donde la finalidad del problema es la determinación del género de la curva descrita por la construcción del instrumento. El recurso consistente de Procesos Mentales y Verbales muestra que el discurso de Descartes está centrado en	La estructura del texto de Descartes es similar con el discurso hablado, por los grandes complejos clausulares que definen una forma intrincada de las relaciones lógicas entre las cláusulas. Véase el primero complejo clausular que involucra las cláusulas de 1 a la 7:	La presencia de Participantes y Procesos por igual, como también de Circunstancias como Temas Experienciales, indica que el mensaje en el texto de Descartes es menos formal que los anteriores y, por lo tanto, como consecuencia de las relaciones de Taxis y Lógico-Semánticas, se percibe un texto casi correspondiente al discurso hablado, por lo que se interpreta que Descartes en su texto tiene en mente el mensaje de explicar su pensamiento.

	explicar sus ideas y método para resolver el problema. Al igual que en los demás discursos simbólicos los Participantes Retóricos permiten la *Adopción semiótica.* Más enfático en el Discurso Cartesiano pues como parte del método, los elementos de interés en el problema deben ser designados por un símbolo.	α Como si ^YO quisiera saber β~α de qué género es la línea EC [[que imagino desc GL y la pieza CNKL,]] β~1 cuyo lado KN está prolongado indefinidamente 2~1~α y que moviéndose sobre el plano, en línea recta 2 =es decir de tal manera que su lado KL se encue alguna región de la línea BA [[prolongada de u β~α hace mover circularmente la regla GL alrededo β~β por estar ella vinculada α de tal manera que pasa siempre por el punto L. En dónde se puede ver la cadena de los significados expresados. En este sentido, el discurso de Descartes en términos gramaticales tiene características del lenguaje oral.	
Simbolismo	• <u>Participantes:</u> Al igual que Viète puede verse en el texto de Descartes que en la primera mitad del discurso los Participantes simbólicos corresponden a figuras geométricas que han sido resemiotizadas por designación a través del lenguaje natural. Es decir, son empleados como una referencia a los elementos de la imagen. En la segunda mitad del discurso, se puede ver claramente que los participantes son predominantemente simbólicos y, nuevamente al igual que en el de Viète, éstos representan ya segmentos de línea que son relacionados con otros por medio de proporciones, característica del proyecto compartido inconscientemente por ambos respecto del análisis algebraico.		Puede notarse que las expresiones simbólicas que aparecen en el discurso, hasta antes de la ecuación simbólica paramétrica podrían pasar por pertenecer a un problema geométrico.

	Al igual que Viète sus expresiones algebraicas son paramétricas pues representan cantidades generales, en este caso magnitudes geométricas. Las expresiones simbólicas de Descartes son con la excepción del signo igual y de la segunda potencia son iguales a las actuales. Las ecuaciones mostradas en esta traducción son escritas de la misma manera que aparecen en el texto original con la excepción del signo igual. Al igual que en Buteo, en el texto de Descartes se da en una ocasión un caso de *metáfora semiótica,* en la cláusula 42: "*y así que la ecuación [[que se debía encontrar]] es [[* $\boldsymbol{yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac}$ *]]*". • Procesos: A través de los procesos relacionales atributivos e identificativos Descartes va construyendo las ecuaciones de las líneas. • Circunstancias: No hay circunstancias simbólicas.		
	Interpretación Funcional		
	Como parte del proyecto en el que tanto Viète como Descartes se embarcaron, es decir, el análisis algebraico, el simbolismo permite la articulación entre geometría y aritmética como ya se describió con Viète. La diferencia en Descartes es que el tipo de problemas en los que se interesa son exclusivamente los enmarcados dentro de la geometría de las curvas. Su único		El simbolismo contribuye al mensaje del texto de Descartes en tanto, muestra a los Participantes relevantes para determinar la ecuación de la curva y sus respectivas equivalencias de manera simbólica para lograr el objetivo que es la ecuación. También se recurre a estrategias espaciales para mostrar que la ecuación final es lo relevante, pues se deja en una línea por separado como se ve en este extracto.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>tratado matemático, fue La Géométrie como apéndice del Discours de la méthode. En este sentido los parámetros de sus ecuaciones corresponden con líneas que son aritmetizadas. La forma en la que funciona el simbolismo algebraico de Descartes pretende, por lo tanto, ser una herramienta visual que permita expresar de manera sintética las relaciones geométricas subyacentes en el problema para distinguir por medio del grado de la ecuación el género de las curvas. Además, las ecuaciones son construidas para mostrar el resultado geométrico, es decir, la curva. La solución del problema en sí mismo no es resolver algebraicamente la ecuación, sino construir la solución.</td>
<td></td>
<td>tipliant la ſeconde par la troiſieſme on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui eſt eſgale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui ſe produit en multipliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt
$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$.
de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.</td>
</tr>
<tr>
<th></th>
<th colspan="2">Met. Representacional/Experiencial</th>
<th>Met. Composicional</th>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">Imágenes</td>
<td colspan="2">

<u>Episodio:</u> Se consta de un solo Episodio, en donde la configuración de Participantes, Procesos y Circunstancias involucran el trazo de una curva mediante el movimiento de un mecanismo que la dibuja.
<u>Figura:</u> Involucra tres Figuras: los triángulos CBK, NLK y GAL. Sobre los cuales se trabaja algebraicamente para determinar relaciones.
<u>Partes:</u> Las partes de cada Figura corresponde con los segmentos formados por esos tres triángulos. Estos segmentos son los que fungirán como los Participantes Retóricos y posteriormente Simbólicos que serán relacionados entre sí para determinar la ecuación de la curva. Por ejemplo, en la cláusula 32: “así CB [[o sea $\boldsymbol{y}$,]] es a BK [[que es por consiguiente $\boldsymbol{\frac{b}{c}y}$;]] ”.

</td>
<td>La organización del Episodio, Figura y Partes conforman un solo diagrama en los que se pierden las Figuras.
Como en el caso de Viète, no hay recursos gráficos que destaquen, señalen o enmarquen las Figuras y las Partes que son de relevancia para el estudio del problema.</td>
</tr>
<tr>
<th colspan="3">Interpretación Funcional</th>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">La función de la imagen al igual que con Viète es la de presentar la información de las relaciones de las Figuras (los tres triángulos) a partir del énfasis en ilustrar las Partes (los segmentos de línea) que</td>
<td>El Episodio ha sido creado con la intención de resaltar las relaciones entre las tres Figuras. En el caso de Descartes sus imágenes inducen a un sentido dinámico pues como se ve en la imagen de abajo, las líneas punteadas que corresponden a</td>
</tr>
</table>

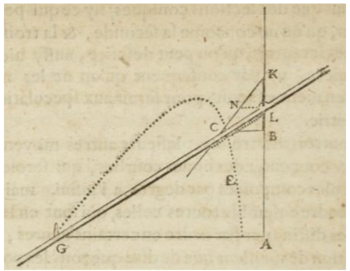
	servirán para la construcción de las ecuaciones. Las características de las líneas son cuidadosamente detalladas y reiteradas por Descartes en el lenguaje natural a través de los participantes, procesos y circunstancias cuando describe cómo funciona el instrumento. Al igual que en Viète la imagen adquiere un uso distinto a los previos algebristas pues la imagen representa una realidad semiótica que está siendo analizada mediante el análisis algebraico.	la curva dan la interpretación de que la curva es construida con el movimiento del instrumento.  En este caso, la disposición de los ejes AK y AG permiten una mayor facilidad para determinar las relaciones entre los segmentos de línea involucrado. No obstante, esto corresponde a este caso. En otros problemas, como en el del Problema 2 de Descartes analizado en el apartado 6.2.5 las líneas no siempre forman segmentos perpendiculares. Por otro lado, el recurso del etiquetamiento de los elementos de las Partes, servirá para la *resemiotización* en el simbolismo y que permitirá en el lenguaje natural la adopción semiótica.

Tabla 16. Interpretación funcional de la gramática del texto de Descartes

5.4.3. Análisis Multimodal de los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos

En este apartado se muestra el análisis multimodal de los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos que caracterizan los textos de Viète y Descartes analizados. Como se mencionó en las consideraciones metodológicas respecto a este análisis se comparó los textos de ambos matemáticos con un texto de al-Khwârizmî para mostrar los contrastes entre sus textos.

5.4.3.1. Texto de al-Khwârizmî

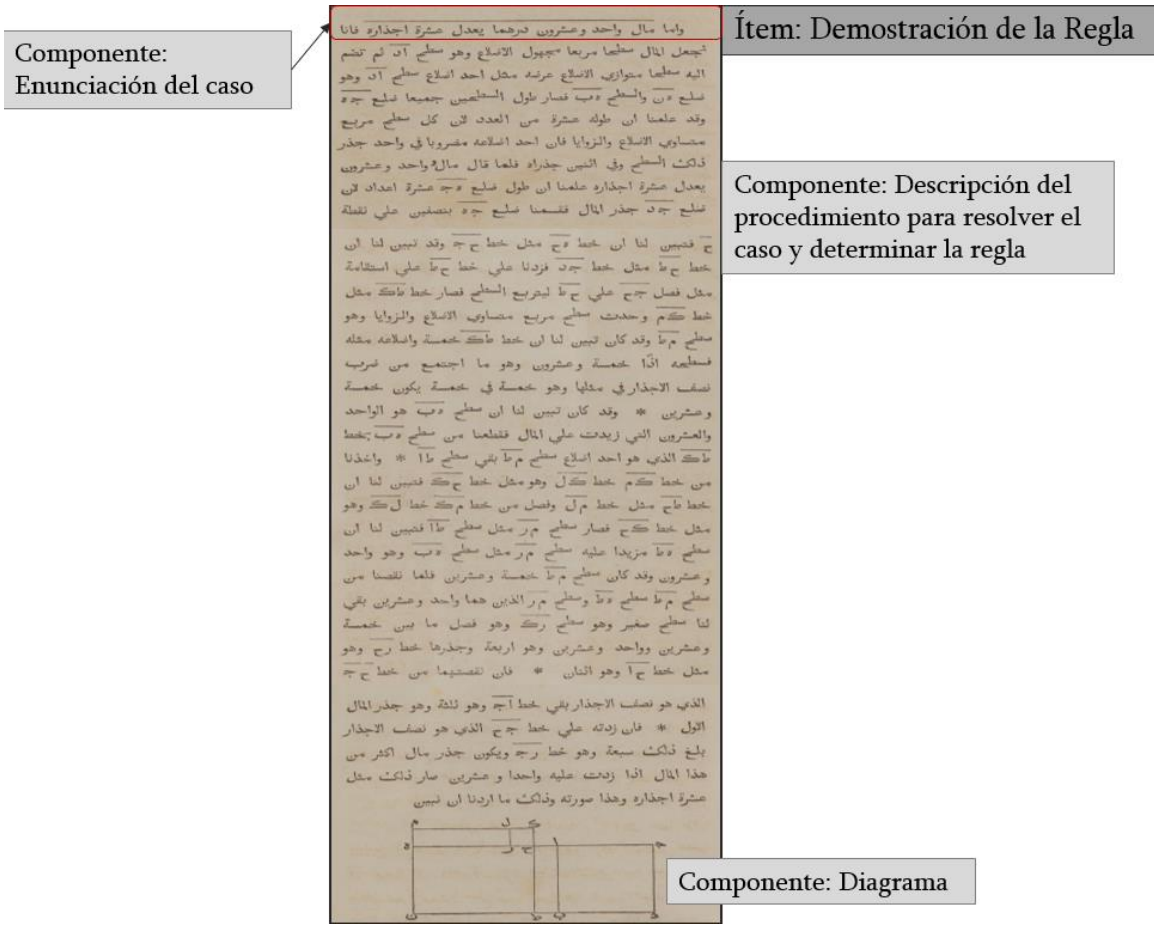
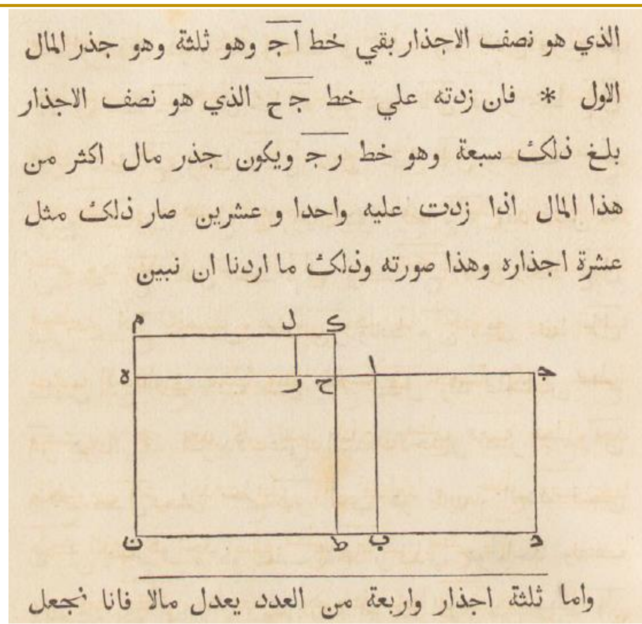


Figura 22. Estructura discursiva en un texto de al-Khwârizmî

Texto seccionado por Ítems

1. Cuando un tesoro y veintiún dirhams son iguales a diez raíces,
2. representamos el tesoro como un cuadrado [[cuyos lados son desconocidos,]]
3. que es la superficie *AD.*
4. A ésta añadimos un paralelogramo, la superficie *HB,*
5. cuya anchura, << esto es, >> el lado *HN*, es igual a uno de los lados de la superficie *AD.*
6. La longitud de las dos superficies juntas es igual al lado *HC.*
7. Sabemos que su longitud es en números diez,
8. ya que cada cuadrado tiene iguales sus lados y sus ángulos, y,
9. si uno de sus lados se multiplica por uno,

10. eso da la raíz de la superficie,
11. y, por dos, ^ DA dos de sus raíces.
12. Cuando se declara [[que el tesoro y veintiún números es igual a diez de sus raíces,]]
13. sabemos que la longitud del lado *HC* es igual a diez números,
14. ya que el lado *CD* es una raíz del tesoro.
15. Dividimos el lado *CH* en dos mitades por el punto G.
16. Entonces sabes que la línea *HG* es igual a la línea GC,
17. y que la línea *GT* es igual a la línea *CD*.
18. Entonces extendemos la línea *GT* una distancia igual a la diferencia entre la línea CG y la línea *GT* para cuadrar la superficie.
19. Entonces la línea *TK* es igual a la línea *KM*,
20. y resulta un cuadrado, de lados y ángulos iguales,
21. que es la superficie *MT*.
22. Sabemos que la línea *TK* es cinco
23. y ésa es consecuentemente la longitud de los otros lados.
24. Su superficie es veinticinco,
25. obtenida por la multiplicación de la mitad de las raíces por sí mismo,
26. que es cinco por cinco, igual a veinticinco.
27. Sabemos [[que la superficie *HB* representa los veintiún números que se añaden al tesoro.]]
28. De la superficie *HB*, cortamos por la línea *TK*, uno de los lados de la superficie *MT*,
29. dejando la superficie *TA*.
30. Tomamos de la línea *KM* la línea *KL*,
31. que es igual a la línea *GK*.
32. Sabemos [[que la línea *TG* es igual a la línea *ML* y que la línea *LK*, cortada de la línea *MK*, es igual a *KG*.]]
33. Entonces la superficie *MR* es igual a la superficie *TA*.
34. Sabemos [[[[que la superficie *HT* añadida a la superficie *MR* es igual a la superficie *HB* [[que es veintiuno.]]]]
35. Pero la superficie *MT* es veinticinco.
36. Y así, restamos de la superficie *MT*, la superficie *HT* y la superficie *MR*,
37. entre ambas ^SON igual a veintiuno.
38. Nos queda una superficie pequeña *RK*,
39. que es veinticinco menos veintiuno,
40. que es cuatro.
41. Su raíz, la línea *RG*, es igual a la línea GA,
42. que es dos.
43. Si lo restamos de la línea CG,
44. que es la mitad de las raíces,
45. queda la línea *AC*,
46. que es 3.
47. Ésta es la raíz del primer tesoro.
48. Si se añade la línea GC,
49. que es la mitad de las raíces,
50. resulta siete, o la línea *RC*, la raíz de un tesoro más grande.
51. Si se añade veintiuno a este tesoro,
52. también el resultado será diez de sus raíces.
53. Ésta es la figura. (págs. 11-13)


الذي هو نصف الاجذار بقي خط اج وهو ثلثة وهو جذر المال
الاول * فان زدته علي خط جح الذي هو نصف الاجذار
بلغ ذلك سبعة وهو خط رج ويكون جذر مال اكثر من
هذا المال اذا زدت عليه واحدا و عشرين صار ذلك مثل
عشرة اجذاره وهذا صورته وذلك ما اردنا ان نبين

واما ثلثة اجذار واربعة من العدد يعدل مالا فانا نجعل

...

5.4.3.1.1. Sistemas Intersemióticos

MULTISEMIOSIS			
SIGNIFICADO TEXTUAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	El texto de al-Khwârizmî logra la Cohesión Intersemiótica, a partir de los recursos de Referencia Intersemiótica. Por ejemplo, nótese el uso de las palabras “superficie”, “línea”, “longitud”, “lado”, “cuadrado”, “paralelogramo” con las cuales se alude a los Participantes en la imagen, con los que se logra un constante “ir” y “venir” entre el texto lingüístico y la imagen.
	MEZCLA INTERSEMIÓTICA		No se identifica mezcla intersemiótica, puesto que en la imagen los únicos recursos que se comparten con el texto lingüístico son las etiquetas que tienen una función relativa a la Ideación Intersemiótica.
	ENLACES DISCURSIVOS		No se identifican enlaces discursivos
	SUBTÍTULOS		No hay uso de subtítulos en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA		Se identifica un solo caso en todo el texto en el que se da la Sustitución Intersemiótica. En la cláusula 31 se habla de “*la línea GK*” y en la 32, se hace referencia a la misma línea, pero como “*KG*”, de modo que “KG” sustituye a “la línea”. No obstante, esta sustitución no es empleada en el texto por lo que no se cumple con la función de sustitución como tal.
	ADOPCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	La adopción semiótica se da en el texto con base en el uso de las etiquetas. Por medio de estas, pueden

			designarse los Participantes de la imagen en términos simbólicos como "*la superficie AD*."
	DEIXIS	X	Los artículos definidos "la", "el" ayudan en términos gramaticales a indicar que el Participante es existente, lo cual induce a rastrearlo en la Imagen. Por otro lado, cuando se emplean los deícticos posesivos y demostrativos como, por ejemplo, en la cláusula 2 y 4: "cuyos lados son desconocidos", "A ésta añadimos un paralelogramo" permiten hacer Referencia Intersemiótica respecto a los Participantes de la Imagen.
	ETIQUETAS	X	El uso de las etiquetas A, B, C, … en la imagen son fundamentales para desarrollar los Significados Textuales y Experienciales.
SIGNIFICADO EXPERIENCIAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	El texto muestra una secuencia de actividades que es dirigida al inicio a partir de las primeras tres cláusulas: *1. Cuando un tesoro y veintiún dirhams son iguales a diez raíces, 2. representamos el tesoro como un cuadrado [[cuyos lados son desconocidos,]] 3. que es la superficie AD.* Con estas tres cláusulas se deja ver que la secuencia de actividades estará basada en una configuración de procedimientos que dependerán de la imagen. Estos procedimientos son a nivel gramatical reforzados a través de relaciones de transitividad, generalmente por medio de Procesos Relacionales que permitirán rastrear en el texto lingüístico las partes de la imagen que están siendo modificadas o, bien que son recuperadas para su tratamiento algebraico.
	SUBTÍTULOS		No hay uso de subtítulos en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X	A través de Procesos Relacionales Identificativos, se establecen Relaciones de Transitividad entre los Participantes del Lenguaje Natural y la Imagen. En las cláusulas 2 y 3, se tiene: "*representamos el tesoro como un cuadrado [[cuyos lados son desconocidos,]]*" "*que es la superficie AD*".
	LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN		No se identifican este tipo de recursos en el texto.
	METÁFORA SEMIÓTICA	X	La única metáfora semiótica que se identifica es la que se da en la cláusula 53, en la cual a través del Proceso Relacional Identificativo se asocia el grupo nominal "la figura" en el Lenguaje Natural con el Episodio del Diagrama en la Imagen. Esto sucede porque la imagen condensa todas las configuraciones de Participantes, Procesos y Circunstancias del texto completo. Seguramente por las limitaciones de la época para desarrollar una gramática visual.

	ETIQUETAS	X	El uso de las etiquetas A, B, C, … en la imagen son fundamentales para desarrollar los Significados Textuales y Experienciales.
SIGNIFICADO LÓGICO			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN		No hay uso de secuencias implicativas a nivel discursivo en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	LÓGICO-SEMÁNTICA		No se identifican relaciones Lógico-Semánticas entre recursos semióticos en el texto.
	INTERDEPENDENCIA		No se identifican relaciones de Interdependencia entre recursos semióticos en el texto.
	INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD	X	La ubicación de la Imagen centrada y separada del texto lingüístico facilita el análisis, puesto que se presenta como información relevante.
	METÁFORA SEMIÓTICA		No se identifican Metáforas Semióticas Lógicas entre recursos semióticos en el texto.

Tabla 17. Sistemas de intersemiosis en un texto de al-Khwârizmî

5.4.3.1.2. Mecanismos Intersemióticos

MECANISMOS INTERSEMIÓTICOS		
Mecanismo	Presencia	Descripción
Cohesión Semiótica	X	En el ejemplo de la Figura 68 se identifican un Mini-Género: De Demostración-Explicación. Como Items se identifica la Demostración de la regla (con Componentes: Enunciación del caso; Descripción del procedimiento para resolver el caso y determinar la regla; y el Diagrama). Hay cohesión semiótica en tanto, se dan casos de Referencia, pues Constantemente se hace alude a las partes de la Imagen, a través de palabras como “superficie”, “cuadrado”, etc. Además, a través del etiquetamiento del Diagrama es posible recuperar los Participantes del Diagrama en el texto lingüístico.
Adopción Semiótica	X	Hay incorporación sistemática de simbolismo geométrico en el recurso semiótico del Lenguaje Natural. Véase por ejemplo en la imagen en el Ítem de Descripción del procedimiento para resolver el caso, cómo al-Khwârizmî se refiere a los Participantes del Diagrama por medio del simbolismo del tipo $\overline{AB}$. En la imagen se encierran estos casos:

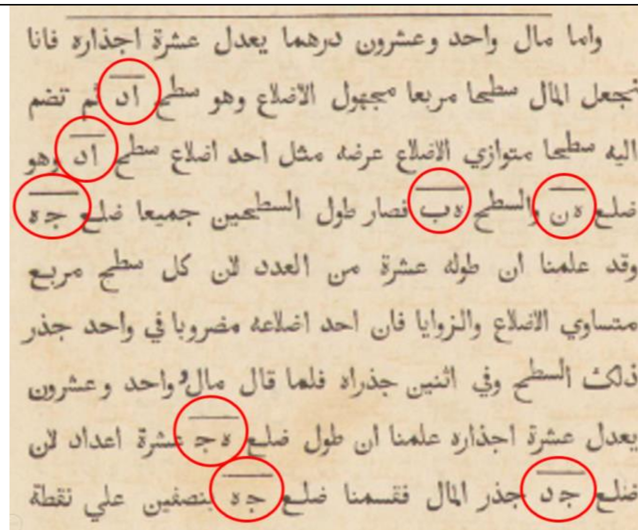
		 واما مال واحد وعشرون درهما يعدل عشرة اجذاره فانا نجعل المال سطحا مربعا مجهول الاضلاع وهو سطح اد ثم تضم اليه سطحا متوازي الاضلاع عرضه مثل احد اضلاع سطح اد وهو ضلع هن والسطح هب فصار طول السطحين جميعا ضلع جه وقد علمنا ان طوله عشرة من العدد لان كل سطح مربع متساوي الاضلاع والزوايا فان احد اضلاعه مضروبا في واحد جذر ذلك السطح وفي اثنين جذراه فلما قال مال وواحد وعشرون يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول ضلع هج عشرة اعداد لان ضلع جد جذر المال فقسمنا ضلع جه بنصفين علي نقطة
Mezcla semiótica		No se identifica Mezcla semiótica
Yuxtaposición y espacialidad	X	La disposición espacial, en términos de centrado y de espaciado lineal, que se emplean con el Compontes: Diagrama contribuyen a que este elemento sea concebido como información importante, toda vez que representa la condensación de todo el procedimiento detallado en el Lenguaje Natural.
Transición Semiótica	X	En términos generales se ve Transición Semiótica sistemática, puesto que todo el procedimiento detallado en el Lenguaje Natural hace Referencia a los Participantes del Diagrama, puesto que el Lenguaje Natural explica la forma en la que está siendo construida la figura geométrica del Diagrama. En este sentido, al finalizar el procedimiento por medio de la cláusula 53 "esta es la figura:" se deja ver cómo todo lo anteriormente descrito en el Lenguaje Natural es condensado en la figura geométrica del Diagrama. Descripción del procedimiento para resolver el caso y determinar la regla -> Diagrama.
Metáfora Semiótica	X	Se identifica un único caso de Metáfora Semiótica en la cláusula 53, en la que por medio del Proceso Relacional Identificativo "*es*" se asocia a el grupo nominal "*la figura*" con el Episodio del Diagrama.

Tabla 18. Mecanismos intersemióticos en un texto de al-Khwârizmî

5.4.3.2. Texto de Viète

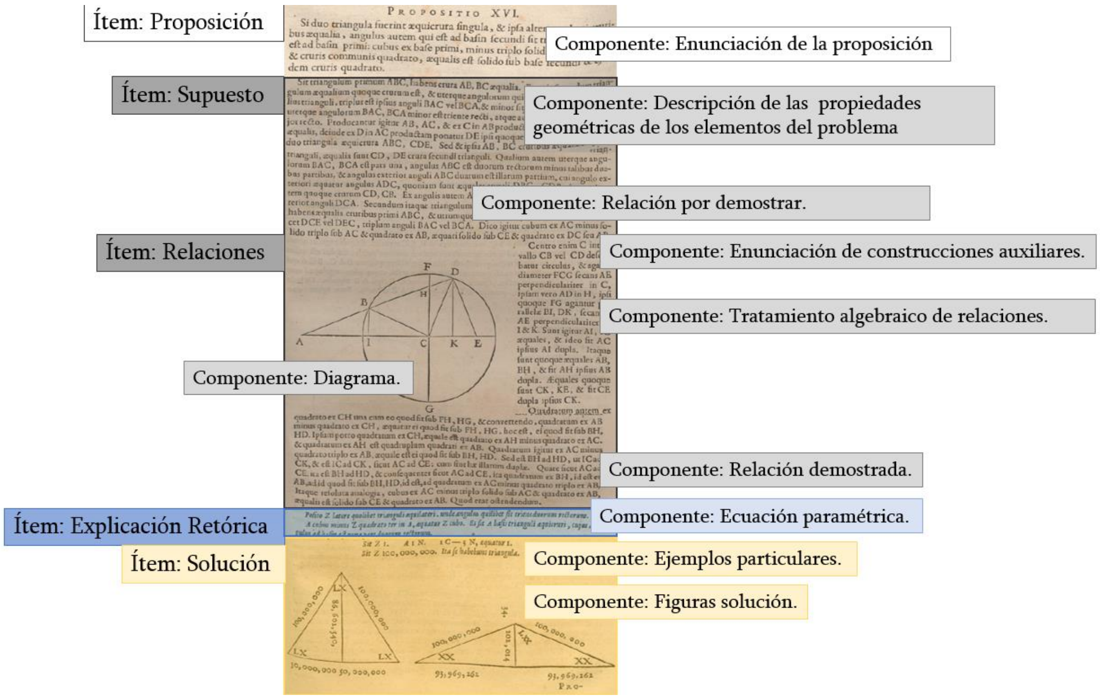


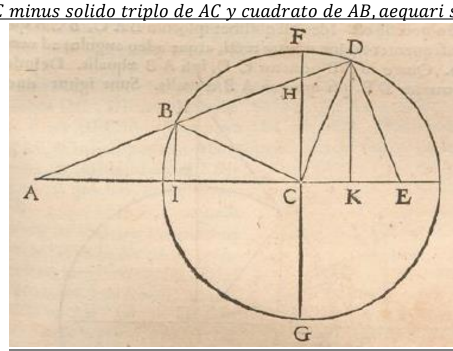
Figura 23. Estructura discursiva en un texto de Viète

Texto seccionado por Ítems

1. Si hay dos triángulos isósceles
2. y los lados de uno ^DE LOS TRIÁNGULOS son iguales a los del otro ^TRIÁNGULO
3. y el ángulo de la base del segundo ^TRIÁNGULO es igual a tres veces el ángulo base del primero ^TRIÁNGULO,
4. el cubo de la base del primero ^TRIÁNGULO y el cuadrado del lado común es igual al producto de la base del segundo ^TRIÁNGULO y el cuadrado del cuadrado del mismo lado.

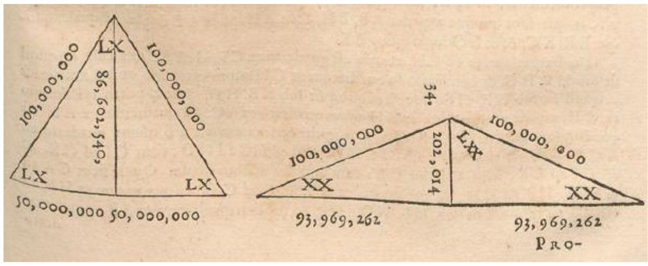
5. Sea el primer triángulo ABC
6. teniendo ^EL TRIÁNGULO ABC lados iguales AB y BC.
7. Puesto que el segundo triángulo es también isósceles
8. y cualquiera de los ángulos base de este segundo triángulo es tres veces el ángulo BAC o BCA
9. Y ^CUALQUIERA DE LOS ÁNGULOS BASE es necesariamente menos que un ángulo recto,
10. entonces cualquiera de los ángulos BAC y BCA es menor que un tercio de un ángulo recto
11. y el ángulo ABC es mayor que un ángulo recto.
12. Sea AB y AC extendidos.
13. De C a AB extendido, dibuja ^TÚ CD igual a AB.
14. Después de D a AC extiende ^DE
15. y dibuja DE [[igual también a AB.]]
16. Así que hay dos triángulos isósceles, ABC y CDE.
17. Pero CD y DE, [[los lados del segundo triángulo]] son iguales a AB y BC, [[los lados iguales del primer triángulo.]]
18. Más aún, tanto como cualquiera de los ángulos BAC y BCA es una parte de dos ángulos rectos,

19. así el ángulo ABC es igual a dos ángulos rectos menos esas dos partes.
20. El ángulo ADC es igual a éste ángulo ^ABC exterior,
21. puesto que los ángulos DBC y CDB son iguales debido a la igualdad de los lados CD y CB.
22. El ángulo exterior al ángulo DCA, más aún, es la suma de los ángulos ADC y DAC.
23. Entonces el segundo triángulo es CDE, [[que es isósceles]]
24. y ^CDE tiene lados iguales a los lados de ABC, [[el primer triángulo,]]
25. y cualquiera de sus ángulos base, [[denominados DCE o DEC,]] es tres veces el ángulo BAC o BCA.
26. Digo entonces que *cubum de AC minus solido triplo de AC y cuadrato de AB, aequari solido de CE y cuadrato de DC o AB*



27. Sea un círculo [[[[descrito a la distancia CB o CD desde C, [[su centro,]]]]
28. y que el diámetro FCG corte AE perpendicularmente en C
29. y ^CORTE AD en H.
30. Sean dibujados [[BI y DK paralelos a FG,]]
31. Cortando [[AE perpendicularmente en I y K.]]
32. Por lo tanto, AI y IC son iguales
33. y AC es el doble de AI.
34. Entonces también AB y BH son iguales,
35. haciendo AH el doble de AB.
36. Así como CK y KE son iguales,
37. haciendo CE el doble de CK.
38. Más aún, CG^2 [[(que es, AB^2)]] es igual a $CH^2 + (FH \times HG)$
39. y, por conversión, $AB^2 - CH^2$ es igual a $FH \times HG$ [[(que es, a $BH \times HD$).]]
40. Entonces, CH^2 es igual a $AH^2 - AC^2$
41. y AH^2 es $4AB^2$.
42. Por lo tanto $AC^2 - 3AB^2 = BH \times HD$.
43. Pero $BH:HD = IC:CK$
44. Y $IC:CK = AC:CE$.
45. Puesto que los términos posteriores son el doble de los primeros.
46. Entonces $AC:CE = BH:HD$
47. Y consecuentemente AC es a CE como BH^2 [[(es decir, AB^2)]] es a $BH \times HD$ [[—es decir, a $AC^2 - 3AB^2$.]]
48. Por lo tanto, resolviendo la proporción,
49. $AC^3 - 3(AC \times AB^2) = CE \times AB^2$,
50. Como era de demostrarse.
51. Asumiendo ^YO
52. que Z es cualquier lado del triángulo equilátero
53. y que, entonces, cada uno de los ángulos es un tercio de los dos ángulos rectos,
54. $A^3 - 3Z^2A = Z^3$.

55. Por lo tanto haciendo A la base de un triángulo isósceles, [[el ángulo base del cual es un noveno de dos ángulos rectos.]]
56. Que sea Z 1
57. y ^SEA A x.
58. $x^3 - 3x = 1$.
59. Si Z es 100,000,000,
60. estos son los triángulos:



5.4.3.2.1. Sistemas Intersemióticos

MULTISEMIOSIS			
SIGNIFICADO TEXTUAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	El texto de Viète, al igual que el de al-Khwârizmî, logra la Cohesión Intersemiótica, a partir de los recursos de Referencia Intersemiótica. Por ejemplo, nótese el uso de las palabras "triángulo", "ángulo", "lado", "círculo", con las cuales se alude a los Participantes en la imagen, con los que se logra un constante "ir" y "venir" entre el texto lingüístico y la imagen.
	MEZCLA INTERSEMIÓTICA		No se identifica mezcla intersemiótica, puesto que en la imagen los únicos recursos que se comparten con el texto lingüístico son las etiquetas que tienen una función relativa a la Ideación Intersemiótica.
	ENLACES DISCURSIVOS		No se identifican enlaces discursivos en el texto.
	SUBTÍTULOS		No hay uso de subtítulos en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	A diferencia de al-Khwârizmî, en el texto de Viète se dan numerosos casos de Sustitución Intersemiótica. En general, se identifica que la Sustitución Intersemiótica se da únicamente con los Participantes que representan segmentos y puntos de la Imagen. Por ejemplo, en las cláusulas 12, 28 y 57: "*Sea* AB *y* AC *extendidos*"; "*y que el diámetro FCG corte* AE *perpendicularmente en* C" y "y ^SEA A x". Donde AB, y AC corresponden a segmentos del triángulo ABC, mientras que AE corresponde al segmento prolongado sobre la base del triángulo ABC y C al punto central de la circunferencia. Nótese que en ninguna parte del

			texto estos Participantes son designados previamente, sino al instante de ser incorporados al texto no se usan Procesos Relacionales que los identifiquen con los Participantes de la Imagen.
	ADOPCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	La adopción semiótica, principalmente se da en el texto con base en el uso de las etiquetas, además de que aparecen expresiones simbólicas en el texto. Por ejemplo en la cláusula 56 y 57: "*Que sea Z 1*" "*y ^SEA A x*".
	DEIXIS	X	Los artículos definidos "la", "los", "sus", entre otros, ayudan en términos gramaticales a indicar que el Participante es existente, lo cual induce a rastrearlo en la Imagen. El uso de deícticos demostrativos ayuda a propiciar la Referencia Intersemiótica, como por ejemplo, en la cláusula 60: "estos son los triángulos". Sin embargo, se identifica un poco uso de ellos, lo cual dificulta el rastreo preciso de los Participantes.
	ETIQUETAS	X	El uso de las etiquetas A, B, C, ... en la imagen son fundamentales para desarrollar los Significados Textuales y Experienciales.
SIGNIFICADO EXPERIENCIAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	Por la estructura del método anaítico de Viète, puede verse claramente partes del texto que tienen finalidad específica y que se configuran como punto de partida para la acción posterior. De las cláusulas 1 a la 4, se describe la situación problema que interesa investigar, en la cual, se involucran dos triángulos con ciertas propiedades que posteriormente en las cláusulas de la 5 a la 26 se detallan construcciones de Participantes auxiliares que permitirán determinar las relaciones principales para verificar el problema. Estas construcciones se vinculan de manera sistemática con la Imagen. Posteriormente, de las cláusulas 27 a la 54 se realiza el trabajo algebraico que probará que se cumple la relación planteada en la cláusula 26 y finalmente de la cláusula 55 a la 60, se usará el resultado de la relación general y paramétrica para verificar dos casos específicos con la intención de mostrar cómo construir los triángulos del problema.
	SUBTÍTULOS		No hay uso de subtítulos en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X	A través de Procesos Relacionales Identificativos, se establecen Relaciones de Transitividad entre los Participantes del Lenguaje Natural y la Imagen. En las cláusulas 52 y 57, se tiene: "*que Z es cualquier lado del triángulo equilátero [[cuyos lados son desconocidos,]]*" "*y ^SEA A x*".

	LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN		No se identifican este tipo de recursos en el texto.
	METÁFORA SEMIÓTICA		No se identifican Metáforas semióticas en el texto.
	ETIQUETAS	X	El uso de las etiquetas A, B, C, … en la imagen son fundamentales para desarrollar los Significados Textuales y Experienciales.
SIGNIFICADO LÓGICO			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN		No hay uso de secuencias implicativas a nivel discursivo en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	LÓGICO-SEMÁNTICA		No se identifican relaciones Lógico-Semánticas entre recursos semióticos en el texto.
	INTERDEPENDENCIA		No se identifican relaciones de Interdependencia entre recursos semióticos en el texto.
	INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD	X	La ubicación de la Imagen centrada y separada del texto lingüístico, así como de las ecuaciones finales y los triángulos construidos facilita el análisis, puesto que se presenta como información relevante.
	METÁFORA SEMIÓTICA		No se identifican Metáforas Semióticas Lógicas entre recursos semióticos en el texto.

Tabla 19. Sistemas de intersemiosis en un texto de Viète

5.4.3.2.2 Mecanismos Intersemióticos

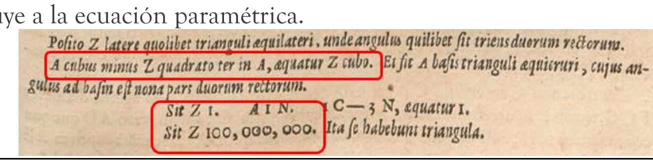
MECANISMOS INTERSEMIÓTICOS		
Mecanismo	Presencia	Descripción
Cohesión Semiótica	X	En el ejemplo de la Figura 69 se identifican dos Mini-Géneros: El primero relacionado con el planteamiento de una proposición geométrica que será demostrada en términos algebraicos y el segundo relativo a la solución de casos particulares de esta proposición. Como Items se identifican la Proposición (con el Componente de la Enunciación de la propocisión), el Supuesto (con Componentes: Descripción de las propiedades geométricas de los elementos del problema; Relación por demostrar; Enunciación de construcciones auxiliares; el Diagrama y el Tratamiento algebraico de relaciones), la Explicación Retórica (con el Componentes de la Ecuación paramétrica) y la Solución (con Componentes: los Ejemplos particulares y las Figuras solución). Hay cohesión semiótica en tanto, se dan casos de Referencia, pues en cada Ítem hay una constante repetición de los Participantes que se postulan al en el Ítem de la Proposición, en el Componente Diagrama, así como a la hora de definir la ecuación paramétrica en el Ítem de Explicación Retórica y finalmente en el Ítem de Solución cuando se explicitan los triángulos resultantes.
Adopción Semiótica	X	Hay incorporación sistemática de simbolismo geométrico y algebraico en el recurso semiótico del Lenguaje Natural. Véase por ejemplo en la imagen en el Ítem de Explicación Retórica, cómo se explica en el Lenguaje Natural la relación que guardan los triángulos de la proposición, explicación que incluye a la ecuación paramétrica.  Posito Z latere quolibet trianguli æquilateri, unde angulus quilibet sit triens duorum rectorum. A cubus minus Z quadrato ter in A, æquatur Z cubo. Et sit A basis trianguli æquicruri, cujus angulus ad basin est nona pars duorum rectorum. Sit Z 1. A 1 N. 1 C — 3 N, æquatur 1. Sit Z 100, 000, 000. Ita se habebunt triangula.
Mezcla semiótica		No se identifica Mezcla semiótica
Yuxtaposición y espacialidad	X	La disposición espacial, en términos de centrado y de espaciado lineal, que se emplean con los Compontes: Diagrama y Componente: Ecuación paramétrica contribuyen a que estos elementos sean concebidos como la información importante.
Transición Semiótica	X	Del Componente: Enunciación de la proposición se transita hacia el Componente: Descripción de las propiedades geométricas, que posteriormente dirige hacia el Componente: Diagrama, para mostrar las construcciones descritas en el Lenguaje Natural del Componente: Descripción de las propiedades geométricas, así como las auxiliares del Componente: Enunciación de construcciones auxiliares. Con base en estas transiciones se dan posteriormente transiciones hacia los demás Componentes: Tratamiento Algebraico y Relación demostrada. Con este último componente se establece el Componente: Ecuación paramétrica y finalmente se transita hacia los Componentes: Ejemplos particulares y Figuras solución. Enunciación de la proposición -> Descripción de las propiedades geométricas -> Diagrama -> Tratamiento Algebraico -> Relación demostrada -> Ecuación paramétrica-> Ejemplos particulares -> Figuras solución.
Metáfora Semiótica		No se recurre al mecanismo de Metáfora Semiótica

Tabla 20. Mecanismos intersemióticos en un texto de Viète

5.4.3.3. Texto de Descartes

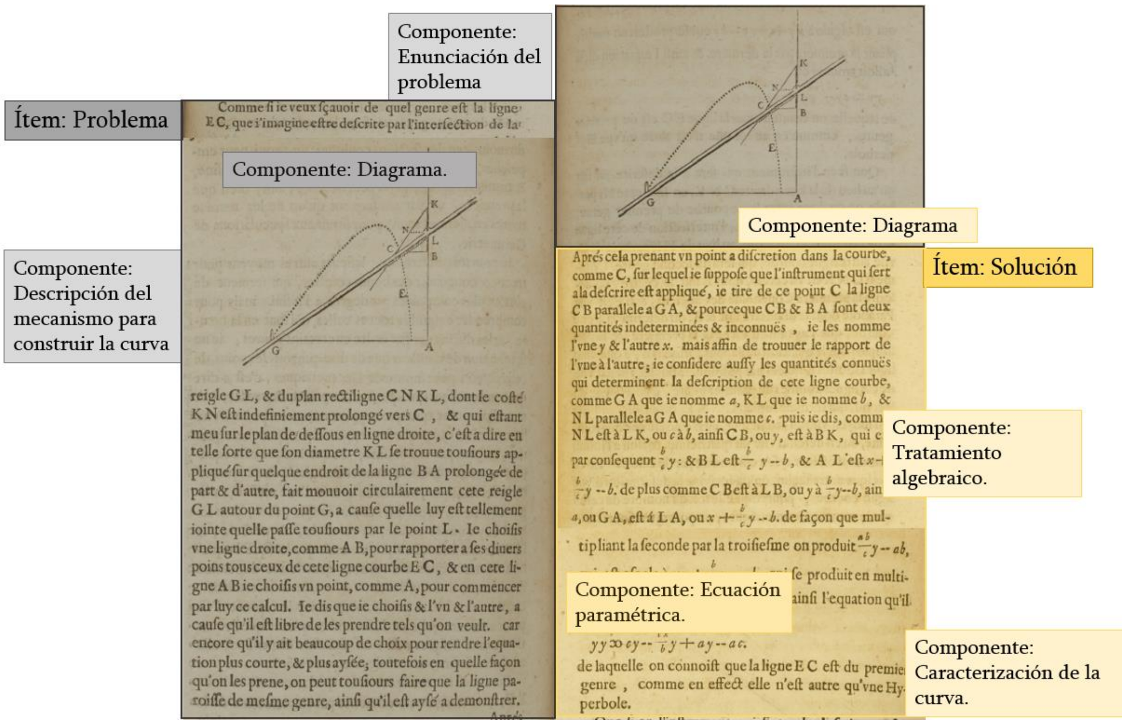
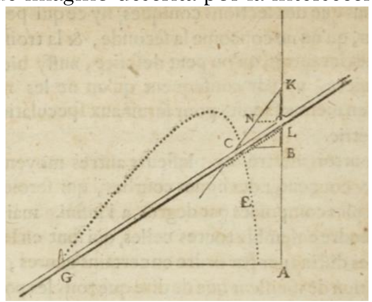


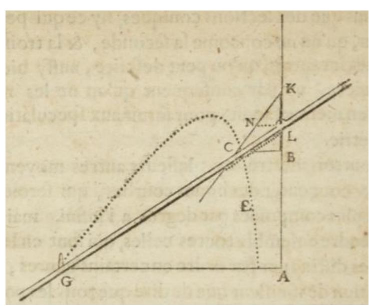
Figura 24. Estructura discursiva en un texto de Descartes

Texto seccionado por Ítems

1. Como si quisiera saber
2. de qué género es la línea EC [[que imagino descrita por la intersección de la regla GL y la pieza CNKL,]]



3. cuyo lado KN está prolongado indefinidamente hacia C,
4. y que moviéndose ^KN sobre el plano, en línea recta
5. –es decir de tal manera que su lado KL se encuentre siempre aplicado sobre alguna región de la línea BA [[prolongada de uno y otro lado–]]
6. hace mover circularmente la regla GL alrededor del punto G,
7. por estar ella ^LA REGLA GL vinculada
8. de tal manera que ^LA REGLA pasa siempre por el punto L.
9. ^YO Elijo una línea recta [[como AB]]
10. para referir ^YO a sus diversos puntos ^DE AB todos los de la línea curva EC;
11. y en esta línea ^YO AB elijo un punto, [[como el A,]]
12. Para ^YO empezar por él el cálculo.
13. Digo ^YO
14. que ^YO elijo éste o aquella
15. porque soy libre de tomarlos como quiera:
16. pues aunque haya muchas maneras de elección
17. para hacer ^YO la ecuación más corta y más fácil,
18. siempre, << cualquiera sea la manera [[como se los tome,]] >>
19. puede hacerse [[que la línea aparezca de un mismo género,]]
20. como es fácil [[demostrar.]]



21. Después de esto, tomando un punto cualquiera de la curva, como el C,
22. sobre el cual supongo
23. que el instrumento [[que sirve para describirla]] está aplicado,
24. trazo por este punto C la línea CB paralela a la GA,
25. y puesto que CB y BA son dos cantidades indeterminadas y desconocidas,
26. ^YO las designo a una y y a la otra x.
27. Pero, para encontrar la relación de ambas,
28. considero también las cantidades conocidas [[que determinan el trazado de esa línea curva,]] tales como GA [[que denomino a;]] Kl, [[que denomino b]] y NL paralela a GA, [[que denomino c.]]

29. Luego digo:
30. como LN es a LK
31. o c ^ES a b,
32. así CB [[o sea y,]] es a BK [[que es por consiguiente $\frac{b}{c}y$;]]
33. y BL es $\frac{b}{c}y - b$;
34. y AL es $x + \frac{b}{c}y - b$.
35. Además, como CB es a LB
36. y ^ES a $\frac{b}{c}y - b$,
37. así a [[o sea GA]] es a LA [[o $x + \frac{b}{c}y - b$.]]
38. De manera que multiplicando la segunda ^a por la tercera ^$x + \frac{b}{c}y - b$
39. se obtiene $\frac{ab}{c}y - ab$,
40. ^$\frac{ab}{c}y - ab$ que es igual a $xy + \frac{b}{c}yy - by$,
41. ^ $xy + \frac{b}{c}yy - by$, que resulta multiplicando la primera^y por la última $x + \frac{b}{c}y - b$;
42. y así que la ecuación [[que se debía encontrar]] es [[$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$,]]

43. En la cual se sabe
44. que la línea EC es de primer género:
45. pues, en efecto, no es otra que una hipérbola.

5.4.3.3.1. Sistemas Intersemióticos

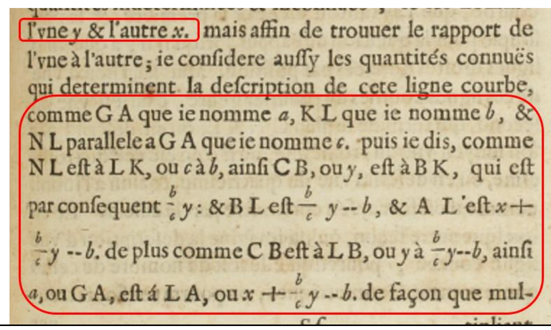
MULTISEMIOSIS			
SIGNIFICADO TEXTUAL			
Estrato	Sub-sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	El texto de Descartes, al igual que el de al-Khwârizmî y Viète, logra la Cohesión Intersemiótica, a partir de los recursos de Referencia Intersemiótica. Por ejemplo, nótese el uso de las palabras "triángulo", "ángulo", "lado", "círculo", con las cuales se alude a los Participantes en la imagen, con los que se logra un constante "ir" y "venir" entre el texto lingüístico y la imagen.
	MEZCLA INTERSEMIÓTICA		No se identifica mezcla intersemiótica, puesto que en la imagen los únicos recursos que se comparten con el texto lingüístico son las etiquetas que tienen una función relativa a la Ideación Intersemiótica.
	ENLACES DISCURSIVOS		No se identifican enlaces discursivos en el texto.
	SUBTÍTULOS		No hay uso de subtítulos en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	En el caso de Descartes la Sustitución Intersemiótica es explícitamente empleada. Como parte de su método Descartes destaca que uno de los pasos es el de designar las cantidades conocidas y desconocidas por medio de los símbolos más simples posibles. En las cláusulas 25, 26 y 28 se da cuenta de este hecho: "*y puesto que* CB *y* BA *son dos*

			cantidades indeterminadas y desconocidas", "^YO *las designo a una y* y *a la otra* x". "*considero también las cantidades conocidas [[que determinan el trazado de esa línea curva,]] tales como* GA *[[que denomino* a*;]]* Kl, *[[que denomino* b *]] y* NL *paralela a* GA, *[[que denomino* c*.]]*".
ADOPCIÓN INTERSEMIÓTICA		X	En el texto de Descates se muestra cómo la Adopción Intersemiótica es desarrollada de manera más sistemática, por las características que Descartes asigna al simbolismo. En este sentido, no solo se identifica el mismo tipo de Adopción Intersemiótica que en Al-Kwarismi y Viète, donde predomina la Adopción del simbolismo geométrico en el Lenguaje Natural, sino también, en Descartes se adopta considerablemente en el Lenguaje Natural su simbolismo.
	DEIXIS	X	Los artículos definidos "la", "el", entre otros, ayudan en términos gramaticales a indicar que el Participante es existente, lo cual induce a rastrearlo en la Imagen. Por otro lado, cuando se emplean los deícticos posesivos y demostrativos como, por ejemplo, en las cláusulas 3, 5 y 11: "cuyo lado KN [...]", "[...] su lado KL", "y en esta línea [...]" permiten hacer Referencia Intersemiótica respecto a los Participantes de la Imagen.
	ETIQUETAS	X	El uso de las etiquetas A, B, C, ... en la imagen son fundamentales para desarrollar los Significados Textuales y Experienciales.
SIGNIFICADO EXPERIENCIAL			
Estrato	**Sub-sistema**	**Presencia**	**Descripción**
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	Si bien, Descartes no señala explícitamente como Viète las partes en las que se estructura su método analítico, lo cierto es que como consecuencia de haber considerado el método de análisis geométrico por ambos, los hace estructurar su Discurso de manera similar. Por ejemplo, en este caso, se pueden identificar partes del texto que tienen finalidad específica y que se configuran como punto de partida para la acción posterior. De las cláusulas 1 a la 20, se describe la situación problema que interesa investigar, en la cual, se explicita la intención de determinar el género de una curva que es descrita por un mecanismo, descripción que es cuidadosamente explicada para mostrar cómo a partir de los movimientos de dicho mecanismo, la curva es construida. Posteriormente, toda esta descripción servirá para identificar los elementos de la imagen que relacionados con el mecanismo se convertirán en los Participantes principales del procedimiento. Nótese que en la cláusula 21 Descartes dice:

			"*Después de esto …*" y con esto inicia el procedimiento de establecimiento de relaciones para ser tratadas de manera algebraica en las cláusulas de la 21 a la 42. Finalmente, a partir de la ecuación paramétrica en la cláusula 42, se realiza una inspección que Descartes no muestra pata determinar el género de la curva.
	SUBTÍTULOS		No hay uso de subtítulos en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X	A través de Procesos Relacionales Identificativos, se establecen Relaciones de Transitividad entre los Participantes del Lenguaje Natural y la Imagen. Por ejemplo, en la cláusula 33 se tiene: "*y BL es* $\frac{b}{c}\, y - b$;".
	LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN		No se identifican este tipo de recursos en el texto.
	METÁFORA SEMIÓTICA	X	Se identifica una única Metáfora Semiótica en la cláusula 42: " *y así que la ecuación [[que se debía encontrar]] es [[* $yy = cy - \frac{c}{b}\, xy + ay - ac$, *]]*". En donde la ecuación como cláusula simbólica, se adopta en el Lenguaje Natural como un grupo nominal.
	ETIQUETAS	X	El uso de las etiquetas A, B, C, … en la imagen son fundamentales para desarrollar los Significados Textuales y Experienciales.
SIGNIFICADO LÓGICO			
Estrato	Sub-sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN		No hay uso de secuencias implicativas a nivel discursivo en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	LÓGICO-SEMÁNTICA		No se identifican relaciones Lógico-Semánticas entre recursos semióticos en el texto.
	INTERDEPENDENCIA		No se identifican relaciones de Interdependencia entre recursos semióticos en el texto.
	INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD	X	La ubicación de la Imagen centrada y separada del texto lingüístico, así como de la ecuación final y los triángulos construidos facilita el análisis, puesto que se presenta como información relevante.
	METÁFORA SEMIÓTICA		No se identifican Metáforas Semióticas Lógicas entre recursos semióticos en el texto.

Tabla 21. Sistemas de intersemiosis en un texto de Descartes

5.4.3.3.2. Mecanismos Intersemióticos

MECANISMOS INTERSEMIÓTICOS		
Mecanismo	Presencia	Descripción
Cohesión Semiótica	X	En el ejemplo de la Figura 70 se identifican dos Mini-Géneros: El primero relacionado con el planteamiento de un problema geométrico y el segundo relativo al tratamiento algebraico del problema. Como Items se identifican el Problema (con el Componente de la Enunciación del problema; Diagrama y Descripción del mecanismo para construir la curva) y la Solución (con Componentes: Diagrama, Tratamiento algebraico, Ecuación paramétrica y Caracterización de la curva). Hay cohesión semiótica en tanto, se dan casos de Referencia, pues en cada Ítem hay una constante repetición del Participante "Curva", así como de los Participantes descritos en el Componente: Descripción del mecanismo para construir la curva y en el Componente: Diagrama.
Adopción Semiótica	X	Hay incorporación sistemática de simbolismo geométrico y algebraico en el recurso semiótico del Lenguaje Natural. Véase por ejemplo en la imagen cómo se establecen en el Lenguaje Natural a través de Procesos Relacionales Identificativos las asociaciones entre simbolismo y los Participantes del Diagrama.  l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie confidere auffy les quantités connuës qui determinent la defcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eft à L K, ou c à b, ainfi C B, ou y, eft à B K, qui eft par confequent $\frac{b}{c}y$: & B L eft $\frac{b}{c}y - b$, & A L eft $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eft à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainfi a, ou G A, eft á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-
Mezcla semiótica		No se identifica Mezcla semiótica
Yuxtaposición y espacialidad	X	La disposición espacial, en términos de centrado y de espaciado lineal, que se emplean con los Compontes: Diagrama y Componente: Ecuación paramétrica contribuyen a que estos elementos sean concebidos como la información importante.
Transición Semiótica	X	Del Ítem: Problema hay un progresivo tránsito entre los distintos Componentes de ambos Ítems. A partir de los Componentes: Diagrama y Descripción del mecanismo para construir la curva es posible el establecimiento del Componente: Tratamiento algebraico, el cual, por consiguiente, da paso al Componente: Ecuación paramétrica. Finalmente, a partir del Componente: Ecuación paramétrica se transita al Componente: Caracterización de la curva. Diagrama y Descripción del mecanismo para construir la curva -> Tratamiento algebraico -> Ecuación paramétrica -> Caracterización de la curva.
Metáfora Semiótica	X	Se da un único caso de Metáfora Semiótica al interior del Ítem: Solución, en donde a través de un Proceso Relacional Identificativo se asocia el grupo nominal "*la ecuación…*" con la cláusula simbólica "$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$".

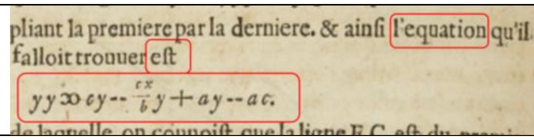
			 pliant la premiere par la derniere. & ainsi l'equation qu'il falloit trouuer est $yy \infty cy -- \frac{cx}{b}y + ay -- ac.$

Tabla 22. Mecanismos intersemióticos en un texto de Descartes

5.4.3.4. Síntesis del análisis multimodal de los sistemas intersemióticos

La siguiente tabla resume las características de los sistemas intersemióticos de los tres textos analizados.

al-Khwârizmî			Viète			Descartes		
SIGNIFICADO TEXTUAL								
Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X
	MEZCLA INTERSEMIÓTICA			MEZCLA INTERSEMIÓTICA			MEZCLA INTERSEMIÓTICA	
	ENLACES DISCURSIVOS			ENLACES DISCURSIVOS			ENLACES DISCURSIVOS	
	SUBTÍTULOS			SUBTÍTULOS			SUBTÍTULOS	
LEXICO-GRAMÁTICA	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA		**LEXICO-GRAMÁTICA**	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**LEXICO-GRAMÁTICA**	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA	X
	ADOPCIÓN INTERSEMIÓTICA	X		ADOPCIÓN INTERSEMIÓTICA	X		ADOPCIÓN INTEREMIÓTICA	X
	DEIXIS	X		DEIXIS	X		DEIXIS	X
	ETIQUETAS	X		ETIQUETAS	X		ETIQUETAS	X
SIGNIFICADO EXPERIENCIAL								
Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X
	SUBTÍTULOS			SUBTÍTULOS			SUBTÍTULOS	
LEXICO-GRAMÁTICA	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X	**LEXICO-GRAMÁTICA**	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X	**LEXICO-GRAMÁTICA**	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X
	LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN			LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN			LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN	
	METÁFORA SEMIÓTICA	X		METÁFORA SEMIÓTICA			METÁFORA SEMIÓTICA	X
	ETIQUETAS	X		ETIQUETAS	X		ETIQUETAS	X
SIGNIFICADO LÓGICO								

Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN		**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN		**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN	
LEXICO-GRAMÁTICA	LÓGICO-SEMÁNTICA		**LEXICO-GRAMÁTICA**	LÓGICO-SEMÁNTICA		**LEXICO-GRAMÁTICA**	LÓGICO-SEMÁNTICA	
	INTERDEPENDENCIA			INTERDEPENDENCIA			INTERDEPENDENCIA	
	INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD	X		INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD	X		INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD	X
	METÁFORA SEMIÓTICA			METÁFORA SEMIÓTICA			METÁFORA SEMIÓTICA	

Tabla 23. Síntesis del análisis multimodal de los sistemas intersemióticos

En términos de los sistemas intersemióticos analizados puede verse que los tres textos cumplen casi con las mismas características. Si bien esto indica que aún en la época de los textos Viète y Descartes se siguen conservando las mismas características multisemióticas para la escritura, hay que considerar que, en el caso de éstos, sus textos incorporan los tres recursos semióticos del lenguaje matemático escrito actual, a diferencia del de al-Khwârizmî. Por lo tanto, esto da una muestra de evolución en términos de la consistencia con los sistemas intersemióticos que habían sido empleados típicamente en los textos previos a Viète y Descartes incorporando el recurso del simbolismo. Es por esta razón que en ambos textos a diferencia del de al-Khwârizmî se identifica el sistema de SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA.

Por otro lado, en el caso de las metáforas semióticas encontradas en el texto de al-Khwârizmî y en el de Descartes, también debe considerarse la acotación anterior, puesto que la METÁFORA SEMIÓTICA en el primer caso corresponde a un salto del lenguaje natural a la imagen, sin embargo, este tipo de saltos era típico en toda la tradición previa a Viéte y Descartes, puesto que la imagen para al-Khwârizmî es una referencia de todo el procedimiento que se narra en el lenguaje natural, este salto aparece justo al final del texto para ilustrar lo anteriormente dicho. En el caso de Desacartes, la metáfora semiótica se da en el salto del lenguaje natural al simbolismo, lo cual confiere al simbolismo, y en particular, a la ecuación de un estatus de Participante y no de Cláusula, por lo que la ecuación en términos conceptuales se convierte en un objeto.

Un aspecto relevante que se identifica en los tres textos es la ausencia del sistema de MEZCLA INTERSEMIÓTICA, el cual permite construir mayor cohesión entre los tres sistemas, en particular, en el caso de las imágenes cuando se recurre al simbolismo y al lenguaje natural dentro de las mismas, permiten señalar o indicar aspectos relevantes que relacionen la imagen con el texto lingüístico, lo cual, permite una lectura y comprensión más inmediata de las relaciones entre lo dicho en el texto lingüístico y la imagen. En este sentido, se pude decir que la gramática visual, se ve afectada por este hecho, ocasionando entonces un grado muy bajo de cohesión.

Por otro lado, el significado Lógico intersemiótico puede verse también en estado aún incipiente puesto que, quizás por las características tecnológicas de la época, estos textos aún no podían involucrar tipografías especializadas para explotar el potencial de las relaciones lógicas a nivel del discurso.

5.4.3.5 Síntesis del análisis multimodal de los mecanismos de intersemiosis

En la siguiente tabla se presenta la síntesis de los mecanismos de intersemiosis detectados en los textos analizados.

al-Khwârizmî		Viète		Descartes	
Mecanismo	Presencia	Mecanismo	Presencia	Mecanismo	Presencia
Cohesión Semiótica	X	**Cohesión Semiótica**	X	**Cohesión Semiótica**	X
Adopción Semiótica	X	**Adopción Semiótica**	X	**Adopción Semiótica**	X
Mezcla semiótica		**Mezcla semiótica**		**Mezcla semiótica**	
Yuxtaposición y espacialidad	X	**Yuxtaposición y espacialidad**	X	**Yuxtaposición y espacialidad**	X
Transición Semiótica	X	**Transición Semiótica**	X	**Transición Semiótica**	X
Metáfora Semiótica	X	**Metáfora Semiótica**		**Metáfora Semiótica**	X

Tabla 24. Síntesis del análisis multimodal de los mecanismos de intersemiosis

Esta tabla refleja a nivel de discurso las características antes descritas en el análisis de los sistemas intersemióticos. En este sentido, puede verse que los tres textos aún no poseen las características de la gramática del lenguaje actual, sobre todo en el caso de la Mezcla semiótica, afectando como ya se ha mencionado a la gramática visual.

6

Resultados de la primera fase

6.1 Revisión de las preguntas de investigación

Los resultados encontrados en la primera fase de estudio permitieron responder las pregunta de investigación P1 y parcialmente las P2, P3 y P4. Estas tres últimas por el hecho de que en esta fase no tuvo como objetivo el trabajo con estudiantes, puesto que las consideraciones epistemológicas de esta primera fase servirían para la exploración posterior.

Con fines de lectura, las respuestas completas a todas las preguntas se presentan en el apartado 9. Sin embargo, resumiremos lo obtenido para cada pregunta en esta fase.

6.1.1. P1. ¿Cuáles fueron las implicaciones de la reformulación del método de análisis en la creación del análisis algebraico de Viète y Descartes, y cómo influyó esta actividad matemática en la emergencia de la ecuación paramétrica?

En términos generales la implicación que tuvo la reformulación del método de análisis geométrico en la creación de las álgebras de Viète y Descartes fue justo la creación de un nuevo método analítico: el análisis algebraico, el cual fue llamado por Viète y Descartes *arte analítco* y *Mathesis Universalis* respectivamente. Este método implica la concepción de un álgebra para la geometría (Oaks, 2018).

Como se muestra en los trabajos de Cifoletti (2003, 2006), ambos matemáticos se vieron envueltos en una época en la que los comentarios de Proclo permearon el quehacer de las ciencias matemáticas, en los que se advertía de una ciencia universal matemática que contenía tanto a la geometría y a la aritmética y que ella era una ciencia completa y libre de defectos, a la cual la teoría de las proporciones pertenecía.

De ahí que, en sus búsquedas, ambos coincidieron en retomar los trabajos de Theon, Pappus y Diofanto como la base de sus respectivos métodos.

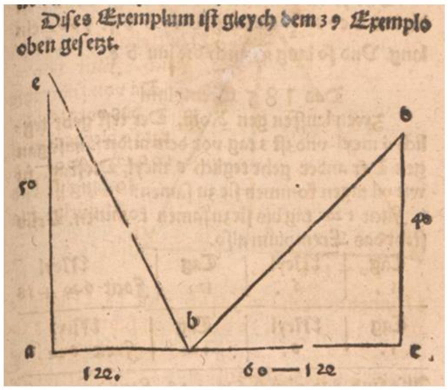
> Aunque los antiguos proponían sólo [dos tipos de] análisis, la *Zetética* y la *Porística*, a las que se aplica la definición de Theon, he añadido una tercera, que puede llamarse *Rética* o *Exegética* [...] Diofanto usó la zetética más sutilmente en aquellos libros que han sido recogidos en la Aritmética. Allí exhibe con seguridad este método en números, pero no en símbolos, para los que sin embargo se utiliza (Viète, 1983, pp. 1-9).
>
> Y, ciertamente, me *parece que algunos vestigios de esta verdadera Mathesis aparecen todavía en Pappus y Diophanto*, los cuales, aunque no en los primeros tiempos, vivieron, sin embargo, muchos siglos antes de ahora (Descartes, 1996, p. 81).

Con base en esta acotación de su actividad, aunque buscando finalidades distintas, Viète y Descartes lograron constituir una forma de hacer matemáticas de manera particular donde el álgebra ocuparía un rol fundamental y específico como parte del método. Así el Contexto de la situación específica del álgebra de Viète y Descartes iba tomando forma. Y como consecuencia de este proyecto, se dio el paso definitivo hacia la reconceptualización del objeto mismo al que podría ser aplicable el álgebra de ambos (Klein, 1968). De manera que se distinguen cuatro aspectos que caracterizan el rol que juega el álgebra en el análisis algebraico:

1. *El álgebra se convierte en una herramienta constituyente de un método para la resolución de problemas y la demostración de Teoremas matemáticos.*
2. *El álgebra debía aplicarse a problemas geométricos y aritméticos a diferencia de la tradición algebraica previa que trataba problemas artiméticos, o bien, con la resolución de ecuaciones. Por lo tanto, el álgebra debía adquirir un carácter más general.*
3. *Como consecuencia de la amplitud del campo de aplicación para el álgebra, la noción de número debía ser resignificada.*
4. *Se instaura una justificación epistémica con la que cualquier equivalencia puede conceptualizarse como una ecuación y viceversa. Fundamentalmente las proporciones.*

La actividad matemática de Viète y Descartes, en comparación con sus predecesores abordó problemas geométricos de mayor complejidad. La especificidad que le da esta actividad geométrica al álgebra no es fácil de considerar, por lo que esto constituye una hipótesis epistemológica que justificamos a partir de dos hechos. Por un lado, se tiene que algunos historiadores como Stedall (2008) hacen referencia al carácter general que tiene la actividad geométrica por lo que, de acuerdo con ella, es natural que el análisis algebraico debía incorporar cantidades generales y no específicas, por lo tanto, debía adquirir un carácter paramétrico.

Esta hipótesis se torna relevante si se considera que en la tradición algebraica previa a Viète y Descartes los tratados algebraicos no tenían como objetivo la resolución de problemas geométricos, y cuando esto sucedía (véase la Figura 25), los problemas no involucraban gran cantidad de relaciones —como en los que Viète y Descartes resolvían—. Además, estos problemas solo servían como un contexto diferente para mostrar la utilidad de la técnica algebraica. Por lo tanto, una diferencia sustancial entre Viète y Descartes, es el hecho de que ellos trabajaron con problemas de geometría en los que había una gran cantidad de relaciones intervinientes que no aparecían explícitamente en la imagen. Entonces, esto apunta hacia una diferencia fundamental en el tipo de problemas que abordaron, en comparación con sus predecesores.



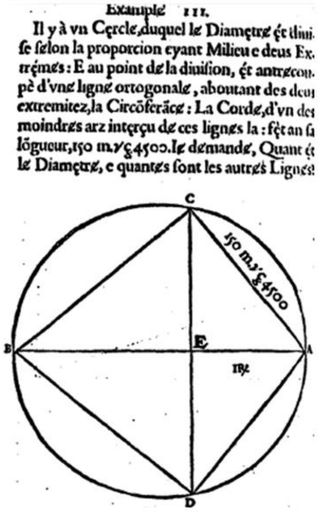


Figura 25. Ejemplos de problemas geométricos previos a Viète y Descartes en (Stifel, 1553, fol. 305; Peletier, 1554, p. 208 respectivamente)

Nota: En el primer caso se intenta determinar el valor de la incógnita (segmento ab) que cumpla que las alturas de los respectivos triángulos sean 50 y 40 unidades, y que la longitud de la suma de las bases de ambos sea de 60 unidades. En el segundo caso se desea obtener la medida del diámetro (AB) de una circunferencia que al ser cortada por una cuerda ortogonal (CD) a este, forma otra cuerda (CA) de longitud $150 - \sqrt{45000}$ (en notación anacrónica).

Por otro lado, como una forma de robustecer esta hipótesis está el hecho de que, en el caso de Descartes, se reconoce que la etapa de inmadurez de sus ideas (Bos, 2001; Sasaki, 2003; Rabouin, 2010), se vio superada cuando se dedicó a aplicar su método en la resolución del Teorema de Pappus. Problema que ni los propios Apollonio o Euclides habían podido resolver en su totalidad de acuerdo con este matemático.

Hasta antes de esta resolución Descartes manifestaba no solo el uso de la notación cósica correspondiente a la tradición algebraica previa, sino también, se identifica el problema de la dimensionalidad, puesto que en las *Regulae ad directionem ingenii* (1628) él propone tres maneras distintas de representar la unidad, aludiendo a lo figural como era usual antes de él—como un punto, como una línea y como un rectángulo (ver Figura 26).

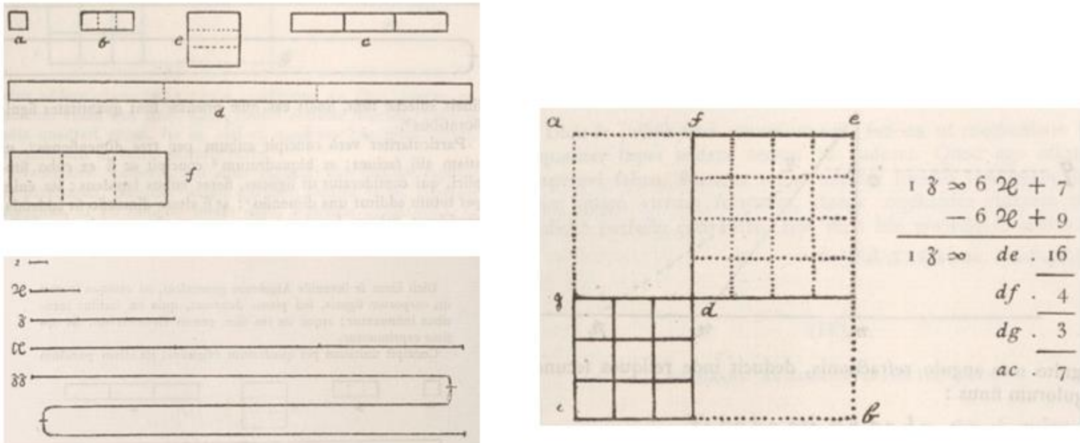


Figura 26. Representación de la unidad (izquierda) y notación cósica (derecha) en Descartes previo a la *La Géométrie* (Adam y Tannery, 1908, pp. 333-335)

Descartes logró resolver este obstáculo con la invención ingeniosa de la unidad entendida como una línea ya no atada a su condición de especie o tipo de número, y más aún de la representación figural que imperó por mucho tiempo. A pesar de no hacer alusión a este hecho, como ya se ha mencionado, Viète lo reflejaba en su programa a través del *genus* que caracterizaba a sus especies, lo cual lo obligó a definir la ley de homogeneidad.

Por lo tanto, a partir de la resolución del problema de Pappus Descartes identificó que las representaciones figurales no resultaban ser pertinentes para definir una operatividad de segmentos, pues en este tipo de problemas lo esencial es la relación de segmentos, es decir, líneas cuya dimensión es uno. De esta manera, el trabajar con interpretaciones de la unidad con dimensiones mayores que uno le hubiera dificultado el tratamiento de este tipo de relaciones entre segmentos. *La resolución de problemas geométricos complejos es lo que permitió la resignificación de la noción de número en tanto magnitud continua y discreta*. La complejidad de estos problemas recae en el hecho de que intervienen grandes cantidades de relaciones.

Esto último refleja claramente que tanto Viète como Descartes se encontraban resolviendo problemas geométricos por medio de la herramienta algebraica y no una reinterpretación simbólica de problemas aritméticos como en el caso de sus antecesores.

Con base en lo descrito anteriormente el *Contexto de Significación* del análisis algebraico creado por Viète y Descartes puede sintetizarse con el siguiente esquema:

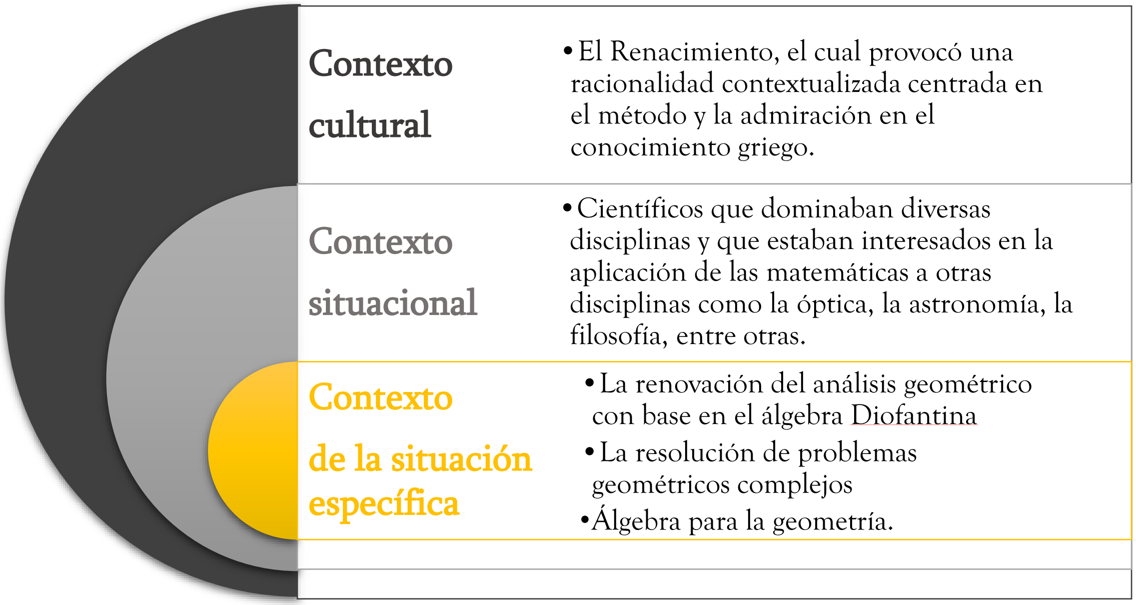


Figura 27. Contexto de significación del análisis algebraico de Viète y Descartes

6.1.2. P2. ¿Qué particularidades posee la actividad matemática del análisis algebraico?[14]

Como argumentamos previamente, la relevancia de los problemas geométricos en la construcción del análisis algebraico nos permite caracterizar de manera más puntual los elementos de la actividad matemática. Con base en el análisis de la actividad matemática del apartado 5.3.2., es posible determinar una progresión pragmática. Esta progresión como se muestra en la descripción de la segunda fase del estudio, tiene un rol fundamental, pues permite identificar las consideraciones epistemológicas (Barbin, Guillemette, y Tzanakis, 2020) principales para llevar a cabo la exploración con estudiantes.

Como hemos mencionado en el apartado de los fundamentos teóricos, la progresión pragmática que nos interesó es la de *acción-actividad-práctica socialmente compartida*. Esta progresión se obtiene a partir de las respuestas a los cuestionamientos analíticos provenientes del análisis cualitativo. Para el nivel *acción* se integran los cuestionamientos analíticos *¿Qué y cómo se hace?*, para el nivel de *actividad* el cuestionamiento es *¿Para qué se hace?*, y por último, cabe destacar que este quehacer matemático, se basa en una necesidad de *algebrización de la geometría*, como también ya hemos argumentado. Esta necesidad integra las acciones y

[14] Reportamos en López-Acosta & Montiel (2021, 2022) una síntesis del proceso

actividades y puede interpretarse como una práctica socialmente compartida, en el sentido de que aunque separados en el tiempo, Viète y Descartes articularon el álgebra y la geometría para definir este método matemático. De tal suerte que las condiciones sociales de la época, así como sus intereses personales les condicionaron para compartir esta necesidad de un álgebra para la geometría.

A modo de síntesis, considerando los problemas 1 de Viète y los problemas 1 y 2 de Descartes, la actividad matemática del análisis algebraico presenta los siguientes rasgos:

Tomando en cuenta el problema 1 de Viète se tiene que como respuesta al cuestionamiento *¿qué y cómo lo hace?*, que Viète detalla primeramente las propiedades de la construcción geométrica a demostrar y procede posteriormente a *establecer relaciones de equivalencia* con la finalidad de obtener una relación que las articule. Para ello recurre a *todas las relaciones aritméticas* (p. ej. a partir de $AH = 2AB$ se tiene $AH^2 = 4AB^2$) *y geométricas* (p. ej. el teorema de Pitágoras aplicado al ΔACH) que puedan ser útiles para construir la ecuación. Ciertamente, el tipo de equivalencias planteadas son, mayoritariamente, *proporciones*. Al concretar la relación, esta se transforma en una ecuación algebraica en la que *se distinguen las cantidades conocidas y desconocidas*.

Respecto al cuestionamiento *¿para qué se hace?*, la intención de Viète es la determinación de una *fórmula* para calcular las medidas de A para cualesquiera triángulos que cumplan las condiciones geométricas del problema, al resolver la ecuación para cada uno de los valores de Z.

Mientras tanto, en el caso de Descartes, tomando en consideración el problema 1, se obtiene lo siguiente:

Sobre el cuestionamiento analítico *¿qué y cómo se hace?*, Descartes detalla las propiedades del instrumento geométrico. En este caso, cada punto C resulta de su movimiento, obteniendo variaciones en la distancia a la que C se encuentra de la línea AK –el segmento CB (y)–. Posteriormente se *establecen relaciones de equivalencia*, las cuales no son necesariamente proporciones, como hace Viète (p. ej. $BL = BK - LK$), aunque sí la mayoría, al igual que en el caso de Viète. Esto con la finalidad de obtener una ecuación que las articule, no sin antes establecer un *sistema concreto de designación de las cantidades conocidas y desconocidas*. Dado el sistema, se vale de cualquier proporción que relacione las líneas o segmentos de interés para convertirlas en ecuaciones.

En cuanto al cuestionamiento *¿para qué se hace?*, Descartes intenta obtener una *expresión general* con la cual, a través de manipulaciones de los parámetros, identifique qué tipo de *lugar geométrico* está siendo expresado.

Del mismo modo, para el problema 2, se obtiene lo siguiente:

Respecto del cuestionamiento *¿Qué y cómo se hace?*, la cantidad de requerimientos para resolver este problema es amplia en comparación con problemas geométricos en tratados algebraicos previos. Descartes establece nuevamente como primer paso *relaciones de equivalencia* de distinta naturaleza (p. ej., $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$, $CR = y + \frac{bx}{z}$, $CR = CB + BR$), principalmente proporciones, entre ciertas líneas de interés y determinadas por las condiciones del problema (parámetros) respecto a otras dos (variables) que le sirven como un sistema de referencia que no es necesariamente ortogonal. Con esto busca una ecuación que cumpla la condición del problema ($y' = \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$) y analiza distintos casos para identificar el tipo de lugar geométrico que se obtiene para cada uno (Si $\frac{p}{m}xx = 0$, entonces $y' = \sqrt{mm + ox}$, lo cual es lo mismo que $y'^2 = mm + ox$. Por lo tanto, C estaría sobre una parábola) y así mostrarlos explícitamente vía la construcción.

Para ello plantea necesario construir un sistema concreto de designación de las cantidades conocidas y desconocidas que le permita manipular las relaciones de la manera más simple posible (Sea designado x el segmento de la línea AB comprendido entre los puntos A y B; y CB sea designado y). La importancia y función de este sistema es clara en este problema pues es incluso recurrente, dado que la designación no se da al inicio de la resolución, sino también en Descartes designa e incluye nuevos parámetros específicos en una etapa intermedia, con los cuales le es posible analizar de manera más simple las relaciones dadas ("Y si para abreviar, $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ escribimos o y en vez de $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ escribimos $-\frac{p}{m}$, pues siendo todas las cantidades dadas, podemos designarlas como nos plazca" Descartes, 1637, p. 326).

Con el cuestionamiento *¿Para qué se hace?* Identificamos que la intención es obtener una expresión general con la cual, a través de manipulaciones de los parámetros, identifique tanto la familia de curvas que están siendo expresadas como su género.

Con base en estas consideraciones y el EHE se obtuvo que la actividad analítica algebraica se rige bajo la práctica de *algebrización de la geometría*. Esta práctica plantea la complejidad de articular el álgebra con la geometría, y muestra un proceso cuya base es el *establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole* y la *construcción de sistemas semióticos sistemáticos para discriminar cantidades conocidas* (parámetros) y *desconocidas* (incógnitas-variables), con base en las condiciones geométricas impuestas por el problema. Este primer componente de la actividad matemática es asociado al primer nivel pragmático de *acción*. A su vez, estas acciones son evocadas con el objetivo de *construir fórmulas y expresiones generales* para representar familias de soluciones o de curvas, lo cual se asocia con el nivel pragmático de *actividad*.

Cabe recalcar que la algebrización de la geometría se vale principalmente de la puesta en uso de la *noción de proporción*, pues como se ha argumentado, permite el tránsito entre las relaciones geométricas de equivalencia y la igualdad algebraica (la ecuación). Adicionalmente, una de las justificaciones epistémicas de esta práctica, es que *toda relación de equivalencia puede tiende a ser conceptualizada como ecuación algebraica*.

6.1.3. P3. ¿Cuál es la gramática funcional del lenguaje algebraico de Viète y Descartes?

En términos generales, puede identificarse desde una perspectiva Sistémica-Funcional que los recursos gramaticales que son empleados, no solo por Viète y Descartes sino por los otros algebristas analizados, son sistemáticamente empleados. Es decir, los discursos son construidos cuidadosamente para expresar, organizar y darle textura a la experiencia algebraica. Esto tiene sentido, considerando que dichos discursos analizados son escritos, por lo tanto, se espera que como tales, presenten una estructura concreta y bien pensada, a diferencia del discurso hablado. Este análisis refuerza la postura de O'Halloran (2005), quien establece que los tres recursos semióticos contribuyen de manera sistemática y articulada para expandir el campo semántico de las matemáticas.

En este sentido, al menos para Viète y Descartes, el simbolismo es solo una parte del lenguaje y no un recurso semiótico autónomo, por lo que ellos mismos le asignan un rol específico en su estructura discursiva y conceptual. Siempre el simbolismo se encuentra incrustado en un recurso semiótico que contempla elementos de otros sistemas que le permiten adquirir su función.

Bajo estas ideas, el simbolismo debe ser *adoptado* como recurso semiótico dentro del Lenguaje Natural. Esto se logra a partir de *cláusulas relacionales*. Una vez adoptado el recurso del simbolismo, las operaciones sobre los Participantes simbólicos son descritas a través de Procesos materiales abstractos acompañados de elementos circunstanciales que definen y limitan la acción sobre estos. Con esto se conforman textos cohesivos que delimitan de manera importante la actividad algebraica relativa al paradigma donde se encuentre—problemas aritméticos, resolución de ecuaciones, resolución de sistemas de ecuaciones, análisis de propiedades en las ecuaciones, o bien, demostración y resolución de problemas geométricos.

En el caso de Viète y Descartes, la estructuración del razonamiento mostrado en los textos analizados indica complejidad en las elecciones gramaticales relativas a las relaciones clausulares, puesto que tienden a promover significados dependientes y significados que destacan, complementan o condicionan los significados principales. Por lo tanto, conforman largas cadenas de razonamiento que implican que en la lectura sean complejas de "desenvolver".

Por otro lado, la forma en la que puede ser interpretado el mensaje algebraico difiere respecto al problema que se trata, aunque en general trata de una combinación entre los que están siendo objeto de modificación y el procedimiento que lo modifica.

Es notable que, en los textos, los Participantes en ocasiones son elididos, lo cual dificulta en ocasiones la recuperación de quién se habla en el texto.

La gramática menos desarrollada en los textos de Viète y Descartes es la visual, puesto que se considera que, por limitaciones de la época, la imagen no había podido desarrollar el potencial que hoy tiene. Esto porque las imágenes en ambos algebristas se presentan como una mera ilustración de referencia en la que no se incluyen como apoyo los Participantes más importantes del discurso para un rastreo más fácil y, por tanto, una cohesión más robusta entre los tres recursos semióticos. No obstante, el uso de la imagen adquiere un uso distinto a los algebristas previos, puesto que, para estos, la imagen es una ilustración que justifica y describe los pasos de la demostración de las reglas algebraicas para resolver ecuaciones, mientras que para Viète y Descartes representa una realidad semiótica que se está estudiando y, por lo tanto, funciona para trabajar sobre ella, o bien manipularla de manera simbólica.

6.1.4. P4. ¿Qué características presentan los textos algebraicos de algebristas en términos de intersemiosis?

Como ya se ha mencionado, un primer aspecto a destacar en términos intersemióticos es que, en todos los textos analizados, el simbolismo nunca fungió como un recurso semiótico autónomo, sino más bien es adoptado en el Lenguaje Natural.

Aunado a las decisiones gramaticales específicas, detalladas previamente, la complejidad del lenguaje algebraico de Viète y Descartes se puede notar también a nivel discursivo tomando en cuenta los sistemas de intersemiosis y los respectivos mecanismos de intersemiosis que se identificaron presentes en ambos textos.

Se determina que los mecanismos de intersemiosis descritos por O'Halloran (2005) no fueron encontrados en su totalidad en los textos analizados, en particular, el mecanismo de *mezcla intersemiótica* se identificó como ausente, lo cual explica, justo la dificultad vista a nivel gramatical de las imágenes, en tanto, al no incorporar los recursos semióticos del simbolismo y lenguaje natural, dificulta en cierta medida la cohesión entre los significados que en conjunto se intentan desarrollar en los textos. En el caso del discurso matemático actual, el recurrir a la Repetición Directa como mecanismo de Referencia discursiva permite al lector recuperar de manera inmediata los Participantes, Procesos y Circunstancias relevantes detallados en el Lenguaje Natural sobre las imágenes.

No obstante, los discursos construidos muestran integración sistemática de los significados de los tres recursos semióticos relativos a lo analítico algebraico al presentar el uso de los mecanismos de intersemiosis restantes. Con estos mecanismos los discursos permiten construir significados articulados que permiten justamente un cambio de paradigma en el quehacer matemático algebraico, toda vez que la forma en la que la imagen era usada previo a ellos, fungía únicamente como una presentación visual que justificaba o daba sentido a los pasos descritos en la demostración de la regla algebraica. Los Participantes, Procesos y Circunstancias, como pueden identificarse en el texto de al-Khwârizmî aludían a figuras geométricas y lados de las figuras, lo cual se mantuvo hasta antes de Viète y Descartes, con algunas excepciones. Viète y Descartes, por su parte, investigaban en las imágenes relaciones que les obligaba a destacar y representar distintos tipos de Participantes, Procesos y Circunstancias, como por ejemplo el movimiento, en el caso de Descartes, y por lo tanto, en el texto, la intersemiosis se torna distinta pues se requiere de otro tipo de recursos no presentes en los previos algebristas. Por ejemplo, el hecho de que se identifique más de un Ítem, Mini-géneros y Componentes. Este hecho, por sí mismo implica que los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos sean usados más sistemáticamente.

En particular, se identificó también que el mecanismo de *metáfora semiótica*, es nulo en el discurso de Viète y casi nulo en el de Descartes, por lo que sus discursos conservan la tendencia hasta finales del Renacimiento de promover significados congruentes (Halliday, 1993a).

6.1.5. Hipótesis epistemológica relativa al álgebra paramétrica

Con base en la problematización desarrollada en esta primera fase del estudio, en particular desde la *dimensión epistemológica* del saber, a través del EHE del análisis algebraico, se ha concluye lo siguiente:

El método que desarrollaron Viète y Descartes denominado *análisis algebraico* involucra un nuevo rol para el álgebra, cuyas bases recurren a la operatividad misma del álgebra simbólica, pero que incorpora nuevas formas de uso para el simbolismo algebraico, definiendo un recurso semiótico sin ambigüedades que permite distinguir entre las cantidades conocidas (parámetros) y las desconocidas (incógnitas). En esta método, el simbolismo no es empleado como una mera forma de síntesis del discurso con la que se facilita visualizar las operaciones sobre las cantidades involucradas, sino es empleado como una forma visual que permite sintetizar relaciones de tipo aritméticas y geométricas con la finalidad de construir fórmulas generales—análisis algebraico de Viète—, es decir, familias de relaciones entre objetos que permiten determinar magnitudes de interés, o bien para generar expresiones generales que denotan familias de objetos geométricos como curvas—análisis algebraico de Descartes—.

Con esta nueva forma de emplear el álgebra se da una transición de la ecuación como objeto de estudio hacia la ecuación como herramienta para el estudio, puesto que la ecuación en el análisis algebraico es la que permite investigar las relaciones geométricas para determinar las familias de soluciones o familias de curvas. En este sentido, la noción de igualdad también transita de su función como condición para la solución de ecuaciones hacia la de medio para la relación de magnitudes. De aquí que la articulación entre los objetos de proporción y ecuación juegan un rol fundamental para lograr esta transición.

Esta construcción del análisis algebraico y de las ecuaciones paramétricas surge como respuesta y necesidad a la creación de un álgebra para la geometría, determinando una práctica socialmente compartida entre ambos matemáticos: *la algebrización de la geometría*. Esta práctica es un emergente que deviene de la resolución de problemas geométricos complejos, los cuales, involucran una gran cantidad de relaciones, que en su mayoría subyacen a la observación directa del diagrama geométrico sobre el que se investiga. Esta práctica implica el *establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole* y la *construcción de sistemas semióticos sistemáticos para discriminar cantidades conocidas* (parámetros) y *desconocidas* (incógnitas-variables), con base en las condiciones geométricas impuestas por el problema (acción). A su vez, estas acciones son evocadas con el objetivo de *construir fórmulas y expresiones generales* para representar familias de soluciones o de curvas (actividad).

A partir de estas consideraciones, en la siguiente fase del estudio, que detallamos en la sección 7.1, el diseño del instrumento se sustentó en esta práctica con la intención de explorar los procesos de construcción de las ecuaciones paramétricas por parte de estudiantes. Específicamente, tales consideraciones determinaron las decisiones metodológicas globales para la selección de los problemas que se abordaron, así como la interacción durante la experimentación.

7

Análisis en la segunda fase del estudio

7.1 Análisis cognitivo de la algebrización de la geometría: Experimento de diseño: Consideraciones metodológicas

La intención de la segunda fase del estudio fue robustecer las consideraciones epistemológicas obtenidas en el EHE de la primera fase, así como obtener la gramática funcional y los mecanismos y sistemas de intersemiosis de estudiantes, al resolver problemas que conlleven tales consideraciones. Cabe mencionar que con robustecer nos referimos a complementar las consideraciones epistemológicas históricas con los procesos cognitivos de estudiantes, con la finalidad de identificar otras, que por los niveles de pensamiento de los matemáticos antiguos y del investigador en la reconstrucción llevada a cabo, pudieran quedar implícitas y ampliar la conceptualización de esta actividad matemática.

La decisión más importante durante esta segunda fase fue la selección del tipo de problemas a trabajar con estudiantes. A lo largo de estas secciones describiremos de manera detallada las características del experimento, sin embargo, el punto de partida son las consideraciones epistemológicas derivadas del EHE (ver sección 6.1.5 para una descripción detallada).

En síntesis, identificamos que la actividad analítica algebraica se rige bajo la práctica de *algebrización de la geometría*. Esta práctica plantea la complejidad de articular el álgebra con la geometría, y muestra un proceso cuya base requiere del e*stablecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole* y la *construcción de sistemas semióticos sistemáticos para discriminar cantidades conocidas* (parámetros) y *desconocidas* (incógnitas-variables). La articulación de estas acciones permite y tienen la función de *construir fórmulas y expresiones generales para representar familias de soluciones o de curvas* (ecuaciones paramétricas).

Asimismo, se estableció que la algebrización de la geometría requiere, principalmente, de la puesta en juego de la *noción de proporción*, pues permite enlazar las relaciones geométricas de equivalencia y la igualdad algebraica: la ecuación. No obstante, en términos más amplios, reconocemos que existe una justificación epistémica centrada en el hecho de que *toda relación de equivalencia puede ser conceptualizada como ecuación algebraica*.

Como consecuencia de estas consideraciones epistemológicas, así como las consideraciones lingüísticas y multisemióticas, las cuatro decisiones metodológicas principales para la selección de los dos problemas que se emplearon para esta exploración fueron las siguientes:

1. Los problemas deben promover la algebrización de la geometría, pero solo como producto de un análisis geométrico. Es decir, la determinación de *la construcción de ecuaciones paramétricas* debe desencadenarse de un trabajo geométrico que permita *el establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole* (como las proporciones y

otras relaciones aritméticas) y *la construcción de sistemas semióticos sistemáticos para discriminar entre parámetros y variables.*

2. La geometría involucrada en los problemas debe ser de dominio para un(a) estudiante de bachillerato, de lo contrario no podrá algebrizarla.
3. Los problemas también deben permitir la producción de textos cuyo género sea compatible con la explicación del método de resolución. Esto para analizar la dimensión lingüística-multisemiótica.
4. Los problemas deben implicar el uso de los tres recursos semióticos del lenguaje matemático (lenguaje natural, símbolos e imágenes).

Cabe mencionar que la segunda decisión se debió a las grandes dificultades reportadas respecto de los conocimientos geométricos de estudiantes, que de acuerdo con algunos estudios (Clements y Sarama, 2011; Sinclair y Bruce, 2015), se debe principalmente a que:

> [La geometría] recibe relativamente poca atención, centrándose en gran medida en la aritmética (en la escuela primaria) y el álgebra (en la escuela secundaria). [...] [L]a geometría es la que menos atención recibe de las ramas matemáticas. Esto, a pesar de que estudio tras estudio muestra que los estudiantes rinden bastante mal en una amplia gama de tareas de geometría (Sinclair y Bruce, 2015, p. 319).

Por lo tanto, este hecho resultó una variable importante para elegir también a la población como se explicará más adelante.

Esta segunda fase de la investigación se puede catalogar como una Investigación Basada en el Diseño en el que se realizó un *Experimento de Diseño de tipo uno a uno* (Cobb y Steffe, 1983; Steffe y Thompson, 2000), cuyo "objetivo es crear una versión a pequeña escala de una ecología de aprendizaje para que pueda ser estudiada en profundidad y detalle" (Cobb, et. al., 2003, p. 9).

De manera específica se intentaron atender a las siguientes cuestiones:

- ¿En qué medida las/los estudiantes pueden algebrizar relaciones geométricas?
- ¿En qué medida las/los estudiantes reconocen las cantidades conocidas y no conocidas en la algebrización de relaciones geométricas?

Junto con los elementos correspondientes a la dimensión lingüística-semiótica:

- ¿En qué medida articulan los tres recursos semióticos para propiciar el uso de los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos?
- ¿Qué tanto difiere la gramática funcional de las/los estudiantes de lo encontrado en el EHE?

El experimento de diseño estuvo compuesto por dos actividades. La primera es la de Descartes (1637, pp. 319-322; Rossell, 1947, pp. 79-80)[15]. La segunda se retomó de Vasíliev y Gutenmájer, 1980, pp. 20-21)[16]. Ambos problemas implican la determinación del lugar geométrico de una curva, el primero analizado a detalle en la sección 12.5.9 durante la primera fase. En complemento con lo mencionado al inicio de esta sección, se decidió abordar este tipo de problemas por el hecho de que aquellos resueltos por Viéte resultaban ser más complejos y lejanos a la realidad de estudiantes de bachillerato. Los problemas de *locus* son comunes en este nivel, además de que se encuentran en un terreno más cercano a las relaciones funcionales, lo cual es un tema familiar también en este nivel.

Además, como consecuencia de la primera consideración metodológica para los problemas, respecto a la necesidad de promover el trabajo geométrico por sobre la determinación de la expresión algebraica, se consideró trabajar con problemas que no estuvieran enmarcados en el contexto típico escolar, asociado con el plano de coordenadas rectangulares. Asumimos que al eliminar las variables "coordenadas rectangulares" y "plano con cuatro cuadrantes" forzaría un quehacer geométrico. Esto porque en Descartes no se identificaron explícitamente estos dos elementos. Ambos problemas poseen esta característica.

En este sentido, la primera actividad tiene los siguientes objetivos:

a) Identificar qué estrategias y/o conocimientos son puestos en juego (ver si surge la necesidad de establecer relaciones geométricas),
b) Identificar la forma en que catalogan las cantidades paramétricas y las variables,
c) Identificar el proceso para determinar la ecuación algebraica que representa la curva.

La segunda actividad tiene como objetivos:

a) Identificar el proceso para determinar la ecuación del lugar geométrico de la curva.
b) Identificar la forma en que se determinan los parámetros y las variables en la situación.

A partir de lo anterior, el diseño del instrumento complementó estas consideraciones epistemológicas con otras de índole epistemológicas-didácticas[17] para producir la práctica de algebrización de la geometría en el/la estudiante. Las consideraciones son las siguientes:

[15] La hoja de trabajo digital puede visualizarse en: https://docs.google.com/document/d/1FpbtIo4a_-vnhyRzXuRVkuQnS7-mdvthkMqkIFwRB0M/edit?usp=sharing.

[16] La hoja de trabajo digital puede visualizarse en: https://docs.google.com/document/d/1Es1x43uEDeiMNp90X57iHnkI3Be4QVqj6tDCrh99DA0/edit?usp=sharing.

[17] Se consideran didácticas en el sentido de que son consideraciones de diseño para que el objetivo de la actividad sea alcanzado por el/la estudiante, tomando en consideración las características de lo que implican estas

1. Puesto que la actividad matemática parte del reconocimiento de los parámetros y variables, se identificó que para que el/la estudiante lograra esta discriminación era necesario realizar una transposición de este tipo de situaciones hacia escenarios de geometría dinámica. Esto dado que, el análisis del instrumento vía el diagrama estático, sin la descripción de cómo construirlo, su manipulación y funcionamiento, imposibilita el reconocimiento de las cantidades que se mantienen como condiciones de la construcción y, por lo tanto, fijas (parámetros), así como de aquellas que varían. En esta medida, un acercamiento dinámico permitiría aproximarse al funcionamiento del instrumento y su manipulación, posibilitando el análisis mediado por recursos semióticos como la visualización de las medidas de los segmentos en cuestión, y texturas diferenciadas para los segmentos que representan ambos tipos de cantidades.
2. En el caso de la primera actividad se decidió también, en concordancia con la metodología de la implementación, generar un anexo para que el/la estudiante pudieran apoyarse en caso de que no pudieran reconocer las relaciones geométricas necesarias para determinar la ecuación. En el anexo se proporcionaba información referente a la semejanza de los triángulos involucrados en la representación del instrumento, sin embargo, no se mencionaban las relaciones de proporcionalidad, ni la palabra proporcionalidad.

7.2. Entrevista Basada en Tareas

Por la naturaleza exploratoria de esta fase, en la cual se buscaba elaborar un reporte descriptivo sobre la forma de actuación de las y los estudiantes ante las tareas antes mencionadas en un ambiente controlado, se decidió emplear la metodología de *Entrevista Basada en Tareas* (*Task-Based Interview* como se conoce en el mundo anglosajón).

De acuerdo con Goldin (2000), este tipo de metodología funciona como instrumentos para realizar observaciones sistemáticas en la sicología de la resolución de problemas matemáticos. “Se utilizan para investigar los conocimientos y formas de razonamiento matemáticos existentes y en desarrollo de los sujetos, cómo se representan y elaboran las ideas, y cómo se construyen con otras ideas a medida que amplían sus conocimientos” (Maher y Sigley, 2014, p. 580).

> Proporcionan un entorno matemático estructurado que, hasta cierto punto, puede ser controlado. Las tareas matemáticas se pueden ajustar en redacción, contenido, configuración, secuencia y estructura, en función de criterios expresos y los resultados de investigaciones

---

situaciones y lo que el/la estudiante podría requerir. Asimismo, se tornan epistemológicas porque son consideraciones que se plantean como *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* (en el sentido de Simon, 1995), es decir, como el conjunto de tareas y procesos hipotéticos que se espera el estudiante desarrolle para construir conocimiento matemático.

> anteriores. Las contingencias de la entrevista pueden decidirse explícitamente y modificarse cuando sea apropiado. En comparación con los métodos convencionales basados en pruebas de papel y lápiz, las entrevistas basadas en tareas permiten centrar la atención de la investigación más directamente en los procesos de los sujetos de abordar tareas matemáticas, en lugar de solo en los patrones de respuestas correctas e incorrectas en los resultados que producen (Goldin, 2000, p. 520).

El énfasis del vínculo entre la entrevista con la tarea se debe al hecho de que las interacciones entre sujeto y entrevistador(a) se encuentran enmarcadas en el ambiente de las tareas preconcebido. Este ambiente, por ende, determina el tipo de interacción, el alcance de la intervención por parte del entrevistador(a), así como los recursos empleados en estas intervenciones, lo cual condiciona los conocimientos puestos en juego.

> Reconocimos que el cuestionamiento de preguntas específicas que requieren un autocontrol afectaría de manera importante los procesos de resolución de problemas de los sujetos. [...] [L]as intervenciones son parte del entorno de tareas. Lo que se observa siempre [y sobre lo que se infiere] es el comportamiento de los sujetos en presencia de las intervenciones estructuradas. Aunque los resultados no pueden interpretarse como correspondientes a lo que habría ocurrido en una situación totalmente libre, esto no es una "limitación" (Goldin, 2000, p. 521).

Específicamente se diseñó un entorno con las características mínimas como declara Goldin (2000): *Un sujeto* (quien resuelve el problema), *el entrevistador* (el investigador), la *interacción* de ambos *respecto a tareas específicas diseñadas previamente* (preguntas, problemas o actividades).

Las etapas de exploración se dividen en cuatro (Goldin, 2000):

1. *Plantear la pregunta.* En esta etapa se propone la pregunta, problema, o situación y se proporciona el tiempo necesario para que el/la estudiante pueda responder o generar un acercamiento a la respuesta. Se pueden presentar preguntas de seguimiento no directivas, como "¿Puede decirme más sobre eso?".
2. *Proporcionar sugerencias heurísticas mínimas*. En caso de que la respuesta no sea espontánea, clara, o bien, no se produzca el comportamiento anticipado, pueden plantearse en un primer momento preguntas como "¿Puede mostrarme el uso de algunos de estos materiales?".
3. *Uso guiado de sugerencias heurísticas*. En el caso de que, persistan descripciones no solicitadas o ausencia del comportamiento anticipado. Se pueden plantear preguntas como: "¿Ves un patrón en las tarjetas?".
4. *Planteamiento de preguntas exploratorias y metacognitivas*. Etapa en la cual se busca que el sujeto muestre el grado de conciencia que posee sobre los procesos, conocimientos, estrategias y respuestas que llevaron a proponer la solución. Se plantean preguntas como "¿Crees que podrías explicar cómo pensabas sobre el problema?".

Las cuatro fases propuestas fueron llevadas a cabo tal como se menciona, a excepción de la cuarta etapa. Esta fue adaptada de acuerdo con las preguntas de investigación relacionadas con la dimensión lingüística-multisemiótica, de modo que se solicitó a la y los estudiantes realizar un escrito para explicar cómo resolver la situación planteada.

En complemento con lo anterior, se decidió realizar la intervención con un(a) estudiante a la vez, considerando minimizar efectos de interacción entre estudiantes que pudieran influir en la construcción de las ideas. Con esto se buscó maximizar entonces el acceso a la actividad del/la estudiante (Simon et al., 2010).

> [...] cuando un alumno observa y escucha a otro, a veces se produce un cambio en el comportamiento y, aparentemente, en el pensamiento del alumno que ha sido observado, en ocasiones se produce un cambio en el comportamiento y, aparentemente, en el pensamiento del alumno que estaba temporalmente en el papel pasivo (Simon et. al., 2010, p. 87).

7.3. Experimento de diseño

A continuación, describiremos el proceso del experimento de diseño desde las típicas fases de *preparación y diseño*, *experimentación* y *análisis retrospectivo* (Bakker y van Erde, 2015).

Cabe destacar que la experimentación se planeó llevar a cabo durante los meses de marzo y abril del 2020 de manera presencial. Sin embargo, por efectos de la pandemia de Covid-19, se tuvo que adaptar el diseño para llevar la experimentación de manera virtual. Describiremos a continuación la naturaleza de esta adaptación.

7.3.1 Preparación y diseño

En este apartado explicamos el proceso que se llevó a cabo para refinar el diseño que se implementó con la población definitiva en el estudio.

7.3.1.1. El diseño

A continuación, se presentan las actividades abordadas en la experimentación definitiva, junto con las consideraciones de intencionalidad y metodológicas de acuerdo con la metodología de entrevista basada en tareas. Como se mencionará en el apartado 7.3.1.6. esta versión del diseño, al igual que algunos elementos de la intervención e indicaciones fueron modificados con base en un pilotaje previo de ambas actividades.

7.3.1.1.1. El instrumento de Descartes

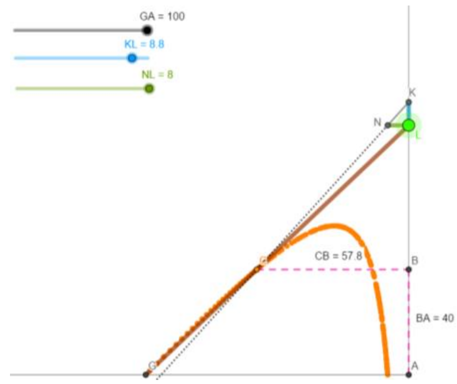


Figura 28. Applet para la exploración de la primera actividad

Abre aquí[18] el *applet: El instrumento de Descartes* para realizar lo siguiente.

a) Mueve el punto L y observa cómo el punto C describe una curva anaranjada.
b) Cambia cada uno de los valores de los tres deslizadores y observa lo que sucede al mover el punto L.
c) Explica qué sucede respecto a la curva anaranjada.

Intencionalidad:

Estos tres ítems tienen la intención de que el/la estudiante construya entendimientos respecto al funcionamiento del instrumento y cómo se genera la curva. Pretender acercar al/la estudiante al reconocimiento de los elementos involucrados en la situación (variables, parámetros).

Indicaciones por parte del investigador:

Las instrucciones eran leídas por el investigador y se indicaba que se debían responder estos tres ítems primero. Una vez concluidos estos ítems, si hubiera algún elemento de las respuestas que quisiera abordar, el investigador cuestionaba al respecto al/la estudiante. Posteriormente, se indicaba que se continuara con los ítems d) y e).

d) Reinicia la construcción en el botón (esquina superior derecha del applet) y fíjate en las longitudes KL, NL, GA, CB y BA ¿Qué pasa con cada una de ellas conforme se mueve el punto L? Explica.

---

[18] En la versión del documento se envía al/la estudiante al applet que servirá para responder la actividad. El applet puede verse en la siguiente liga: https://www.geogebra.org/m/cyj58mxk.

e) Clasifica en dos tipos de cantidades cada una de las longitudes señaladas en el inciso *d*. Justifica tu respuesta.

Intencionalidad:

Con estos ítems se busca el reconocimiento de los parámetros y variables, a partir de las características visuales aportadas por el software, a saber, aquellas que permanecen fijas o dadas, de acuerdo con las condiciones de la construcción, y aquellas que cambian, ambas al mover el punto L.

Indicaciones por parte del investigador:

En caso de que hubiera dificultades para interpretar las instrucciones de los incisos d) y e) se resolvían o cuestionaba respecto a ideas de interés para el investigador. Se pedía al/la estudiante que respondiera estos ítems y se indicaba que al concluir informara para que pudieran pasar a la siguiente parte de la actividad y leer la descripción de debajo de manera conjunta, así como las instrucciones del inciso f).

La aportación de Descartes

René Descartes fue un científico francés que vivió durante la época del Renacimiento en Europa. Él realizó un aporte muy importante para las matemáticas: logró construir un sistema simbólico que le permitió establecer relaciones directas entre expresiones matemáticas y curvas como la de esta tarea. Para ello, tuvo que distinguir muy bien entre dos tipos de cantidades: aquellas que determinan la construcción de una figura, que se denominan *parámetros*, así como otras no determinadas o desconocidas que dependen de los valores de los parámetros, denominadas actualmente *variables*. La estrategia que empleó Descartes para obtener la ecuación que representa la curva anaranjada fue establecer una ecuación que relacionara dos variables, como por ejemplo *CB* y *BA*, junto con las que determinan la construcción, es decir, parámetros como *KL*, *NL* y GA. La ecuación a la que llegó es la siguiente:

$$\boldsymbol{y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac}$$

donde KL es b, NL es c, GA es a, CB es y y BA es x.

Intencionalidad:

Esta descripción tiene como finalidad mostrar un panorama general sobre el método de Descartes y el reconocimiento de los parámetros y variables en la situación para determinar una ecuación que represente el comportamiento de la curva. Con esto se esperaba proporcionar una idea sobre qué hacer en la situación, así como de asociar las ideas previas con el método. En caso de que no se hubieran reconocido las variables y parámetros esta descripción presentaba la distinción explícita entre ambos tipos de cantidades. Nótese que, puesto que la intención de la situación no es determinar la ecuación, sino que se establezcan

las relaciones geométricas, vía el álgebra, se presenta de manera explícita la ecuación a la que se espera lleguen el/la estudiante y se le indica que debe intentar llegar a esa ecuación.

Indicaciones por parte del investigador:

La descripción era leída por el investigador y se parafraseaban las ideas para complementar el texto escrito.

f) Construye la ecuación que desarrolló Descartes estableciendo relaciones respecto al punto C que involucren a x e y con los parámetros a, b, y c. Considera que por construcción se cumple que los segmentos NL, CB y GA son paralelos entre sí, y, además, el segmento KA es perpendicular con NL, CB y GA.
Explica tu procedimiento. En caso de que tengas dificultades consulta el Anexo 2.1.

Intencionalidad:

Este ítem presenta información que no está explícita en el diagrama del instrumento que es necesaria para el establecimiento de las relaciones de proporcionalidad entre los triángulos involucrados.

Indicaciones por parte del investigador:

Es en este ítem en el que se le indica al/la estudiante que puede consultar el Anexo 2.1 en caso de que no encuentre una forma para determinar la ecuación. Cabe destacar que se especificaba que el Anexo 2.1 podía abrirse después de que se explicara al investigador qué se encontraba haciendo el/la estudiante previamente.

g) Elabora un escrito en el que expliques con detalle cómo determinar esta ecuación. La intención de tu escrito es lograr que otra persona que no tenga que hablar contigo pueda determinar la ecuación.

Intencionalidad:

Con este ítem se buscaba que se llevara a cabo un metaanálisis respecto al procedimiento empleado para determinar la ecuación, así como para recuperar la información relativa a la dimensión lingüística-multisemiótica.

Indicaciones por parte del investigador:

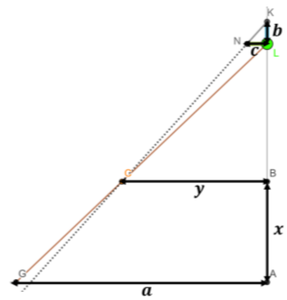
La instrucción era leída por el investigador y se comentaba al/la estudiante que imaginara que debía escribir el procedimiento para determinar la ecuación a alguien que no podía tener

acceso al proceso de construcción de la ecuación, ni lo que había hecho durante la sesión. El escrito fue realizado de manera asíncrona, por lo que el investigador no tuvo acceso al proceso de creación del texto. Esta decisión se tomó por el hecho de que no se quería agotar a la y los participantes pues el tiempo de resolución de la actividad en promedio tomaba tres horas. Cabe destacar que el/la estudiante no tenía acceso a ningún video que le recordara el proceso discutido con el investigador en la sesión síncrona.

Anexo 2.1

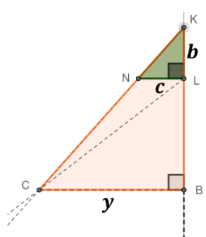
Para determinar la ecuación algebraica del lugar geométrico que describe el punto C se pueden emplear los siguientes apoyos:

La imagen del instrumento con los datos necesarios sería la siguiente:

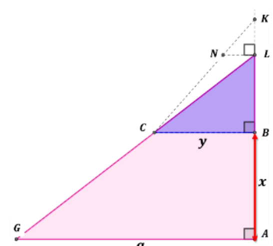


La idea es establecer relaciones entre a, b, c, x e y de manera que la ecuación final contenga todas esas cantidades involucradas. Para ello fíjate en las relaciones que se tienen entre los pares de triángulos NKL con CKB y CLB con GLA.

ΔNKL y ΔCKB



ΔCLB y ΔGLA



Observa que $\Delta NKL \sim \Delta CKB$ y también $\Delta CLB \sim \Delta GLA$

7.3.1.1.2. El punto B

La siguiente figura se ha construido de la siguiente forma:

1. Se construye un segmento AD
2. Sobre el segmento AD se construye un ángulo con vértice en A que denominaremos α.
3. Se ubica un punto C sobre el segmento AD, lo cual determina el segmento AC cuya medida se establece como a.

4. Con vértice en C se construye otro ángulo que tenga el doble de la medida de α, es decir, 2α.
5. Por el paso anterior, se determina un punto de intersección B entre los ángulos α y 2α. Además, la medida del segmento AB queda también determinada por esta construcción, por lo que se denomina r.

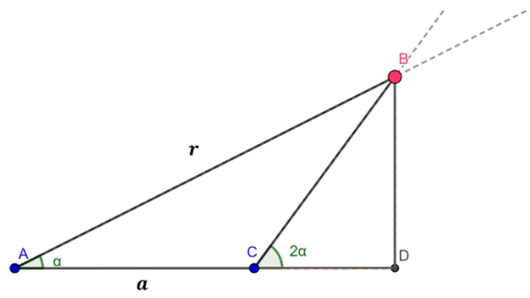


Figura 29. Imagen obtenida por el proceso de construcción del Punto B descrito.

Intencionalidad:

Este apartado introductorio de la situación tiene como intención mostrar el proceso de construcción de la forma que da como origen al punto B. Esto se propuso para que el/la estudiante tuvieran información robusta de las relaciones geométricas subyacentes en la situación que pudieran apoyar en la determinación de la ecuación. En esta situación no se le proveía al/la estudiante de recursos semióticos de apoyo para la distinción de los parámetros y variables, más que las medidas de las longitudes de los segmentos, ni la ecuación a la que debían llegar, ni anexos para apoyar el proceso de construcción.

Indicaciones por parte del investigador:

Las instrucciones de la construcción eran leídas por el investigador y se indicaba que se debían responder los ítems a), b) y c) primero. Una vez concluidos estos ítems, si hubiera algún elemento de las respuestas que quisiera abordar el investigador se cuestionaba al respecto al/la estudiante. Posteriormente, se indicaba que se continuara con el ítem d).

a) Abre aquí[19] *el applet*: *El punto B*.
b) ¿Qué curva crees que forma el punto B conforme el ángulo α cambia de medida? (modifica el valor del ángulo del deslizador para visualizar la curva) Explica por qué.

---

[19] En la versión del documento se envía al/la estudiante al applet que servirá para responder la actividad. El applet puede verse en la siguiente liga: https://www.geogebra.org/m/jmnfk3fu.

Intencionalidad:

La intención con esta pregunta es que el/la estudiante reconozcan que la curva, aparentemente tiene la forma de una semicircunferencia. Con esto se busca que pueda inducir el tipo de propiedades que podría identificar con la construcción que determina a la curva, como la determinación de los radios.

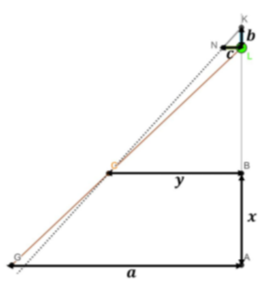
c) ¿Cuánto mide el segmento CB? Explica por qué.

Intencionalidad:

Se busca la identificación de que el segmento CB es un radio de la semicircunferencia, y al conocer la medida de otro radio la medida de CB queda determinada, además de que este segmento puede emplearse para determinar la relación geométrica que permite determinar la ecuación de la semicircunferencia.

d) Determina una ecuación algebraica que represente la propiedad geométrica que determina el punto B, considera que el segmento BD es perpendicular a AD.

Considera que como en la tarea 2.1, la idea es establecer una relación entre las cantidades que determinan la construcción (parámetros) y que condicionan la medida de otras (variables) dependiendo de sus valores. En el caso de la tarea 2.1 se estableció la relación entre los parámetros a, b y c, con las variables x e y.



La idea es determinar una propiedad geométrica que involucre al punto B, respecto de los parámetros y las variables. Para ello, el primer paso es determinar qué cantidades son parámetros y cuáles variables. Posteriormente, identifica una relación geométrica que involucre a los parámetros y variables, y que pueda derivar en una ecuación algebraica.

Intencionalidad:

Esta descripción tiene como finalidad presentar un recordatorio del método empleado en la determinación de la ecuación de la curva en el instrumento de Descartes, para que el/la estudiante logren ponerlo en funcionamiento.

Indicaciones por parte del investigador:

La descripción del proceso de la actividad previa era leída por el investigador. Se indicaba al/la estudiante que debía reconocer primero cuáles de las cantidades en la construcción podían ser consideradas parámetros y cuáles variables. Se les pedía explícitamente que cuando hubieran determinado los parámetros y variables lo comentaran con el investigador. Una vez que lo lograran se les indicaba que podían continuar con la determinación de la ecuación.

e) Elabora un reporte en el que expliques con detalle la forma en la que determinaste la ecuación. La intención de tu reporte es lograr que otra persona que no tenga que hablar contigo pueda determinar la ecuación.

Intencionalidad:

Con este ítem se buscaba que se llevara a cabo un metaanálisis respecto al procedimiento empleado para determinar la ecuación, así como para recuperar la información relativa a la dimensión lingüística-multisemiótica.

Indicaciones por parte del investigador:

La instrucción era leída por el investigador y se comentaba al/la estudiante que imaginara que debía escribir el procedimiento para determinar la ecuación a alguien que no podía tener acceso al proceso de construcción de la ecuación, ni lo que había hecho durante la sesión. El escrito fue realizado de manera asíncrona, por lo que el investigador no tuvo acceso al proceso de creación del texto. Esta decisión se tomó por el hecho de que no se quería agotar a la y los participantes pues el tiempo de resolución de la actividad en promedio tomaba tres horas. Cabe destacar que el/la estudiante no tenía acceso a ningún video que le recordara el proceso discutido con el investigador en la sesión síncrona.

7.3.1.2. Entorno virtual

La plataforma virtual empleada para alojar los documentos y recopilación de la información fue el Entorno Virtual de Aprendizaje *Google Classroom*[20]. Se eligió por la alta probabilidad que las/los participantes contaran con cuentas de correo de Google.

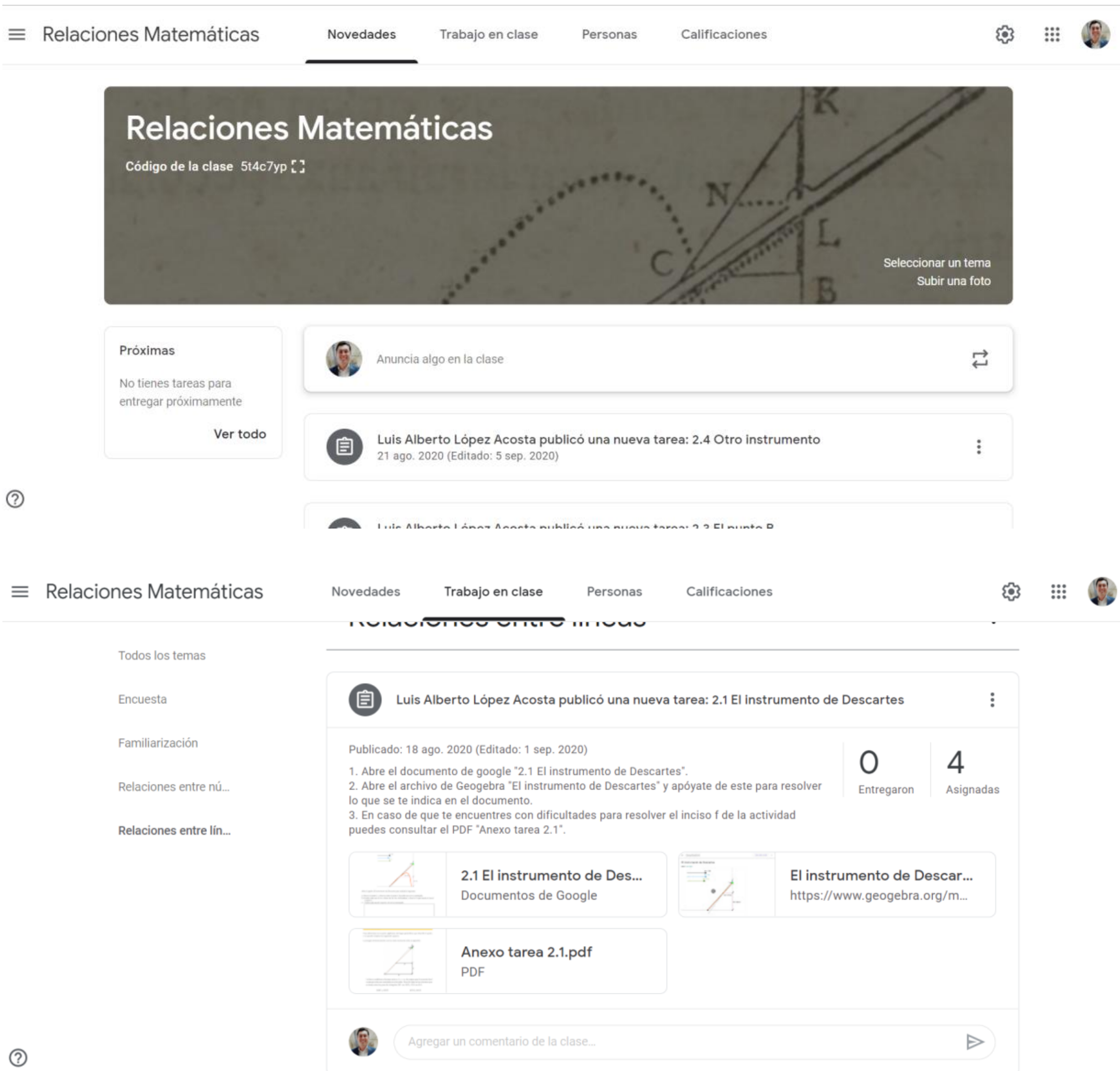


Figura 30. Capturas del entorno virtual diseñado en *Google Classroom*

Con la finalidad de que el/la estudiante se adaptara a la plataforma y el tipo de interacción que se esperaría en la experimentación, así como la forma de compartir sus evidencias, se programaron en la plataforma dos actividades de introducción. Esto ayudó que al momento

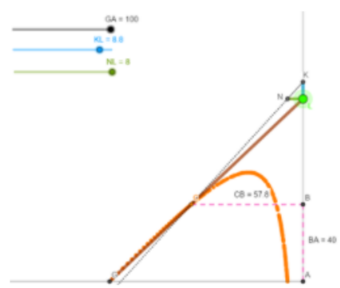
[20] Sitio web de la plataforma Google Classroom: https://edu.google.com/intl/es-419/products/classroom/

de resolver las actividades de interés el/la estudiante conocieran bien la plataforma, cómo enviar sus evidencias y el tipo de preguntas que se les haría por parte del investigador. Con esto se aseguraba cierta fluidez en la plataforma, así como destinar el tiempo de la sesión a la resolución y no a dudas con el entorno virtual y sus funciones.

7.3.1.3. Hojas de trabajo

Las hojas de trabajo se decidió presentarlas en dos formatos para que las y los participantes eligieran la manera más cómoda para trabajar. El primer formato fue en *PDF* con la intención de que si elegían imprimir el documento para trabajar sobre él lo pudieran hacer. Esta primera opción implicaba que los documentos deberían fotografiados o escaneados y luego enviados hacia el investigador. El segundo formato fue mediante *Google Docs*[21]. Por si las/los participantes decidían trabajar de manera digital, la cual no requería el envío de las evidencias, sino responder en las hojas de trabajo y adjuntar fotos de sus procedimientos. Las hojas digitales (*Google Docs*) también representaban una ventaja para el investigador por el hecho de que facilitaba el proceso de transcripción de los datos.

2.1 El instrumento de Descartes



Abre el *applet: El instrumento de Descartes* para realizar lo siguiente:

a) Mueve el punto *L* y observa cómo el punto *C* describe una curva anaranjada.
b) Cambia cada uno de los valores de los tres deslizadores y observa lo que sucede al mover el punto *L*.
c) Explica qué sucede respecto a la curva anaranjada.

El punto C es un punto que, junto con K y B, forma un triángulo directamente proporcional al KLN. Esta proporción depende de los valores que le asignemos a los segmentos. La curva que forma C, es el resultado de un aumento del valor del segmento KA, pues al aumentar su valor, C se aleja más del punto K. Al modificar el valor del segmento NL, lo que hacemos es hacer mayor o menor el ángulo de K, pero tenemos límites al hacer las modificaciones, pues el ángulo de L ya está establecido y no se puede modificar. Al nulificar el valor de NL, lo que hacemos es nulificar asimismo el valor del ángulo K, y por consiguiente nos quedaremos con una línea vertical al trazar con el punto C.

Figura 31. Ejemplo de hoja de trabajo digital

[21] Sitio web de la aplicación Google Docs: https://www.google.com/intl/es_mx/docs/about/

7.3.1.4. Interacción sincrónica

El medio virtual para llevar a cabo la interacción y comunicación sincrónica fue la plataforma de videoconferencias *Zoom*[22]. Esto por la familiaridad y acceso intuitivo para las/los participantes. Por otro lado, se identificó la necesidad de contar con el recurso de alguna pizarra digital en la que pudieran colaborar de manera sincrónica tanto el investigador como las/los participantes. Se empleó la pizarra virtual G*oogle Jamboard*[23], por las mismas razones que se eligieron la plataforma y los documentos digitales de la misma compañía.

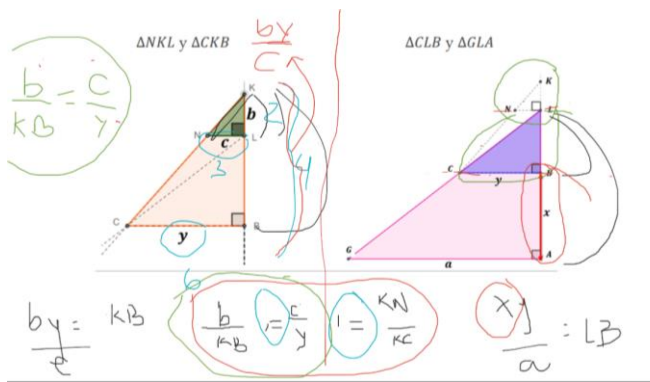


Figura 32. Ejemplo de trabajo en la pizarra digital

7.3.1.5. Registro de la interacción

El registro de la interacción se decidió combinar las plataformas de Zoom y el software OBS Studio. La primera para grabar la comunicación, mientras que el OBS Studio se empleó para grabar las anotaciones e interacciones en la pizarra digital si fuera requerido.

7.3.1.6. Pilotaje

Se llevó a cabo un pilotaje con dos estudiantes para identificar elementos para robustecer el diseño y la instrumentación tecnológica. Se decidió pilotear el diseño con un estudiante de bachillerato que estuviera en tercer semestre de bachillerato, que presentara dificultades con los conocimientos matemáticos, para tener una referencia de qué tan complejo podría resultar la implementación y las interacciones entre el investigador y el participante. Asimismo, se buscaba identificar qué tan resolubles eran las actividades para un estudiante de este nivel. El segundo estudiante participante en el pilotaje era un estudiante de recién ingreso a la

---

[22] Sitio web de la plataforma Zoom: https://zoom.us/

[23] Sitio web de la pizarra digital Google Jamboard: https://edu.google.com/intl/ALL_mx/products/jamboard/

universidad (primer año). El estudiante pertenecía al programa de Ingeniería Mecatrónica. Con este se buscó identificar qué tipo de consideraciones podrían emerger en la resolución de las actividades, así como también verificar si las actividades podían ser resolubles con los conocimientos de base que se requerían.

Se llevaron a cabo dos sesiones individuales con cada uno de los estudiantes sin límite de tiempo. En el caso del primer estudiante las sesiones duraron en promedio tres horas, mientras que con el segundo estudiante dos horas. Esto ayudó para estimar el tiempo que podría proponerse a las/los participantes del estudio.

Con el pilotaje se confirmaron los siguientes aspectos:

1. Las actividades eran resolubles, toda vez que ambos estudiantes pudieron resolverlas.
2. Se identificó que el uso del software *OBS Studio* [24] no era necesario para la experimentación puesto que con los videos de *Zoom* podía cubrirse la actividad en la pizarra de *Google Jamboard*, razón por la cual se prescindió de este en la implementación.
3. En el caso del primer estudiante, se identificó la dificultad para construir la ecuación debido a la falta de dominio de los conocimientos algebraicos y geométricos por parte del estudiante. Este hecho, implicó que se diseñara un *pretest* para conocer el nivel de conocimiento de las/los participantes y así seleccionar a participantes que tuvieran los conocimientos mínimos requeridos para resolver las actividades. Estos conocimientos consistían en el establecimiento de relaciones de proporcionalidad entre triángulos semejantes, determinar la semejanza entre pares de triángulos, operaciones algebraicas y con proporciones.
4. Se identificaron algunas dificultades con la interpretación de algunas instrucciones de las actividades.
5. Se identificó que en la segunda actividad los elementos de la construcción influenciaban el reconocimiento de las variables, puesto que presentaban las mismas características de la actividad inicial. Específicamente, la construcción denotaba las variables con segmentos punteados como se aprecia en la imagen:

[24] Sitio web del software OBS Studio: https://obsproject.com/es

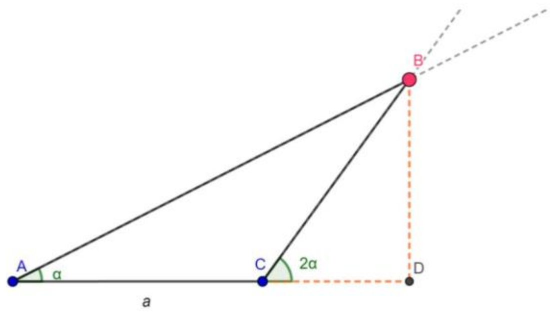


Figura 33. Versión previa de la construcción del Punto B.

Esta presentación era similar a la de la actividad uno, la cual inducía a considerar estos segmentos como variables por la misma característica semiótica.

6. Se identificó que en la experimentación era importante dar la indicación de que en la primera actividad el/la estudiante explicara su procedimiento e ideas antes de abrir el Anexo 2.1. En el pilotaje, las instrucciones en la plataforma no indicaban que se debía reportar lo realizado antes de abrir el Anexo 2.1, por lo cual no se sabía que estaba sucediendo previo a abrir este apoyo. Por lo tanto, se perdía información respecto a la actividad matemática llevada a cabo.

7.3.2. Experimentación

Posterior al pilotaje y los respectivos ajustes al experimento de diseño, se llevó a cabo la aplicación del diseño definitivo, con la población definitiva.

7.3.2.1. Selección de la población definitiva para el estudio

Por las particularidades de la pandemia y el cierre de las aulas en México, se consideró que una forma de contactar estudiantes para la intervención sería a través de personas conocidas por el investigador y la asesora que pudieran proveer de acceso a estudiantes con las características ya señaladas. Se contactó a un profesor de tercer semestre de bachillerato de una escuela pública y a un coordinador académico de un bachillerato privado. A ambos se les indicó que se requerían jóvenes con cierto dominio matemático en las áreas de geometría y álgebra del bachillerato.

El procedimiento para la selección de estudiantes fue la siguiente:

1. Enviar al profesor y al coordinador académico una invitación dirigida a la comunidad estudiantil para participar en las actividades. En la invitación se da un preámbulo respecto a la Matemática Educativa, así como la razón por la cual se extendía la invitación a la comunidad estudiantil para participar y de manera general que se estaba

llevando a cabo una investigación con jóvenes de bachillerato para estudiar ciertos procesos de pensamiento. Se especificaba también que de estar intererados(as) debían escribir un correo electrónico al investigador a cargo para recibir más información. Se adjunta la invitación.

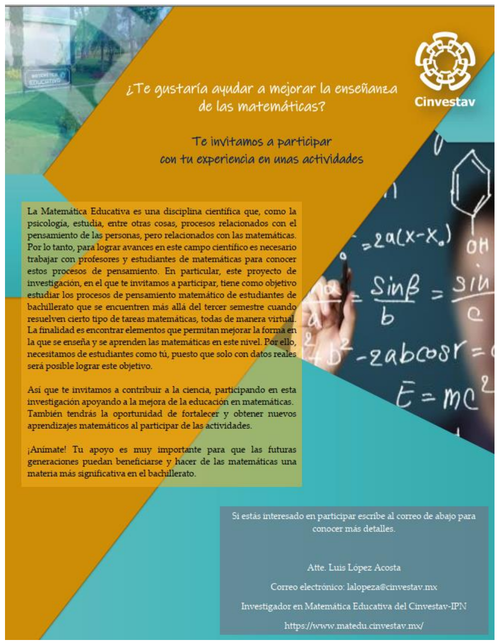


Figura 34. Cartel digital diseñado para invitar a estudiantes a participar en el estudio

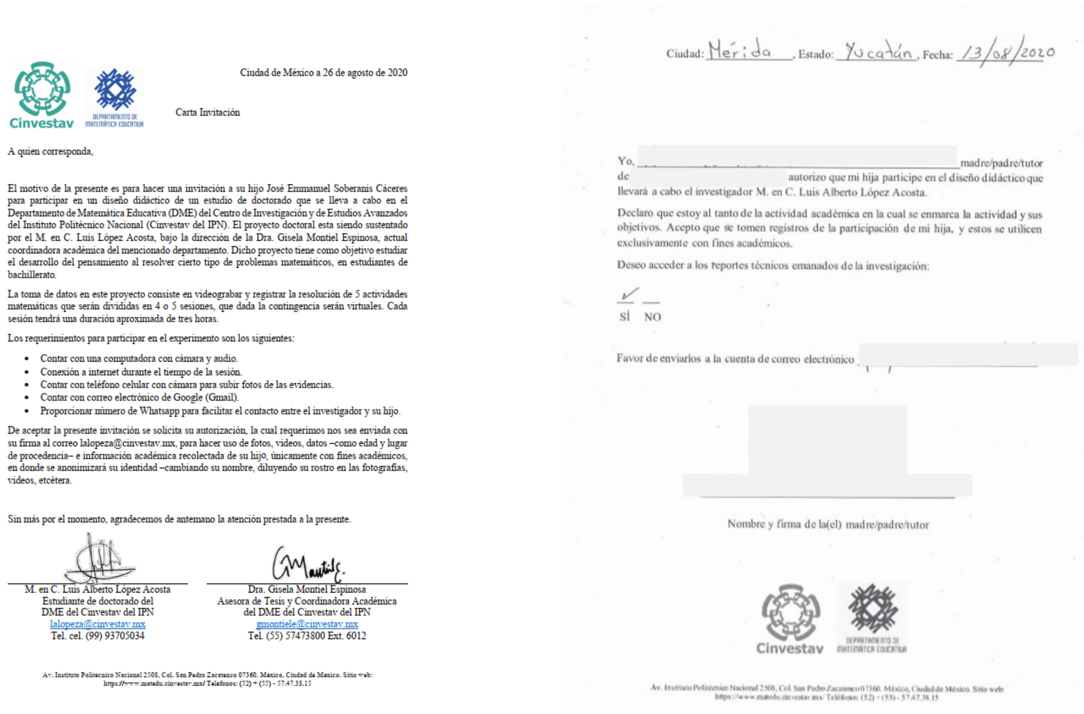
2. Las/los estudiantes que estuvieran interesados escribían un correo electrónico al investigador para indicar que estaban interesados(as) en participar. Posteriormente, el investigador les respondía a las/los interesados compartiéndoles el *pretest* y algunas indicaciones respecto a la dinámica del estudio.

Figura 35. Ejemplo de correo para el envío del *pre-test*

El pretest[25] constó de dos partes. La primera una recopilación de información personal de las/los candidatos (nombre, edad, género, correo electrónico, nombre de la escuela, último semestre cursado, motivos para participar). La segunda parte contempló ocho preguntas relativas con el conocimiento matemático requerido en las actividades (semejanza de triángulos, proporciones en triángulos semejantes, operatividad algebraica y en proporciones y la ecuación de la circunferencia[26]). Con el *pretest* se pretendía determinar, en caso de que hubieran más de tres estudiantes interesados, seleccionar a los que obtuvieran mejores puntajes.

3. Una vez seleccionados(as) los estudiantes participantes se les enviaba una carta invitación formal para solicitar permiso a sus tutores(as), puesto que las/los participantes eran menores de edad. En la carta invitación se les especificaban los requerimientos técnicos para participar en el estudio, así como la dinámica de las sesiones, sobre las cuales se decidió que serían de cuatro a cinco sesiones de tres horas aproximadamente cada una. Se explicaba a grandes rasgos los motivos del estudio, la institución en la cual se estaba desarrollando el proyecto de investigación, el responsable del proyecto, el hecho de que se videograbarían las sesiones, que se requería un medio inmediato para la comunicación con el investigador (WhatsApp[27]). También se solicitaba en la carta que para que el/la joven participaran era necesario contar con un permiso firmado por su tutor(a). Se les adjuntaba al correo el formato para llenar y firmar su permiso.

[25] El pretest puede consultarse en la siguiente liga: https://forms.gle/9UE6BBHxMRARcbvc7
[26] El ítem de la ecuación de la circunferencia se incluyó para contrastar los conocimientos que se tenían previos con los que pondrían en funcionamiento en la segunda actividad.
[27] Se decidió emplear WhatsApp por el hecho de que representa una manera inmediata de comunicarse en caso de que hubiera problemas con la conexión a internet, así como por la facilidad para enviar las evidencias. Se les pidió a las/los participantes que tomaran fotografías a sus producciones y las incrustaran en los documentos digitales.



Ciudad de México a 26 de agosto de 2020

Carta Invitación

A quien corresponda,

El motivo de la presente es para hacer una invitación a su hijo José Emmanuel Soberanis Cáceres para participar en un diseño didáctico de un estudio de doctorado que se lleva a cabo en el Departamento de Matemática Educativa (DME) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav del IPN). El proyecto doctoral esta siendo sustentado por el M. en C. Luis López Acosta, bajo la dirección de la Dra. Gisela Montiel Espinosa, actual coordinadora académica del mencionado departamento. Dicho proyecto tiene como objetivo estudiar el desarrollo del pensamiento al resolver cierto tipo de problemas matemáticos, en estudiantes de bachillerato.

La toma de datos en este proyecto consiste en videograbar y registrar la resolución de 5 actividades matemáticas que serán divididas en 4 o 5 sesiones, que dada la contingencia serán virtuales. Cada sesión tendrá una duración aproximada de tres horas.

Los requerimientos para participar en el experimento son los siguientes:

- Contar con una computadora con cámara y audio.
- Conexión a internet durante el tiempo de la sesión.
- Contar con teléfono celular con cámara para subir fotos de las evidencias.
- Contar con correo electrónico de Google (Gmail).
- Proporcionar número de Whatsapp para facilitar el contacto entre el investigador y su hijo.

De aceptar la presente invitación se solicita su autorización, la cual requerimos nos sea enviada con su firma al correo lalopeza@cinvestav.mx, para hacer uso de fotos, videos, datos –como edad y lugar de procedencia– e información académica recolectada de su hijo, únicamente con fines académicos, en donde se anonimizará su identidad –cambiando su nombre, diluyendo su rostro en las fotografías, videos, etcétera.

Sin más por el momento, agradecemos de antemano la atención prestada a la presente.

M. en C. Luis Alberto López Acosta
Estudiante de doctorado del
DME del Cinvestav del IPN
lalopeza@cinvestav.mx
Tel. cel. (99) 93705034

Dra. Gisela Montiel Espinosa
Asesora de Tesis y Coordinadora Académica
del DME del Cinvestav del IPN
gmontiele@cinvestav.mx
Tel. (55) 57473800 Ext. 6012

Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco 07360. México, Ciudad de México. Sitio web: https://www.matedu.cinvestav.mx/ Teléfonos: (52) + (55) - 57.47.38.15

Ciudad: Mérida, Estado: Yucatán, Fecha: 13/08/2020

Yo, ______ madre/padre/tutor de ______ autorizo que mi hija participe en el diseño didáctico que llevará a cabo el investigador M. en C. Luis Alberto López Acosta.

Declaro que estoy al tanto de la actividad académica en la cual se enmarca la actividad y sus objetivos. Acepto que se tomen registros de la participación de mi hija, y estos se utilicen exclusivamente con fines académicos.

Deseo acceder a los reportes técnicos emanados de la investigación:

✓ SÍ __ NO

Favor de enviarlos a la cuenta de correo electrónico ______

Nombre y firma de la(el) madre/padre/tutor

Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco 07360. México, Ciudad de México. Sitio web: https://www.matedu.cinvestav.mx/ Teléfonos: (52) + (55) - 57.47.38.15

Carta invitación

Formato de autorización firmado

Figura 36. Formatos de permiso para participación en el estudio (en la izquierda se muestra la carta invitación y en la derecha el permiso firmado por el/la tutor(a))

4. Una vez recibida la autorización firmada, se escribió a cada participante para solicitar el teléfono celular, las fechas y horarios disponibles para participar, así como compartir el enlace a la plataforma de Google Classroom.
5. En total cuatro estudiantes se contactaron y manifestaron su interés en participar (una de escuela pública y tres de escuela privada) en la investigación:
   - Dos estudiantes de segundo semestre (mujer y hombre)
   - Dos estudiantes de cuarto semestre (mujer y hombre)

Se trabajó con 3 estudiantes (todos de escuela privada), puesto que una de las estudiantes que se contactó no entregó su autorización firmada y tampoco respondió a los correos para confirmar su participación. Se trabajó con:

- Dos estudiantes de cuarto semestre (mujer y hombre)
- Un estudiante de segundo semestre (hombre)

7.4.2.2. Producción de datos

Las fuentes que se emplearon para la producción de datos fueron diarios de campo, grabaciones en video de las interacciones síncronas y los documentos digitales en los que la y los estudiantes plasmaron sus producciones.

7.4.2.3. Diarios de campo

Los diarios de campo sirvieron para plasmar las anotaciones del investigador posterior a cada una de las sesiones. En este instrumento se describió el proceso que el/la estudiante siguieron para resolver las situaciones. Se registraron las observaciones que el investigador realizó acerca de lo acontecido, interpretaciones, dificultades observadas (tanto por parte del investigador como del/la estudiante para completar los procesos), así como ajustes en el diseño que se consideraban pertinentes para las siguientes intervenciones.

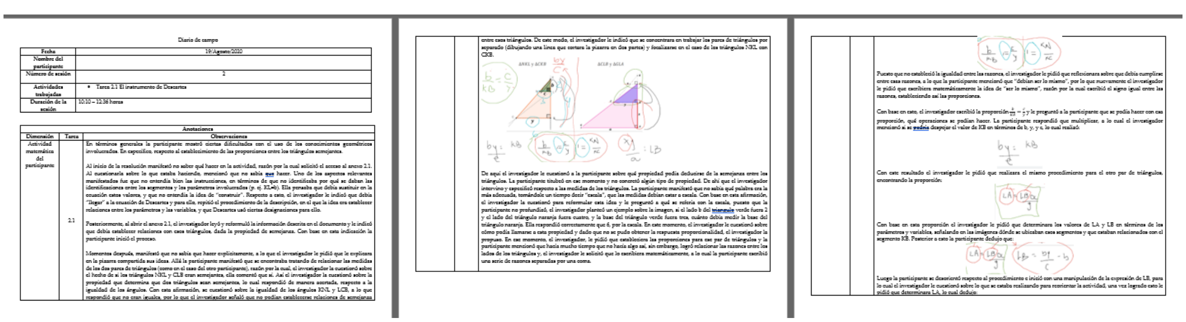
El formato de los diarios de campo por actividad y por estudiante es el siguiente:

Diario de campo

Fecha		
Nombre del/la participante		
Número de sesión		
Actividades trabajadas		
Duración de la sesión		
Anotaciones		
Dimensión	**Tarea**	**Observaciones**
Esta celda tiene la función de especificar la dimensión a la que están asociadas las observaciones: actividad matemática del/la estudiante (el proceso de resolución de las situaciones), diseño (aspectos de rediseño), plataforma (dificultades con la plataforma).	*En esta celda se especifica el número de la tarea*	*En esta celda se describe el proceso que el/la estudiante siguió para resolver la tarea. Consiste en un meta-análisis de lo experimentado con el/la estudiante. Se incluyen también las imágenes las construcciones conjuntas o individuales en la pizarra virtual para ilustrar las observaciones de interés.*

Tabla 25. Diario de campo

Ejemplo de diario de campo:



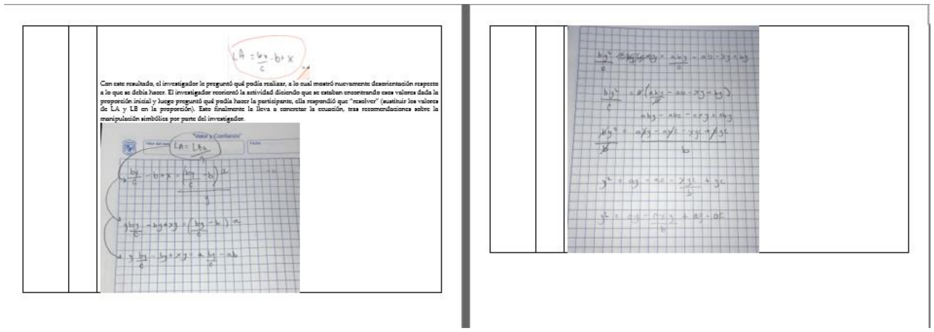


Figura 37. Ejemplos de llenado de diarios de campo

7.4.2.4. Grabaciones en video

Las grabaciones en video fueron obtenidas por la función de la plataforma Zoom para grabar la pantalla, con la cual es posible videograbar el video y audio de las/los participantes.

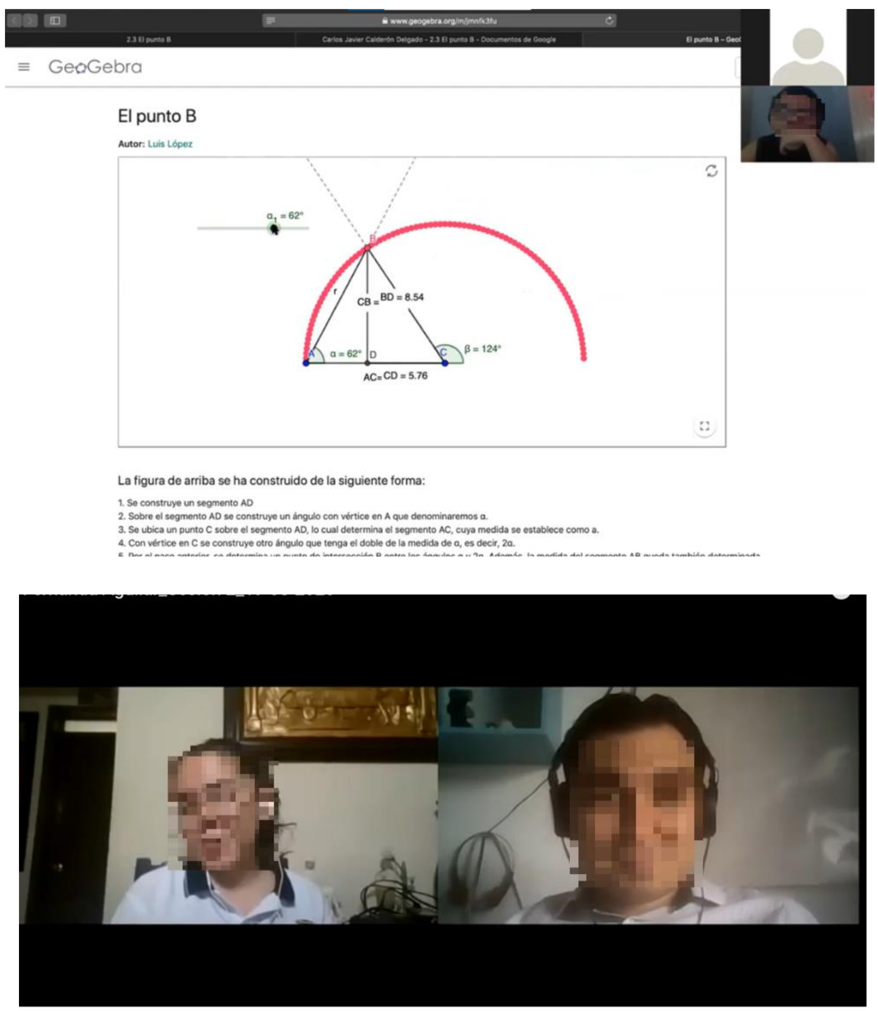


Figura 38. Capturas de pantalla de las grabaciones de video por la plataforma *Zoom*

7.4.2.5. Documentos digitales

Los documentos digitales permitieron recabar sus discursos escritos, así como las imágenes de sus procedimientos que no eran accesibles a través de la videollamada.

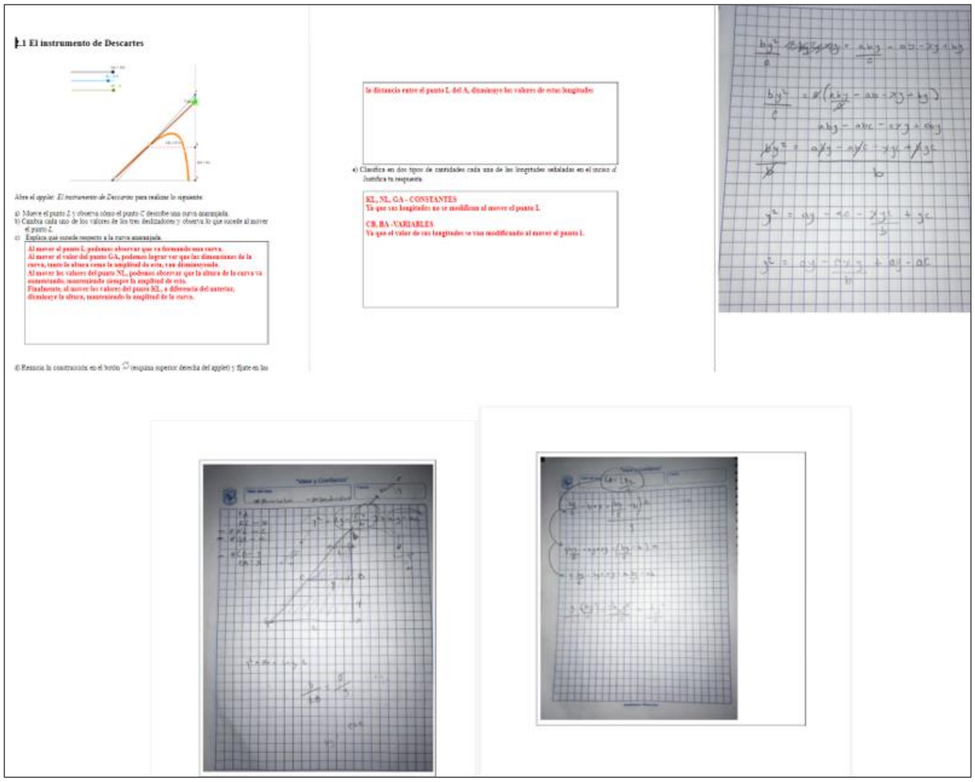


Figura 39. Texto e imágenes recabadas en los documentos digitales

7.4.2.6. Pizarra Digital de *Jamboard*

La pizarra digital de *Jamboard* permitió también registrar las construcciones que requerían una visualización conjunta de ciertos elementos para una mejor comunicación entre el investigador y el/la estudiante.

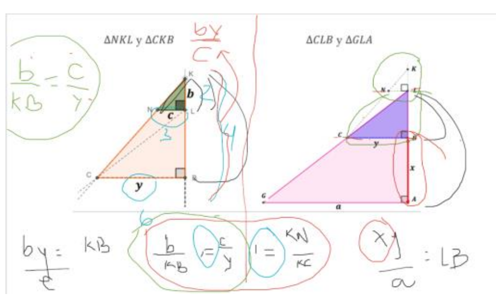


Figura 40. Ejemplo de interacción en la pizarra digital

7.4.2.7. Organización de Datos

La organización de los datos consistió en elaborar registros tabulares que permitieran una comprensión de lo acontecido en la EBT en términos, no solo desde el discurso escrito, sino también desde la interacción con los demás recursos semióticos involucrados como las imágenes y gestos en algunos casos. Se buscaba sistematizar lo que la transcripción escrita del discurso oral en las interacciones pudiera conectarse con lo que se hacía en las pizarras interactivas. A continuación mostramos un ejemplo de estas tablas. Las transcripciones completas pueden consultarse en el Anexo 13.1

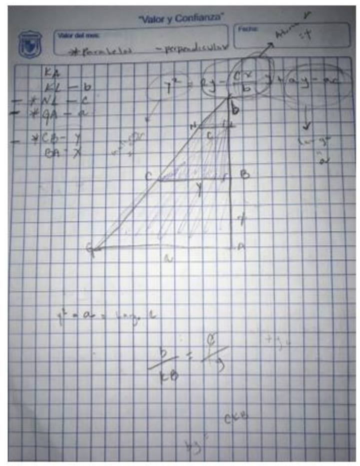
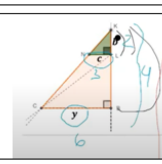
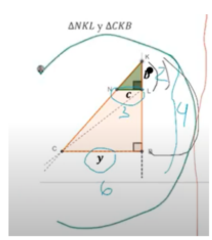
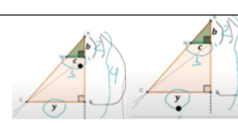
Transcripción	Recursos semióticos complementarios al discurso oral
L1. E2: Me perdi [risa nerviosa] L2. I: Ok, ¿me puedes contar qué estás pensando... más o menos?... o sea... veamos qué... qué pasa por tu mente en estos momentos a ver. L3. E2: Es que... ajá... estaba escribiendo, o sea, estaba ordenando lo que decía... el ejercicio ¿no? porque se me hace más fácil así, pero, o sea ya que iba a empezar a hacerlo, me perdí en la, o sea, qué cuando me dice que construya la ecuación, o sea ¿tengo que cambiar los valores a los que me da... o? es que me perdí. L4. I: Ok, no, la idea es que tú puedes llegar a esa ecuación, o sea te pongo en la ecuación para que sepas cuál es la ecuación a la que tienes=de hecho, es la ecuación de la curva anaranjada. Entonces la intención aquí es que tú puedas llegar a esa ecuación, es decir, hacer cierto tipo de operaciones o lo que tú consideres, para llegar a esa ecuación. Es decir, básicamente hacer como que, en cierto modo, lo que Descartes hizo, aunque, claro, no sabes qué hizo exactamente ¿no? pero eso sí, como un procedimiento para que tú puedes llegar a esa ecuación. L5. E2: Ah [ok-] L6. I: [Lo que tienes que saber, es eso, que cada segmento del instrumento se denominó con cierto parámetro en este caso KL es en esa ecuación esa letra b, representa, digamos, al segmento KL, esa c, representa el segmento NL, el a representa el segmento GA, y así, y claro, eh y y x pues representan esos segmentos CB y BA que son los variables ¿no? las variables que viste... identificaste en el instrumento. Entonces básicamente para eso es esta última parte, o sea, él lo que hizo es: voy a designar a estos segmentos con estas letras b, c, a, etc. etcétera y con eso construyó esa ecuación que incluye digamos a todos esos segmentos allá. L7. I: No sé si queda claro o. aún... aún no. L8. E2: O sea, es que si queda claro, pero pues... no sé qué hacer y eso. L9. I: Ok, entonces ¿quieres... ¿quieres pensar un momentito? ¿o prefieres estem... pasar eh directo al, como el apoyo?	
L57.I: Ok, como están... están a escala. Exacto, entonces, por ejemplo, si aquí mide, por ejemplo, no sé, suponte qué... mide 2 centímetros, o sea mide, por ejemplo, el lado b mide 2 centímetros [escribe 2 a un lado del triángulo] y este mide el total, digamos, KB mide 4 [escribe 4 y una llave para indicar que el lado KB mide 4 cm]. Entonces, por ejemplo, ¿qué relación debe haber entre este c y este el de y ¿no? suponte que si c es 3 [escribe 3 abajo del lado NL], por ejemplo, ¿qué medida tendría que tener el otro?	
L58.E2: 6. L59.I: 6 ¿no? o sea como... ¿cómo le llamamos a esto? se le llama que hay... tiene que guardar cierta proporción ¿no? entre sus... L60.E2: Ahí está... sí. [Risa]	
L61.I: Esa es la palabra. Muy bien, entonces, claro, entonces, lo que va a pasar es que una propiedad que tienen los triángulos que son semejantes es que, por supuesto, son semejantes dado que tienen los mismos ángulos y, por lo tanto, como tiene unos ángulos solamente que uno es más pequeño, o grande que el otro, pues van a estar escala, como bien dices, y eso en esencia lo que significa es que van a guardar cierta proporción entre sus lados, ¿ya? Entonces, aquí, lo que... lo que, por ejemplo, podrías hacer es determinar, por ejemplo, las proporciones entre los lados, digamos, de... de esos triángulos, es decir, escribir cuáles serían las proporciones que se cumplen en ese triángulo. [utiliza el láser virtual para señalar el triángulo CKB] L62.I: Claro que no tienes las medidas, en este caso, en términos de b, c y y ¿no? entonces, por ejemplo, qué proporción podría escribir allá en es... para estos triángulos, es decir para estos de aquí de la izquierda. ¿Qué proporciones podría escribir allá?	
L63.E2: O sea c, sería proporcional a y, b sería proporcional a KB, KN sería proporcionar KC. [con el puntero va señalando los lados del triángulo CKB]	

Figura 41. Ejemplo de transcripciones de las interacciones en la EBT

7.3.3. Análisis retrospectivo

Para el análisis retrospectivo se lleva a cabo un análisis que toma en consideración la estructura por niveles propuesta por Simon (2018, 2019) y Simon, et. al. (2010), la cual interpretamos como una progresión gradual y sistemática que permite ganar niveles de delicadeza, cada vez más finos, respecto del entendimiento del dato. Cada nivel previo del análisis retroalimenta al posterior, en este sentido lo obtenido en cada paso se convierte en dato para lo subsecuente. Podemos resumir la postura de la siguiente manera:

1. Nivel 1. Se parte de la lectura cercana al dato y sus "alrededores", también llamado *análisis línea por línea*, en términos de que el primer paso es ganar comprensión respecto al sentido de la transcripción para generar entendimiento respecto de las concepciones de estudiantes y su evolución al abordar tareas matemáticas específicas. La intención principal es obtener cuestionamientos iniciales y conjeturas, en torno a pasajes localizados de los transcripciones, que se identifiquen como de interés para una profundización en etapas subsecuentes.
2. Nivel 2. A partir de lo obtenido en el primer nivel de análisis, las inferencias se extienden a segmentos del *corpus* de datos, es decir, se explican partes de las experiencias mediante ciertas hipótesis que las representan, lo cual permite un nivel más alto de inferencia.
3. Nivel 3. Se basa en la generación y/o construcción de explicaciones de los fenómenos localizados en los niveles previos. Este nivel, señalan, demanda el uso de la teoría, pues su finalidad es la de ser útil para el campo general.

Recuperamos de esta propuesta metodológica el sentido de progresión gradual en niveles respecto al entendimiento del dato, así como la retroactividad entre los niveles, sin embargo, la propuesta de Simon y colaboradores(as) usualmente se aplica a experiencias en las cuales interesa indagar en las concepciones puestas en juego por estudiantes bajo diseños instruccionales específicos (Simon, 2018; Simon et. al., 2010), de manera que se enfocan en establecer la relación *diseño instruccional – concepciones de estudiantes*. Si bien, en el caso de nuestro trabajo, nos interesaba identificar qué es lo que las y los estudiantes hacen al resolver problemas relativos al análisis algebraico, nuestro foco de atención no es estudiar la relación diseño instruccional – concepciones, sino la *construcción específica de la ecuación paramétrica, mediada por la práctica de algebrización de la geometría*. Es decir, el diseño instruccional no es el objeto de estudio, sino la naturaleza, consideraciones, necesidades y complementos que pueden determinarse al abordar la algebrización de la geometría con estudiantes y cómo a partir de todo ello, aportar consideraciones para el diseño instruccional.

En esta línea es importante reconocer que el diseño aplicado con la y los estudiantes inducía procesos de construcción específicos provenientes de la epistemología de partida, resultante del EHE y, por lo tanto, ya se tienen categorías teóricas muy específicas (acciones, actividades y práctica socialmente compartida) que se están involucrando en el diseño y que inducen el quehacer de la y los estudiantes. No obstante, lo que no se sabía previo al experimento de diseño era qué otros aspectos de la actividad matemática emergerían para complementar estas categorías teóricas de partida.

Con base en estas consideraciones realizamos un análisis retrospectivo en tres fases, en el cual, partiendo de la hipótesis epistemología determinada en la primera fase del estudio (ver apartado 6.1.5) se determinó analizar específicamente los planteamientos correspondientes a que la algebrización de la geometría consistía en el establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole y la construcción de recursos semióticos sistemáticos para distinguir entre los parámetros y variables (nivel acción desde la TS), mediadas por la intención de construir fórmulas o expresiones generales (nivel actividad desde la TS), con la justificación epistémica de que toda relación de equivalencia puede conceptualizarse como una ecuación algebraica (ver figura 42).

Figura 42. Ilustración de las consideraciones epistemológicas derivadas de la hipótesis epistemológica de la primera fase (algebrización de la geometría)

En este sentido, el análisis retrospectivo tenía como objetivo responder a las siguientes preguntas específicas:

- Nivel 1. *¿Qué relaciones de equivalencia establecía y cómo lo estaba haciendo? ¿Qué sucedió en la interacción y cómo se llevó a cabo para el establecimiento de las relaciones de equivalencia que derivaron en la ecuación paramétrica?*

- Nivel 2. *¿Cómo explica el/la estudiante el proceso de algebrización de la geometría?*
- Nivel 3. *¿Qué muestran los/la estudiante sobre la práctica de algebrización de la geometría? ¿Cómo se complementan las consideraciones epistemológicas derivadas del EHE de la algebrización de la geometría con la actividad matemática producto de la EBT?*

A continuación, presentamos el análisis retrospectivo para la Actividad 1 con la intención de ejemplificar el procedimiento llevado a cabo. Con la intención de agilizar la lectura y, puesto que el procedimiento fue el mismo para ambas actividades, el análisis completo de la Actividad 2 se presenta en el Anexo 13.3.

7.3.3.1. Primer nivel de análisis

Este nivel tiene dos fases. La intención en este primer nivel es responder a las preguntas analíticas *¿qué estaba relacionando y cómo lo estaba haciendo? Y ¿qué sucedió en la interacción y cómo se llevó a cabo para el establecimiento de las relaciones de equivalencia que derivaron en la ecuación paramétrica?*

Para responder estas preguntas se realizó un proceso análogo[28] al *Análisis Temático*, desde la postura de Braun y Clarke (2006) y Mieles Barrera, Tonon, y Alvarado Salgado (2012), en el sentido de que en la primera fase de nuestro método, se describen detalladamente las interacciones entre el investigador (su código en la transcripción es: I) y los y la estudiante (sus códigos en la transcripción son: E1, E2 y E3) llevadas a cabo para la construcción de la ecuación paramétrica. Esta fase se ha dividido en dos momentos, el primero en el que se describe de manera completa las interacciones y el segundo momento en el que hace una síntesis de los procesos de construcción para cada estudiante. Con la síntesis se seleccionan las partes de las transcripciones que contienen los elementos relevantes del proceso de construcción de la ecuación paramétrica. Aquellas partes que no contribuyen son eliminadas para el análisis subsecuente. El objetivo con esta síntesis es entonces descartar la información no relevante y concentrar los segmentos que contienen la información suficiente para el entendimiento del proceso de construcción.

Posteriormente, se realiza una abstracción que consiste en identificar en las interacciones con cada estudiante, patrones de actuación en el proceso de resolución. Estos patrones de actuación son identificados como las acciones subyacentes en la interacción que reflejan el proceso de construcción de la ecuación paramétrica. Esto equivaldría a la generación de categorías y se expresan mediante procedimientos concretos por parte del investigador y/o la y los estudiantes (p. ej., “dar sentido a la ecuación sustituyendo valores específicos”, “determinación de

[28] Este nivel puede asociarse a las Fases 1 y 2 del análisis temático.

relaciones geométricas y sustitución semiótica”). Posteriormente, se comparan las distintas categorías y se intentan englobar en otras descripciones más grandes que expliquen segmentos de interacción, lo cual equivaldría a la determinación de temas (p. ej., “2. Identificar la importancia de las relaciones de equivalencia”, “Análisis de la geometría subyacente”).

Nos apoyamos del recurso semiótico de las tablas para condensar la información resultante de esta fase. Las denominamos comparativas porque la intención es “visualizar” en conjunto las acciones compartidas y no compartidas entre cada uno de los actores en la interacción; de modo que se presenten todas las posibilidades en el proceso de construcción.

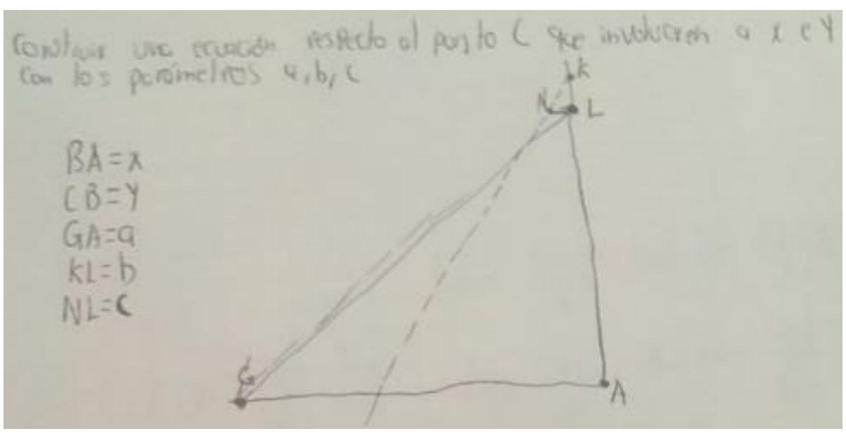
7.3.3.1.1. Síntesis del proceso de construcción de la ecuación paramétrica en la EBT

A continuación mostramos una síntesis de los elementos más relevantes que permiten comprender el proceso de construcción de la ecuación paramétrica. En esta síntesis se omiten partes de la transcripción que no contribuyen directamente con dicho proceso.

7.3.3.1.1.1. Síntesis del Proceso de E1

Al inicio del trabajo con la determinación de la ecuación tuvo dificultades para identificar qué hacer, lo cual lo lleva a solicitar el apoyo (ver L1-L7). Nótese que lo realizado por el estudiante fue el acomodamiento de la información como se ve en la imagen.

L7. **E1**: *Mmmm realmente estoy perdido*
L7. **E1**: *Lo máximo he podido plantear, o sea, pero sólo he planteado los datos que se me dan. No... no logro llegar a pensar en algo.*



“*Construir una ecuación respecto al punto* C *que involucren a x e y con los parámetros a, b, c*”

Posterior a esta intervención y después de trabajar con el anexo 2.1, el estudiante, comparte dudas respecto al significado de establecer una ecuación que involucre al punto c. Esto lleva al investigador a recordarle cómo funciona el instrumento para generar el punto c, a propósito de su exploración inicial con el applet. Asimismo, le hace la aclaración de que las relaciones a establecer entre las figuras debían involucrar a c, enfatizando que el punto c es parte de las figuras, por lo tanto, debía determinar relaciones en esos triángulos (ver L10-L16).

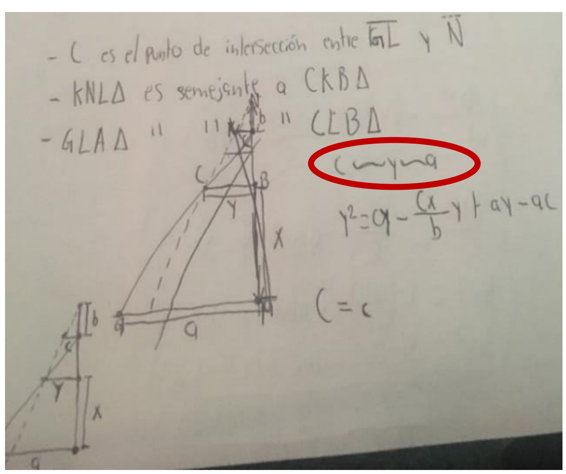
L10. **E1**: *Mmmmm cuando se refiere a respecto al punto C ¿es para determinar el punto C?*

L11. **I**: *Sí, o sea que... estem... digamos todas las relaciones o sea las relaciones que busques... que... que determines tienen que involucrar al punto C porque al final de cuentas, la curva digamos, como tú pusiste al principio, es construida por ese punto C cuando mueves L ¿no? entonces digamos la relación que tú tienes que establecer tiene que involucrar digamos, o sea, tienes que ver involucra el punto C. Eso es más o menos a lo que se refiere.*

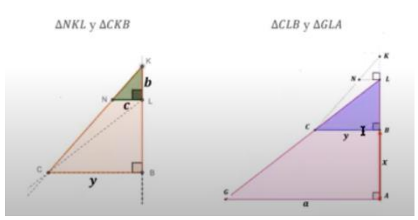
L15. **I**: *Exacto, entonces como... digamos por defecto de esa intersección se genera el punto C, entonces en verdad el instrumento, así tal cual, es lo que permite construir, digamos, esa, esa curva ¿no? entonces tú tienes que buscar, digamos con los datos que tienes allá, es decir, eh como te dicen en la actividad la estrategia de Descartes fue identificar que habían cantidades que determinaban esa construcción, es decir, ese punto C se ubica allá específicamente por la acción de ciertas medidas que tiene el instrumento, ¿sí? que en este caso los parámetros ¿sí? y hay otras que van a ser, digamos, variables en este caso, que son como tú ponías en el recuadro, dices que algunas cambiaban algunas que... que no. Esos parámetros son las cantidades fijas y las variables son las cantidades que van cambiando ¿sí? entonces una vez que tiene eso, él nombra, él va a decir, bueno, a va a ser GA, b va a ser, no me acuerdo si NL o KL y c una de esas dos también, y luego va a decir que* y *es CB, y* x *va a ser BA. Entonces con esos datos él lo que hizo es establecer ciertas relaciones para obtener una ecuación ¿sí?*

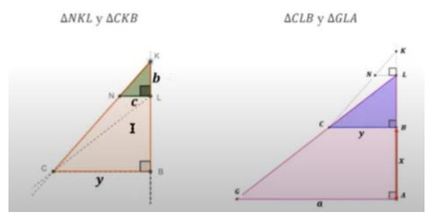
L16. **I**: *Y la sugerencia pues digamos está en el anexo 2.1, es decir, fíjate en las relaciones que están allí ante los... eh las imágenes para ver qué puedes concluir de ello ¿sí?*

En la siguiente intervención, el estudiante señala que no sabe cómo utilizar la información del anexo 2.1 para determinar una ecuación. En su discurso pueden identificarse concepciones erróneas sobre la semejanza, aplicándola hacia los lados de los triángulos, además de que las relaciones que estaba estableciendo no eran adecuadas, toda vez que se encontraba relacionando triángulos que no cumplían la propiedad de semejanza. Nótese que en su hoja de trabajo detalla estas relaciones comentadas al investigador. (ver L20-L24)



L20. **E1**: *entiendo que, o sea, no logro formar… entiendo que… a, y son semejantes debido a que el triángulo CLB y GLA son semejantes* [señala con el puntero los triángulos respectivos], *y por lo tanto, como y y c son semejantes por las mismas razones, entonces, por lo tanto, a es semejante a c.*





L24. **E1**: *Al igual que… que b sería perpendicular, pero dudaría en decir que b y x son semejantes, más no logro ponerlo en una ecuación. Todo esto que tengo apuntado*

A propósito de estas dificultades, el investigador orienta al estudiante a reconocer la relación de proporcionalidad entre los lados del triángulo (ver L25-L35). De esta manera el estudiante intenta determinar las proporciones. Pude notarse que en su explicación establece de manera correcta las razones entre los lados del triángulo CKB, lo cual hace que el investigador le comente que tal cual estableció esas razones podría establecerlas para el otro triángulo GLA (ver L36-L47).

L36. **E1**: *Mmmm y es… c es proporcional a y* [con el puntero señala los segmentos c y y] *pero no…*

L38. **E1**: *y KB es proporcional a b,* [con el puntero señala los segmentos KB y KL] *pero…*

L39. **E1**: *Al igual que CK es proporcional la NK.* [Con el puntero señala los segmentos CK y NK]

L40. **I**: *Ok, entonces intenta establecer una proporción utilizando justamente estos datos que tienes acá, así como me comentaste ¿si? y, de la misma manera fíjate que en este triángulo va a pasar algo similar, o sea, en la otra pareja de triángulos que es CLB y GLA ¿no? =*

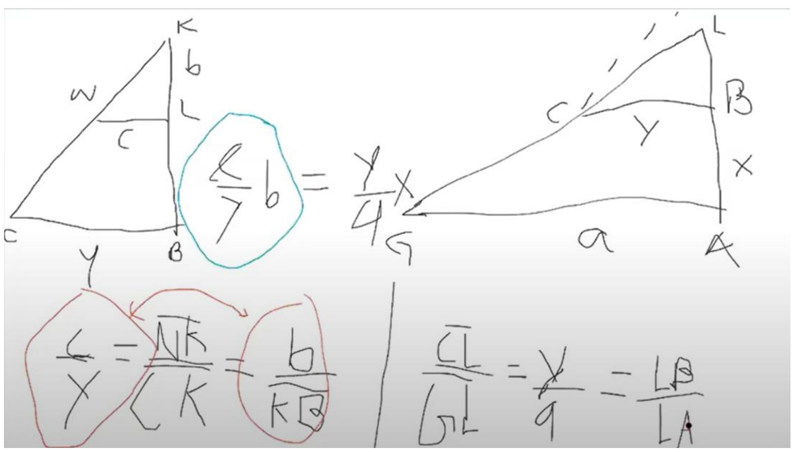
No obstante, el estudiante expresa momentos después dudas sobre qué hacer con la proporción y cómo esta se vincularía con el punto c.

L47. **E1**: *Creo estoy un poco perdido, porque sí entiendo una proporción, pero no cómo se podría plantear simplemente qué… quiero entender que la misma proporción que se halla en el triángulo NKL y CKB es la que me permitirá relacionarlo con el punto c.*

Esto implica que el investigador reformule la idea del involucramiento del punto c, enfatizando el hecho de que el punto c es un elemento en ambos pares de triángulos, razón por la cual podría considerarse que este punto estaría involucrado en las figuras, y por lo tanto, solo debería de establecer las proporciones en los triángulos. De este modo, el investigador induce al estudiante al establecimiento de las proporciones.

L48. **I**: […] *fíjate aquí la idea cuando se menciona* […] *que tienen que involucrar el punto c si te fijas en los dos triángulos, o sea, en las dos parejas de triángulos que tienes, el punto C es parte de la* *figura. Entonces, por ejemplo, en el NKL con CKB, ves que C, de hecho, es un vértice de la base del triángulo naranja ¿no? y en el otro, en la otra pareja de morado y el rosado el punto C también es parte de la figura, entonces a eso se refiere la idea de que lo involucren. Solamente el hecho de que esos triángulos que tienes ahí, ya el punto C sea parte de... de esos triángulos, ya está involucrado, digamos, como se espera, bueno como se dice en la instrucción. Entonces como ya está involucrado C lo único que, digamos, debes hacer esta vez es ver en esos triángulos qué tipo de relaciones podrías encontrar utilizando estas cantidades c, b, y, a y x para poder determinar una ecuación ¿sí? Entonces la idea es que como tú me decías, bueno podría haber una proporción allá en el primer par de triángulos y en el otro, otra proporción. Entonces intenta determinarlas a ver qué sucede.* [...]

Con base en esta interacción el estudiante se propone a plantear las proporciones, sin embargo, plantea la siguiente proporción $\frac{c}{y}b = \frac{y}{a}x$ (ver L56), la cual es incorrecta pues involucra lados de triángulos que no son semejantes entre sí, razón por la cual el investigador aborda estas dificultades con el estudiante (ver L56-L107). Esta intervención permite que el estudiante proponga las proporciones para ambos pares de triángulos.



A partir de este resultado el investigador comenta al estudiante que se pueden usar las proporciones $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ y $\frac{y}{a} = \frac{\overline{LB}}{LA}$ y menciona al estudiante que faltaría expresar estas proporciones en términos de los parámetros y variables.

L109. **I**: *Entonces lo que faltaría ahora es ver cómo poder expresar estos tres, digamos, en términos de esas que tienes, es decir x e y, o con los parámetros.*

L112. **I**: *Entonces trabaja con estas, a ver qué es lo que puedes, estem obtener, para lograr, digamos, estem... determinar... K... quién es KB en términos de los parámetros, o de las incógnitas quién es LB y quién es LA ¿sí?*

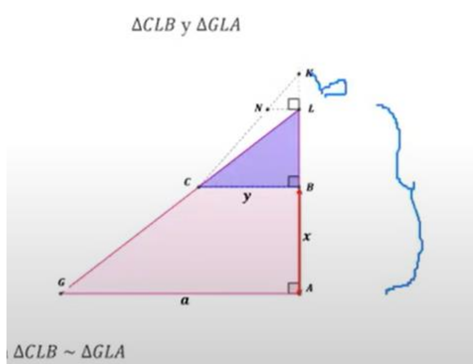
En un momento siguiente el estudiante comenta que ha determinado una relación entre LA y LB.

L115. **E1**: *Mmmmm entonces, solo para corroborar algo. La resta… ya que LA conforma LB y x… si a LA le restó LB me quedo solamente con x ¿no?* [señala con el puntero los segmentos LA y LB]

No obstante, el estudiante continua su explicación mostrando relaciones que le permitan conseguir algunos términos, como los encontrados en la ecuación de Descartes, específicamente el cuadrado de y. Por ejemplo, establece que: $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB} = \frac{c^2}{y^2} = \frac{c}{y} \cdot \frac{b}{BK}$, lo cual muestra un razonamiento algebraico correcto. El investigador lo deja trabajar (ver L115-L135).

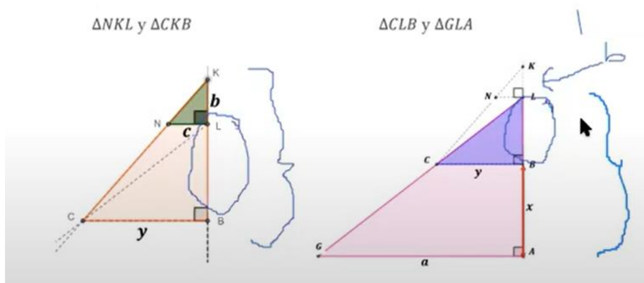
Durante el proceso de resolución posterior, el estudiante indica al investigador que buscaba relacionar ambas proporciones en una sola ecuación, pero que no sabía cómo hacerlo. Esto dio pie a una interacción en la que el investigador propone al estudiante el análisis de las proporciones a las que se había llegado ($\frac{c}{y} = \frac{b}{BK}$ y $\frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$) con la intención de mostrarle cómo interpretar sus componentes en términos de los elementos de los triángulos semejantes y sus respectivas asociaciones con los parámetros y variables. Particularmente, retoma su idea respecto a lo comentado de la relación entre LB y LA, enfatizando que podría analizar la imagen para determinar esta relación.

L151. **I**: *[…] entonces fíjate que aquí tú tienes que este de aquí es b ¿no? aquí tienes a x y tú decías, por ejemplo, que en este caso, eh el lado LA, que sería todo este de aquí ¿no? todo este podrías verlo con una resta ¿no? ¿sí?* [dibuja una llave y la letra b para mostrar las relaciones entre el parámetro b, el segmento LA y la variable x].



L152. **E1**: *Una resta de… o una suma de b más LA sería KA. KA menos b es igual a LA.*

L153. **I**: *Ok, aquí tienes a b. Aquí está b entonces fíjate de una cosa, de estem… claro tú me estás diciendo esta idea de que puedes verlo como una diferencia. El lado LA, pero fíjate que aquí en el triángulo, en el de la izquierda, estem KB* [dibuja una llave para destacar el segmento KB], *si te das cuenta, está involucrando a LB ¿sí? es decir, esta parte y esta parte es la misma que está aquí* [encierra LB en el triángulo de la izquierda y también en el triángulo LGA de la derecha] *¿sí? Ok, entonces, de alguna manera si quieres verlo así, está… de alguna manera conociendo quién es este LB también podrías relacionarlo con… con el otro triángulo, y de esa manera poder estem establecer esa conexión que dices ¿ok? Entonces aparte de eso, […] entonces no sé si te convence el hecho de que… lo que te mostré te muestra que hay como una conexión entre esos dos.*



A pesar de esta explicación el estudiante menciona que no sabe cómo plantear esa relación

L154. **E1**: *Sí, mas no me ubico en cómo plantearlo.*

Con base en esta interacción el investigador propone específicamente operar sobre la proporción para determinar a KB en términos de los parámetros y variables para que pueda identificarse el porqué es importante esa relación. Esta interacción se torna extensa por el hecho de que el estudiante manifiesta múltiples dificultades con la operatividad algebraica (ver L155-L221).

Posteriormente, el investigador le solicita al estudiante que use el resultado $KB = \frac{by}{c}$ para reescribir a LB. No obstante, el estudiante muestra nuevamente dificultades algebraicas (ver L239-L250).

Una vez atendiendo las dificultades algebraicas, el estudiante llega a la expresión $\frac{y}{a} = \frac{\frac{by}{c} - b}{\frac{by}{c} - b + x}$ (L254-L255). Sin embargo, como puede verse en la línea L267, el estudiante muestra dudas sobre el hecho de si este proceso le permitirá obtener la ecuación solicitada. El investigador le indica que siga avanzando para ver qué es lo que podría obtenerse.

L267. **E1**: *¿Y lo que obtendría sería la ecuación o seguiría siendo una… una semejanza nada más?*

Posteriormente, el estudiante construye la expresión $\frac{by^2}{cy} - by + xy = \frac{aby}{ac} - ab$, pero no reconoce que esa expresión puede manipularse para llegar a la ecuación solicitada. El investigador orienta al estudiante para manipular la ecuación, lo cual concluye de manera adecuada.

7.3.3.1.1.2. Síntesis del Proceso de E2

Al inicio de la resolución, la estudiante manifestó no saber qué hacer en la actividad, pues tuvo dificultades para interpretar las instrucciones, puesto que no identificaba por qué se daban las identificaciones entre los segmentos y los parámetros involucrados (p. ej. $KL = b$). Ella pensaba que debía sustituir en la ecuación estos valores, y que no entendía la idea de "construir". El investigador reformuló las instrucciones para orientar a la estudiante en sus dudas (L1-L12).

L3. **E2**: *Es que… ajá… estaba escribiendo, o sea, estaba ordenando lo que decía… el ejercicio ¿no? porque se me hace más fácil así, pero, o sea ya que iba a empezar a hacerlo, me perdí en la, o sea, qué cuando me dice que construya la ecuación, o sea ¿tengo que cambiar los valores a los que me da… o…? es que me perdí.*

L4. **I**: *Ok, no, la idea es que tú puedes llegar a esa ecuación, o sea te pongo en la ecuación para que sepas cuál es la ecuación a la que tienes=de hecho, es la ecuación de la curva anaranjada. Entonces la intención aquí es que tú puedas llegar a esa ecuación, es decir, hacer cierto tipo de operaciones o lo que tú consideres, para llegar a esa ecuación. Es decir, básicamente hacer como que, en cierto modo, lo que Descartes hizo, aunque, claro, no sabes qué hizo exactamente ¿no? pero eso sí, como un procedimiento para que tú puedes llegar a esa ecuación.*

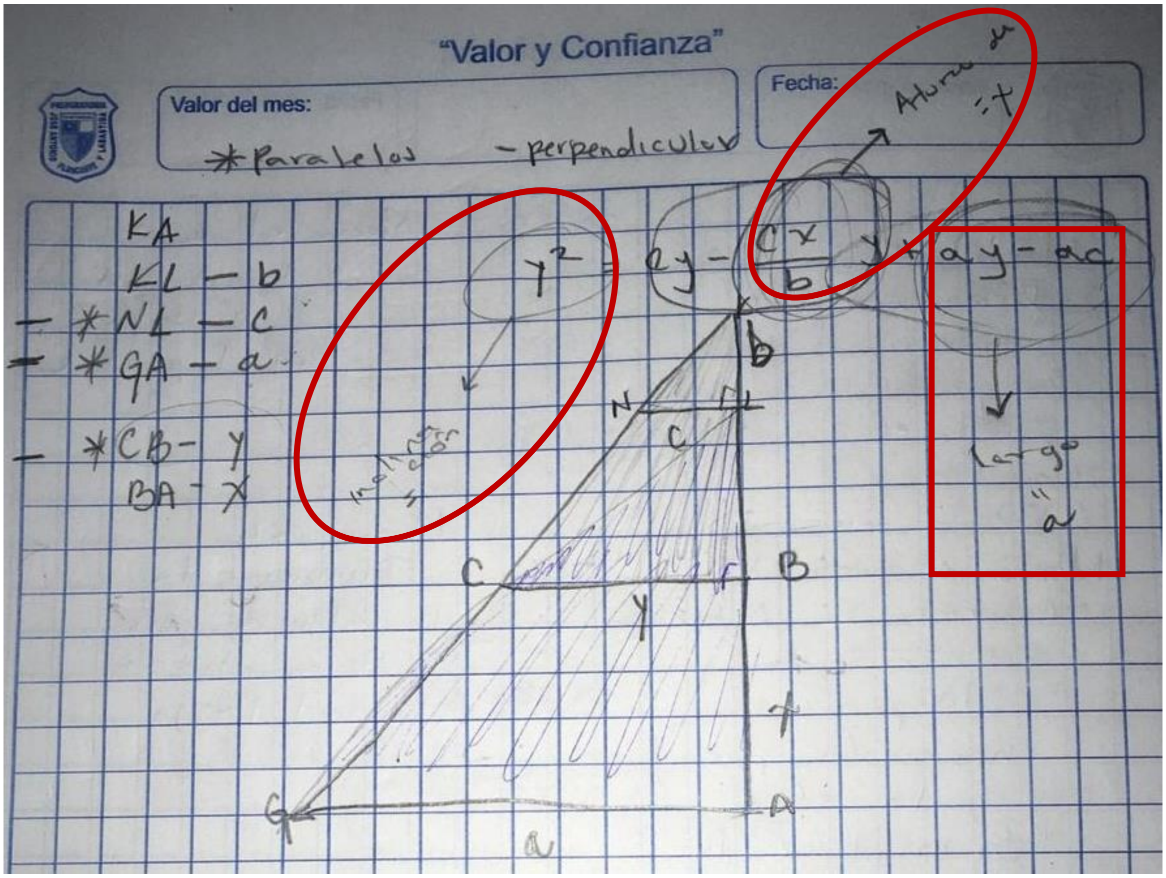
L7. **I**: *No sé si queda claro o… aún… aún no.*

L8. **E2**: *O sea, es que sí queda claro, pero.. pues… no sé qué hacer y eso.*

Posterior a esta interacción, la estudiante solicita el acceso al anexo 2.1, pues manifiesta no saber qué hacer (ver L13-L17). Ella comenta que lo que se encontraba haciendo es tratar de darle sentido a los elementos de la ecuación, tal y como puede observarse en su hoja de trabajo.

L16. **I**: *A ver qué estuviste pensando más o menos, o sea, lo que sea que haya pasado por tu mente.*

L17. **E2**: *O sea…traté como que ver, o sea, de dónde, o sea, cómo… cómo por qué sacó esos ¿ya sabes?… o sea, por qué… por qué esas operaciones y así, pero no… no… no le encuentro el hilo.*

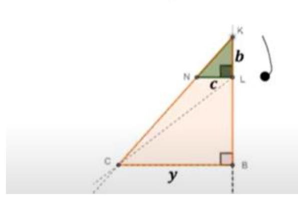


Durante el trabajo con el anexo 2.1, la estudiante expresa nuevamente dificultades para avanzar en la resolución. Es importante destacar que la estudiante contaba con el conocimiento previo del establecimiento de las relaciones de proporcionalidad entre los triángulos semejantes del pre-test. Como consecuencia de las dificultades, el investigador le pide a la estudiante revisar sus ideas.

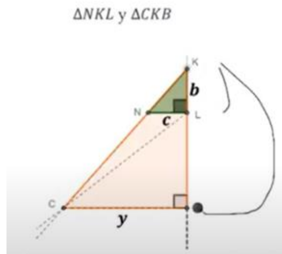
En la pizarra digital, la estudiante mencionó que se encontraba tratando de relacionar las medidas de los dos pares de triángulos NKL - CKB, y CLB - GLA —como en el caso del estudiante E1—.

L28. **E2**: ☺*Es que… estoy eh perdida*☺, *o sea, pues, o sea, por lo que entendí… este triángulo* [Ingresa al *Jamboard* y señala el triángulo NKL], …

ΔNKL y ΔCKB

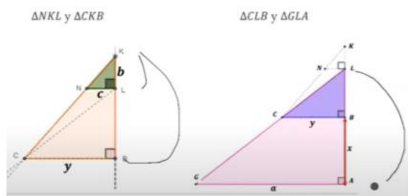


L29. **E2:** *y este triángulo* [señalando el triángulo CKB] *son semejantes ¿no?*



L30. **I**: *Ajá.*

L31. **E2**: *Entonces… llegué a la… o sea, llegué a la conclusión de que los tres triángulos esos y este* [señalando el triángulo GLA] *son semejantes ¿no?*



L26. **E2**: *Entonces pues es que traté de buscar una relación ¿no? y llegué a la conclusión de que* c*,* y *y* a *son semejantes*

L27. **I**: *Ok.*

L28. **E2**: *Y me perdí.*

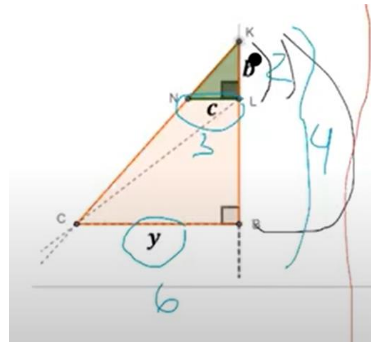
Con base en esta explicación el investigador la orienta para el correcto establecimiento de semejanza entre los triángulos y posteriormente al cuestionamiento respecto de qué propiedad cumplirían los triángulos dada la semejanza entre ellos, sin embargo, la estudiante no expresa la proporcionalidad. La noción que expresa inicialmente la estudiante respecto a la relación de proporcionalidad es la escala.

L55. **E2**: *Que… o sea, que tiene que tener, o sea tienen que ser ¿equivalentes?. o sea que tienen que tener como que… AH…* ((grita)) *Dios. Es que no sé qué palabra usar.*

L56. **E2**: *Tiene que ser… Ajá, pues que… a… ah por qué no tengo la palabra… la palabra… por Dios… Es que tienen que ser… a escala… o sea, como que… ¿sí? ¿no? o sea, que tienen que tener la misma escala.*

De este modo, el investigador reformula la palabra escala por proporcionalidad y propone un ejemplo de medidas concretas para identificar si la estudiante puede establecer las proporciones.

L57. **I**: *Ok, como están… están a escala. Exacto, entonces, por ejemplo, si aquí mide, por ejemplo, no sé, suponte qué… mide 2 centímetros, o sea mide, por ejemplo, el lado b mide 2 centímetros* [escribe 2 a un lado del triángulo] *y este mide el total, digamos, KB mide 4* [escribe 4 y una llave para indicar que el lado KB mide 4 cm]. *Entonces, por ejemplo, ¿qué relación debe haber entre este c y este el de y ¿no? suponte que si c es 3* [escribe 3 abajo del lado NL], *por ejemplo, ¿qué medida tendría que tener el otro?*



L58. **E2:** 6

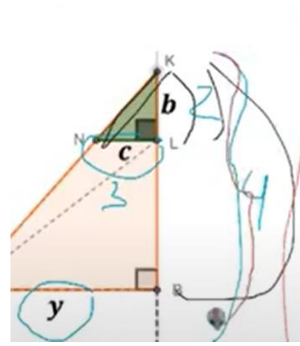
Posteriormente, el investigador solicita a la estudiante determinar las proporciones, sin embargo, ella muestra dificultades para reconocer la equivalencia entre las razones de las medidas de los lados, y por lo tanto, no plantea como tal las proporciones, sino una colección de razones. Esto provoca que el investigador la cuestione al respecto para que se reconozca la igualdad entre las razones (ver L66-L71).

Al establecer la relación de equivalencia, el investigador hace hincapié en dos aspectos. El primero es el hecho de que la relación de igualdad podía ayudarla para determinar la ecuación y el segundo, el hecho de que en las proporciones se encuentran relacionados algunos parámetros y variables. Escribió la proporción $\frac{b}{KB} = \frac{c}{y}$ y le preguntó a la estudiante que se podía hacer con esa proporción, qué operaciones se podían hacer. La estudiante respondió que multiplicar, a lo cual el investigador mencionó que si se pudiera despejar el valor de KB en términos de b, y, y c, lo cual realizó:

$$\frac{by}{c} = KB$$

Con base en este resultado el investigador enfatiza la relación entre la expresión determinada y lo que representa en la imagen.

L85. **I**: *Exactamente. Muy bien, entonces fíjate que ya tienes la medida, en este caso, en términos de los parámetros, de… eh pues todo el segmento este que te decía el KB. Es decir, KB este pedazo* [dibuja una llave para señalar el lado KB]…



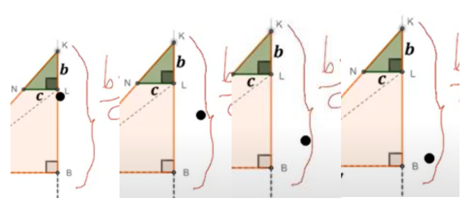
L86. **I**: *es igual o más bien…* by *entre* c *¿ok?* [dibuja una flecha y escribe la expresión $\frac{by}{c}$]

Posteriormente el investigador solicita a la estudiante que realice el mismo procedimiento para el otro par de triángulos. En el proceso la estudiante muestra dificultades para establecer de manera adecuada la proporción (véase L92-L100). Esto genera una interacción para reconsiderar la forma en que estaba relacionando los lados de los triángulos. Cuando se aclara la dificultad la estudiante escribe la proporción $LA = \frac{LBa}{y}$.

A partir de esta relación el investigador comenta a la estudiante que al igual que en el caso anterior, las expresiones deberían escribirse en términos únicamente de los parámetros y variables. Por lo tanto, le comenta que debía reescribir a LA y LB en términos de estas cantidades (ver L101-L102).

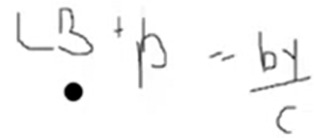
Después de trabajar en la reescritura de LA y LB, la estudiante llega a la expresión $LB = \frac{by}{c} - b$, al establecer una relación aditiva entre el segmento LB y KB.

L110. **E2**: *Porque, pues obviamente, nada más queremos el valor de esta parte* [señalando el segmento LB], …



No obstante, la estudiante muestra una falta de conciencia sobre la finalidad de su resultado, pues reescribe la misma expresión sumando b a ambos lados de la ecuación.

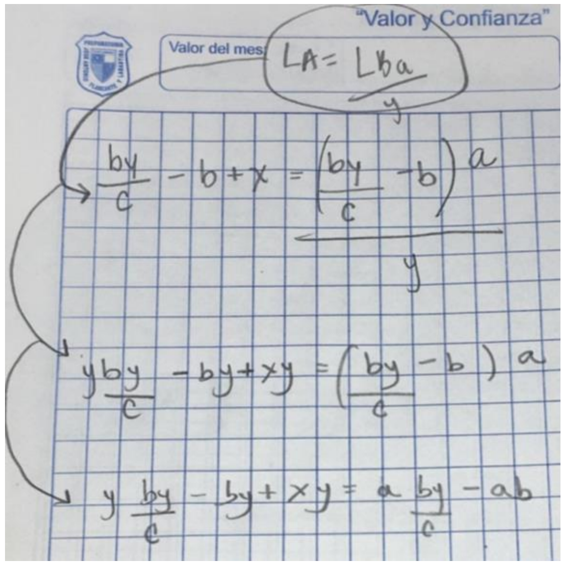
L111. **E2**: *o sea tendrías que quitarle este valor,*
L113. **E2**: *y… pues ya, o sea lo… le reste la b, lo pasé… luego pase multiplicando la c… ajá, sí.*
L114. **E2**: *No, creo que lo hice mal.*
L116. **E2**: *Porque… ajá, o sea, hice esto ¿no? lo pasé… pasé LB men… más b… más b y eso me daba igual a $\frac{by}{c}$ ¿no? pero yo lo pasé… lo pasé dividiendo y no tenía que haberlo pasado dividiendo, tenía que haberlo pasado multiplicando*. [escribe la expresión $LB + b = \frac{by}{c}$]



Esto genera una interacción para que pudiera aclararse el objetivo de la reescritura de LA y LB en términos de los parámetros y variables (ver L117-L127). Una vez aclarado la duda, la estudiante reconoce la necesidad de expresar LB en términos de los parámetros y variables.

L128. **I**: *digamos esta es la relación de la que partiste y ahora, ya sabes quiénes son LB y quiénes son LA. Entonces* <u>*¿qué se te ocurre hacer, a partir de eso?*</u>
L129. **E2**: <u>*¿Resolverlo? o sea ¿cambiar los valores?*</u>
L131. **E2**: *O sea, cambiar… o sea la…* <u>*lo que está encerrado en verde cambiar los valores*</u>*, o sea* <u>*poner los valores de LA y los de LB*</u> <u>*y pues ya resolverlo y despejar las letras*</u>*.*

Con este resultado, el investigador le preguntó qué podía realizar, a lo cual mostró nuevamente desorientación respecto a lo que se debía hacer. El investigador reorientó la actividad diciendo que se estaban encontrando esos valores dada la proporción inicial y luego preguntó qué podía hacer la estudiante, ella respondió que “resolver” (sustituir los valores de LA y LB en la proporción). Esto finalmente la lleva a concretar la ecuación, tras recomendaciones sobre la manipulación simbólica por parte del investigador. La primera expresión que obtiene es la siguiente:

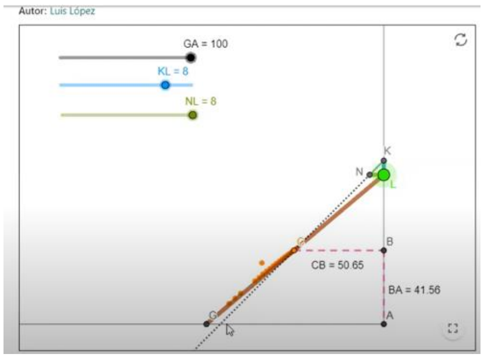


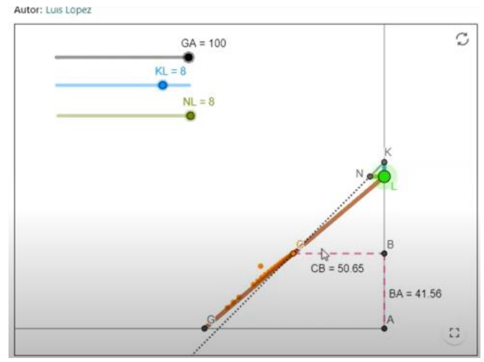
Al igual que el estudiante E1, la estudiante no identifica que la expresión que tiene ya es la ecuación solicitada, solo que hace falta reescribirla para dejarla en términos de y^2. El resto de la interacción refiere a este hecho (ver L136-153), del cual, como resultado, se obtiene la ecuación solicitada.

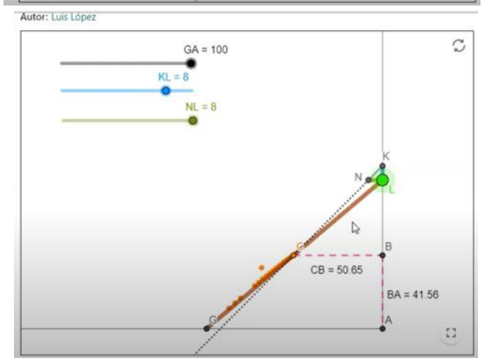
7.3.3.1.1.3. Síntesis del Proceso de E3

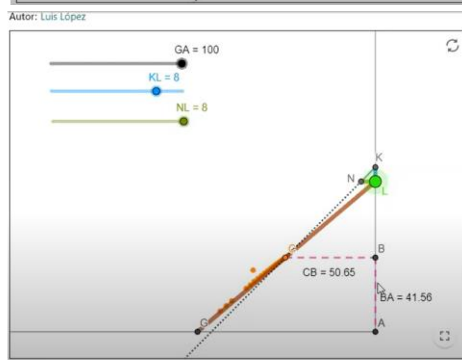
Al igual que el estudiante E1 y la estudiante E2, el estudiante E3 manifestó al inicio que la instrucción del inciso f no fue clara. Esto llevó al investigador a reformular la instrucción. A partir de esta interacción el estudiante inició la resolución de este inciso. Al igual que la estudiante E2, E3 estuvo centrado en dar sentido a la ecuación, probando valores específicos para verificar que la ecuación se cumpliera. No obstante, comentó al final que no lo llevó a nada.

L1. **E3**: *Eh bueno, al principio quería ver si en verdad la ecuación me funcionaba ¿no? Esto de... eh y pues nada más sustituí los valores por los que me aparecían en GeoGebra y... y no me daba. Y yo así de... ah porque no me da. Pero ya luego me di cuenta de que, bueno ahí me pasé un poquito el tiempo de... tratando de buscar por qué no me daba, y pero ya al final encontré por qué no, y ya es cuando empecé a pensar, o sea cómo... cómo pues podría haber llegado a esta ecuación ¿no? qué... qué... qué patrones o qué regularidades había visto Descartes para poder llegar a esa conclusión a esa ecuación. Y pues empecé a jugar ¿no? empecé a ver, a comparar qué tenían en común las... las... las letras que se multiplicaban ¿no? Por ejemplo, vi que a, se... solo se multiplicaba, o sea, en este caso a es GA, solo se multiplicaba por el CB y NL, o sea, por líneas paralelas a GA.* [señala con el puntero los segmentos GA, CB, NL]. *Ok. Y c, que en este caso es NL, solo se multiplicaba por eh y, que es CB, y x que viene siendo BA, o sea por una paralela y una perpendicular. Y y se multiplicaba... bueno, o sea, se multiplicaba por c, que es esta de NL y se multiplicaba por a, que es GA.*

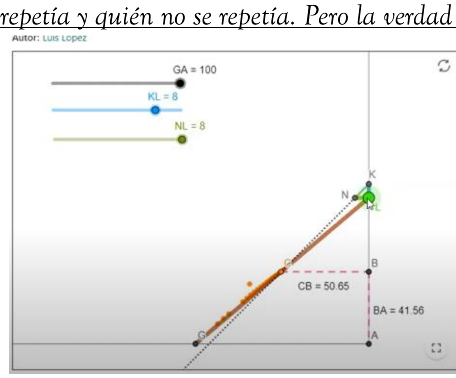




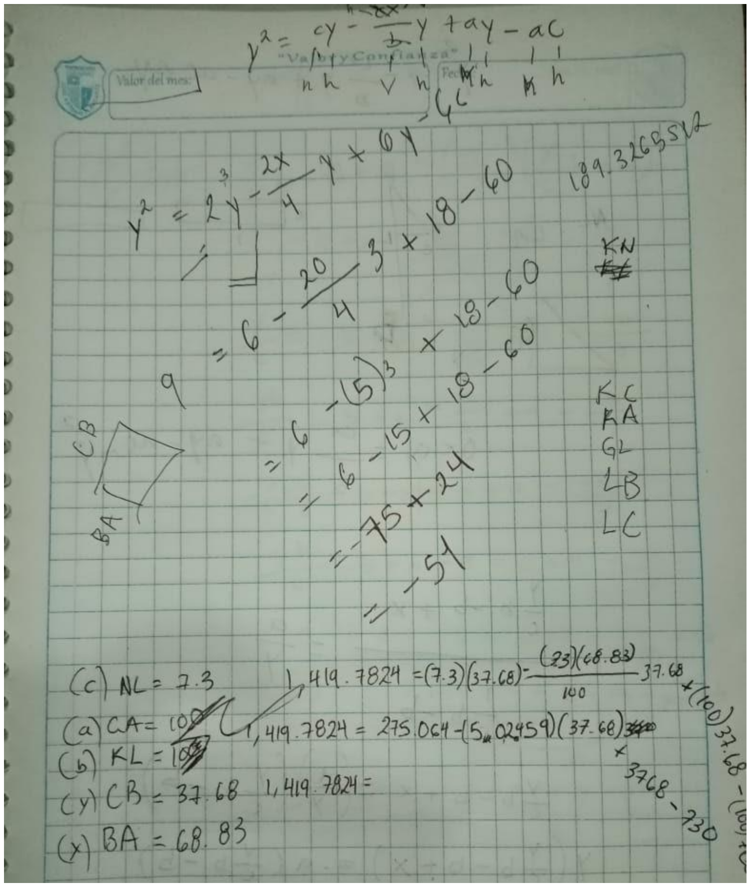




L2. **E3**: *O sea, y así fui jugando ¿no? y vi si había como que algún patrón o algo de que tenía algunas… algunos límites por cuáles se podía multiplicar ¿no?, porque la verdad no sabía en qué más pensar. Y luego esto de… eh me quedé pensando cómo pudiera averiguar cuánto valía LB, porque aquí, en este caso no me dice cuánto vale LB.* [señala con el puntero el segmento LB] *Solo me dice cuánto vale KL y cuánto me dice BA, pero pues el segmento LB no me dice cuánto vale. O sea, cuando ya, coloco en una posición a L. Y no sé, pero a mí me resultaba un poco así querer saber eso, porque sentía que con eso iba… iba a poder hallarlo, pero pues eh como que eso fue, no sé seguir viendo quién se repetía y quién no se repetía. Pero la verdad sí no llegué a nada.*

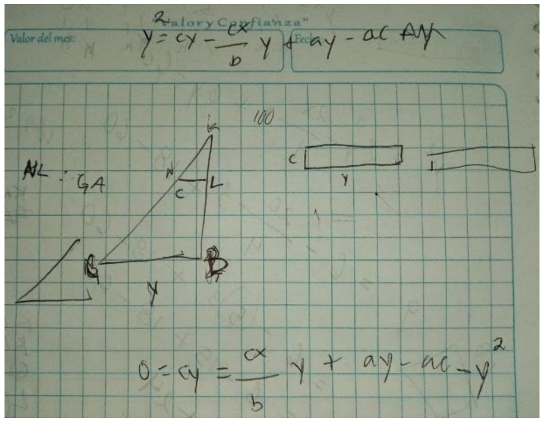


En su hoja de trabajo puede observarse cómo prueba distintos valores para los parámetros y variables de la ecuación.



Al continuar resolviendo la situación, el estudiante muestra otro proceso que nuevamente comenta que no lo lleva a determinar la ecuación. Este proceso es otro intento por dar sentido a los elementos de la ecuación, esta vez desde una justificación epistémica figural, pues se asocian los componentes de la ecuación con representaciones figurales como cuadrados, rectángulos.

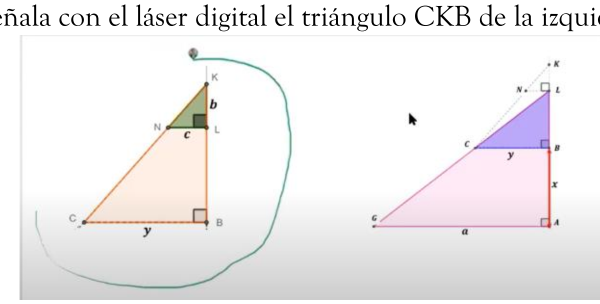
1. **E3**: *Ya me salí de buscar… bueno sí encontré una relación ¿no? pero como que un poco peculiar. A ver pues, en verdad que* *es y al cuadrado, pues y al cuadrado sería un cuadrado ¿no? del lado y por y*, *y se… y si hicimos que el cuadrado de y por y es igual a todas esas operaciones. Eh pues, es decir,* *todo lo que se va a ir multiplicando, para ir como que rellenando ese cuadrado ¿no? hasta formar un cuadrado que sea igual a y por y*, *y pues eso es lo que eh hacen las operaciones ¿no? por ejemp… te va a ir rellenando ese cuadrado hasta que te de esa cantidad, que pues* *yo la interpreté como un área ¿no? hasta que te dé el área de y al cuadrado*. *Entonces ya, pues, por ejemplo, tenemos que* *c por y, y es un… obviamente es un rectangulito ¿no?* *pues entonces ese rectangulito, pues* *va a servir para rellenar,* *eh ya después tenemos* *la otra operación de cx entre b por y, y ahí pues sería otro rectangulito ¿no? que rellenaría también ahí y así seguiría rellenando todo hasta alcanzar a pues a llenar*…
2. **I**: y.



3. **E3**: *Ese cuadrado de* y *al cuadrado, o sea, así se me vino a la mente y, pues creo que tiene un poco lógica, pero así… así cómo llegar de eso a una ecuación así, no sé si se me hizo un poco complicado, pero creo que así se encuentra como que una relación entre todo ello, bueno una pequeña relación ¿no?*

Con base en estas ideas el investigador orienta al estudiante a fijarse en las relaciones de semejanza entre los triángulos, para determinar las proporciones.

L5. **I**: *Ándale. Bueno allá salen las imágenes que tienes en… en la… en el apoyo ¿no? y tú dic…estás comentando, claro, que ahorita está viendo otras relaciones, pero, por ejemplo, buscando esta… como tratar de darle sentido a la ecuación en términos de cómo podrían de alguna manera relacionarse las cantidades, y cómo ¿no? Entonces eh que, digamos, puede ser una… una ruta. Ahora si… si nosotros nos fijamos en los triángulos. Por ejemplo, en el triángulo… aquí voy a con un… en ese triángulo, por ejemplo, ¿qué relación podría determinar sabiendo que hay semejanza entre ellos?* [señala con el láser digital el triángulo CKB de la izquierda]



L6. **E3**: *¿En ese triángulo?* [refiriéndose al triángulo CKB]

L7. **I**: *Mjum. Sí.*

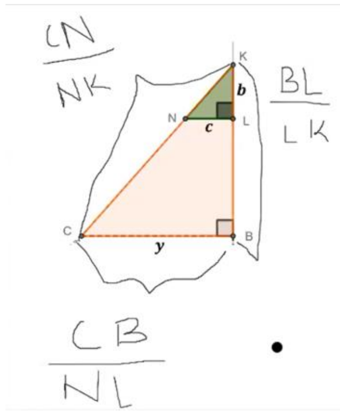
L8. **E3**: *¿Qué relación? Pues…. pues que ¿ambos tienen los ángulos iguales?*

L9. **I**: *Ok. Eso es una. ¿Qué otra relación? o más bien, digamos, ¿qué tiene como consecuencia el hecho de que dos triángulos sean semejantes? o sea, tienen sus lados… para que sean semejantes tienen que tener los ángulos iguales ¿no? pero eso eh digamos, como consecuencia ¿qué determina?*

L10. **E3**: *Que pues su área… pues que ¿sus lados no sé, sean proporcionales?*

Puesto que el estudiante reconoce la proporcionalidad como propiedad de los triángulos semejantes el investigador le solicita que establezca las proporciones respectivas. El estudiante muestra conocimiento al respecto, sin embargo, incurre en un error al relacionar formas no semejantes.

L20. **E3**: *Bueno eso sería como que ajá del… del… de este lado ¿no? pues de este sería…* [se toma un tiempo y escribe las razones $\frac{BL}{LK}, \frac{CN}{NK}, \frac{CB}{NL}$ dibujando en la imagen los lados del triángulo CKB que las involucran] *y pues ya ah bueno en este sí claro. Sería… ¿eso era lo que tenía en mente o?*



Por esta razón el investigador lo orienta para establecer las razones respectivas (ver L21-L38). Al finalizar esta intervención el estudiante escribe las razones adecuadas y el investigador cuestiona al estudiante para establecer la equivalencia entre las razones. No obstante, el estudiante no identifica esta propiedad, razón por la cual el investigador genera una interacción para identificar esta propiedad. Para ello, plantea medidas concretas a los lados del triángulo, de la misma manera con la que aborda esta dificultad con la estudiante E2 (ver L24-L36).

L39. **I**: *Bien. Ahora. Bien ya estableciste cómo… recuerda esto le llamamos… esto es una razón ¿no? porque eso es, digamos, eh solamente la división entre dos de sus lados. ¿Qué se cumple entre esas razones? ¿entre esas tres razones? ¿cuál es la propiedad que tienen estas tres razones?*

L42. **E3**: *Mmmm Ah no sé* [risa]

L43. **I**: [risa] *Ok. ¿Cómo son entre sí estás? por ejemplo, esta con ésta, en términos de sus… de su magnitud, o lo que… o la cantidad que representa cada una de ellas.*

L44. **E3**: *Mmmmm no sé de verdad. Estoy perdido.*

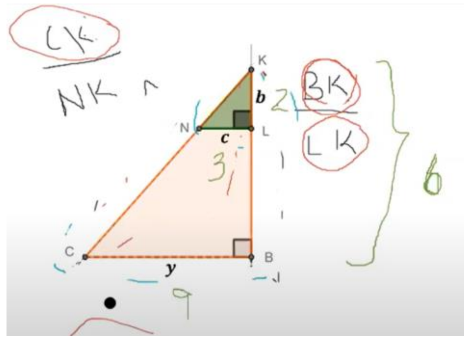
L45. **I**: *Tranquilo, no te preocupes. Bien, vamos a ver lo siguiente, imagínate que KL… […] eh hazte cuenta que mide, por ejemplo, esta parte dos.* [escribe 2 como longitud de KL] *Aquí mide, supongamos tres ¿no? NL.* [escribe 3 como longitud de NL] *Todo el completo, por ejemplo, digamos que mide cinco, por ejemplo, bueno vamos a poner seis.* [escribe 6 como longitud de KB] *Seis ¿no? que sería KB ¿cuánto tendría que medir y en este caso?*

L46. **E3**: *Pues tendría que medir 9.*

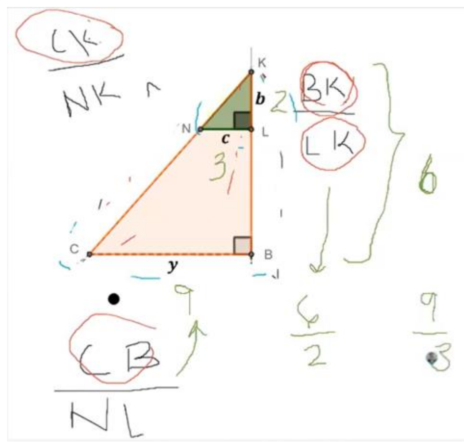
L47. **I**: *Ok. ¿Por qué tendría que medir 9?*

L48. **E3**: *Porque Ah porque pues la razón de proporcionalidad es 3… 3 a 1.*

L49. **I**: *Ok, exacto. Entonces aquí tendría que medir 9.* [escribe 9 como longitud de CB].



L50. **I**: *Entonces ¿qué pasa si me fijo ahora en la razón? Por ejemplo, BK y LK, que serían estas, serían 6 entre 2 ¿sí?... estoy haciendo como ésta ¿no? con las medidas... y luego tengo ahora este que sería CB con NL. CB sería 9 y NL sería 3. ¿Cómo son estas cantidades entre sí?* [escribe las razones $\frac{6}{2}$ y $\frac{9}{3}$, refiriéndose a las razones $\frac{BK}{LK}$ y $\frac{CB}{NL}$, respectivamente, que el estudiante escribió previamente].



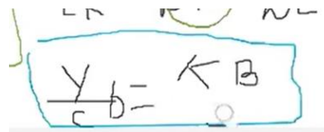
L51. **E3**: *Iguales*.

Una vez que el estudiante reconoce esta propiedad de igualdad entre las razones, se le pide escribir las proporciones (ver L53), lo cual hace correctamente. Posteriormente, el investigador le solicita que reemplace en la proporción los valores a los que se les puede asociar un parámetro o variable de los datos proporcionados al inicio (ver L54-L60). Con esto llega a la proporción:

$$\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$$

A partir de esta proporción el investigador cuestiona al estudiante sobre lo que se puede hacer con esta expresión (ver L62-L68). El estudiante responde con otra expresión:

L65. **E3**: *Podría quedar eh yc por b, es igual a KB. O sea, si paso, o sea, en dado caso que pudiera pasar la b acá quedaría pues...* [borra el denominador de la razón $\frac{KB}{b}$ y lo escribe como un factor que afecta a la razón $\frac{y}{c}$]



Luego, el investigador le solicita al estudiante que establezca otra proporción para el otro par de triángulos de la imagen. El estudiante obtiene una proporción correcta (ver L69-L72):

$$\frac{a}{y} = \frac{LB + x}{LB}$$

Sin embargo, continua su explicación queriendo simplificar la expresión, pero su procedimiento no es correcto. Esto lleva a una interacción para orientar al estudiante a percatarse de su error (ver L73-L77).

Al finalizar este episodio, el investigador solicita al estudiante a escribir la ecuación en términos de los parámetros y variables.

L81. **I**: *Entonces, lo que hay que hacer es dejar todo en términos de los parámetros y las incógnitas. Entonces hay que, digamos, de alguna manera encontrar alguna otra relación que haga que LB ya quede en términos de los parámetros. Entonces eh, por ejemplo, [...] ¿hay alguna relación entre, por ejemplo, lo que ya obtuve aquí, que sería KB, con respecto a LB que es el que me... me interesa?* [regresan a la página en la que se encuentra las relaciones que permitieron determinar KB en términos de y, c y b].

El estudiante determina de manera correcta la expresión:

$$LB = \frac{y}{b}b - b$$

Con base en esta, el investigador solicita al estudiante sustituir en la proporción que determinó previamente esta expresión equivalente de LB.

L90. **I**: *O sea, digamos, como ya sabes quién es LB ahora en términos de los parámetros y la incógnita, entonces la idea es, sustituye ahora en la proporción que tienes aquí, en esta página, y opérala a ver qué... qué obtienes.*

Además, muestra inseguridad con el procedimiento algebraico pues involucra expresiones complejas para él.

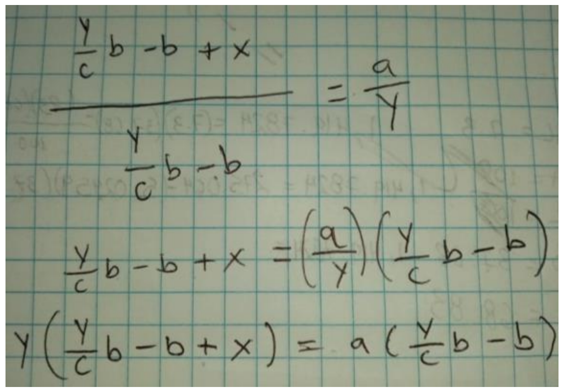
L91. **E3**: *Way me va a quedar una división sobre otra división.*

L93. **E3**: *O sea no es... no es tan... o sea no es... no quiere decir que esté mal, pero va a quedar medio extraño.*

Puede observarse además en el proceso que el estudiante no es consciente de lo que está haciendo pues en un momento pregunta si con eso podría determinar la ecuación.

L97. **E3**: *¿Con esta ecuación tengo que llegar a la misma ecuación de Descartes?*

El estudiante muestra posteriormente su resultado, sin embargo, en el proceso algebraico comente diversos errores, razón por la cual el investigador lo orienta para atender esas dificultades (ver L07-L112). La expresión que muestra al inicio de este episodio, y que es correcta, (ver L100-L106) es la siguiente:



El investigador comenta finalmente al estudiante que de no ser por los errores algebraicos hubiera podido determinar la ecuación.

7.3.3.1.2. Tabla comparativa del proceso seguido por cada estudiante

En la siguiente tabla enlistamos los momentos de las interacciones entre el investigador y la y los estudiantes. Esta tabla presenta de manera sintética las abstracciones de los patrones de interacción durante todo el proceso de resolución. La columna Momento describe las fases generales que conllevó la resolución de la situación. Los submomentos son descripciones más específicas que se identificaron como componentes de los momentos. La columna de Actor destaca la persona que tenía el protagonismo en esa fase de interacción. En cada columna E1, E2 y E3 se presentan las acciones concretas manifestadas entre la y los actores en la interacción como implicación de submomento y, por ende, momento.

La construcción de la tabla en el proceso de análisis se dio de derecha a izquierda. Se identificaron las acciones concretas por cada estudiante e investigador y se fueron agrupando en temas que caracterizaban partes del proceso de construcción que posteriormente denominamos submomentos y momentos respectivamente.

Las celdas sombreadas con color amarillo corresponden a las acciones llevadas a cabo exclusivamente por el investigador.

Momento	Submomentos	Actor	E1	E2	E3
Trabajo inicial con la situación	Dificultad con la interpretación de la instrucción	E	No identifica qué hay que hacer	No identifica qué hay que hacer	No identifica qué hay que hacer
	Selección de la información relevante		Acomodo de la información	No se entiende la instrucción	No se entiende la instrucción
			No se entiende la instrucción	Acomodo de la información	
Dar sentido a la situación y a la ecuación	Enfatizar el objetivo de la situación y la ecuación	I	Enfatizar que C es parte de la construcción		
				Enfatizar el proceso esperado involucrando a C	Enfatizar el proceso esperado involucrando a C
	Dar sentido a la ecuación sustituyendo valores específicos	E		Dar sentido a la ecuación sustituyendo valores específicos	Dar sentido a la ecuación sustituyendo valores específicos
	Dar sentido a los elementos de la ecuación				Dar sentido a la ecuación mediante el establecimiento de relaciones algebraica-geométrica
Anexo	Presentar el apoyo	I	Anexo	Anexo	Anexo
Comprender la geometría en la situación y sus propiedades					Explicitar la semejanza
	Dificultades para el uso de las propiedades geométricas	E	Dificultad para usar la geometría (semejanza)	Dificultad para usar la geometría (semejanza) Establece relaciones entre lados de triángulos que no son semejantes	Dificultad para usar la geometría (semejanza) Establece relaciones entre lados de formas que no son semejantes
	Revisar la geometría	I	Revisar las relaciones geométricas	Revisar las relaciones geométricas	Revisar las relaciones geométricas
	Inducir la propiedad de proporcionalidad		Explicitar la proporcionalidad	Explicitar la proporcionalidad	
Trabajo geométrico con la proporcionalidad	Dificultad para comprender la función de la proporción.	E	¿cómo se relaciona la proporción con la ecuación? Falta de comprensión respecto a la función de la proporción con el involucramiento de C.		
					Dificultad con la equivalencia entre las razones
	Explicitar la función de la proporción con el objetivo de	I	Enfatizar que C es parte de la construcción y que las proporciones incluyen esta propiedad.		

	determinar la ecuación				
	Abordar la propiedad geométrica de proporcionalidad			Ejemplo para visualizar la razón	Ejemplo para visualizar la razón
	Inducir el establecimiento de las proporciones		Solicitar el establecimiento de proporciones	Solicitar el establecimiento de las proporciones	Solicitar establecimiento de proporciones
	Dificultad con la propiedad de la proporción (geométricas y relativas a la equivalencia)	E	Dificultades con las proporciones. Establece la proporción entre lados de triángulos que no son semejantes		
				Dificultad con la equivalencia entre las razones	
	Revisar las propiedades de la proporcionalidad e inducción del establecimiento de las proporciones	I	Revisar de las relaciones geométricas entre triángulos semejantes		
				Solicitar establecimiento de proporciones	
					Solicitud de sustitución de equivalencias en términos de los parámetros y variables
Trabajo algebraico con la proporción – Sustitución de los parámetros y variables – establecimiento de relaciones geométricas.	Establecimiento de relación geométrica-aditiva	E			Determinación de una relación geométrica aditiva LB y LA
	Explicitar la función de la proporción con el objetivo de determinar la ecuación	I		Explicitar la función de la proporción con el objetivo de determinar la ecuación involucrando las variables y parámetros	
	Inducir el establecimiento de las proporciones		Solicitar el trabajo con las proporciones		
	Despeje de los términos geométricos	E		Operar con la proporción	Operar con la proporción
	Inducir el establecimiento de las proporciones y la sustitución de	I		Revisar la geometría aditiva LB y LA	
					Solicitar establecimiento de proporciones
			Solicitar la sustitución de los parámetros y variables en la proporción		

	los parámetros y variables				
	Establecimiento de relación geométrica-aditiva	E	Determinación de una relación geométrica aditiva LB y LA		
	Dificultades algebraicas				Dificultades algebraicas con la operatividad de la proporción
	Falta de consciencia respecto el proceso de resolución		¿Qué hago? Algebrización aleatoria con la proporción		
	Inducir el establecimiento de las proporciones y la sustitución de los parámetros y variables	I	Solicitar la sustitución de los parámetros y variables	Solicitar establecimiento de proporciones Solicitud de sustitución de equivalencias en términos de los parámetros y variables	Solicitar la sustitución
	Falta de consciencia respecto el proceso de resolución	E	Pérdida de vista de la relación geométrica aditiva y la sustitución.		
	Establecimiento de relación geométrica-aditiva			Determinación de una relación geométrica aditiva LB y LA	
	Dificultad para comprender la función de la proporción.				¿cómo se relaciona la proporción con la ecuación? Falta de comprensión respecto a la función de la proporción con el involucramiento de C.
	Revisar las relaciones geométricas de interés	I	Retomar la relación geométrica olvidada por la algebrización		Solicitar avanzar sin saber hacia dónde se llegará
	Dificultad geométrica	E	Dificultad con la relación geométrica aditiva		
	Falta de consciencia respecto el proceso de resolución			¿Qué hago? Algebrización aleatoria con la proporción	
	Dificultades algebraicas				Dificultades algebraicas

	Inducir el establecimiento de las proporciones y la sustitución de los parámetros y variables	I		Explicitar la finalidad de la sustitución de los parámetros y variables en la proporción	
				Solicitar la sustitución	
Operatividad algebraica con la proporción	Operar la proporción	E	Operatividad con la proporción		
	Dificultad algebraica		Dificultad algebraica		
	Inducir la sustitución de los parámetros y variables	I	Solicitar la sustitución		
	Dificultad algebraica	E	Dificultad algebraica con el despeje de la magnitud KB		
	Dificultad en para comprender la función de la proporción.			¿Qué hago? No hay conciencia respecto del porqué se está trabajando con la proporción y la sustitución de parámetros y variables.	
Determinación de la proporción final	Obtención de la proporción final		Proporción final	Proporción final	Proporción final
Determinación de la ecuación solicitada	Dificultad para comprender la función de la proporción.		¿Qué hago? No sabe qué hacer con la proporción determinada		
	Operar la proporción			Operar con la proporción	
	Obtención de ecuación equivalente		Ecuación equivalente a la solicitada		
	Dificultad algebraica con la equivalencia entre ecuaciones		No identificación de la equivalencia entre la ecuación equivalente y la solicitada	No identificación de la equivalencia entre la ecuación equivalente y la solicitada	Dificultades algebraicas para simplificar la ecuación.
	Obtención de la ecuación final		Ecuación final	Ecuación final	Proporción final como ecuación

Tabla 26. Tabla comparativa del proceso de construcción de la ecuación paramétrica para la Actividad 1 en la y los estudiantes

7.3.3.1.3. Proceso de construcción de la ecuación paramétrica en la Actividad 1 en los tres estudiantes

La intención en este primer nivel, como se mencionó antes es responder a las preguntas analíticas:

1. *¿Qué estaba relacionando y cómo lo estaba haciendo?* y
2. *¿Qué sucedió en la interacción y cómo se llevó a cabo para el establecimiento de las relaciones de equivalencia que derivaron en la ecuación paramétrica?*

Nótese que el primer cuestionamiento analítico refiere a la actuación de la y los estudiantes, mientras que el segundo refiere a cómo a las acciones llevadas a cabo por el investigador a propósito de la actuación de la y los estudiantes. De esta manera, en la siguiente tabla se sintetiza el proceso de la interacción entre estudiantes e investigador. En la columna izquierda se presentan las acciones de la y los estudiantes durante el proceso y en la columna derecha se presentan las acciones llevadas a cabo por el investigador para abordar las acciones de la y los estudiantes.

Proceso de construcción de la ecuación paramétrica en la interacción de la EBT	
¿Qué estaba relacionando y cómo lo estaba haciendo?	¿Qué sucedió en la interacción y cómo se llevó a cabo para el establecimiento de las relaciones de equivalencia que derivaron en la ecuación paramétrica?
1. Se presenta una dificultad con la interpretación de la instrucción. 2. Selección y acomodo de información relevante (E1 y E2)	3. Enfatizar el objetivo de la situación y la ecuación
4. Dar sentido a la ecuación sustituyendo valores específicos 5. Dar sentido a los elementos de la ecuación	6. Presentación del apoyo
7. Dificultades para el uso de las propiedades geométricas o Falta de consciencia respecto a la función de la proporción (E1)	8. Análisis de la geometría subyacente 9. Inducir la propiedad de proporcionalidad o Enfatizar el objetivo de la situación y la ecuación
10. Dificultades geométricas con el establecimiento de las proporciones (se establecen proporciones entre formas no semejantes). 11. Dificultades para identificar la equivalencia entre las razones	12. Análisis de la geometría subyacente. 13. Análisis de casos particulares para identificar la equivalencia entre razones 14. Inducción del establecimiento de proporciones
15. Dificultades algebraicas para la operatividad con la proporción 16. Dificultades geométricas para determinar relaciones geométricas de interés 17. Falta de consciencia respecto el proceso de resolución o Algebrización aleatoria (E1 y E2) o Falta de consciencia respecto a la función de la proporción (E3)	19. Enfatizar el objetivo de la situación y la ecuación o Enfatizar la función de la proporción en la determinación de la ecuación (E3) 20. Análisis de la geometría subyacente. 21. Revisión de las propiedades algebraicas para operar proporciones. 22. Inducir la sustitución de parámetros y variables en la proporción.

18. Operatividad de la proporción (despejes y sustituciones)	
23. Dificultades algebraicas con la operatividad o Falta de consciencia respecto a la función de la proporción (E2) 24. Operatividad con la proporción	25. Revisión de las propiedades algebraicas para operar proporciones. o Enfatizar la función de la proporción en la determinación de la ecuación (E2) 26. Inducir la sustitución de parámetros y variables en la proporción.
27. Establecimiento de la proporción final	28. Inducir la determinación de la ecuación solicitada
29. Operar sobre la proporción 30. Dificultades algebraicas para operar la proporción 31. Obtención de ecuación equivalente	32. Revisión de las propiedades algebraicas para operar proporciones. 33. Revisión de las ecuaciones equivalentes
34. Determinación de la ecuación solicitada/la proporción final	

Tabla 27. Proceso de construcción de la ecuación paramétrica en la interacción de la EBT

En términos sintéticos el proceso de construcción de la ecuación paramétrica en la EBT puede describirse, de manera ordenada, de la siguiente manera:

1. *Dominio el método de análisis algebraico*
2. *Identificación la importancia de las relaciones de equivalencia*
3. *Exploración de la ecuación y los elementos de la construcción*
4. *Selección y/o acomodo de la información relevante para la solución*
5. *Determinación de los parámetros y variables*
6. *Análisis de la geometría subyacente*
7. *Uso de la geometría para establecer/identificar relaciones geométricas*
8. *Establecimiento de relaciones geométricas de equivalencia (particularmente proporciones en este caso)*
9. *Operatividad sobre las relaciones geométricas de equivalencia (Trabajo geométrico)*
10. *Sustitución semiótica (Tránsito entre la relación geométrica de equivalencia y la ecuación algebraica)*
11. *Operatividad sobre las ecuaciones (Trabajo algebraico)*
12. *Determinación de la ecuación paramétrica*
13. *Reconocimiento de la ecuación paramétrica como la solución al problema de determinación del lugar geométrico que describe el punto L.*

Cabe señalar que se dice ordenada por el hecho de que en esta abstracción del proceso se reconoce que hubo una necesidad imperante en el proceso por esclarecer el propósito, objetivo, procedimiento que debe de seguirse para resolver la situación por parte de la y los estudiantes. En este sentido, esta organización del proceso es una reorganización de la actividad matemática de la y los estudiantes, en conjunto con el investigador, con sentido para determinar la ecuación paramétrica de manera eficaz, obviando las interacciones para resolver las dificultades metacognitivas y de contenido matemático manifestadas en el proceso.

Por lo tanto, corresponde al proceso ideal para construir la ecuación paramétrica, a propósito de la situación planteada.

Nótese que las acciones 6 a la 11 son recurrentes en el proceso de construcción, es decir, pueden darse más de una vez durante todo el proceso.

7.3.3.2. Segundo nivel de análisis

En este nivel de análisis la intención es responder a la pregunta analítica *¿cómo explica el proceso de algebrización?*, la cual se respondió con base en los escritos realizados por la y los estudiantes. Usamos una técnica del análisis lingüístico Sistémico Funcional, basada en organizar los textos por complejos clausulares. Los complejos clausulares pueden entenderse como unidades gramaticales coherentes que reflejan dependencia de significado entre más de una cláusula. En este tenor, inferimos las intenciones de los textos de los estudiantes, a partir de reconocer estas unidades gramaticales y lo que se pretende comunicar como un complejo de significados. En primera instancia mostramos los textos completos de la y los estudiantes, y sucesivamente mostramos los mismos textos separados por complejos clausulares.

Al igual que en el primer nivel de análisis nos apoyamos al final del recurso semiótico de las tablas comparativas para condensar la información resultante de esta fase.

7.3.3.2.2. Agrupación de los textos de E1, E2 y E3 por complejos clausulares

7.3.3.2.2.1 Texto de E1

Complejos clausulares	Interpretación
C1. *Plantea* los datos	Organización de la información
C2. -Se debe de *involucrar* las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)	Involucramiento de los parámetros y variables
C3. -*Se posee* un applet [[que *muestra* lo siguiente]]	Observar el recurso
C4. -Las variables *son* [[las que *se muestran* en [sic] el lápiz]]	Establecimiento de las variables
C5. -*Sabemos* C6. que "a", "y" y "c" *son* paralelas entre sí. C7. Así como el segmento $\overline{KA}$ *es* perpendicular a ellos.	Identificación de relaciones geométricas
C8. 2. *buscar* relaciones C9. -Por si *no se ha notado* C10. en el applet *se generan* distintos triángulos:	Determinación de relaciones geométricas
C11. -*Al observar detenidamente*, C12. *notamos* C13. que algunos triángulos *son* semejantes:	Identificación de relaciones geométricas

C14. -*Al saber* C15. que *son* semejantes, C16. *podemos plantear* su proporción de la siguiente manera: C17. $\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$ C18. $\frac{y}{a} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$ C19. -Y *nos quedamos* con las proporciones [[que *contengan* los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)]] C20. $\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$ C21. $\frac{y}{a} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$	Establecimiento de relaciones de equivalencia (proporciones)
C22. **Tomemos* $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$ C23. debido a que $\overline{LA}$ *contiene* x.	Selección de componentes para sustitución semiótica
C24. -*Debemos reemplazar* los datos que importan C25. para *poder plantear* la ecuación,	Sustitución semiótica
C26. *empezamos* con $\overline{KB}$, C27. esto *se debe* a [[que tanto b, $\overline{KB}$, $\overline{LB}$ y $\overline{LA}$ *conforman* una misma recta: $\overline{KA}$,]] C28. y *al despejar* $\overline{KB}$, C29. *se nos facilitara* [[el *despejar* $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$.]]	Determinación de relaciones geométricas
C30. -*Planteamos*: [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]	Trabajo algebraico
C31. → *Declaramos* incógnita C32. → $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$ C33. → regla de 3 C34. → $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$ C35. → *Sustituimos* y *despejamos* C36. ^QUEDANDO [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\frac{by}{c}}$]]	Trabajo algebraico/sustitución semiótica
C37. -*Al conocer* el valor de $\overline{KB}$ C38. y *al apreciar* detenidamente el applet, C39. *podemos concluir* C40. que $\overline{LB} = \overline{KB} - b$ C41. y $\overline{LA} = \overline{LB} + x$	Determinación de relaciones geométricas
C42. -Entonces *sustituimos* en la proporción con el valor real de $\overline{KB}$: C43. ^ENTONCES [[$\overline{LB} = \left(\frac{by}{c}\right) - b$,]] C44. ^QUEDANDO $\overline{LA} = \left(\frac{by}{c} - b\right) + x$	Trabajo algebraico
C45. -Y *sustituimos* C46. para finalmente *despejar*	Trabajo algebraico/sustitución semiótica

C47. $\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c}-b\right)}{\left(\frac{by}{c}-b+x\right)}$	Trabajo algebraico
C48. $\rightarrow y\left(\frac{by}{c} - b + x\right) = a\left(\frac{by}{c} - b\right)$ C49. $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ C50. $\downarrow \frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$ C51. $by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$ C52. $by^2 = aby - abc + bcy - cxy$ C53. $y^2 = \frac{aby-abc+bcy-cxy}{b}$ C54. $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$	Trabajo algebraico y determinación de la ecuación paramétrica

Tabla 28. Análisis experiencial de complejos clausulares en el texto de E1

7.3.3.2.2.2. Texto de E2

Complejos clausulares	Interpretación
C1. La ecuación [[que Descartes *desarrolló*]] *buscando* la relación del punto C [[*involucrando* a, x, b, c,]] y *tomando* en consideración que: [[KL – b]] [[NL – c]] [[BA – x]] [[GA – a]] [[CB – y]] *designa* los valores señalados en la imagen original	Organización de la información, establecimiento de recurso semiótico y Sustitución semiótica
C2. *Teniendo* en cuenta esta consideración, C3. Para continuar, *puedes observar* C4. que en la imagen original *se pueden encontrar* en su estructura dos pares de triángulos semejantes C5. donde *deberás de considerar* C6. que para que *cumplan* esta condición: C7. Los triángulos *tienen* los mismos ángulos C8. Los triángulos semejantes *tienen* los lados proporcionales (la misma)	Observación del recurso e identificación de propiedades
C9. *Considerando* las condiciones que deben cumplir los triángulos semejantes C10. *deberás escribir* las proporciones [[que *cumplen* cada par]]	Identificación de proporciones
C11. ΔNKL y $\Delta CKB =$ [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$]] C12. ΔCLB y $\Delta GLA =$[[$\frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$]]	Establecimiento de proporciones
C13. *Considera* C14. que todos los lados *deben tener* la misma proporción. C15. Por eso *tienes que igualar* las cantidades	Explicitación de la equivalencia en la proporción
C16. Primero *trabajaremos* con la primera equivalencia del primer par de triángulos, <<ΔNKL y ΔCKB>>, [[donde *despejarás* los datos conocidos del desconocido.]]	Trabajo algebraico
C17. $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ C18. $/ \; cKB = by$	Trabajo algebraico

C19. / $\frac{cKB}{c} = \frac{by}{c}$ C20. / $KB = \frac{by}{c}$	
C21. lo podemos *ubicar* en nuestro dibujo del par: C22. *Teniendo* en cuenta	Observación de la imagen
C23. *despejando* la equivalencia del segundo par de triángulos C24. *dejando* sola a la longitud LA	Trabajo algebraico
C25. Luego *realizaremos* el mismo ejercicio,	Trabajo algebraico
C26. $\frac{LB}{LA} = \frac{y}{a}$ C27. $/LBa = LAy$ C28. $/\frac{LBa}{y} = \frac{LAy}{y}$ C29. $/\frac{LBa}{y} = LA$	Trabajo algebraico
C30. Para *poder sustituir* los valores de LB y LA de la equivalencia [[*encontradas* del segundo par]] C31. *es* necesario *buscar* la que represente cada longitud.	Establecimiento de relaciones geométricas
C32. Para la LB *debemos de considerar* C33. que *se encuentra ubicada* en el primer par de triángulos [[donde KB *resultó ser* igual a $\frac{by}{c}$,]] C34. por lo tanto, para *encontrar* el valor LB C35. le *podemos restar* a $\frac{by}{c}$ la longitud KL [[que *tiene* el valor de b]] C36. *quedando* de esta manera: C37. $LB = \frac{by}{c} - b$	Determinación de relaciones geométricas y sustitución semiótica
C38. Finalmente para [[*obtener* el valor de LA]] *es necesario* [[*considerar* que la longitud LB también *forma* parte del segundo par de triángulos,]] C39. pero *deber de agregar* el valor de la longitud BA [[que *es conocido* como x,]] C40. *quedando* de esta manera: C41. $LA = \frac{by}{c} - b + x$	Determinación de relaciones geométricas y sustitución semiótica
C42. Por último, *sustituye* los valores de la equivalencia [[$LA = \frac{LBa}{y}$]] con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB C43. y *resuelve* la equivalencia:	Trabajo algebraico
C44. $\frac{by}{c} - b + x = \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$ C45. $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$	Trabajo algebraico
C46. Para *concluir* C47. *y encontrar* la ecuación más reducida <<como la de Descartes>> C48. *despeja* la y^2.	Trabajo algebraico
C49. $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ C50. $\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$ C51. $by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$	Trabajo algebraico y determinación de la ecuación paramétrica

C52. $\frac{by^2}{b} = \frac{aby-abc+cby}{b} \frac{-cxy}{b}$ C53. $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$	

Tabla 29. Análisis experiencial de complejos clausulares en el texto de E2

7.3.3.2.2.3. Texto de E3

Complejos clausulares	Interpretación
C1. Primero que nada, antes de *usar* de lleno a la determinación de la ecuación, C2. *se tiene que identificar* ciertas regularidades [[que *existen* en la construcción.]]	Explicación del punto de partida del proceso
C3. si *notamos*, C4. *se puede encontrar* C5. que el triángulo [[*formado* por NKL]] *es* semejante al ^TRIÁNGULO [[*formado* por CKB,]] C6. ya que sus ángulos *son* iguales y, C7. lo tanto, *tienen* una razón de proporcionalidad. C8. lo mismo *ocurre* en los triángulos CLB y GLA.	Identificación de relaciones geométricas y Observación de la figura
C9. Ahora, antes de *pasar* a otro paso, C10. *se tiene que asignar* determinadas literales a los distintos segmentos, C11. pues *son* las ^LITERALES [[que *usarán* en la ecuación.]]	Establecimiento de recurso semiótico
C12. en primer lugar, el segmento GA *será* la $\boldsymbol{a}$, C13. el segmento KL *será* la $\boldsymbol{b}$, C14. el segmento NL *será* la $\boldsymbol{c}$, C15. el segmento BA *será* $\boldsymbol{x}$ y, por último, C16. el segmento CB *será* $\boldsymbol{y}$.	Establecimiento de recurso semiótico
C17. Una vez *hecho* esto, C18. *se podrá identificar* con más facilidad las relaciones existentes entre estos segmentos.	Establecimiento de recurso semiótico
C19. Lo que [[se *procederá a hacer*]] *es* [[*empezar a sacar* las razones de proporcionalidad de cada triangulo.]]	Mención de las relaciones de proporcionalidad
C20. se *empezará* con NKL y CKB.	Trabajo geométrico
C21. Como *se dijo*, C22. al *tener* los ángulos iguales, C23. los lados *serán* proporcionales, C24. entonces, *se pueden deducir* las siguientes razones de proporcionalidad: C25. $\frac{CK}{NK} = \frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}$	Establecimiento de proporciones
C26. se *crean* estas igualdades, C27. pues todos los lados *poseen* la misma razón de proporcionalidad.	Explicación de la equivalencia en la proporción
C28. Posteriormente, que *tienen que sustituir* algunos segmentos con las literales [[que se *asignaron* anteriormente,]] C29. con lo que *quedaría* de esta manera:	Sustitución semiótica

C30. $\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$	
C31. Ahora, *para poder aislar* las literales C32. y que *no nos estorbe* KB, C33. *tenemos que pasar* la b al lado izquierdo C34. *siguiendo* las reglas algebraicas.	Trabajo algebraico
C35. *Quedaría* de la siguiente manera: C36. [[$\frac{y}{c}b = KB$]]	Trabajo algebraico
C37. con esto, ya *tendríamos* nuestra primera parte de la ecuación. C38. lo que *sigue es trabajar* con los otros 2 triángulos [[que se forman, igualmente semejantes entre sí.]]	Establecimiento de relaciones geométricas
C39. *tenemos* a los triángulos GLA y CLB.	Trabajo geométrico
C40. de la misma manera, *identificamos* las razones de proporcionalidad de los lados C41. y *deducimos* lo siguiente: C42. $\frac{GL}{CL} = \frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}$	Determinación de relación de proporcionalidad
C43. Ahora, *tenemos que sustituir* algunos segmentos con las literales.	Sustitución semiótica
C44. El problema acá, *es* [[[[que la x *no viene representando* a un segmento como tal de un triángulo, sino a una parte del segmento LA, [[que *vendría siendo* BA.]]]] C45. Por lo tanto *para poder agregar* la x a nuestra ecuación C46. *se tiene que agregar* dentro de una operación. C47. Es decir, para *representar* el segmento LA, C48. *lo* [[*que tenemos que hacer*]] *es* [[*sumarle* a la x lo que falta de dicho segmento, o sea, LB.]]	Determinación de relación geométrica
C49. Así, ya *podemos representar* nuestra razón de proporcionalidad C50. e *igualarla* con la que resulta de a e y. C51. Nos *queda* así: C52. $\frac{a}{y} = \frac{LB+x}{LB}$	Trabajo algebraico
C53. Claro está, *no podemos dejarlo* así, C54. ya que el término LB *nos estorba*, C55. por lo que *debemos de buscar* [[la forma de *representarlo* mediante literales.]]	Sustitución semiótica
C56. Si *observamos*, C57. KA *es* un segmento [[que *está formado* por $KL + LB + BA$.]]	Establecimiento de relación geométrica
C58. en este caso, el segmento [[*que queremos representar*]] es $LA\,(LB + BA)$ C59. y para eso *tenemos que hacer* a un lado KL. C60. *Sabemos* C61. que $KL = b$ C62. y que $KB = \frac{y}{c}b$.	Trabajo algebraico/sustitución semiótica
C63. Si a KB *le restamos* KL C64. *nos quedaría* el segmento LB, [[el cual *queremos representar*.]]	Trabajo algebraico/sustitución semiótica

C65. Entonces, si *representamos* la resta $KB - KL$ con las literales, C66. *tendríamos* esto: C67. $\frac{y}{c}b - b = LB$	Trabajo algebraico/sustitución semiótica
C68. con esta igualdad *ya se puede sustituir* a LB en nuestra anterior igualdad.	Trabajo algebraico
C69. Si lo *sustituimos*, C70. la igualdad resultante *sería* esta: C71. $\frac{a}{y} = \frac{\frac{y}{c}b-b+x}{\frac{y}{c}b-b}$	Trabajo algebraico
C72. de esta forma, *se obtiene* una ecuación [[en la que todas las literales *están* incluidas.]]	Trabajo algebraico
C73. Lo que [[*quedaría por hacer*]] *son* algunas operaciones algebraicas C74. para que la y^2 *quede* sola C75. y *tendríamos* así la ecuación [[a la que descartes *llegó*.]]	Trabajo algebraico y determinación de la ecuación paramétrica

Tabla 30. Análisis experiencial de complejos clausulares en el texto de E3

7.3.3.2.3. Tabla comparativa del proceso de algebrización de la geometría desde los textos

La construcción de la tabla sigue la misma heurística que la tabla comparativa del proceso de construcción de la ecuación paramétrica en la interacción. Nótese que del análisis lingüístico se extraen los significados experienciales asociados a complejos clausulares, los cuales son categorizados como elementos del proceso de construcción descrito en los textos. Así, la tabla condensa los resultados de estos análisis por parte de la y los estudiantes y los tematiza para describir las partes del proceso de construcción.

Categoría	E1	E2	E3
Especificación de la información relevante	Organización de la información	Organización de la información	
		Establecimiento de recurso semiótico	
		Sustitución semiótica	
Especificación del objetivo			Explicación del punto de partida del proceso
	Involucramiento de los parámetros y variables		
Análisis de la geometría subyacente	Observar el recurso	Observación del recurso	Observación de la recurso
Identificación /Determinación de Relaciones geométricas		Identificación de propiedades geométricas	Identificación de relaciones/propiedades geométricas
	Establecimiento de las variables		
			Establecimiento de recurso semiótico

	Identificación de relaciones geométricas		
	Determinación de relaciones geométricas		
	Identificación de relaciones geométricas		
		Identificación de proporciones	Mención de las relaciones de proporcionalidad
			Trabajo geométrico
Establecimiento de relaciones de equivalencia (proporciones)	Establecimiento de relaciones de equivalencia (proporciones)	Establecimiento de proporciones	Establecimiento de proporciones
		Explicitación de la equivalencia en la proporción	Explicación de la equivalencia en la proporción
Trabajo algebraico		Trabajo algebraico	
	Selección de componentes para sustitución semiótica		
Análisis de la geometría subyacente		Observación de la imagen	
Trabajo algebraico /Sustitución semiótica	Sustitución semiótica		Sustitución semiótica
Trabajo algebraico		Trabajo algebraico	Trabajo algebraico
Identificación /Determinación de Relaciones geométricas	Determinación de relaciones geométricas		
Trabajo algebraico /Sustitución semiótica	Trabajo algebraico		
	Trabajo algebraico/sustitución semiótica		
Identificación /Determinación de Relaciones geométricas	Determinación de relaciones geométricas	Establecimiento de relaciones geométricas	Establecimiento de relaciones geométricas
		Determinación de relaciones geométricas y sustitución semiótica	
			Trabajo geométrico
Trabajo algebraico /Sustitución semiótica	Trabajo algebraico		
			Determinación de relación de proporcionalidad
	Trabajo algebraico/sustitución semiótica	Trabajo algebraico	Sustitución semiótica
Identificación /Determinación de Relaciones geométricas			Determinación de relación geométrica
Trabajo algebraico /Sustitución semiótica	Trabajo algebraico y determinación de la ecuación paramétrica		Trabajo algebraico

		Trabajo algebraico y determinación de la ecuación paramétrica	Sustitución semiótica
Identificación /Determinación de Relaciones geométricas			Establecimiento de relación geométrica
Trabajo algebraico /Sustitución semiótica			Trabajo algebraico/sustitución semiótica
			Trabajo algebraico y determinación de la ecuación paramétrica

Tabla 31. Tabla comparativa del proceso de construcción de la ecuación paramétrica para la Actividad 1 en textos de la y los estudiantes

7.3.3.2.4. Proceso de algebrización de la geometría desde los textos

Con base en la Tabla 31, en términos sintéticos el proceso de construcción de la ecuación paramétrica en los textos puede describirse, de manera ordenada, de la siguiente manera:

1. *Especificación de la información relevante*
2. *Especificación de los parámetros y variables*
3. *Especificación del objetivo*
4. *Análisis de la geometría subyacente en la imagen/construcción*
5. *Identificación de relaciones geométricas*
6. *Determinación de relaciones geométricas*
7. *Establecimiento de relaciones de equivalencia (proporciones)*
8. *Sustitución semiótica*
9. *Trabajo algebraico*
10. *Determinación de la ecuación paramétrica*

Al igual que en la EBT, las acciones 4 a la 9 son recurrentes en el proceso de construcción.

7.3.3.3. Tercer nivel de análisis: Comparación entre la actividad matemática de la interacción en la EBT y la manifestada en los textos

Este nivel de análisis, como se ha especificado consiste en retomar las consideraciones del primer nivel y segundo nivel de análisis con la finalidad de concretar el proceso de construcción de la ecuación paramétrica. En este caso se compara lo obtenido en la interacción de la EBT y lo manifestado en los textos por parte de la y los estudiantes. Se buscan complementariedades entre ambos procesos y se determina un proceso general.

Proceso de construcción en la interacción	Proceso de construcción en los textos
1. Dominio del método de análisis algebraico	1. Especificación de la información relevante
2. Identificación la importancia de las relaciones de equivalencia	2. Especificación de los parámetros y variables
3. Exploración de la ecuación y los elementos de la construcción	3. Especificación del objetivo
4. Selección y/o acomodo de la información relevante para la solución	4. Análisis de la geometría subyacente en la imagen/construcción
5. Determinación de los parámetros y variables	5. Identificación de relaciones geométricas
6. Análisis de la geometría subyacente	6. Determinación de relaciones geométricas
7. Uso de la geometría para establecer/identificar relaciones geométricas	7. Establecimiento de relaciones de equivalencia (proporciones)
8. Establecimiento de relaciones geométricas de equivalencia (particularmente proporciones en este caso)	8. Sustitución semiótica
9. Operatividad sobre las relaciones geométricas de equivalencia (Trabajo geométrico)	9. Trabajo algebraico
10. Sustitución semiótica (Tránsito entre la relación geométrica de equivalencia y la ecuación algebraica)	10. Determinación de la ecuación paramétrica
11. Operatividad sobre las ecuaciones (Trabajo algebraico)	
12. Determinación de la ecuación paramétrica	
13. Reconocimiento de la ecuación paramétrica como la solución al problema de determinación del lugar geométrico que describe el punto L.	

Tabla 32. Proceso de construcción de la ecuación paramétrica de la Actividad 1 comparando la interacción y los textos

Puede observarse en la Tabla 32 que el proceso de construcción al momento de la EBT se confirma en los textos de la y los estudiantes, no obstante, cabe hacer explícito, que en los textos, el inicio de las explicaciones está centrado en explicar el objetivo del proceso de resolución, lo cual confirma la visión del investigador, respecto de los puntos 1 y 2 en la abstracción propuesta para el proceso de construcción en la interacción durante la EBT.

7.3.3.4. La algebrización de la geometría en la EBT

A continuación se muestran, a modo de ilustración, las dos tablas correspondientes a los procesos de construcción de la ecuación paramétrica, que resultaron del análisis de las EBT y de los textos de la y los estudiantes. La primera corresponde a lo identificado en la Actividad 1, mientras que la segunda respecto de la Actividad 2 (si se desea consultar el proceso de análisis de esta actividad puede dirigirse al Anexo 13.3).

Actividad 1	
Proceso de construcción en la interacción	Proceso de construcción en los textos
1. Dominio el método de análisis algebraico	1. Especificación de la información relevante
2. Identificación la importancia de las relaciones de equivalencia	2. Especificación de los parámetros y variables
3. Exploración de la ecuación y los elementos de la construcción	3. Especificación del objetivo
4. Selección y/o acomodo de la información relevante para la solución	4. Análisis de la geometría subyacente en la imagen/construcción
5. Determinación de los parámetros y variables	5. Identificación de relaciones geométricas
6. Análisis de la geometría subyacente	6. Determinación de relaciones geométricas
7. Uso de la geometría para establecer/identificar relaciones geométricas	7. Establecimiento de relaciones de equivalencia (proporciones)
8. Establecimiento de relaciones geométricas de equivalencia (particularmente proporciones en este caso)	8. Sustitución semiótica
9. Operatividad sobre las relaciones geométricas de equivalencia (Trabajo geométrico)	9. Trabajo algebraico
10. Sustitución semiótica (Tránsito entre la relación geométrica de equivalencia y la ecuación algebraica)	10. Determinación de la ecuación paramétrica
11. Operatividad sobre las ecuaciones (Trabajo algebraico)	
12. Determinación de la ecuación paramétrica	
13. Reconocimiento de la ecuación paramétrica como la solución al problema de determinación del lugar geométrico que describe el punto L.	

Tabla 33. Algebrización de la geometría en la Actividad 1

Actividad 2	
Proceso de construcción en la interacción	Proceso de construcción en los textos
1. Análisis de las cantidades en el applet.	1. Explicitación de la construcción
2. Análisis de la geometría subyacente	2. Explicación del proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar
3. Revisión del objetivo de la situación	3. Exploración del comportamiento geométrico de la construcción
4. Identificación/Determinación de relaciones geométricas	4. Identificación y determinación de parámetros y variables
5. Trabajo geométrico	5. Establecimiento y uso del recurso semiótico
6. Determinación de relaciones geométricas de equivalencia	6. Análisis de la geometría subyacente y su aplicación específica
7. Determinación de ecuaciones paramétricas	7. Trabajo geométrico
8. Consciencia respecto a la ecuación paramétrica como solución del problema	8. Determinación de relación geométrica
9. Cuestionamientos específicos respecto al cumplimiento de las condiciones y las ecuaciones construidas	9. Trabajo algebraico/sustitución semiótica
10. Explicitación el objetivo de la situación	10. Determinación de la ecuación paramétrica
11. Solicitud de sustitución semiótica	
12. Conclusión de que las ecuaciones determinadas (relación de Pitágoras) son adecuadas.	

Tabla 34. Algebrización de la geometría en la Actividad 2

A partir de estas tablas y lo mencionado en los apartados correspondientes puede identificarse que el proceso de la interacción en la Actividad 1 reúne la mayoría de las consideraciones, no solo relativas a los textos para esta actividad, sino también de lo acontecido en la Actividad 2 y los textos respectivos. De esta manera, el proceso descrito en la interacción de la Actividad 1 puede ser complementado con otras acciones encontradas en la segunda actividad. Así, si consideramos como base el proceso de construcción de la Actividad 1 para determinar el proceso de construcción resultante de ambos procesos (Actividad 1 y 2), partamos de lo siguiente:

La algebrización de la geometría de partida es:

1. *Dominio el método de análisis algebraico*
2. *Identificación la importancia de las relaciones de equivalencia*
3. *Exploración de la ecuación y los elementos de la construcción*
4. *Selección y/o acomodo de la información relevante para la solución*
5. *Determinación de los parámetros y variables*
6. *Análisis de la geometría subyacente*
7. *Uso de la geometría para establecer/identificar relaciones geométricas*

8. *Establecimiento de relaciones geométricas de equivalencia (particularmente proporciones en este caso)*
9. *Operatividad sobre las relaciones geométricas de equivalencia (Trabajo geométrico)*
10. *Sustitución semiótica (Tránsito entre la relación geométrica de equivalencia y la ecuación algebraica)*
11. *Operatividad sobre las ecuaciones (Trabajo algebraico)*
12. *Determinación de la ecuación paramétrica*
13. *Reconocimiento de la ecuación paramétrica como la solución al problema de determinación del lugar geométrico que describe el punto L.*

Si bien el proceso generado en la Actividad 2 se corresponde de manera casi idéntica con este proceso, se distinguen algunos aspectos que no fueron explícitos en la Actividad 1 por su diseño, y que algunos aparecen, incluso desde el inicio de la resolución, en los tres textos de la y los estudiantes. A saber,

1. *Explicitación de la construcción*
2. *Explicación del proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar*
3. *Exploración del comportamiento geométrico de la construcción*

Estas acciones reflejan una característica importante respecto a la naturaleza de la actividad matemática desarrollada en el proceso de resolución. Lo que indican estas acciones es que para la y los estudiantes resulta relevante conocer cómo se construye el punto que estarán estudiando y por ello recurren a explicar el proceso de construcción. Y no solo eso, también reconocen importante la exploración de las propiedades de la construcción vía la manipulación del recurso digital con el que interactuaron.

Esto indica que la algebrización de la geometría en el tenor de los lugares geométricos requiere de conocer robustamente el proceso de construcción geométrica que permite la formación de los objetos geométricos que se estudiarán; además de que es necesaria una exploración para comprender de mejor manera las relaciones y propiedades geométricas subyacentes.

Por otro lado, en la interacción durante la EBT en esta misma segunda actividad se obtuvieron también las siguientes consideraciones:

8. *Consciencia respecto a la ecuación paramétrica como solución del problema*
9. *Cuestionamientos específicos respecto al cumplimiento de las condiciones y las ecuaciones construidas*
10. *Explicitación el objetivo de la situación*
12. *Conclusión de que las ecuaciones determinadas (relación de Pitágoras) son adecuadas.*

Estas acciones en particular refieren al hecho de que no es suficiente con determinar una ecuación paramétrica, si no hay una consciencia robusta sobre qué características debe tener dicha ecuación con relación al problema. Explícitamente, que se deben involucrar los parámetros y variables inmersos en la relación geométrica que se está abordando, y no necesariamente que se tomen en cuenta todos los parámetros y variables que pudieran estar asociados a la construcción de la que forma parte la relación geométrica investigada. Asimismo, tener muy claro lo que significa que la relación geométrica investigada involucre al punto en cuestión. Como se ha mencionado, nótese que incluso para el investigador resulta complejo aclarar y orientar de manera concreta y precisa esta idea.

Con base en estas consideraciones entonces, planteamos que el proceso de construcción manifestado, relativo a la algebrización de la geometría, en esta exploración con estudiantes puede resumirse mediante las siguientes acciones:

1. *Dominio el método de análisis algebraico*
2. *Identificación de la importancia de las relaciones de equivalencia*
3. *Identificación de las características de la ecuación paramétrica como lugar geométrico, es decir, las condiciones que cumple: involucramiento de los parámetros y variables presentes en la relación geométrica investigada, no de toda la construcción; representación de una relación geométrica que involucre al punto en cuestión.*
4. *Entendimiento respecto a cómo se construyó la figura que se está estudiando.*
5. *Exploración de la ecuación y los elementos de la construcción vía el análisis dinámico del problema*
6. *Selección y/o acomodo de la información relevante para la solución*
7. *Determinación de los parámetros y variables*
8. *Análisis de la geometría subyacente*
9. *Uso de la geometría para establecer/identificar relaciones geométricas*
10. *Establecimiento de relaciones geométricas de equivalencia (particularmente proporciones en este caso)*
11. *Operatividad sobre las relaciones geométricas de equivalencia (Trabajo geométrico)*
12. *Sustitución semiótica (Tránsito entre la relación geométrica de equivalencia y la ecuación algebraica)*
13. *Operatividad sobre las ecuaciones (Trabajo algebraico)*
14. *Determinación de la ecuación paramétrica*
15. *Reconocimiento de la ecuación paramétrica como la solución al problema de determinación en términos de cumplimiento de las condiciones que debe cumplir una ecuación paramétrica.*

Estas 15 acciones complementan las consideraciones epistemológicas derivadas de la hipótesis epistemológica resultante del EHE, puesto que permiten identificar otras acciones que son necesarias para alcanzar o concretar las acciones y actividades señaladas en la hipótesis y la progresión pragmática.

7.4. Análisis lingüístico de los textos de estudiantes

En este apartado mostramos el análisis de la dimensión lingüística de los textos formulados por la y los estudiantes. Al igual que en la fase uno del estudio, relativa a los textos originales, se realizaron dos tipos de análisis, uno lexicogramatical y otro multisemiótico.

7.4.1. Análisis gramatical de los textos de E1, E2 y E3

El análisis de las tres metafunciones en los textos puede revisarse en el Anexo 13.4. Puesto que el método es el mismo que se siguió para los textos de Viète y Descartes ya mostrados en el apartado 5.4.1, presentamos únicamente la interpretación funcional obtenida de dichos análisis.

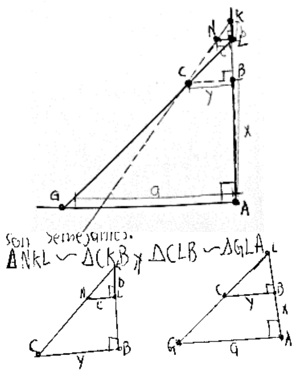
7.4.2. Interpretación Funcional de la Gramática del Lenguaje Algebraico

En las tablas siguientes se presenta la interpretación funcional del análisis gramatical llevado a cabo en las secciones previas. Con las descripciones de cada tabla se destacan las características de cada una de las metafunciones analizadas por cada recurso semiótico (lenguaje natural, simbolismo e imágenes visuales). Para construir estas interpretaciones se empleó la Tabla 73 del Anexo 13.4.4, la cual consiste en una tabla de frecuencias sobre los elementos de los sistemas de TRANSITIVIDAD, TAXIS, LÓGICO-SEMÁNTICA y TEMA.

7.4.2.1. Texto de E1

Recurso semiótico	Met. Experiencial TRANSITIVIDAD	Met. Lógica TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN	Met. Textual TEMA-REMA
Lenguaje Natural	▪ Participantes: Los participantes retóricos muestran una progresión acorde al método analítico, en el sentido de que se parte de los participantes asociados con las designaciones simbólicas, con los cuales se intenta establecer el objetivo de la resolución y dónde se encuentran en la figura. Por ejemplo "*las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)*", "*un applet [[que muestra lo siguiente]]*", "*Las variables*". Posteriormente, se observa la tendencia del trabajo con los participantes geométricos para la búsqueda de relaciones. Por ejemplo, "*relaciones*", "*distintos triángulos*", "*semejantes*". Posteriormente, se identifican los participantes relaticos a las relaciones de equivalencia: "*su proporción*", "*con las proporciones [[que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)]]*".	▪ TAXIS: En el caso del texto de E1 se identifica un uso tanto de relaciones Paratácticas e Hipotácticas, siendo estas últimas las que predominan en el texto. Esto coincide con lo encontrado en el texto original de Descartes. ▪ R. LÓG-SEM: Se presentan principalmente relaciones semánticas de EXPANSIÓN del tipo Extensión y Realce y de PROYECCIÓN del tipo Idea.	Se identifican predominantemente Procesos como los Temas Experienciales, lo cual es consistente con la intención del escrito como consecuencia de la solicitud en la EBT.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Asimismo, es notable la disminución de este tipo de participantes en el texto, en comparación con los textos antiguos.
▪ <u>Procesos:</u> Con respecto a los procesos se identifica claramente que nuevamente los procesos relacionales predominan en el texto, junto con los materiales, no obstante, de los identificativos, siendo estos la mayoría, únicamente 3 de los 16 procesos son retóricos, marcando una diferencia significativa con los textos analizados en la primera fase. Incluso de los tres, solo uno aparece explícitamente en el texto, pues los dos restantes son agregados pues se recurre a la elipsis.
▪ <u>Circunstancias:</u> Se encuentran Circunstancias del tipo: Causa: Razón, Acompañamiento: Aditivo, Locación: Espacio, Manera: Comparación, Manera: Cualidad.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="3">Interpretación Funcional</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Es notable la disminución de los procesos relacionales identificativos y los participantes retóricos en comparación con el texto original. De esta manera, se puede identificar que el texto enfatiza lo simbólico, mientras que los participantes y procesos retóricos cumplen la función de explicar el proceso de resolución y los entes geométricos y proporciones que no requieren simbolización.
Asimismo, se pude identificar una progresión de participantes similar a la del discurso analítico, en tanto que se transita de lo relativo al objetivo, hacia las relaciones geométricas y proporciones.</td>
<td>En términos generales, el texto de E1 presenta características similares al discurso oral, en términos de que se presenta una intrincación gramatical notoria. La presencia de PROYECCIONES del tipo idea contribuyen a este hecho. Sin embargo, el discurso por la carga simbólica recurre a la elipsis en gran parte de este. Por ejemplo, en el caso del complejo clausular C13-C20:
β ˜α   -Al saber
β   que son semejantes,
1 ˜α| ˜1   podemos plantear su proporción de la siguiente manera:
2   ΔNKL y ΔCKB ^LAS PROPORCIONES ^SON $\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$
3   ^Y ΔCLB y ΔGLA ^LAS PROPORCIONES ^SON $\frac{y}{a} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$
2 ˜1   -Y nos quedamos con las proporciones [[que contengan los datos preesta
2   ΔNKL y ΔCKB ^USAMOS $\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$
3   ^Y ΔCLB y ΔGLA ^USAMOS $\frac{y}{a} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$</td>
<td>Por la intencionalidad del texto, en términos de la explicación del método, su textura refleja estas características de explicación, siendo procesos los que más predominan en este.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Que al desplegar el significado lógico podría leerse como: (15) podemos plantear su proporción de la siguiente manera: (16) ΔNKL y ΔCKB ^LAS PROPORCIONES ^SON [[$\frac{c}{y}=\frac{\overline{BK}}{\overline{CK}}=\frac{b}{\overline{KB}}$]]. (17) ^Y ΔCLB y ΔGLA ^LAS PROPORCIONES ^SON [[$\frac{y}{a}=\frac{\overline{CL}}{\overline{CK}}=\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$]] (13) -Al saber (14) que son semejantes. (18) -Y nos quedamos con ^NOSOTROS con las proporciones [[que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)]] (19) ΔNKL y ΔCKB ^NOSOTROS ^USAMOS [[$\frac{c}{y}=\frac{b}{\overline{KB}}$]] (20) ^Y ΔCLB y ΔGLA^NOSOTROS ^USAMOS [[$\frac{c}{y}=\frac{\overline{BK}}{\overline{CK}}=\frac{b}{\overline{KB}}$]].</td><td></td></tr>
<tr><td>Simbolismo</td><td>1. <u>Participantes:</u> En el caso del texto de E1 puede notarse una mayor presencia de metáforas semióticas en las que las ecuaciones son empleadas en el discurso como objetos. Por ejemplo, en la cláusula 16 y 28 respectivamente: “ΔNKL y ΔCKB [[$\frac{c}{y}=\frac{\overline{BK}}{\overline{CK}}=\frac{b}{\overline{KB}}$]]” “-Planteamos: [[$\frac{c}{y}=\frac{b}{\overline{KB}}$]]”.
2. <u>Procesos:</u> A diferencia de los textos de Viète y Descartes, en el texto de E1 puede identificarse cómo el proceso relacional identificativo “=” es empleado sistemáticamente. Esto tiene una implicación en el texto importante en el sentido de que permiten la aparición de cláusulas completamente simbólicas: Por ejemplo, las cláusulas 41 y 42: “$\overline{LB}=\left(\frac{by}{c}\right)-b,$ ”, “$\overline{LA}=\left(\frac{by}{c}-b\right)+x$”.</td><td>El texto de E1 muestra claramente que su discurso algebraico es moderno, pues los complejos clausulares simbólicos aparecen sistemáticamente en el texto, principalmente hacia el final de la deducción de la ecuación paramétrica. Por ejemplo, el complejo clausular C44-C51:
44. $\frac{y}{a}=\frac{\left(\frac{by}{c}-b\right)}{\left(\frac{by}{c}-b+x\right)}$
45. $\rightarrow y\left(\frac{by}{c}-b+x\right)=a\left(\frac{by}{c}-b\right)$
46. $\frac{by^2}{c}-by+xy=\frac{aby}{c}-ab$
47. $\downarrow\frac{by^2}{c}=\frac{aby}{c}-ab+by-xy$
48. $by^2=c\left(\frac{aby}{c}-ab+by-xy\right)$
49. $by^2=aby-abc+bcy-cxy$
50. $y^2=\frac{aby-abc+bcy-cxy}{b}$
51. $y^2=ay-ac+cy-\frac{cxy}{b}$
• <u>TAXIS:</u> Principalmente se emplean relaciones hipotácticas entre las cláusulas simbólicas, como el complejo clausular C44-C51; aunque también puede identificarse relaciones paratácticas como en el complejo de las cláusulas C41 y C42: “$\overline{LB}=$</td><td>Como <u>TEMAS</u> experienciales predominan los Participantes simbólicos.
Por otro lado, pueden identificarse otros sistemas como:
• <u>MEZCLA INTERSEMIÓTICA</u>: Se identifica en las imágenes el uso del simbolismo.


• <u>VÍNCULOS DISCURSIVOS:</u> Nótese cómo en el texto el</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>3. <u>Circunstancias:</u> Las circunstancias simbólicas son limitadas. Se usan con el fin de señalar el “lugar” en el que se deducen las relaciones de equivalencia. Por ejemplo, en las cláusulas 19 y 20:
(19) ^EN ΔNKL y ΔCKB
^NOSOTROS ^USAMOS [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]
(20) ^Y EN ΔCLB y
ΔGLA^NOSOTROS ^USAMOS [[$\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$]].</td>
<td>$\left(\frac{by}{c}\right) - b$, $\overline{LA} = \left(\frac{by}{c} - b\right) + x$”, en el que las cláusulas se separan con una coma.
Además de estos sistemas se encuentran los siguientes sistemas:
• <u>REL. LÓG.-SEM:</u> La línea vertical que divide las dos cláusulas 19 y 20 indican una relación de EXPANSIÓN del tipo Extensión:
ΔNKL y ΔCKB $\quad\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$ | ΔCLB y ΔGLA $\quad\frac{y}{a} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$
Mientras que si se observa el complejo clausular de las cláusulas 44-51 observamos flechas como conectores lógicos que destacan la relación de dependencia entre las cláusulas y los resultados que se obtienen a partir de la cláusula previa, funcionando como relaciones de EXPANSIÓN del tipo Realce:
$$\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)} \rightarrow y\left(\frac{by}{c} - b + x\right) = a\left(\frac{by}{c} - b\right)$$
$$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$$
$\downarrow$
O bien, en el complejo clausular 30-34:
$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ → Declaramos incógnita → $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$ → regla de 3 $\cancel{7}\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$ → Sustituimos y desp
$\cancel{\frac{c}{y}} =$ $\leftarrow \cancel{\frac{c}{y}} = \cancel{\frac{\frac{b}{1}}{\frac{by}{c}}}$ $\quad 44\ \frac{c}{y} = \frac{b}{\frac{by}{c}}$
• <u>INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD:</u> De igual manera, la espacialidad es empleada para destacar la información relevante, dejando las ecuaciones en líneas separadas, centradas y organizadas una debajo de la otra.</td>
<td>estudiante E1 emplea elementos cohesivos a nivel discursivo como las viñetas numéricas: (1) “**1.** *Plantea los datos*”, (2) “**2.** *buscar relaciones*”.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td></td>
<td colspan="2">-Y nos quedamos con las proporciones que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)

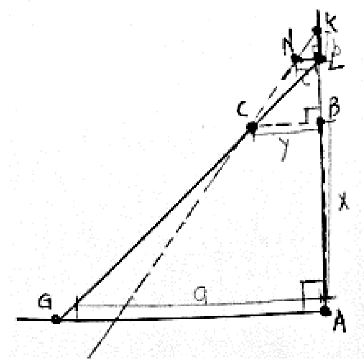
ΔNKL y ΔCKB | ΔCLB y ΔGLA | *Tomemos $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$ debido a que $\overline{LA}$ contiene x.

$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$ | $\frac{y}{a} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$

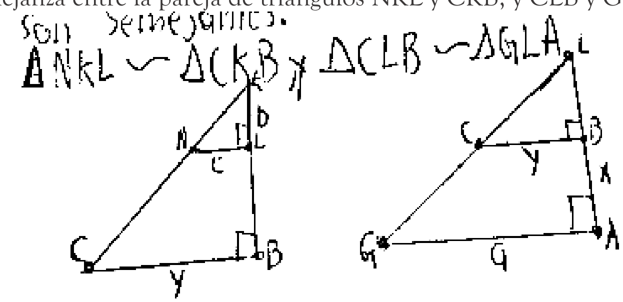
-Entonces sustituimos en la proporción con el valor real de $\overline{KB}$:

$$\overline{LB} = \left(\frac{by}{c}\right) - b, \overline{LA} = \left(\frac{by}{c} - b\right) + x$$
-Y sustituimos para finalmente despejar

$$\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)} \rightarrow y\left(\frac{by}{c} - b + x\right) = a\left(\frac{by}{c} - b\right)$$
$$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$$
$$\downarrow$$
$$\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$$
$$by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$$
$$by^2 = aby - abc + bcy - cxy$$
$$y^2 = \frac{aby - abc + bcy - cxy}{b}$$
$$y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Interpretación Funcional</td>
</tr>
<tr>
<td>El simbolismo en el texto de E1 muestra la funcionalidad del discurso matemático actual, en el sentido de que la experiencia está codificada mediante el simbolismo para sintetizar el discurso y centrarse en la manipulación algebraica de los Participantes de relevancia. Las metáforas semióticas revelan el carácter objetivado del discurso algebraico actual.</td>
<td colspan="2">A diferencia de los textos antiguos, el texto de E1 muestra claramente cómo el simbolismo no solo codifica la experiencia, sino también la organización lógica del texto. En este sentido, pueden identificarse claramente complejos clausulares simbólicos, en los cuales las relaciones de TAXIS y LOG.-SEM. se codifican mediante elementos como flechas, líneas, espacialidad, elipsis.</td>
<td>En el caso de lo Textual puede observarse que también el texto de E1 es más complejo que los originales, en tanto, se recurren a más sistemas para producir significado, como la Mezcla Intersemiótica, uno de los sistemas ausentes en los textos antiguos. Además, el uso de viñetas numéricas muestra la organización y estructura del texto, otro aspecto ausente en los textos antiguos.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">Met. Representacional/Experiencial</td>
<td colspan="2">Met. Composicional</td>
</tr>
<tr>
<td>Imágenes</td>
<td colspan="2">• <u>Episodio</u>: En el texto de E1 se encuentran dos Episodios. El primero, referente a la configuración de Participantes, Procesos y Circunstancias que muestra los datos de la situación, es decir, de la representación del instrumento. Particularmente los triángulos involucrados en la situación.</td>
<td colspan="2">Las imágenes cuentan con elementos composicionales limitados, como el etiquetamiento de las Figuras y Partes involucradas en cada episodio. Puede notarse que se muestra sistemáticamente, de acuerdo con el discurso moderno, que el etiquetamiento de las Figuras y Partes son diferenciadas con letras mayúsculas y minúsculas para indicar la diferencia entre el etiquetamiento geométrico y algebraico. Asimismo,</td>
</tr>
</table>



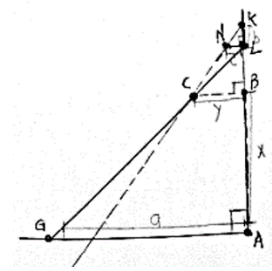
El segundo Episodio refiere a la ilustración de la afirmación de la semejanza entre la pareja de triángulos NKL y CKB, y CLB y GLA.



- Figura: En el primer Episodio, se identifican cuatro Figuras que son los triángulos GLA, CKB, NKL, CLB.
  En el segundo episodio se identifican cuatro Figuras, también mostradas en el primer episodio, los triángulos GLA, CKB, NKL, CLB.
- Partes: Las Partes de cada Figura en el primer Episodio corresponden con los segmentos que se resemiotizarán en el simbolismo y que serán objeto algebraico de tratamiento, como los segmentos CB, GA, NL, KL y BA; asimismo se incluyen las propiedades de ángulos rectos en los triángulos a partir de los cuadrados dibujados en sus esquinas. En el caso del segundo Episodio las Partes corresponden los textos simbólicos que denotan la propiedad de semejanza, junto con los triángulos involucrados.

puede observarse que ambos Episodios son presentados deliberadamente empleando la espacialidad, de manera que se identifican aislados del texto.

-Se posee un applet que muestra lo siguiente



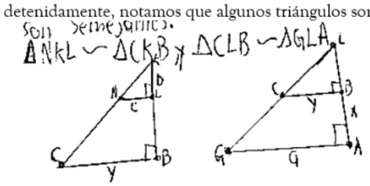
-Las variables son las que se muestran en [sic] el lápiz

-Sabemos que "a", "y" y "c" son paralelas entre sí. Así como el segmento $\overline{KA}$ es perpendicular a ellos.

-Por si no se ha notado en el applet se generan distintos triángulos:

ΔCKB
ΔNKL
ΔGLA
ΔCLB

-Al observar detenidamente, notamos que algunos triángulos son semejantes:



Además se usa el color como una forma de destacar la información relevante, como se menciona en la cláusula 4: "*-Las variables son las que se muestran en [sic] el lápiz*".

Interpretación Funcional

	En los Episodios encontrados, el primero tiene una función compatible con la de Viète y Descartes, en el sentido de que ilustra el problema. A diferencia de los textos de estos matemáticos, E1 emplea la Mezcla Intersemiótica para destacar y vincular su discurso oral y el rastreo de los Participantes. Por otro lado, en el segundo Episodio se ilustra en términos circunstanciales el "lugar" en el cual se están determinando las relaciones de equivalencia, es decir, en los triángulos GLA, CKB, NKL, CLB.	Los recursos de espacialidad, distinción entre minúsculas y mayúsculas, y el color permiten resaltar los elementos más relevantes de los Episodios para que puedan identificarse con facilidad y así ser rastreados en los demás recursos como el simbolismo y lo lingüístico.

Tabla 35. Interpretación funcional de la gramática del texto de E1

7.4.2.2. Texto de E2

<table>
<tr><th>Recurso semiótico</th><th>Met. Experiencial
TRANSITIVIDAD</th><th>Met. Lógica
TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN</th><th>Met. Textual
TEMA-REMA</th></tr>
<tr><td>Lenguaje Natural</td><td>• <u>Participantes:</u> Al igual que E1, la estudiante E2 emplea Participantes retóricos que muestran una progresión acorde al método analítico, en el sentido de que se parte de los participantes asociados con las designaciones simbólicas, con los cuales se intenta establecer el objetivo de la resolución y dónde se encuentran en la figura. Por ejemplo "la relación del punto C [[involucrando a, x, b, c, | | y tomando en consideración que: [[KL – b]] [[NL – c]] [[BA – x]] [[GA – a]] [[CB – y]]". Posteriormente, se observa la tendencia del trabajo con los participantes geométricos para la búsqueda de relaciones. Por ejemplo, "los mismos ángulos", "dos pares de triángulos semejantes",</td><td>• <u>TAXIS:</u> En el caso del texto de E2 se identifica un uso mayoritario de cláusulas Hipotácticas.
• <u>R. LÓG-SEM:</u> Se presentan principalmente relaciones semánticas de EXPANSIÓN del tipo Extensión y Realce y de PROYECCIÓN del tipo Idea.</td><td>A diferencia de E1, en el texto de E2 se identifican predominantemente Participantes como los Temas Experienciales, aunque los Procesos son usados con frecuencia.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td>"Los triángulos". Posteriormente, se identifican los participantes relativos a las relaciones de equivalencia: "los lados proporcionales (la misma)", "las proporciones [[que cumplen cada par]]".
A diferencia de E1, la estudiante mantiene un equilibrio entre los Participantes simbólicos y retóricos.
<u>Procesos:</u> Con respecto a los procesos se identifica el mismo patrón que el estudiante E1, el cual nuevamente muestra predominancia de los procesos relacionales. En este caso los identificativos son todos simbólicos. A diferencia del texto del estudiante E1, los procesos relacionales atributivos en este texto doblan su frecuencia.
<u>Circunstancias:</u> Se encuentran Circunstancias del tipo: Causa: Razón, Locación: Espacio, Manera: Comparación, Manera: Cualidad.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Interpretación Funcional</td>
</tr>
<tr>
<td>Al igual que el estudiante E1, en el texto de la estudiante E2, se pude identificar una progresión de participantes similar a la del discurso analítico, en tanto que se transita de lo relativo al objetivo, hacia las relaciones geométricas y proporciones. No obstante, a diferencia de E1, en este texto la predominancia de participantes simbólicos por sobre los</td>
<td>En términos generales, el texto de E2 presenta características similares al discurso oral, al igual que el estudiante E1, en términos de que se presenta una intrincación gramatical notoria. La presencia de PROYECCIONES del tipo idea contribuyen a este hecho. Sin embargo, el discurso por la carga simbólica recurre a la elipsis en gran parte de este. Por ejemplo, en el caso del complejo clausular 3-9:</td>
<td>Puesto que los Temas Experienciales resultan en su mayoría ser Participantes, puede interpretarse que el discurso busca centrar la atención en aquello que está siendo objeto de estudio. Es decir, las relaciones y las expresiones algebraicas.</td>
</tr>
</table>

	retóricos no es significativa. En este sentido, puede interpretarse que el discurso muestra un énfasis no solo en las expresiones, sino los elementos geométricos y relaciones de equivalencia. El hecho de que haya más presencia de los procesos relacionales atributivos implica que la estudiante E2, respecto del estudiante E1 muestra una consistencia en establecer las relaciones de equivalencia, previamente al tratamiento algebraico.	β Teniendo en cuenta esta consideración, α ˜ α Para continuar, puedes observar β ˜ α que en la imagen original se pueden encontrar en su estructura dos pares de triángulos semejantes β ˜ α donde deberás de considerar β ˜ 1 que para que *cumplan* esta condición: 2 1. Los triángulos *tienen* los mismos ángulos 3 2. Los triángulos semejantes *tienen* los lados proporcionales (la misma) Otro ejemplo son los complejos clausulares 33-38 y 39-44. α Para la LB debemos de considerar β ˜ α que se encuentra ubicada en el primer par de triángulos [[donde KB *resultó ser* igual a $\frac{by}{c}$,]] β ˜ 1 ,por lo tanto, para *encontrar* el valor LB 2 ˜ α le *podemos restar* a $\frac{by}{c}$ la longitud KL [[que *tiene* el valor de b]] β quedando de esta manera: γ $LB = \frac{by}{c} - b$ β Finalmente para *obtener* el valor de LA α ˜ 1 es necesario considerar 2 que la longitud LB también *forma* parte del segundo par de triángulos, 3 ˜ α pero *deber de agregar* el valor de la longitud BA [[que *es conocido* como x,]] β quedando de esta manera: γ $LA = \frac{by}{c} - b + x$ Además de este sistema, se identifica el sistema de <u>SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN</u>, cuando se enlista con viñetas las consideraciones que deben destacarse de la propiedad de semejanza de los triángulos: Para continuar, puedes observar que en la imagen original se pueden encontrar en su estructura dos pares de triángulos semejantes donde deberás de considerar que para que cumplan esta condición: 1. Los triángulos tienen los mismos ángulos 2. Los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales (la misma)	
Simbolismo	• <u>Participantes:</u> Se muestra al igual que E1 el uso del recurso de la Metáfora Semiótica, dejando las igualdades algebraicas funcionar como parte del grupo nominal, o bien como el grupo nominal en sí mismo. Por ejemplo en la cláusula 13, 14 y 43 respectivamente: “ΔNKL y $\Delta CKB = [[\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}]]$”,	Al igual que el texto de E1, en el texto de E2 se muestra claramente que su discurso algebraico es moderno, pues los complejos clausulares simbólicos aparecen sistemáticamente en el texto. Por ejemplo, los complejos clausulares 28-3: $\frac{LB}{LA} = \frac{y}{a}$ / $LBa = LAy$ / $\frac{LBa}{y} = \frac{LA\cancel{y}}{\cancel{y}}$ / $\frac{LBa}{y} = LA$ Y el complejo 50-54:	Al igual que E1, como <u>TEMAS</u> experienciales predominan los Participantes simbólicos. Por otro lado, puede identificarse la <u>MEZCLA INTERSEMIÓTICA</u>:

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

"ΔCLB y ΔGLA =[[$\frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$]]",
"*Por último, sustituye los valores de la equivalencia [[$LA = \frac{LBa}{y}$]] con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB*".

- <u>Procesos:</u> A diferencia de los textos de Viète y Descartes, en el texto de E2, al igual que el de E1 puede identificarse cómo el proceso relacional identificativo "=" es empleado sistemáticamente. Esto tiene una implicación en el texto importante en el sentido de que permiten la aparición de cláusulas completamente simbólicas: Por ejemplo, las cláusulas 38 y 42: "$\overline{LB} = \frac{by}{c} - b,$", "$\overline{LA} = \frac{by}{c} - b + x$".
- <u>Circunstancias:</u> Las circunstancias simbólicas al igual que el texto de E1 son limitadas. Se usan con el fin de señalar el "lugar" y se enfatiza la "manera" en el que se deducen y determinan las relaciones de equivalencia. Por ejemplo, en las cláusulas 23 y 37 respectivamente: "*lo podemos ubicar en nuestro dibujo del par:*" , "*quedando de esta manera:*".

</td>
<td>

$$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$$
$$\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$$
$$by^2 = \cancel{c}\left(\frac{aby}{\cancel{c}} - ab + by - xy\right)$$
$$\frac{\cancel{b}y^2}{\cancel{b}} = \frac{a\cancel{b}y - a\cancel{b}c + c\cancel{b}y - cxy}{\cancel{b}}$$
$$y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$$

- <u>TAXIS:</u> Entre las cláusulas simbólicas se emplean relaciones hipotácticas, como el complejo clausular 19-22.

α	$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$
β	$cKB = by$
γ	$\frac{cKB}{c} = \frac{by}{c}$
δ	$KB = \frac{by}{c}$

Además se encuentran los siguientes sistemas:

- <u>SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN</u>: Debido a la Mezcla Semiótica, el uso de recursos simbólicos, visuales y lingüísticos se articulan para destacar implicaciones entre estos distintos recursos. Por ejemplo en el complejo clausular 10-14, en el que se emplea una flecha para asociar el mensaje inscrito en la flecha a las cláusulas simbólicas:

Considerando las condiciones que deben cumplir los triángulos semejantes deberás escribir las proporciones que cumplen cada par.

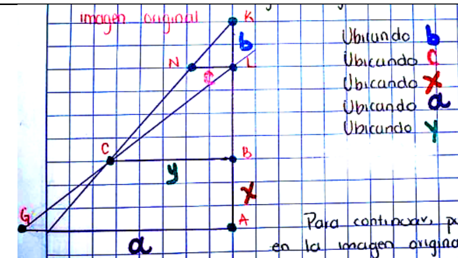
ΔNKL y $\Delta CKB = \frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$

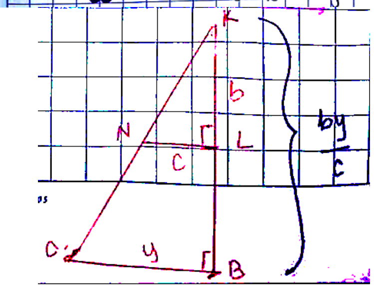
ΔCLB y $\Delta GLA = \frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$

Considera que todos los lados deben tener la misma proporción. Por eso tienes que igualar las cantidades

- <u>REL. LÓG.-SEM:</u> Al observar los complejos clausulares 19-22 y 28-31 observamos trazos diagonales como conectores lógicos que destacan la relación de dependencia entre las cláusulas y los resultados que se

</td>
<td>





</td>
</tr>
</table>

obtienen a partir de la cláusula previa, funcionando como relaciones de EXPANSIÓN del tipo Realce:

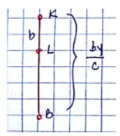
$$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB} \;/\; cKB = by \;/\; \frac{\cancel{c}KB}{\cancel{c}} = \frac{by}{c} \;\;/\;\; KB = \frac{by}{c}$$

$$\frac{LB}{LA} = \frac{y}{a} \;/\; LBa = LAy \;/\; \frac{LBa}{y} = \frac{LA\cancel{y}}{\cancel{y}} \;/\; \frac{LBa}{y} = LA$$

- <u>INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD:</u> De igual manera, la espacialidad es empleada para destacar la información relevante, dejando las ecuaciones, o Participantes de interés en líneas separadas, centradas y organizadas una debajo de la otra.

La ecuación que Descartes desarrolló buscando la relación del punto C involucrando a, x, b, c, y tomando en consideración que:

$KL - b$	$GA - a$
$NL - c$	$CB - y$
$BA - x$	



,por lo tanto, para encontrar el valor LB le podemos restar a $\frac{by}{c}$ la longitud KL que tiene el valor de b quedando de esta manera

$$LB = \frac{by}{c} - b$$

Por último, sustituye los valores de la equivalencia $LA = \frac{LBa}{y}$ Con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB y resuelve la equivalencia:

$$\frac{by}{c} - b + x = \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$$

$$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$$

Para concluir y encontrar la ecuación más reducida como la de Descartes despeja la y^2.

$$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$$

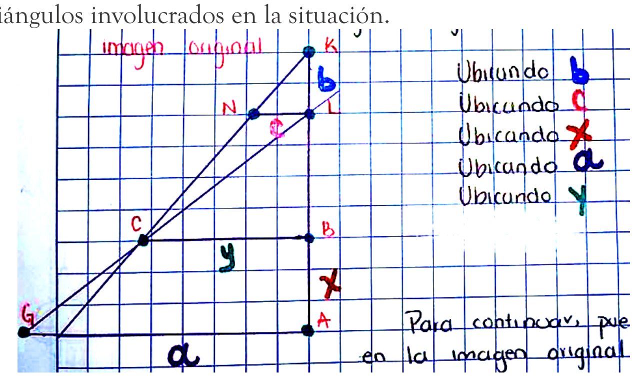
$$\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$$

$$by^2 = \cancel{c}\left(\frac{aby}{\cancel{c}} - ab + by - xy\right)$$

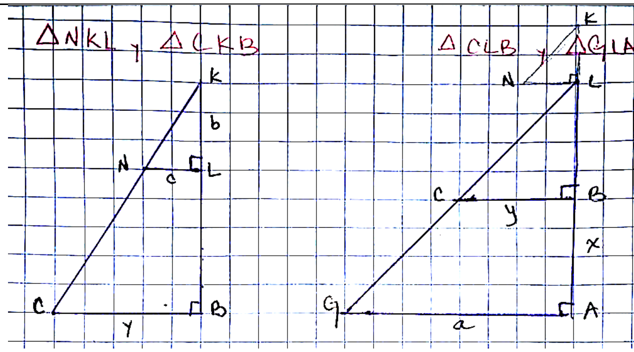
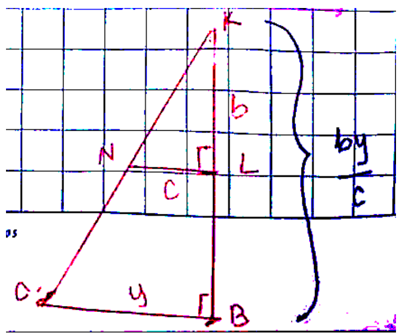
$$\frac{\cancel{b}y^2}{\cancel{b}} = \frac{a\cancel{b}y - a\cancel{b}c + c\cancel{b}y}{\cancel{b}} \frac{-cxy}{b}$$

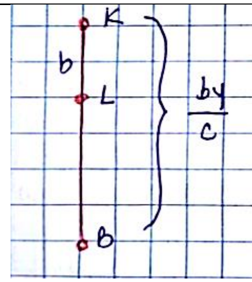
$$y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$$

Interpretación Funcional

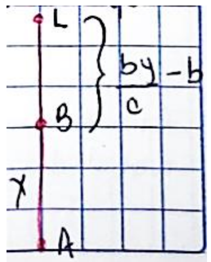
<table>
<tr>
<td></td>
<td>El simbolismo en el texto de E2, al igual que el texto de E1, muestra la funcionalidad del discurso matemático actual, en el sentido de que la experiencia está codificada mediante el simbolismo para sintetizar el discurso y centrarse en la manipulación algebraica de los Participantes de relevancia. Las metáforas semióticas revelan el carácter objetivado del discurso algebraico actual.</td>
<td colspan="2">A diferencia de los textos antiguos, el texto de E2 muestra claramente cómo el simbolismo no solo codifica la experiencia, sino también la organización lógica del texto. En este sentido, pueden identificarse claramente complejos clausulares simbólicos, en los cuales las relaciones de TAXIS y LOG.-SEM. se codifican mediante elementos como líneas, espacialidad, elipsis.</td>
<td>En el caso de lo Textual puede observarse que también el texto de E2 es más complejo que los originales, en tanto, se recurren a más sistemas para producir significado, como la Mezcla Intersemiótica, una de los sistemas ausentes en los textos antiguos.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">Met. Representacional/Experiencial</td>
<td colspan="2">Met. Composicional</td>
</tr>
<tr>
<td>Imágenes</td>
<td colspan="2">
<u>Episodio:</u> Se identifican más de un Episodio. En el primero, al igual que E1 se explicita la configuración de Participantes, Procesos y Circunstancias que muestra los datos de la situación, es decir, de la representación del instrumento. Particularmente los triángulos involucrados en la situación.


El segundo Episodio refiere a la ilustración de la afirmación de la semejanza entre la pareja de triángulos NKL y CKB, y CLB y GLA.
</td>
<td colspan="2">Las imágenes cuentan con elementos composicionales limitados, como el etiquetamiento de las Figuras y Partes involucradas en cada episodio. Puede notarse que se muestra sistemáticamente, de acuerdo con el discurso moderno, que el etiquetamiento de las Figuras y Partes son diferenciadas con letras mayúsculas y minúsculas para indicar la diferencia entre el etiquetamiento geométrico y algebraico. Asimismo, puede observarse que ambos los Episodios son presentados deliberadamente empleando la espacialidad, de manera que se identifican aislados del texto.
En el caso de E2, emplea el uso sistemático de colores para diferenciar e identificar los Participantes de interés que son adoptados en el lenguaje natural, mediante el simbolismo.</td>
</tr>
</table>

	 En el tercer Episodio se ilustra mediante la Mezcla semiótica la configuración de Participantes, Procesos y Circunstancias que permiten la *sustitución intersemiótica* entre el segmento KB y la expresión $\frac{by}{c}$.  En el cuarto Episodio se aíslan los Participantes, Procesos y Circunstancias que no son relevantes para representar al segmento LB.	



En el quinto Episodio sucede lo análogo al cuarto, solo que para representar al segmento LA.



- Figura: En el caso de los tres Episodios, las Figuras corresponden con los triángulos sobre los cuales se determinan las relaciones de equivalencia, es decir, los triángulos GLA, CKB, NKL, CLB. En el caso de los Episodios 4 y 5, las partes corresponden a segmentos de recta sobre los cuales se determinan relaciones de equivalencia aditivas, es decir, los segmentos KB, KL, LB, LA, BA.
- Partes: Las partes de los cinco Episodios corresponden con las etiquetas que nombran los triángulos y segmentos, así como también las asociaciones con las variables y parámetros de interés.

Interpretación Funcional	
En los Episodios encontrados, el primero tiene una función compatible con la de Viète y Descartes, en el sentido de que ilustra el problema. A diferencia de los textos de estos matemáticos, E2 emplea la Mezcla Intersemiótica para destacar y vincular su discurso oral y el rastreo de los Participantes. Por otro lado, los Episodios restantes se ilustra en términos circunstanciales el "lugar" en el cual se están determinando las	Los recursos de espacialidad, distinción entre minúsculas y mayúsculas, y el color permiten resaltar los elementos más relevantes de los Episodios para que puedan identificarse con facilidad y así ser rastreados en los demás recursos como el simbolismo y lo lingüístico.

	relaciones de equivalencia, es decir, en los triángulos GLA, CKB, NKL, CLB, así como los segmentos KB, KL, LB, LA, BA.	

Tabla 36. Interpretación funcional de la gramática del texto de E2

7.4.2.3. Texto de E3

Recurso semiótico	Met. Experiencial TRANSITIVIDAD	Met. Lógica TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN	Met. Textual TEMA-REMA
Lenguaje Natural	• Participantes: Al igual que E1 y E2, el estudiante E3 emplea Participantes retóricos que muestran una progresión acorde al método analítico, en el sentido de que se parte de los participantes asociados con las designaciones simbólicas, con los cuales se intenta establecer el objetivo de la resolución y dónde se encuentran en la figura. Por ejemplo "*ciertas regularidades [[que existen en la construcción.]]*", "*se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos*,". Posteriormente, se observa la tendencia del trabajo con los participantes geométricos para la búsqueda de relaciones. Por ejemplo, "*se empezará con NKL y CKB.*", "*al tener los ángulos iguales,* ". Posteriormente, se identifican los participantes relativos a las	• TAXIS: En el caso del texto de E3 se identifica un uso mayoritario de cláusulas Hipotácticas. Entre los tres textos, este texto es el que muestra una mayor intrincación gramatical de los tres estudiantes, pues la mayor parte del texto conforma complejos clausulares prolongados. • R. LÓG-SEM: Se presentan principalmente relaciones semánticas de EXPANSIÓN del tipo Elaboración, Extensión y Realce y de PROYECCIÓN del tipo Idea.	A diferencia de E1, en el texto de E2 se identifican predominantemente Participantes como los Temas Experienciales, aunque los Procesos son usados con frecuencia.

<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td>relaciones de equivalencia: “entonces, se pueden deducir las siguientes razones de proporcionalidad:”.
Al diferencia de E2 y E1, el estudiante E3, presenta en su texto mayor cantidad de Participantes retóricos.
<u>Procesos:</u> Con respecto a los procesos se identifica el mismo patrón que el estudiante E1, el cual nuevamente muestra predominancia de los procesos relacionales.
<u>Circunstancias:</u> Causa: Razón, Locación: Espacio, Manera: Comparación, Manera: Cualidad.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Interpretación Funcional</td>
</tr>
<tr>
<td>Al igual que el estudiante E1, en el texto de la estudiante E2, se pude identificar una progresión de participantes similar a la del discurso analítico, en tanto que se transita de lo relativo al objetivo, hacia las relaciones geométricas y proporciones. No obstante, a diferencia de E1, en este texto la predominancia de participantes simbólicos por sobre los retóricos no es significativa. En este sentido, puede interpretarse que el discurso muestra un énfasis no solo en las expresiones, sino los elementos geométricos y relaciones de equivalencia.
El hecho de que haya más presencia de los procesos relacionales atributivos implica que la estudiante E2, respecto del estudiante E1 muestra una</td>
<td>Como se ha mencionado, este texto presenta mayor intrincación gramatical que E1 y E2, dejando ver una tendencia del discurso hacia uno de tipo oral.
<table>
<tr><td>α</td><td>Primero que nada, antes de usar de lleno a la determinación de la ecuación,</td></tr>
<tr><td>β</td><td>se tiene que identificar ciertas regularidades [[que existen en la construcción.]]</td></tr>
<tr><td>α</td><td>si notamos,</td></tr>
<tr><td>β˜α</td><td>se puede encontrar</td></tr>
<tr><td>β˜α</td><td>que el triángulo [[formado por NKL]] es semejante al ^TRIÁNGULO [[formado por CKB,]]</td></tr>
<tr><td>β˜α</td><td>ya que sus ángulos son iguales</td></tr>
<tr><td>β˜1</td><td>y, por lo tanto, tienen una razón de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>lo mismo ocurre en los triángulos CLB y GLA.</td></tr>
<tr><td>α</td><td>Ahora, antes de pasar a otro paso,</td></tr>
<tr><td>β˜α</td><td>se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos,</td></tr>
<tr><td>β</td><td>pues son las ^LITERALES [[que usarán en la ecuación.]]</td></tr>
<tr><td>1</td><td>en primer lugar, el segmento GA será la <u>a</u>,</td></tr>
<tr><td>2</td><td>el segmento KL será la <u>b</u>,</td></tr>
<tr><td>3</td><td>el segmento NL será la <u>c</u>,</td></tr>
<tr><td>4</td><td>el segmento BA será <u>x</u> y, por último,</td></tr>
<tr><td>5</td><td>el segmento CB será <u>y</u>.</td></tr>
<tr><td>α</td><td>Una vez hecho esto,</td></tr>
<tr><td>β</td><td>se podrá identificar con más facilidad las relaciones existentes entre estos segmentos.</td></tr>
</table></td>
<td>Puesto que los Temas Experienciales resultan en su mayoría ser Participantes, puede interpretarse que el discurso busca centrar la atención en aquello que está siendo objeto de estudio. Es decir, las relaciones y las expresiones algebraicas.</td>
</tr>
</table>

	consistencia en establecer las relaciones de equivalencia, previamente al tratamiento algebraico.		
Simbolismo	• Participantes: Los Participantes simbólicos son reducidos en comparación de los retóricos. Refieren principalmente a segmentos y expresiones algebraicas. • Procesos: A diferencia de los textos de Viète y Descartes, en el texto de E3, al igual que el de E1 y E2 puede identificarse cómo el proceso relacional identificativo “=” es empleado sistemáticamente. Esto tiene una implicación en el texto importante en el sentido de que permiten la aparición de cláusulas completamente simbólicas: Por ejemplo, las cláusulas 52 y 67 respectivamente: “$\frac{a}{y} = \frac{LB+x}{LB}$”, “$\frac{y}{c}b - b = LB$,”. • Circunstancias: No hay circunstancias simbólicas.	No se encuentran complejos clausulares simbólicos, como en los textos antiguos.	El simbolismo se encuentra incrustado en su mayoría en cláusulas de lenguaje natural. No se identifica una predominancia de Temas Experienciales simbólicos como en los textos de E1 y E2.
	Interpretación Funcional		
	El simbolismo en el texto de E2, al igual que el texto de E1, muestra la funcionalidad del discurso matemático actual, en el sentido de que la experiencia está codificada mediante el simbolismo para sintetizar el discurso y centrarse en la manipulación algebraica de los Participantes de relevancia. Las metáforas semióticas revelan el carácter		El texto contempla más elementos retóricos dirigidos hacia la explicación del proceso de resolución, lo cual deja en segundo plano el recurso simbólico.

	objetivado del discurso algebraico actual.		
	Met. Representacional/Experiencial		Met. Composicional
Imágenes	El texto no contiene imágenes.		
	Interpretación Funcional		
	El texto no contiene imágenes.		

Tabla 37. Interpretación funcional de la gramática del texto de E3

7.4.3. Análisis Multimodal de los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos

El análisis llevado a cabo siguió el mismo método que el empleado para los textos de al-Khwârizmî, Viète y Descartes en la primera fase del estudio. A modo de ejemplo, mostramos solo el caso del estudiante E2 para ilustrar que, efectivamente, hay diferencias entre los mecanismos y sistemas de intersemiosis de estudiantes y los algebristas antiguos. En el apartado 8.4 presentamos las tablas 42 y 43 que sintetizan las características de los sistemas y mecanismos de intersemiosis encontrados en los textos de estos estudiantes.

7.4.3.1. Texto de E2

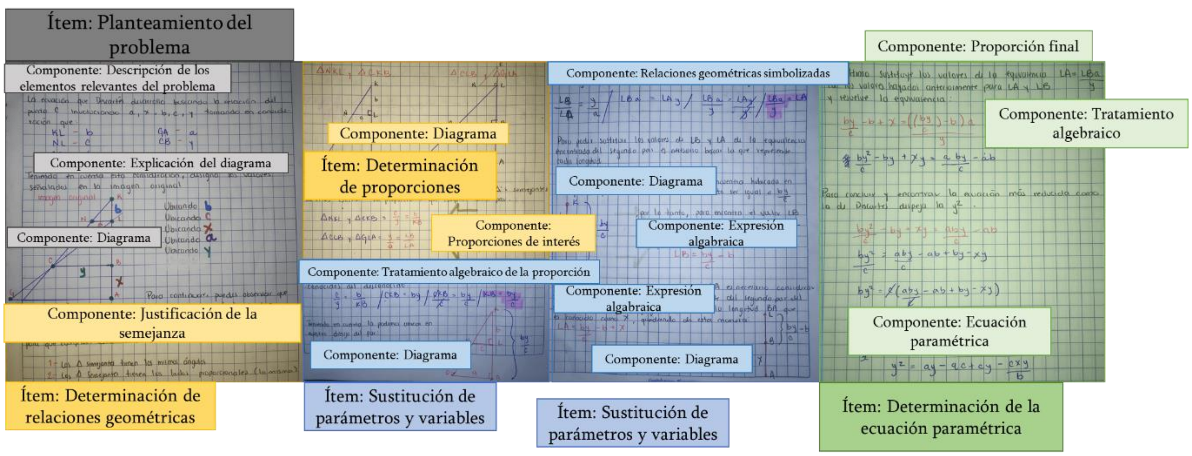


Figura 43. Estructura discursiva en un texto de E2

Texto seccionado por Ítems

1. La ecuación [[que Descartes desarrolló]] buscando la relación del punto $\underline{C}$ [[involucrando $\underline{a, x, b, c,}$ | | y tomando en consideración que

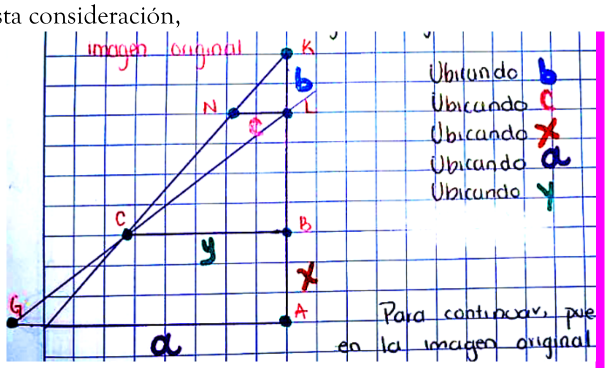
$KL - b$ $GA - a$

$NL - c$ $CB - y$]]

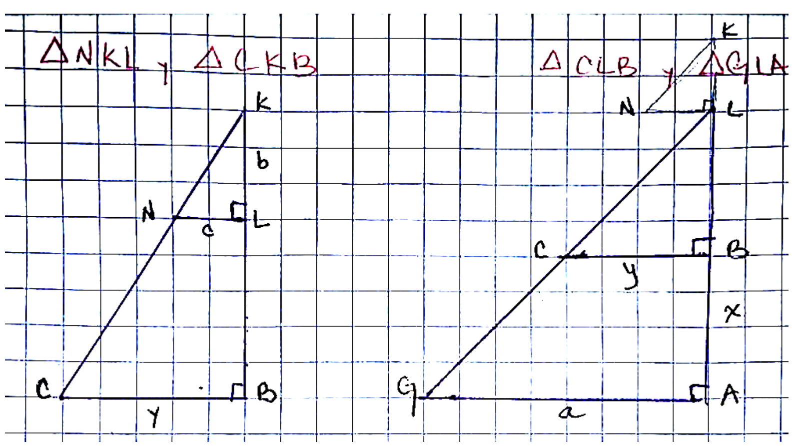
$BA - x$

designa los valores señalados en la imagen original

2. Teniendo en cuenta esta consideración,



3. Para continuar, puedes observar
4. que en la imagen original se pueden encontrar en su estructura dos pares de triángulos semejantes
5. donde deberás de considerar
6. que para que cumplan esta condición:
7. 1. Los triángulos tienen los mismos ángulos
8. 2. Los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales (la misma)



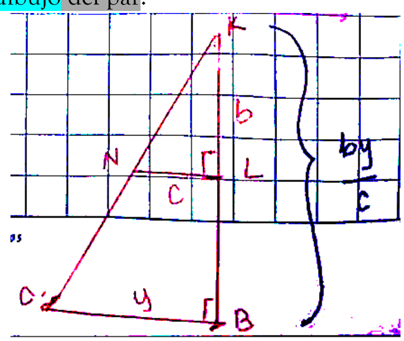
9. Considerando [[las condiciones que deben cumplir los triángulos semejantes]]
10. deberás escribir las proporciones [[que cumplen cada par]]
11. ΔNKL y $\Delta CKB = \frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$
12. ΔCLB y $\Delta GLA = \frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$

13. Considera
14. que todos los lados deben tener la misma proporción.
15. Por eso tienes que igualar las cantidades

16. Primero trabajaremos con la primera equivalencia del primer par de triángulos, ΔNKL y ΔCKB, [[donde despejarás los datos conocidos del desconocido.]]

17. $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ 18. $/\ cKB = by$ 19. $/\ \frac{cKB}{c} = \frac{by}{c}$ 20. $/\ KB = \frac{by}{c}$

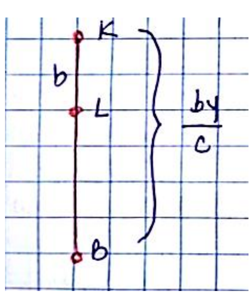
21. Teniendo en cuenta
22. lo podemos ubicar en nuestro dibujo del par:



23. despejando la equivalencia del segundo par de triángulos
24. dejando sola a la longitud LA
25. Luego realizaremos el mismo ejercicio,

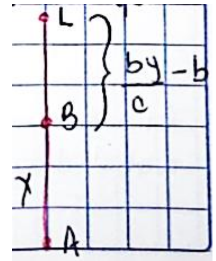
26. $\frac{LB}{LA} = \frac{y}{a}$ 27. $/LBa = LAy$ 28. $/\frac{LBa}{y} = \frac{LAy}{y}$ 29. $/\frac{LBa}{y} = LA$

30. Para poder sustituir los valores de LB y LA de la equivalencia [[encontradas del segundo par]]]]
31. es necesario [[buscar la que represente cada longitud.]]
32. Para la LB debemos de considerar
33. que se encuentra ubicada en el primer par de triángulos [[donde KB resultó ser igual a $\frac{by}{c}$,]]



34. por lo tanto, para encontrar el valor LB
35. le podemos restar a $\frac{by}{c}$ la longitud KL [[que tiene el valor de b]]
36. quedando de esta manera:
37. $LB = \frac{by}{c} - b$

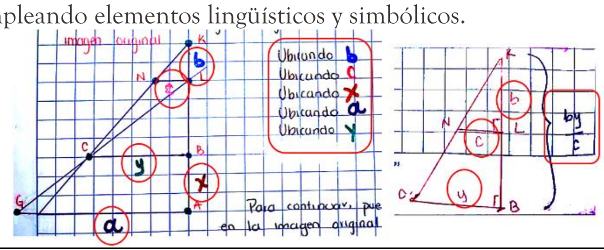
38. Finalmente para [[obtener el valor de LA]] es necesario [[considerar que la longitud LB también forma parte del segundo par de triángulos,]]
39. pero deber de agregar el valor de la longitud BA [[que es conocido como x,]]
40. quedando de esta manera:



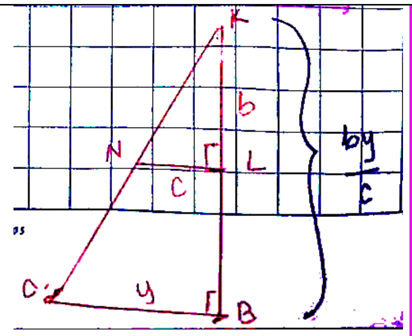
41. $LA = \frac{by}{c} - b + x$

42. Por último, sustituye los valores de la equivalencia [[$LA = \frac{LBa}{y}$]] con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB
43. y resuelve la equivalencia:
44. $\frac{by}{c} - b + x = \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$
45. $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$
46. Para concluir
47. y encontrar la ecuación más reducida como la de Descartes
48. despeja la y^2.
49. $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$
50. $\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$
51. $by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$
52. $\frac{by^2}{b} = \frac{aby - abc + cby}{b} \frac{-cxy}{b}$
53. $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$

7.4.3.1.1. Sistemas Intersemióticos

MULTISEMIOSIS			
SIGNIFICADO TEXTUAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	Hay Cohesión Intersemiótica puesto que se recurre, principalmente a la Referencia Directa entre Participantes y Circunstancias de los recursos semióticos de las imágenes, el texto ligüístico y el simbolismo. Estos Participantes y Circunstancias aparecen sistemáticamente en el texto en sus diferentes representaciones. Por ejemplo, "en la imagen original se pueden encontrar en su estructura dos pares de triángulos", "Los triángulos", "ΔNKL y ΔCKB", "en el primer par de triángulos".
	MEZCLA INTERSEMIÓTICA	X	Las imágenes muestran un claro uso de la mezcla intersemiótica, empleando elementos lingüísticos y simbólicos. 
	ENLACES DISCURSIVOS		No se identifican enlaces discursivos entre los recursos semióticos.
	SUBTÍTULOS		No se identifican subtítulos entre los recursos semióticos.
LEXICO-GRAMÁTICA	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	La primera sustitución intersemiótica se da en la segunda cláusula cuando E1 establece sin ser explícito la vinculación entre los participantes "las medidas fijas" y "variables" con sus correspondencias simbólicas. Por ejemplo en las cláusulas 32, 34 y 40 "*Para [[poder sustituir los valores de LB y LA de la equivalencia [[encontradas del segundo par]]]].*", "*KB resultó ser igual a* $\frac{by}{c}$,", "*BA [[que es conocido como* x,]]", De igual forma, otros ejemplos se dan en las cláusulas 13 y 14, en las que se hacer referencia a triángulos previamente ilustrados en la imagen, así como los segmentos previamente mencionados: ΔNKL y $\Delta CKB = \frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ ΔCLB y $\Delta GLA = \frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$
	ADOPCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	Como el texto de E1 puede verse cómo el paradigma del discurso matemático es sumamente diferente al de los textos de Viète y Descartes, puesto que la Adopción Semiótica es tan sistemática que al final del texto, los elementos lingüísticos incluso desaparecen, quedando complejos clausulares simbólicos. Es decir, se adopta el simbolismo al grado de ser un recurso semiótico autónomo en el texto (ver Cláusulas 45-54). A diferencia de E1, la estudiante E2 no tiende a emplear tanto en el lenguaje natural Participantes simbólicos autónomos como, sino se identifica una tendencia a incrustar las sustituciones

			intersemióticas. Por ejemplo, en la cláusula 36: "*le podemos restar a* $\frac{by}{c}$ *la longitud KL [[que tiene el valor de* b *]]*"
	DEIXIS	X	Los artículos definidos "la", "el" ayudan en términos gramaticales a indicar que el Participante es existente, ya sea en la Imagen o en el simbolismo, lo cual induce a rastrearlo. Asimismo, se presentan variedad de elementos deícticos que indican el "lugar" de donde provienen los análisis, por ejemplo: "*en la imagen original*".
	ETIQUETAS	X	El uso de las etiquetas A, B, C, … en la imagen son fundamentales para desarrollar los Significados Textuales y Experienciales.
SIGNIFICADO EXPERIENCIAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	Se identifica la ideación intersemiótica por el hecho, de que las imágenes son empleadas para hacer explícito con qué se está trabajando y a partir de qué tipo de circunstancias se logrará resolver la situación. En este sentido, se deja ver que, al igual que los textos antiguos, la secuencia de actividades estará basada en el análisis de los componentes de la imagen, y progresivamente, se orientará a lo simbólico al emplear la Mezcla Intersemiótica en estas imágenes. Estos procedimientos son a nivel gramatical reforzados a través de relaciones de transitividad, generalmente por medio de Procesos Relacionales que permitirán rastrear en el texto lingüístico las partes de la imagen que están siendo modificadas o, bien que son recuperadas para su tratamiento algebraico.
	SUBTÍTULOS		No hay uso de subtítulos en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X	A través de Procesos Relacionales Identificativos, se establecen Relaciones de Transitividad entre los Participantes del Lenguaje Natural y la Imagen. Por ejemplo en la cláusula 1: "*La ecuación [[que Descartes desarrolló]] buscando la relación del punto C [[involucrando a, x, b, c,* || *y tomando en consideración que: KL – b, NL – c, BA – x, GA – a, CB – y.*"
	LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN	X	Se encuentra más presente la simbolización, por ejemplo, al emplear la notación simbólica Δ para representar la palabra "triángulo".
	METÁFORA SEMIÓTICA	X	Las metáforas semióticas en el caso de la estudiante E2 no se presentan mediante la elipsis, como en el caso de E1. Por ejemplo: "*Por último, sustituye valores de equivalencia [[* $LA = \frac{LBa}{y}$ *]] con valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB*"., "*lo podemos ubicar en nuestro dibujo del par:*"

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>ETIQUETAS</td><td>X</td><td>El uso de las etiquetas A, B, C, … en la imagen son fundamentales para desarrollar los Significados Textuales y Experienciales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">SIGNIFICADO LÓGICO</td></tr>
<tr><td>Estrato</td><td>Sistema</td><td>Presencia</td><td>Descripción</td></tr>
<tr><td>SEMÁNTICA DEL DISCURSO</td><td>SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN</td><td>X</td><td>Debido a la Mezcla Semiótica, el uso de recursos simbólicos, visuales y lingüísticos se articulan para destacar implicaciones entre estos distintos recursos. Por ejemplo en el complejo clausular 10-14, en el que se emplea una flecha para asociar el mensaje inscrito en la flecha a las cláusulas simbólicas:

Considerando las condiciones que deben cumplir los triángulos semejantes deberás escribir las proporciones que cumplen cada par.

ΔNKL y $\Delta CKB = \frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$

ΔCLB y $\Delta GLA = \frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$

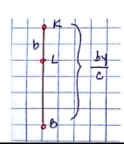
Considera que todos los lados deben tener la misma proporción. Por eso tienes que igualar las cantidades</td></tr>
<tr><td>LEXICO-GRAMÁTICA</td><td>LÓGICO-SEMÁNTICA</td><td>X</td><td>Al observar los complejos clausulares 19-22 y 28-31 observamos trazos diagonales como conectores lógicos que destacan la relación de dependencia entre las cláusulas y los resultados que se obtienen a partir de la cláusula previa, funcionando como relaciones de EXPANSIÓN del tipo Realce:

$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ / $cKB = by$ / $\frac{\cancel{c}KB}{\cancel{c}} = \frac{by}{c}$ / $KB = \frac{by}{c}$

$\frac{LB}{LA} = \frac{y}{a}$ / $LBa = LAy$ / $\frac{LBa}{y} = \frac{LA\cancel{y}}{\cancel{y}}$ / $\frac{LBa}{y} = LA$</td></tr>
<tr><td></td><td>INTERDEPENDENCIA</td><td></td><td>No se identifican relaciones de Interdependencia entre recursos semióticos en el texto.</td></tr>
<tr><td></td><td>INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD</td><td>X</td><td>De igual manera, la espacialidad es empleada para destacar la información relevante, dejando las ecuaciones, o Participantes de interés en líneas separadas, centradas y organizadas una debajo de la otra.

La ecuación que Descartes desarrolló buscando la relación del punto C involucrando a, x, b, c, y tomando en consideración que:

$KL - b$ $GA - a$
$NL - c$ $CB - y$
$BA - x$



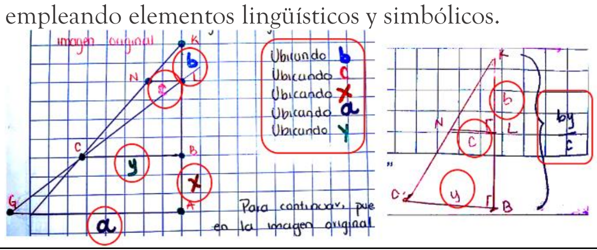
,por lo tanto, para encontrar el valor LB le podemos restar a $\frac{by}{c}$ la longitud KL que tiene el valor de b quedando de esta manera

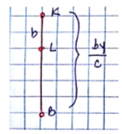
$LB = \frac{by}{c} - b$</td></tr>
</table>

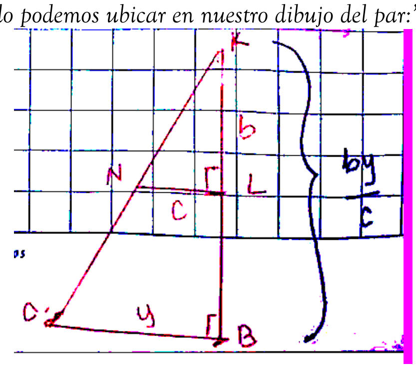
			Por último, sustituye los valores de la equivalencia $LA = \frac{LBa}{y}$ Con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB y resuelve la equivalencia: $\frac{by}{c} - b + x = \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$ $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ Para concluir y encontrar la ecuación más reducida como la de Descartes despeja la y^2. $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ $\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$ $by^2 = \cancel{c}\left(\frac{aby}{\cancel{c}} - ab + by - xy\right)$ $\frac{\cancel{b}y^2}{\cancel{b}} = \frac{a\cancel{b}y - a\cancel{b}c + c\cancel{b}y}{\cancel{b}} \frac{-cxy}{b}$ $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$
	METÁFORA SEMIÓTICA		No se identifican Metáforas Semióticas Lógicas entre recursos semióticos en el texto.

Tabla 38. Sistemas de intersemiosis en un texto de E2

7.4.3.1.2. Mecanismos Intersemióticos

MECANISMOS INTERSEMIÓTICOS		
Mecanismo	Presencia	Descripción
Cohesión Semiótica	X	Hay Cohesión Intersemiótica puesto que se recurre, principalmente a la Referencia Directa entre Participantes y Circunstancias de los recursos semióticos de las imágenes, el texto ligüístico y el simbolismo. Estos Participantes y Circunstancias aparecen sistemáticamente en el texto en sus diferentes representaciones. Por ejemplo, "en la imagen original se pueden encontrar en su estructura dos pares de triángulos", "Los triángulos", "ΔNKL y ΔCKB", "en el primer par de triángulos".
Adopción Semiótica	X	Como el texto de E1 puede verse cómo el paradigma del discurso matemático es sumamente diferente al de los textos de Viète y Descartes, puesto que la Adopción Semiótica es tan sistemática que al final del texto, los elementos lingüísticos incluso desaparecen, quedando complejos clausulares simbólicos. Es decir, se adopta el simbolismo al grado de ser un recurso semiótico autónomo en el texto (ver Cláusulas 45-54). A diferencia de E1, la estudiante E2 no tiende a emplear tanto en el lenguaje natural Participantes simbólicos autónomos como, sino se identifica una tendencia a incrustar las sustituciones intersemióticas. Por ejemplo, en la cláusula 36: "le podemos restar a $\frac{by}{c}$ la longitud KL [[que tiene el valor de *b*]]"
Mezcla semiótica	X	Las imágenes muestran un claro uso de la mezcla intersemiótica, empleando elementos lingüísticos y simbólicos. 
Yuxtaposición y espacialidad	X	De igual manera que E1, la espacialidad es empleada por E2 para destacar la información relevante, dejando las ecuaciones, o Participantes de interés en líneas separadas, centradas y organizadas una debajo de la otra.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
La ecuación que Descartes desarrolló buscando la relación del punto C involucrando a, x, b, c, y tomando en consideración que:
$KL - b$ $GA - a$
$NL - c$ $CB - y$
$BA - x$


,por lo tanto, para encontrar el valor LB le podemos restar a $\frac{by}{c}$ la longitud KL que tiene el valor de b quedando de esta manera
$$LB = \frac{by}{c} - b$$
Por último, sustituye los valores de la equivalencia $LA = \frac{LBa}{y}$ Con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB y resuelve la equivalencia:
$$\frac{by}{c} - b + x = \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$$
$$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$$
Para concluir y encontrar la ecuación más reducida como la de Descartes despeja la y^2.
$$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$$
$$\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$$
$$by^2 = \cancel{c}\left(\frac{aby}{\cancel{c}} - ab + by - xy\right)$$
$$\frac{\cancel{b}y^2}{\cancel{b}} = \frac{a\cancel{b}y - a\cancel{b}c + c\cancel{b}y}{\cancel{b}}\frac{-cxy}{b}$$
$$y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$$
</td></tr>
<tr><td>Transición Semiótica</td><td>X</td><td>En términos generales se ve Transición Semiótica sistemática, puesto que todo el procedimiento detallado en el Lenguaje Natural hace Referencia a los Participantes del Diagrama, puesto que el Lenguaje Natural explica la forma en la que está siendo construida la figura geométrica del Diagrama. En este sentido, al finalizar el procedimiento por medio de la cláusula 53 “esta es la figura:” se deja ver cómo todo lo anteriormente descrito en el Lenguaje Natural es condensado en la figura geométrica del Diagrama.
Descripción del procedimiento para resolver el caso y determinar la regla -> Diagrama.</td></tr>
<tr><td>Metáfora Semiótica</td><td>X</td><td>Las metáforas semióticas en el caso de la estudiante E2 no se presentan mediante la elipsis, como en el caso de E1. Por ejemplo: “Por último, sustituye valores de equivalencia [[$LA = \frac{LBa}{y}$]] con valores hallados [sic] anteriormente para <u>LA y LB</u>”., “lo podemos ubicar en nuestro dibujo del par:”


Las metáforas semióticas son del tipo experiencial.</td></tr>
</table>

Tabla 39. Mecanismos intersemióticos en un texto de E2

7.4.3.2. Texto de E1 y E3

A manera de ilustración mostramos únicamente la estructura discursiva de los textos de E1 y E3.

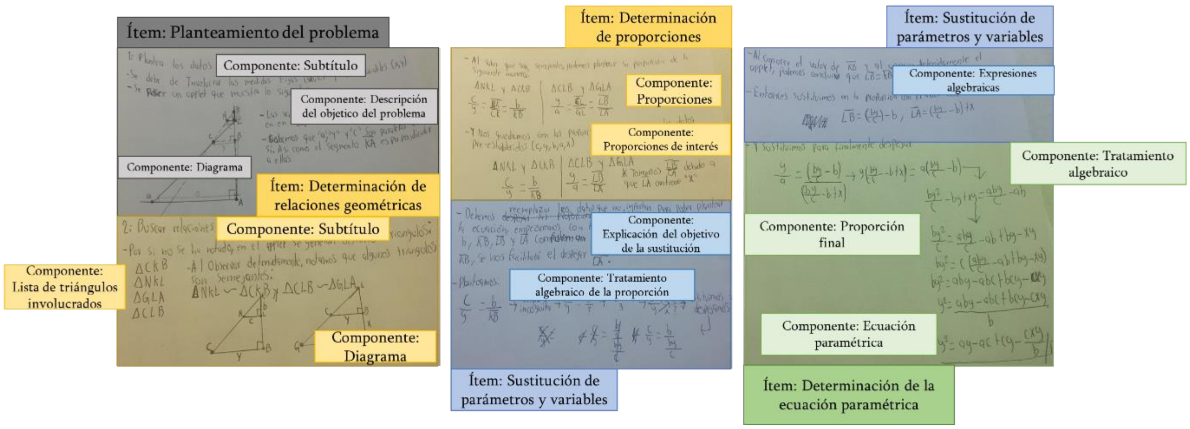


Figura 44. Estructura discursiva en un texto de E1

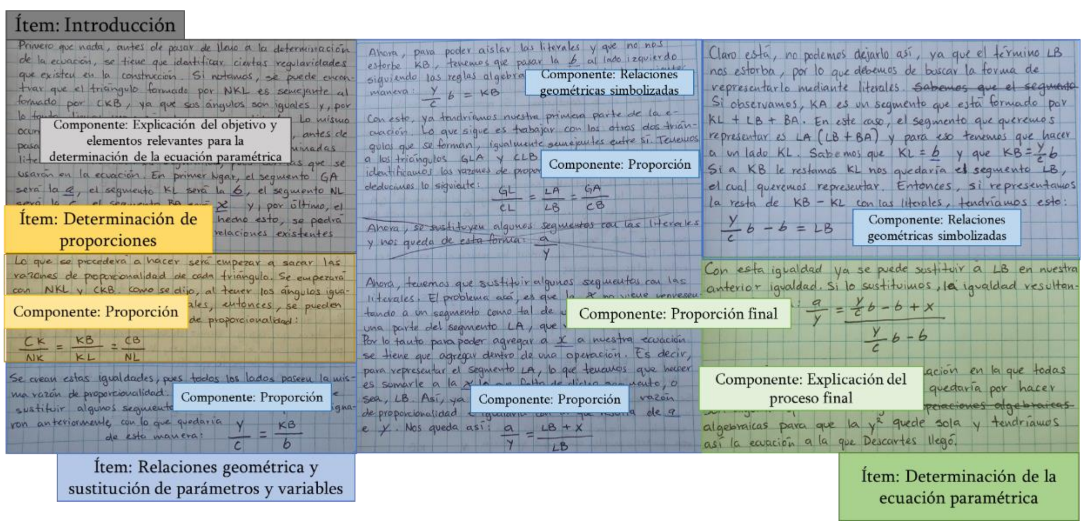


Figura 45. Estructura discursiva en un texto de E3

8

Resultados de la segunda fase

8.1. Comparación de la actividad matemática de algebrización de la geometría en Viète y Descartes y en estudiantes

A continuación, presentamos las características plasmadas en la hipótesis epistemológica resultante del EHE en la primera fase del estudio, relativa a la algebrización de la geometría en Viète y Descartes:

Determinamos que la actividad analítica algebraica se rige bajo la práctica de algebrización de la geometría. Esta práctica plantea la complejidad de articular el álgebra con la geometría, y muestra un proceso cuya base contempla:

b) *Establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole*
c) *Construcción de sistemas semióticos sistemáticos para discriminar cantidades conocidas* (parámetros) y *desconocidas* (incógnitas-variables),
d) *Identificar las condiciones geométricas impuestas por el problema*.

Estas primeras acciones la identificamos como un primer nivel pragmático: *acción* desde la TS. Desde esta teoría, como se ha mencionado, importa reconocer la funcionalidad de estas acciones en términos de un propósito determinado en la actividad matemática. De esta manera caracterizamos que la articulación de estas acciones permite y tienen la función de:

- *Construir fórmulas y expresiones generales para representar familias de soluciones o de curvas.*

Esto se asocia con un segundo nivel pragmático del quehacer; denominado *actividad*. No obstante, puesto que este nivel representa una actuación deliberada y con propósito específico por parte de Viète y Descartes, en el caso de la EBT, es natural que la y los estudiantes no cuenten con esta motivación matemática y en su lugar, lo desarrollen en interacción con el diseño y el investigador, sin ser explícito.

También se estableció que la algebrización de la geometría requiere, principalmente, de la puesta en juego de la *noción de proporción*, pues permite enlazar las relaciones geométricas de equivalencia y la igualdad algebraica: la ecuación. No obstante, en términos más amplios, reconocemos que existe una justificación epistémica centrada en el hecho de que *toda relación de equivalencia puede ser conceptualizada como ecuación algebraica*.

Estas consideraciones permitieron proponer el diseño en la IBD, en la que se reconoce que estas primeras ideas provenientes del EHE, se amplían y robustecen con la EBT en la interacción con estudiantes. El análisis reveló que estas categorías de acciones y actividades implican lo que hemos denominado *sub-acciones*, las cuales son evocadas para concretar estas primeras categorías más amplias. En términos teóricos, esta denominación debe ser revisada, puesto que al momento podrían catalogarse en el mismo nivel de acción de la progresión pragmática. Se reconoció también una necesidad importante por dominar el método analítico algebraico para orientar todo el proceso de resolución, algo que si bien se identifica en el EHE, al simplificar la actividad matemática de algebrización de la geometría al *establecimiento de relaciones de equivalencia*, *determinación de recursos semióticos sistemáticos* y *construcción de fórmulas y expresiones generales para representar familias de soluciones o de curvas*, se pierde de vista que estas acciones forman parte del método general del análisis algebraico, sin el cual la racionalidad del proceso de resolución no tiene sentido. En la siguiente tabla presentamos las sub-acciones asociadas a las categorías teóricas de acciones y actividades de la primera fase.

	Algebrización de la geometría resultante del EHE		Algebrización de la geometría resultante de la EBT
Acciones	--------------------		Dominar el método de análisis algebraico
			Identificar la importancia de las relaciones de equivalencia
	Establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole	Sub-acciones	Identificar las características de la ecuación paramétrica como lugar geométrico, es decir, las condiciones que cumple.
			Entendimiento respecto a cómo se construyó la figura que se está estudiando.
			Exploración de la ecuación y los elementos de la construcción vía el análisis dinámico del problema
			Selección y/o acomodo de la información relevante para la solución
	La construcción de sistemas semióticos sistemáticos para discriminar cantidades conocidas (parámetros) y desconocidas (incógnitas-variables).	Sub-acciones	Determinación de un recurso semiótico y determinación de los parámetros y variables
	Identificar las condiciones geométricas impuestas por el problema	Sub-acciones	Análisis de la geometría subyacente
			Uso de la geometría para establecer/identificar relaciones geométricas
			Establecimiento de relaciones geométricas de equivalencia (particularmente proporciones en este caso)
			Operatividad sobre las relaciones geométricas de equivalencia (Trabajo geométrico)
Actividad	**Construir fórmulas y expresiones generales para representar familias de soluciones o de curvas**	Sub-acciones	Sustitución semiótica (Tránsito entre la relación geométrica de equivalencia y la ecuación algebraica)
			Operatividad sobre las ecuaciones (Trabajo algebraico)
			Determinación de la ecuación paramétrica
			Reconocimiento de la ecuación paramétrica como la solución al problema de determinación en términos de cumplimiento de las condiciones que debe cumplir una ecuación paramétrica.

Tabla 40. Comparación entre la algebrización de la geometría y el proceso de construcción de la ecuación paramétrica en el EHE y lo resultante en la EBT

8.2 Socioepistemología de la algebrización de la geometría

A continuación describiremos cada una de las sub-acciones encontradas en el análisis de la EBT para dar cuenta respecto a la algebrización de la geometría en términos amplios.

	Algebrización de la geometría resultante del EHE		Algebrización de la geometría resultante de la EBT	Descripción
Acciones	--------------------	Sub-acciones	Dominar el método de análisis algebraico	Reconocimiento de que el proceso para determinar la ecuación del lugar geométrico requiere de distintas fases: suponer que el lugar geométrico existe; determinar relaciones geométricas que involucren al punto sujeto de investigación; considerar que dichas relaciones geométricas involucran cantidades determinadas, o bien que determinan la construcción, y dos variables, determinar una ecuación algebraica que se derive de dicha relación.
			Identificar la importancia de las relaciones de equivalencia	Explicitar que el objetivo primordial es que las relaciones geométricas antes mencionadas deben producir relaciones de equivalencia, puesto que al obtener relaciones de equivalencia se puede transitar a las ecuaciones algebraicas.
	Establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole		Identificar las características de la ecuación paramétrica como lugar geométrico, es decir, las condiciones que cumple.	Explicitar que las ecuaciones paramétricas deben considerar dos aspectos, con relación a una relación geométrica específica: a. *Involucrar dos variables* b. *Involucrar los parámetros que condicionen la construcción de dicha relación geométrica*
			Entendimiento respecto a cómo se construyó la figura que se está estudiando.	Ser consciente respecto a cómo se construyó el objeto geométrico que se está estudiando. Esto permite que se identifique cómo las cantidades se relacionan unas con otras, lo cual apoyará el proceso de determinación de relaciones geométricas.
			Exploración de la ecuación y los elementos de la construcción vía el análisis dinámico del problema	Ser consciente respecto a las relaciones de dependencia e independencia entre las distintas magnitudes de la construcción, lo cual permitirá la identificación de manera más eficaz de los parámetros y variables.
			Selección y/o acomodo de la información relevante para la solución	Proceso metacognitivo para organizar el pensamiento y por consiguiente iniciar la resolución.

	La construcción de sistemas semióticos sistemáticos para discriminar cantidades conocidas (parámetros) y desconocidas (incógnitas-variables).	Sub-acciones	Determinación de un recurso semiótico y determinación de los parámetros y variables	Establecimiento de un recurso semiótico propio que tenga sentido para distinguir entre parámetros y variables.
	Identificar las condiciones geométricas impuestas por el problema	Sub-acciones	Análisis de la geometría subyacente	Identificación de distintas relaciones geométricas.
			Uso de la geometría para establecer/identificar relaciones geométricas	Uso de los conocimientos geométricos para determinar relaciones que permitan encontrar relaciones de equivalencia.
			Establecimiento de relaciones geométricas de equivalencia (particularmente proporciones en este caso)	Determinar relaciones de equivalencia que involucren parámetros y variables con el fin de establecer posteriormente las ecuaciones algebraicas.
			Operatividad sobre las relaciones geométricas de equivalencia (Trabajo geométrico)	Todas aquellas transformaciones de las relaciones geométricas que permitan simplificar la relación de equivalencia.
Actividad	**Construir fórmulas y expresiones generales para representar familias de soluciones o de curvas**	Sub-acciones	Sustitución semiótica (Tránsito entre la relación geométrica de equivalencia y la ecuación algebraica)	La sustitución semiótica implica un cambio entre el simbolismo geométrico y el algebraico. Por ejemplo: $BC^2 + CA^2 = AC^2 \quad \rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ En la primera relación el simbolismo representa segmentos, mientras que en la segunda una expresión que no depende del dominio geométrico, es decir, se encuentra en un plano semiótico distinto.
			Operatividad sobre las ecuaciones (Trabajo algebraico)	Todas aquellas transformaciones de las relaciones algebraicas que permitan simplificar la ecuación.
			Determinación de la ecuación paramétrica	Establecimiento de la ecuación paramétrica que representa al lugar geométrico.
			Reconocimiento de la ecuación paramétrica como la solución al problema de determinación en términos de cumplimiento de las condiciones que debe cumplir una ecuación paramétrica.	Identificación de que la ecuación paramétrica cumple con las dos condiciones de una ecuación de lugar geométrico.

Tabla 41. Descripción completa de la algebrización de la geometría y la construcción de la ecuación paramétrica en el EHE y la EBT

8.3. Gramática funcional de estudiantes en la algebrización de la geometría

Tal como se hizo para los textos algebraicos originales, se describirán, en primera instancia, las características gramaticales de los textos de la y los estudiantes en términos de las tres Metafunciones analizadas. Posteriormente se hace una descripción general de lo que representan estas características.

En E1, considerando el significado Experiencial que fue evocado en su texto, se identifica que la configuración entre Participantes, Procesos y Circunstancias tiene las siguientes características:

- *Participantes*: Al igual que en los textos de Viète y Descartes, el tipo de actividad matemática deviene en un discurso en el que como participantes se emplean grupos nominales que corresponden a elementos geométricos, ecuaciones, al autor del texto, y no únicamente a números y ecuaciones como estaban caracterizados los discursos de los algebristas previos al análisis algebraico.

  Los participantes retóricos muestran una progresión acorde al método analítico, en el sentido de que se parte de los participantes asociados con las designaciones simbólicas, con los cuales se intenta establecer el objetivo de la resolución y dónde se encuentran en la figura. Por ejemplo "*las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)*", "*un applet [[que muestra lo siguiente]]*", "*Las variables*". Posteriormente, se observa la tendencia del trabajo con los participantes geométricos para la búsqueda de relaciones. Por ejemplo, "*relaciones*", "*distintos triángulos*", "*semejantes*". Seguidamente, se identifican los participantes relativos a las relaciones de equivalencia: "*su proporción*", "*con las proporciones [[que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)]]*". Asimismo, es notable la disminución de este tipo de participantes en el texto, en comparación con los textos antiguos.

  En el caso de los participantes simbólicos puede notarse una mayor presencia de metáforas semióticas en las que las ecuaciones son empleadas en el discurso como objetos. Por ejemplo, en la cláusula 16 y 28 respectivamente: "ΔNKL *y* ΔCKB *[[* $\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{KB}$ *]]*" "*-Planteamos: [[* $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ *]]*".

- *Procesos*: Aluden a las acciones que describen procedimientos relativos a construcciones geométricas y a las transformaciones de expresiones. Los procesos Relacionales son una parte sustancial del texto de E1, seguidos por los materiales. Sin embargo, en comparación con el texto de Descartes hay un cambio de predominancia entre los Atributivos e Identificativos, siendo estos últimos los que se presentan más. Con estos es posible centrarse en las relaciones de equivalencia para conformar propiamente ecuaciones sobre las cuales operar. Por ello, únicamente 3 de los 16 procesos son retóricos, marcando una diferencia significativa con los textos de Viète y Descartes. Incluso de los tres, solo uno aparece explícitamente en el texto, pues los dos restantes son agregados pues se recurre a la elipsis.

- *Circunstancias*: Se mantiene el uso de circunstancias como complemento de las acciones y relaciones establecidas sobre los Participantes (expresiones, segmentos, etc) en las cláusulas, se hacía uso de elementos circunstanciales que representaban condiciones específicas sobre el cómo, porqué y para qué de las transformaciones y/o construcciones de dichos Participantes.

Respecto al significado Lógico se identificó que en el texto de E1, contempla complejos clausulares extensos, como en el caso del texto de Descartes, lo cual implica una mayor complejidad en la cadena de razonamiento, además de que refleja un discurso cercano al oral, al estilo de Descartes. El texto de E1 muestra un paradigma del discurso algebraico distinto a los de Viète y Descartes, toda vez que se encuentran complejos clausulares simbólicos, en los cuales se recurren a elementos simbólicos, o la elipsis para establecer las relaciones de dependencia entre cláusulas. De hecho, se encuentran el uso de sistemas de intersemiosis inexistentes en los discursos de Viète y Descartes, pues a diferencia de los textos antiguos, el texto de E1 muestra claramente cómo el simbolismo no solo codifica la experiencia, sino también la organización lógica del texto. En este sentido, pueden identificarse claramente complejos clausulares simbólicos, en los cuales las relaciones de TAXIS y LOG.-SEM. se codifican mediante elementos como flechas, líneas, espacialidad, elipsis.

El significado Textual de E1 refleja el mismo patrón encontrado en Viète y Descartes, en el que el mensaje difiere por partes en su discurso como consecuencia de su estructura discursiva, sin embargo, se identifican predominantemente Procesos como los Temas Experienciales, seguidos de los Participantes. Esto es consistente con la intención del escrito como consecuencia de la solicitud en la EBT, por lo que el mensaje tiende a resaltar la explicación del proceso de determinación de la ecuación paramétrica. Cabe destacar que en los Temas Experienciales que involucran Participantes predominan los simbólicos.

Al igual que en el caso de la metafunción lógica, en esta metafunción se identifican otros sistemas de intersemiosis ausentes en los textos de Viète y Descartes como la MEZCLA INTERSEMIÓTICA y los VÍNCULOS DISCURSIVOS.

En el caso de la estudiante E2, considerando el significado Experiencial evocado en su texto, se identifica que la configuración entre Participantes, Procesos y Circunstancias tiene las siguientes características:

- *Participantes*: Al igual que E1, la estudiante E2 emplea Participantes retóricos que muestran una progresión acorde al método analítico, en el sentido de que se parte de los participantes asociados con las designaciones simbólicas, con los cuales se intenta establecer el objetivo de la resolución y dónde se encuentran en la figura. Por ejemplo "*la relación del punto C [[involucrando a, x, b, c, | | y tomando en consideración que: [[KL – b]] [[NL – c]] [[BA – x]] [[GA – a]] [[CB – y]]*". Posteriormente, se observa la tendencia del trabajo con los participantes geométricos para la búsqueda de relaciones. Por ejemplo, "*los mismos ángulos*", "*dos pares de triángulos semejantes*", "*Los triángulos*". Posteriormente, se identifican los participantes relativos a las relaciones de equivalencia: "*los lados proporcionales (la misma)*", "l*as proporciones [[que cumplen cada par]]*".

  A diferencia de E1, la estudiante mantiene un equilibrio entre los Participantes simbólicos y retóricos. En este sentido, puede interpretarse que el discurso muestra un énfasis no solo en las expresiones, sino los elementos geométricos y relaciones de equivalencia. El hecho de que haya más presencia de los procesos Relacionales Atributivos implica que la estudiante E2, respecto del estudiante E1, muestra una consistencia en establecer las relaciones de equivalencia, previamente al tratamiento algebraico.

  En cuanto a los Participantes Simbólicos, se muestra al igual que E1 el uso del recurso de la Metáfora Semiótica, dejando a las igualdades algebraicas funcionar como parte del grupo nominal, o bien como el grupo nominal en sí mismo. Por ejemplo en la cláusula 13, 14 y 43 respectivamente: "ΔNKL *y* $\Delta CKB =$ *[[* $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ *]]*", "ΔCLB *y* $\Delta GLA =$*[[* $\frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$ *]]*", "*Por último, sustituye los valores de la equivalencia [[* $LA = \frac{LBa}{y}$ *]] con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB*".

- *Procesos*: Con respecto a los procesos se identifica el mismo patrón que el estudiante E1, el cual nuevamente muestra predominancia de los procesos relacionales. En este caso los identificativos son todos simbólicos. A diferencia del texto del estudiante E1, los procesos relacionales atributivos en este texto doblan su frecuencia. Coinciden en su función de describir procedimientos relativos a los elementos geométricos sobre los cuales se establecen las relaciones y a las transformaciones de expresiones.

  A diferencia de los textos de Viète y Descartes, en el texto de E2, al igual que el de E1, puede identificarse cómo el proceso relacional identificativo "=" es empleado sistemáticamente. Esto tiene una implicación en el texto importante en el sentido de que permiten la aparición de cláusulas completamente simbólicas: Por ejemplo, las cláusulas 38 y 42: "$\overline{LB} = \frac{by}{c} - b,$ ", "$\overline{LA} = \frac{by}{c} - b + x$".

- *Circunstancias*: Como complemento de las acciones y relaciones establecidas sobre los Participantes (expresiones, segmentos, partes del instrumento, etc) en las cláusulas, se hacía uso de elementos circunstanciales que representaban condiciones específicas sobre el cómo, porqué y para qué de las transformaciones y/o construcciones de dichos Participantes.

Respecto al significado Lógico se identificó que en el texto de E2, se contemplan complejos clausulares extensos, como en el caso del texto E1, lo cual implica una mayor complejidad en la cadena de razonamiento, aunque su texto presenta más interdependencia entre las cláusulas por predominar las Relaciones Hipotácticas. Esto refleja aún más un discurso cercano al oral. Coincide con el texto de E1 en términos del paradigma discursivo algebraico, toda vez que se encuentran complejos clausulares simbólicos, en los cuales se recurren a elementos simbólicos, o la elipsis para establecer las relaciones de dependencia entre cláusulas. Se encuentra también el uso de sistemas de intersemiosis inexistentes en los discursos de Viète y Descartes, pues el texto de E2 muestra, al igual que E1, cómo el simbolismo no solo codifica la experiencia, sino también la organización lógica del texto. En este sentido, pueden identificarse claramente complejos clausulares simbólicos, en los cuales las relaciones de TAXIS y LOG.-SEM. se codifican mediante elementos como flechas, líneas, espacialidad, elipsis.

El significado Textual de E2, refleja el mismo patrón encontrado en Viète y Descartes, en el que el mensaje difiere por partes en su discurso, como consecuencia de su estructura discursiva. Se identifican predominantemente Participantes como los Temas Experienciales, seguidos de los Procesos, el orden inverso respecto a E1. Por esto, el mensaje tiende a resaltar la atención en aquello que está siendo objeto de estudio. Es decir, las relaciones y las expresiones algebraicas.

Al igual que en el caso de la metafunción lógica, en esta metafunción se identifican otros sistemas de intersemiosis ausentes en los textos de Viète y Descartes como la MEZCLA INTERSEMIÓTICA y los VÍNCULOS DISCURSIVOS.

Para el texto de E3 se encontró que la configuración entre Participantes, Procesos y Circunstancias tiene las siguientes características:

- *Participantes*: Al igual que E1 y E2, el estudiante E3 emplea Participantes retóricos que muestran una progresión acorde al método analítico, en el sentido de que se parte de los participantes asociados con las designaciones simbólicas, con los cuales se intenta establecer el objetivo de la resolución y dónde se encuentran en la figura. Por ejemplo "*ciertas regularidades [[que existen en la construcción.]]*", "*se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos*,". Posteriormente, se observa la tendencia del trabajo con los participantes geométricos para la búsqueda de relaciones. Por ejemplo, "*se empezará con NKL y CKB.*", "*al tener los ángulos iguales,* ". Posteriormente, se identifican los participantes relativos a las relaciones de equivalencia: "*entonces, se pueden deducir las siguientes razones de proporcionalidad:*".

A diferencia de E2 y E1, el estudiante E3, presenta en su texto mayor cantidad de Participantes retóricos. Los Participantes simbólicos refieren principalmente a segmentos y expresiones algebraicas.

- *Procesos*: Con respecto a los procesos se identifica el mismo patrón que el estudiante E1, el cual nuevamente muestra predominancia de los procesos relacionales. El hecho de que haya más presencia de los procesos relacionales atributivos implica que la estudiante E2, respecto del estudiante E1 muestra una consistencia en establecer las relaciones de equivalencia, previamente al tratamiento algebraico.
  A diferencia de los textos de Viète y Descartes, en el texto de E3, al igual que el de E1 y E2 puede identificarse cómo el proceso relacional identificativo "=" es empleado sistemáticamente. Esto tiene una implicación en el texto importante en el sentido de que permiten la aparición de cláusulas completamente simbólicas: Por ejemplo, las cláusulas 52 y 67 respectivamente: "$\frac{a}{y} = \frac{LB+x}{LB}$", "$\frac{y}{c}b - b = LB,$".
- *Circunstancias*: Como complemento de las acciones y relaciones establecidas sobre los Participantes (expresiones, segmentos, partes del instrumento, etc) en las cláusulas, se hacía uso de elementos circunstanciales que representaban condiciones específicas sobre el cómo, porqué y para qué de las transformaciones y/o construcciones de dichos Participantes.

Respecto al significado Lógico del texto de E3, la estructura contempla complejos clausulares extensos, como en el caso del texto E2, donde la interdependencia entre las cláusulas es marcada por predominar las Relaciones Hipotácticas. Esto refleja un discurso cercano al oral. Uno de los rasgos más notables del texto de E3 es que no recurre a complejos clausulares simbólicos, a diferencia de los textos de E1 y E2.

El significado Textual de E2, refleja el mismo patrón encontrado en Viète y Descartes, en el que el mensaje difiere por partes en su discurso, como consecuencia de su estructura discursiva. Se identifican predominantemente Participantes como los Temas Experienciales, tal como el de E2. Por esto, el mensaje tiende a resaltar la atención en aquello que está siendo objeto de estudio. Es decir, las relaciones y las expresiones algebraicas.

El simbolismo se encuentra incrustado en su mayoría en cláusulas de lenguaje natural. No se identifica una predominancia de Temas Experienciales simbólicos como en los textos de E1 y E2.

8.3.1 Descripción general de la Gramática Funcional en los textos de E1, E2 y E3

En términos experienciales, dentro de los aspectos más significativos que se identificaron con los textos de la y los estudiantes, en comparación con los de Viète y Descartes es el uso sistemático del simbolismo en los textos de E1 y E2. En el caso del estudiante E3, es interesante notar cómo el simbolismo no es un recurso del todo autónomo como en el caso de los textos de Viète y Descartes, en comparación como en los textos de E1 y E2, sin embargo, es importante destacar que se recurre a la Metáfora Semiótica de manera constante, a diferencia de estos dos matemáticos. El hecho de que el estudiante E3 se haya detenido en el establecimiento de la proporción final en su proceso de construcción de la ecuación paramétrica, podría implicar que en su explicación no aparecieran complejos clausulares simbólicos.

Se reafirma así que la idea de que el simbolismo es un constituyente del lenguaje algebraico. En este sentido, si bien en los textos de E1, E2 y E3, el uso del simbolismo es diferente en términos de su grado de objetivación y de autonomía respecto del recurso del lenguaje natural, al igual que para Viète y Descartes, el simbolismo es solo una parte del lenguaje por lo que su rol en la estructura discursiva y conceptual se articula con los otros recursos semióticos. De esta manera, en primera instancia, el simbolismo es *adoptado* como recurso semiótico dentro del Lenguaje Natural *cláusulas relacionales.* A su vez, posteriormente el simbolismo alcanza una autonomía no vista en los textos de Viète y Descartes con la cual las operaciones sobre los Participantes simbólicos son descritas a través de Procesos materiales retóricos o simbólicos, que son acompañados por elementos circunstanciales que definen y limitan la acción sobre estos.

En el caso del significado lógico la estructuración del razonamiento mostrado por la y los estudiantes, tiende a promover significados dependientes y significados que destacan, complementan o condicionan los significados principales, conformando largas cadenas de razonamiento que implican que en la lectura sean complejas de "desenvolver", al igual que los textos de Viète y Descartes, pero más similar a la estructura de este último. No obstante, se identifican también notables diferencias en tanto que por el uso sistemático del simbolismo se presentan complejos clausulares totalmente simbólicos. Este hecho, implica que se deba recurrir a sistemas diversos de intersemiosis para articular los recursos semióticos empleados.

En este sentido, las relaciones de TAXIS y LOG.-SEM. se codifican también mediante elementos como viñetas, flechas, líneas, espacialidad y elipsis. Esto general cadenas de cláusulas vinculadas. Por ejemplo:

Por último, sustituye los valores de la equivalencia $LA = \frac{LBa}{y}$ Con anteriormente para LA y LB y resuelve la equivalencia: $\frac{by}{c} - b + x = \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$ $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ Para concluir y encontrar la ecuación más reducida como la de Desc $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ $\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$ $by^2 = \cancel{c}\left(\frac{aby}{\cancel{c}} - ab + by - xy\right)$ $\frac{\cancel{b}y^2}{\cancel{b}} = \frac{a\cancel{b}y - a\cancel{b}c + c\cancel{b}y}{\cancel{b}} \frac{-cxy}{b}$ $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$	finalmente despejar $\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)} \rightarrow y\left(\frac{by}{c} - b + x\right) = a\left(\frac{by}{c} - b\right)$ $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ $\downarrow$ $\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$ $by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$ $by^2 = aby - abc + bcy - cxy$ $y^2 = \frac{aby - abc + bcy - cxy}{b}$ $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$	Considerando las condiciones que deben cumplir los triángulos semejantes deberás escribir las proporciones que cumplen cada par. ΔNKL y $\Delta CKB = \frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ ΔCLB y $\Delta GLA = \frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$ Considera que todos los lados deben tener la misma proporción. Por eso tienes que igualar las cantidades

Figura 46. Relaciones de intersemiosis en E2 relativas a los sistemas de Taxis y Relaciones Lógico-Semánticas

Para los significados textuales se mantiene el hecho de que la forma en la que puede ser interpretado el mensaje algebraico en general es respecto a una combinación entre los que están siendo objeto de modificación y el procedimiento que lo modifica.

Por otro lado, al igual que las metafunciones anteriores, el uso sistemático del simbolismo implica el uso de otros sistemas de intersemiosis no desarrollados en la época del discurso algebraico de Viète y Descartes, como la Mezcla Intersemiótica:

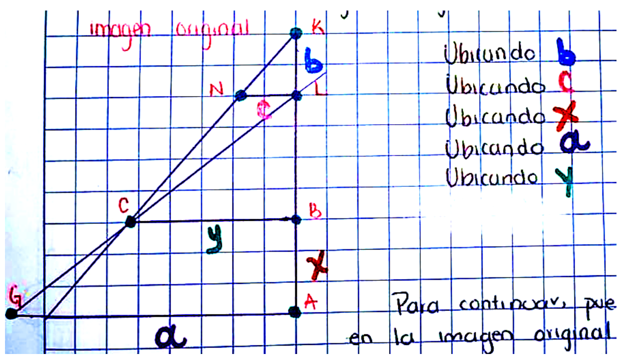


Figura 47. Ejemplo de Mezcla Intersemiótica en el texto de E2

En el caso del estudiante E3, se le preguntó posterior a la EBT por qué no había empleado imágenes en su texto y respondió que en su descripción imaginaba que la imagen estaría al alcance de quien leyera su texto. En este sentido, se puede considerar que la imagen también es un recurso contemplado por E3, sin embargo, en su texto no aparece y no hay evidencia si este hubiera empleado la Mezcla Intersemiótica.

8.4. Mecanismos y sistemas de intersemiosis en los textos de estudiantes

8.4.1. Síntesis del análisis multimodal de los sistemas intersemióticos

La siguiente tabla resume las características de los sistemas intersemióticos de los tres textos analizados.

E1			E2			E3		
SIGNIFICADO TEXTUAL								
Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X
	MEZCLA INTERSEMIÓTICA	X		MEZCLA INTERSEMIÓTICA	X		MEZCLA INTERSEMIÓTICA	
	ENLACES DISCURSIVOS	X		ENLACES DISCURSIVOS			ENLACES DISCURSIVOS	
	SUBTÍTULOS			SUBTÍTULOS			SUBTÍTULOS	
LEXICO-GRAMÁTICA	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**LEXICO-GRAMÁTICA**	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**LEXICO-GRAMÁTICA**	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA	X
	ADOPCIÓN INTERSEMIÓTICA	X		ADOPCIÓN INTERSEMIÓTICA	X		ADOPCIÓN INTEREMIÓTICA	X
	DEIXIS	X		DEIXIS	X		DEIXIS	X
	ETIQUETAS	X		ETIQUETAS	X		ETIQUETAS	-
SIGNIFICADO EXPERIENCIAL								
Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X
	SUBTÍTULOS			SUBTÍTULOS			SUBTÍTULOS	
LEXICO-GRAMÁTICA	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X	**LEXICO-GRAMÁTICA**	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X	**LEXICO-GRAMÁTICA**	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X
	LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN	X		LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN	X		LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN	
	METÁFORA SEMIÓTICA	X		METÁFORA SEMIÓTICA	X		METÁFORA SEMIÓTICA	X
	ETIQUETAS	X		ETIQUETAS	X		ETIQUETAS	X

SIGNIFICADO LÓGICO								
Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia	Estrato	Sistema	Presencia
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN	X	**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN	X	**SEMÁNTICA DEL DISCURSO**	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN	
LEXICO-GRAMÁTICA	LÓGICO-SEMÁNTICA	X	**LEXICO-GRAMÁTICA**	LÓGICO-SEMÁNTICA	X	**LEXICO-GRAMÁTICA**	LÓGICO-SEMÁNTICA	
	INTERDEPENDENCIA			INTERDEPENDENCIA			INTERDEPENDENCIA	
	INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD	X		INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD	X		INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD	X
	METÁFORA SEMIÓTICA			METÁFORA SEMIÓTICA			METÁFORA SEMIÓTICA	

Tabla 42. Síntesis de los sistemas de intersemiosis en los textos de la y los estudiantes

En términos de los sistemas intersemióticos analizados puede verse que los textos de E1 y E2 son similares en el uso de estos, únicamente en el caso de lo Textual se diferencian por el uso de Enlaces Discursivos. El texto de E3 se identifica limitado en el uso de estos sistemas por el hecho de no recurrir a las imágenes y a complejos clausulares simbólicos.

Claramente, en estos textos puede identificarse un paradigma distinto al discurso algebraico de Viète y Descartes en tanto el uso de los sistemas intersemióticos coincide con lo reportado por O'Halloran (2005) respecto al discurso matemático actual.

Puede verse cómo los significados Textuales y Lógicos a nivel de la intersemiosis son más robustos en comparación que los de Viète y Descartes.

8.4.2. Síntesis del análisis multimodal de los mecanismos de intersemiosis

En la siguiente tabla se presenta la síntesis de los mecanismos de intersemiosis detectados en los textos analizados.

E1		E2		E3	
Mecanismo	Presencia	Mecanismo	Presencia	Mecanismo	Presencia
Cohesión Semiótica	X	Cohesión Semiótica	X	Cohesión Semiótica	X
Adopción Semiótica	X	Adopción Semiótica	X	Adopción Semiótica	X
Mezcla semiótica	X	Mezcla semiótica	X	Mezcla semiótica	
Yuxtaposición y espacialidad	X	Yuxtaposición y espacialidad	X	Yuxtaposición y espacialidad	X
Transición Semiótica	X	Transición Semiótica	X	Transición Semiótica	X
Metáfora Semiótica	X	Metáfora Semiótica	X	Metáfora Semiótica	X

Tabla 43. Síntesis del análisis multimodal de los mecanismos de intersemiosis en la y los estudiantes

Esta tabla refleja a nivel de discurso las características antes descritas en el análisis de los sistemas intersemióticos. En este sentido, puede verse que los tres textos poseen las características de la gramática del lenguaje actual, permitiendo enriquecer no solo la gramática del recurso semiótico del lenguaje natural, sino también la del simbólico y la visual.

9

Resultados de la investigación

9.1. Las preguntas de investigación

Las preguntas de la investigación que se abordaron en esta investigación fueron las siguientes:

- P1. *¿Cuáles fueron las implicaciones de la reformulación del método de análisis en la creación del análisis algebraico de Viète y Descartes, y cómo influyó esta actividad matemática en la emergencia de la ecuación paramétrica?*
- P2. *¿Qué particularidades posee la actividad matemática del análisis algebraico y qué particularidades son manifestadas en la actividad matemática de estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas relativos al análisis algebraico?*
- P4. *¿Cuál es la gramática funcional del lenguaje algebraico simbólico de Viète y Descartes y de estudiantes en el análisis algebraico?*
- P5. *¿Qué características presentan los textos algebraicos de algebristas y estudiantes en términos de intersemiosis?*

Como se ha especificado previamente, en la primera fase del estudio —la Histórico-epistemológica— se respondió la pregunta 1 y parcialmente se respondieron la 2, 3 y 4 en términos de los algebristas antiguos y sus textos. En la segunda fase terminamos de responder las preguntas con los datos obtenidos en la fase experimental con estudiantes. A continuación, hacemos una síntesis de los resultados obtenidos como respuesta a las preguntas.

9.1.1. P1. ¿Cuáles fueron las implicaciones de la reformulación del método de análisis en la creación del análisis algebraico de Viète y Descartes, y cómo influyó esta actividad matemática en la emergencia de la ecuación paramétrica?

Se obtuvo que la reformulación del método de análisis geométrico en la creación de las álgebras de Viète y Descartes implicó la creación del análisis algebraico, un método analítico nuevo que fue llamado por Viète y Descartes *arte analítco* y *Mathesis Universalis*, respectivamente.

Tanto Descartes como Viète abordaron por separado en el tiempo, un mismo proyecto que, en términos contextuales más amplios, obedeció a una realidad social resultante del Contexto Cultural del Renacimiento, en el que las artes y ciencias se preocuparon por la formalidad de los métodos para su quehacer, basándose en la reconstrucción de los conocimientos griegos.

Por otro lado, al interior de ese contexto cultural, las características de la época para los científicos de élite como Viète y Descartes implicó que fueran hombres versados en gran cantidad de disciplinas. Por lo tanto, sus conocimientos adquirieron una función pragmática en su Contexto Situacional. No obstante, también debe considerarse que ambos, de forma individual, perseguían metas científicas diferentes. Por ejemplo, para Viète, su *arte analítico* debía estar al servicio de la geometría puesto que, de acuerdo con lo revisado, perfeccionar y sistematizar los métodos y cálculos de problemas geométricos permitiría a su vez contribuir al desarrollo de la astronomía, interés científico de gran importancia para Viète, tal y como los historiadores han manifestado (Klein, 1968; Oaks, 2018).

Descartes, por otro lado, interesado en especial por una búsqueda personal de nuevos fundamentos para la filosofía de la ciencia, basándose en los conocimientos algebraicos y geométricos, lo llevaron a profundizar aún más que Viète en los posibles defectos que podían presentar ambas disciplinas matemáticas, permitiéndole dar el paso definitivo para superar la dimensionalidad geométrica que limitaba al álgebra.

De acuerdo con Cifoletti (2003, 2006) ambos se vieron envueltos en una época en la que los comentarios de Proclo permearon el quehacer de las ciencias matemáticas, en los que se advertía de una ciencia universal matemática que contenía tanto a la geometría y a la aritmética y que ella era una ciencia completa y libre de defectos, a la cual la teoría de las proporciones pertenecía.

De ahí que, en sus búsquedas, ambos coincidieron en retomar los trabajos de Theon, Pappus y Diofanto como la base de sus respectivos métodos.

> Aunque los antiguos proponían sólo [dos tipos de] análisis, la *Zetética* y la *Porística*, a las que se aplica la definición de Theon, he añadido una tercera, que puede llamarse *Rética* o *Exegética* [...] Diofanto usó la zetética más sutilmente en aquellos libros que han sido recogidos en la Aritmética. Allí exhibe con seguridad este método en números, pero no en símbolos, para los que sin embargo se utiliza (Viète, 1983, pp. 1-9).
>
> Y, ciertamente, me *parece que algunos vestigios de esta verdadera Mathesis aparecen todavía en Pappus y Diophanto*, los cuales, aunque no en los primeros tiempos, vivieron, sin embargo, muchos siglos antes de ahora (Descartes, 1996, p. 81).

Con base en esta acotación de su actividad, aunque buscando finalidades distintas, Viète y Descartes lograron constituir una forma de hacer matemáticas de manera particular donde el álgebra ocuparía un rol fundamental y específico como parte del método. Así el Contexto Matemático de Significación del álgebra de Viète y Descartes iba tomando forma. Y como consecuencia de este proyecto, se dio el paso definitivo hacia la reconceptualización del objeto mismo al que podría ser aplicable el álgebra de ambos (Klein, 1968). De manera que se distinguen cuatro aspectos que caracterizan el rol que juega el álgebra en el análisis algebraico:

1. *El álgebra se convierte en una herramienta constituyente de un método para la resolución de problemas y la demostración de Teoremas matemáticos.*

En el arte analítico de Viète se distinguen dos tipos de ecuaciones, una que es la más importante en el método, la cual contiene las relaciones generalizadas del problema o Proposición investigada. En ella se simbolizan cantidades conocidas y desconocidas. El otro tipo de ecuaciones son las típicamente empleadas en el discurso algebraico previo a él, en las que incluso Viète emplea notación cósica (Figura 71).

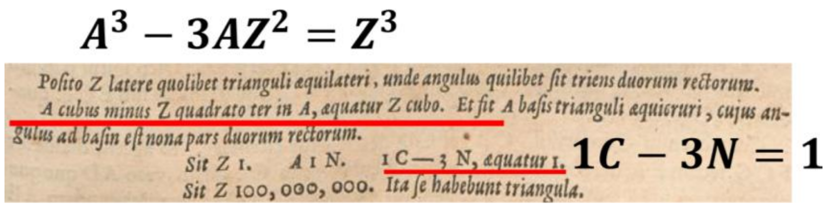


Figura 48. Los dos tipos de ecuaciones para Viète: la ecuación paramétrica y la ecuación cósica (Viète, 1646, p. 249)

Viète distinguió tres fases en el arte analítico:

- La *Zetética* es la parte del análisis que inicia con la suposición del problema resuelto y todos aquellos recursos que permitan encontrar una ecuación o una proporción general que involucre las relaciones que se desean analizar.
- La *Porística* consiste en determinar una regla retórica que describe la solución general del problema basándose en la ecuación resultante de la *Zetética.*
- Y finalmente, la *Exegética/Rética* es la parte del método que corresponde con la síntesis del método geométrico, puesto que en esta parte se designan valores específicos a las cantidades generales (especies) para obtener, ya sea las cantidades buscadas, o bien las construcciones geométricas según sea el caso.

El primer tipo de ecuaciones ocupan la parte de la Zetética, pues representan de manera general las relaciones de interés que se investigaban, mientras que el último tipo de ecuaciones se encuentran en la parte sintética del método pues son los casos particulares como ejemplos que muestran la validez del resultado del método.

El análisis lingüístico también apunta a este hecho, toda vez que los Participantes en las primeras partes de sus discursos corresponden a elementos geométricos, mientras que los algebraicos no aparecen desde el principio.

2. *El álgebra debía aplicarse a problemas geométricos y aritméticos a diferencia de la tradición algebraica previa que trataba problemas artiméticos, o bien, con la resolución de ecuaciones. Por lo tanto, el álgebra debía adquirir un carácter más general.*

Respecto a este punto, Viète y Descartes no fueron los únicos que en sus tratados algebraicos resolvieron problemas aritméticos y geométricos, puesto que también Peletier (Figura 72) resolvía problemas geométricos vía el álgebra. Sin embargo, por la particular del proyecto de estos dos algebristas se identifica la diferencia de que el álgebra no es empleada como una técnica de resolución —como el caso de Peletier— , sino como parte constituyente de un método más general de resolución de problemas. Basta con considerar que en Descartes su único trabajo matemático, en el que se identifica esta nueva funcionalidad del álgebra, era un tratado de geometría. Sin embargo, dentro de este tratado también dedica parte a la explicación y enunciación de propiedades algebraicas de ecuaciones. En el caso de Viète en su *Opera Mathematica* se pude identificar la carga geométrica de su proyecto, junto con tratados aritméticos y algebraicos.

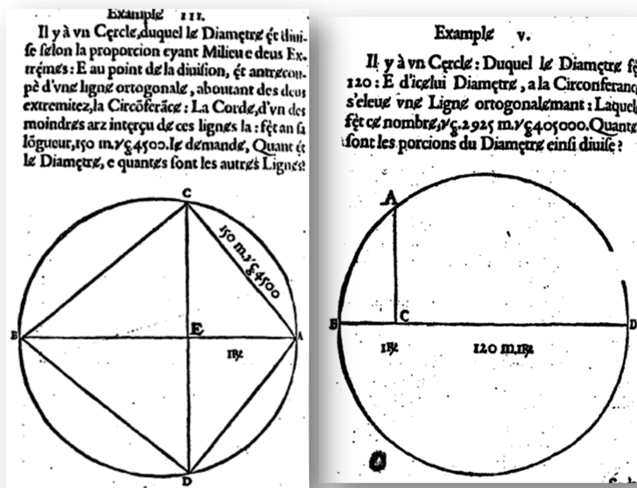


Figura 49. Problemas geométricos en L'algèbre de Peletier (1554, p. 208 y 216)

3. *Como consecuencia de la amplitud del campo de aplicación para el álgebra, la noción de número debía ser resignificada.*

Quizás esta es la parte más significativa que se tuvo conceptualmente respecto a los proyectos de Viète y Descartes, puesto que, a nivel visual, efectivamente se ve un cambio de paradigma respecto al sistema de signos empleados por ambos en sus producciones, es decir, en el simbolismo que es diferente a la tradición previa. Sin embargo, a nivel conceptual la resignificación de la noción de número permitió desarrollar el potencial del álgebra hacia los alcances actuales. El razonamiento simbólico de Viète y Descartes, como menciona Klein (1968), reconceptualizó no solo la forma en la que se representaba, sino también sobre lo que se operaba, es decir, el objeto al que se aplicaba el álgebra.

En este sentido, Klein (1968) menciona que el símbolo algebraico en ellos representaba una magnitud continua y discreta a la vez. No obstante, sin contradecir esta interpretación, Oaks

(2018) aclara que la noción de número en Viète, en general, representa una magnitud geométrica, sin hacer distinción entre lo discreto y continuo, toda vez que la forma en la que esta noción era entendida en la época de Viète ya poseía esta ambivalencia. Para Descartes, por ejemplo, se tiene el hecho de que para él las cantidades eran líneas, por lo tanto, magnitudes geométricas.

Así, como argumenta Oaks (2018), podría decirse que las álgebras de Viète y Descartes estuvieron diseñadas para la geometría. De modo que el objeto de estudio del análisis algebraico era el número como magnitud geométrica, atribuyéndole consecuentemente la naturaleza continua y discreta.

Este argumento toma fuerza cuando se considera también la relevancia que atribuía Descartes a sus compases, los cuales tenían la función de construir progresiones geométricas con las que podía construir geométricamente la solución de ecuaciones de grado mayores que dos.

4. *Se instaura una justificación epistémica con la que cualquier equivalencia puede conceptualizarse como una ecuación y viceversa, fundamentalmente las proporciones.*

Resulta claro que tanto en la obra estudiada de Descartes como en la de Viète la noción de proporción fue fundamental para la incorporación del álgebra en la geometría, puesto que permitió el puente entre las relaciones geométricas de equivalencia y la igualdad algebraica. Incluso como ya se hizo explícito en la descripción completa del Contexto de Significación, Viète establece que toda proporción es una ecuación y viceversa. Incluso se ha mostrado también cómo él relacionaba cada tipo de ecuación con proporciones específicas.

En este sentido, la proporción juega un rol sustancial, pues la proporción podría ser considerada una de las herramientas por excelencia de la geometría, en tanto surge como un instrumento esencial que permite aritmetizar las relaciones geométricas inconmensurables, tal y como se argumenta ampliamente en Reyes-Gasperini (2016), y que por lo tanto, debía ser ésta también un objeto susceptible de ser resignificado en términos algebraicos para cumplir con la función que el análisis algebraico requería, es decir, la del establecimiento de ecuaciones que involucraran relaciones geométricas.

No obstante, si bien gran parte de las relaciones que convertían en ecuaciones eran proporciones —lo cual es más evidente en los problemas de Descartes— en términos generales, podría decirse que una de las *justificaciones epistémicas* más relevantes en la racionalidad del álgebra de Viète y Descartes es que *toda relación de equivalencia puede ser susceptible de ser conceptualizada como una ecuación*.

La descripción previa aborda la característica que tenían el análisis algebraico, sin embargo, la especificidad que le da la actividad geométrica al álgebra no es fácil de considerar, por lo que esto constituye una hipótesis epistemológica que se justifica en dos hechos. Por un lado, se tiene que algunos historiadores como Stedall (2008) hacen referencia al carácter general que tiene la actividad geométrica por lo que, de acuerdo con ella, es natural que el análisis algebraico debía incorporar cantidades generales y no específicas, por lo tanto, debía adquirir un carácter paramétrico.

Si se considera que los problemas geométricos en la tradición algebraica previa a Viète y Descartes no eran complejos, en tanto, las relaciones investigadas eran pocas y solo servían como un contexto diferente para mostrar la utilidad de la técnica algebraica, esta hipótesis se torna relevante. Por lo tanto, una diferencia sustancial entre Viète y Descartes, es el hecho de que ellos trabajaron con problemas de geometría en los que había una gran cantidad de relaciones intervinientes y que no eran perceptibles en las imágenes. Entonces, esto apunta hacia una diferencia fundamental en el tipo de problemas que abordaron, en comparación con sus predecesores.

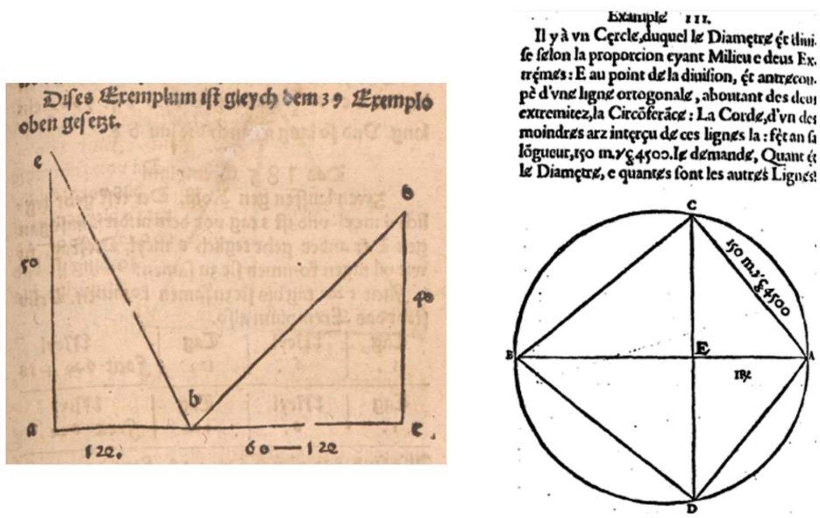


Figura 50. Ejemplos de problemas geométricos previos a Viète y Descartes en (Stifel, 1553, fol. 305; Peletier, 1554, p. 208 respectivamente)

Nota: En el primer caso se intenta determinar el valor de la incógnita (segmento ab) que cumpla que las alturas de los respectivos triángulos sean 50 y 40 unidades, y que la longitud de la suma de las bases de ambos sea de 60 unidades. En el segundo caso se desea obtener la medida del diámetro (AB) de una circunferencia que al ser cortada por una cuerda ortogonal (CD) a este, forma otra cuerda (CA) de longitud $150 - \sqrt{45000}$ (en notación anacrónica).

Por otro lado, como una forma de robustecer esta hipótesis está el hecho de que, en el caso de Descartes, se reconoce que la etapa de inmadurez de sus ideas (Bos, 2001; Sasaki, 2003; Rabouin, 2010), se vio superada cuando se dedicó a aplicar su método en la resolución del Teorema de Pappus. Problema que ni los propios Apollonio o Euclides habían podido resolver en su totalidad de acuerdo con este matemático.

Hasta antes de esta resolución Descartes manifestaba no solo el uso de la notación cósica correspondiente a la tradición algebraica previa, sino también, se identifica el problema de la dimensionalidad, puesto que en las *Regulae ad directionem ingenii* (1628) él propone tres maneras distintas de representar la unidad, aludiendo a lo figural como era usual antes de él—como un punto, como una línea y como un rectángulo (ver Figura 26).

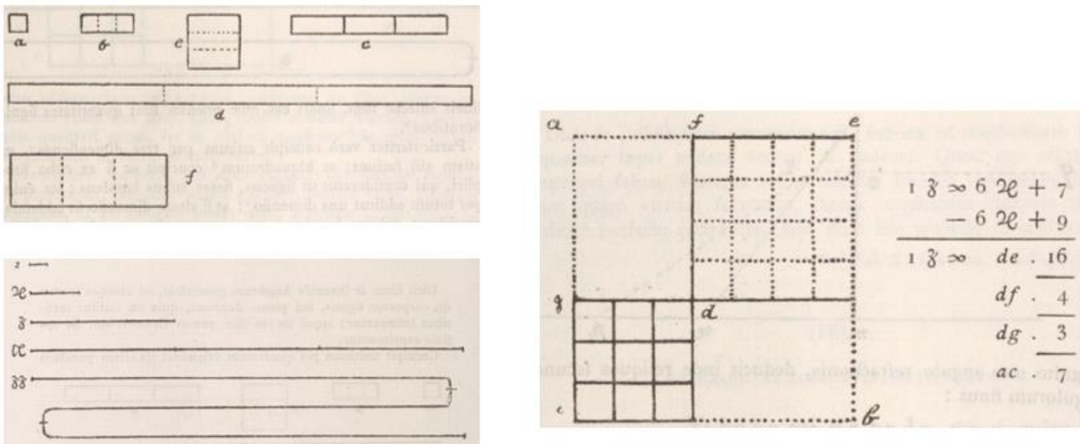


Figura 51. Representación de la unidad (izquierda) y notación cósica (derecha) en Descartes previo a la *La Géométrie* (Adam y Tannery, 1908, pp. 333-335)

Descartes logró resolver este obstáculo con la invención ingeniosa de la unidad entendida como una línea ya no atada a su condición de especie o tipo de número, y más aún de la representación figural que imperó por mucho tiempo. A pesar de no hacer alusión a este hecho, como ya se ha mencionado, Viète lo reflejaba en su programa a través del *genus* que caracterizaba sus especies, lo cual lo obligó a definir la ley de homogeneidad.

Por lo tanto, a partir de la resolución del problema de Pappus y los de *Locus* Descartes identificó que las representaciones figurales no resultaban ser pertinentes para definir una operatividad de segmentos, pues en este tipo de problemas lo esencial es la relación de segmentos, es decir, líneas cuya dimensión es uno. De esta manera, el trabajar con interpretaciones de la unidad con dimensiones mayores que uno dificultaría el tratamiento de este tipo de relaciones entre segmentos. La resolución de problemas geométricos complejos es lo que permitió la resignificación de la noción de número en tanto magnitud continua y discreta. La complejidad de estos problemas recae en el hecho de que intervienen gran cantidad de relaciones.

Esto último refleja claramente que tanto Viète como Descartes se encontraban resolviendo problemas geométricos por medio de la herramienta algebraica y no reinterpretando simbólicamente los problemas aritméticos, como en el caso de sus antecesores.

Con base en lo descrito anteriormente, el *Contexto de Significación* del análisis algebraico creado por Viète y Descartes puede sintetizarse con el siguiente esquema:

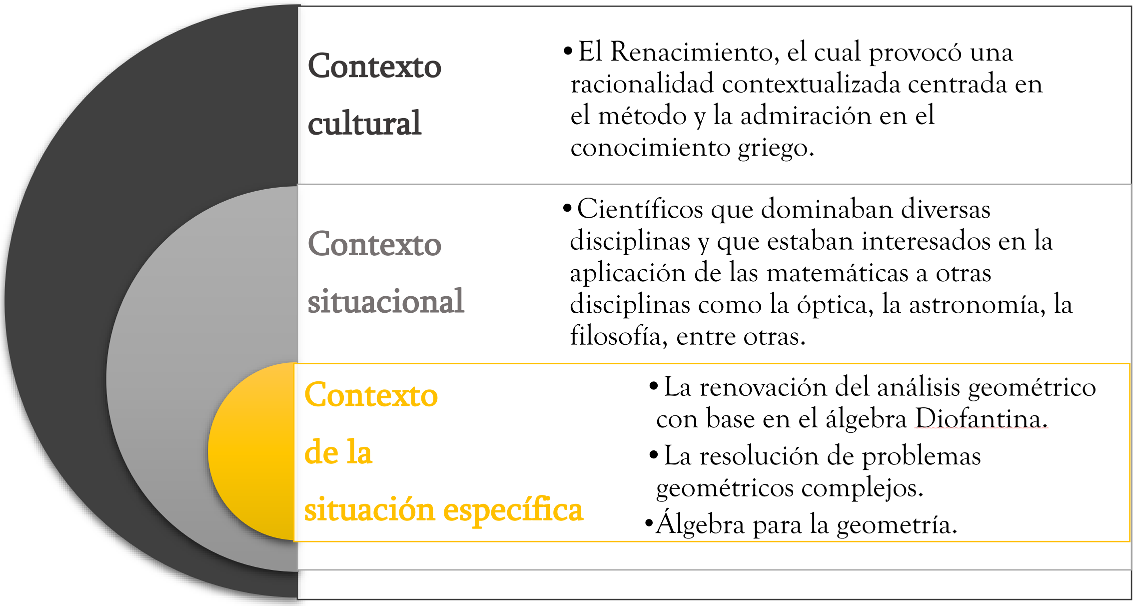


Figura 52. Contexto de significación del análisis algebraico de Viète y Descartes

Con base en estas consideraciones generamos la hipótesis epistemológica:

El método que desarrollaron Viète y Descartes denominado *análisis algebraico* involucra un nuevo rol para el álgebra, cuyas bases recurren a la operatividad misma del álgebra simbólica, pero que incorpora nuevas formas de uso para el simbolismo algebraico, definiendo un recurso semiótico sin ambigüedades que permite distinguir entre las cantidades conocidas (parámetros) y las desconocidas (incógnitas). En esta método, el simbolismo no es empleado como una mera forma de síntesis del discurso con la que se facilita visualizar las operaciones sobre las cantidades involucradas, sino es empleado como una forma visual que permite sintetizar relaciones de tipo aritméticas y geométricas con la finalidad de construir fórmulas generales—análisis algebraico de Viète—, es decir, familias de relaciones entre objetos que permiten determinar magnitudes de interés, o bien para generar expresiones generales que denotan familias de objetos geométricos como curvas—análisis algebraico de Descartes—.

Con esta nueva forma de emplear el álgebra se da una transición de la ecuación como objeto de estudio hacia la ecuación como herramienta para el estudio, puesto que la ecuación en el análisis algebraico es la que permite investigar las relaciones geométricas para determinar las familias de soluciones o familias de curvas. En este sentido, la noción de igualdad también transita de su función como condición para la solución de ecuaciones hacia la de medio para la relación de magnitudes. De aquí que la articulación entre los objetos de proporción y ecuación juegan el rol fundamental para lograr esta transición.

Esta construcción del análisis algebraico y de las ecuaciones paramétricas surge como respuesta y necesidad a la creación de un **álgebra para la geometría,** determinando una práctica socialmente compartida entre ambos matemáticos: *la algebrización de la geometría*. Esta práctica es un emergente que deviene de la resolución de problemas geométricos complejos, los cuales, involucran una gran cantidad de relaciones, que en su mayoría subyacen a la observación directa del diagrama geométrico sobre el que se investiga. Esta práctica implica el *establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole* y la *construcción de sistemas semióticos sistemáticos para discriminar cantidades conocidas* (parámetros) y *desconocidas* (incógnitas-variables), con base en las condiciones geométricas impuestas por el problema (acción). A su vez, estas acciones son evocadas con el objetivo de *construir fórmulas y expresiones generales* para representar familias de soluciones o de curvas (actividad)

9.1.3. P2.1. ¿Qué particularidades posee la actividad matemática del análisis algebraico y qué particularidades son manifestadas en la actividad matemática de estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas relativos al análisis algebraico?

Partiendo de las características de la hipótesis epistemológica relativa a la algebrización de la geometría en Viète y Descartes, que detallamos en el apartado anterior, se sintetizó lo siguiente en la primera fase del estudio:

La actividad analítica algebraica se rige bajo la *práctica de algebrización de la geometría*. Esta práctica plantea la complejidad de articular el álgebra con la geometría, y muestra un proceso cuya base contempla:

a) *Establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole* y
b) La *construcción de sistemas semióticos sistemáticos para discriminar cantidades conocidas* (parámetros) y *desconocidas* (incógnitas-variables),
c) *Identificar las condiciones geométricas impuestas por el problema*.

Estas primeras acciones la identificamos como un primer nivel pragmático; *acción* desde la TS. Desde la TS, como se ha mencionado, importa reconocer la funcionalidad de estas acciones en términos de un propósito determinado en la actividad matemática. De esta manera caracterizamos que la articulación de estas acciones permite y tienen la función de:

- *Construir fórmulas y expresiones generales para representar familias de soluciones o de curvas*

Esto se asocia con un segundo nivel pragmático del quehacer; denominado *actividad*. No obstante, puesto que este nivel representa una actuación deliberada y con propósito específico por parte de Viète y Descartes, en el caso de la EBT la y los estudiantes carecen de esta motivación matemática y en lugar de que ellos y ella lo desarrollen, es el diseño el que lo promueve sin ser explícito.

También se estableció que la algebrización de la geometría requiere de la puesta en juego de la *noción de proporción* principalmente, pues permite enlazar las relaciones geométricas de equivalencia y la igualdad algebraica: la ecuación.

No obstante, en términos más amplios, reconocemos que existe una justificación epistémica centrada en el hecho de que *toda relación de equivalencia puede ser conceptualizada como ecuación algebraica*.

A pesar de lo anterior, con base en la EBT, es posible resaltar aspectos que quedaron ocultos en el análisis de la actividad matemática del EHE; por el hecho de que Viète y Descartes partían de un dominio, no solo de los conocimientos matemáticos involucrados en las situaciones que resolvieron, sino también, del propio método que emplearon para la resolución, incluyendo objetivos, justificaciones epistémicas, etc. Tenían un control metacognitivo de su actividad matemática, algo que la y los estudiantes no poseían por las condiciones del experimento. Por ello, las categorías teóricas del nivel pragmático de acción, actividad y práctica socialmente compartida resultaron ser consideraciones de diseño globales de la actividad analítica algebraica en el experimento de diseño. Al momento de que la y los estudiantes se enfrentaron a las situaciones orquestadas, se identificó que estas categorías iniciales requerían y/o implicaban la puesta en juego de otro tipo de acciones matemáticas para concretarlas. Por ejemplo, se reconoció una necesidad importante por dominar el método analítico algebraico para orientar todo el proceso de resolución.

En la siguiente Tabla 44 presentamos las sub-acciones asociadas a las categorías teóricas de acciones y actividades de la primera fase, junto con su respectiva descripción con la que se especifican en términos del quehacer matemático lo que las caracteriza.

	Algebrización de la geometría resultante del EHE		Algebrización de la geometría resultante de la EBT	Descripción
Acciones	--------------------		Dominar el método de análisis algebraico	Reconocimiento de que el proceso para determinar la ecuación del lugar geométrico requiere de distintas fases: suponer que el lugar geométrico existe; determinar relaciones geométricas que involucren al punto sujeto de investigación; considerar que dichas relaciones geométricas involucran cantidades determinadas, o bien que determinan la construcción, y dos variables, determinar una ecuación algebraica que se derive de dicha relación.
			Identificar la importancia de las relaciones de equivalencia	Explicitar que el objetivo primordial es que las relaciones geométricas antes mencionadas deben producir relaciones de equivalencia, puesto que al obtener relaciones de equivalencia se puede transitar a las ecuaciones algebraicas.
	Establecimiento de relaciones de equivalencia de distinta índole	Sub-acciones	Identificar las características de la ecuación paramétrica como lugar geométrico, es decir, las condiciones que cumple.	Explicitar que las ecuaciones paramétricas deben considerar dos aspectos, con relación a una relación geométrica específica: a. *Involucrar dos variables* b. *Involucrar los parámetros que condicionen la construcción de dicha relación geométrica*
			Entendimiento respecto a cómo se construyó la figura que se está estudiando.	Ser consciente respecto a cómo se construyó el objeto geométrico que se está estudiando. Esto permite que se identifique cómo las cantidades se relacionan unas con otras, lo cual apoyará el proceso de determinación de relaciones geométricas.
			Exploración de la ecuación y los elementos de la construcción vía el análisis dinámico del problema	Ser consciente respecto a las relaciones de dependencia e independencia entre las distintas magnitudes de la construcción, lo cual permitirá la identificación de manera más eficaz de los parámetros y variables.
			Selección y/o acomodo de la información relevante para la solución	Proceso metacognitivo para organizar el pensamiento y por consiguiente iniciar la resolución.
	La construcción de sistemas semióticos sistemáticos para discriminar cantidades conocidas (parámetros) y desconocidas (incógnitas-variables).	Sub-acciones	Determinación de un recurso semiótico y determinación de los parámetros y variables	Establecimiento de un recurso semiótico propio que tenga sentido para distinguir entre parámetros y variables.
	Identificar las condiciones geométricas impuestas por el problema	Sub-acciones	Análisis de la geometría subyacente	Identificación de distintas relaciones geométricas.
			Uso de la geometría para establecer/identificar relaciones geométricas	Uso de los conocimientos geométricos para determinar relaciones que permitan encontrar relaciones de equivalencia.

			Establecimiento de relaciones geométricas de equivalencia (particularmente proporciones en este caso)	Determinar relaciones de equivalencia que involucren parámetros y variables con el fin de establecer posteriormente las ecuaciones algebraicas.
			Operatividad sobre las relaciones geométricas de equivalencia (Trabajo geométrico)	Todas aquellas transformaciones de las relaciones geométricas que permitan simplificar la relación de equivalencia.
Actividad	**Construir fórmulas y expresiones generales para representar familias de soluciones o de curvas**	Sub-acciones	Sustitución semiótica (Tránsito entre la relación geométrica de equivalencia y la ecuación algebraica)	La sustitución semiótica implica un cambio entre el simbolismo geométrico y el algebraico. Por ejemplo: $BC^2 + CA^2 = AC^2 \quad \rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ En la primera relación el simbolismo representa segmentos, mientras que en la segunda una expresión que no depende del dominio geométrico, es decir, se encuentra en un plano semiótico distinto.
			Operatividad sobre las ecuaciones (Trabajo algebraico)	Todas aquellas transformaciones de las relaciones algebraicas que permitan simplificar la ecuación.
			Determinación de la ecuación paramétrica	Establecimiento de la ecuación paramétrica que representa al lugar geométrico.
			Reconocimiento de la ecuación paramétrica como la solución al problema de determinación en términos de cumplimiento de las condiciones que debe cumplir una ecuación paramétrica.	Identificación de que la ecuación paramétrica cumple con las dos condiciones de una ecuación de lugar geométrico.

Tabla 44. La algebrización de la geometría y la construcción de la ecuación paramétrica en el EHE y la EBT

De este modo, es importante destacar que la actividad analítica algebraica es una actividad matemática compleja, en el sentido de que involucra las dificultades de ambas disciplinas matemáticas: la geometría y el álgebra; además conlleva otras que devienen de su integración en un nuevo método, tales como *la identificación de los parámetros y variables, el desarrollo de sistemas semióticos que los diferencien, y la justificación epistémica relativa al vínculo entre relación de equivalencia-ecuación algebraica*.

En este sentido, la actividad analítica algebraica involucra los aspectos detallados en la tercera columna de la Tabla 44:

1. *Reconocimiento de que el proceso para determinar la ecuación del lugar geométrico requiere de distintas fases:*
   a. Suponer que el lugar geométrico existe;
   b. Determinar relaciones geométricas que involucren al punto sujeto de investigación;

   c. Consideración de que dichas relaciones geométricas involucran diversas cantidades determinadas que condicionan la construcción, y dos cantidades variables;
   d. Determinar una ecuación algebraica que se derive de dicha relación.
2. *Conocer la justificación epistmémica relativa al tránsito de las relaciones de equivalencia a las ecuaciones algebraicas*.
3. *Identificar que las ecuaciones paramétricas deben de involucrar dos variables y los parámetros que condicionen la construcción de la relación geométrica objeto de estudio*.
4. *Conocer cómo se construyó el objeto geométrico que se está estudiando*.
5. *Identificar las relaciones de dependencia e independencia entre las distintas magnitudes de la construcción*.
6. *Proceso metacognitivo para organizar el pensamiento* dirigido a la determinación de la ecuación paramétrica.
7. *Establecimiento de un recurso semiótico propio que tenga sentido para distinguir entre parámetros y variables*.
8. *Uso de los conocimientos geométricos para determinar relaciones* que permitan encontrar relaciones de equivalencia.
9. *Determinar relaciones de equivalencia que involucren parámetros y variables*.
10. *Transformar las relaciones geométricas para simplificar la relación de equivalencia*.
11. *Efectuar la sustitución semiótica entre el simbolismo geométrico y el algebraico*.
12. *Establecimiento de la ecuación paramétrica* que representa al lugar geométrico *vía operaciones algebraicas*.
13. *Identificación de que la ecuación paramétrica cumple con las dos condiciones de una ecuación de lugar geométrico*.

Cabe destacar también que, como se mostró en la EBT, las acciones ocho a la once, son recursivas. En términos de que pueden realizarse más de una vez en el proceso de resolución.

De esta manera, esta actividad matemática no solo exige un dominio sobre los objetos matemáticos involucrados, sino de consideraciones metacognitivas para ordenar y estructurar una forma de abordar la algebrización de las relaciones geométricas, algo que consideramos el discurso escolar omite por completo.

9.1.4. P3. ¿Cuál es la gramática funcional del lenguaje algebraico simbólico de Viète y Descartes y de estudiantes en el análisis algebraico?

Presentamos primero lo obtenido respecto a las características gramaticales de los textos de Viète y Descartes, y posteriormente lo respectivo a la y los estudiantes.

9.1.4.1. Gramática de los textos de Viète y Descartes

En primera instancia se describirán las características gramaticales de los textos de Viète y Descartes en términos de las tres Metafunciones analizadas. Posteriormente se hace una descripción general de lo que representan dichas características.

En Viète, considerando el significado Experiencial que se identifica en su texto, se determina que la configuración entre Participantes, Procesos y Circunstancias tiene las siguientes características:

- *Participantes*: Son por lo general grupos nominales que corresponden a elementos geométricos, ecuaciones y raíces, ya no únicamente a números y ecuaciones como estaban caracterizados los discursos de los algebristas previos a él, también analizados.
- *Procesos*: Aluden a las acciones que describen procedimientos relativos a construcciones geométricas y a las transformaciones de expresiones. Los procesos Relacionales son una parte sustancial del texto de Viète, más aún los Atributivos, con los cuales se establecen las relaciones abstractas entre diferentes entidades asignando a unas características y propiedades fundamentales que permiten, a su vez la constitución de las relaciones de equivalencia, por medio de los Relacionales Identificativos para conformar propiamente ecuaciones sobre las cuales operar.
- *Circunstancias*: Como complemento de las acciones y relaciones establecidas sobre los Participantes (expresiones, segmentos, etc.) en las cláusulas, se hacía uso de elementos circunstanciales que representaban condiciones específicas sobre el cómo, porqué y para qué de las transformaciones y/o construcciones de dichos Participantes.

Respecto al significado Lógico se identificó que en el texto de Viète, a diferencia de otros textos analizados, se tiende a emplear más complejos clausulares, lo cual implica una mayor complejidad en la cadena de razonamiento, más aún porque en los problemas geométricos unas partes aluden a significados geométricos y otras a partes algebraicas. De modo que el discurso analizado de Viète refleja estructuras de taxis similares a las de Diofanto, Cardano y Bombelli para la parte algebraica de su discurso, mostrando una herencia de este tipo de organización de significados dependientes, pero también estructuras distintas por el carácter geométrico del texto.

El significado Textual del texto de Viète, refleja que el mensaje difiere por partes en su discurso, como consecuencia de su estructura discursiva, sin embargo, se recurre a emplear Participantes como los Temas Experienciales, por lo que el mensaje tiende a destacar los entes que están siendo sujetos de manipulación, a diferencia de otros textos como el de al-Khwârizmî en el que se emplean considerablemente más Procesos como Tema Experiencial.

En el caso de Descartes, considerando el significado Experiencial que se identifica en su texto, se determina que la configuración entre Participantes, Procesos y Circunstancias tiene las siguientes características:

- *Participantes*: Son por lo general grupos nominales que corresponden a elementos geométricos, ecuaciones y raíces, ya no únicamente a números y ecuaciones como estaban caracterizados los discursos de los algebristas analizados.
- *Procesos*: Aluden a las acciones que describen procedimientos relativos a construcciones geométricas y a las transformaciones de expresiones. Los procesos Materiales junto con los Relacionales son una parte sustancial del texto de Descartes, puesto que en su texto tiende a explicar acciones sobre el mecanismo de construcción de la curva, así como de las relaciones a partir de la designación de símbolos para los Participantes de interés.
- *Circunstancias*: Como complemento de las acciones y relaciones establecidas sobre los Participantes (expresiones, segmentos, partes del instrumento, etc) en las cláusulas, se hacía uso de elementos circunstanciales que representaban condiciones específicas sobre el cómo, porqué y para qué de las transformaciones y/o construcciones de dichos Participantes.

Respecto al significado Lógico, en el texto de Descartes analizado se puede ver que no hay cláusulas libres, es decir, todas las cláusulas se encuentran relacionadas en bloques de grandes complejos clausulares. Por lo tanto, al igual que Viète la cadena de razonamiento que se expresa en el texto de Descartes es compleja.

El significado Textual en Descartes, a diferencia de Viète, es combinado, en el sentido de que se emplean casi por igual Participantes y Procesos, como Temas Experienciales, en donde se incluye él mismo como Participante, lo cual se le atribuye a que dicho significado alude más hacia la explicación de su pensamiento, es decir, en mostrar cómo él resuelve el problema; es decir, su método de resolución.

9.1.3.1.1. Descripción general de la Gramática Funcional

En términos generales, pude identificarse desde una perspectiva Sistémica-Funcional que los recursos gramaticales que son empleados, no solo por Viète y Descartes sino por los otros algebristas analizados, son sistemáticamente empleados. Es decir, los discursos son construidos cuidadosamente para expresar, organizar y darle textura a la experiencia algebraica. Esto tiene sentido, considerando que dichos discursos analizados son escritos, por lo tanto, se espera que como tales, presenten una estructura concreta y bien pensada, a diferencia del discurso hablado. Este análisis refuerza la postura de O'Halloran (2005), quien establece que los tres recursos semióticos contribuyen de manera sistemática y articulada para expandir el campo semántico de las matemáticas.

Es así como una de las consideraciones más relevantes al entender al Lenguaje Algebraico desde una postura amplia y lingüística, como la adoptada en esta investigación, permite mirar al simbolismo no como el lenguaje matemático en sí, sino como un constituyente de éste, lo cual puede considerarse también para el álgebra.

En este sentido, al menos para Viète y Descartes, el simbolismo es solo una parte del lenguaje por lo que ellos mismos le asignan un rol específico en su estructura discursiva y conceptual. Siempre el simbolismo se encuentra incrustado en un recurso semiótico que contempla elementos de otros sistemas que le permiten adquirir su función.

Bajo estas ideas, el simbolismo debe ser *adoptado* como recurso semiótico dentro del Lenguaje Natural. Esto se logra a partir de *cláusulas relacionales*. Una vez adoptado el recurso del simbolismo, las operaciones sobre los Participantes simbólicos son descritas a través de Procesos materiales abstractos acompañados de elementos circunstanciales que definen y limitan la acción sobre estos. Con esto se conforman textos cohesivos que delimitan de manera importante la actividad algebraica relativa al paradigma donde se encuentre —problemas aritméticos, resolución de ecuaciones, resolución de sistemas de ecuaciones, análisis de propiedades en las ecuaciones, o bien, demostración y resolución de problemas geométricos.

En el caso de Viète y Descartes, la estructuración del razonamiento mostrado en los textos analizados indica complejidad en las elecciones gramaticales relativas a las relaciones clausulares, puesto que tienden a promover significados dependientes y significados que destacan, complementan o condicionan los significados principales. Por lo tanto, conforman largas cadenas de razonamiento que implican que en la lectura sean complejas de "desenvolver".

Por otro lado, la forma en la que puede ser interpretado el mensaje algebraico difiere respecto al problema que se trata, aunque en general trata de una combinación entre los que están siendo objeto de modificación y el procedimiento que lo modifica.

Es notable que, en los textos, los Participantes en ocasiones son elididos, lo cual dificulta en ocasiones la recuperación de quién se habla en el texto.

La gramática menos desarrollada en los textos de Viète y Descartes es la visual, puesto que se considera que, por limitaciones de la época, la imagen no había podido desarrollar el potencial que hoy tiene. Esto porque las imágenes en ambos algebristas se presentan como una mera ilustración de referencia en la que no se incluyen como apoyo los Participantes más importantes del discurso para un rastreo más fácil y, por tanto, una cohesión más robusta entre los tres recursos semióticos. No obstante, el uso de la imagen adquiere un uso distinto a los algebristas previos, puesto que, para estos, la imagen es una ilustración que justifica y describe los pasos de la demostración de las reglas algebraicas para resolver ecuaciones, mientras que para Viète y Descartes representa una realidad semiótica que se está estudiando y, por lo tanto, funciona para trabajar sobre ella, o bien manipularla de manera simbólica.

9.1.3.2. Gramática de los textos de la y los estudiantes E1, E2 y E3

Tal como se hizo para los textos algebraicos originales se describirán, en primera instancia, las características gramaticales de los textos de la y los estudiantes en términos de las tres Metafunciones analizadas. Posteriormente se hace una descripción general de lo que representan estas características.

En E1, considerando el significado Experiencial que se identifica en su texto, se determina que la configuración entre Participantes, Procesos y Circunstancias tiene las siguientes características:

- *Participantes*: Al igual que en los textos de Viète y Descartes, el tipo de actividad matemática deviene en un discurso en el que como participantes se emplean grupos nominales que corresponden a elementos geométricos, ecuaciones, al autor del texto, y no únicamente a números y ecuaciones como estaban caracterizados los discursos de los algebristas previos al análisis algebraico.

  Los participantes retóricos muestran una progresión acorde al método analítico, en el sentido de que se parte de los participantes asociados con las designaciones simbólicas, con los cuales se intenta establecer el objetivo de la resolución y dónde se encuentran en la figura. Por ejemplo "*las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)*", "*un applet [[que muestra lo siguiente]]*", "*Las variables*". Posteriormente, se observa la tendencia del trabajo con los participantes geométricos para la búsqueda de relaciones. Por ejemplo, "*relaciones*", "*distintos triángulos*", "*semejantes*". Seguidamente, se identifican los participantes relativos a las relaciones de equivalencia: "*su proporción*", "*con las proporciones [[que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)]]*". Asimismo, es notable la disminución de este tipo de participantes en el texto, en comparación con los textos antiguos.

  En el caso de los participantes simbólicos puede notarse una mayor presencia de metáforas semióticas en las que las ecuaciones son empleadas en el discurso como objetos. Por ejemplo, en la cláusula 16 y 28 respectivamente: "ΔNKL *y* ΔCKB *[[* $\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{KB}$ *]]*" "*-Planteamos: [[* $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ *]]*".

- *Procesos*: Aluden a las acciones que describen procedimientos relativos a construcciones geométricas y a las transformaciones de expresiones. Los procesos Relacionales son una parte sustancial del texto de E1, seguidos por los materiales. Sin embargo, en comparación con el texto de Descartes hay un cambio de predominancia entre los Atributivos e Identificativos, siendo estos últimos los que se presentan más. Con estos es posible centrarse en las relaciones de equivalencia para conformar propiamente ecuaciones sobre las cuales operar. Por ello, únicamente 3 de los 16 procesos son retóricos, marcando una diferencia significativa con los textos de Viète y Descartes. Incluso de los tres, solo uno aparece explícitamente en el texto, pues los dos restantes son agregados pues se recurre a la elipsis.

- *Circunstancias*: Se mantiene el uso de circunstancias como complemento de las acciones y relaciones establecidas sobre los Participantes (expresiones, segmentos, etc) en las cláusulas, se hacía uso de elementos circunstanciales que representaban condiciones específicas sobre el cómo, porqué y para qué de las transformaciones y/o construcciones de dichos Participantes.

Respecto al significado Lógico se identificó que en el texto de E1, contempla complejos clausulares extensos, como en el caso del texto de Descartes, lo cual implica una mayor complejidad en la cadena de razonamiento, además de que refleja un discurso cercano al oral, al estilo de Descartes. El texto de E1 muestra un paradigma del discurso algebraico distinto a los de Viète y Descartes, toda vez que se encuentran complejos clausulares simbólicos, en los cuales se recurren a elementos simbólicos, o la elipsis para establecer las relaciones de dependencia entre cláusulas. De hecho, se encuentran el uso de sistemas de intersemiosis inexistentes en los discursos de Viète y Descartes, pues a diferencia de los textos antiguos, el texto de E1 muestra claramente cómo el simbolismo no solo codifica la experiencia, sino también la organización lógica del texto. En este sentido, pueden identificarse claramente complejos clausulares simbólicos, en los cuales las relaciones de TAXIS y LOG.-SEM. se codifican mediante elementos como flechas, líneas, espacialidad, elipsis.

El significado Textual de E1, refleja el mismo patrón encontrado en Viète y Descartes, en el que el mensaje difiere por partes en su discurso, como consecuencia de su estructura discursiva, sin embargo, se identifican predominantemente Procesos como los Temas Experienciales, seguidos de los Participantes. Esto es consistente con la intención del escrito como consecuencia de la solicitud en la EBT, por lo que el mensaje tiende a resaltar la explicación del proceso de determinación de la ecuación paramétrica. Cabe destacar que en los Temas Experienciales que involucran Participantes predominan los simbólicos.

Al igual que en el caso de la metafunción lógica, en esta metafunción se identifican otros sistemas de intersemiosis ausentes en los textos de Viète y Descartes como la MEZCLA INTERSEMIÓTICA y los VÍNCULOS DISCURSIVOS.

En el caso de la estudiante E2, considerando el significado Experiencial que se identifica en su texto, se determina que la configuración entre Participantes, Procesos y Circunstancias tiene las siguientes características:

- *Participantes*: Al igual que E1, la estudiante E2 emplea Participantes retóricos que muestran una progresión acorde al método analítico, en el sentido de que se parte de los participantes asociados con las designaciones simbólicas, con los cuales se intenta establecer el objetivo de la resolución y dónde se encuentran en la figura. Por ejemplo "*la relación del punto C [[involucrando a, x, b, c, | | y tomando en consideración que: [[KL – b]] [[NL – c]] [[BA – x]] [[GA – a]] [[CB – y]]*". Posteriormente, se observa la tendencia del trabajo con los participantes geométricos para la búsqueda de relaciones. Por ejemplo, "*los mismos ángulos*", "*dos pares de triángulos semejantes*", "*Los triángulos*". Posteriormente, se identifican los participantes relativos a las relaciones de equivalencia: "*los lados proporcionales (la misma)*", "l*as proporciones [[que cumplen cada par]]*".
  A diferencia de E1, la estudiante mantiene un equilibrio entre los Participantes simbólicos y retóricos. En este sentido, puede interpretarse que el discurso muestra un énfasis no solo en las expresiones, sino los elementos geométricos y relaciones de equivalencia. El hecho de que haya más presencia de los procesos Relacionales Atributivos implica que la estudiante E2, respecto del estudiante E1, muestra una consistencia en establecer las relaciones de equivalencia, previamente al tratamiento algebraico.

  En cuanto a los Participantes Simbólicos, se muestra al igual que E1 el uso del recurso de la Metáfora Semiótica, dejando las igualdades algebraicas funcionar como parte del grupo nominal, o bien como el grupo nominal en sí mismo. Por ejemplo en la cláusula 13, 14 y 43 respectivamente: "ΔNKL *y* $\Delta CKB =$ *[[* $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ *]]*", "ΔCLB *y* $\Delta GLA =$*[[* $\frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$ *]]*", "*Por último, sustituye los valores de la equivalencia [[* $LA = \frac{LBa}{y}$ *]] con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB*".

- *Procesos*: Con respecto a los procesos se identifica el mismo patrón que el estudiante E1, el cual nuevamente muestra predominancia de los procesos relacionales. En este caso los identificativos son todos simbólicos. A diferencia del texto del estudiante E1, los procesos relacionales atributivos en este texto doblan su frecuencia. Coinciden en su función de describir procedimientos relativos a los elementos geométricos sobre los cuales se establecen las relaciones y a las transformaciones de expresiones.

  A diferencia de los textos de Viète y Descartes, en el texto de E2, al igual que el de E1, puede identificarse cómo el proceso relacional identificativo "=" es empleado sistemáticamente. Esto tiene una implicación en el texto importante en el sentido de que permiten la aparición de cláusulas completamente simbólicas: Por ejemplo, las cláusulas 38 y 42: "$\overline{LB} = \frac{by}{c} - b,$ ", "$\overline{LA} = \frac{by}{c} - b + x$".

- *Circunstancias*: Como complemento de las acciones y relaciones establecidas sobre los Participantes (expresiones, segmentos, partes del instrumento, etc) en las cláusulas, se hacía uso de elementos circunstanciales que representaban condiciones específicas sobre el cómo, porqué y para qué de las transformaciones y/o construcciones de dichos Participantes.

Respecto al significado Lógico se identificó que en el texto de E2, contempla complejos clausulares extensos, como en el caso del texto E1, lo cual implica una mayor complejidad en la cadena de razonamiento, aunque su texto presenta más interdependencia entre las cláusulas por predominar las Relaciones Hipotácticas. Esto refleja aún más un discurso cercano al oral. Coincide con el texto de E1 en términos del paradigma discursivo algebraico, toda vez que se encuentran complejos clausulares simbólicos, en los cuales se recurren a elementos simbólicos, o la elipsis para establecer las relaciones de dependencia entre cláusulas. Se encuentra también el uso de sistemas de intersemiosis inexistentes en los discursos de Viète y Descartes, pues el texto de E2 muestra, al igual que E1, cómo el simbolismo no solo codifica la experiencia, sino también la organización lógica del texto. En este sentido, pueden identificarse claramente complejos clausulares simbólicos, en los cuales las relaciones de TAXIS y LOG.-SEM. se codifican mediante elementos como flechas, líneas, espacialidad, elipsis.

El significado Textual de E2, refleja el mismo patrón encontrado en Viète y Descartes, en el que el mensaje difiere por partes en su discurso, como consecuencia de su estructura discursiva. Se identifican predominantemente Participantes como los Temas Experienciales, seguidos de los Procesos, el orden inverso respecto a E1. Por esto, el mensaje tiende a resaltar la atención en aquello que está siendo objeto de estudio. Es decir, las relaciones y las expresiones algebraicas.

Al igual que en el caso de la metafunción lógica, en esta metafunción se identifican otros sistemas de intersemiosis ausentes en los textos de Viète y Descartes como la MEZCLA INTERSEMIÓTICA y los VÍNCULOS DISCURSIVOS.

Para el texto de E3 se encontró que la configuración entre Participantes, Procesos y Circunstancias tiene las siguientes características:

- *Participantes*: Al igual que E1 y E2, el estudiante E3 emplea Participantes retóricos que muestran una progresión acorde al método analítico, en el sentido de que se parte de los participantes asociados con las designaciones simbólicas, con los cuales se intenta establecer el objetivo de la resolución y dónde se encuentran en la figura. Por ejemplo "*ciertas regularidades [[que existen en la construcción.]]*", "*se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos*,". Posteriormente, se observa la tendencia del trabajo con los participantes geométricos para la búsqueda de relaciones. Por ejemplo, "*se empezará con NKL y CKB.*", "*al tener los ángulos iguales,* ". Posteriormente, se identifican los

participantes relativos a las relaciones de equivalencia: "*entonces, se pueden deducir las siguientes razones de proporcionalidad:*".
A diferencia de E2 y E1, el estudiante E3, presenta en su texto mayor cantidad de Participantes retóricos. Los Participantes simbólicos refieren principalmente a segmentos y expresiones algebraicas.

- *Procesos*: Con respecto a los procesos se identifica el mismo patrón que el estudiante E1, el cual nuevamente muestra predominancia de los procesos relacionales. El hecho de que haya más presencia de los procesos relacionales atributivos implica que la estudiante E2, respecto del estudiante E1 muestra una consistencia en establecer las relaciones de equivalencia, previamente al tratamiento algebraico.
  A diferencia de los textos de Viète y Descartes, en el texto de E3, al igual que el de E1 y E2 puede identificarse cómo el proceso relacional identificativo "=" es empleado sistemáticamente. Esto tiene una implicación en el texto importante en el sentido de que permiten la aparición de cláusulas completamente simbólicas: Por ejemplo, las cláusulas 52 y 67 respectivamente: "$\frac{a}{y}=\frac{LB+x}{LB}$", "$\frac{y}{c}b-b=LB,$".
- *Circunstancias*: Como complemento de las acciones y relaciones establecidas sobre los Participantes (expresiones, segmentos, partes del instrumento, etc) en las cláusulas, se hacía uso de elementos circunstanciales que representaban condiciones específicas sobre el cómo, porqué y para qué de las transformaciones y/o construcciones de dichos Participantes.

Respecto al significado Lógico del texto de E3, la estructura contempla complejos clausulares extensos, como en el caso del texto E2, donde la interdependencia entre las cláusulas es marcada por predominar las Relaciones Hipotácticas. Esto refleja un discurso cercano al oral. Uno de los rasgos más notables del texto de E3 es que no recurre a complejos clausulares simbólicos, a diferencia de los textos de E1 y E2.

El significado Textual de E2, refleja el mismo patrón encontrado en Viète y Descartes, en el que el mensaje difiere por partes en su discurso, como consecuencia de su estructura discursiva. Se identifican predominantemente Participantes como los Temas Experienciales, tal como el de E2. Por esto, el mensaje tiende a resaltar la atención en aquello que está siendo objeto de estudio. Es decir, las relaciones y las expresiones algebraicas.

El simbolismo se encuentra incrustado en su mayoría en cláusulas de lenguaje natural. No se identifica una predominancia de Temas Experienciales simbólicos como en los textos de E1 y E2.

9.1.3.2.1. Descripción general de la GF en los textos de E1, E2 y E3

En términos experienciales, dentro de los aspectos más significativos que se identificaron con los textos de la y los estudiantes, en comparación con los de Viète y Descartes es el uso sistemático del simbolismo en los textos de E1 y E2. En el caso del estudiante E3, es interesante notar cómo el simbolismo no es un recurso del todo autónomo, como en el caso de los textos de Viète y Descartes, en comparación con los textos de E1 y E2, sin embargo, es importante destacar que se recurre a la Metáfora Semiótica de manera constante, a diferencia de estos dos matemáticos. El hecho de que el estudiante E3 se haya detenido en el establecimiento de la proporción final en su proceso de construcción de la ecuación paramétrica, podría implicar que en su explicación no aparecieran complejos clausulares simbólicos.

Se reafirma así que la idea de que el simbolismo es un constituyente del lenguaje algebraico. En este sentido, si bien en los textos de E1, E2 y E3, el uso del simbolismo es diferente en términos de su grado de objetivación y de autonomía respecto del recurso del lenguaje natural, al igual que para Viète y Descartes, el simbolismo es solo una parte del lenguaje por lo que su rol en la estructura discursiva y conceptual se articula con los otros recursos semióticos. De esta manera, en primera instancia, el simbolismo es *adoptado* como recurso semiótico dentro del Lenguaje Natural vía *cláusulas relacionales.* A su vez, posteriormente, el simbolismo alcanza una autonomía no vista en los textos de Viète y Descartes con la cual las operaciones sobre los Participantes simbólicos son descritas a través de Procesos materiales retóricos o simbólicos, que son acompañados por elementos circunstanciales que definen y limitan la acción sobre estos.

En el caso del significado lógico, la estructuración del razonamiento mostrado por la y los estudiantes, tiende a promover significados dependientes y significados que destacan, complementan o condicionan los significados principales, coincidiendo con la complejidad lógica de los discursos de Viète y Descartes, aunque más parecida a la del segundo. No obstante, se identifican también notables diferencias en tanto que, por el uso sistemático del simbolismo, se presentan complejos clausulares totalmente simbólicos. Este hecho, implica que se deba recurrir a sistemas diversos de intersemiosis para articular los recursos semióticos empleados.

En este sentido, las relaciones de TAXIS y LOG.-SEM. se codifican también mediante elementos como viñetas, flechas, líneas, espacialidad y elipsis. Esto genera cadenas de cláusulas vinculadas. Por ejemplo:

Por último, sustituye los valores de la equivalencia $LA = \frac{LBa}{y}$ Con anteriormente para LA y LB y resuelve la equivalencia: $\frac{by}{c} - b + x = \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$ $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ Para concluir y encontrar la ecuación más reducida como la de Desc $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ $\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$ $by^2 = \cancel{c}\left(\frac{aby}{\cancel{c}} - ab + by - xy\right)$ $\frac{\cancel{b}y^2}{\cancel{b}} = \frac{a\cancel{b}y - a\cancel{b}c + c\cancel{b}y}{\cancel{b}} \frac{-cxy}{b}$ $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$	finalmente despejar $\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)} \rightarrow y\left(\frac{by}{c} - b + x\right) = a\left(\frac{by}{c} - b\right)$ $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ $\downarrow$ $\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$ $by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$ $by^2 = aby - abc + bcy - cxy$ $y^2 = \frac{aby - abc + bcy - cxy}{b}$ $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$	Considerando las condiciones que deben cumplir los triángulos semejantes deberás escribir las proporciones que cumplen cada par. ΔNKL y $\Delta CKB = \frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ ΔCLB y $\Delta GLA = \frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$ Considera que todos los lados deben tener la misma proporción. Por eso tienes que igualar las cantidades

Figura 53. Relaciones de intersemiosis en E2 relativas a los sistemas de Taxis y Relaciones Lógico-Semánticas

Para los significados textuales se mantiene el hecho de que la forma en la que puede ser interpretado el mensaje algebraico en general es respecto a una combinación entre los que están siendo objeto de modificación y el procedimiento que lo modifica.

Por otro lado, al igual que las metafunciones anteriores, el uso sistemático del simbolismo implica el uso de otros sistemas de intersemiosis no desarrollados en la época del discurso algebraico de Viète y Descartes, como la MEZCLA INTERSEMIÓTICA:

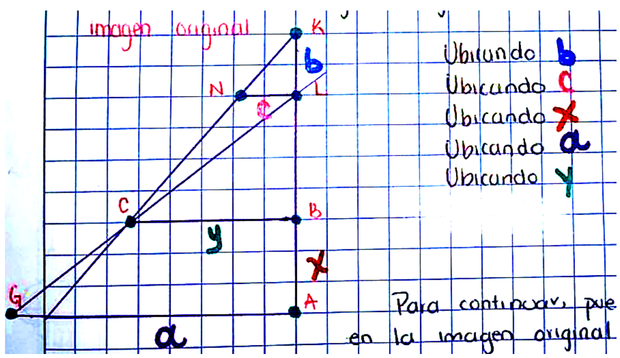


Figura 54. Ejemplo de Mezcla Intersemiótica en el texto de E2

En el caso del estudiante E3, se le preguntó posterior a la EBT por qué no había empleado imágenes en su texto y respondió que en su descripción imaginaba que la imagen estaría al alcance de quien leyera su texto. En este sentido, se puede considerar que la imagen también es un recurso contemplado por E3, sin embargo, en su texto no aparece y no hay evidencia si este hubiera empleado la MEZCLA INTERSEMIÓTICA.

Además de las características antes mencionadas, a continuación mostramos una tabla de frecuencias en la que se contabiliza la aparición de cada categoría gramatical identificada en el análisis. Esta tabla contiene partes de las Tablas 49 y 73 presentadas en los Anexos 12.2 y 13.4.4 respectivamente. En este caso sin hacer alusión a si los Participantes y Procesos son retóricos o simbólicos, estas frecuencias permiten visualizar que las diferencias en los textos se dan al nivel de la Metafunción Experiencial, a través del Sistema de Transitividad, pues en los sistemas de Taxis, Relaciones Lógico-Semáticas y Tema, los patrones gramaticales se mantienen.

TEXTO	Metafución Experiencial							Metafución Lógica							Metafución Textual		
	TRANSITIVIDAD-PROCESOS-							TAXIS		R. LOG-SEM					TEMA EXPERIENCIAL		
	E.	Ma.	Me.	R. A.	R. I.	V.	C.	P.	H.	El.	Ex.	R.	L.	I.	Pa.	Pro.	Cir.
VIÈTE	4	3	3	30	20	1	0	19	14	0	15	17	0	1	37	19	5
% Total	7%	5%	5%	49%	33%	2%	0%	58%	42%	0%	45%	52%	0%	3%	61%	31%	8%
DESCARTES	4	10	5	14	3	3	6	15	22	1	10	23	0	3	19	18	8
% Total	9%	22%	11%	31%	7%	7%	13%	41%	59%	3%	27%	62%	0%	8%	42%	40%	18%
Total por tipo	8	13	8	44	23	4	6	34	36	1	25	40	0	4	56	37	13
% total tipo	8%	12%	8%	42%	22%	4%	6%	49%	51%	1%	36%	57%	0%	6%	53%	35%	12%
E1	4	19	8	6	16	0	1	14	22	2	14	15	0	5	22	27	5
% Total	7%	35%	15%	11%	30%	0%	2%	39%	61%	6%	39%	42%	0%	14%	41%	50%	9%
E2	3	11	10	11	18	0	0	8	30	2	6	24	0	6	25	23	5
% Total	6%	21%	19%	21%	34%	0%	0%	21%	79%	5%	16%	63%	0%	40%	47%	43%	9%
E3	6	20	12	14	22	1	0	13	25	3	10	21	1	3	34	32	9
% Total	8%	27%	16%	19%	29%	1%	0%	34%	66%	8%	26%	55%	3%	8%	45%	43%	12%
Total por tipo	13	50	30	31	56	1	1	35	77	7	30	60	1	14	81	82	19
% total tipo	7%	27%	16%	17%	31%	1%	1%	31%	69%	6%	27%	54%	1%	13%	45%	45%	10%

Tabla 45. Tabla de frecuencias sobre los elementos de los sistemas de TRANSITIVIDAD, TAXIS, LÓGICO-SEMÁNTICA y TEMA

Como puede notarse en las frecuencias, se identifica claramente una diferencia entre los Procesos Materiales, Atributivos y Mentales, siendo estos más empleados por estudiantes, en comparación de los matemáticos antiguos. Es decir, en los textos antiguos, puede interpretarse la importancia por destacar las asignaciones que se hacen entre los Participantes mediante Procesos Relacionales Atributivos, mientras que en el caso de la y los estudiantes, por estar inmersos en el discurso algebraico actual, se les asigna mayor importancia a las relaciones simbólicas, por ello predominan, los Procesos Relacionales Identificativos. Además, puede observarse también que los Procesos Mentales son empleados mucho más por la y los estudiantes que Viète y Descartes. Esto puede deberse a las instrucciones recibidas en la EBT, en la que se les pidió por parte del investigador explicar su método, por lo tanto, se ve la intencionalidad de expresar su pensamiento.

9.1.5. P4. ¿Qué características presentan los textos algebraicos de algebristas y estudiantes en términos de intersemiosis?

Presentamos primero lo obtenido respecto a las características gramaticales de los textos de Viète y Descartes, y posteriormente lo respectivo a la y los estudiantes.

9.1.5.1. Sistemas y mecanismos de intersemiosis en los textos de Viète y Descartes

Dentro del primer aspecto a destacar en términos intersemióticos es que, en todos los textos analizados de los algebristas antiguos, el simbolismo no fungió como un recurso semiótico autónomo, sino más bien adoptado en el Lenguaje Natural.

Aunado a las decisiones gramaticales específicas, detalladas previamente, la complejidad del lenguaje algebraico de Viète y Descartes se puede notar también a nivel discursivo tomando en cuenta los sistemas de intersemiosis y los respectivos mecanismos de intersemiosis que se identificaron presentes en ambos textos.

Se determina que los mecanismos de intersemiosis descritos por O'Halloran (2005) no fueron encontrados en su totalidad en los textos analizados, en particular, el mecanismo de *mezcla intersemiótica* se identificó como ausente, lo cual explica, justo la dificultad vista a nivel gramatical de las imágenes, en tanto, al no incorporar los recursos semióticos del simbolismo y lenguaje natural, dificulta en cierta medida la cohesión entre los significados que en conjunto se intentan desarrollar en los textos. En el caso del discurso matemático actual, el recurrir a la Repetición Directa como mecanismo de Referencia discursiva permite al lector recuperar de manera inmediata los Participantes, Procesos y Circunstancias relevantes detallados en el Lenguaje Natural sobre las imágenes.

No obstante, los discursos construidos muestran integración sistemática de los significados de los tres recursos semióticos relativos a lo analítico algebraico al presentar el uso de los mecanismos de intersemiosis restantes. Con estos mecanismos los discursos permiten construir significados articulados que permiten justamente un cambio de paradigma en el quehacer matemático algebraico, toda vez que la forma en la que la imagen era usada previo a ellos, fungía únicamente como una presentación visual que justificaba o daba sentido a los pasos descritos en la demostración de la regla algebraica. Los Participantes, Procesos y Circunstancias, como pueden identificarse en el texto de al-Khwârizmî aludían a figuras geométricas y lados de las figuras, lo cual se mantuvo hasta antes de Viète Y Descartes, con algunas excepciones. Viète y Descartes, por su parte, investigaban en las imágenes relaciones que les obligaba a destacar y representar distintos tipos de Participantes, Procesos y Circunstancias, como por ejemplo el movimiento, en el caso de Descartes, y por lo tanto, en el texto, la intersemiosis se torna distinta pues se requiere de otro tipo de recursos no presentes en los previos algebristas. Por ejemplo, el hecho de que se identifiquen más de un Ítem, Mini-géneros y Componentes. Este hecho, por sí mismo implica que los Mecanismos y Sistemas Intersemióticos sean usados más sistemáticamente.

En particular, se identificó también que el mecanismo de *metáfora semiótica*, es nulo en el discurso de Viète y casi nulo en el de Descartes, por lo que sus discursos conservan la tendencia hasta finales del Renacimiento de promover significados congruentes (Halliday, 1993a).

9.1.5.2. Sistemas y mecanismos de intersemiosis en los textos de la y los estudiantes E1, E2 y E3

En términos de los sistemas intersemióticos analizados se identifica que los textos de E1 y E2 son similares en el uso de estos, únicamente en el caso de lo Textual se diferencian por el uso de Enlaces Discursivos. El texto de E3 se identifica limitado en el uso de estos sistemas por el hecho de no recurrir a las imágenes y a complejos clausulares simbólicos.

En comparación con los textos de Viète y Descartes, claramente, en estos textos puede identificarse un paradigma distinto al discurso algebraico, en tanto que el uso de los sistemas intersemióticos coincide con lo reportado por O'Halloran (2005) respecto al discurso matemático actual. Puede notarse cómo se presentan más Mini-géneros, Ítems y Componentes en los textos de la y los estudiantes, lo cual implica un uso más sistemático de los distintos sistemas y mecanismos de intersemiosis.

Por ejemplo, el uso de VÍNCULOS DISCURSIVOS en términos de viñetas numéricas propicia un significado lógico robusto, toda vez que se señala un orden y secuencia lógica entre apartados del texto, como en el caso de E1. Asimismo, la MEZCLA INTERSEMIÓTICA, ausente en los textos antiguos, permite robustecer el discurso matemático en el sentido de que permite de manera sistemática un rastreo de los Participantes, Procesos y Circunstancias simbólicos que sustituirán en el recurso del lenguaje natural, a los Participantes geométricos retóricos.

Es importante notar también, cómo estos sistemas y mecanismos permiten codificar, no solo la experiencia a nivel simbólico, sino también lo textual y lógico. En este sentido, puede verse cómo los significados Textuales y Lógicos a nivel de la intersemiosis son más robustos en comparación que los de Viète y Descartes.

El mecanismo de METÁFORA SEMIÓTICA es más frecuente en estos textos en comparación con los de Viète y Descartes, lo cual deja ver una concepción de las ecuaciones algebraicas como objetos.

10

Las aportaciones: conclusiones y discusión

10.1. Sobre la actividad analítica algebraica, la ecuación paramétrica y la geometría analítica escolar

En este apartado mencionamos los aportes de la investigación a nivel epistemológico respecto al análisis algebraico y la ecuación paramétrica.

Los estudios respecto a los aportes de Viète y Descartes al desarrollo del álgebra destacan, entre lo principal, el establecimiento de un paradigma algebraico más general (p. ej. Kieran, 1992; Sfard, 1995) gracias a la construcción de una semiótica nueva para el álgebra, a propósito de su carácter ostensible; que como consecuencia, de acuerdo con otros trabajos, sentó las bases para mostrar la importancia del uso de parámetros e incógnitas en la actividad algebraica (p. ej. Chevallard, 1989; Gascón, 1994-1995; Ruiz-Munzón, Bosch, y Gascón, 2011). Sin embargo, como hemos argumentado, se identificó una falta de caracterización de la actividad matemática en la que ambos se involucraron y su relación con la génesis de las ecuaciones paramétricas. Además de que al respecto de las ecuaciones paramétricas, no se ha atendido de manera significativa la noción de parámetro, notándose incluso una disminución de estudios en esta línea en las últimas décadas de acuerdo con algunos trabajos (p. ej., Furinghetti, y Paola, 1994; Warren, Trigueros, y Ursini, 2016).

En esta línea, el presente trabajo muestra una ruta hasta ahora inexplorada en cuanto a la génesis de las ecuaciones paramétricas, destacando la importancia de los problemas geométricos, que denominamos *complejos* por las características ya presentadas, en la producción de las cantidades paramétricas, y en consecuencia, las ecuaciones con parámetros y variables. Se propone así una ruptura con la caracterización clásica de lo que representa el parámetro, la cual versa sobre la generalización de relaciones numéricas. Por ejemplo, Kieran (1992, p. 390) mencionaba que los parámetros son la "expresión de soluciones generales y una herramienta para probar las reglas que rigen las relaciones numéricas".

De esta manera, lo obtenido en el trabajo nos permite identificar una naturaleza geométrica intrínseca a la constitución de las cantidades paramétricas, siendo estas últimas una semiotización de magnitudes geométricas, como se entendían en la época de Viète y Descartes, y cuya naturaleza difería de las magnitudes geométricas variables, puesto que las primeras representan las condiciones de las construcciones, razón por la cual era importante diferenciarlas a nivel semiótico.

Esta aportación responde también a la necesidad planteada en otros trabajos respecto al campo del álgebra (p. ej., Kieran, 2007; Ruíz-Munzón, 2010; Warren, Trigueros, y Ursini, 2016), los cuales señalan la importancia del estudio de contenidos algebraicos más allá de los niveles básicos, y su articulación con otros dominios como la geometría.

Bajo estas ideas, la actividad analítica algebraica que reportamos en este trabajo responde a un paradigma significativamente diferente en el desarrollo del álgebra, en tanto que se concibe como un método para sistematizar la geometría, como hemos demostrado. En este sentido, esta actividad matemática nueva en el Renacimiento representa el surgimiento de la Geometría Analítica, como la conocemos hoy en el sistema escolar. Cabe destacar que para robustecer esta epistemología habría que analizar la contribución de Pierre de Fermat para identificar las particularidades de su actividad matemática, lo cual se identifica como una de las prospectivas del trabajo.

Por otro lado, a propósito de los resultados de la investigación, es posible contrastar, de manera libre, la naturaleza epistemológica de la actividad matemática relativa al análisis algebraico con su análoga en el contexto escolar; la geometría analítica. Como se ha argumentado en López-Acosta y Montiel (2021b) la asignatura de geometría analítica suele centrarse en el plano cartesiano y las ecuaciones algebraicas, predominando una racionalidad centrada en la coordenada rectangular y en las fórmulas (véase Figura 55). No obstante, los sistemas de referencia en Descartes no tenían siempre la propiedad de ortogonalidad, como en el caso del Problema de Pappus. Por lo tanto, el tratamiento de problemas geométricos en la escuela bajo esta perspectiva dista mucho de la actividad matemática expresada en las producciones analizadas de Viète, Descartes y la y los estudiantes, toda vez que no existe propiamente una algebrización de relaciones geométricas, más aún por el hecho de que el rol sustancial de la proporción en esta práctica se nota ausente en estos documentos (ver Figura 56). De hecho, algunos trabajos mencionan que el razonamiento proporcional resulta importancia sustancial en general para el éxito en álgebra (Reeder, 2017), aspecto que no es del todo propiciado.

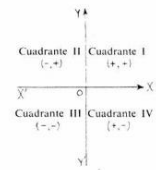
En este entretejido de idas, la consideración de todas las acciones y sub-acciones que hemos detallado, partiendo de conocer el método del análisis, la justificación epistémica relativa a la conceptualización de que toda relación de equivalencia puede ser una ecuación y viceversa, el uso de los conocimientos geométricos para determinar tales relaciones de equivalencia, la sustitución semiótica, etc., están ausentes de la actividad matemática escolar en esta área.

Tabla de materias

CAPITULO 1

Coordenadas rectangulares

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES. El sistema de coordenadas rectangulares divide al plano en cuatro cuadrantes por medio de dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto O. La horizontal $X'OX$ se denomina eje x, la vertical $Y'OY$, eje y, y ambas constituyen los dos ejes de coordenadas. El punto O se llama origen del sistema.



La distancia de un punto al eje y se llama *abscisa* del mismo. La distancia de un punto al eje x es la *ordenada*, y ambas constituyen las *coordenadas* del punto en cuestión y se representan por el símbolo (x,y). Las abscisas son positivas cuando el punto está situado a la derecha del eje y, y negativas en caso contrario. Las ordenadas son positivas cuando el punto está por encima del eje x, y negativas en caso contrario.

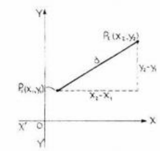
Para representar puntos de coordenadas conocidas hay que adoptar una escala adecuada sobre cada uno de los ejes coordenados. Ambas escalas pueden ser iguales o distintas.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. La distancia d entre dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

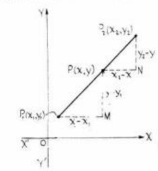
Por ejemplo, la distancia entre los puntos (4, —1) y (7, 3) es

$$d = \sqrt{(7-4)^2 + (3+1)^2}$$
$$= 5 \text{ unidades.}$$



PUNTO DE DIVISION es el que divide a un segmento en una relación dada. Consideremos los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ y la recta que determinan. Sea $P(x,y)$ un tercer punto que divida al segmento en la relación $\frac{P_1P}{PP_2} = r$. Como P_1P y PP_2 son del mismo sentido, dicha relación es positiva. Si el punto de división $P(x,y)$ estuviera situado en la prolongación del segmento, a uno u otro lado del mismo, la relación $\frac{P_1P}{PP_2} = r$ sería negativa, ya que P_1P y PP_2 tendrían sentidos opuestos.

Teniendo en cuenta los triángulos semejantes de la figura, $\frac{P_1M}{PN} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{P_1P}{PP_2} = r.$



1

INDICE

GEOMETRIA ANALITICA PLANA

CAPITULO PRIMERO

SISTEMAS DE COORDENADAS

CAPITULO II

GRAFICA DE UNA ECUACION Y LUGARES GEOMETRICOS

6 GEOMETRIA ANALITICA PLANA

números reales, x y y, se llaman *coordenadas* de P y se representan por (x, y). Las abscisas medidas sobre el eje X a la derecha de O son positivas y a la izquierda son negativas; las ordenadas medidas sobre Y arriba de O son positivas y abajo son negativas. Los signos de las coordenadas en los cuatro cuadrantes están indicados en la figura 4.

Es evidente que a cada punto P del plano coordenado le corresponden uno y solamente un par de coordenadas (x, y). Recíproca-

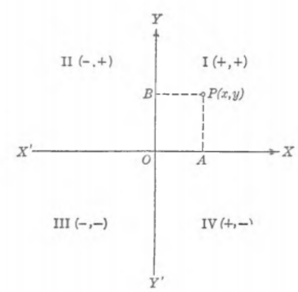


Fig. 4

mente, un par de coordenadas (x, y) cualesquiera determina uno y solamente un punto en el plano coordenado.

Dadas las coordenadas (x, y), $x \neq y$, quedan determinados dos puntos, uno de coordenadas (x, y) y otro de coordenadas (y, x) que son diferentes. De aquí que sea importante escribir las coordenadas en su propio orden, escribiendo la abscisa en el primer lugar y la ordenada en el segundo. Por esta razón un par de coordenadas en el plano se llama un par *ordenado* de números reales. En vista de nuestra discusión anterior, podemos decir que *el sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par ordenado de números reales*.

La localización de un punto por medio de sus coordenadas se llama *trazado* del punto. Por ejemplo, para trazar el punto $(-5, -6)$, señalaremos primero el punto A, sobre el eje X, que está 5 unidades a la izquierda de O; después, a partir de A, sobre una paralela al

Figura 55. Las coordenadas rectangulares como base de la geometría analítica escolar (en la fila de arriba se presenta la lista de contenidos del libro de texto de Kindle, 1977, p.1; en la fila de abajo se presenta la lista de contenidos de Lehman, 1989, pp. 1, 6)

Eje	Componentes	Contenido central	Contenidos específicos	Aprendizajes esperados	Productos esperados
•**Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.**	•**Sistema de referencia y localización: Elementos de Geometría analítica**	•**La Geometría analítica como método algebraico para la resolución de tareas geométricas. El tratamiento de los sistemas de coordenadas.** Conceptos básicos del sistema de coordenadas rectangulares, orientación y posición en el plano. El papel del origen de coordenadas en los sistemas de referencia.	•Sistema de coordenadas cartesiano. Me oriento en el plano: ¿puedo hacer un mapa del sitio en el que vivo? ¿Qué ruta es más corta? •Los lugares geométricos básicos: la recta y la circunferencia. ¿Cómo se construye la ecuación de la recta? ¿Cuáles son sus invariantes? Camino en línea recta, y el láser, ¿cómo lo hace? ¿Qué sabes del movimiento circular? Algunos ejemplos de la naturaleza, ¿conoces algunos? •Otros lugares geométricos: la elipse, la parábola y la hipérbola. ¿Qué significan esas palabras?, ¿de dónde vienen, conoces su historia? •La longitud de segmento, el punto medio, la perpendicular a un segmento, entre otras. Intersección de rectas y demás lugares geométricos. ¿Puedes doblar un papel que deje marcado en su doblez dos segmentos perpendiculares?, ¿dos segmentos paralelos?, ¿cómo lo hiciste?	•Caracteriza de forma analítica los problemas geométricos de localización y trazado de lugares geométricos. •Ubica en el plano - en distintos cuadrantes - y localizan puntos en los ejes y los cuadrantes mediante sus coordenadas. •Interpreta y construye relaciones algebraicas para lugares geométricos. Ecuación general de los lugares geométricos básicos.	•Colocar en un sistema cartesiano, tres lugares de la zona en la que vivo. •Calcular la distancia más corta entre la escuela y mi casa. •Representar en un plano dos rectas paralelas, encontrar sus ecuaciones. •Dibujar en el plano dos circunferencias concéntricas, encontrar sus ecuaciones. •Localizar una recta en el plano y bosquejar su perpendicular por un punto dado.

12

RELACIÓN DE BLOQUES DEL PROGRAMA CON LOS CONTENIDOS DEL NUEVO MODELO EDUCATIVO DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS III

EJE	COMPONENTE	CONTENIDO CENTRAL	BLOQUE
Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.	Sistema de referencia y localización: Elementos de Geometría analítica.	La Geometría analítica como método algebraico para la resolución de tareas geométricas. Conceptos básicos del sistema de coordenadas rectangulares, orientación y posición en el plano. Reconocimiento y construcción de los lugares geométricos: recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. Tratamiento visual y representaciones múltiples de los lugares geométricos: coordenadas rectangulares y paramétricas, puntos singulares, raíces y comportamiento asintótico.	I II III IV V

14

CLAVE CG	CLAVE CDB	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes Esperados
CG 5.6 CG 8.3	CDBM 1 CDBM 8	Lugar geométrico de líneas rectas y curvas. • Sistemas de coordenadas rectangulares. • Segmentos rectilíneos. • Distancia entre dos puntos. • División de un segmento en una razón dada. Perímetros y áreas de figuras en el plano.	Identifica las características de los diferentes lugares geométricos en el plano. Estima la distancia entre dos puntos utilizando segmentos rectilíneos. Representa gráficamente las coordenadas del punto medio y una razón dada sobre un segmento rectilíneo. Analiza diferentes estrategias para el cálculo de perímetros y áreas en el plano. Selecciona diferentes maneras para localizar puntos en el plano.	Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. Aporta ideas en la solución de problemas promoviendo su creatividad.	Usa los conceptos básicos de la Geometría Analítica, promoviendo el pensamiento reflexivo y lógico como una nueva forma de interpretar su entorno espacial; contribuyendo a la construcción de nuevos conocimientos que aplique en su vida cotidiana. Emplea el cálculo de perímetros y áreas en el plano cartesiano para resolver creativamente, problemáticas de su contexto.

Figura 56. Capturas de los planes y programas de estudio relativos a la asignatura de geometría analítica SEMS (2017, p. 126-127)

En conjunto, lo obtenido nos lleva naturalmente a cuestionarnos esa naturaleza de la geometría analítica escolar y sus alcances. Si se considera que la actividad matemática que realizaron la y los estudiantes en la EBT, podemos ver claramente, que lo que pudieron hacer es mucho más complejo que lo que se suele solicitarse en la escuela respecto a este dominio. Incluso, llama la atención el hecho de que en el caso de la estudiante (E2), en el *pre-test* es capaz de determinar la ecuación de la circunferencia (ver Figura 57, I), lo cual indicaría que el conocimiento escolar lo domina, más aún cuando al momento de resolver la Actividad 2, se reconoce en su hoja de trabajo cómo intenta, sin éxito, asociar la ecuación canónica de la circunferencia con los elementos de la construcción (ver Figura 52, II).

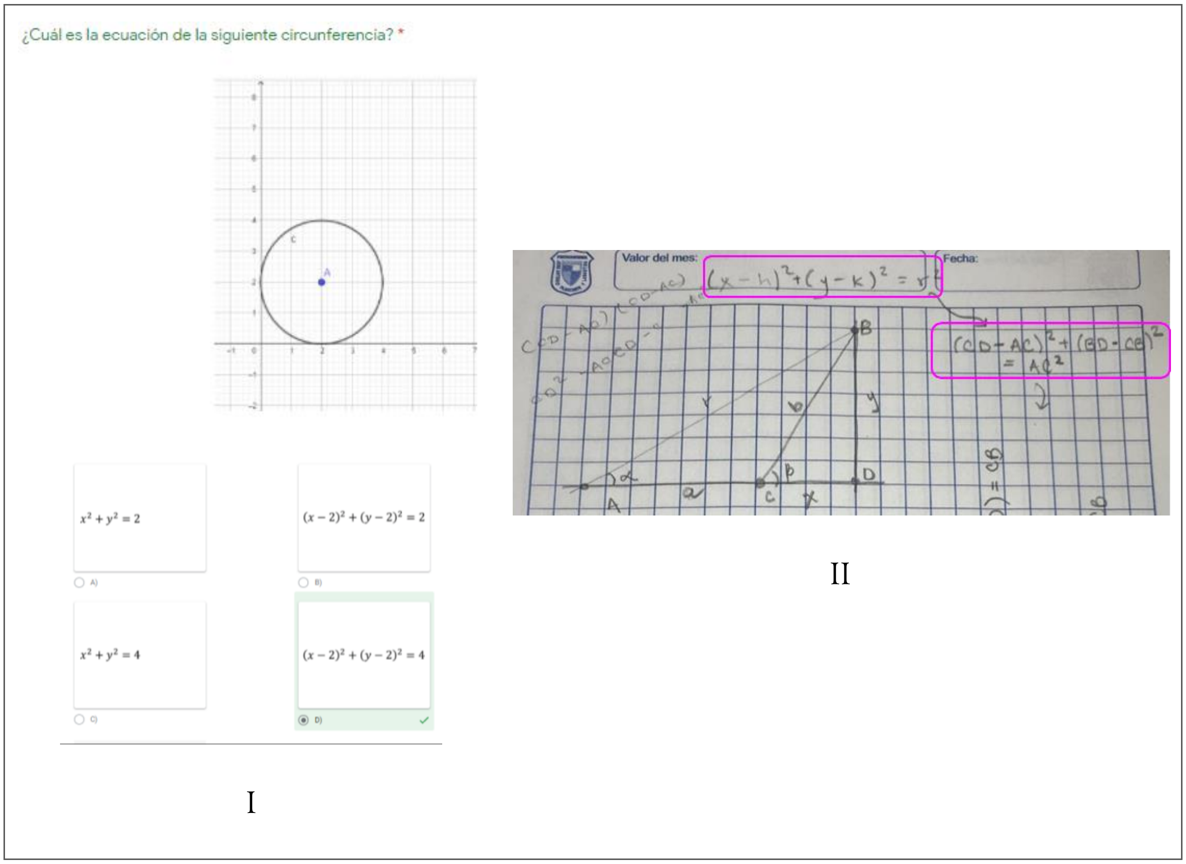


Figura 57. Comparación entre la actuación de la estudiante E2 en el *pre-test* y en la Actividad 2 de la EBT

Este fenómeno es importante investigarlo, puesto que como se vio en los dos tipos de análisis de algebristas y estudiantes, se puede considerar que el análisis algebraico, no requiere de las coordenadas rectangulares para propiciar la algebrización de la geometría. Incluso, en experiencias fuera del contexto de la investigación se ha discutido con estudiantes en formación para profesores(as) de matemáticas situaciones como la siguiente:

<u>Problema:</u> La curva rosada es una parábola y la recta es su directriz. Determina la ecuación de la parábola sin usar un plano cartesiano. Esto implica que no pueden recurrir a ninguna fórmula que emplee coordenadas. Por ejemplo, no se permite usar ni la fórmula de distancia entre dos puntos, ni la de distancia de un punto a una recta, por mencionar algunas.

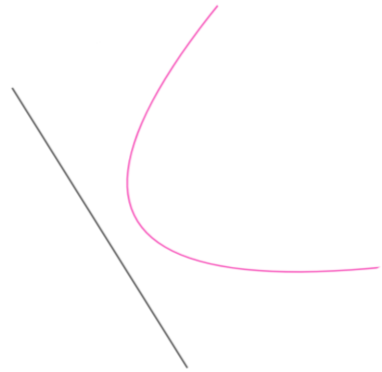


Figura 58. Problema planteado para estudiantes (López-Acosta, 2022)

Lo observado es que las y los estudiantes, a pesar de tener un dominio respecto a las ecuaciones de las cónicas, desconocen qué deben hacer y qué información es necesaria para la determinación de la ecuación de la parábola. Al ver la imagen consideran que la curva ha sufrido una rotación, respecto a un eje horizontal, lo cual deja ver lo arraigado que tienen este discurso matemático escolar centrado en el "plano cartesiano". Lo mismo ocurre cuando se solicita a profesores(as) y estudiantes determinar la ecuación que representa el lugar geométrico del punto B, de la Actividad 2 de la IBD (López-Acosta, 2022)[29]. Es decir, no se promueve en el discurso escolar una conceptualización respecto de qué implica algebrizar relaciones geométricas.

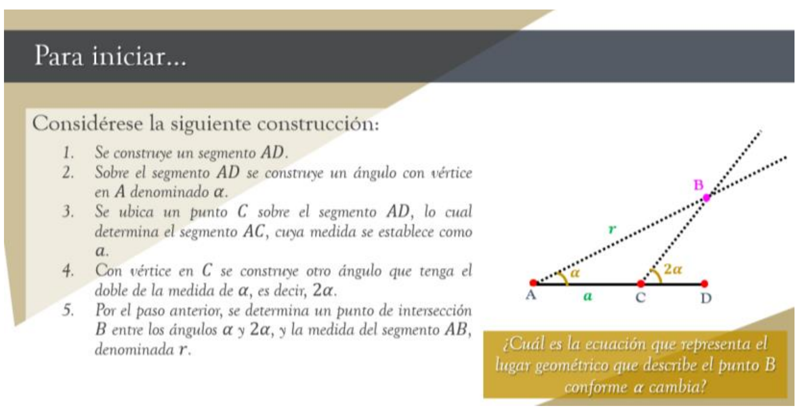


Figura 59. Construcción del Punto B planteada a profesores y estudiantes universitarios

Bajo estas ideas, consideramos que los resultados de este trabajo pueden aportar en el futuro elementos que permitan valorar y robustecer el discurso Geométrico Analítico Escolar.

[29] https://www.youtube.com/watch?v=OhueEGMurZ8

10.2. Sobre el lenguaje algebraico en el análisis algebraico y sus sistemas y mecanismos de intersemiosis

A pesar de que no se menciona en este documento, en la investigación nos propusimos de partida, dada la revisión bibliográfica, abordar lo que en distintas investigaciones relativas al lenguaje en la ME reconocen como la *conciencia metalingüística* (ver Pimm, 1987; Halliday, 1993; McGregor y Priece, 1999; Drouhard y Teppo, 2004; Schleppegrell, 2007), la cual puede entenderse como "la capacidad lingüística que permite a un usuario de un idioma reflexionar y analizar el lenguaje hablado o escrito" (McGregor y Priece, 1999, p. 451).

No obstante, nos percatamos que puesto que la actividad metalingüística es "fruto de la necesidad de ajustar el instrumento de mediación social (la lengua) a las diversas situaciones de uso" (Fontich, 2010, p. 45), se requiere la agencia directa del/la estudiante en este proceso, lo cual debería generarse posterior a la obtención de un conocimiento profundo sobre los modelos gramaticales de referencia (Pascual, 2013). Por esta razón, en la investigación decidimos centrarnos en un entendimiento robusto de la gramática como punto de partida.

En López-Acosta y Rodríguez-Vergara (2021), y como consecuencia de las reflexiones y hallazgos derivadas de este trabajo de investigación, reportamos una postura respecto al lenguaje matemático en general, en términos de un macrolenguaje, el cual integra diversos tipos de sublenguajes asociados a sus distintas ramas como la geometría, algebra y trigonométría, entre otros. Esto por el hecho de que de acuerdo con la Teoría Lingüística Sistémico-Funcional, una de las funciones del lenguaje es codificar la experiencia de las personas, siempre al interior de un contexto de situación. Por lo tanto, bajo esta premisa, los distintos sublenguajes de las matemáticas deben mostrar diferencias sustanciales en sus funciones, toda vez que cada rama aborda distintos tipos de situaciones, problemas, razonamientos y objetos matemáticos. No obstante, este entendimiento de las particularidades se obtendrá en la medida de que se articule con las consideraciones epistemológicas.

Por ejemplo, considérese la tercera cláusula del texto Babilonio,

La mitad de 1	se rompe
Participante	**Proceso**
Alcance	Material
Retórico: Geométrico	Retórico: Geométrico

El Participante "*La mitad de 1*" pareciera corresponder a una cantidad numérica *per se*, sin embargo, con base en la interpretación de Høyrup (1986, 2002), en esta cláusula se identifica que corresponde a un objeto geométrico-figural que representa la mitad del área de un rectángulo de base uno y altura desconocida (anacrónicamente x). El Proceso "*se rompe*" representa la acción de dividir el rectángulo a la mitad para poder mover cada una de las dos mitades del rectángulo y así formar un cuadrado completo.

Como se pudo identificar en esta investigación, las características gramaticales de Viète, Descartes, y la y los estudiantes muestran una complejidad gramatical diferente a la mayoría de los textos de un paradigma no analítico algebraico. Por ejemplo, contrario a lo que se suele asociar al lenguaje algebraico en lo escolar, en términos de un discurso primordialmente simbólico, puede notarse que los textos de Viète y Descartes no empleaban el simbolismo como un recurso semiótico autónomo (López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021; López-Acosta y Montiel, 2021a). Esto confirma los hallazgos de los EHE clásicos en los que se establece que no es necesario el simbolismo para dar muestra de pensamiento algebraico (Rojano, 1996; Radford, 2001). Sin embargo, notamos que la diferencia entre estos estudios y el reportado aquí es que esta característica del simbolismo abarca, además de los textos completa o mayormente retóricos y sincopados —sobre los cuales se suele justificar la independencia del pensamiento algebraico respecto del simbolismo—, aquellos que representan al álgebra simbólica, como los de Viète y Descartes. Así, encontramos que en los estudios previos, el foco es el pensamiento, tomando en consideración la relación entre el uso del simbolismo y su influencia con la puesta en funcionamiento de ideas, nociones y métodos algebraicos de resolución de problemas, mientras que aquí abordamos esencialmente la semiótica del texto, entendiéndola como una *instancia del lenguaje* (Halliday y Mathiessen, 2014). Por lo tanto, la autonomía del discurso algebraico respecto al simbolismo no solo se identifica a nivel conceptual, sino también a nivel del texto, incluso los considerados en la fase simbólica.

En López-Acosta y Rodríguez-Vergara (2021), se destaca también que en el caso de lo experiencial, podemos decir que el significado experiencial de los textos algebraicos analizados se centra en el establecimiento de relaciones entre los distintos tipos de Participantes para conformar expresiones o ecuaciones que mediante Procesos Materiales derivarán en objetos nuevos para la solución del problema, sin importar si el problema es numérico o geométrico. Esto es posible con Procesos que no se aplican sobre los objetos matemáticos en sí mismos, sin embargo, contextualizan el procedimiento y método llevado a cabo. En este sentido, se identifica una intención didáctica y descripción del procedimiento del autor hacia un destinatario.

Asimismo, mostramos que los objetos matemáticos Participantes en estos textos no son exclusivamente números, como se tiende a considerar, sino también geométricos. Por ejemplo, en la siguiente definición: “en álgebra se usan letras como x, y, a, b y c para representar números” (Sullivan, 2006, p. 20). Esto contrasta también con posturas como la de Drouhard y Teppo (2004), en cuanto a la semántica de este lenguaje, en la que se señala que las expresiones algebraicas denotan funciones matemáticas.

Otro aspecto importante y diferente a los estudios del lenguaje algebraico, respecto de los textos algebraicos antiguos es la congruencia semiótica que guarda entre sus distintos recursos semióticos. Drouhard y Teppo (2004) menciona que entre las dificultades del lenguaje algebraico se encuentra las características objetivadas heredadas del lenguaje matemático general, producidas principalmente por nominalizaciones, lo cual puede interpretarse como *metáforas gramaticales* (Halliday, 1998). En los textos antiguos y muy probablemente durante toda esta fase de desarrollo del álgebra (250 a. c. – 1637 d. c.) el discurso es congruente en este sentido. No obstante, sí se identifica un carácter metafórico pero a nivel intersemiótico. De manera más sistemática, este mecanismo intersemiótico es visible en los textos de la y los estudiantes cuando en una cláusula retórica se incrusta la cláusula simbólica (ecuación simbólica) con la función de un grupo nominal, como la siguiente de Descartes: "y así que la ecuación [[que se debía encontrar]] es [[$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$,]]"; o bien en las siguientes por parte de estudiantes: *"ΔNKL y ΔCKB [[$\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{KB}$]]" "-Planteamos: [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$]]".*

Este tipo de construcción metafórica, presente en algunos textos del *corpus*, no coincide propiamente con una nominalización, ya que no se trata de un cambio de categoría gramatical en el lenguaje natural, sino de una *cosificación* (Sfard, 2008; Morgan, 2014), puesto que el Proceso de "*equivaler*" (igualar dos expresiones), se convierte al objeto "*equivalencia*" (una ecuación). Por lo tanto, estos hallazgos amplían estas caracterizaciones sobre el lenguaje algebraico provenientes de las generalidades del lenguaje matemático actual.

Es importante, empero, que se considere que el simbolismo no es por sí mismo el lenguaje de las matemáticas, sino un recurso que este lenguaje ha creado para contribuir con una función específica. En este sentido, O'Halloran (2005) menciona que:

> El *lenguaje* [natural] es típicamente usado para contextualizar el problema matemático; *las imágenes visuales* muestran las relaciones y proveen medios para el razonamiento visual espacio temporal; y el *simbolismo* es usado para resolver el problema. Los usos integrados de estos tres recursos semióticos expanden el poder semántico de las matemáticas en donde el todo es mayor que la suma de sus partes (p. 84, énfasis propio).

No obstante, se considera que el simbolismo actual, como se ha detallado en términos epistemológicos, adquiere una función más allá de solo ser el medio para resolver el problema, puesto que por ejemplo, para Descartes el problema no quedaba resuelto con la ecuación, sino después de la construcción geométrica de las curvas, al igual que para Viète la ecuación solo describía la relación general para cualquier tipo de particularidades de la figura geométrica estudiada como los triángulos, por lo que la solución también consistía en la construcción de la figura para cierto caso específico.

En este sentido, es importante destacar que el simbolismo también adquiere este uso de recurso visual para la detección de patrones simbólicos en el estudio de las expresiones algebraicas, puesto que el análisis algebraico no solo trata con problemas específicos a resolver sino con el estudio de las propiedades de las ecuaciones y sus raíces como los problemas analizados.

En palabras de Stedall (2007, p. 383) aludiendo a Thomas Harriot: "[L]as matemáticas de Harriot casi no tienen palabras, porque él espera [...] que su lector pueda ver lo que está haciendo, ya sea siguiendo un argumento simbólico o a partir de la disposición de su material".

Así el discurso algebraico, en particular, como subconjunto del matemático se fue configurando con el paso del tiempo como un discurso que incorporó sistemáticamente los tres recursos semióticos para convertirse en un discurso eminentemente escrito y, por tanto, con una función visual.

Con base en estas reflexiones queda pensar que la actividad algebraica escolar en los niveles medio superior y superior, tendría que perfilarse a incorporar este tipo de características encontradas, toda vez que las asignaturas que se abordan desde el bachillerato ya conllevan esta carga epistemológica y lingüística respecto a este tipo particular de actividad matemática.

10.3. Sobre la intersemiosis

En relación con lo anterior, Chico (2018) señala que al respecto del lenguaje algebraico se han reportado esencialmente sus características semánticas y sintácticas respecto al simbolismo. Hemos mostrado que en sí mismo este recurso semiótico no fue autónomo en los textos antiguos. Sin embargo, estos acercamientos en el campo no abordan sistemáticamente la relación del simbolismo con otros recursos semióticos como recursos que coexisten en el discurso algebraico.

En la primera fase del estudio, resultó claro que la tecnología y el tipo de discurso disponibles en la época de Viète y Descartes limitaban la intersemiosis entre las imágenes, el simbolismo y el lenguaje natural, pues los significados textuales y lógicos, principalmente se veían afectados en los textos, en comparación con el lenguaje algebraico actual. Por ejemplo, los mecanismos de MEZCLA INTERSEMIÓTICA, SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN, VÍNCULOS DISCURSIVOS, no fueron encontrados. No obstante, en el caso de la y el estudiante E2 y E1, respectivamente, los textos muestran un uso consistente de estos sistemas y mecanismos para un rastreo sistemático de los Participantes, Procesos y Circunstancias entre los tres recursos semióticos. En este sentido, cuando se señala en algunos estudios que hace falta la caracterización de competencias lingüísticas que los estudiantes deben aprender (ver Morgan, et. al. 2005; Morgan, et. al., 2014), encontramos que dentro de estas competencias lingüísticas deben de considerarse el uso y desarrollo de los sistemas y mecanismos de intersemiosis, toda vez que permiten robustecer la producción de significados y la cohesión de los textos matemáticos.

10.4. Las dimensiones epistemológica y lingüística

Encontramos que el análisis de las dimensiones lingüísticas y epistemológica permiten un acercamiento robusto hacia la naturaleza, no solo del pensamiento matemático, sino también de su lenguaje. Esto es importante puesto que como menciona Duval, "No hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" (Duval, 1999, p. 25).

La relación *conocimiento–lenguaje* es una de las intrigantes relaciones que se han abordado en el campo de la ME, en el tenor de identificar en qué medida el lenguaje permite la construcción de las ideas matemáticas. Existen muchas posturas del lenguaje que relacionan estos dos conceptos. Por mencionar algunas, se tienen aquellas que consideran al lenguaje como código, como representación, y como discurso (ver Sierpinska, 2005). En muchos de estos enfoques hacia la didáctica de las matemáticas se tiene la consideración de que las prácticas discursivas son las que permiten el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, Sfard (2008) en su enfoque de *comognition*, considera que el conocimiento es un tipo de lenguaje interno con uno mismo, por lo tanto, el pensamiento matemático es esencialmente un discurso individual respecto a las ideas matemáticas y, en la medida de que ese discurso se inserte en prácticas discursivas sociales, como las del aula, las ideas matemáticas pueden robustecerse a través de procesos de objetivación y alienación.

No obstante, Sierpinska (2005, p. 216), considera que "esta conceptualización no le hace justicia al pensamiento matemático, y no parece útil para los propósitos de la educación matemática", señalando que una teoría discursiva para el aprendizaje de las matemáticas sería insuficiente para explicarlo. Esta autora señala los siguientes argumentos para justificar su planteamiento:

- La comunicación es un acto voluntario; no todo el pensamiento es voluntario.
- El pensamiento matemático requiere una visualización espacial bien desarrollada (no sólo en pero también en el tratamiento de los números y el álgebra); la visualización espacial es viendo cosas y moviendo configuraciones espaciales alrededor de la mente; "viendo" no es señalar cosas a uno mismo intencionadamente y por lo tanto no puede ser considerado como un acto de comunicación.
- Aunque las "funciones mentales superiores" son a menudo analíticas, es decir, mediadas por sistemas de signos convencionales y, por lo tanto, de origen social, se basan en la actividad cerebral que tiene un origen biológico anterior al uso del signo convencional tanto en el desarrollo individual como en la evolución de la especie.
- No todas las instancias de comunicación son discursivas.
- El pensamiento discursivo no es necesariamente comunicacional (Sierpinska, 2005, p. 216)

En la misma línea, Radford (2003, p. 124), quien en un análisis sobre los límites epistemológicos del lenguaje se plantea la pregunta *¿podemos realmente atribuir al lenguaje este poder de crear los objetos teóricos del mundo del individuo?* menciona que el conocimiento no se objetiva exclusivamente vía el lenguaje, sino también por otros tipos de sistemas semióticos, como los gráficos, los gestos, etc.; además de que la objetivación se ve mediada por estos artefactos culturales en la interacción con otros. De aquí que menciona:

> Incluso en su forma más matizada, que añade una especie de movimiento de ida y vuelta entre los objetos así creados y los símbolos producidos por el discurso, *la proposición requiere que tengamos en cuenta otros elementos –elementos que se encuentran más allá del propio discurso*. [...] *Esta observación no significa que el lenguaje no posea ningún tipo de poder creativo*, sino que subraya dos puntos importantes. En primer lugar, muestra que *el lenguaje es uno de los medios de objetivación* (aunque uno muy importante*), pero que también hay otros*. En segundo lugar, vemos que, como medio de objetivación, el lenguaje no objetiva indiscriminadamente. La lengua, como cualquier otro sistema semiótico, *funciona dentro de una red cultural de significaciones*, *de la que la gramática y la sintaxis extraen su significado* (Radford, 2003, pp. 140-141, énfasis propio).

En este sentido, Radford refiere a las prácticas sociales que se encuentran detrás de la creación de los objetos, postura que compartimos de acuerdo con nuestro enfoque teórico. No obstante, estas consideraciones contemplan un significado del lenguaje matemático monosemiótico, es decir, como el sistema semiótico que aquí hemos caracterizado como el lenguaje natural.

Si contemplamos al lenguaje matemático como un sistema multisemiótico y un sistema multimodal, entonces, podremos estudiar de manera más robusta y significativa el quehacer matemático, pues al considerar el simbolismo, las imágenes y lo lingüístico, en conjunto con otros recursos semióticos, podremos ver cómo estos artefactos culturales, como señala Radford, son constituyentes del pensamiento y de la construcción de conocimiento en articulación con la actividad matemática específica.

El lenguaje matemático, particularmente el algebraico, visto como un lenguaje multisemiótico permite entender que el uso de los distintos sistemas y mecanismos de intersemiosis son necesarios para producir los significados matemáticos y poder hacer inteligible el mundo de las ideas.

Así, la articulación entre estas dos dimensiones consideramos provee de una aproximación sistémica al desarrollo del pensamiento y lenguaje matemático. Particularmente en esta investigación, respecto al algebraico enmarcado en el análisis algebraico.

Como se pudo mostrar con los análisis llevados a cabo, el uso de las herramientas lingüísticas y semióticas permitieron identificar significados que permanecerían ocultos si los textos son estudiados sin este tipo de referentes. Por ejemplo, dentro de muchos otros hallazgos, el reconocer que el recurso semiótico del simbolismo no es autónomo respecto del recurso semiótico del lenguaje natural, aún en los textos que son catalogados, desde los estudios clásicos, como simbólicos no hubiera sido posible si no se estudiaba con una mirada multisemiótica. O bien, la potencialidad de emplear el análisis lingüístico para interpretar los significados que estudiantes manifiestan en sus textos, tal y como se hizo en el segundo nivel de análisis de la EBT, es un aspecto de suma relevancia para la investigación, para ganar objetividad respecto de cómo interpretamos sus producciones. También, fue posible sustentar con estos análisis que los discursos de Viète y Descartes recurren a Participantes geométricos y no exclusivamente algebraicos la identificación de patrones en el uso de Participantes en los textos.

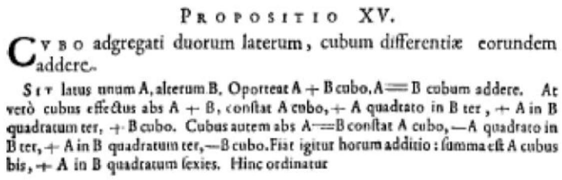
Esencialmente, la investigación cualitativa conlleva el análisis de discursos, sean estos escritos, orales, gestuales, etc. Es decir, como investigadores cualitativos lidiamos con textos todo el tiempo, y por ello resulta importante el dominio de métodos de análisis discursivos.

A pesar de lo anterior, es necesario seguir haciendo investigación para profundizar en el rol del lenguaje como mediador del pensamiento y encontrar más elementos que permitan dar cuenta respecto de la relación conocimiento-lenguaje. Una discusión al respecto de esta consideración queda fuera del alcance de este trabajo.

10.5. Sobre la actividad algebraica general

Se pudieron generar reflexiones más globales tanto para la naturaleza epistemológica y lingüística de la actividad algebraica, con base en los análisis realizados.

Por un lado, resultó significativo el hecho de que en la tercera revisión bibliográfica se identificó que un tipo de práctica que permitió el refinamiento del simbolismo algebraico fue el estudio de los algebristas sobre tratados previos a ellos, puesto que se considera que la reescritura de los tratados previos conllevó a una simplificación del simbolismo. Por ejemplo, considérense los casos de Bombelli, quien propuso un simbolismo sumamente eficaz, basándose de los textos de Cardano, así como los casos de Thomas Harriot y Pierre Herrigone quienes a partir de su revisión de los textos de Viète establecieron sistemas simbólicos más eficaces de igual manera.

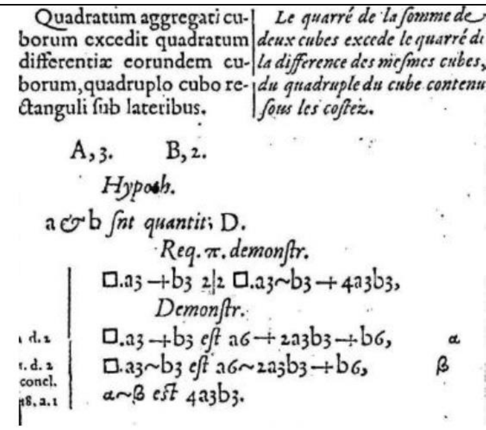


PROPOSITIO XV.

CVBO adgregati duorum laterum, cubum differentiæ eorundem addere.

SIT latus unum A, alterum B. Oporteat A + B cubo, A == B cubum addere. At verò cubus effectus abs A + B, constat A cubo, + A quadrato in B ter, + A in B quadratum ter, + B cubo. Cubus autem abs A == B constat A cubo, — A quadrato in B ter, + A in B quadratum ter, — B cubo. Fiat igitur horum additio: summa est A cubus bis, + A in B quadratum sexies. Hinc ordinatur

Figure 3. Proposition XV in Viète's *Ad Logisticen Speciosam* (Viète, 1970, 20)



Quadratum aggregati cuborum excedit quadratum differentiæ eorundem cuborum, quadruplo cubo rectanguli sub lateribus.

Le quarré de la somme de deux cubes excede le quarré de la difference des mesmes cubes, du quadruple du cube contenu sous les costez.

A, 3. B, 2.

Hypoth.

a & b *snt quantit:* D.

Req. π. demonstr.

□.a3 + b3 2|2 □.a3 ~ b3 + 4a3b3,

Demonstr.

1.d.2 □.a3 + b3 *est* a6 + 2a3b3 + b6, α

1.d.2 □.a3 ~ b3 *est* a6 ~ 2a3b3 + b6, β

concl. 18.a.1 α ~ β *est* 4a3b3.

Figure 4. Proposition V. XIX in Hérigone's Algebra (Hérigone, 1634, II, 46)

Figura 60. Comparación respecto a la eficacia del simbolismo de la misma proposición entre Viète y Herrigone (Massa-Esteve, 2008)

Isagoge

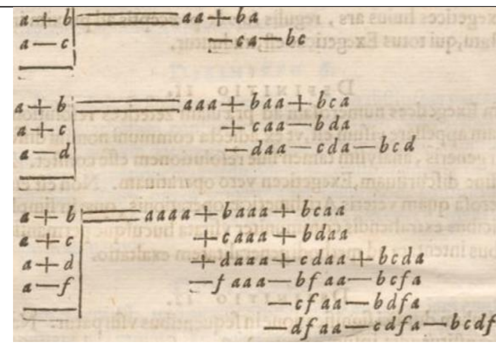
To add (Z square)/G to (A plane)/B

the sum will be (G in A plane) + (B in Z square)/B in G

Praxis

$$\frac{ac}{b} + \frac{dd}{g} = \frac{acg + bdd}{bg}$$

Comparación entre una misma ecuación entre Viète y Harriot (Stedall, 2008, p. 465)



a + b, a − c: aa + ba − ca − bc

a + b, a + c, a − d: aaa + baa + bca + caa − bda − daa − cda − bcd

a + b, a + c, a + d, a − f: aaaa + baaa + bcaa + caaa + bdaa + daaa + cdaa + bcda − faaa − bfaa − bcfa − cfaa − bdfa − dfaa − cdfa − bcdf

Notación simbólica de Harriot (1631, p. 4)

Figura 61. Transformación de la notación de Viète por Harriot

La actividad algebraica, como puede abstraerse de los textos analizados responde en un principio a la necesidad de establecer técnicas, métodos y reglas que permitan resolver problemas aritméticos. Si se considera la tradición árabe en la que el simbolismo no fue consistentemente desarrollado, y que produjo una cantidad considerable de manuscritos en los que aparecen las técnicas algebraicas, puede confirmarse este hecho.

Por otro lado, otra fase de la actividad algebraica tuvo que ver con las estrategias, métodos y reglas para la solución explícita de ecuaciones, para lo cual el uso del simbolismo permitió una consolidación de este tipo de actividad, puesto que se transitó de la descripción de operaciones aplicadas a las expresiones por separado, pero basándose en que conformaban equivalencias, hacia la igualdad de expresiones propiamente dicho. Aunado a este último hecho, la aplicación de las reglas aritméticas a entidades que no eran aceptadas permitió también este desarrollo.

Finalmente, al menos hasta el interés de esta investigación, la actividad algebraica desarrolló un marco matemático más general en el cual el simbolismo permitió el estudio simbólico de las propiedades de las ecuaciones, recurriendo al simbolismo como una herramienta visual para identificar patrones visuales en el comportamiento de la operatividad con los polinomios, sus coeficientes y sus raíces. Esto inició con Viète propiamente, y continuó con Harriot y Descartes posteriormente.

Este uso del simbolismo permitió, por lo tanto, como argumenta Klein (1968), la constitución del lenguaje formal de las ciencias. Aunque desde el marco lingüístico adoptado esto indicaría que el lenguaje de las matemáticas logró una articulación sistemática de los tres recursos semióticos, con el simbolismo como un recurso crucial. En términos sucintos, el lenguaje de las matemáticas se desarrolló como un lenguaje multisemiótico que desarrolló un potencial antes no visto. No es casualidad que, por cien años posteriores al trabajo de Descartes, como menciona Massa-Esteve (2006), la ciencia se haya algebrizado por completo.

De esta manera puede decirse que la naturaleza de la actividad algebraica a lo largo de la historia obedeció a distintas particularidades y necesidades. Así, se considera relevante tomar en cuenta que existieron distintas algebras. En este sentido, quizás sin hacer del todo justicia hacia las especificidades de los conocimientos algebraicos de las distintas épocas y culturas, se considera que una división pertinente del álgebra en la escuela debería considerar en los niveles básicos un álgebra no-simbólica en tanto descripción de métodos de resolución de problemas y de técnicas para resolver ecuaciones de primer y segundo grado basadas en un *razonamiento figural*. En etapas posteriores podría trabajarse con un álgebra simbólica, considerando un *razonamiento aritmético generalizado* con el que se generalizan las operaciones aritméticas y los métodos de resolución basados en el razonamiento figural para aplicarse sobre polinomios y ecuaciones, así como de un *razonamiento simbólico* en el sentido de Heefer (2008, 2009, 2010a, 2010b, 2014). Y finalmente, hasta los alcances de esta investigación trabajar en niveles posteriores un *álgebra paramétrica* como una forma de razonamiento simbólico que se base en la resolución de problemas no sólo aritméticos, sino geométricos, con la finalidad de darle sentido al parámetro, así como del estudio simbólico de propiedades en las estructuras de las expresiones algebraicas generales.

11. REFERENCIAS

Adam, C., y Tanery, P. (1908). *Euvres de Descartes* (Vol. X). (L. Cerf, Ed.) Paris.

Adelman, C. (2006). *The toolbox revisited: Paths to degree completion from high school through college.* Washington, DC: U.S. Department of Education.

Agarwal, R., y Syamal, K. (2014). *Creators of Mathematical and Computational Sciences.* Switzerland: Springer.

Anderson, T., y Shattuck, J. (2012). Design-based research: A decade of progress in education research? *Educational Researcher, 41*, 16-25.

Aprendizajes, P. N. (2017). *Resultados nacionales 2017.* Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Arboleda, L. (2013). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción. *13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, *1.* Medellín, Colombia. Recuperado de : https://www.researchgate.net/publication/281686361_El_analisis_cartesiano_en_la_solucion_del_problema_de_Pappus_y_la_introduccion_de_las_curvas_algebraicas

Austin, J., y Howson, A. (1979). Language and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 161–197.

Bakker, A., y van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an example from Statistics Education. En A. Bikner-Ashbash, y N. Knipping, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 429-465). Bremen, Germany: Springer.

Baldry, A., y Thibault, P. (2004). *Multimodal transcription and text analysis. .* Londres: Equinox.

Barbin, É., Guillemette, D., y Tzanakis, C. (2020). History of Mathematics and Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer, Cham. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_69

Bardini, C., Radford, L., y Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. En *Proceedings of PME 29* (pp. 129–136).

Barwell, R. (2005). Integrating language and content: Issues from the mathematics classroom. *Linguistics and Education, 16*, 205-218.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Birchenall, L., y Müller, O. (2014). La teoría Lingüística de Noam Chomsky: del inicio a la actualidad. *Lenguaje, 42*(2), 417-442.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables – parameters and dummy variables in high school algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 177–189). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Universidad de Zaragoza: Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas.

Bombelli, R. (1572). *L'algebra: parte maggiore dell'arimetica: divisa in tre libri.* Bologna: Giovanni Rossi.

Boncompagni, B. (1857). *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo vol. I.: Liber Abbaci di Leonardo Pisano.* Rome: Scienze Matematiche e Fisiche.

Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York: Springer-Verlag.

Boyer, C. (1991). *A history of mathematics* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101.

Buteo, J. (1559). *Logistica quae & Arithmetica vulgò dicitur in libros quinque digesta ... ; eiusdem ad locum Vitruuij corruptum restitutio, qui est de proportione lapidum mittendorum ad balistae foramen, libro decimo.* Lyon: apud G. Rovillium.

Butt, D., Fahey, R., Feez, S., y Spinks, S. (2012). *Using functional grammar: An explorer's guide* (3rd ed.). Victoria: Palgrave Macmillan.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives.* Germany: Springer.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* México: Gedisa.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 27 – 46.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 9-28.

Cardano, G. (1539). *Practica Arithmetice.* Milan: Bernardini Calusci.

Cardano, G. (1993). *Ars Magna or the Rules of Algebra.* (T. Witmer, Trad.) New York: Dover Publications.

Charalambos, Y., y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on Priority Mathematics Education. Unpacking and Understanding a Complex Relationship Linking Teacher Knowledge, Teaching, and Learning. En L. English, y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3 ed., pp. 19-59). New York: Taylor & Francis.

Charbonneau, L. (1996). From euclid to descartes: algebra and its relation to geometry. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee, *Approaches to Algebra* (pp. 15-38). Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique ; du savoir savant au savoir enseigné.* Paris: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'agébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie: l'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 45-75.

Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14*, 31-47.

Cifoletti, G. (2004). The Algebraic Art of Discourse Algebraic Dispositio, Invention and Imitation in Sixteenth-Century France. En K. Chemla, *History of Science, History of Text* (pp. 123-135). Dordrecht: Springer.

Cifoletti, G. (2006). From Valla to Viete: The Rethorical Reform of Logic and Its Use in Early Modern Algebra. *Early Science and Medicine, 11*(4), 390-423.

Clements, D., y Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 133-148.

Cobb, P., y Steffe, L. (1983). The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Leher, R., y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cordero, F., y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática educativa, identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(3), 295-318.

Crawford, C., y Fortanet-Gómez, I. (2015). *Multimodal Analysis in Academic Settings.* New York, NY: Routledge.

Descartes, R. (1637). *Discours de la me'thode pour bien conduire sa raison & chercher la varite' dans les sciences plus la diotrique, les meteores, et la geometrie, qui sont des essais de cete methode.* Leyden: Ian Marie.

Descartes, R. (1947). *La Geometría (Introducción y Traducción por Pedro Rossell Soler).* Buenos Aires–México: Espasa - Calpe S.A.

Descartes, R. (1996). *Rene Descartes: Reglas para la dirección del espíritu.* (J. M. Cordón, Trad.) Madrid: Alianza Editorial.

Descartes, R. (2006). *A Discourse on the Method of Correctly Conducting One's Reason and Seeking Truth in the Sciences.* (I. Maclean, Trad.) New York: Oxford University Press.

Descartes, R. (2011). Reglas para la dirección del espíritu. En *Descartes. Estudio introductorio de Cirilo Flórez Miguel* (L. Villoro, Trad., pp. 1-72). Madrid: Gredos.

Doran, Y. (2018). *The Discourse of Physics: Building Knowledge through Language, Mathematics and Image.* New York: Routledge.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter.* Utrecht: Doctoral Dissertation, Freudenthal Institute, Utrecht University, the Netherlands.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Élémentaire.* París: Universite Denis Diderot Paris 7.

Drouhard, J.-P., y Teppo, A. (2004). Symbols and Language. Em K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal, *The future of the teaching and learning of Algebra* (pp. 227-264). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Cali, Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Espinosa-Ramírez, L., Vergara-Gómez, A., y Valenzuela-Zúñiga, D. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(3), 247-274.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional: Ciudad de México.

Espinoza, L., y Cantoral, R. (2010). Una caracterización de los contextos de significación desde la Socioepistemología. En P. Lestón, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24* (pp. 889-896). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del álgebra Educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., y Kieran, C. (1989). El aprendizaje del Álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), 229-240.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* (A. Bishop, Ed.) N.Y.-USA: Springer.

Fontich, X. (2010). *La construcción del saber metalingüístic. Estudi sobre l'aprenentatge de la gramática d'escolars de secundària en el marc d'una seqüència didáctica.* [Tesis de doctorado]. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica.

Freudenthal, H. (1977). What is Algebra and What has it been in History? *Archive for History of Exact Sciences, 16*(3), 189-200.

Furinghetti, F., y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? En J. da Ponte, y J. Matos (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 368-375). Lisboa: Departamento de Educaçao, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Gallardo, A. (2002). Historical-epistemological análisis in mathematics education: two Works in didactics of algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins, *Perspectives on School Algebra* (pp. 121-139). Dordrecht: Kluwer.

Gallardo, A., y Basurto, E. (2010). La Negatividad Matemática: Antesala Histórica de los Números Enteros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 255-268.

Gascón, J. (1994-1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée. *Petit x, 37*, 43-63.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática, 11*(1), 77-88.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 99-123.

Gascón, J., Bosch, M., y Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. Callejo, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 25-47). Zaragoza: SEIEM.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structures, task-based interviews in mathematics education research. En R. Lesh, y A. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Gosselin, G. (1577). *De arte magna, seu de occulta parte numerorum, quae & algebra, & almucabala vulgo dicitur, libri qvatvor. Libri Qvatvor. In quibus explicantur aequationes Diophanti, regulae quantitatis simplicis, [et] quantitatis surdae.* Paris: Aegidium Beys.

Halliday, M. A. K. (1982). *El Lenguaje como semiotica social: La interpretación social del lenguaje y el significado.* México: Fondo de Cultura Económica.

Halliday, M. A. K. (1993a). On the language of physical science. En M. Halliday, y J. Martin, *Writing Science: Literacy And Discursive Power* (pp. 59-75). Lodon: Routledge.

Halliday, M. A. K. (1993b). Some Grammatical Problems in Scientific English. In M. A. Halliday, y J. R. Martin, *Writing Science: Literacy and Discursive Power* (pp. 69-85). London: Routledge.

Halliday, M. A. K. (1994). *An Introduction to Functional Grammar* (2nd ed.). London: Edward.

Halliday, M. A. K. (1998). Language and knowledge: the unpacking of text. En J. Webster (Ed.), *The Collected Works of M. A. K. Halliday* (pp. 24-48). London, New York: Continuum.

Halliday, M. A. K., y Martin, J. R. (1993). *Writing Science: Literacy and Discursive Power.* London: Routledge.

Halliday, M. A. K., y Matthiessen, C. (1999). *Construing Experience Through Meaning. A Language-based Approach to Cognition.* London/New York: Continuum.

Halliday, M. A. K., y Matthiessen, C. (2014). *An Introduction to Functional Grammar* (4th ed.). New York: Routledge.

Harel, G. (2007). The DNR System as a Conceptual Framework for Curriculum Development and Instruction. In R. Lesh, J. Kaput, y E. Hamilton, *Foundations for the Future in Mathematics Education* (pp. 263-280). New Jersey: Lawrence Elbaum Associates.

Harel, G., Fuller, E., y Rabin, J. (2008). Attention to meaning by algebra teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 116-127.

Harriot, T. (1631). *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas nova expedita et generali methodo resolvendas.* London: Walter Warner, Ed.

Heath, T. (1885). *Diophantos of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra.* Cambridge: Cambridge University Press.

Heeffer, A. (2008a). The Emergence of Symbolic Algebra as a Shift in Predominant Models. *Foundations of Science*, 149-161.

Heeffer, A. (2008b). A conceptual analysis of early arabic algebra. En S. Rahman, T. Street, y H. Tahiri (Eds.), *The unity of science in the arabic tradition: science, logic, epistemology and their interactions* (pp. 89-128). Berlin: Springer-Verlag.

Heeffer, A. (2009). On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism. En B. Van Kerkhove (Ed.), *New Perspectives on Mathematical Practices. Essays in Philosophy and History of Mathematics* (pp. 1-27). Singapore: World Scientific Publishing. Co. Pte. Ltd.

Heeffer, A. (2010a). The symbolic model for algebra: functions and mechanisms. En L. Magnani, W. Carnielli, y C. Pizzi (Eds.), *Model-Based Reasoning in Science and Technology. Abduction, Logic, and Computational Discovery* (Vol. Studies in Computational Intelligence (Vol. 314), pp. 519-532). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Heeffer, A. (2010b). From the second unknown to the symbolic equation. En A. Heeffer, y M. Van Dyck (Eds.), *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics (Vol. 26)* (pp. 57-101). London: College Publications.

Heeffer, A. (2014). Epistemic justification and operational symbolism. *Foundations of Science, 19*(1), 89-113.

Hjelmslev, L. (1971). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje.* Madrid: Gredos.

Hodgson-Drysdale, T. (2014). Concepts and language: Developing knowledge in Science. *Linguistics and Education, 27*, 54-67.

Hopkins, B. (2011). *The Origin of the Logic of Symbolic Mathematics: Edmund Husserl and Jacob Klein. Studies in Continental Thought.* Bloomington: University of Indiana Press.

Høyrup, J. (1986). Al-Khwarizmi, Ibn-Turk, and the Liber Mensurationum: on the Origins of Islamic Algebra. *Erdem, 2*(Ankara), 445–484.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old babylonian algebra and its kin.* Heidelberg: Springer.

Høyrup, J. (2010). Hesitating progress — the slow development toward algebraic symbolization in abbacus - and related manuscripts, c. 1300 to c. 1550. En A. Heeffer, y M. Van Dyck , *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics, Studies in Logic 26* (pp. 3-56). London: College Publications.

Humphrey, S., y Macnaught, L. (2011). Revisiting joint construction in the tertiary context. *Australian Journal of Language and Literacy, 34*(1), 98–116.

INEE. (2017). *Planea Resultados nacionales 2017. Educación Media Superior. Lenguaje y Comunicación. Matemáticas.* México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-19). Lawrence: Erlbaum.

Katz, V., y Barton, B. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 185-201.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and the teaching of algebra. A Broadening of sources. En A. Gutierrez, y P. Boero, *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. En F. Lester Jr., *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: New Age Publishing.

Kilpatrick, J. (2008). A history of algebra in the school curriculum. En C. Greenes, y R. Rubenstein, *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics. 70th Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 3-18). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kindle, J. (1977). *Teoría y problemas de geometría analítica, plana y del espacio.* Cali: Mc Graw Hill.

Kirshner, D. (1987). *The Grammar of Symbolic Algebra.* Canada: The University of British Columbia.

Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 83–98). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Kirshner, D., y Awtry, T. (2004). Visual Salience of Algebraic Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 224-257.

Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and The Origin of Algebra.* New York: Dover Publications, Inc.

Kleiner, I. (2007). *A history of abstract algebra.* Boston: Birkhäuser.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* New York: Oxford.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford: Oxford University Press.

Kok, A. (2004). Multisemiotic mediation in hypertext. En K. O'Halloran (Ed.), *Multimodal Discourse Analysis. Systemic-Functional Perspectives* (pp. 131-162). London/New York: Continuum.

Leal, A. (1987). *Construcción de sistemas simbólicos: la lengua escrita como creación.* Barcelona: Gedisa.

Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica.* México: Limusa.

Lerman, S. (2000). The Social Turn in Mathematics Education Research. En J. Boaler, *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 19-44). Westport, CT: Ablex.

Lins, R., y Kaput, J. (2004). The early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Boston: Kluwer.

López-Acosta, L. A. (Enero de 2022). [Video]. *¿Es posible hacer geometría analítica sin coordenadas rectangulares?* Mérida, Yucatán, México. Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=OhueEGMurZ8

López-Acosta, L. A., y Montiel, G. (2021a). Lenguaje algebraico y multisemiosis. Hacia una reflexión más allá del simbolismo. En L. Hernández, E. Juárez, y H. Ruíz (Eds.), *Tendencias en la educación matemática 2021* (pp. 79-99). Ciudad. de México, México: Ediciones Comunicación Científica S.A. de C.V.

López-Acosta, L. A., y Montiel, G. (2021b). El encuentro entre el álgebra y la geométrica en Viète y Descartes y el surgimiento de la ecuación paramétrica. En A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Actividad docente* (pp. 29-49). Mexico: Editorial Lectorum.

López-Acosta, L. A., y Montiel, G. (2022). La emergencia de la ecuación paramétrica en Viète y Descartes. Elementos para replantear la actividad analítica algebraica. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 17*(3), 539-559. doi:10.14483/23464712.17062

López-Acosta, L. A., y Rodríguez-Vergara, D. (2021). Análisis sistémico-funcional de textos algebraicos: hacia un entendimiento de su naturaleza discursiva en la historia y algunas implicaciones en su enseñanza. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 12*, 1-23.

Macbeth, D. (2004). Viète, Descartes, and the Emergence of Modern Mathematics. *Graduate Faculty Philosophy Journal, 25*(2), 88-117.

MacGregor, M., y Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 449-467.

Maher, C., y Sigley, R. (2014). Task-Based Interviews in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 579–582). Dordrecht: Springer Netherlands.

Mahoney, M. (1980). The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century. En S. Gaukroger (Ed.), *Descartes' Philosophy, Mathematics and Physics* (pp. 141–156). Brighton: Harvester Press.

Malinowski, B. (1960). *A Scientific Theory of Culture and Other Essays.* New York: Oxford University Press.

Malissani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Una visión histórica. *Revista IRICE, 13*, 1-25.

Malissani, E., y Spagnolo, F. (2009). Arithmetical Thought to Algebraic Thought: The Role of the "Variable". *Educational Studies in Mathematics, 71*(1), 19-41.

Mason, J. (1996). Expressing generalityand roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee, *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Mason, J. (2017). Overcoming the Algebra Barrier: Being Particular About the General, and Generally Looking Beyond the Particular, in Homage to Mary Bool. In S. Steward, *And the rest is just algebra* (pp. 97-118). Dordrecht: Kluwer.

Massa-Esteve, M. (2006). Algebra and geometry in Pietro Mengoli (1625–1686). *Historia Mathematica, 33*, 82–112.

Massa-Steve, M. (2008). Symbolic language in early modern mathematics: The Algebra of Pierre Hérigone. *Historia Mathematica, 35*, 285-301.

Massa-Steve, M. (2012). The role of symbolic language on the transformation of mathematics. *Philosophica, 87*, 153-193.

Matthiessen, C., Teruya, K., y Lam, M. (2010). *Key terms in systemic functional linguistics.* Londres: Continuum.

McGregor, M., y Price, E. (1999). An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 449-467.

Menéndez, S. (2010). Opción, registro y contexto. *Tópicos del Seminario, 23*(enero-julio), 221-239.

Merzbach, U., y Boyer, C. B. (2011). *A History of Mathematics* (3 ed.). New Jersey: Wiley.

Meskens, A. (2010). *Travelling Mathematics - The Fate of Diophantos' Arithmetic.* Birkhäuser Verlag: Basel.

Mieles Barrera, M., Tonon, G., y Alvarado Salgado, S. (2012). Investigación cualitativa: el análisis temático para el tratamiento de la información desde el enfoque de la fenomenología social. *Universitas humanística*(74), 195-225.

Montiel, G., y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e Ilustraciones. En A. Rosas, y A. Romo, *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Moreno, L., y Kaput, J. (2005). Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y el álgebra. Em M. Alvarado, y B. Brizuela, *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp. 31-50). México: Paidós.

Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 219–245.

Morgan, C., Craig, T., Schuette, M., y Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: an overview of research in the field. *ZDM Mathematics Education, 46*, 843-853.

Moschkovich, J. (2018). Recommendations for Research on Languaje and Learning Mathematics. In J. W. Moschkovich, *Language and Comunication in Mathematics Eduaction* (pp. 37-47). Dordrecht: Springer.

Moschkovich, J., Wagner, D., Bose, A., y Rodrigues, J. (Eds.). (2018). *Language and Communication in Mathematics Education: International Perspectives.* Germany: Springer.

Moschkovich, J., Wagner, D., Bose, A., Rodrigues Mendes, J., y Schütte, M. (2018). *Language and Communication in Mathematics Education: International Perspectives.* Dordrecht: Springer.

Nemirovsky, R. (1996). Mathematical narratives, modeling, and algebra. En N. Bednardz, C. Kieran, y L. Lee, *Approaches to Algebra* (pp. 197-220). Dordrecht: Kluwer.

Nesselman, G. (1842). *Die Algebra der Griechen nach den Quellen bearbeitet.* Berlin: G. Reimer.

Nesselman, G. (1842). *Versucheiner Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen.* Berlin: G. Reimer.

Oaks, J. (2009). Polynomials and equations in Arabic algebra. *Archive for History of Exact Sciences, 63*, 169-203.

Oaks, J. (2012). Algebraic symbolism in medieval Arabic algebra. *Philosophica, 87*, 27-83.

Oaks, J. (2018). Francois Viète's revolution in algebra. *Archive for History of Exact Sciences, 72*, 245-302.

O'Halloran, K. L. (2000). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education, 10*(3), 359–388.

O'Halloran, K. L. (2004). *Multimodal Discourse Analysis.* London/New York: Continuum.

O'Halloran, K. L. (2005b). *Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images.* London/New York: Continuum.

O'Halloran, K. L. (2007a). The Role of Language, Symbolism and Images in Mathematics: A Systemic Functional Multimodal Discourse Analysis (SF-MDA) Approach. *New English Language Teacher, 1*(1), 73-89.

O'Halloran, K. L. (2007b). Systemic Functional Multimodal Discourse Analysis (SF-MDA) Approach to Mathematics, Grammar and Literacy. En A. McCabe, M. O'Donnell, y R. Whittaker, *Advances in Language and Education* (pp. 75-100). London & New York: Continuum.

O'Halloran, K. L. (2012). Análisis del discurso multimodal. *ALED, 12*(1), 75-97.

O'Halloran, K. L. (2014). Systemic functional multimodal discourse analysis. En S. Norris, y C. Maier (Eds.), *Interactions, Images and Text: A Reader in Multimodality* (pp. 137-154). Berlin: De Gruyter Mouton.

O'Halloran, K. L. (2015b). Mathematics as multimodal semiosis. En E. Davis, y P. Davis (Eds.), *Mathematics, Substance and Surmise: Views on the Meaning and Ontology of Mathematics* (pp. 287-304). Heidelberg, Germany: Springer Verlag.

O'Halloran, K. L. (2015a). The language of learning mathematics: A multimodal perspective. *The Journal of Mathematical Behaviour, 40*, 63–74.

O'Halloran, K. L., y Smith, B. (2011). *Multimodal Studies: Exploring Issues and Domains.* New York & London: Routledge.

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones Vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6(1), 41-71.

Pappus. (1660). *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Federico Commandino Urbinate in latinum conversae at commentariis illustratae : in hac nostra editione ab innumeris quibus scatebant mendis et prae. cipue in Graeco contextu diligenter vindicatae.* (F. Commandino, Trad.) Bolonia.

Pappus. (1982). *La collection mathimatique.* (r. o. Paul Ver Eecke, Trad.) Paris, Blanchard.

Pappus. (1986). *Book 7 of the Collection* (Vol. 1). (c. A. Jones, Trad.) New York: Springer.

Pascual, R. (2013). La actividad metalingüística en el aprendizaje de la lengua: consideraciones teóricas y aportes didácticos. En M. Guevara, y K. Leyton (Eds.), *Enseñanza de la gramática* (pp. 34-44). Mendoza: Facultad de Filosofía y Letras; Universidad del Cuyo; Sociedad Argentina de Lingüística.

Peletier, J. (1554). *L'algebre de Iaques Peletier dv Mans, departie an deus liures.* Lyon: Jean de Tournes.

Piaget, J., y García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* México: Siglo veintiuno editores.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms.* London, UK: Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics.* Londres/Nueva York: Routledge.

Puig, L. (2008). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica. [Versión ligeramente modificada en 2003.]. Acesso em 10 de Febrero de 2019, disponível em https://www.uv.es/puigl/mexico96revisado03.pdf

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal, *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Rabouin, D. (2010). What Descartes knew of mathematics in 1628. *Historia Mathematica, 37*(3), 428-459.

Radford, L. (1995). Before the other unknowns were invented: didactic inquiries on the methods and problems of medieval Italian algebra. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 28-38.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks from a didactic perspective. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee, *Approaches to Algebra* (pp. 39-54). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a sociocultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 26-33.

Radford, L. (2002). The historical origins of algebraic thinking. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins, *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics, 52*(2), 123-150.

Rao, J. (2011). Renaissance and Scientific Revolution. En J. Rao, *History of Rotating Machinery Dynamics. History of Mechanism and Machine Science, vol 20* (pp. 15-21). Dordrecht: Springer.

Reeder, S. (2017). A Deep Understanding of Fractions Supports Student Success in Algebra. Em S. Steward (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 79-93). Springer.

Ren, Y. (1968). *Languages and symbolic systems.* Cambridge: University Press.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.: Tesis de Doctorado, México.

Ríos, I. (2010). El Lenguaje: Herramienta de Reconstrucción del Pensamiento. *Razón y Palabra*(72).

Rodríguez, D. (2012). La importancia de la Gramática de Halliday para el análisis del discurso oral y escrito. *Relingüística aplicada*(10).

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. En N. Bednardz, C. Kieran, y L. Lee, *Approaches to Algebra* (pp. 137-146). Dordrecht: Kluwer.

Rosen, F. (1831). *The Algebra of Mohammed Ben Musa.* London: The Oriental Translation Fund.

Rothery, J. (1996). Making changes: Developing an educational linguistics. En R. Hasan, y G. Williams, *Literacy in society* (pp. 86–123). Harlow, Essex: Addison Wesley Longman.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización.* Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Université Autonome de Barcelone: España.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, . . . M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Schleppegrell, M. (2004). *The language of schooling: A functional linguistics perspective.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writting Quarterly, 23*, 139-159.

Secretaría de Educación Media Superior. (2020). *Matemáticas III. Programa de Asignatura.* México: SEP. Acesso em agosto de 2020, disponível em https://cbgobmx.cbachilleres.edu.mx/quehacemos/Programas_de_estudio_vigentes/3er_semestre/basica/04 _Matematicas_III.pdf

Sefrin-Weis, H. (2013). Greek Geometrical Analysis: Method and Methodology in Pappus' "Collectio". *Studia Leibnitiana, 45*(1), 2-19.

Serfati, M. (2010). Symbolic revolution, scientific revolution: mathematical and philosophical aspects. En A. Heeffer, y M. Van Dyck, *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics* (pp. 103–122). London: College Publications.

Serres, Y. (2007). Ejercicios, problemas y modelos en la enseñanza del Álgebra. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, y A. Romo, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoaméricano* (pp. 163-178). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.-Díaz de Santos.

Sfard, A. (1995). The development of algebra Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourse, and mathematizing.* Cambridge: Cambridge University Press.

Sierpinska, A. (2005). Discoursing mathematics away. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, y P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 205-230). Heidelberg: Springer.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivistic perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Simon, M. (2014). Hipotetical Learning Trayectories in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272-274). The Netherlands: Springer.

Simon, M. (2018). An emerging methodology for studying mathematics concept learning and instructional design. *Journal of Mathematical Behavior, 2018*, 113–121.

Simon, M. (2019). Analyzing Qualitative Data in Mathematics Education. En K. Leatham (Ed.), *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education* (pp. 111-122). Switzerland: Springer.

Simon, M., Saldanha, L., McClintock, E., Karagoz Akar, G., Watanabe, T., y Ozgur Zembat, I. (2010). A developing approach to studying students' learning through their mathematical activity. *Cognition and Instruction, 28*, 70–112.

Sinclair, N., y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM: Mathematics Education, 47*, 319–329.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la Investigación. *Números,* 77, 5-34.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra.* Madrid: Síntesis.

Stacey, K., y Chick, H. (2004). Solving the problema with algebra. In K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal, *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 1-20). Dordrecht: Kluwer.

Stacey, K., Chick, H., y Kendal, M. (2004). *The future of the teaching and learning of algebra.* Dordrecht: Kluwer.

Stedall, J. (2000). Rob'd of Glories: The Posthumous Misfortunes of Thomas Harriot and His Algebra. *Archive for History of Exact Sciences, 54*(6), 455-497.

Stedall, J. (2002). *A Discourse Concerning Algebra.* New York: Oxford University Press.

Stedall, J. (2003). *The Greate Invention of Algebra. Thomas Harriot's Treatise on equations.* New York: Oxford University Press.

Stedall, J. (2007). Symbolism, combinations, and visual imagery in the mathematics of Thomas Harriot. *Historia Mathematica, 34*, 380-401.

Stedall, J. (2008). Notes made by Thomas Harriot on the treatises of François Viète. *Archive for History of Exact Sciences, 62*(2), 179-200.

Stedall, J. (2011). *From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections: Filling a Gap in the History of Algebra. Heritage of European Mathematics.* Zürich: European Mathematical Society.

Steffe, L., y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh, y A. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Stein, M., Kaufman, J., Sherman, M., y Hillen, A. (2011). Algebra a challenge at the crossroads of policy and practice. *Review of Educational Research, 81*(4), 453–492.

Stevin, S. (1585). *L'arithmetique de Simon Stevin de Brvges: contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires: aussi l'Algebre, auec les equations de cinc quantitez. Ensemble les quatre premiers liures d'Algebre de Diophante d'Alexandrie, maintenant premier.* Leyden: Christophe Plantin.

Steward, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* México: Cengage Learning.

Steward, S. (2017). *And the Rest Is Just Algebra.* Dordrecht: Kluwer.

Steward, S., y Reeder, S. (2017). Algebra underperformances at college level: What are the consequences? En S. Steward (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 3-18). Springer.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica integra.* Nürnberg: Petreius.

Stifel, M. (1553). *Die Coss Christoffe Ludolffs mit sch¨onen Exempeln der Coss / Zu Königsperg .* Preussen: Gedrückt durch Alexandrum Lutomyslensem.

Sullivan, M. (2006). *Álgebra y trigonometría .* México: Pearson Educación.

Tall, D. (2017). Long-Term Effects of Sense Making and Anxiety in Algebra. En S. Steward (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 43-62). Springer.

Thompson, G. (2014). *Introducing functional grammar* (3rd ed.). London: Routledge.

Thompson, P. (2017). Foreword. En S. Steward (Ed.), *And the rest is just algebra* (pp. v-vi). Dordrecht: Kluwer.

Torres-Corrales, D., y Montiel, E. (2019). Characterization of uses of trigonometric notions in Mechatronics Engineering from Mathematics Education. *ECORFAN Journal Spain, 10*(6), 9-21.

Torres-Corrales, D., y Montiel, G. (2020). La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa. *Nóesis. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades, 58-1*(29), 24-55.

Torres-Corrales, D., López-Acosta, L. A., y Montiel, G. (2020). Experiencias formativas de investigadores en el desarrollo de proyectos doctorales de Matemática Educativa. En B. Sánchez Luján, y R. Hinojosa Luján (Eds.), *Trazas de la investigación educativa en la experiencia de sus Quijotes. Reflexiones y aportes* (pp. 103-119). Chihuahua, México: Red de Investigadores Educativos Chihuahua.

Toulmin, S. (1972). *Human understanding. Vol. I: The collective use and evolution of concepts.* Princeton: Princeton University Press.

Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., y y Nieveen, N. (2006). *Educational design research.* London: Routledge.

van Dijk, T. (2012). *Discurso y contexto.* México: Gedisa.

Varvoglis, H. (2014). From Classical Era to the Renaissance. En H. Varvoglis, *History and Evolution of Concepts in Physics* (pp. 21-26). Cham: Springer.

Vasíliev, N., y Gutenmájer, V. (1980). *Rectas y Curvas.* (M. Gómez, Trad.) Moscú.

Viète, F. (1579a). *Canon Mathematicus seu Ad Triangula.* Lutetiæ: Apud Ioannem Mettayer.

Viète, F. (1579b). *Universalium Inspectionum ad Canonem Mathematicum.* Lutetiæ: Apud Ioannem Mettayer.

Viète, F. (1600-1603). *Ad Harmonicon Coeleste Libri Quinque Priores.*

Viète, F. (1615). *De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo.* Parisiis: Ex Typographia Ioannes Laquehay.

Viète, F. (1646). *Opera mathematica.* Leiden.

Viète, F. (1983). *The Analytic Art: Nine Studies in Algebra, Geometry, and Trigonometry from the Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu, Algebrâ novâ by François Viète.* (T. Witmer, Trad.) Kent, Ohio: Kent State University.

Vignais, P., y Vignais, P. (2010). *Discovering Life, Manufacturing Life: How the experimental method shaped life sciences.* The Netherlands: Dorderecht.

Villoro, L. (1982). *Creer, Saber y Conocer.* Madrid: Siglo XXI.

Wagner, R. (2010). The natures of numbers in and around Bombelli's "L'algebra". *Archive for History of Exact Sciences, 64*(5), 485-523.

Warren, E., Trigueros, M., y Ursini, S. (2016). Research on the Learning and Teaching of Algebra. Em A. Gutiérrez, G. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73–108). The Netherlands, The Netherlands: SensePublishers-Rotterdam.

12. Anexos de la primera fase de estudio

12.1. Estudio Histórico Epistemológico del análisis algebraico de Viète y Descartes

A continuación, se mostrará la problematización del contexto de significación del análisis algebraico de Viète y Descartes. Como se mencionó en el apartado 5.1.1, la estructura de la narrativa sigue las categorías de la estratificación del contexto de significación: Contexto cultural, Contexto situacional y Contexto matemático de significación.

12.1.1 Contexto cultural de Viète y Descartes: El Renacimiento

Para determinar este nivel más amplio del contexto situacional del análisis algebraico que Viète y Descartes desarrollaron se partió de intentar responder la siguiente pregunta ¿Qué características tenía la época en la que Viète y Descartes produjeron sus contribuciones y cómo esta influyó en su pensamiento?

Tanto Viète como Descartes vivieron y publicaron sus trabajos en la época conocida como el *Renacimiento* (1400-1600). Es interesante que, a pesar de haber casi cincuenta años de diferencia entre las publicaciones de sus trabajos más representativos—el primer trabajo de Viète *In artem analytice isagoge* fue publicado en 1591, mientras que el *Discourse de la methode*, en el que se encuentra el ensayo *La Geometrie* fue publicado por Descartes en 1637—ambos personajes tenían intereses muy similares en términos de la forma en la que el quehacer matemático debía llevarse a cabo, lo cual los llevó en esencia a plantear con respectivas particularidades el *análisis algebraico—arte analítico* como Viète lo denominó y la *mathesis universalis* para Descartes como ha sido interpretado por quienes lo han estudiado a profundidad como Sasaki (2003)— como una forma nueva de hacer matemáticas en la que el simbolismo algebraico, combinado con una estructura discursiva que reflejaba una preocupación singular sobre el método de demostración matemática cobraría una importancia considerable y que en los cien años posteriores al trabajo de Descartes, conllevó a que las matemáticas en general se algebrizaran de manera considerable (Massa-Esteve, 2006).

Con base en el análisis del contexto cultural del Renacimiento, será posible aproximarse a la racionalidad contextualizada, de esta época que impregnó, sin lugar a duda, las innovaciones realizadas por Viète y Descartes.

12.1.1.1 El Renacimiento y el Humanismo

El Renacimiento fue un movimiento que se dio en Europa entre 1400-1600 en el que se llevó a cabo no solo una revolución en la ciencia (Rao, 2011) sino en muchos ámbitos como las artes y la literatura. Fue un período en el que se da una ruptura con el pensamiento de la Edad Media, lo cual dio inicio a la Edad Moderna.

De acuerdo con Vignais y Vignais (2010, p. 47)

> [El renacimiento] se distinguía por una imaginación constructiva que hacía que todo pareciera posible para el hombre. El arte de poder pensar correctamente fuera de los caminos trillados y en un camino sin destino conocido, la genialidad de diseñar instrumentos que permitieran ir más allá de la observación por los sentidos, mecenas apasionados, generosos y visionarios, cada vez más numerosos y asertivos contactos entre estudiosos de diferentes creencias; todos estos factores juntos aseguraron que el Renacimiento fuera el paso necesario hacia el surgimiento final del método científico y su aplicación a la exploración de los fenómenos de la Naturaleza.

Respecto a la importancia de las matemáticas dentro de este movimiento científico menciona al respecto Kline (1972) que:

> Para los intelectuales del Renacimiento, las matemáticas apelaban a otra razón. El Renacimiento fue un período en el que la civilización y la cultura medieval fueron desacreditadas a medida que nuevas influencias, información y movimientos revolucionarios barrieron Europa. Estos hombres buscaron nuevas y sólidas bases para la erección del conocimiento, y las matemáticas ofrecieron tal base. Las matemáticas seguían siendo el único cuerpo de verdades aceptado en medio de sistemas filosóficos que se desmoronaban, creencias teológicas en disputa y valores éticos cambiantes. El conocimiento matemático era seguro y ofrecía un punto de apoyo seguro en un pantano; la búsqueda de la verdad se redirigía hacia él (p. 219).

Con base en lo anterior y con la intención específica declarada previamente sobre entender a más a fondo las características de la época se buscó una explicación del detonante del Renacimiento. Es así que se planteó la siguiente pregunta ¿Qué ocasionó la ruptura con la Edad Media para dar pie al movimiento renacentista?

De acuerdo con estudios como los de Boyer (1991), Merzbach y Boyer (2011), Kline (1972), Vignais y Vignais (2010), Rao (2011) y Varvoglis (2014) se identifican al menos cuatro aspectos que, se consideran provocaron el movimiento renacentista y humanista y que se relacionan con el interés de la investigación:

1. La hegemonía del cristianismo sobre el pensamiento.
2. El contacto con los pueblos árabes y grecoromanos por las cruzadas y las actividades económicas de esta época impulsadas por una nueva clase social durante la edad media tardía: la burguesía.
3. La insatisfacción con la forma en la que los escolásticos concebían la ciencia.
4. La caída del Imperio Bizantino y la imprenta.

12.1.1.1.1 La hegemonía del cristianismo sobre el pensamiento

La Edad Media se caracterizó por una visión teocéntrica que impactaba en todos los ámbitos de la vida en Europa. El dominio del cristianismo, el cual resultó como consecuencia de que el imperio bizantino unificó los pueblos cristianos de la roma occidental abarcando gran parte de Asia y Europa. Como consecuencia hubo "una lenta maduración a través de los siglos de un tipo de pensamiento que aparentemente había estado dormido, sin que se expresara libremente ningún argumento intelectual" (Vignais y Vignais, 2010, p. 46). Esto implicó naturalmente que hubiera pocos avances en términos matemáticos durante esta época (Kline, 1972).

> La razón principal del bajo nivel de matemáticas era la falta de interés en el mundo físico. El cristianismo, que dominaba Europa, prescribía sus propios objetivos, valores y modo de vida. Las preocupaciones importantes eran espirituales, hasta el punto de que las investigaciones sobre la naturaleza, estimuladas por la curiosidad o la práctica, se consideraban frívolas o indignas (Klein, 1972, p. 204).

Por lo tanto, la opresión sobre el libre pensamiento y sobre el quehacer de la ciencia en algún momento iba a desatar una revolución intelectual que buscaría la innovación en cada aspecto de la vida y, en particular, el replanteamiento, búsqueda y valoración del ***método*** *científico* (Varvoglis, 2010).

12.1.1.1.2 El contacto con los pueblos árabes y grecoromanos por las cruzadas y las actividades económicas de esta época impulsadas por una nueva clase social durante la edad media tardía: la burguesía

De acuerdo con Klein (1972) hasta el año 1100 las sociedades europeas tenían cierta estabilidad. La movilidad de los campesinos hacia las grandes ciudades a causa de la peste que afectó considerablemente en términos de la reducción de la población hizo que hubiera más mano de obra por lo que ciertos grupos se vieron favorecidos por esta movilización económica, de manera que surgieron los comerciantes independientes conformando la nueva clase social: la burguesía, la cual adquirió una considerable fuerza económica que los llevo a financiar la erudición y las artes.

Junto ella se dio el advenimiento de gran cantidad de actividades económicas como "la industria, la artesanía llevada a cabo por gente libre, la agricultura a gran escala, la manufactura, la minería, la banca y la ganadería" (Klein, 1972, p. 205), que aunado al movimiento de las cruzadas (1100 – 1300), pusieron eventualmente en contacto a los europeos con las culturas árabes y griegas bizantinas. La importancia de este hecho es que los árabes fueron los preservadores, difusores y herederos de la cultura griega (Vignais y Vignais, 2010) y como consecuencia del sometimiento del pensamiento que ejercía el cristianismo y las dudas e inquietudes que generaba entre los pensadores de esa época, los europeos encontraron en las obras griegas nuevas posturas que generaron una conciencia de aprendizaje sobre los griegos, de manera que los europeos se interesaron en la búsqueda de copias de las obras griegas (Klein, 1972), que en su mayoría se encontraban en árabe, así como los textos escritos por árabes, puesto que éstos añadieron comentarios en sus traducciones (Vignais y Vignais, 2010) y profundizaron en algunos aspectos de las ideas presentes en dichas obras. Los líderes de la época, por tanto, apoyaron no sólo la búsqueda energética de estos trabajos, sino también enviaron a los eruditos a centros árabes para aprender y lograr obtener la mayor cantidad de manuscritos posibles (Klein, 1972). Tal es el caso del famoso Leonardo de Pisa (Fibonacci), quien aprendió en territorio árabe gran parte de las ciencias matemáticas que se difundían en esas regiones.

> [...] A partir del siglo XII, estos textos, traducidos del árabe al latín, penetrarán en Francia y se extenderán por toda Europa Occidental. Las propuestas filosóficas y científicas contenidas en estos textos, en particular el pensamiento aristotélico, ayudaron a construir el Escolasticismo Medieval (Vignais y Vignais, 2010, p. 46).

Klein (1972) explica que de esta manera los europeos conocieron los trabajos de Euclides, Ptolomeo, la aritmética y Álgebra de Al-Khowarizmi, y muchas de las obras de Aristóteles cuyo contenido filosófico y científico "sacudió" el pensamiento medieval fuertemente influenciado por un oscurantismo y dogma promovido por el cristianismo. Por lo tanto, tras estos acontecimientos se construyó una fuerte valoración por el pensamiento griego considerando que "los europeos adquirieron una literatura tremenda. Admiraban tanto estas obras y estaban tan fascinados por las ideas novedosas que se convirtieron en discípulos del pensamiento griego. Valoraban estas obras mucho más que sus propias creaciones" (Klein, 1972, p. 206).

Como medida la iglesia pronto se dedicó al hostigamiento de aquellos que pretendían seguir las ideas filosóficas griegas, en especial las de Aristóteles, las cuales eran consideradas "demasiado materialistas, con el pretexto de la inadecuación de estas ideas con respecto a la tradición bíblica del Génesis" (Vignais y Vignais, 2010, p. 35). Por supuesto estas medidas avivaron la curiosidad de los estudiosos (Vignais y Vignais, 2010) la cual no pudo ser fácilmente desestimada, lo cual desembocó en un movimiento del clero por unificar la "razón" y la "fe", lo que dio origen a la escolástica medieval.

12.1.1.1.3 La insatisfacción con la forma en la que los escolásticos concebían la ciencia

Durante el período de 1100 a 1450 el trabajo científico fue monopolizado por los escolásticos, quienes a partir de que personajes como Alberto el Grande y Tomás Aquino (Vignais y Vignais, 2010) tuvieron la audacia y gran agudeza para conciliar la filosofía aristotélica—que proveía de bases lógicas para entender el universo y la experiencia humana—y la cosmovisión cristiana (Klein, 1972; Vignais y Vignais, 2010). De este modo, con nuevas bases lógicas para el pensamiento que fueron aceptada sin crítica y que siguió estando influenciado y subordinado por el control de la teología cristiana, las artes técnicas fueron capaces de desarrollar nuevas bases para la experimentación científica (Klein, 1972; Vignais y Vignais, 2010).

Considerando que la doctrina aristotélica privilegiaba la lógica por sobre las explicaciones físicas y provenientes de la experiencia no permitía sentar bases que permitieran establecer un método científico robusto. Este hecho, aunado con el misticismo de la iglesia, eventualmente resultó insatisfactorio para ciertos pensadores europeos precursores de las futuras academias lo cual los llevó a cuestionar dichos marcos. Más aún por el hecho de que los desarrollos de la alquimia durante esta época mostraban la relevancia de la experimentación y una necesidad por establecer nuevamente métodos más científicos para producir conocimiento; así como también el poder del capitalismo, en tanto, "estimuló el estudio directo de los fenómenos físicos y las conexiones causales para mejorar los materiales y los métodos de producción. Como la Iglesia había ofrecido explicaciones de muchos de estos fenómenos, surgieron conflictos" (Klein, 1972, p. 217). De manera que

> las teorías que habían sido vendidas a lo largo de los siglos sin verificación fueron sometidas al escrutinio de la crítica sin indulgencia. La vida intelectual floreció bajo esta intensa actividad. Este fue el comienzo de un cambio de guardia, marcado por audaces cuestionamientos y notables avances técnicos [...] el conocimiento de este período, que inicialmente se centró en la teología, fue modificado notablemente por las contribuciones de los filósofos y estudiosos de la antigua Grecia. En las nacientes universidades, se estructuraba en torno a la comprensión de las artes liberales, incluidas la lógica, la aritmética y la geometría, alentando a las mentes a dotarse de métodos de razonamiento y de pensamiento adecuados para aumentar su conciencia de las realidades de los mundos inanimados y vivientes (Vignais y Vignais, 2010, p. 46).

En este sentido "[v]arios hombres se dieron cuenta de que la metodología de la ciencia debía ser cambiada; iniciaron una verdadera ruptura con el Escolasticismo y la aceptación acrítica del conocimiento griego" (Klein, 1972, p. 223).

12.1.1.1.4 La caída del Imperio Bizantino y la invención de la imprenta.

En términos históricos la caída de la Edad Media se suele establecer cronológicamente en el año 1453, año en el que se registra la conquista por los turcos de Constantinopla, ciudad capital del imperio Bizantino (Klein, 1972; Boyer, 1991; Merzbach y Boyer, 2011). La relevancia de este hecho es que los refugiados griegos huyeron hacia Italia con más manuscritos griegos con mucha mejor calidad que la adquirida durante los siglos XII y XIII, lo cual en definitiva culminó por "enamorar" a los que se convertirían en los representantes del humanismo poco tiempo después y por desencantarlos cada vez más sobre la ciencia árabe y del ábaco (Boyer, 1991; Merzbach y Boyer, 2011). En particular, las doctrinas de Platón y los Pitagóricos que a diferencia de las de Aristóteles privilegiaban las matemáticas permitieron a los escolásticos inconformes "clarific[ar] y cristaliz[ar] las ideas y métodos con los que estos hombres habían estado luchando (Klein, 1972, p. 218).

La llegada de más material de conocimiento griego con traducciones más confiables que las árabes, por la traducción directa del griego al latín, junto con la invención de la impresión con caracteres móviles, en 1450 por Johann Gutenberg, aceleró la difusión de muchas más obras que no se habían difundido (Klein, 1972) como las de Apolonio, Pappus y Diofanto. Todo este material intelectual fue difundido, adoptado y convertido en material didáctico en las universidades de Europa Occidental donde surgieron los pensadores que cambiarían el panorama científico como Copérnico, Kepler, Galileo, Huygens, Leibniz, Descartes y Newton (Varvoglis 2014).

Así,

> en astronomía no fue la modificación física de Aristóteles de la teoría de Eudoxus la que utilizaron los científicos preocupados por la teoría astronómica propiamente dicha, la navegación y el calendario, sino la de Ptolomeo. Como consecuencia, las matemáticas comenzaron a jugar un papel más importante que el que Aristóteles le había asignado (Kline, 1972, p. 214).

En este sentido es posible identificar que de manera sucinta como mencionan (Vignais y Vignais, 2010, p. 45):

> El florecimiento del método científico en el siglo XVII en Occidente fue el resultado de varios legados: un legado de pensamiento científico y las reglas de la lógica de los filósofos de la antigua Grecia, un legado de conceptos que iban desde las matemáticas hasta las ciencias naturales que con el tiempo atravesaron Eurasia, un legado de innovaciones técnicas e instrumentales aportadas por artesanos y alquimistas medievales y, por último, el legado de una corriente de argumentación en contra de la escolástica medieval que se afianzó a partir del siglo XVIII. a principios del siglo XIII y se cristalizó durante el Renacimiento.

12.1.2 Contexto situacional

Con base en la revisión anterior puede caracterizarse de algún modo el contexto cultural en el que surgieron las producciones de Viète y Descartes, sobre las cuales dos aspectos particulares cobran total sentido cuando se analizan sus escritos. Por un lado, la preocupación de ambos por establecer métodos respectivos para el quehacer matemático (*arte analítico* y *mathesis universalis*) y, por otro lado, el énfasis sobre las autoridades griegas como casi única fuente de inspiración y digna de mencionarse en sus trabajos. En Viète es más evidente esta predilección sobre la cultura griega por el uso de palabras griegas dentro de su método.

No obstante, si bien como productos sociales ambos representan nítidamente dicha realidad, sus filosofías y motivaciones personales influenciarán y darán textura a sus producciones, en particular, a su forma de reformar el álgebra como base de un método analítico.

Cabe mencionar que dentro del *Contexto Situacional* que se conformó al interior de dicho contexto cultural, están inmersos una serie de aspectos que acotaron en cierta manera su objeto de estudio. Para empezar es necesario tomar en consideración que los científicos renacentistas eran hombres universales en cuanto a su profesión (Klein, 1968), pues estos, por presentar ventajas como consecuencia de su capacidad erudita eran contratados generalmente por príncipes para la realización de gran cantidad de actividades y tareas como por ejemplo puentes, máquinas para la guerra, arte, etc., por lo que debían no solo tener conocimientos sobre disciplinas específicas, sino de una gran cantidad como las matemáticas, la astronomía, la geografía, la cartografía, la física, la arquitectura, la ingeniería, la mecánica, la anatomía, la óptica, entre otras más (Klein, 1968). Por lo tanto, en sus investigaciones científicas cada uno profundizo en estas disciplinas convirtiéndose en el interés científico de la época (Klein, 1968).

De este modo, el objeto de estudio de ambos se va configurando y tomando texturas particulares dependiendo de los intereses y motivaciones personales dentro de más de una de estas ciencias y su relación con las matemáticas. En los aparatados siguientes describiremos algunas de las particularidades que Viète y Descartes poseían que los llevó a establecer esencialmente lo mismo, pero con diferentes profundidades. En este sentido se identifica dentro del contexto situacional una posible referencia de *relativismo epistemológico* que caracterizaba a cada uno de ellos.

Las fuentes sobre las cuales se basan estas caracterizaciones principalmente se derivan de los estudios de Klein (1968), Mahoney (1980), Bos (2001), Sasaki (2003), Macbeth (2004), Rabouin (2010), Hopkins (2011), Sefrin-Weiss (2013) y Oaks (2018).

12.1.2.1 François Viète (1540-1603)

Figura 62. François Viète (1540-1603) Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

François Viéte nació en Fontenay-le-Comte, Francia en 1540 y falleció en 1630. Estudió al interior de un claustro y posteriormente en la Universidad de Poitiers, en donde obtuvo su título en derecho en 1560, misma profesión que su padre y que ejerció en su ciudad de origen (Agarwal y Syamal, 2014). Seguramente por su gran conocimiento, es bien sabido que sirvió a los reyes franceses Enrique III (1551-1589) y Enrique IV (1553-1610) (Klein, 1968; Agarwal y Syamal, 2014; Oaks, 2018). De acuerdo con Agarwal y Syamal (2014) en los momentos en los que no estaba en servicio—los cuales fueron pocos de acuerdo con Klein (1968)—él trabajó en sus tratados astronómicos y matemáticos, de los cuales financió su publicación por cuenta propia. Siguiendo la filosofía humanista de la época estuvo interesado en la literatura griega, abordando problemas griegos clásicos como la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, sobre los cuales descubrió se relacionan con ecuaciones cúbicas (Mahoney, 1980; Sefrin-Weiss, 2013; Agarwal y Syamal, 2014).

A parte de la contribución sobre la cual se interesa este estudio, es también conocido que resolvió como reto una ecuación de grado 45, encontrando 23 soluciones considerando que no reconocía las soluciones negativas, práctica típica de la época. Fue casualmente esta situación la que le hizo entablar una amistad con Van Roomen (1561-1615) un matemático belga famoso (Sasaki, 2003; Agarwal y Syamal, 2014) y rival de Viète (Sasaki, 2003) quien propuso el problema a la comunidad de matemáticos indicando que ningún matemático en Francia podría resolver la ecuación. Van Roomen es reconocido como uno de los posibles vínculos entre Viète y Descartes según Sasaki (2003), pues era bien conocido por promulgar la *mathesis universalis* en esa época además de promulgar el arte analítico de Viète posterior a la resolución de la ecuación de grado 45 por parte de Viète, conformando un programa específico—idea que Sasaki considera fue revisada por Descartes— Esta consideración de Van Roomen se debió a que posterior a la resolución de la ecuación de grado 45, Viète le propuso otro problema a Van Roomen que este último no pudo resolver y tras ver la solución de Viète se propuso viajar a Francia a encontrarlo y aprender su arte analítico (Sasaki, 2003; Agarwal y Syamal, 2014).

En palabras de Sasaki (2003, p. 5):

> A través de algunos años de rivalidad, quedó impresionado por el talento del matemático francés y comenzó a aceptar el estilo de las matemáticas de su rival, es decir, el álgebra simbólica. La evidencia más reveladora de esta aceptación fue su Mathematicae analyseos triunumpus, publicado en 1609. Van Roomen fue, por lo tanto, un defensor tanto de la'mathesis universalis' como de la matemática analítica limitada por por Viète. De hecho, el análisis algebraico de Viète, aunque su terminología es básicamente geométrica, es un arte aplicable principalmente la aritmética y la geometría.

Es así como Viète era un matemático y científico bastante reconocido en su época. De hecho, de acuerdo con algunos autores como Delambre en 1819, citado en Oaks (2018, p. 296) se considera a Viète como “el geómetra más grande de su tiempo”.

La contribución más relevante por el cual los matemáticos e historiadores han posicionado a Viète en la historia de las matemáticas, en particular del álgebra, y que compete a esta investigación es "haber establecido el uso de las letras para designar no sólo a las cantidades desconocidas, sino también a las que se conocen" (Oaks, 2018, p. 289).

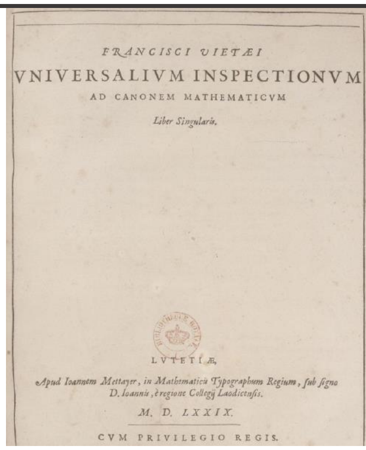
12.1.2.1.1 Intereses/motivaciones

Más de un autor ha enfatizado el hecho de que el proyecto de Viète tiene especial predilección en la cosmología y la astronomía (Klein, 1968; Oaks, 2018), dando pie al desarrollo y mejora de modelos geométricos para cálculos astronómicos (Oaks, 2018). Viète era un gran seguidor de Ptolomeo, tanto que

> Al igual que Ptolomeo, Viète consideró la geometría como la base teórica para los cálculos astronómicos, y a través de sus investigaciones trigonométricas encontró una forma de crear un álgebra para la geometría que supera al álgebra numérica tradicional en su flexibilidad, generalidad y utilidad (Oaks, 2018, p. 296).

Un hecho interesante es que previo a su trabajo más estudiado *In artem analytic isagoge* escribió dos tratados relativos a temas trigonométricos *Universalium Inspectionum ad Canonem Mathematicum* (1579) y *Canon Mathematicus seu ad Triangula* (1579), los cuales en conjunto iban a servir como la base fundamental para un tratado que no pudo ser publicado que, sin embargo, circuló en versión de manuscrito *Ad Harmonicon Coeleste Libri Quinque Priores* (1600-03) y que de acuerdo con Klein (1968) ésta tenía la intención de renovar el *Almagesto* de Ptolomeo.

En *Universalium Inspectionum ad Canonem Mathematicum* (1579) de acuerdo con Oaks (2018) se proporcionan los fundamentos geométricos para las tablas trigonométricas que aparecen en el trabajo complementario *Canon Mathematicus seu ad Triangula* Capítulo XV. Es en este primer trabajo, por ejemplo, en el que se encuentra su versión para la ley de cosenos (ver Figura 63).



FRANCISCI VIETÆI

VNIVERSALIVM INSPECTIONVM

AD CANONEM MATHEMATICVM

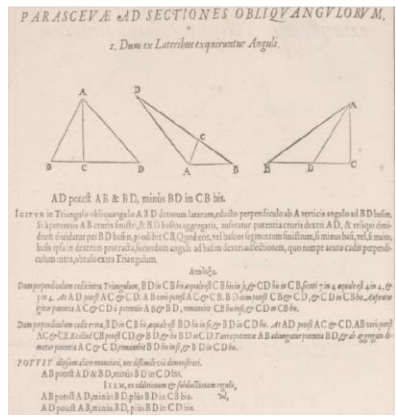
Liber Singularis.

LVTETIÆ,

Apud Ioannem Mettayer, in Mathematicis Typographum Regium, sub signo D. Ioannis, è regione Collegij Laodicensis.

M. D. LXXIX.

CVM PRIVILEGIO REGIS.



PARASCEVÆ AD SECTIONES OBLIQVANGVLORVM.

1. Dum ex Lateribus exquiruntur Anguli.

AD potest AB & BD, minùs BD in CB bis.

POTVIT idipsum aliter enunciari, nec dissimili via demonstrari.

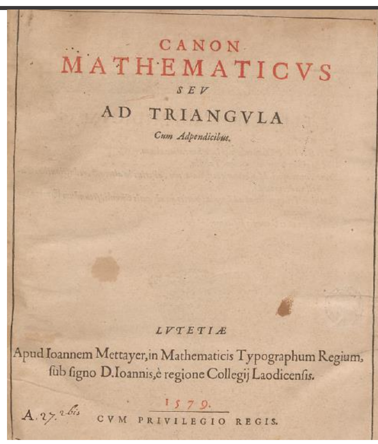
AB potest AD & BD, minùs BD in CD bis.

ITEM, ex additionum & subductionum regulis,

AB potest AD, minùs BD, plùs BD in CB bis. vel,

AD potest AB, minùs BD, plùs BD in CD bis.

Portada y ley de cosenos en Universalium [...] (Viète, 1579b, p. 24)



CANON

MATHEMATICVS

SEV

AD TRIANGVLA

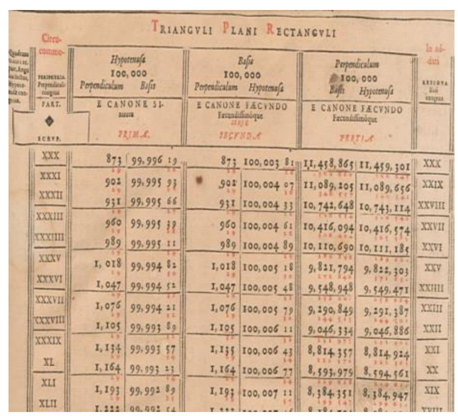
Cum Adpendicibus.

LVTETIÆ

Apud Ioannem Mettayer, in Mathematicis Typographum Regium, sub signo D. Ioannis, è regione Collegij Laodicensis.

1579.

CVM PRIVILEGIO REGIS.



TRIANGVLI PLANI RECTANGVLI

Scrup.	Hypotenusa 100,000 — Perpendiculum	Basis	Basis 100,000 — Perpendiculum	Hypotenusa	Perpendiculum 100,000 — Basis	Hypotenusa	Scrup.
	E CANONE SINUUM PRIMA		E CANONE FÆCVNDO Fæcundissimoque SERIE SECVNDA		E CANONE FÆCVNDO Fæcundissimoque TERTIA		
XXX	873	99,996 19	873	100,003 81	11,458,865	11,459,301	XXX
XXXI	902	99,995 93	902	100,004 07	11,089,205	11,089,656	XXIX
XXXII	931	99,995 66	931	100,004 33	10,742,648	10,743,114	XXVIII
XXXIII	960	99,995 39	960	100,004 61	10,416,094	10,416,574	XXVII
XXXIIII	989	99,995 11	989	100,004 89	10,110,690	10,111,185	XXVI
XXXV	1,018	99,994 82	1,018	100,005 18	9,821,794	9,822,303	XXV
XXXVI	1,047	99,994 52	1,047	100,005 48	9,548,948	9,549,471	XXIIII
XXXVII	1,076	99,994 21	1,076	100,005 79	9,290,849	9,291,387	XXIII
XXXVIII	1,105	99,993 89	1,105	100,006 11	9,046,334	9,046,886	XXII
XXXIX	1,134	99,993 57	1,135	100,006 43	8,814,357	8,814,924	XXI
XL	1,164	99,993 23	1,164	100,006 77	8,593,979	8,594,561	XX
XLI	1,193	99,992 89	1,193	100,007 11	8,384,351	8,384,947	XIX

Portada y tabla de Canon Mathematicus seu ad Triangula (Viète, 1579a, p. Aij)

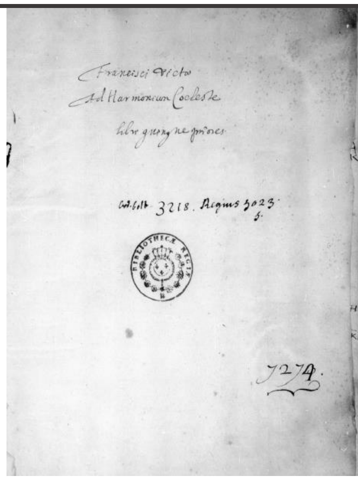
	
Portada y proposiciones de Ad Harmonicon Coeleste Libri Quinque Priores (Viète, 1600-03, Fol. 4)	

Figura 63. Tratados de Viète relacionados con la astronomía

12.1.2.1.2 Implicaciones

Resulta interesante y en algún sentido que los primeros y últimos trabajos de Viète estuvieran enfocados hacia la astronomía, pues esto dice mucho sobre el interés del autor en términos de su interés matemático, dejando cierta percepción sobre el papel de sus trabajos intermedios. De manera que este hecho aislado, se considera, reafirma las ideas de que en efecto, el aparato matemático que construyó Viète era un *medio*, un *instrumento* para alcanzar ciertos fines astronómicos, para lo cual la geometría jugó un rol primordial como se mostrará más adelante.

12.1.2.2 René Descartes (1596-1650)

Figura 64. René Descartes (1596-1650) Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes

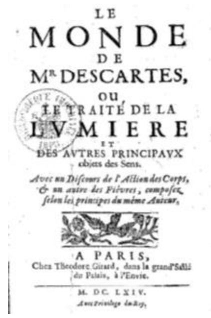
René Descartes nació en 1596 en La Haye, región al suroeste de París en Touraine, Francia y falleció en 1650 en Estocolmo. Perteneció a una familia de intelectuales, en la que su padre era consejero en el Paralamento de Rennes (Bretaña) y otros familiares médicos (Rossell, 1947; Agarwal y Syamal, 2014). A la edad de 8 años aproximadamente (Rossell, 1947) ingresó al Colegio Jesuita *La Flèche*, uno de los colegios en Europa que gozaba de mucha fama en el que permaneció por aproximadamente 8 años y medio, en el período de (1607-1615) (Sasaki, 2003). El tipo de formación que recibió Descartes en La Flèche estaba basado en un currículum escolástico principalmente, aunque como menciona Sasaki (2003) la enseñanza no era del todo dogmática, pues estaba abierta a conocimiento nuevo. Por lo tanto, se recibía una enseñanza crítica. Se sabe que Descartes era un alumno sobresaliente interesado en muchas ramas de las ciencias (Rossell, 1947; Agarwal y Syamal, 2014).

Se conoce mucho sobre el desarrollo de sus ideas y sus trabajos por la constante correspondencia que mantenía con intelectuales con los que disfrutaba discutir sus ideas y recibir consejos y retroalimentaciones sobre las mismas. Los diarios de Beeckman y su correspondencia con Mersenne muestran progresivamente cómo sus ideas iban madurando hasta lograr su cometido principal hasta antes de la publicación del *Discourse de la Methode* en 1637, relacionado con la búsqueda de una ciencia nueva y general que pudiera resolver todos los problemas.

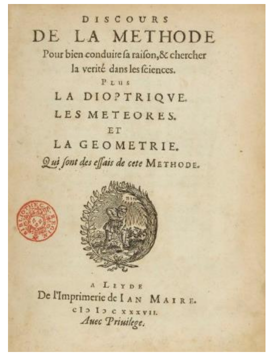
12.1.2.2.1 Intereses/motivaciones

La producción diversa de Descartes da cuenta de una amplia gama de intereses científicos y filosóficos (ver Figura 65), aunque considerando sus tratados puede verse que la mayoría de ellos trataban temas de la filosofía. Quizás por ello es más reconocido, en el ámbito de las ciencias en general, por su contribución a la filosofía, razón por la cual se le considera como padre de la filosofía moderna; toda vez que sus motivaciones filosóficas trataron de construir esquemas de pensamiento que no aceptaran las verdades impuestas. Esto como se ha mencionado se relaciona con la lucha contra la racionalidad y cultura escolástica. La colección de sus trabajos deja ver que Descartes era un hombre versado en múltiples temas.

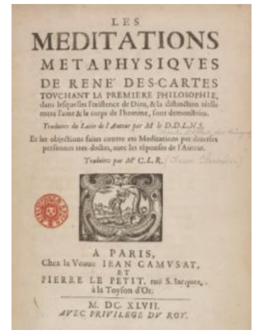
1626–1628. *Regulae ad directionem ingenii*



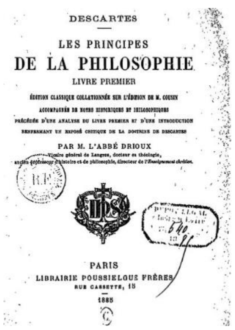
1630–1633. *Le Monde and L'Homme*



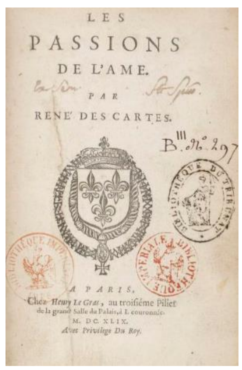
1637. *Discours de la méthode.*



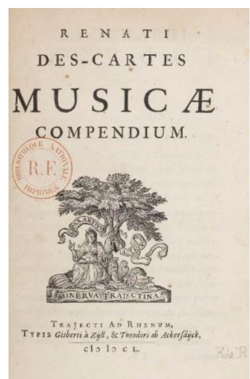
1641. *Meditationes de prima philosophia*



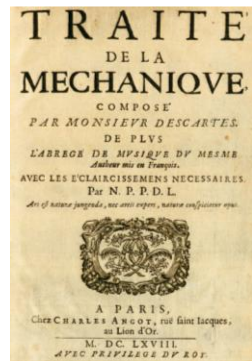
1644. *Principia philosophiae*



1649. *Les passions de l'âme*



1668. *Musicae Compendium*



1668. *Traite de la Mechanique*

Figura 65. Principales obras de Descartes

A pesar de su interés por variedad de disciplinas, sin duda, su pensamiento filosófico predominó en todas sus obras. En el caso que compete al objeto de estudio de esta investigación, sus investigaciones matemáticas se vieron influenciadas por este pensamiento, al igual que de manera inversa. A decir de Bos (2001):

> Las matemáticas de Descartes eran las matemáticas de un filósofo. Desde la primera fase documentada de su carrera intelectual, las matemáticas fueron una fuente de inspiración y un ejemplo para su filosofía y, a la inversa, sus inquietudes filosóficas influenciaron fuertemente su estilo y programa en matemáticas (p. 228).

En particular, lo más destacable de sus principios filosóficos perseguidos a lo largo de sus obras apuntan hacia la importancia fundamental que tiene la exactitud y el método para encontrar la verdad y la certeza de las cosas (Bos, 2001). Esto puede verse claramente en las palabras del propio Descartes:

> [L]a facultad de juzgar y distinguir lo verdadero de lo falso, que es propiamente lo que llamamos buen sentido o razón, es naturalmente igual en todos los hombres; y, por lo tanto, que la diversidad de nuestras opiniones no proviene de que unos sean más razonables que otros, sino tan sólo de que dirigimos nuestros pensamientos por derroteros diferentes y no consideramos las mismas cosas. No basta, en efecto, tener el ingenio bueno; lo principal es aplicarlo bien. Las almas más grandes son capaces de los mayores vicios, como de las mayores virtudes; y los que andan muy despacio pueden llegar mucho más lejos, si van siempre por el camino recto, que los que corren, pero se apartan de él [...] Pero, sin temor, puedo decir, que creo que fue una gran ventura para mí el haberme metido desde joven por ciertos caminos, que me han llevado a ciertas consideraciones y máximas, con las que he formado un método, en el cual paréceme que tengo un medio para aumentar gradualmente mi conocimiento y elevarlo poco a poco hasta el punto más alto a que la mediocridad de mi ingenio y la brevedad de mi vida puedan permitirle llegar. Pues tales frutos he recogido ya de ese método, que, aun cuando, en el juicio que sobre mí mismo hago, procuro siempre inclinarme del lado de la desconfianza mejor que del de la presunción, y aunque, al mirar con ánimo filosófico las distintas acciones y empresas de los hombres, no hallo casi ninguna que no me parezca vana e inútil, sin embargo no deja de producir en mí una extremada satisfacción el progreso que pienso haber realizado ya en la investigación de la verdad [...](Descartes, 1637, p. 7-8).

Si se fija en las Reglas que Descartes propuso en *Regulae ad directionem ingenii*, unos años antes de la publicación y consolidación del *Discours de la méthode* puede verse también claramente este hecho. En particular las primeras doce reglas, que no son aplicables únicamente a las matemáticas atañen justo a la forma en las que hay que conducir la mente para atender de manera metódica a las preguntas que se puedan plantear con el fin de lograr juicios que sean sólidos y verdaderos. A continuación, citamos los títulos de las primeras cinco reglas para mostrar este hecho:

- *Regla 1.* El fin de los estudios debe ser la dirección del espíritu, para **formular juicios firmes y verdaderos** acerca de todas las cosas que se le presentan;
- *Regla 2*. Conviene ocuparse solo de aquellos objetos, cuyo **conocimiento cierto e indudable, nuestra mente parece capaz de alcanzar**;
- *Regla 3.* Acerca de los objetos propuestos se debe investigar, no lo que otros hayan pensado o nosotros mismos sospechemos, sino **lo que podamos intuir con claridad y evidencia o deducir con certeza**, pues no se adquiere la ciencia de otro modo;
- *Regla 4*. **El método es necesario para la investigación de la verdad**;
- *Regla 5.* Todo el método consiste en el orden y disposición de aquellas cosas hacia las cuales **es preciso dirigir la agudeza de la mente para descubrir alguna verdad**. Ahora bien, lo observaremos exactamente si reducimos gradualmente las proposiciones intrincadas y oscuras a otras más simples, y si después, partiendo de la intuición de las más simples, intentamos ascender por los mismos grados al conocimiento de todas las demás.

- Los títulos de las siguientes siete reglas (6 - 12) dejan ver las acciones para dividir las distintas proporciones en simples y más complejas, así como el cómo atender a cada una de ellas.
- *Regla 6.* **Para distinguir las cosas más simples de las complicadas** e investigarlas con orden, conviene, en cada serie de cosas en que hemos deducido directamente algunas verdades de otras, observar cuál es la más simple, y cómo de todas las demás están más o menos o igualmente alejadas de ella
- *Regla 7.* Para completar la ciencia **es preciso examinar** con un movimiento continuo y no interrumpido del pensamiento **todas y cada una de las cosas que se relacionan con nuestro propósito y abarcarlas en una enumeración suficiente y ordenada**
- *Regla 8.* **Si en la serie de cosas que se han de investigar se presenta algo que nuestro entendimiento no pueda intuir suficientemente bien, es preciso detenerse allí;** y no se debe examinar lo demás que sigue, sino abstenerse de un trabajo superfluo.
- *Regla 9.* **Conviene dirigir toda la fuerza del espíritu a las cosas más pequeñas y fáciles**, y detenerse en ellas largo tiempo, hasta acostumbrarse a intuir la verdad con claridad y distinción
- *Regla 10.* **Para que el espíritu adquiera sagacidad debe ejercitarse** en investigar las mismas cosas que ya han sido descubiertas por otros, y en recorrer con método aun los más insignificantes artificios de los hombres, pero, sobre todo, aquellos que explican el orden o lo suponen
- *Regla 11.* **Después de haber tenido la intuición de algunas proposiciones simples, si de ellas deducimos alguna otra cosa**, es útil recorrerlas por medio de un movimientos continuo y no interrumpido del pensamiento, **reflexionar en sus mutuas relaciones** y, en todo lo posible, concebir distintamente varias cosas a la vez, pues así, nuestro conocimiento llega a ser mucho más cierto y aumenta en gran manera la capacidad del espíritu
- *Regla 12.* Finalmente, **es preciso utilizar todos los auxilios del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria, ya para la intuición distinta de las proposiciones simples, ya para la comparación debida de las cosas buscadas con las conocidas,** a fin de descubrirlas, ya para el descubrimiento de aquellas cosas que deben ser comparadas entre sí, de suerte que no se omita ningún medio de los que están al alcance humano

A partir de las reglas de la 13 a la 15 es cuando se puede ver más de cerca cómo las matemáticas entran en el método, pues tratan sobre la forma de abstraer solo los aspectos necesarios de lo investigado, que parece estar conectado fuertemente con lo geométrico.

- *Regla 13.* Si comprendemos perfectamente una cuestión, debe ser **abstraída de todo concepto superfluo, reducida a la mayor simplicidad, y dividida, mediante una enumeración, en partes tan pequeñas como sea posible**

- *Regla 14.* La misma cuestión debe ser referida a la extensión real de los cuerpos y **representada totalmente a la imaginación por puras figuras;** pues así será percibida por el entendimiento con mucha mayor distinción
- *Regla 15.* Es útil también, casi siempre, **trazar figuras y presentarlas a los sentidos externos,** a fin de que por este medio, **se mantengan más fácilmente la atención de nuestro pensamiento**

Finalmente en las Reglas de la 16 a la 21 es indudable ver la forma en la que el álgebra juega un rol primordial en el método de Descartes, pues estas reglas abordan la forma en cómo transformar en ecuaciones lo obtenido a partir de las reglas previas.

- *Regla 16.* En cuanto a las cosas que no requieren la atención actual de la mente, aunque sean necesarias para la conclusión, es mejor **representarlas por signos muy breves** que por figuras íntegras; **pues así la memoria no podrá fallar**; ni tampoco por eso se distraerá el pensamiento en retenerlas, mientras se aplica a deducir otras
- *Regla 17.* La dificultad propuesta debe ser directamente recorrida, prescindiendo de que algunos de sus términos sean conocidos y otros desconocidos, y procurando **intuir por medio de verdaderos discursos la mutua dependencia de cada uno con los demás**
- *Regla 18.* Para esto, **solo cuatro operaciones se requieren: la adición, la sustracción, la multiplicación y la división,** de las cuales las dos últimas muchas veces no deben ser llevadas a cabo, ya para no complicar nada inútilmente, ya porque pueden ser ejecutadas más fácilmente después
- *Regla 19.* Por este método de razonamiento **se deben buscar tantas magnitudes expresadas de dos modos diferentes, como términos desconocidos suponemos conocidos para recorrer directamente la dificultad:** pues así se obtendrán otras tantas comparaciones entre dos cosas iguales
- *Regla 20.* Una vez **encontradas las ecuaciones**, se han de acabar las operaciones que omitimos, no usando nunca de la multiplicación mientras haya lugar para la división
- *Regla 21.* Si hay varias de **estas ecuaciones, se deben reducir todas a una sola**, es decir, aquellas cuyos términos ocupen el menor número de grados en la serie de magnitudes continuamente proporcionales, según la cual ellos deben ser ordenados

De esta manera es claro ver que existe una mutua influencia entre el pensamiento filosófico y matemático que se cristalizan en la forma que Descartes pretende promover para encontrar la verdad basándose en juicios sólidos, como lo que proveen las matemáticas.

Descartes es explícito cuando explica en la segunda parte del *Discours de la méthode* que entre los principios del método se encontraban los tocantes a la lógica, el análisis y el álgebra:

> En años anteriores había hecho algunos estudios de lógica en el curso de filosofía, y de análisis geométrico y álgebra en matemáticas, tres artes o ramas de conocimiento que parecían destinadas a contribuir a mi propósito. (Descartes, 2006, p. 16).

Sin embargo, continúa relatando su insatisfacción respeto a cada uno de estos tres pilares respecto a la forma en la que en su tiempo se encontraban:

> Pero, al examinarlos, noté, en el caso de la lógica, que sus silogismos y la mayoría de sus otras técnicas se emplean más para explicar cosas a otras personas que uno ya conoce o incluso, como en el arte de la Lulio, para hablar imprudentemente sobre aquellos de los que uno es ignorante, que para aprender algo nuevo. Y aunque la lógica contiene realmente muchos preceptos muy verdaderos y excelentes, hay tantos otros mezclados con ellos que son dañinos o superfluos, que es casi tan difícil separar los primeros de los segundos como extraer una estatua de Diana o Minerva de un bloque de mármol en bruto. En cuanto al análisis geométrico antiguo y el álgebra moderna, incluso aparte del hecho de que sólo se ocupan de asuntos altamente abstractos que parecen no tener aplicación práctica, el primero está tan estrechamente ligado a la consideración de las figuras que es incapaz de ejercer el intelecto sin agotar la imaginación, mientras que en el segundo caso uno es tan esclavo de ciertas reglas y símbolos que se ha convertido en un arte confuso y oscuro que desconcierta a la mente en lugar de ser una forma de conocimiento que la cultiva. Por eso pensé que había que encontrar otro método que conservara las ventajas de los tres, pero que estuviera libre de sus defectos. (Descartes, 2006, p. 16-17).

Por lo tanto, de este reconocimiento sobre las tres disciplinas que podrían contribuir a su propósito junto con sus respectivos defectos como Descartes menciona, se embarcó en una búsqueda, al menos hasta antes de la publicación del *Discours de la méthode*, en la búsqueda de una nueva ciencia que retomara los beneficios del análisis geométrico y del álgebra para librarlos de sus defectos. El resultado de este intento, al igual que Viète, y el cual es objeto de la investigación es, la creación del análisis algebraico, que en el marco de problemas en los que Descartes lo pone en uso se interpretará como geometría analítica.

12.1.3. Contexto de la situación específica: El análisis geométrico y su renovación

Si bien existió una separación en tiempo entre los trabajos más prominentes respecto la creación de un nuevo tipo de álgebra por parte de Viète y Descartes, ambos se embarcaron en un mismo proyecto, aunque con intenciones diferentes. Este proyecto implicó la renovación del *análisis geométrico griego* cuya consecuencia fue la creación del *arte analítico* y la *mathesis universalis* por arte de Viète y Descartes respectivamente que en esencia son propuestas con la misma intención una nueva ciencia en la que el álgebra simbólica cumpliría una función primordial.

Tanto Viète como Descartes de manera explícita o implícita aluden a los trabajos de Pappus y Theon, o bien, sobre el análisis geométrico —ambos originarios de Alejandría— relativos al análisis geométrico, sobre los cuales sus respectivos programas se erigieron.

> Hay una cierta manera de buscar la verdad en matemáticas que se dice que Platón descubrió primero. Theon lo llamó análisis, que definió como la asunción de lo que se busca como si se admitiera [y funcionara] a través de las consecuencias [de esa asunción] de lo que es cierto, en contraposición a la síntesis, que es la asunción de lo que [ya] se admite [y funciona] a través de las consecuencias[de esa asunción] para llegar a comprender lo que se busca (Viète, 1983, p. 11).

> Las largas cadenas de razonamientos, cada uno simple y fácil, que los geómetros emplean habitualmente para alcanzar sus pruebas más difíciles, me han dado motivos para suponer que todas las cosas que caen dentro del dominio del entendimiento humano se suceden de la misma manera, y que mientras uno deje de tomar algo por cierto que no es cierto y se apegue al orden correcto para deducir una cosa de la otra, no puede haber nada tan remoto que uno no pueda llegar a alcanzarlo, ni tan oculto que no pueda descubrirlo (Descartes, 2006, p. 17-18).

En términos generales, siguiendo la concepción de Pappus en su tratado *Collectio* el *análisis geométrico griego* "era algo más que una herramienta heurística, [...] [e]ra una técnica matemática en sí misma, que definía un estilo matemático identificable de investigación y presentación" (Sefrin-Weiss, 2013, p. 3).

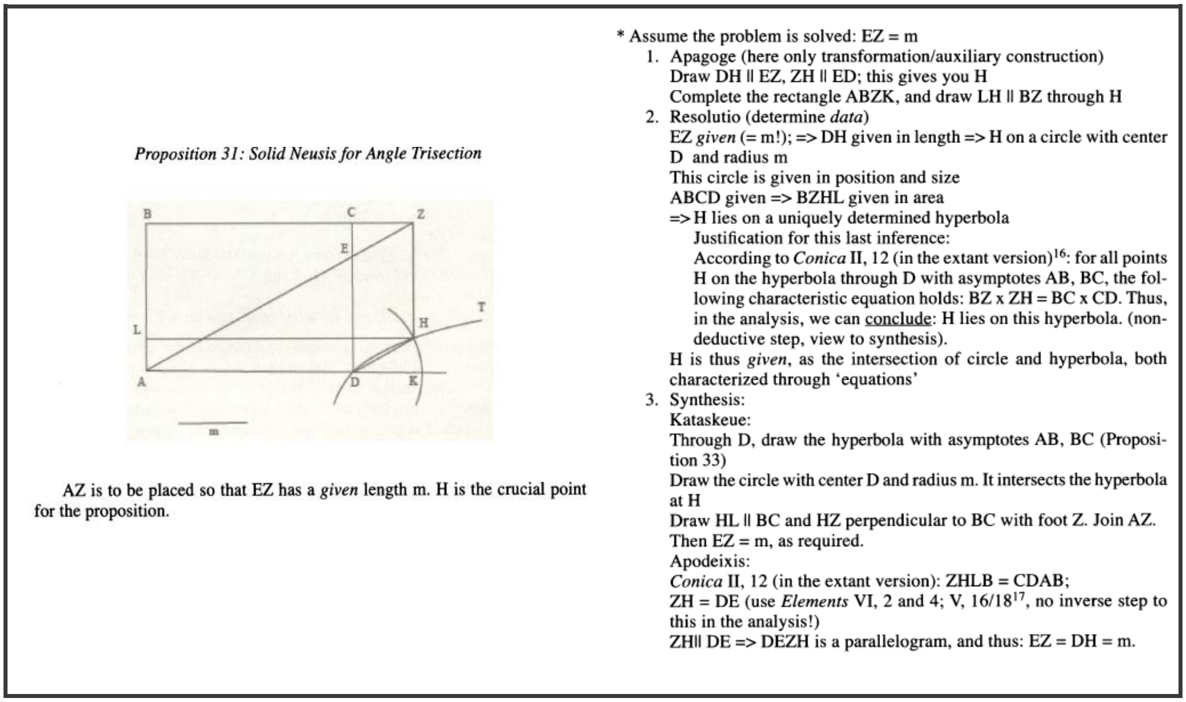
En términos estructurales el esquema del método Análisis-Síntesis puede exponerse de la siguiente manera de acuerdo con Sefrin-Weiss (2013, p. 5):

Etapa	Descripción
Suponga que el problema está resuelto*	
Análisis propiamente dicho: **Apagoge/Epagoge**	Emplea sistemáticamente estrategias de descomposición, reducción (a menudo deductivas) y de transformación (a través de construcciones auxiliares, o terminación de patrones), seguimiento hasta llegar a una situación/configuración que pueda controlar
Resolutio	Mostrar que la 'configuración final' deseada del Apagoge es alcanzable sin la suposición inicial *; determinar ' datos (término técnico: lo que se ' da ' en el sentido de ser constructible a partir de la información original, sin el análisis-asunción), y determinar las condiciones para la solvencia (diorismos)
Síntesis	Prueba, por lo general un Apodeixis clásico, por lo general a partir de una construcción (Kataskeue) que coincide, a menudo incluso reitera, los pasos de la Resolutio

Tabla 46. Esquema del método Análisis-Síntesis (adaptado de Sefrin-Weiss, 2013, p. 5)

De acuerdo con Klein (1968) y Mahoney (1968) Pappus menciona dos tipos de análisis, uno teórico y el otro problemático—los cuales respectivamente corresponden a la *Zetética* y *Porística* de Viète. En el primero tiene la función de encontrar la verdad, es decir, plantear un supuesto sobre lo que se busca demostrar que con base en lo conocido el supuesto es plausible de demostrar, mientras que en el segundo tipo la intención es proveer lo que es requerido para garantizar lo que se desea encontrar siempre bajo un supuesto inicial, es decir, derivar conclusiones sobre lo anterior para llegar a la resolución del problema. La síntesis en cambio es la encargada de presentar la demostración.

En Sefrin-Weiss (2013, p. 9-10) se muestra un ejemplo de la proposición 31 en *Collectio* en la cual es claro ver esta descripción. De donde el análisis juega el rol más importante en la resolución, pues es la parte que provee de la estrategia metodológica para la demostración. Por ello, Descartes da prioridad a esta parte.


Proposition 31: Solid Neusis for Angle Trisection

AZ is to be placed so that EZ has a *given* length m. H is the crucial point for the proposition.

* Assume the problem is solved: EZ = m

1. Apagoge (here only transformation/auxiliary construction)
   Draw DH ll EZ, ZH ll ED; this gives you H
   Complete the rectangle ABZK, and draw LH ll BZ through H
2. Resolutio (determine *data*)
   EZ *given* (= m!); => DH given in length => H on a circle with center D and radius m
   This circle is given in position and size
   ABCD given => BZHL given in area
   => H lies on a uniquely determined hyperbola
   Justification for this last inference:
   According to *Conica* II, 12 (in the extant version)[16]: for all points H on the hyperbola through D with asymptotes AB, BC, the following characteristic equation holds: BZ x ZH = BC x CD. Thus, in the analysis, we can conclude: H lies on this hyperbola. (non-deductive step, view to synthesis).
   H is thus *given*, as the intersection of circle and hyperbola, both characterized through 'equations'
3. Synthesis:
   Kataskeue:
   Through D, draw the hyperbola with asymptotes AB, BC (Proposition 33)
   Draw the circle with center D and radius m. It intersects the hyperbola at H
   Draw HL ll BC and HZ perpendicular to BC with foot Z. Join AZ.
   Then EZ = m, as required.
   Apodeixis:
   Conica II, 12 (in the extant version): ZHLB = CDAB;
   ZH = DE (use *Elements* VI, 2 and 4; V, 16/18[17], no inverse step to this in the analysis!)
   ZHll DE => DEZH is a parallelogram, and thus: EZ = DH = m.

Figura 66. Ejemplo de la proposición 31 de Pappus *Collectio*

12.1.3.1 El Arte Analítico de Viète y la *Logistica Especiosa*

El trabajo más prominente que se ha hecho hasta ahora sobre el estudio del *Arte analítico* de Viète lo llevó a cabo el filósofo Jacob Klein en 1934 y 1936 en dos ensayos escritos originalmente en alemán, los cuales posteriormente se tradujeron al inglés y se unieron para conformar el libro *Greek Mathematical Thoguht and The Origin of Algebra* en 1968. Autores recientes como Oaks (2018) han mencionado la vigencia y el consenso entre los historiadores sobre la aceptación del estudio de Klein aun en tiempos modernos.

En Klein (1968) se presenta una investigación sobre la constitución de los fundamentos de la física matemática moderna, la cual señala se relaciona directamente con el desarrollo un lenguaje formal el cual a su vez está relacionado con el desarrollo del álgebra. “La creación del lenguaje formal de las matemáticas es idéntica a la base del álgebra moderna” (Klein, 1968, p. 4).

De este modo Klein (1968) realiza una profunda investigación sobre el origen y estructura conceptual subyacente del lenguaje formal de las matemáticas modernas, mencionando que es a partir del trabajo de Viète en la reformulación y replanteamiento de la *Arithmetica* de Diofanto en conjunto con la reformulación del análisis geométrico que crea las bases para dicho lenguaje formal: el lenguaje algebraico simbólico (de las especies), el cual resignifica el concepto mismo de número.

Para poder rastrear las bases conceptuales que permitió esta resignificación del concepto de número se planteó analizar las obras filosóficas griegas que sirvieron como base ontológica sobre la concepción de número en la ciencia griega que fue absorbida por el mudo occidental a través de los árabes y de la difusión progresiva de los trabajos griegos originales durante el renacimiento, así como sus reformulaciones por los humanistas durante el renacimiento como Viète, Stevin, Descartes y Wallis.

En términos generales Klein (1968) muestra que la ontología respecto al número estaba asociada con el concepto de *eide*[30], el cual refiere a la naturaleza del número, es decir, una forma de categorizar los tipos de números, así como en la indivisibilidad de la unidad—se consideraba de acuerdo a la visión pitagórica que existía un origen de los números y esta era la unidad, la cual por su propiedad de origen no podía ser divisible pues era generadora—lo cual complicaba el trabajo con las fracciones y la teoría de proporciones. En este sentido, los números eran concebidos en la antigüedad griega como “una cantidad definida de objetos definidos”.

Klein (1968) muestra que Diofanto hizo modificaciones sobre la idea de la indivisibilidad de la unidad permitiendo en sus problemas la división de la unidad, así como una innovación respecto a la idea de emplear la noción de *eide* de forma instrumental. Diofanto aprovechó esta noción para categorizar los tipos de números como cuadráticos, cúbicos, cudráticos cuadráticos basados en la propiedad multiplicativa de ensamblaje. Esto es, la multiplicación de un número monádico—lo que consideraríamos como un número simple—por sí mismo construirá un nuevo tipo: uno cuadrático. Los tipos de número recibían los siguientes nombres: *dynamis*, *kybos*, *dynamodynamis*, *dynamokubos*, *kybokybos*, lo que puede entenderse como *cuadrado*, *cubo*,

---

[30] Este término griego se usaba para señalar la clase, tipo, naturaleza de las cosas. En el caso de los números representa la clase o tipo de número (Klein, 1968).

cuadrado-veces-cuadrado[31], *cuadrado-veces-cubo*, *cubo-veces-cubo*, y que eran representados en términos de los signos Δ^{γ}, K^{γ}, $\Delta^{\gamma}\Delta$, ΔK^{γ}, $K^{\gamma}K$ respectivamente (Klein, 1968). El método de resolución de los problemas consecuentemente, más que tratar con números alude al hecho de reunir los *eide* para operar sobre los del mismo tipo para resolver el problema, encontrar el *arithmos*, es decir, el número desconocido o incógnita, el cual es representado por el signo ς. Aquí Diofanto desarrolla otra innovación pues la definición clásica de *arithmos* es extendida hacia la incógnita de manera que éste "tiene en sí mismo una multitud indeterminada de mónadas (Klein, 1968, p. 140)."

> [L]a presentación y solución de los problemas tiene lugar esencialmente en términos del propio *eide*. Pero esto no significa que el *eide* como tal sean números. Más bien representan, como hemos mostrado anteriormente, una "característica del tipo" de cada número determinado. El hecho de que la multiplicación por la unidad no cambie los *eide* significa solamente que cada número [...] tomado "una vez" permanece intacto en su multitud y, por consiguiente, también en su "clase", mientras que, por otra parte, todo cambio multiplicativo de "clase", [...] se basa en un cambio de la composición multiplicativa de esa multitud particular de mónadas. En otras palabras, aquí también debemos distinguir estrictamente entre el procedimiento y el objeto; mientras que el procedimiento se aplica al *eide* que es como tal independiente de cada "multitud de mónadas" (Klein, 1968, p. 144).

Esto lleva a Klein (1968) a enfatizar que los signos empleados por Diofanto no son más que abreviaturas de palabras, no símbolos algebraicos como los del álgebra moderna. Toda vez que son empleados como un agregado que especifica el tipo de número y no un valor general. Esta concepción se mantuvo en los tratados medievales algebraicos. Por lo tanto, a pesar de que hubo una gran variedad de simbolismos durante la Edad Media en esencia la mayoría de los algebristas lo usaron de la misma manera que Diofanto.

Esto puede verse claramente cuando se muestra un ejemplo de resolución. Se retoma el ejemplo de Meskens (2010, p. 58) en el que anacrónicamente se emplean los signos de $+$, $-$ y los números arábigos con fines de facilitar la lectura.

"Toma el cuadrado de un múltiplo aleatorio de ς del cual la raíz cuadrada de 16 sea sustraída. Tomemos por ejemplo $\mathbf{2\varsigma - 4\dot{\mu}}$ o, **cuyo cuadrado es** igual a $\mathbf{4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma}$"

Nótese que el elevar al cuadrado 2ς se obtiene $4\delta^{\upsilon}$, el doble producto de 2ς con $4\dot{\mu}$ da como resultado $16\dot{\mu}$ y el cuadrado de $4\dot{\mu}$ resulta en 16ς lo cual no corresponde con el uso simbólico actual, puesto que los símbolos no se mantienen en el proceso de cálculo. En este sentido, la

[31] Dentro de la teoría aritmética clásica de los *eide* los números se podían clasificar en pares, impares, par-veces-par, par-veces-impar, etc. (1968).

función de los signos es señalar la especie, no un número general que es operado simbólicamente.

Una forma de entender esta distinción entre la abreviatura o denotación del tipo de número con el símbolo es a través de un ejemplo basado en Oaks (2018).

Es consistente en los tratados algebraicos de la Edad Media ver que expresiones como la siguiente—de acuerdo con la notación de Stevin—$1① + 1③ Egale$ à 10 no pueden omitir el 1 de las incógnitas cuyo coeficiente sea éste, mientras que en el álgebra moderna esto sí es posible. Esto sucede porque la letra en el álgebra medieval y en Diofanto no representa algún valor general, sino es solo como una etiqueta que dice de que tipo es la cantidad 1. Funciona como la denominación de una moneda, no podríamos escribir $P + 2\ dolares$ “peso más dos dólares” pues es necesario especificar cuántos pesos son. Mientras que P es una denominación, $1P$ sería un valor.

Klein (1968) postula que fueron tres aspectos que hicieron que Viète diera el paso decisivo hacia el álgebra simbólica y que como tales fungieron como base conceptual para definir su *arte analítico*.

1. La comparación que hace Viète entre los métodos de *análisis geométrico* y la *Arithmetica* de Diofanto.
2. El uso del concepto de *eide* presente en Diofanto reformulado.
3. Una teoría general de la proporción, bajo la influencia de los postulados de Proclo sobre la existencia de una ciencia más allá de la artimética y la geometría en la que la teoría de las proporciones habitaba. Idea que Descartes también siguió y de acuerdo con la visión moderna se le nombró como *mathesis universalis*.

En sí estos tres aspectos que hicieron que Viète diera el paso decisivo para la creación de una forma simbólica de abordar los problemas están intrincados de manera que a pesar de estar separados uno implica a los demás. Como se mostrará en los siguientes apartados.

12.1.3.1.1 Análisis geométrico y algebraico

Como se mostró previamente, el método de análisis y síntesis estaba enmarcado originalmente en la geometría. Viète desarrolla un tipo de análisis que puede aplicarse tanto para la geometría como para la aritmética, puesto que en su estudio del trabajo de Diofanto identifica el uso de este método. Esto sucede porque como procedimiento análogo al análisis geométrico el supuesto está asociado a que supone que conoce la cantidad, es decir, el establecimiento de la incógnita *arithmos* lo que permite construir expresiones que involucren a la incógnita que servirán para encontrar su valor específico. Como paso final, análogamente en la síntesis del análisis geométrico relativo a lo problemático, en el que se construye la figura, Diofanto establece el valor o valores específicos que cumplen con las condiciones del problema demostrando así que la solución(es) es(son) válida(s).

En palabras de Viète:

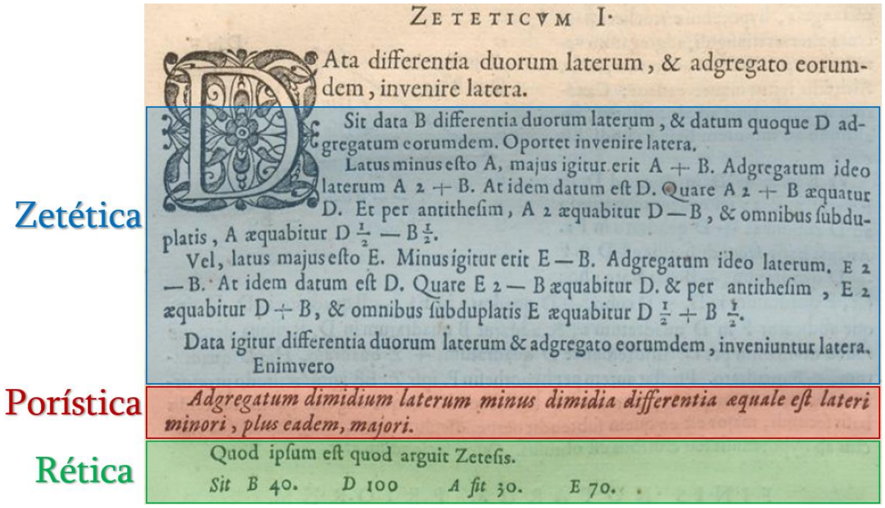
> Diofanto usó la zetética más sutilmente en aquellos libros que han sido recogidos en la Aritmética. Allí exhibe con seguridad este método en números, pero no en símbolos, para los que sin embargo se utiliza. Por eso su ingenio y su rapidez mental son los más admirables, ya que las cosas que parecen ser muy sutiles y abstractas en la logística numérica son bastante familiares e incluso fáciles en la logística simbólica (Viète, 1983, p. 9).

De esta manera, Viète considera que el uso del método de análisis es válido en problemas numéricos y geométricos, lo cual lo lleva a construir un *arte analítico* en el que el tratamiento simbólico será su distintivo. En este sentido, el método de análisis toma una textura particular en Viète quien postula que está compuesto de tres partes:

> Aunque los antiguos proponían sólo [dos tipos de] análisis, la *Zetética* y la *Porística*, a las que se aplica la definición de Theon, he añadido una tercera, que puede llamarse *Rética* o *Exegética*. Es propiamente la Zetética por la cual se establece una ecuación o proporción entre un término que se encuentra y los términos dados, Porística por la cual la verdad de un teorema establecido se prueba por medio de una ecuación o proporción, y Exegética por la cual se determina el valor del término desconocido en una ecuación o proporción dada. Por lo tanto, todo el arte analítico, asumiendo esta triple función por sí mismo, puede ser llamado la ciencia del descubrimiento correcto en matemáticas (Viète, 1983, p. 1).

La *Zetética* entonces es la parte del análisis que inicia con la suposición del problema resuelto y todos aquellos recursos que permitan encontrar una ecuación o una proporción general que involucre las relaciones que se desean analizar. La *Porística* consiste en determinar una regla retórica que describe la solución general del problema basándose en la ecuación resultante de la *Zetética.* Finalmente, la *Exegética/Rética* es la parte del método que corresponde con la síntesis puesto que en esta parte se designan valores específicos a las cantidades generales (especies) para obtener, ya sea los números buscados, o bien las construcciones geométricas según sea el caso.

A continuación, se muestra el ejemplo de la primera Zetética del Libro I en el tratado *Zeteticorum Libri Quinque*. Dado que es un problema numérico, la última fase del método es *Rética*.



ZETETICVM I.

Data differentia duorum laterum, & adgregato eorumdem, invenire latera.

Sit data B differentia duorum laterum, & datum quoque D adgregatum eorumdem. Oportet invenire latera.

Latus minus esto A, majus igitur erit A + B. Adgregatum ideo laterum A 2 + B. At idem datum est D. Quare A 2 + B æquatur D. Et per antithesim, A 2 æquabitur D — B, & omnibus subduplatis, A æquabitur D $\frac{1}{2}$ — B $\frac{1}{2}$.

Vel, latus majus esto E. Minus igitur erit E — B. Adgregatum ideo laterum, E 2 — B. At idem datum est D. Quare E 2 — B æquabitur D. & per antithesim, E 2 æquabitur D + B, & omnibus subduplatis E æquabitur D $\frac{1}{2}$ + B $\frac{1}{2}$.

Data igitur differentia duorum laterum & adgregato eorumdem, inveniuntur latera.

Enimvero

Adgregatum dimidium laterum minus dimidia differentia æquale est lateri minori, plus eadem, majori.

Quod ipsum est quod arguit Zetesis.

Sit B 40. D 100 A fit 30. E 70.

Figura 67. Partes del arte analítico de Viète (Libro I, Zetética I, Zeteticorum Libri Quinque, 1646, p. 42)

Se muestra la traducción del mismo problema para que pueda notarse de manera más concreta lo que cada paso incluye (Viète, 1983, p. 83).

ZETÉTICA I Dada la diferencia entre dos raíces y la suma determinar las raíces.	
Zetética	Sea B la diferencia entre dos raíces y sea D su suma. Las raíces serán encontradas. Sea A la raíz más pequeña. La mayor será entonces $A + B$. Entonces la suma de las raíces es $2A + B$. Pero esto ha sido dado como D. Por lo tanto $2A + B = D$. Y, por transposición, $2A = D - B$. Y habiendo divido todo por 2, $A = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}B$. O sea E la raíz mayor. La menor sería entonces $E - B$. Entonces, la suma de las raíces es $2E - B$. Pero esto había sido dado como D. Por lo tanto, $2E - B = D$. Y, por transposición, $2E = D + B$. Dividiendo todo por 2, $E = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}B$.
Porística	Teniendo, por lo tanto, la diferencia entre dos raíces y su suma, las raíces pueden ser encontradas, pues *La mitad de la suma de las raíces menos la mitad de su diferencia es igual a la menor raíz, y [la mitad de la suma de las raíces] más [la mitad de su diferencia es igual] a la mayor.* Es esto lo que la Zetética deja claro.
Rética	Sea B 40 Y D 100. A es entonces 30 y E es 70

Tabla 47. Partes del arte analítico de Viète (Libro I, Zetética I, *Zeteticorum Libri Quinque*, 1646, p. 42, traducción)

En el caso de que el problema sea geométrico entonces como en el caso de la proposición XVI del tratado de *Suplementum Geometriae* (1646, p. 249) el último paso es la Exegética, en la que se muestra la figura geométrica con los valores numéricos correspondientes explícitamente.

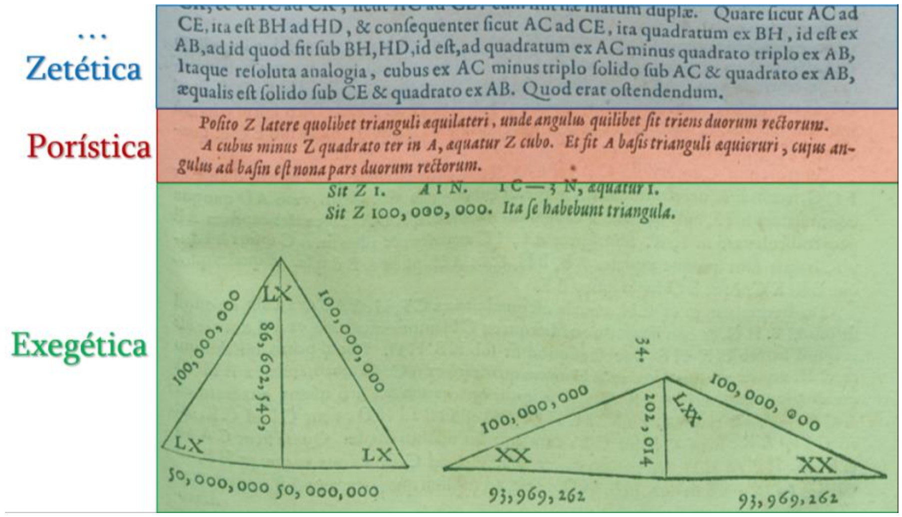


Figura 68. La síntesis cuando el problema es geométrico Viète, *Suplementum Geometriae* (1646, p. 249)

La consecuencia de articular el análisis geométrico con el aritmético de Diofanto implicó que el concepto de *arithmos* fuera extendido, lo cual se desarrollará en el siguiente apartado.

12.1.3.1.2 La noción de número (arithmos) y eide en logistica especiosa de Viète

La revisión del método del análisis geométrico implicó conceptualmente dos cosas: una primera era que el método por crearse debía ser general, en el sentido de que debería aplicarse tanto para problemas geométricos como aritméticos, lo cual derivó en que el *objeto* del *arte analítico* tuviera esta generalidad. Por lo tanto, los objetos con los que se trabajara podían ser tanto numéricos, como geométricos. Esto lleva a Klein (1968) afirmar que la noción de número en Viète, es decir, el *arithmos* que incluso en Diofanto representaba un número determinado de unidades, derivara en un número determinado de objetos, donde los objetos podrían ser números o magnitudes geométricas.

Oaks (2018) difiere en esta interpretación que Klein (1968) realiza pues de acuerdo con un análisis en tratados contemporáneos a Viète de la palabra *magnitud*, la cual usa Viète como descripción de lo que representan sus *especies*, encuentra que la caracterización común en la época sobre magnitud que se concebía como geométrica involucraba también la ambivalencia entre número como magnitud discreta y magnitud geométrica como magnitud continua. Esto junto con el hecho de que Viète en ningún momento en su tratado hace algún tipo de distinción o nueva caracterización sobre esta palabra, lo cual Oaks (2018) explica que es muy probable que se deba a que Viète asumía que cualquiera entendería su significado, lo hace considerar que a diferencia de esta doble distinción que Klein (1968) hace las especies de Viète son únicamente magnitudes geométricas. En este sentido Oaks (2018) no contradice la visión de Klein (1968) sino más bien la recontextualiza y precisa de acuerdo con su análisis.

Bajo estas ideas el concepto de número pasa a ser un “objeto general” que posee tanto las propiedades de una magnitud geométrica y las de una numérica.

No obstante, a pesar de esta resignificación del *arithmos* al interior de la *logística especiosa*, el concepto de *eide* presente en Diofanto se mantiene en las especies de Viète, solo que con un uso diferente. En el caso del primero, el *eide* tenía un carácter instrumental, puesto que como ya se ha mencionado la descripción de los pasos para resolver la ecuación estaban centrados en conservar y exhibir el *eide* de los números. Por el contrario, Viète si bien conserva en su simbolismo las denominaciones de cada tipo de cantidad de manera verbal *cubus, cuadrato, plano, solido, etc.* El énfasis en la descripción de la solución ya no está en la exhibición y conservación del *eide*, sino más bien en la operatividad sobre el símbolo (las especies), el cual, en términos estrictos, no corresponde con la forma en la que se empleaba el *eide* en Diofanto. En cierto sentido le transfiere la operatividad que Diofanto muestra respecto al *eide* a las especies.

Considérese la descripción que Diofanto hace sobre la forma de resolver una ecuación, en la que la operatividad es asociada con el *eide* y no sobre las cantidades determinadas.

> […] [S]i un problema conduce a una ecuación en la que ciertos términos son iguales a términos de la misma especie (eidos) pero con diferentes coeficientes, será necesario restar semejante con semejante de la misma manera en ambos lados, hasta que un término se encuentra igual a un término. Si por casualidad hay términos negativos en ambos lados o en ambos lados, será necesario sumar los términos negativos en ambos lados, hasta que los términos en ambos lados sean positivos, y luego restar lo semejante de lo semejante hasta que sólo quede un término en cada lado. (Heath, 1885, p. 131).

Con respecto a este aspecto Klein (1968) menciona lo siguiente:

> Así también la regla general [la citada anteriormente] para el tratamiento de ecuaciones de primer orden (y de ecuaciones cuadráticas puras y cúbicas puras, etc.) tiene precisamente este objeto—ordenar y combinar los números según su pertenencia a una clase hasta que finalmente ambos lados […] de la ecuación se reduzcan a números de una clase, es decir, "hasta que una clase llegue a ser igual a una clase” […]. Ahora bien, es de suma importancia que aquí se mencione siempre el eide mismo y no los números, cada uno de los cuales pertenece a un determinado eidos. Esto es especialmente claro en el caso de la "Definición VI", según la cual, cuando los eidos se multiplican por la unidad, los "eidos así multiplicados... siguen siendo los mismos eidos". […][L]a presentación y solución de los problemas tiene lugar esencialmente en términos del propio eide. Pero esto no significa que el eide como tal sean números. Más bien representan, […], una "característica del tipo" de cada número determinado (Klein, 1968, p. 144).

Nuevamente el ejemplo “Toma el cuadrado de un múltiplo aleatorio de ς del cual la raíz cuadrada de 16 sea sustraída. Tomemos por ejemplo $\boldsymbol{2\varsigma - 4\dot{\mu}}$ o, **cuyo cuadrado es** igual a $\boldsymbol{4\delta^{v} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma}$” (Meskens, 2010, p. 58) apunta hacia esta dirección, puesto que no se muestra operatividad alguna sobre los signos, sino más bien estos sirven para denotar el cambio de *especie*.

La forma en la que se distingue que el concepto de *eide* está presente en las especies de Viète es reflejado con la *ley de homogeneidad*, la cual Viète describe de la siguiente manera:

> La ley primera y perpetua de las ecuaciones o proporciones que, por tratarse de su homogeneidad, se llama ley de los términos homogéneos, es ésta: Los términos homogéneos deben compararse con términos homogéneos. Porque, como dijo Adrastos, es imposible entender cómo los términos heterogéneos[pueden] afectarse entre sí (Viète, 1983, p. 2).

Esta ley de homogeneidad establece que dependiendo de la dimensión que una magnitud posea, ésta debe compararse con un *genus* —el equivalente a el *eide* Difantino— específico que corresponderá a la misma dimensión de la magnitud. Las reglas que Viète establece mencionan que solo las especies que poseen el mismo *genus* pueden sumarse y restarse respectivamente, así como compararse con otras magnitudes conocidas, las cuales corresponderán en términos de sus ecuaciones a parámetros. A continuación, se muestran las especies junto con las magnitudes conocidas comparables.

Magnitud (Especie)	**Dimensiones comparables de las magnitudes conocidas (parámetros)**
Lado (*latus*) o raíz (*radix*).	Longitud (*longitudo*) o amplitud (*latitudo*)
El cuadrado (*quadratum*)	Plano (*planum*)
El Cubo (*Cubus*)	Sólido (*solidum*)
El Cuadrado-Cuadrado (*quadratum-quadratum*)	Plano-Plano (*plano-planum*)
Cuadrado-Cubo (*quadratum-cubus*)	Plano-Sólido (*plano-solidum*)
El Cubo-Cubo (*Cubus-Cubus*)	Sólido-Sólido (*solido-solidum*)
El Cuadrado-Cuadrado-Cubo (*quadratum-quadratum-cubus*)	Plano-Plano-Sólido (*plano-plano-solidum*)
El Cuadrado-Cubo-Cubo (*quadratum-cubus-cubus*)	Plano-Sólido-Sólido (*plano-solido-solidum*)
El Cubo-Cubo-Cubo (*cubus-cubus-cubus*)	Sólido-Sólido-Sólido (*solido-solido-solidum*)

Tabla 48. Magnitud y *genus* comparables en Viète *In artem Analyticem Isagoge* (1591)

En este sentido, las especies quedan determinadas por su *genus* en Viète, lo cual refleja el concepto de *eide* Diofantino, pues con base en el *genus* ciertas operaciones pueden realizarse, como sumarse o restarse. En el caso de la multiplicación lo que señala es que el *genus* resultante de una multiplicación o división es heterogéneo respecto a las magnitudes con las que se realizó la operación.

> - Si una magnitud es añadida a otra, la segunda es homogénea con la primera.
> - Si una magnitud es sustraída de otra, la segunda es homogénea con la primera.
> - Si una magnitud es multiplicada por otra, el producto es heterogéneo para [tanto] la primera como la segunda.
> - Si una magnitud es dividida por otra, [el cociente] es heterogéneo al anterior [es decir, al dividendo]. (Viète, 1983, p. 15-16).

Con esta ley de homogeneidad se procura que al momento de estar resolviendo los problemas las igualdades, en términos de proporciones o ecuaciones, las comparaciones se basen en magnitudes con las mismas dimensiones, especialmente para los problemas de geometría, dado que en el caso de los numéricos se tiene de entrada que los números forman un campo homogéneo.

Nótese por ejemplo que en la ecuación de la proposición XVI del tratado *supplementum geometriae* (1646) las dimensiones de ambos términos de la igualdad son de grado tres:

$$cubum\ de\ AC\ minus\ solido\ triplo\ de\ AC\ y\ cuadrato\ de\ AB, aequari\ solido\ de\ CE\ y\ cuadrato\ de\ DC\ o\ AB$$

Lo cual en términos anacrónicos correspondería con la ecuación:

$$AC^3 - 3(AC \times AB^2) = (CE \times CD^2)$$

12.1.3.1.3 La influencia Proclo y la relación de la teoría de las proporciones con el arte analítico.

Como otros historiadores han mencionado (Cifoletti, 2003; Sasaki, 2003; Hopkins, 2011); Klein (1968) señaló la relevancia que tuvieron los planteamientos de Proclo respecto a la existencia de "una ciencia" general y universal más allá de la aritmética y la geometría, en la que la teoría de las proporciones debía estar incluída —esto considerando que para la ontología griega, dado que la noción de *arithmos* estaba anclada a la indivisibilidad de la unidad, las razones y por tanto las fracciones no tenían cabida bajo esta concepción—. Dentro de otras características esta "ciencia general" estaría basada en lo que Proclo denominaba nociones comunes, que como muestra Cifoletti (2003, 2006), influyó de manera significativa en el pensamiento de los matemáticos en el siglo XVI y XVII. Evidentemente este planteamiento es abordado más ampliamente en Descartes de manera que le permite aludir a la idea de *Mathesis universalis* como fue interpretada y nombrada en su tiempo. Lo que mostrará Descartes es que al igual que Viète, la Mathesis Universalis estaba asociada a un tipo de álgebra —el análisis algebraico. Es así como Klein (1968) menciona: "Aunque Descartes de ninguna manera continua conscientemente el trabajo de Viète, sin embargo, el 'álgebra general' que tiene en mente es precisamente ese 'álgebra nueva' y 'pura' *que Viète estableció por primera vez como el 'arte analítico general'* (p. 183, énfasis en el original).

Por lo tanto, en el trabajo de Viète se pueden ver claramente estos dos aspectos. En el capítulo dos de *In artem Analyticem Isagoge* titulado "Sobre las Reglas Fundamentales de Ecuaciones y Proporciones" señala: *El análisis acepta como probadas las conocidas reglas fundamentales de ecuaciones y proporciones que se dan en los Elementos* (Viète, 1983, p. 1). Las "nociones comunes" que define Viète como las necesarias para el arte analítico son recuperadas de los libros I, II, IV, V, VII y VIII de los Elementos de Euclides (Klein, 1968), conjuntando libros geométricos y aritméticos relativos a la teoría de proporciones.

De esta manera Viète considera que "una proporción es aquella de la que se compone una ecuación y una ecuación en la que se resuelve una proporción" (Viète, 1983, p. 2), lo cual lleva a interpretar su entendimiento del *arte analítico* no solo como una teoría general de las ecuaciones, sino como una teoría general de las proporciones (Klein, 1968).

Una manera más clara es ver en el tratado *De Recognitione et Emendatione Aequationum Tractatus Duo* como define la estructura de las ecuaciones en términos de las proporciones.

El primer teorema en el que describe la estructura de la ecuación:

$$A\ quadratum\ plus\ B\ in\ A, aequetur\ Z\ quadrato$$

La cual corresponde en términos anacrónicos con la ecuación $A^2 + AB = Z^2$, menciona que "hay tres proporciones cuya media es Z y la diferencia entre los extremos es B, haciendo de A el extremo más pequeño" (Viète 1983, p. 161). Todas las ecuaciones que define en este tratado las explica de la misma manera aludiendo a los extremos, medias y tercias proporcionales que configuran cada una de estas ecuaciones, incluyendo las de grado tres como la ecuación:

$A\ cubus\ minus\ B\ in\ A\ quadratum\ aequetur\ B\ in\ Z\ quadratum$ que en términos anacrónicos corresponde a la ecuación $A^3 - BA^2 = BZ^2$, sobre la que menciona:

"hay cuatro proporciones continuas de las cuales la primera, la mayor o la menor de los extremos, es B y la suma de la segunda y la cuarta es Z, haciendo de A la suma de la primera y la tercera" (Viète, 1983, 167).

12.1.3.1.4 Las dimensiones mayores que tres

Oaks (2018) como ya se ha mencionado anteriormente reinterpreta la ambivalencia de las especies de Viète—como número y magnitud—respecto delplanteamiento de Klein (1968), haciendo la aclaración de que dado que la palabra *magnitud*, recurrente en el trabajo de Viète, con la cual define las especies era entendida en la época de Viète justo con esta ambivalencia, de manera que para Oaks (2018), es suficiente con decir que la noción de número en Viète es la de una *magnitud geométrica*, lo cual lo lleva a considerar que Viète estaba construyendo un *álgebra para la geometría* (Oaks, 2018).

Como consecuencia de la creación de un álgebra en la geometría Oaks (2018, p. 275-276) señala que Viète debía sortear con tres aspectos epistemológicos, los cuales sí son especificados en el trabajo de Viète:

> ¿Cómo pueden formarse ecuaciones si las magnitudes participan en la categoría de "cantidad" a través de razones y proporciones?
> Si las magnitudes de diferentes dimensiones son heterogéneas, ¿cómo se pueden sumar y restar?
> ¿Cómo dar sentido a las magnitudes de dimensión superiores a tres?

Para la primera pregunta la solución de Viète a este problema epistemológico reside en que cada proporción establece una igualdad, lo cual permite transitar de manera natural de la expresión $a{:}b :: c{:}d$ a $ab = cd$ (Oaks, 2018).

Para la segunda pregunta como ya se ha mencionado anteriormente, la ley de homogeneidad establece que para comparar u operar en con las especies es necesario compararlas con magnitudes de la misma dimensión, lo cual permite la operatividad. Es el caso de la ecuación $C^3 - 3(AC \times AB^2) = (CE \times CD^2)$, la cual es cuidadosamente construida a partir de la comparación de expresiones cuadráticas y cúbicas con planos y sólidos.

Para la tercera pregunta dado el álgebra debe tratar con potencias de la incógnita de grados mayores a tres, cuatro y cinco, las cuales en la geometría las mayores a tres no tienen sentido Viète menciona que si bien, efectivamente, no tendrían sentido, son útiles para el cálculo y resolución de problemas de secciones angulares, por lo cual es justificable y necesario trabajar con dimensiones mayores que tres. De hecho, este es un aspecto muy importante que Oaks (2018) considera Klein (1968) pasó por alto y que le da sentido a su programa astronómico y cosmológico que ha sido ampliamente acordado. Asimismo, es aquí donde es posible ver, según Oaks (2018) la función del simbolismo algebraico pues, aunque Viète no le encuentra sentido o significado a este tipo de dimensiones, son útiles. Es decir, trabaja con objetos que no son entendidos a través del simbolismo.

En palabras de Viète:

> Puesto que todas las magnitudes son líneas o superficies o sólidos, ¿de qué uso terrenal son las proporciones por encima de la proporción triplicada o, a lo sumo, cuadruplicada excepto, tal vez, en la sección de ángulos para que podamos derivar los ángulos de las figuras de sus lados o de los lados de sus ángulos? (Viète, 1983, p. 32).

Con base en las exposiciones anteriores es claro ver una relevancia preponderante en las implicaciones que la adopción de la geometría en tanto sus objetos y métodos usuales tuvieron en la creación de la nueva álgebra simbólica *arte analítico*, así como de la reinterpretación de los métodos Diofantinos para ser aplicados a la geometría también.

12.1.3.2 La *Nueva Ciencia* de Descartes y la geometría analítica

En términos generales, el desarrollo de las ideas matemáticas de Descartes se ha podido recuperar gracias a la correspondencia que mantuvo con otros científicos como Mersenne y Beeckman. Los estudios que se han hecho sobre Descartes y su pensamiento matemático coinciden en marcar ciertos años, con base en la correspondencia, en los que se reflejan sus ideas relativas al análisis algebraico más incipientes y maduras. Para entender estas ideas matemáticas más cercanas al análisis algebraico, al igual que se hizo con Viète, se retomaron en el caso de Descartes los trabajos de Bos (2001) y Sasaki (2003) como fuentes principales, puesto que ambos trabajos profundizan en las ideas matemáticas de este personaje desde una visión integral en tanto filosófica y matemática.

En particular en el trabajo de Bos (2001) este autor aborda el pensamiento matemático de Descartes desde el punto de vista de la perfección y exactitud geométrica que perseguía en su obra. Esto lo lleva a describir de manera muy convincente cómo es que Descartes pensaba la geometría y cómo esto se articuló con el álgebra para crear un nuevo método.

En el caso del trabajo de Sasaki (2003), el autor persigue de manera exhaustiva las causas que pudieron detonar el pensamiento matemático y filosófico de Descartes que se cristalizó en su única obra matemática *La Géométrie*. Sasaki (2003) destaca la relevancia que el análisis algebraico jugó en su búsqueda por el método para encontrar la verdad, el cual también se vio influenciado por la idea de la *Mathesis Universalis* concepto que también se revisa a profundidad.

A diferencia de Viète, se sabe mucho más sobre la formación de Descartes, ya sea por sus propias descripciones autobiográficas en el *Discours de la méthode*, o bien por otros estudios que han permitido profundizar en este aspecto. Es por ello por lo que antes de iniciar con la descripción puntual de sus trabajos más relevantes, resulta conveniente enmarcar a Descartes desde su formación en *La Flèche* para poder dar luz sobre su posible relativismo epistemológico que le llevó a la creación de la geometría analítica con base en la reformulación del análisis geométrico.

Sasaki (2003) realiza una amplia descripción sobre la formación que recibió Descartes en *La Flèche* durante su estancia en los años de 1607 a 1615. Sasaki (2003) resalta el hecho de que era un colegio perteneciente a la orden de los Jesuitas de mucho renombre en Europa. Como consecuencia de la proliferación de las sectas protestantes y las escuelas que éstas habían fundado, la Iglesia Católica invirtió mucho esfuerzo en mejorar la calidad de enseñanza en sus escuelas. En particular, la orden de los Jesuitas y sus colegios destacaron en este aspecto. En este sentido, *La Flèche* era un colegio que estaba conformado por estudiantes que pertenecían a la élite francesa y que éstos fueran fieles tanto a la monarquía francesa como a la Iglesia Católica. Descartes pertenecía a una familia de esta clase—como ya se ha mencionado anteriormente, su padre era consejero del Parlamente de Bretaña, por ejemplo. Es así que los estudiantes que se formaban en esta prestigiosa escuela se esperaba que al egresar "subieran al escenario del teatro del mundo y desempeñaran un papel esencial en la sociedad francesa" (Sasaki, 2003, p. 13).

No obstante, como era la norma en esa época, el plan de estudios de La Flèche era escolástico, aunque reformado por el movimiento humanista. De acuerdo con Sasaki (2003) los cursos en *La Flèche*, estaban divididos en dos partes, una humanística y la otra filosófica. En un principio, para la parte humanística—que servía como base para la parte filosófica—se aprendía gramática latina y griega, historia, poesía y retórica para formar en la elocuencia perfecta. Con respecto a la parte de filosofía se estudiaba lógica y filosofía natural, se trabajaba principalmente con las obras de Aristóteles sobre lógica bajo la perspectiva unificadora de Thomas de Aquino. En la filosofía natural se leía la Física de Aritstoteles y otros libros relativos sobre los cuerpos celestes, geografía y astronomía. Sobre matemáticas se leían principalmente los libros de Euclides, los libros de Arquímedes, de Apollonio y sobre álgebra en particular, se usaban libros de texto de álgebra se refiere a los de Michael Stifel, Johannes Scheubel y Jacques Peletier.

De acuerdo con Sasaki (2003) el tipo de enseñanza durante la época de Descartes estaba orientada por la edición de 1599 del *Ratio Studiorum*, un manual que especificaba métodos educativos y gestión universitaria. Respecto a la enseñanza de las matemáticas este manual precisaba que el maestro de matemáticas qué autores debían estudiarse y en qué momento. Por ejemplo, se enseñaba Euclides durante 45 minutos y después de familiarizarse por cierto tiempo con los conceptos y problemas euclideanos, se estudiaba posteriormente geografía o sobre la esfera, alternando estos estudios. El maestro debía escoger a ciertos alumnos que resolvieran problemas matemáticos famosos y si era posible hacer que defendieran sus soluciones en reuniones con otros estudiantes y maestros internos. Asimismo, se especificaba que una vez al mes, en lugar de escuchar conferencias, los estudiantes debían resolver públicamente los problemas más relevantes del período. Esto hacía que el método de enseñanza tuviera la característica de ser pragmático.

Por otro lado, este manual dejaba ver un descontento en la orden de los jesuitas respecto a la enseñanza de la matemática en ese período, de manera que se vieron esfuerzos por brindarle un estatus más elevado a las matemáticas, de manera que las matemáticas se volvieron una base para entender todas las demás disciplinas que se enseñaban en las escuelas de esta orden. Sasaki (2003) argumenta que el matemático que se encargó de atender a esta realidad fue Christof Clavius, quien influyó fuertemente en la visión sobre la importancia de los estudios matemáticos, puesto que para él el conocimiento matemático era habilitante para entender todas las demás disciplinas que se enseñaban. Esta visión sobre la importancia de las matemáticas se vio apoyada en las escuelas de la Orden de los jesuitas debido a que en las misiones llevadas a cabo por la Orden se dieron cuenta que se podía ganar más seguidores en las regiones donde la religión no era católica debido a que algunas personas influyentes de esas regiones mostraban un interés genuino en las explicaciones científicas sobre los fenómenos que sucedían a su alrededor y sobre los cuales solo tenían explicaciones religiosas que consideraban insatisfactorias (Sasaki, 2003).

Clavius menciona en un documento complementario al *Ratio Studiorum* titulado "Un método para promover las disciplinas matemáticas en las escuelas de la sociedad", en particular, la relación entre la filosofía y las matemáticas:

> [E]s necesario que los estudiantes comprendan que estas ciencias [es decir, las ciencias matemáticas] son útiles y necesarias para comprender correctamente el resto de la filosofía, y que son al mismo tiempo un embellecimiento de todas las demás artes, de modo que se puedan adquirir conocimientos perfectos; de hecho, estas ciencias y la filosofía natural tienen una afinidad tan estrecha entre sí que, a menos que se presten ayuda mutua, de ninguna manera pueden preservar su propio estatus. Para que esto ocurra, primero será necesario que los estudiantes de física estudien disciplinas matemáticas al mismo tiempo, un hábito que siempre se ha mantenido en las escuelas de la sociedad hasta ahora. Porque si estas ciencias se enseñaran en un momento diferente, los estudiantes de filosofía pensarían, y es comprensible que así sea, que de ninguna manera son necesarios para la física. Y muy pocos querrían (Sasaki, 2003, p. 26).

Posteriormente, profundiza sobre la necesidad de las matemáticas en la filosofía natural, de manera que especifica que las matemáticas son cruciales para entender las siguientes materias:

> [E]l número y movimiento de los orbes celestiales; la multitud de ángeles (*intelligentiae*); los efectos de las estrellas, que dependen de varias conjunciones, oposiciones, y otras distancias entre ellas; la división de cantidades continuas en infinidades; de las mareas, los vientos, los cometas, el arco iris, el halo y otros asuntos meteorológicos; la proporción de movimientos, cualidades, acciones, pasiones, reacciones, y así sucesivamente, sobre los cuales los calculadores (*calculatores*) escribieron mucho (Sasaki, 2003, p. 27).

Como pude verse con esta exposición, los estudiantes de La Flèche eran formados en gran cantidad de disciplinas con un enfoque integrador y práctico en el que las matemáticas tenían un estatus importante, pues se le atribuía la característica de ser habilitante para otras disciplinas. Fue en este contexto educativo en el que Descartes se formó.

Con base en la información que el mismo Descartes hizo en su correspondencia es posible identificar dos libros que Descartes estudió de manera profunda, ambos libros de Clavius (Sasaki, 2003). Uno era la edición con comentarios que hizo Clavius sobre los *Elementos* de Euclides (1574) y el otro era el *Algebra* (1608).

Ambos libros son en cierto sentido significativos respecto a la influencia que pudieron tener en Descartes, puesto que dos aspectos pueden ser destacados. Respecto a su edición de los *Elementos*, como lo ha mostrado Sasaki (2003), Clavius muestra una fuerte y clara influencia de los planteamientos del Neoplatonista Proclo por quien en sus comentarios sobre el libro I de los Elementos, se produjo un movimiento intelectual muy prominente en el siglo 16 y 17, replanteando la forma en la que se debían fundamentar las matemáticas. Esto trajo consigo progresivamente lo que Heeffer (2014) menciona como el cambio de paradigma en el álgebra respecto a la justificación epistémica, pues para esta época a partir de los comentarios de Proclo se introduce el concepto de "nociones comunes", abordado también por Cifoletti (2003, 2006) que representa un aspecto que permite fundamentar las matemáticas. Asimismo, otro de los aspectos que Proclo menciona es la existencia de una ciencia universal que está por encima de las demás ciencias matemáticas.

> Pero como hemos contemplado los principios comunes de las cosas, que se transmiten a través de todos los géneros matemáticos, de la misma manera debemos considerar esos teoremas comunes y simples, que *se originan de una ciencia, que contiene todo el conocimiento matemático en uno*. Y debemos investigar cómo son capaces de hacerlo de acuerdo con todos los números, magnitudes y movimientos. Pero de este tipo son todas las consideraciones que respetan las proporciones, las combinaciones, las divisiones, las conversiones [...] Una ciencia, por lo tanto, *precede a todas las ciencias y disciplinas*, ya que conoce las propiedades comunes que impregnan todos los géneros de seres, y proporciona principios a todas las ciencias matemáticas. (Proclo, 1972, 51-52, énfasis nuestro).

Por otro lado, también a partir de la filosofía de Proclo se da un movimiento para crear una taxonomía de las ciencias matemáticas (Ver Figura 69) y por lo tanto, para justificar su relevancia respecto a otras disciplinas. Aspectos que se han mencionado antes que Clavius promulgó en su intervención para conformar las bases de la enseñanza de las matemáticas.

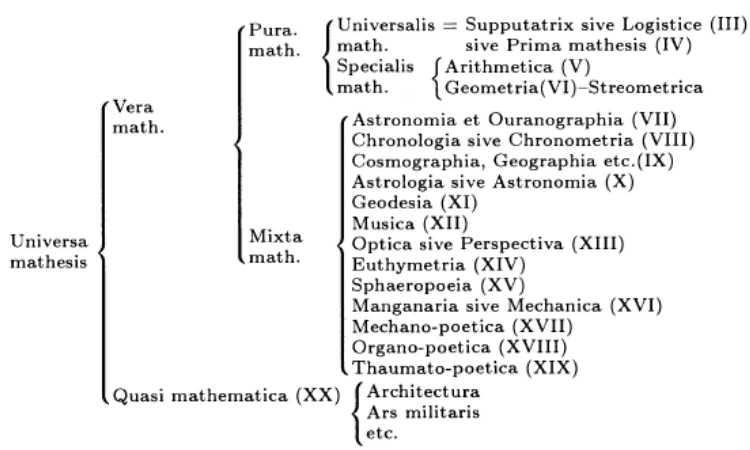


Figura 69. Clasificación de las disciplinas matemáticas y cuasi-matemáticas según la visión de Adriaan Van Roomen fuerte impulsor de la Mathesis Universalis (Van Roomen, 1602, citado en Sasaki, 2003, p. 351).

De esta manera había un movimiento intelectual entre los científicos de la época en el que la noción de "una ciencia general" común a la aritmética y a la geometría que partía de nociones comunes y en la que se encontraba la teoría de proporciones era fuertemente difundida y discutida a profundidad gracias a los planteamientos de Proclo que fueron reinterpretados.

Como ya se mencionó antes, fueron estos aspectos los que caracterizan el proyecto de Viète relativo al *arte analítico* y que a través de las fuentes que aumentaron durante el período en el que Descartes se encontraba formando y produciendo sus ideas influenciaron a este último de cierto modo. En particular, los libros de Clavius traían esta carga de la filosofía de Proclo. Aunque Clavius no profundizó en la relación entre aritmética y geometría para unificarlos bajo una ciencia sí mostraba un acercamiento que dejaba ver la esencia de esta filosofía. Es en este aspecto que tiene relevancia el *Algebra* de Clavius, libro que Descartes menciona como la única fuente de la que aprendió el álgebra[32]. Clavius menciona en el apartado del rango del álgebra lo siguiente:

> En consecuencia, ¿hasta qué punto se extiende el objeto del álgebra? Se trata de ni ningún tipo de números ni la variedad de cualquier magnitud como irrelevante para sí mismo para que no sólo pueda revelar todos los escondites de números, sino también obtener una magnitud finita de cada masa, una medida de sonidos, momentos de pesos, y ciertos límites de medición. Tampoco hay ninguna pregunta sujeta a la aritmética de que el álgebra no reconoce como propio y resuelve. El álgebra trata de tantas, tan variadas, tan ininteligibles y tan difíciles partes generales de matemáticas (Clavius, 1608, p. 2, citado en Sasaki, 2003, p. 73).

Lo cierto es que Descartes no dejó un rastro claro de las fuentes que además de Diofanto y de Pappus lo inspiraron, o sirvieron para construir sus ideas plasmadas en el *Discours de la méthode*. No se sabe exactamente cómo influyeron las ideas de Cavius, en particular, sobre su proyecto general, sin embargo, es claro que leyó estos libros, de manera que puede que le haya servido como punto de partida para seguir indagando sobre las ideas de Proclo en otras fuentes, además de que como menciona posteriormente pudieron servir como punto de referencia respecto a lo que consideraba había que modificar.

Sin una clara respuesta a la interrogante sobre los personajes que influyeron en él, basta con reconocer su proyecto general, hasta el momento que publicó el *Discours de la méthode*, puesto que dejó una estela de su evolución y concreción de algunas ideas que formarían parte vertebral de su "método general" para encontrar la verdad.

A continuación, se discutirá a este respecto.

[32] Sasaki (2003, p. 47) hace la siguiente cita sobre Descartes: "Dice que no tenía otro instructor de Álgebra que leer Clavy Algebra hace más de 30 años." Su fuente es: Hervey, p. 78; AT Vol. IV, (pp. 730-73) de *Euvres de Descartes*, editado por Charles Adam et Paul Tanery, 11 Vols. (Paris: Cerf, 1897-1913; New Edition, Paris: Vrin, 1969-1975).

12.1.3.2.1 El proyecto de una nueva ciencia[33]

Los estudiosos de Descartes han mostrado que la historia del *Discours de la méthode*, y en particular de lo que caracteriza *La Géométrie*, puede identificarse en una evolución del pensamiento de Descartes en tres períodos: 1619, 1619-1628, y 1632-1637. En estos tres momentos, a partir de lo que ha quedado grabado en las correspondencias que tuvo con Beeckman y Mersenne pueden ubicarse su "sueño" filosófico de crear un método general que eventualmente fue nutriéndose de las matemáticas y que se concretó en las *Regulae ad directionem ingenii* en 1628 (publicado póstumamente en 1701), sin embargo, los historiadores coinciden en que las ideas vertidas en este tratado tienen un grado de inmadurez respecto a las ideas de *La Géométrie* en 1637 (Bos, 2001; Sasaki, 2003; Rabouin, 2010).

El encuentro de Descartes con el intelectual alemán Isaac Beeckman—estudioso de gran cantidad de disciplinas como la matemática, mecánica, astrología, óptica, música, y otras "matemáticas mixtas"—en 1618 marcó para ambos el comienzo de un intercambio fructífero de ideas[34] en el que Descartes buscaba la retroalimentación de su colega en relación con sus ideas. En Sasaki (2003, p. 95) se muestra un extracto de la importancia que representaba para Descartes haber establecido contacto con Beeckman. En su carta del 23 de abril de 1619 Descartes le comenta a Beeckman lo siguiente: "Tú eres realmente el único que despertó de la pereza, recordó la erudición que casi había desaparecido de la memoria, y mejoró mi mente que se alejaba de las ocupaciones serias".

De acuerdo con Sasaki (2003), en la carta del 26 de marzo de 1619 Descartes le comenta a Beeckman dos aspectos importantes. El primero estaba relacionado con el hecho de que como resultado de sus investigaciones había encontrado cuatro demostraciones totalmente nuevas. La primera relativa a la división de un ángulo en un cierto número de partes iguales y las otras tres relativas a ecuaciones. Las cuatro demostraciones, menciona Descartes, las obtuvo con la ayuda de sus compases. Con respecto a sus demostraciones relacionadas con las ecuaciones menciona lo siguiente:

> Las otras tres pertenecen a ecuaciones cúbicas: de las cuales la primera clase entre un número absoluto, raíces y cubos; el segundo entre un número absoluto, cuadrados y cubos; el tercero,

---

[33] Las imágenes que se presentan en este apartado que no corresponden al tratado *Discours de la méthode*, son recuperadas de la edición de Cerf de entre 1897-1913 sobre las *Euvres de Descartes* que fueron editadas por Charles Adam et Paul Tanery, 11 Vols. En particular sólo se retoma el tomo X cuyo año de impresión fue 1908. En las citas y referencias este trabajo se abrevió como *AT, X, 1908,* tal y como suele hacerse.

[34] Los extractos de la correspondencia entre Descartes e Isaac Beeckman quedaron registrados por este último en su *Journal*.

.

> finalmente, entre un número absoluto, raíces, cuadrados y cubos. He encontrado tres demostraciones correspondientes, cada una de las cuales debe ser ampliada a varios términos de acuerdo con la variación de los signos $+$ y $-$; todavía no he discutido todo, pero a mi juicio aplicaré fácilmente lo que he encontrado en algunos para el resto. [...] (Sasaki, 2003, p. 100).

En este mismo párrafo Descartes hace uso para describir los tipos de ecuaciones con la notación cósica empleada en la época, en particular igual a la que Clavius usaba.

El segundo aspecto de especial relevancia es el hecho que Descartes manifiesta por primera vez a Beeckman su proyecto de encontrar una ciencia nueva. Sobre esto Descartes menciona:

> Y ciertamente para decirte abiertamente lo que pretendo hacer, no quiero proponer un arte corto como el de Lullius, sino una ciencia completamente nueva por la cual todos los problemas en general que puedan ser propuestos, relativos a cualquier tipo de cantidad, tanto continua como discreta puedan ser resueltos. Pero cada uno será resuelto según su propia naturaleza. En aritmética, por ejemplo, algunas preguntas pueden resolverse mediante números racionales, otras solo mediante surdos [irracionales] y finalmente otros pueden ser imaginados pero no resueltos. Para la cantidad continua espero demostrar que, de forma similar, ciertos problemas puede ser resuelto usando sólo líneas rectas o circulares, que algunos problemas requieren otras curvas para su solución, pero todavía curvas que surgen de un solo movimiento y que por lo tanto pueden ser rastreados por los nuevos compases, que considero no menos seguros y geométricos que los compases habituales con los que se trazan los círculos; y, finalmente, que otros problemas sólo pueden ser resueltos con líneas curvas generadas por mociones separadas no subordinadas entre sí; ciertamente tales curvas son sólo imaginarias; la bien conocida línea de cuadratriz es de ese tipo. Y en mi opinión es imposible imaginar nada que no pueden al menos ser resueltos por tales líneas; pero a su debido tiempo Espero demostrar qué cuestiones pueden o no ser resueltas en estas de varias maneras: de modo que casi no quedaría nada por encontrar en geometría. Esta es realmente una tarea infinita, no para una sola persona. Increíblemente ambicioso; pero a través de la oscura confusión de esta ciencia He visto algún tipo de luz, y creo que con su ayuda puedo disipar la oscuridad por muy densa que sea (Sasaki, 2003, p. 102).

De ambos extractos pueden destacarse los siguientes aspectos:

- Descartes estaba interesado en el álgebra y exploraba la forma de demostrar cómo resolver ecuaciones con la ayuda de los compases que había construido.
- Descartes manifiesta que está en proceso de encontrar una “nueva ciencia” que permita resolver todos los problemas, sin importar que si las cantidades involucradas en el problema son discretas o continuas.

En relación con los problemas que involucran cantidades continuas—geométricos—deja ver que estos problemas se relacionan con el estudio de curvas, y que, por lo tanto, la forma de construcción de éstas—si son construibles por un solo movimiento, o bien con más de un movimiento—va a definir ciertas características que permitirán clasificar los problemas. Por otro lado, la forma en la que las soluciones son construidas describe cierta complejidad. Como se verá en *La Géométrie* esto se cristalizará de manera contundente con la clasificación de las curvas como geométricas o mecánicas, y respecto al segundo aspecto, sobre el género de los problemas.

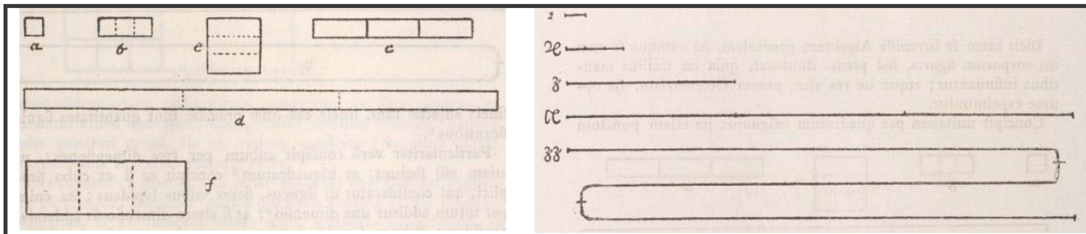
Por lo tanto, con base en estos aspectos puede identificarse que Descartes estaba pensando en una "nueva ciencia"—que en las *Regulae ad directionem ingenii* llamaría como *Mathesis Universalis*—que de acuerdo con Sasaki (2003) correspondía a un "tipo" de disciplina algebraica que vinculara lo discreto con lo continuo. Asimismo, con esta ciencia también le permitiría clasificar los tipos de problemas geométricos con base en su construcción y en la complejidad de sus soluciones.

Durante el período de 1619 hasta 1628 el registro de la correspondencia con Beeckman dio a conocer que Descartes escribió un tratado llamado *Algebra*–actualmente perdido—que prometió enviarle a su colega Beeckman en una carta de octubre de 1928. Aquí el extracto:

> M. René Descartes [...] [m]e dijo que en lo que respecta a la aritmética y la geometría, no tenía nada más que descubrir; es decir, en estas ramas durante en los últimos nueve años había hecho tantos progresos como le era posible a la mente humana. Me dio especímenes perspicaces de esto y prometió enviarme su *Algebra* un poco después desde París, que, dijo, estaba terminado y por lo cual no sólo había llegado a un perfecto conocimiento de la geometría, sino que también afirmó que abarca a todo el conocimiento humano [...]. (Sasaki, 2003, p. 159-160).

Dentro de los especímenes a los que se refiere Beeckman Descartes envía los siguientes ejemplos:

> El mismo hombre [Descartes] afirma que descubrió un álgebra general, y para ello utiliza no figuras sólidas sino simplemente planos, pues la mente las penetra más fácilmente. Y así las otras cosas[matemáticas], además de la geometría, están mejor representadas por éstas. Denota unidad por un pequeño cuadrado; de esta manera denota también un punto. Denota una línea o raíz reduciendo la anchura de un cuadrado a un paralelogramo. Su cuadrado está formado por el mismo número de raíces; y un cubo, hecho por tantos cuadrados como los números indican, reducido a una forma oblonga; un biquadrático de la misma manera, etc. O mejor dicho, explica todo esto con líneas para que a pueda representar un punto, b una línea, c un cuadrado y d un cubo. De esta manera f también representaba un cubo construido a partir de la multiplicación de una e cuadrada por el número de raíces [ver Figura 70-I]. Y con mayor dificultad, resolvió el mismo[problema] con líneas simples, tal como se ve aquí en el margen, donde se añaden signos cósicos a las líneas individuales, líneas que significan aquellas cantidades que están prefijadas [ver Figura 70-II] (Sasaki, 2003, p. 162).

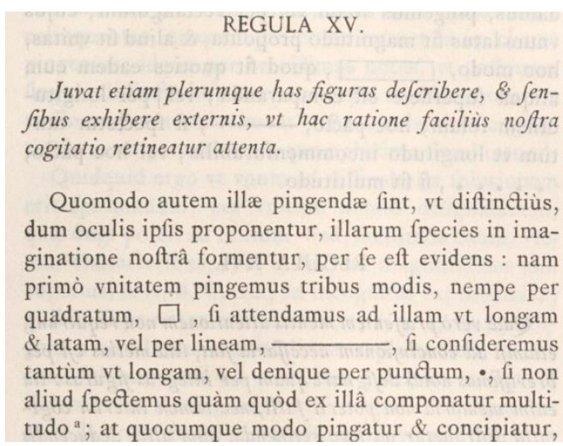


I. Unidad como superficie II. Unidad como línea

Figura 70. Explicación de Beeckman respecto a la representación de la unidad por Descartes (Adam y Tannery, 1908, p. 333-334)

En este extracto se ve que para entonces Descartes aún no lograba concretar lo que en *La Géométrie* sería la marca distintiva del éxito del método de Descartes, la representación de la cantidad por medio de una línea, puesto que en esta exposición Descartes menciona tres formas diferentes de representar a la unidad y por lo tanto, a las cantidades: por un punto, por un cuadrado, o bien por una línea. No obstante, este intento muestra que estaba a un paso de resolver el problema de la dimensionalidad, toda vez que a través de estas tres estrategias lo que está haciendo explícitamente es la capacidad de trabajar las dimensiones mayores de tres como si fueran de dos dimensiones, o bien de una dimensión. De hecho, este esquema de pensamiento es justo el que plasma Descartes en las *Regulae ad directionem ingenii* en su regla XV. En esta regla bajo el título: *es útil también, casi siempre, trazar figuras y presentarlas a los sentidos externos, a fin de que por este medio, se mantengan más fácilmente la atención de nuestro pensamiento;* Descartes señala que:

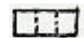
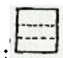
> La manera como hay que trazarlas para que, mientras se ponen delante de los ojos, se graben sus imágenes más distintivamente en nuestra imaginación, es evidente por sí; pues primero representaremos la unidad de tres maneras, a saber: por un cuadrado, □, si la consideramos como larga y ancha, o por una línea, ——, si a consideramos como larga, o, finalmente como un punto, ●, si no la consideramos de otro modo que en cuanto de ella se compone la multitud [...] (Descartes, 2011, p. 61).

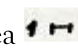

REGULA XV.

Juvat etiam plerumque has figuras deſcribere, & ſenſibus exhibere externis, vt hac ratione faciliùs noſtra cogitatio retineatur attenta.

Quomodo autem illæ pingendæ ſint, vt diſtinctiùs, dum oculis ipſis proponentur, illarum ſpecies in imaginatione noſtrâ formentur, per ſe eſt evidens : nam primò vnitatem pingemus tribus modis, nempe per quadratum, □, ſi attendamus ad illam vt longam & latam, vel per lineam, ————, ſi conſideremus tantùm vt longam, vel denique per punctum, •, ſi non aliud ſpectemus quàm quòd ex illâ componatur multitudo [a]; at quocumque modo pingatur & concipiatur,

Figura 71. Representación de la unidad por Descartes en *Regulae* (Adam y Tannery, 1908, p. 453)

Como se puede ver en la Figura 40-I lo que hace Descartes es recurrir a una representación visual de la progresión geométrica $1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ Considerando que se ha definido una unidad a en forma de cuadrado (), si se tiene que una raíz b está compuesta de tres de esas unidades a, ésta se representa de la siguiente forma:  . Entonces, el cuadrado de b, la raíz, puede representarse como e : , pues equivale en este caso a triplicar la raíz, toda vez que $3^2{=}3{\times}3$. Es decir, triplicar la figura que representa a b. Así, puede representarse el cubo como f: , puesto que $3^3{=}3{\times}3^2$, es decir, triplicar ahora la figura e. Análogamente, si el cuadrado de b se representa como c, entonces el cubo de b se representaría como d.

Del mismo modo sucede la relación que se muestra en la Figura 40-II solo que ahora tomando en cuenta que la forma en el que se representa la unidad 1, es por medio de una línea . Aquí Descartes ejemplifica nuevamente que la raíz—ahora con el uso de signos del álgebra cósica para denotar lo que correspondería anacrónicamente como x, x^2, x^3, x^4—contiene tres unidades, por lo que nuevamente cada representación de la potencia correspondería a triplicar la longitud de la línea para cada caso.

Posterior, a este ejemplo, Descartes continúa mostrándole a Beeckman la resolución de un problema cuya ecuación es $x^2 = 6x + 7$. Dos aspectos son resaltados de este ejemplo, el primero es que el método de resolución de la ecuación implica un método elemental de la tradición algebraica cósica, como herencia de los métodos árabes sistematizados por al-Khwârizmî (ver Figura 72), y por otro lado que, tal y como se ha mostrado el álgebra de Descartes no ha desarrollado un simbolismo original, pues continúa haciendo uso de los signos cósicos. Esto ha llevado a distinguir entre una forma madura e inmadura de pensamiento respecto al potencial que mostraría Descartes tiempo después en 1637, de manera todo lo que desarrolló hasta antes de 1637 se considera un pensamiento inmaduro, más cuando Descartes como se puede ver en la carta a Beeckman que afirmaba que había hecho el mayor progreso que la mente humana podía hacer y que no había más que aprender respecto a la aritmética y la geometría (Bos, 2001; Sasaki, 2003; Rabouin, 2010).

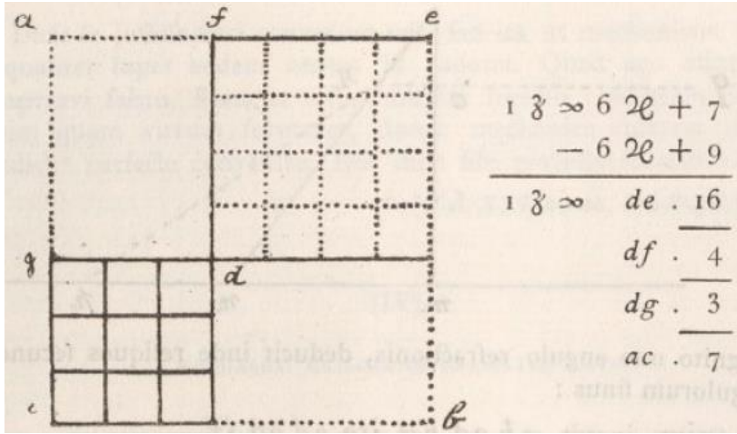
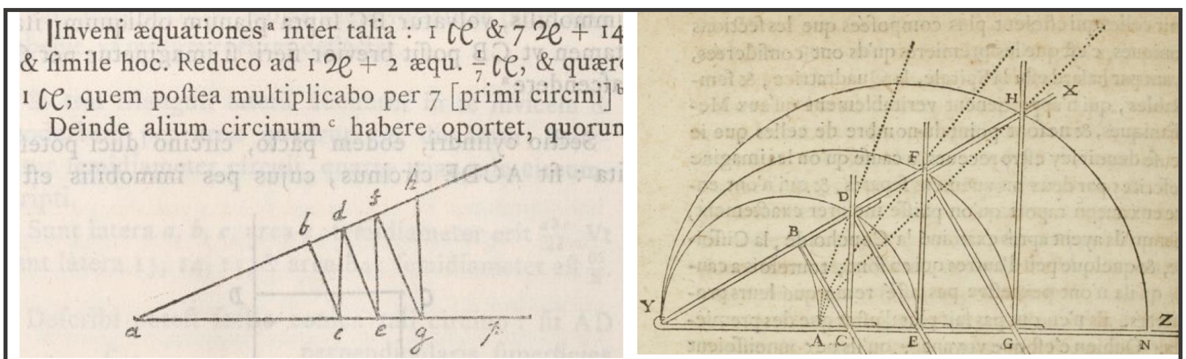


Figura 72. Ejemplo de problema por Descartes usando notación cósica clásica (Adam y Tannery, 1908, p. 335)

No obstante, todos los resultados que acumuló durante el período de 1619 a 1628 se cristalizaron en la primera versión de su método general *Regulae ad directionem ingenii*, haciendo conjeturar que el tratado *Algebra* que le menciona a Beeckman fuera una versión preliminar, o bien, el fundamento para las *Regulae ad directionem ingenii* (Sasaki, 2003).

12.1.3.2.2 La preocupación geométrica

Ya se mencionó que en la carta hacia Beeckman del marzo de 1619 Descartes menciona que con la ayuda de sus compases pudo encontrar demostraciones a la resolución de ecuaciones al igual que al problema de dividir un ángulo en una cantidad de partes arbitraria. Las reflexiones sobre sus compases las plasmó más ampliamente en el tratado *Cogitationes Privatae* que también se publicó póstumamente pero que se conjetura fue escrito entre 1619 y 1621. En este tratado Descartes muestra un ejemplo particular en el que aparece el mismo compás que describe de manera más completa en *La Géométrie*: el mesolabio.



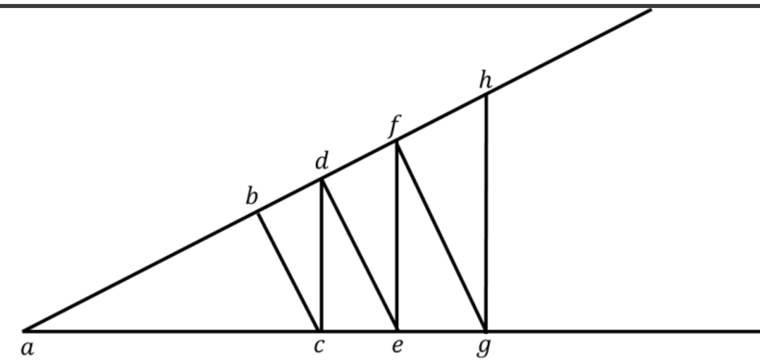
I. Cogitationes Privatae (Adam y Tannery, 1908, p. 234) II. *La Géométrie* (1637, p. 318)

Figura 73. El mesolabio de Descartes en Cogitationes Privatae y *La Géométrie*

En particular en *Cogitationes Privatae* Descartes aborda el ejemplo de resolver la ecuación cúbica que en términos anacrónicos corresponde a $x^3 = x + 2$.

Para entender cómo resuelve la ecuación es necesario entender cuáles son las propiedades del mesolabio. El mesolabio permite la construcción de la progresión geométrica $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots$

Esto a partir de que en la Figura73-I se cumple que:



$$\frac{ab}{ac} = \frac{ac}{ad} = \frac{ad}{ae} = \frac{ae}{af} = \frac{af}{ag} = \frac{ag}{ah}$$

Figura 74. Progresiones geométricas en el Mesolabio de Descartes

Dado que los triángulos $\Delta abc, \Delta acd$, Δade y Δaef de la Figura 44 son semejantes, si se considera que el segmento ab tienen como longitud 1 (segmento que Descartes elige como la unidad), entonces por las proporciones se cumple que:

$ab \cdot ad = ac^2$, lo cual es lo mismo que $ad = ac^2$.

Por otro lado, también se cumple que $ae \cdot ac = ad^2$, o bien que $ae = \frac{ad^2}{ac}$

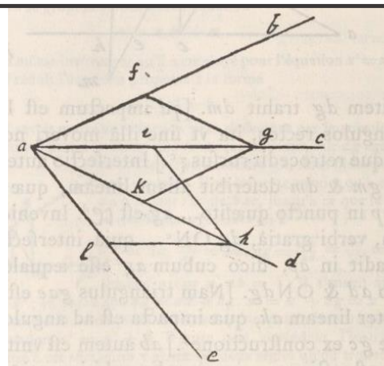
Dado que $ad = ac^2$, entonces $ae = \frac{(ac^2)^2}{ac} = \frac{ac^4}{ac} = ac^3$

De modo que si se designa al segmento ac como x, entonces se tendría que

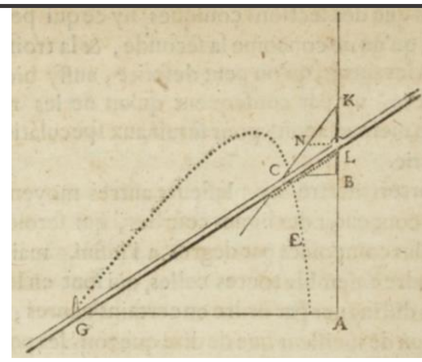
$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{x^3}{x^4} = \frac{x^4}{x^5} = \cdots$$

Con base en esta relación, es posible resolver la ecuación $x^3 = x + 2$, puesto que en términos del mesolabio la ecuación equivaldría a conocer las cantidades que cumplen $ae = ac + 2$, de modo que bastaría que con el compás se construya $ce = 2$, lo que determinaría la medida ac, o sea x.

Descartes muestra en *Cogitationes Privatae* más compases e instrumentos geométricos que tienen como finalidad la construcción de las soluciones de los problemas (ver Figura 75).



Compás para dividir ángulos en *Cogitationes Privatae* (Adam y Tannery, 1908, p. 234)



Compás para la construcción de curvas (*La Géométrie*, 1637, p. 320)

Figura 75. Otros compases de Descartes

Lo que indica este desarrollo de instrumentos geométricos que tienen como finalidad la construcción de soluciones de los problemas es que Descartes tenía un interés peculiar en mostrar de manera geométrica la solución de ecuaciones que emergían a partir de las relaciones involucradas en los problemas que eran de su interés. Esta interpretación toma fuerza cuando se considera otro de los descubrimientos que compartió con Beeckman y otros matemáticos en 1625 sobre la solución y posterior demostración geométrica de ecuaciones de grado cuatro, la cual la obtuvo al intersecar una parábola con una circunferencia (Bos, 2001; Sasaki, 2003).

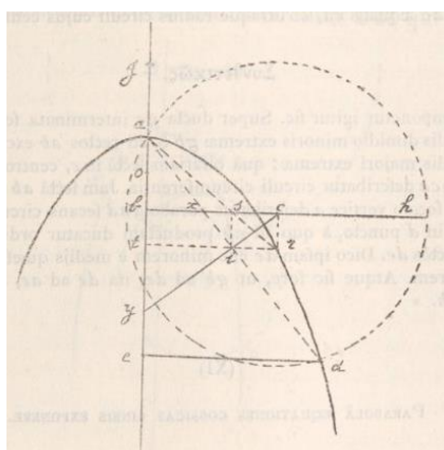


Figura 76. Resolución de ecuación de grado cuatro por la intersección de una parábola con una circunferencia (Adam y Tannery, 1908, p. 343)

Esto sucede porque si se considera de manera anacrónica la ecuación de una circunferencia con centro en el origen $x^2 + y^2 = r^2$ (1) y la de una parábola con centro en el origen $x^2 = 4py$ (2) y se intersecan, se genera lo siguiente:

$$y = \frac{x^2}{4py}\ (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene que $x^2 + \left(\frac{x^2}{4py}\right)^2 = r^2$, de donde se obtiene que la ecuación de la intersección sería $x^2 + \frac{x^4}{16py} = r^2$. De donde se puede ver que resulta una ecuación en x de grado cuatro. De manera que este método permite construir soluciones geométricas a ecuaciones de este tipo.

12.1.3.2.3 Regulae ad directionem ingenii

Ya se ha abordado ciertos aspectos relevantes respecto al tratado *Regulae ad directionem ingenii,* el cual fue publicado póstumamente y, que además Descartes no concluyó, pues las últimas tres reglas no contienen explicación. Como ya se describió el tratado representa una visión palpable del proyecto que Descartes persiguió respecto a la filosofía de una ciencia nueva, que tenía una fuerte influencia de las matemáticas. Es en este tratado donde Descartes, incluso, hace alusión por única ocasión a la idea de *Mathesis universalis*. Esto lo plasma en la *Regla IV*, la cual menciona explícitamente a esta Mathesis universalis y que la parece asociar justamente con el álgebra:

> [Regla IV]Toda claridad que los antiguos geómetras se han servido de cierto análisis, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad. Y *ahora florece cierta clase de aritmética que llaman algebra*, para realizar sobre los números lo que los antiguos hacían sobre las figuras. Y estas dos ciencias no son otra cosa que fruto espontáneo de los principios ingénitos de este método [...] Y, ciertamente, *me parece que algunos vestigios de esta verdadera Mathesis aparecen todavía en Pappus y Diophanto*, los cuales, aunque no en los primeros tiempos, vivieron, sin embargo, muchos siglos antes de ahora. Y fácilmente creería que después fue ocultada por los mismos escritores a causa de una funesta astucia; pues así como es cierto que lo han hecho muchos artistas con sus inventos, quizá ellos temieron que, puesto que era muy fácil y simple, disminuyera su valor una vez divulgada, y prefirieron, a fin de que los admiremos, mostrarnos en su lugar algunas verdades estériles expuestas sutilmente a partir de consecuencias, como productos de su arte, / antes que enseñarnos el arte mismo, que habría hecho desaparecer absolutamente la admiración. *Ha habido, finalmente, algunos hombres de un gran espíritu, que han intentado resucitarla en este siglo: pues aquel arte no parece ser otra cosa que lo que llaman, con nombre extranjero, Algebra,* con tal que se la pueda liberar de los múltiples números e inexplicables figuras, con que esta sobrecargada, de modo que no le falte más la suma claridad y facilidad, que suponemos debe haber en la verdadera Mathesis. [...] Por lo tanto, *debe haber una cierta ciencia general que explique todo lo que puede buscarse acerca del orden y la medida no adscrito a una materia especial, y que es llamada no con un nombre adoptado, sino ya antiguo y recibido por el uso, Mathesis Universalis,* ya que en esta se contiene todo aquello por lo que las otras ciencias son llamadas partes de la Matematica. (Descartes, 1996, p. 81-85, énfasis propio).

Es en esta regla que Descartes deja de manera nítida el tipo de ciencia que sueña con promover, así como los referentes más importantes que produjeron partes de ésta y que dicha ciencia es superior y general a todas las demás matemáticas. No obstante, lo más significativo en este extracto es que la *Mathesis universalis* es interpretada por Descartes como el Álgebra. He aquí una evidencia contundente que relaciona de manera el proyecto de Descartes con el de Viète, pues sus fuentes de inspiración para construir sus respectivos métodos son los mismos, por lo tanto, ambos conjuntan la aritmética y la geomería por medio del álgebra, además de que buscan un método general para resolver todos los problemas que puedan ser propuestos.

Como ya se ha mencionado en el apartado 6.1.3.2.1 este tratado aborda el método filosófico matemático en el que Descartes se encontraba construyendo. Las reglas 1-12 atañen a la forma en las que hay que conducir la mente para atender de manera metódica a las preguntas que se puedan plantear con el fin de lograr juicios que sean sólidos y verdaderos. De la regla 6 a la 12 Descartes describe cómo dividir las distintas proposiciones en simples y más complejas, así como el cómo atender a cada una de ellas, a partir del apoyo en "figuras" que sean de ayuda a la mente.

> [Regla XII] es preciso servirse de todos los recursos del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria: ya para intuir distintamente las proposiciones simples; ya para comparar debidamente lo que se busca con lo que se conoce, a fin de reconocerlo; ya para descubrir aquellas cosas que deben ser comparadas entre sí de modo que no se admita ningún elemento de la habilidad humana (Descartes, 1996, p. 116).

A partir de las reglas de la 13 a la 15 es cuando se puede ver más de cerca cómo las matemáticas entran en el método, pues en ellas se puede identificar que Descartes hace alusión al método de análisis aludiendo tanto a la aritmética y a la geometría. En general, estas reglas tratan de mostrar la importancia de distinguir entre lo conocido y lo desconocido y relacionar ambos de manera que lo desconocido pueda ser comparado con lo que sí se conoce (Regla XIII).

> [Regla XIII] consideramos la cosa en su totalidad del siguiente modo: primeramente es necesario que en toda cuestión haya algo desconocido, pues de lo contrario se buscaría en vano; en segundo lugar, eso mismo debe ser designado de alguna manera, pues de lo contrario no estaríamos determinados a investigar eso más bien que otra cosa cualquiera; en tercer lugar, no puede ser designado sino por medio de algo que sea conocido [...]. [C]omparare separadamente entre sí [...] A y B, después A y C, etcétera, a fin de abarcar después todas a la vez por una enumeración suficiente (Descartes, 1996, p. 135-136).

En la Regla XIV se señala también que la intención en la búsqueda de lo desconocido es encontrar una igualdad con lo conocido, si bien esta idea pareciera estar vinculada explícitamente con el álgebra y la ecuación, esto ciertamente aplica también para la geometría. Por otro lado, menciona también la importancia de la abstracción, así como cuáles son las características que deben compararse una vez abstraída la información necesaria.

> [Regla XIV] Se debe señalar que las comparaciones solo se llaman simples y claras cuando lo buscado y lo dado participan igualmente de cierta naturaleza; y que las demás comparaciones

> no necesitan preparación por ninguna otra causa que porque aquella naturaleza común no está de una manera igual en las dos, sino según otros ciertos respectos y proporciones en que está envuelta; y que la parte principal de la industria humana no consiste sino en reducir estas proporciones, de modo que se vea claramente la igualdad entre lo buscado y algo que sea conocido. [...] [Q]ueremos reducir las proposiciones en la medida en que están implicadas, hasta el punto de que aquello que es desconocido aparezca como igual a algo conocido [...] basta a nuestro propósito si en la extensión misma consideramos aquellas cosas que pueden ayudar a exponer las diferencias de las proporciones, que son únicamente tres, a saber: dimensión, unidad y figura (Descartes, 1996, p. 143-149).

Las características que parecen ser las esenciales para la abstracción de la información para Descartes son:

- *Dimensión*: "el modo y razón según los que un sujeto es considerado mensurable";
- *Unidad*: "naturaleza común de la que participa[n] igualmente todas aquellas cosas que son comparadas entre sí" (Descartes 1996, p. 151), y
- *Figura*: "por medio de ellas solas pueden formarse las ideas de todas las cosas [...] solo dos géneros de cosas que se comparan entre sí: multitudes y magnitudes; y tenemos también dos géneros de figuras para proponerlas a nuestra concepción (Descartes 1996, p. 151).

Sobre la figura los dos tipos que señala Descartes corresponde a lo discreto (multitud) y a lo continuo (magnitudes). Los ejemplos que muestra son los siguientes:

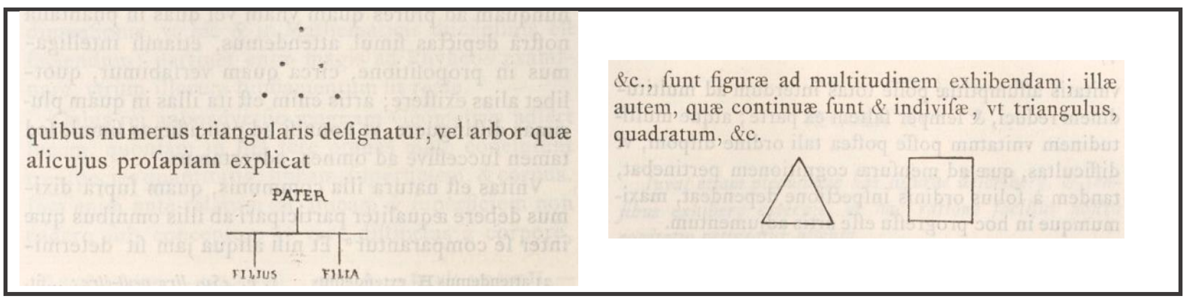
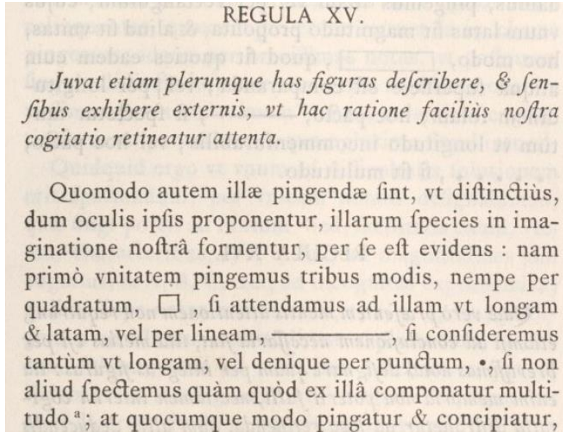


Figura 77. Representación de la Figura en Descartes *Regulae* (Adam y Tannery, 1908, 450-451)

En la Regla XV continúa extendiendo la forma en la que se puede representar las figuras:

> [Regla XV] La manera como hay que trazarlas para que, mientras se ponen delante de los ojos, se graben sus imágenes más distintivamente en nuestra imaginación, es evidente por sí; pues primero representaremos la unidad de tres maneras, a saber: por un cuadrado, □, si la consideramos como larga y ancha, o por una línea, ——, si a consideramos como larga, o, finalmente como un punto, ●, si no la consideramos de otro modo que en cuanto de ella se compone la multitud [...] (Descartes, 2011, p. 61).



REGULA XV.

Juvat etiam plerumque has figuras deſcribere, & ſenſibus exhibere externis, vt hac ratione faciliùs noſtra cogitatio retineatur attenta.

Quomodo autem illæ pingendæ ſint, vt diſtinctiùs, dum oculis ipſis proponentur, illarum ſpecies in imaginatione noſtrâ formentur, per ſe eſt evidens : nam primò vnitatem pingemus tribus modis, nempe per quadratum, ☐ , ſi attendamus ad illam vt longam & latam, vel per lineam, ————, ſi conſideremus tantùm vt longam, vel denique per punctum, •, ſi non aliud ſpectemus quàm quòd ex illâ componatur multitudo [a]; at quocumque modo pingatur & concipiatur,

Figura 78. Representación de la unidad (Adam y Tannery, 1908, p. 453)

Finalmente, en las Reglas de la 16 a la 21 es indudable ver la forma en la que el álgebra juega un rol primordial en el método de Descartes, pues estas reglas describen la técnica algebraica de resolución de problemas, partiendo de establecer un sistema de signos para denotar las incógnitas y lo conocido también—una innovación respecto a la práctica algebraica de la época, la forma de relacionar las ecuaciones, así como las operaciones algebraicas para la resolución de las ecuaciones, en las cuales da muestra de una intención de reducir la dimensión.

> [Regla XVI] Mas dado que la memoria es con frecuencia lábil, y con el fin de que no nos veamos obligados a dedicar una parte de nuestra atención a refrescarla, mientras nos encontramos entregados a otros pensamientos, muy acertadamente el arte invento el uso de la escritura, fiados en cuya / ayuda, nada en absoluto encomendaremos ya a la memoria sino que, dejando a la fantasía en su totalidad libre para las Ideas presentes, *escribiremos en el papel cuanto haya de ser retenido*; *y ello por medio de signos muy breves*, para que, una vez que, de acuerdo con la regla novena, hayamos inspeccionado distintamente cada una podamos según la regla undécima recorrer todas con' un movimiento rapidísimo del entendimiento e intuir al mismo tiempo el mayor número posible (Descartes, 1996, p. 155-156).

Continuando con la Regla XVI, Descartes menciona que la notación a emplear para la representación de las cantidades involucradas en los problemas puede ser adaptada de acuerdo a como uno lo prefiera, sin embargo, él muestra su sistema. Además, señala lo que para él considera más importante de este artificio:

> [Regla XVII] Por lo tanto, a cuanto haya de ser contemplado como uno para la solución de una dificultad, lo designaremos por medio de un signo único que puede ser formado al capricho de cada cual. Mas, para mayor facilidad nos serviremos de las letras a, b, c, etc., para expresar las magnitudes ya conocidas, y de A, B, C , etc., para las desconocidas; a estas letra antepondremos con frecuencia los signos numéricos $1, 2, 3$ y 4, etc., para explicar la multitud de aquellas, y también los añadiremos el número de relaciones que en ellas habrán de entenderse así, si escribo $2a^3$ será lo mismo que si dijera el duplo de la magnitud denotada por la letra a, que contiene tres relaciones. *Y con este artificio no solamente resumiremos muchas palabras, sino que, lo que es más importante, mostraremos los términos de la dificultad tan puros y desnudos, que,*

> *sin omitir nada útil, no se encuentre en ellos nada superfluo y que ocupe inútilmente la capacidad del espíritu, mientras la mente se vea obligada a abarcar a un tiempo muchas cosas* (Descartes 1996, p. 156).

Como aspecto relevante, se ve en este tratado que Descartes considera en su sistema ecuaciones paramétricas, además de la notación exponencial, al menos en la edición que Paul Tanery y Charles Adam hacen en 1701. Queda la pregunta si la notación exponencial ya la había creado para entonces. Se identifica en este extracto que asigna al simbolismo una importancia más allá de la de sintetizar el discurso. Descartes menciona la importancia de despojar de todo contenido superfluo lo investigado, de manera que con esta función se pueda concentrarse mejor y poder ver más cosas.

En otro párrafo de la misma regla Descartes muestra enfáticamente la problemática que él ve cuando se refieren a las dimensiones de las potencias de la incógnita, pues a juzgar por lo que menciona, pareciera que lo considera un obstáculo. Descartes menciona lo siguiente al respecto:

> [Regla XVII] Debe también advertirse que por número de relaciones se ha de entender proposiciones que se siguen unas a otras en orden continuo, y que otros en el Algebra común intentan expresar por medio de varias dimensiones y figuras, y de las cuales llaman a la primera, raíz; a la segunda, cuadrado; a la tercera, cubo, y a la cuarta, bicuadrado, etc. Confieso que yo mismo fui engañado durante mucho tiempo por estos nombres: en efecto, me parecía que nada más claro podía proponerse a mi imaginación, después de la línea y el cuadrado, que el cubo y otras figuras formadas a semejanza de estas; y desde luego, con su ayuda podía resolver no pocas dificultades. Mas, finalmente, tras muchas experiencias, me di cuenta de que jamás había descubierto por medio de este modo de concebir nada que no hubiera podido conocer con mucha mayor facilidad y distinción sin él; y que tales nombres deben ser absolutamente rechazados para que no enturbien el concepto, puesto que la misma magnitud, aunque sea llamada cubo o bicuadrado, nunca debe ser propuesta a la imaginación, de acuerdo con la regla / precedente, más que como una línea o como una superficie (Descartes 1996, p. 157).

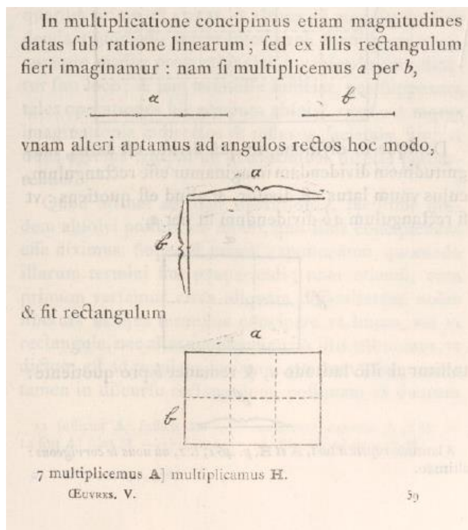
Finalmente, en los últimos párrafos de la Regla XVI se insiste en plasmar en papel lo que requiere de una atención continua para resolver el problema, y describe un ejemplo en el que se traducen elementos geométricos en algebraicos.

En la Regla XVII Descartes da otras muestras claras del método del análisis, pues menciona que la forma en la que debe investigarse—basando en que ya se tienen proposiciones con las cantidades conocidas y desconocidas y su relación de dependencia—es suponer que lo desconocido es conocido y viceversa para deducir gradualmente lo que se investiga.

La Regla XVIII, señala las operaciones que Descartes considera son las esenciales para resolver los problemas: adición, sustracción, multiplicación y división. Por otro lado, menciona también que la teoría de las proporciones y cómo en éstas se pueden vincular a potencias algebraicas. Finalmente, muestra ejemplos de cómo operar de acuerdo con la forma en que la que la unidad se representa.

> [Regla XVIII] En efecto, si llegamos al conocimiento de una sola magnitud, a partir de que tenemos las partes de que consta, esto se hace por adición; si conocemos una parte a partir de tener el todo y el exceso del todo sobre esa misma parte, esto sucede por sustracción; y de ningún otro modo puede deducirse alguna magnitud cualquiera a partir de otras tomadas absolutamente y en las cuales de alguna manera está contenida. Si en cambio es preciso encontrar una a partir de otros de las cuales sea totalmente distinta y en las cuales no esté contenida en manera alguna, es necesario relacionarla con ellas por alguna razón: y si esta relación o disposición debe buscarse directamente, entonces debe utilizarse la multiplicación; si indirectamente, la división (Descartes 1996, p. 162).

Posteriormente muestra la forma en la que se realizan las operaciones utilizando la representación de la unidad como una superficie.


In multiplicatione concipimus etiam magnitudines datas ſub ratione linearum; ſed ex illis rectangulum fieri imaginamur : nam ſi multiplicemus *a* per *b*,

vnam alteri aptamus ad angulos rectos hoc modo,

& fit rectangulum

7 multiplicemus A] multiplicamus H.

Œuvres. V. 59

Figura 79. Representación de la unidad (Adam y Tannery, 1908, p. 465)

Las últimas reglas, como ya se ha mencionado antes, no contienen explicación. La intención aparente de estas estaba en lo relativo al tratamiento de las ecuaciones, por ejemplo, debe tenerse tantas ecuaciones como incógnitas tenga el problema para poder resolverse para todas las incógnitas (Regla XIV); la multiplicación de las ecuaciones eleva el grado de la ecuación, por lo tanto, es mejor dividirlas para reducir su grado (Regla XX); y determinar una sola ecuación que englobe todas las relaciones de interés para la resolución del problema (Regla XXI).

Como puede verse con la descripción de las *Regulae ad directionem ingenii* Descartes ya poseía gran parte del esquema de pensamiento que plasmó de manera definitiva en el *Discours de la méthode*. El método de análisis geométrico se muestra como la columna vertebral del método, en donde el álgebra representa el aspecto definitivo del método que permite a la mente enfocarse y simplificar la información para no distraerse con aspectos superfluos. No obstante, aún le faltaba librar el obstáculo de la dimensión, lo cual hace que el tratado *Regulae ad directionem ingenii* comparado con el esquema de pensamiento vertido en *La Géométrie* sea considerado inmaduro (Bos, 2001; Sasaki, 2003; Rabouin, 2010).

Se ha conjeturado que el salto definitivo en el libramiento de la dimensionalidad de las potencias algebraicas fue dado por Descartes cuando resolvió el muy famoso problema de Pappus, problema que ocupa un lugar preponderante en *La Géométrie*.

12.1.3.2.4 El problema de Pappus

Fue a finales de 1631 que el matemático y filólogo holandés Jacob Van Gool (Golius) propuso a Descartes un problema famoso del Libro VII ("Dominio del Análisis") de la *Collection* de Pappus mientras estudiaba en la Universidad de Leyden (Bos, 2001; Sasaki, 2003). El problema de Pappus era un problema de *locus* el cual trataba de determinar la curva de todos los puntos que compartían cierta propiedad. La relevancia de este problema fue que, según Pappus, ni Euclides, ni Apollonio habían podido resolver el problema de manera completa (Bos, 2001; Sasaki, 2003), así que Golius propuso a Descartes que intentara resolver el problema aplicando su método.

Descartes mismo explica en *La Géométrie* el problema de Pappus[35] de la siguiente manera:

> Dada tres, cuatro o más rectas, se trata de encontrar un punto del que se puedan trazar otras líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, y haciendo con ellas ángulos dados, y que el rectángulo formado por dos de esas así trazadas desde el punto, tenga una proporción dada con el cuadrado de la tercer, si no hay más que tres; o bien con el rectángulo de las otras dos, si hubiera cuatro; o bien si hay cinco que el paralelepípedo compuesto por tres tenga la proporción dada con el paralelepípedo formado por las dos que restas y por otra línea dada. O bien si hay seis, que el paralelepípedo formado por tres tenga una proporción dada con el paralelepípedo de las otras tres. O bien si hay siete, que lo que se produce multiplicando cuatro la una por la otra, tenga la razón dada con lo que se produce por la multiplicación de las otras tres y además por otra línea dada. O si hay ocho, que el producto de la multiplicación de cuatro tenga la proporción dada con el producto de las otras cuatro. Y así este problema se puede extender a todo número de líneas (Descartes, 1947, p. 63).

Descartes muestra en *La Géométrie* los casos para tres y cuatro líneas y un caso particular para cinco líneas, de manera que muestra que su método permite encontrar la solución general, a

[35] La discusión que hace Pappus respecto a este problema se puede consultar en Pappus (1660, p. 251-252), Pappus (1982, p. 507-510) y Pappus (1986, p.118-123).

pesar de no mostrar una demostración para todos los casos, dejando ver que si se sigue el método descrito puede hacerse.

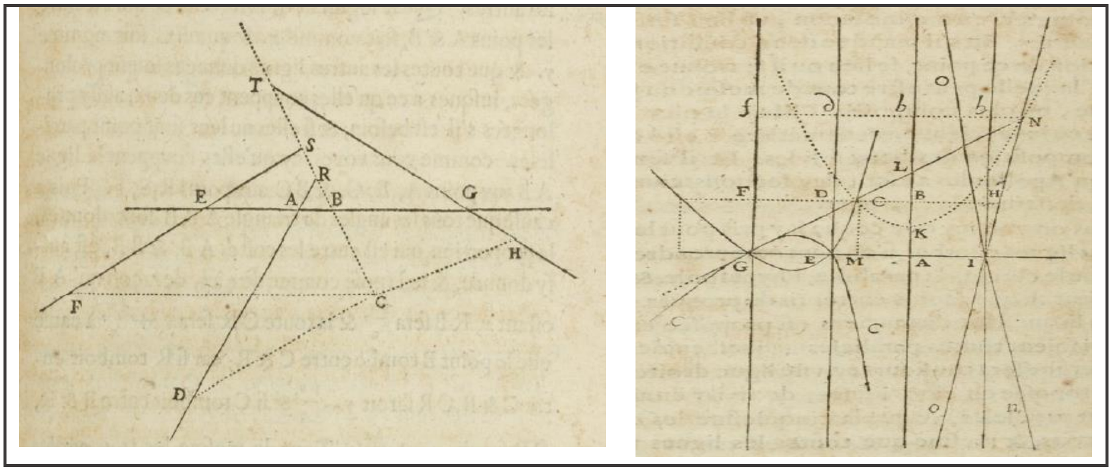


Figura 80. Problema de Pappus para cuatro y cinco líneas (Descartes, *La Géométrie*, 1637, p. 309 y 336)

Diversos autores han argumentado y conjeturado que este problema fue el que permitió a Descartes concretar el proyecto de la "nueva ciencia" (Bos, 2001; Sasaki, 2003; Rabouin, 2010; Arboleda, 2013), puesto que, respecto a lo que se mostró en el tratado de *Regulae ad directionem ingenii*, hay un cambio sustancial en *La Géométrie*, la concepción de la unidad es como tal un segmento de línea. Descartes (1947) señala: "Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a tales términos, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas para construirlos" (p. 49).

Es así que Descartes construye lo que ampliamente se conoce como el "álgebra de los segmentos". De modo que la primera parte de *La Géométrie* corresponde a justificar de manera teórica esta álgebra, mostrando que solo cuatro operaciones son las necesarias para la geometría; adición, sutracción, multiplicación y división. Descartes muestra cómo las cuatro operaciones pueden interpretarse geométricamente, a partir de construcciones geométricas.

Es natural que la evidencia apunte a que este hecho fue logrado cuando Descartes fue confrontado con el problema de Pappus, pues entre la información que se tiene sobre sus desarrollos matemáticos, a partir de este problema fue que Descartes refinó los conocimientos que presentó en las *Regulae ad directionem ingenii*. El álgebra de segmentos permite librarse del problema de la dimensión, al interpretar las magnitudes, sin importar su dimensión (dos, tres, cuatro, etc), como líneas que pueden ser construidas geométricamente.

Esta idea puede verse cuando Descartes mismo critica en *La Géométrie* la concepción de Pappus sobre la dimensión. Para Pappus, la solución para el problema cuando el total de líneas es mayor a seis tiene el problema de que la condición de las proporciones dadas implica la obtención de un cuerpo de dimensión mayor de tres. Descartes cita este hecho del texto de Pappus:

> Si fueran más de seis rectas, ya no puede decirse que se da la relación entre un objeto comprendido por cuatro rectas y otro formado por las otras, pues no hay nada que esté formado por más de tres dimensiones (Descartes, 1947, p. 61).

A lo que Descartes comenta lo siguiente:

> Aquí es de señalar, de paso, que el escrúpulo que tenían los antiguos en emplear los términos de la aritmética en la geometría, no podía provenir más de no ver ellos claramente su relación, lo que producía bastante oscuridad y confusión en la forma como se expresaban (Descartes, 1947, p. 62).

Por lo tanto, puede verse que si bien, en las *Regulae ad directionem ingenii* Descartes ya había dado indicios sobre lo incómodo que para él resultaba la forma en la que la dimensión se trataba. En el problema de Pappus se encontraba nuevamente con esta dificultad que manifestaban los antiguos. De manera que, entre otras cosas, este problema detonó en Descartes nuevas ideas que lo llevaron eventualmente a reconsiderar su propia propuesta de la representación de la unidad y la aritmetización de la geometría como únicamente un álgebra de segmentos.

Bos (2001) conjetura, por otro lado, que la resolución del problema de Pappus también brindó a Descartes cuatro ideas importantes respecto a la geometría:

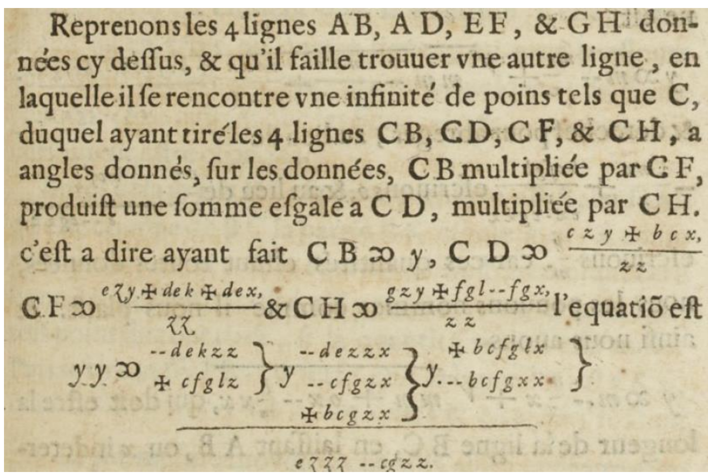
> (1) que las curvas deben ser aceptadas en geometría en la medida en que fueron trazados por movimientos geométricamente legítimos; (2) que estas curvas legítimamente trazadas eran precisamente las curvas Pappus; (3) que la curvas de Pappus eran precisamente aquellas que admitían ecuaciones polinomiales; y (4) que, por lo tanto, la totalidad de las curvas geométricamente aceptables podrían clasificarse equivalentemente por la complejidad del movimiento de trazado, el grado de la ecuación, y el número de líneas dadas en el problema de Pappus correspondiente (Bos, 2001, p. 281-282).

Una de las características del problema de Pappus, como se mostrará en el apartado 6.5.3 es que debido a la gran cantidad de relaciones que devienen del análisis, requiere de una articulación precisa entre lo conocido y desconocido, para lo cual es fundamental crear un recurso semiótico conciso que permita distinguir entre ambos. Por lo tanto, esto apunta hacia la concreción de un lenguaje simbólico al igual que Viète en el que las ecuaciones se conforman por incógnitas y parámetros. Si bien, se ha mencionado que tan solo el hecho de trabajar algebraicamente con las magnitudes continuas permite transitar hacia el parámetro, en el sentido de que las magnitudes en geometría no son un valor específico en su representación, lo cierto es que el simbolismo algebraico paramétrico ayuda sustancialmente en este tipo de problemas en los que las relaciones que se analizan son considerables.

Tomando en cuenta la forma en la que Descartes establece su sistema de notación para representar lo conocido y desconocido en *Regulae ad directionem ingenii* se puede notar que emplea vocales tanto para lo conocido y desconocido—es decir, los parámetros y las incógnitas. "[P]ara mayor facilidad nos serviremos de las letras a, b, c, etc., para expresar las magnitudes ya conocidas, y de A, B, C, etc., para las desconocidas" (Descartes 1996, p. 156).

En cambio en *La Géométrie* emplea las primeras letras del alfabeto en minúscula—$a, b, c, d, e, f, \ldots$, etc—para denotar las cantidades conocidas (parámetros) en tanto que las desconocidas (incógnitas) las suele denotar con las últimas letras del alfabeto x, y, z—de hecho Descartes hace más uso sistemático de x e y como las incógnitas, puesto que la z, como en el caso del problema Pappus es usada para representar un parámetro.

Por lo tanto, el simbolismo paramétrico deviene del tratamiento de problemas geométricos con la finalidad de construir un recurso semiótico conciso para la representación de lo conocido y desconocido. En la Figura 81 se muestra la ecuación de la solución del problema de Pappus para cuatro líneas a la que Descartes llega.


Reprenons les 4 lignes AB, AD, EF, & GH données cy dessus, & qu'il faille trouuer vne autre ligne, en laquelle il se rencontre vne infinité de poins tels que C, duquel ayant tiré les 4 lignes CB, CD, CF, & CH, a angles donnés, sur les données, CB multipliée par CF, produist une somme esgale a CD, multipliée par CH. c'est a dire ayant fait CB ∞ y, CD ∞ $\frac{czy + bcx,}{zz}$ CF ∞ $\frac{ezy + dek + dex,}{zz}$ & CH ∞ $\frac{gzy + fgl - fgx,}{zz}$ l'equatiõ est

$$yy \infty \frac{\left.\begin{matrix} -dekzz \\ +cfglz \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +bcfglx \\ -bcfgxx \end{matrix}\right\}}{ezzz - cgzz.}$$

Figura 81. Ecuación del lugar geométrico del Problema de Pappus para cuatro líneas (Descartes, 1637, p. 325)

La ecuación en términos anacrónicos es:

$$yy = \frac{(-dekzz + cfglz)y + (-dezz - cfgz + bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

Donde las $a, b, c, d, e, f, g, l, z$ son cantidades conocidas y x e y son las desconocidas.

Sobre este hecho Arboleda (2013) menciona:

> La escritura de Descartes permitía distinguir el estatuto exacto de lo dado y lo no dado en cualquier fase del procedimiento analítico. Inclusive cuando, en virtud de la etapa 4 de

> resolución antes mencionada, era necesario razonar sobre los segundos como si también fueran dados (p. 3).

Y complementa su explicación con la de Gardies (2001, p. 109, citado en Arboleda, 2013, p. 3):

> "En adelante se podían incluir en el razonamiento todos los elementos que estaban implicados, como si todos fueran dados, sin que esta unificación de tratamientos y procedimientos implicaran en ningún momento el menor riesgo de confusión en cuanto al estatuto exacto de cada uno de ellos".

No obstante, lo mostrado representan conjeturas sobre lo que Descartes hizo, sin embargo, no existen explicaciones de Descartes que indiquen cómo es que exactamente se le ocurrió repensar su sistema de representación, así como la innovación respecto a la dimensionalidad.

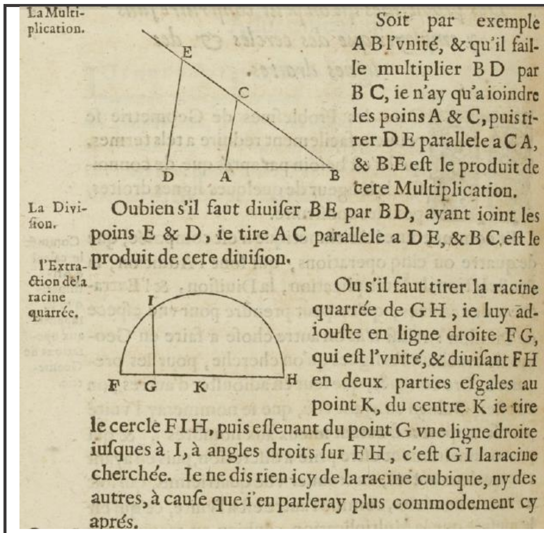
12.1.3.2.5 El método analítico de Descartes

A diferencia de Viète, Descartes no hace mención explícita en la forma en la que se estructura su método analítico. Recuérdese que Viète, describe tres fases de su método analítico: Zetética, Porística y Rética o Exegética.

El estilo discursivo de Descartes es diferente al de Viète, en el sentido de que Viète, tal vez por su gran admiración al conocimiento griego, el tipo de discurso es consistente con la manera rigurosa y formal griega. Descartes en cambio no se apega a lo tradicional haciendo que su estilo de escritura pueda interpretarse de manera más argumentativa. En particular, una división entre las fases del método analítico no es explícitamente mencionado por Descartes, sin embargo, se puede ver que se pueden distinguir dos grandes fases del método analítico de Descartes que son comparables con la Zetética y la Exegética de Viète. De acuerdo con Bos (2001), el método plasmado en *La Géométrie* se divide en la parte del *análisis* en la que el álgebra es empleada para involucrar las relaciones del problema en una ecuación apropiada y la parte *sintética* en la que con base en la ecuación obtenida se procede a la construcción de la solución del problema, que en su caso es el *locus*.

Su método analítico responde a la necesidad de resolver problemas geométricos, por medio de la herramienta algebraica, puesto que la intención es el lugar geométrico con base en el tipo de ecuación que lo representa. De esta manera se establece por primera vez la correspondencia entre ecuación y curva. Además, a partir de la forma en la que se construyen permite a Descartes distinguir entre curvas geométricas y no geométricas. Las curvas geométricas serán aquellas que puedan asociarse a una ecuación algebraica, mientras las que no cumplan esta propiedad serán mecánicas.

Para garantizar la parte de la síntesis Descartes muestra al inicio de *La Géométrie* cómo se reinterpretan las operaciones aritméticas de multiplicación, división y extracción de raíz cuadrada, así como la construcción de la solución de una ecuación cuadrática como ejemplo particular.



La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

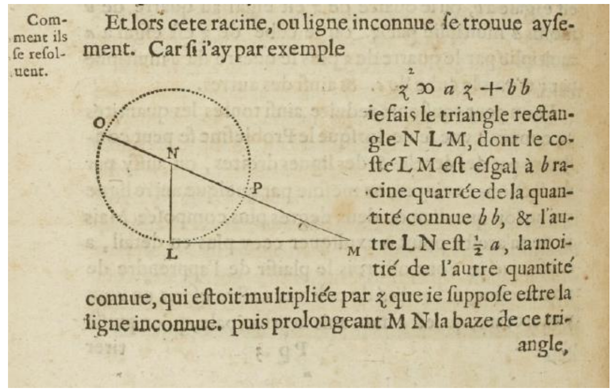
La Diviſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Construcción de la multiplicación, la división y raíz cuadrada (Descartes, 1637, p. 298)



Comment ils ſe reſoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$z^2 \propto az + bb$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

Construcción de la solución de la ecuación $z^2 = az + b^2$ (Descartes, 1637, p. 302)

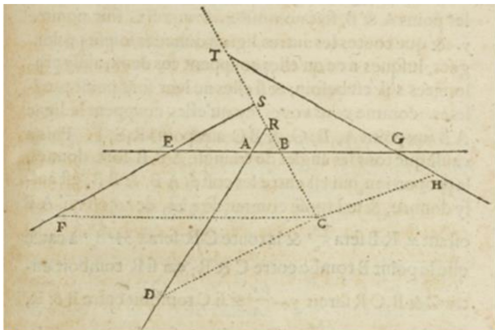
Figura 82. Aritmetización de la geometría por Descartes

A continuación, se muestra un ejemplo de las dos fases de análisis y síntesis en el problema de Pappus para cuatro líneas (la explicación de la resolución se muestra de manera completa en el apartado 5.3.2.5).

- **Análisis**

El análisis en Descartes inicia cuando se ponen de manifiesto las condiciones del problema a resolver y lo que se debe encontrar (véase Figura 83-I-II) el lugar geométrico descrito por el punto C. En el caso del problema de Pappus, las cuatro líneas en posición intervinientes (AB, AD, EF, GH); las líneas resultantes de la prolongación de las líneas en posición partiendo del punto C (CB, CD, CF, CH); los ángulos dados como consecuencia del trazo de las líneas partiendo de C y la condición del rectángulo formado por las líneas que parten de C: $CB \times CF = CD \times CH$.

Posteriormente, se realiza el trabajo algebraico, es decir, determinar las ecuaciones correspondientes a cada una de las líneas que comparten a C como punto (véase Figuras 83-II y 54-I).



Soient A B, A D, E F, G H, &c. plusieurs lignes données par position, & qu'il faille trouuer vn point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites sur les données, comme C B, C D, C F, & C H, en sorte que les angles C B A, C D A, C F E, C H G, &c. soient donnés,

I. Descripción del problema Pappus

Commẽt on doit poser les termes pour venir à l'Equation en cet exemple.

Premierement ie suppose la chose comme desia faite, & pour me demesler de la cõfusion de toutes ces lignes, ie considere l'vne des données, & l'vne de celles qu'il faut trouuer, par exemple A B, & C B, comme les principales, & ausquelles ie tasche de rapporter ainsi toutes les autres. Que le segment de la ligne A B, qui est entre les poins A & B, soit nommé x. & que B C soit nommé y. & que toutes les autres lignes données soient prolongées, iusques a ce qu'elles couppent ces deux, aussy prolongées s'il est besoin, & si elles ne leur sont point paralleles. comme vous voyes icy qu'elles couppent la ligne A B aux poins A, E, G, & B C aux poins R, S, T. Puis a cause que tous les angles du triangle A R B sont donnés, la proportion, qui est entre les costés A B, & B R, est aussy donnée, & ie la pose comme de z à b, de façon qu'A B estant x, R B sera $\frac{bx}{z}$, & la toute C R sera $y + \frac{bx}{z}$, à cause que le point B tombe entre C & R; car si R tomboit entre C & B, C R seroit $y - \frac{bx}{z}$; & si C tomboit entre B & R, C R seroit $-y + \frac{bx}{z}$. Tout de mesme les trois angles du triangle D R C sont donnés, & par consequent aussy la proportion qui est entre les costés C R, & C D, que ie pose comme de z à c: de façon que C R estant $y + \frac{bx}{z}$,

II. Designación de las incógnitas del problema

Figura 83. Condiciones del problema de Pappus y designación de las cantidades del problema (Descartes, 1637, p. 309-310)

Una vez determinadas las ecuaciones correspondientes a las líneas de interés, obtiene la ecuación general para $CB \times CF = CD \times CH$ (véase Figura 84-I), para finalizar el análisis con la resolución y simplificación de la ecuación general (Figura 84-II).

proportion de C S à C F, qui soit comme de z à e, & la toute C F sera $\frac{ezy + dek + dex}{zz}$. En mesme façon A G que ie nomme l est donnée, & B G est $l - x$, & a cause du triangle B G T la proportion de B G a B T est aussy donnée, qui soit comme de z à f. & B T sera $\frac{fl - fx}{z}$, & C T ∞ $\frac{zy + fl - fx}{z}$. Puis derechef la proportion de T C a C H est donnée, a cause du triangle T C H, & la posant comme de z à g, on aura C H ∞ $\frac{+gzy + fgl - fgx}{zz}$.

$$yy \infty \frac{\left.\begin{matrix} -dekzz \\ +cfglz \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +bcfglx \\ -bcfgxx \end{matrix}\right\}}{ez^3 - cgzz}$$

I. Determinación de las ecuaciones para las líneas y ecuación general de la solución

tités $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ escriuons $2m$, & au lieu de $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ escriuons $\frac{2n}{z}$; & ainsi nous aurons

$$yy \infty 2my - \frac{2n}{z}xy \frac{+bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}, \text{ dont la racine est}$$

$$y \infty m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} \frac{+bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}.$$

& derechef pour abreger, au lieu de $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$ escriuons o, & au lieu de $\frac{nn}{zz} \frac{- bcfg}{ez^3 - cgzz}$ escriuons $\frac{p}{m}$. car ces quantités estant toutes données, nous les pouuons nommer comme il nous plaist. & ainsi nous auons

$$y \infty m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx},$$

qui doit estre la longeur de la ligne B C, en laissant A B, ou x indeterminée.

II. Resolución y simplificación de la ecuación general

Figura 84. Determinación y simplificación de la ecuación solución del problema de Pappus para cuatro líneas (Descartes, 1637, p. 312, 325 y 326)

- **Síntesis**

Con base en un análisis de los casos que devienen de los parámetros y signos de la ecuación resultante de la etapa del análisis, Descartes muestra las diferentes soluciones de lugares geométricos resultantes y procede a mostrar sus construcciones (Figura 85).

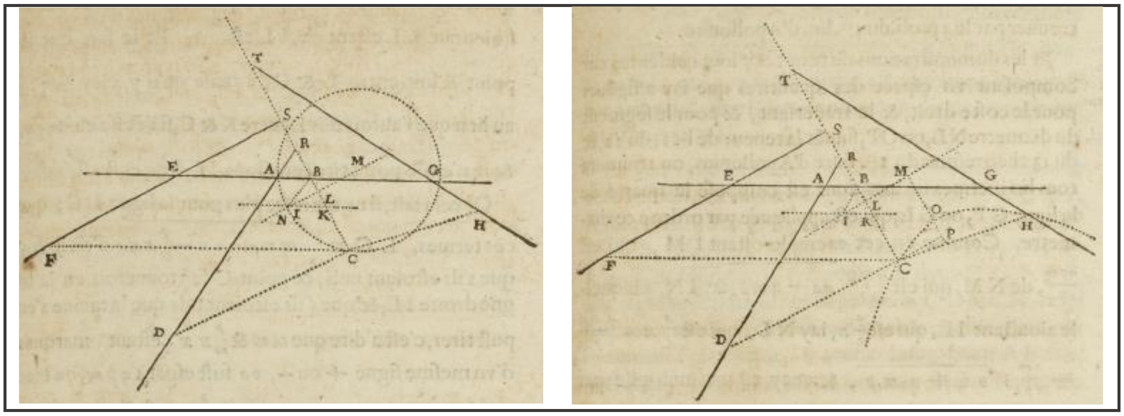


Figura 85. Círculo y parábola resultantes del problema de Pappus para cuatro líneas bajo ciertas condiciones del problema (Descartes, 1637, p. 329 y 331)

Con base en esta parte final del análisis y de la síntesis queda claro que Descartes logró determinar la relación entre la ecuación general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y el tipo de cónica que resulta de acuerdo con la relación y valores específicos entre los parámetros. Sin embargo, si bien, esto permite la identificación de la cónica respectiva, no permite construirla, es por ello por lo que Bos (2001) menciona que el álgebra solo cumple con la mitad del trabajo, puesto que para la síntesis se requiere la construcción del lugar geométrico como demostración. De aquí se puede ver el sentido de las investigaciones previas a 1637 que Descartes hizo respecto a la construcción de las soluciones de las ecuaciones en términos geométricos intersecando curvas, así como también el uso de sus instrumentos como el mesolabio.

Resulta importante resaltar el hecho de que el simbolismo algebraico permite una forma visual y sintética para estudiar las relaciones subyacentes en los problemas y con ello es posible construir nuevo conocimiento. Es tan importante este hecho para el método analítico de Descartes—análisis algebraico—que le permite clasificar las curvas como geométricas a partir del estudio de las ecuaciones, es decir, si la curva puede representarse con una ecuación entonces esta será geométrica, y el grado de la ecuación también permitirá diferenciar entre los géneros de estas.

En este sentido, el simbolismo algebraico constituye un artificio que permite una reorientación de la función del pensamiento matemático, en tanto, modifica la heurística de la resolución de los problemas.

12.2. Tabla de frecuencias sobre los elementos de los sistemas de TRANSITIVIDAD, TAXIS, LÓGICO-SEMÁNTICA y TEMA

A continuación, se muestra la tabla de frecuencias que sirvió de base para construir las interpretaciones que se presentaron en el apartado 6.3.4.

TEXTO	Metafución Experiencial							Metafución Lógica							Metafución Textual		
	TRANSITIVIDAD-PROCESOS-							TAXIS		R. LOG-SEM					TEMA EXPERIENCIAL		
	E.	Ma.	Me.	R. A.	R. I.	V.	C.	P.	H.	El.	Ex.	R.	L.	I.	Pa.	Pro.	Cir.
BABILONIO	2	5	0	0	2	0	0	2	1	0	3	0	0	0	6	3	0
% Total	22%	56%	0%	0%	22%	0%	0%	67%	33%	0%	100%	0%	0%	0%	67%	33%	0%
DIOFANTO	0	6	2	6	4	2	0	5	5	0	4	2	0	4	17	3	0
% Total	0%	30%	10%	30%	20%	10%	0%	50%	50%	0%	40%	20%	0%	40%	85%	15%	0%
AL-KHWÂRIZMÎ	11	16	0	2	5	0	0	16	4	2	5	13	0	0	18	16	0
% Total	32%	47%	0%	6%	15%	0%	0%	80%	20%	10%	25%	65%	0%	0%	53%	47%	0%
CARDANO	1	3	1	5	7	1	0	6	5	0	5	5	0	1	14	3	1
% Total	6%	17%	6%	28%	39%	6%	0%	55%	45%	0%	45%	45%	0%	9%	78%	17%	6%
BOMBELLI	6	5	0	4	6	0	0	2	10	3	2	5		0	10	9	2
% Total	29%	24%	0%	19%	29%	0%	0%	17%	83%	30%	20%	50%	0%	0%	48%	43%	10%
BUTEO	4	11	2	5	15	1	0	12	6	1	2	14	0	1	20	15	3
% Total	11%	29%	5%	13%	39%	3%	0%	67%	33%	6%	11%	78%	0%	6%	53%	39%	8%
VIETA	4	3	3	30	20	1	0	19	14	0	15	17	0	1	37	19	5
% Total	7%	5%	5%	49%	33%	2%	0%	58%	42%	0%	45%	52%	3%	0%	61%	31%	8%
DESCARTES	4	10	5	14	3	3	6	15	22	1	10	23	0	3	19	18	8
% Total	9%	22%	11%	31%	7%	7%	13%	41%	59%	3%	27%	62%	0%	8%	42%	40%	18%
Total por tipo	32	59	13	66	62	8	6	77	67	7	46	79	0	10	141	86	19
% total por tipo	12%	27%	4%	27%	24%	4%	2%	58%	42%	5%	32%	56%	1%	6%	51%	41%	8%

Tabla 49. Tabla de frecuencias sobre los elementos de los sistemas de TRANSITIVIDAD, TAXIS, LÓGICO-SEMÁNTICA y TEMA

12.3. Análisis de la Gramática Funcional

12.3.1 Metafunción Experiencial

12.3.1.1 Texto Babilonio

1. La superficie y la línea cuadrada [[que he acumulado]] :^ES 3/4[36].

La superficie y la línea cuadrada [[que he acumulado]] :	^ES	3/4.
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

2. 1 ^ES la proyección [[que usted puso.]]

1	^ES	la proyección [[que usted puso.]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Identificativo	Atributo

3. La mitad de 1 se rompe,

La mitad de 1	Se rompe
Participante	**Proceso**
Alcance	Material

4. 1/2 y 1/2 se hace espacio (un rectángulo, aquí un cuadrado),

1/2 y 1/2	se hace	espacio (un rectángulo, aquí un cuadrado),
Participante	**Proceso**	**Participante**
Beneficiario	Material	Meta

5. 1/4 a 3/4 se añade:

1/4	a 3/4	se añade
Participante	**Participante**	**Proceso**
Alcance	Beneficiario	Material

6. ^ Y SE OBTIENE 1,

^Y	^SE OBTIENE	1,
Conjunción	**Proceso**	**Participante**
	Existencial	Existente

[36] Esta traducción se hace con base en Høyrup (1986, p. 450) y Høyrup (2002, p. 52).

7. ^ EL RESULTADO hace 1 equilátero.

^ EL RESULTADO	hace	1 equilátero
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

8. 1/2 [[que has hecho sostener en el interior de 1]] se arranca:

1/2 [[que has hecho sostener en el interior de 1]]	se arranca
Participante	**Proceso**
Alcance	Material

9. ^ Y SE OBTIENE 1/2 [[la línea cuadrada.]]

^Y	^SE OBTIENE	1/2 [[la línea cuadrada.]]
Conjunción	**Proceso**	**Participante**
	Existencial	Existente

12.3.1.2 Texto de Diofanto

1. Dividir un cuadrado en dos cuadrados:

Dividir	un cuadrado	en dos cuadrados:
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Alcance	Rol: Producto

2. ^YO Propongo

^YO	Propongo
Participante	Proceso
Emisor	Verbal

3. dividir el 16 en dos cuadrados.

dividir	el 16	en dos cuadrados.
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Alcance	Rol: Producto

4. ^YO Puse

^YO	Puse
Participante	Proceso
Emisor	Verbal

5. que el primer número es δ^{υ},

que	el primer número	es	δ^{υ}
	Participante	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

6. entonces el otro ^NÚMERO es $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$.

entonces	el otro ^NÚMERO	es	$16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificador	Relacional: Identificativo	Identificado

7. Así que es necesario [[que $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$ sea un cuadrado.]]

Así que	es	necesario	[[que $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$ sea un cuadrado.]]
Conjunción	**Proceso**	**Circunstancia**	**Participante**
	Relacional: Atributivo	Atributo	Portador

8. ^TÚ Toma el cuadrado de un múltiplo aleatorio de ς [[del cual la raíz cuadrada de 16 sea sustraída.]]

^TÚ	Toma	el cuadrado de un múltiplo aleatorio de ς [[del cual la raíz cuadrada de 16 sea sustraída.]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Actor	Material	Alcance

9. Tomemos ^NOSOTROS <<por ejemplo>> $2\varsigma - 4\dot{\mu}$

Tomemos	^NOSOTROS	<<por ejemplo>>	$2\varsigma - 4\dot{\mu}$
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**
Material	Actor	Manera	Alcance

10. o, cuyo cuadrado es igual a $4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$.

o,	cuyo cuadrado	es	igual a $4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

11. Ponemos esto (^$4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$) igual a $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$.

Ponemos	esto (^$4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$)	igual a $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$
Proceso	**Participante**	**Participante**
Relacional: Identificativo	Identificado	Identificador

12. Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados

Si sumamos	^NOSOTROS	los números faltantes	en ambos lados
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Alcance	Locación: Espacio

13. y si restamos ^NOSOTROS iguales de iguales,

Y si	restamos	^NOSOTROS	Iguales	de iguales,
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance	Beneficiario

14. ^NOSOTROS encontramos

^NOSOTROS	encontramos
Participante	**Proceso**
Perceptor	Mental: Cognitivo

15. que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς

que	$5\delta^{\upsilon}$	es	igual a 16ς
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

16. y $\varsigma = \frac{16}{5}$.

y	ς	$=$	$\frac{16}{5}$
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

17. De lo cual se deduce

De lo cual	se deduce
Conector	**Proceso**
	Mental: Cognitivo

18. que uno de los números es igual a $\frac{256}{25}$

que	uno de los números	^ES	igual a $\frac{256}{25}$.
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

19. y el otro (^ES ^IGUAL) a $\frac{144}{25}$.

y	el otro	^ES	(^IGUAL) a $\frac{144}{25}$.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

20. Por lo que la suma de los números es $\frac{400}{25}$.

Por lo que	la suma de los números	es	$\frac{400}{25}$.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	identificador

12.3.1.3 Texto de al-Khwârizmî

1. He dividido ^YO diez en dos partes;

He dividido	^YO	diez	en dos partes;
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Alcance	Rol: Producto

2. luego he multiplicado ^YO cada parte por sí misma

luego	He multiplicado	^YO	cada parte	por sí misma
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
	Material	Actor	Alcance	Manera: Grado

3. y sumadas resultan cincuenta y ocho dirhams

y	sumadas	resultan	cincuenta y ocho dirhams
Conjunción	**Circunstancia**	**Proceso**	**Participante**
	Causa: Razón	Existencial	Existente

4. Haces de una de las partes cosa

Haces	de una de las partes	cosa
Proceso	**Participante**	**Participante**
Relacional: Identificativo	Identificado	Identificador

5. y ^HACES la otra diez menos la cosa.

y	^HACES	la otra	diez menos la cosa.
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Relacional: Identificativo	Identificado	Identificador

6. Multiplica ^TÚ luego diez menos cosa por sí mismo,

Multiplica	^TÚ	luego	diez menos cosa	por sí mismo
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Locación: Tiempo	Alcance	Manera: Grado

7. resulta cien y un tesoro menos veinte cosas.

resulta	cien y un tesoro menos veinte cosas
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

8. Multiplica luego cosa por cosa,

Multiplica	^TÚ	luego	cosa	por cosa
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Locación: Tiempo	Alcance	Manera

9. resulta tesoro

resulta	tesoro
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

10. Suma luego ambos,

Suma	^TÚ	luego	ambos
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**
Material	Actor	Locación: Tiempo	Alcance

11. resulta la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams

resulta	la suma	cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams
Proceso	**Conector**	**Participante**
Existencial		Existente

12. *Restaura* luego esos cien y dos tesoros de las veinte cosas sustraídas

Restaura	^TÚ	luego	esos cien y dos tesoros	de las veinte cosas sustraídas
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Locación: Tiempo	Alcance	Beneficiario

13. y súmalas a los cincuenta y ocho,

y	súmalas	^TÚ	a los cincuenta y ocho
Conjunción	Proceso	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

14. resulta cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dirhams y veinte cosas.

resulta	cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dirhams y veinte cosas.
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

15. *Reduce* luego eso a un solo tesoro

Reduce	^TÚ	luego	eso	a un solo tesoro
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Locación: Tiempo	Alcance	Manera: Medio

16. tomando la mitad del conjunto,

tomando	la mitad del conjunto,
Proceso	**Participante**
Material	Alcance

17. resulta cincuenta dirhams y un tesoro igual a veintinueve dirhams y diez cosas.

resulta	cincuenta dirhams y un tesoro igual a veintinueve dirhams y diez cosas.
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

18. *Opón* luego con ése el otro,

Opón	^TÚ	luego	con ese	el otro
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Circunstancia**	**Participante**
Material	Actor	Locación: Tiempo	Comparación	Alcance

19. quitando veintinueve de cincuenta,

quitando	^TÚ	veintinueve	de cincuenta
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Alcance	Beneficiario

20. queda veintiún y tesoro igual a diez cosas.

queda	veintiún y tesoro igual a diez cosas.
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

21. Entonces halla la mitad de las raíces,

Entonces	halla	^TÚ	la mitad de las raíces,
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

22. resulta cinco;

resulta	cinco;
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

23. multiplica ^CINCO por sí mismo,

multiplica	^TÚ	^CINCO	por sí mismo
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Alcance	Manera: Grado

24. resulta veinticinco.

resulta	veinticinco.
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

25. Quita luego de esto el veintiuno conectado con el tesoro,

Quita	^TÚ	luego	de esto	el veintiuno conectado con el tesoro,
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Locación: Tiempo	Beneficiario	Alcance

26. queda cuatro.

queda	cuatro.
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

27. Extrae luego su raíz,

Extrae	^TÚ	luego	su raíz
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**
Material	Actor	Locación: Tiempo	Alcance

28. ^LA RAÍZ es dos.

^LA RAÍZ	es	dos.
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

29. Quítala luego de la mitad de las raíces, [[que es cinco,]]

Quítala	^TÚ	luego	de la mitad de las raíces, [[que es cinco,]]
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**
Material	Actor	Locación: Tiempo	Alcance

30. queda tres.

queda	tres.
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

31. ^TRES Es una de las dos partes,

^TRES	es	una de las dos partes,
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificador	Relacional: Identificativo	Identificado

32. y la otra es siete.

y	la otra ^PARTE	es	siete
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

33. Este problema se refiere a uno de los seis tipos,

Este problema	se refiere	a uno de los seis tipos,
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

34. que ^EL CUAL es "tesoro y números igual a raíces". (p. 28-29)

que	^EL CUAL	es	"tesoro y números igual a raíces". (p. 28-29)
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Atributivo	Identificador

12.3.1.4 Texto de Cardano

1. Encuentra ^TÚ un número [[que sea igual a su raíz cuadrada más el doble de su raíz cúbica.]]

Encuentra	^TÚ	un número [[que sea igual a su raíz cuadrada más el doble de su raíz cúbica.]]
Proceso	**Participante**	**Participante**
Mental	Destinatario	Informe

2. ^TÚ Dices <<, entonces,>>

^TÚ	Dices	<<, entonces,>>
Participante	Proceso	**Conjunción**
Destinatario	Verbal	

3. que si tal número es x^6,

que	si	tal número	es	x^6,
Conector	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Contingencia: Condición	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

4. su raíz cuadrada es necesariamente x^3

su raíz cuadrada	es	necesariamente	x^3
Participante	**Proceso**	**Circunstancia**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Manera	Identificador

5. y ^LA MULTIPLICACIÓN DE dos veces su raíz cúbica es $2x^2$.

y	^LA MULTIPLICACIÓN DE dos veces su raíz cúbica	es	$2x^2$.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificador	Relacional: Identificativo	Identificado

6. Por lo tanto $x^6 = x^3 + 2x^2$

Por lo tanto	x^6	=	$x^3 + 2x^2$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

7. Reduciéndolos ^AMBOS POLINOMIOS en x^2 a potencias inferiores,

Reduciéndolos	^AMBOS POLINOMIOS	en x^2	a potencias inferiores,
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**	**Circunstancia**
Material	Beneficiario	Agente	Rol: Producto

8. $x^4 = x + 2$.

x^4	=	$x + 2$
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

9. Ahora bien, si $x^4 = x + 2$

Ahora bien,	Si	x^4	$=$	$x + 2$
Conector	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Contingencia: Condición	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

10. $x^4 - 1 = x + 1$,

$x^4 - 1$	$=$	$x + 1$
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

11. puesto que se han restado iguales de los iguales.

Puesto que	se han restado	iguales	de iguales
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Alcance	Alcance

12. Divide ^TÚ <<, por lo tanto,>> ambos por $x + 1$ [[como divisor común]]

Divide	^TÚ	<<, por lo tanto,>>	ambos	por $x + 1$ [[como divisor común]]
Proceso	**Participante**		**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor		Meta	Manera

13. y tendrás [[$x^3 - x^2 + x - 1 = 1$]]

y	tendrás	[[$x^3 - x^2 + x - 1 = 1$]]
Conjunción	**Proceso**	**Participante**
	Existencial	Alcance

14. por lo tanto $x^3 + x = x^2 + 2$.

Por lo tanto	$x^3 + x$	$=$	$x^2 + 2.$
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

15. Por lo tanto, según el capítulo XVIII, x es igual a $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} + \frac{47}{54}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} - \frac{47}{54}} + \frac{1}{3}$

Por lo tanto,	según el capítulo XVIII,	x	es	igual a $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} + \frac{47}{54}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} - \frac{47}{54}} + \frac{1}{3}$
Conector	**Circunstancia**	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Proyección: Ángulo: Fuente	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

16. y la sexta potencia de ésta es el número buscado

y	la sexta potencia de ésta	es	el número buscado
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

17. y es igual a su raíz cuadrada más dos veces su raíz cúbica,

y	$\wedge\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}}+\frac{47}{54}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}}-\frac{47}{54}}+\frac{1}{3}$	es	igual a su raíz cuadrada más dos veces su raíz cúbica,
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

18. y estas raíces son dos veces el cuadrado de esta cantidad más su cubo.

y	estas raíces	son	dos veces el cuadrado de esta cantidad más su cubo.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

12.3.1.5 Texto de Bombelli

1. Iguálese $1\overset{6}{\smile}p36$ a $20\overset{3}{\smile}$;

Iguálese	$1\overset{6}{\smile}p36$	a $20\overset{3}{\smile}$;
Proceso	**Participante**	**Participante**
Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

2. ^Y restáurese $20\overset{3}{\smile}$ por parte.

restáurese	$20\overset{3}{\smile}$	por parte.
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Alcance	Alcance: Espacio

3. Lo que dará [[$1\overset{6}{\smile}p36\;m\;20\overset{3}{\smile}p36\;\; eguale\ a\ zero$;]]

Lo que	dará	[[$1\overset{6}{\smile}p36\;m\;20\overset{3}{\smile}p36\;\; eguale\ a\ zero$]]
Conector	Proceso	**Participante**
	Existencial	Existente

4. por lo que la mitad del cubo, [[que será $m10$,]] agregándola al lado de $1\overset{6}{\smile}$, [[que es $1\overset{3}{\smile}$]]

por lo que	la mitad del cubo, [[que será $m10$,]]	agregándola	al lado de $1\overset{6}{\smile}$, [[que es $1\overset{3}{\smile}$]]
Conjunción	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Alcance	Material	Beneficiario

5. da $1\overset{3}{\smile}m10$,

da	$1\overset{3}{\smile}m10$
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

6. del cual su cuadrado es $1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100$,

del cual	su cuadrado	es	$1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100$
Participante	**Participante**	Proceso	**Participante**
Beneficiario	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

7. lo cual supera al 36 por 64.

lo cual	supera	al 36	por 64.
Conjunción	Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
	Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

8. Pero agregando 64, a cada una de las partes

Pero	agregando	64,	a cada una de las partes
Conjunción	Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
	Material	Alcance	Beneficiario

9. Hará [[$1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100\ eguale\ a\ 64,$]]

hará	[[$1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100\ eguale\ a\ 64$]]
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

10. por lo que con el lado de ambas partes,

por lo que	^CALCULANDO	el lado de ambas partes,
Conjunción	**Proceso**	**Participante**
	Material	Portador

11. se tendrá [[$1\overset{3}{\smile}m10\ eguale\ a\ 8,$]]

se tendrá	[[$1\overset{3}{\smile}m10\ eguale\ a\ 8,$]]
Proceso	**Participante**
Existencial	Portador

12. $1\overset{6}{\smile}p36\ Eguale\ a\ 20\overset{3}{\smile}$

$1\overset{6}{\smile}p36$	$Eguale\ a$	$20\overset{3}{\smile}$
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

13. $1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p36\ Eguale\ a\ 0$

$1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p36$	$Eguale\ a$	0
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

14. $1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100\ Eguale\ a\ 64$

$1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100$	$Eguale\ a$	64
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

15. $1\overset{3}{\smile}m10\ Eguale\ a\ 8$

$1\overset{3}{\smile}m10$	$Eguale\ a$	8
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

16. $1\overset{3}{\smile}\ Eguale\ a\ 18$

$1\overset{3}{\smile}$	$Eguale\ a$	18
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

17. $1\overset{1}{\smile}$ $Eguale\ a\ R.c.18$

$1\overset{1}{\smile}$	$Eguale\ a$	$R.c.18$
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

18. Restaurando el negativo

Restaurando	el negativo
Proceso	**Participante**
Material	Alcance

19. se tendrá [[$1\overset{3}{\smile}$ $Eguale\ a\ 18$,]]

Se tendrá	[[$1\overset{3}{\smile}$ $Eguale\ a\ 18$]]
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

20. por lo que con el ^CALCULO DEL lado cúbico de ambas de las partes, se tendrá [[$1\overset{1}{\smile}$ $Eguale\ a\ R.c.18$.]]

por lo que	con el ^CALCULO DEL lado cúbico de ambas de las partes	se tendrá	[[$1\overset{1}{\smile}$ $Eguale\ a\ R.c.18$]]
Conjunción	**Circunstancia**	**Proceso**	**Participante**
	Extensión: Comitativo	Existencial	Existente

21. Pero la incógnita valdrá $R.c.18$.

Pero	la incógnita	valdrá	$R.c.18$
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

12.3.1.6 Texto de Buteo

1. Encontrar tres números, [[de los cuales el primero y un tercio de los otros hacen 14. // El segundo con el cuarto de los otros ^HACEN 8. // El tercero con la quita parte de los demás ^HACEN 8.]]

Encontrar	tres números, [[de los cuales el primero y un tercio de los otros hacen 14. || El segundo con el cuarto de los otros ^HACEN 8. || El tercero con la quita parte de los demás ^HACEN 8.]]
Proceso	**Participante**
Mental	Alcance

2. Pon ^TÚ

Pon	^TÚ
Proceso	**Participante**
Verbal	Destinatario

3. ^QUE el primero sea $1A$

^QUE	el primero	sea	$1A$
Conjunción	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

4. ^Y el segundo ^SEA $1B$

^Y	el segundo	sea	$1B$
Conjunción	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

5. y el tercero ^SEA $1C$.

y	el tercero	sea	$1C$
Conjunción	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

6. Por lo tanto, $1A, \frac{1}{3}B, \frac{1}{3}C$ [14.

Por lo tanto,	$1A, \frac{1}{3}B, \frac{1}{3}C$	[	14
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Portador	Relacional: Identificativo	Atributo

7. También $1B, \frac{1}{4}A, \frac{1}{4}C$[8.

También	$1B, \frac{1}{4}A, \frac{1}{4}C$	[	8
Conjunción	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Portador	Relacional: Identificativo	Atributo

8. Además $1C,\frac{1}{5}A,\frac{1}{5}B$[8.

Además	$1C,\frac{1}{5}A,\frac{1}{5}B$	[	8
Conjunción	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Portador	Relacional: Identificativo	Atributo

9. Con estas ecuaciones se obtendrán la primera, la segunda y la tercera [[como se muestra.]]

Con estas ecuaciones	se obtendrán	la primera, la segunda y la tercera [[como se muestra.]]
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**
Acompañamiento	Existencial	Existente

10. $3A, B, C$[42 [[^LA 1^{a}]]

$3A, B, C$	[	42 [[^LA 1^{a}]]
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

11. $4B, A, C$[32 [[^LA 2^{a}]]

$4B, A, C$	[	32 [[^LA 2^{a}]]
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

12. $5C, A, B$[40 [[^LA 3^{a}]]

$5C, A, B$	[	40 [[^LA 3^{a}]]
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

13. A partir de estas ecuaciones diferentes, << ya sea multiplicando o sumando otras >> se hace [[que por medio de la pérdida de la menor con la mayor // dejar cantidades solas.]]

A partir de estas ecuaciones diferentes	<< ya sea multiplicando o sumando otras >>	se hace	[[que por medio de la pérdida de la menor con la mayor // dejar cantidades solas.]]
Circunstancia	**Circunstancia**	**Proceso**	**Participante**
Manera: Medio	Manera	Material	Alcance

De este modo.

14. Multiplique ^USTED la segunda ecuación por 3,

Multiplique	^USTED	la segunda ecuación	por 3
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Meta	Manera: Grado

15. Es ^EL RESULTADO [[$3A, 12B, 3C$[96.]]

^ENTONCES	Es	^EL RESULTADO	[[$3A, 12B, 3C$[96]]
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Relacional: Identificativo	Identificado	Identificador

16. Retire ^USTED la primera, ^DE [[$3A, 12B, 3C[96$]]

Retire	^USTED	la primera	^DE [[$3A, 12B, 3C[96$]]
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Alcance	Beneficiario

17. el residuo es [[$11B, 2C[54.$]]

el residuo	es	[[$11B, 2C[54.$]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

18. Por otro lado, se multiplica la tercera ecuación por 3,

Por otro lado,	se multiplica	la tercera ecuación	por 3,
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**
	Material	Alcance	Manera: Grado

19. ^EL RESULTADO es [[$3A, 3B, 15C[120.$]]

^EL RESULTADO	Es	[[$3A, 3B, 15C[120.$]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

20. Quitarle la primera, ^A [[$3A, 3B, 15C[120$]]

Quitarle	la primera	^A [[$3A, 12B, 3C[96$]]
Proceso	**Participante**	**Participante**
Material	Alcance	Beneficiario

21. el residuo ^ES [[$2B, 14C[78.$]]

^ENTONCES	el residuo	^ES	[[$2B, 14C[78.$]]
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

22. Multiplique ^USTED A [[$2B, 14C[78$]] por 11,

Multiplique	^USTED	^A [[$3A, 12B, 3C[96$]]	por 11
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Meta	Manera: Grado

23. ^EL RESULTADO es [[$22B, 154C[858.$]]

^EL RESULTADO	es	[[$22B, 154C[858.$]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

24. También multiplique ^USTED [[$11B, 2C[54,$]] por 2,

También	multiplique	^USTED	[[$11B, 2C[54,$]]	por 2,
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
	Material	Actor	Meta	Manera: Grado

25. ^EL RESULTADO es [[$22B, 4C[108.$]]

^EL RESULTADO	es	[[$22B, 4C[108.$]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

26. Retire ^USTED A [[$22B, 4C[108$]] [[$22B, 154C[858,$]]

Retire	^USTED	^A [[$22B, 4C[108$]]	[[$22B, 154C[858$]]
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Meta	Alcance

27. el residuo es [[$150C[750.$]]

el residuo	es	[[$150C[750$]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

28. Divida ^USTED ^A [[$150C[750$]] por 150,

Divida	^USTED	^A [[$150C[750$]]	por 150,
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Meta	Manera: Grado

29. resulta 5,

resulta	5,
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

30. que es el tercer número C

que	^5	es	el tercer número C
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

31. Cuando ^USTED encontró

Cuando	^USTED	encontró
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**
Locación: Tiempo	Perceptor	Mental

32. que $1C$ vale 5, de la ecuación [[que es [[$2B, 14C[78,$]]]]

que	$1C$	vale	5	de la ecuación [[que es [[$2B, 14C[78,$]]]]
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo	Locación: Espacio

33. quitar $14C$ [[que es 70,]] ^A [[$2B, 14C[78$]]

quitar	$14C$ [[que es 70,]]	^A $2B, 14C[78$
Proceso	**Participante**	**Participante**
Material	Alcance	Beneficiario

34. ^LO CUAL da residuo de 8 [[que vale $2B$,]]

^LO CUAL	da	residuo de 8 [[que vale $2B$,]]
Conjunción	**Proceso**	**Participante**
	Existencial	Existente

35. ^ENTONCES es igual a 4, el segundo número B.

^ENTONCES	es	igual a 4,	el segundo número B.
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Relacional: Atributivo	Atributo	Portador

36. Y como se tiene en la tercera ecuación el número 40, quitarle $5C$ y $1B$, [[que es 29]]

Y	como se tiene en la tercera ecuación el número 40,	quitarle	$5C$ y $1B$, [[que es 29]]
Conjunción	**Circunstancia**	**Proceso**	**Participante**
	Causa: Razón	Material	Portador

37. su residuo 11, ^ES ^EL número A.

su residuo 11	^ES	^EL número A.
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

38. Así que hay tres números [[[[$11.4.5$ [[que fueron encontrados.]]]]

Así que	hay	tres números [[[[$11.4.5$ [[que fueron encontrados.]]]]
Conjunción	**Proceso**	**Participante**
	Existencial	Existente

12.3.2 Metafunción Lógica

12.3.2.1 Texto Babilonio

La superficie y la línea cuadrada [[que he acumulado]] : ^ES 3/4.[37]

1 ^ES la proyección [[que usted puso.]]

[37] Esta traducción se hace con base en Høyrup (1986, p. 450) y Høyrup (2002, p. 52) .

La mitad de 1 se rompe,

1/2 y 1/2 se hace espacio (un rectángulo, aquí un cuadrado),

1 1/4 a 3/4 se añade:

2˜α ^Y SE OBTIENE 1,

β ^QUE hace 1 equilátero.

1 1/2 [[que has hecho sostener en el interior de 1]] se arranca:

2 ^Y SE OBTIENE 1/2 [[la línea cuadrada.]]

12.3.2.2 Texto de Diofanto

Dividir un cuadrado en dos cuadrados:

α ^YO Propongo

β dividir el 16 en dos cuadrados.

α ^YO Puse

β˜1 que el primer número es δ^{υ},

2 entonces el otro (^NÙMERO) es $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$

Así que es necesario [[que $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$ sea un cuadrado.]]

^TÚ Toma el cuadrado de un múltiplo aleatorio de ς [[del cual la raíz cuadrada de 16 sea sustraída.]]

1 Tomemos ^NOSOTROS por ejemplo $2\varsigma - 4\dot{\mu}$

2 o, cuyo cuadrado es igual a $4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$.

Ponemos esto (^$4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$) igual a $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$.

β˜1 Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados

2 y si restamos iguales de iguales,

α˜α ^NOSOTROS encontramos

β ̃ 1 que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς
2 y $\varsigma = \frac{16}{5}$.

α De lo cual se deduce
β ̃ 1 que uno de los números es igual a $\frac{256}{25}$
2 y el otro (^ES ^IGUAL) a $\frac{144}{25}$.

Por lo que la suma de los números es $\frac{400}{25}$.

12.3.2.3 Texto de al-Khwârizmî

1 He dividido diez en dos partes;
2 luego he multiplicado cada parte por sí misma
3 ̃ β y ^SIENDO sumadas
α resultan cincuenta y ocho dirhams

1 Haces de una de las partes cosa
2 y ^HACES la otra diez menos la cosa.

1 Multiplica ^TÚ luego diez menos cosa por sí mismo,
2 resulta cien y un tesoro menos veinte cosas.

1 Multiplica luego cosa por cosa,
2 resulta tesoro

1 Suma luego ambos,
2 resulta la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams

1 *Restaura* luego esos cien y dos tesoros [[de las veinte cosas sustraídas]]
2 y súmalas a los cincuenta y ocho,
3 resulta cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dirhams y veinte cosas.

1 ̃ α *Reduce* luego eso a un solo tesoro
β tomando la mitad del conjunto,

2 resulta cincuenta dirhams y un tesoro igual a veintinueve dirhams y diez cosas.

1 *Opón* luego con ése el otro,
α quitando veintinueve de cincuenta,
2˜β queda veintiún y tesoro igual a diez cosas.

1 Entonces halla la mitad de las raíces,
2 ^LO CUAL resulta cinco;

1 multiplica ^CINCO por sí mismo,
2 resulta veinticinco.

1 Quita luego de esto el veintiuno [[conectado con el tesoro,]]
2 queda cuatro.

1 Extrae luego su raíz,
2 ^LA RAÍZ es dos.

1 Quítala luego de la mitad de las raíces, [[que es cinco,]]
2 queda tres.

1 ^TRES Es una de las dos partes,
2 y la otra es siete.

α Este problema se refiere a uno de los seis tipos,
β que es "tesoro y números igual a raíces". (p. 28-29)

12.3.2.4 Texto de Cardano

Encuentra un número [[que sea igual a su raíz cuadrada más el doble de su raíz cúbica.]]
α ^TÚ Dices, <<entonces, >>
β˜β que si tal número es x^6,
α˜1 su raíz cuadrada es necesariamente x^3
2 y ^LA MULTIPLICACIÓN DE dos veces su raíz cúbica es $2x^2$.

Por lo tanto $x^6 = x^3 + 2x^2$

β Reduciéndolos ^AMBOS POLINOMIOS en x^2 a potencias inferiores,
α $x^4 = x + 2.$

β Ahora bien, si $x^4 = x + 2$
α˜α $x^4 - 1 = x + 1,$
β puesto que se han restado de los iguales.

1 Divide, ^TÚ << por lo tanto, >> ambos por $x + 1$ como divisor común
2˜1 y tendrás [[$x^3 - x^2 + x - 1 = 1$]]
2 por lo tanto $x^3 + x = x^2 + 2.$

1 Por lo tanto, según el capítulo XVIII, x es igual a $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} + \frac{47}{54}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} - \frac{47}{54}} + \frac{1}{3}$

2˜1 y la sexta potencia de ésta es el número buscado
2˜1 y es igual a su raíz cuadrada más dos veces su raíz cúbica,
2 y estas raíces son dos veces el cuadrado de esta cantidad más su cubo.

12.3.2.5 Texto de Bombelli

α˜1 Iguálese $1\overset{6}{\smile} p36$ a $20\overset{3}{\smile}$;
2 ^Y restáurese $20\overset{3}{\smile}$ por parte.
β˜α Lo que dará $1\overset{6}{\smile} p36\ m\ 20\overset{3}{\smile} p36\ \ eguale\ a\ zero$;
β˜α por lo que la mitad del cubo, [[que será $m10$,]] agregándola al lado de $1\overset{6}{\smile}$, [[que es $1\overset{3}{\smile}$]]
β˜α da $1\overset{3}{\smile} m10$,
β˜α del cual su cuadrado es $1\overset{6}{\smile} m20\overset{3}{\smile} p100$,
β lo cual supera al 36 por 64.

α Pero agregando 64, a cada una de las partes
β˜α hará $1\overset{6}{\smile} m20\overset{3}{\smile} p100\ eguale\ a\ 64$,
β˜β por lo que ^CALCULANDO el lado de ambas partes,
α se tendrá [[$1\overset{3}{\smile} m10\ eguale\ a\ 8$,]]

$1\overset{6}{\smile} p36$	$Eguale\ a$	$20\overset{3}{\smile}$
$1\overset{6}{\smile} m20\overset{3}{\smile} p36$	$Eguale\ a$	0
$1\overset{6}{\smile} m20\overset{3}{\smile} p100$	$Eguale\ a$	64

$$1 \overset{3}{\smile} m10 \qquad Eguale\ a \quad 8$$

$$1 \overset{3}{\smile} \qquad Eguale\ a \quad 18$$

$$1 \overset{1}{\smile} \qquad Eguale\ a \quad R.c.18$$

β Restaurando el negativo

α˜α se tendrá $1 \overset{3}{\smile}$ $Eguale\ a$ 18,

β˜1 por lo que con el lado ^CALCULO DEL cúbico de ambas de las partes, se tendrá [[$1 \overset{1}{\smile} Eguale\ a\ R.c.18$.]]

2 Pero la incógnita valdrá $R.c.18$.

12.3.2.6 Texto de Buteo

Encontrar tres números, [[de los cuales el primero y un tercio de los otros hacen 14. El segundo con el cuarto de los otros ^HACEN 8. El tercero con la quita parte de los demás ^HACEN 8.]]

α Pon

β˜1 ^QUE el primero sea $1A$,

2 ^Y el segundo ^SEA $1B$

3 y el tercero ^SEA $1C$.

Por lo tanto, $1A, \frac{1}{3}B, \frac{1}{3}C$ [14.

También $1B, \frac{1}{4}A, \frac{1}{4}C$[8.

Además $1C, \frac{1}{5}A, \frac{1}{5}B$[8.

Con estas ecuaciones se obtendrán la primera, la segunda y la tercera como se muestra.

$$3A, B, C[42\ 1^a$$

$$4B, A, C[32\ 2^a$$

$$5C, A, B[40\ 3^a$$

A partir de estas ecuaciones diferentes, <<ya sea multiplicando o sumando otras >> se hace [[que por medio de la pérdida de la menor con la mayor dejar cantidades solas.]]

De este modo.

1 Multiplique ^USTED la segunda ecuación por 3,

2 ^EL RESULTADO es [[$3A, 12B, 3C[96$.]]

1 Retire ^USTED la primera, ^DE [[$3A, 12B, 3C[96$]]

2 el residuo es [[$11B, 2C[54.$]]

1 Por otro lado, se multiplica la tercera ecuación por 3,
2 ^EL RESULTADO es [[$3A, 3B, 15C[120.$]]

1 Quitarle la primera,
2 el residuo ^ES [[$2B, 14C[78.$]]

1 Multiplique ^USTED A [[$2B, 14C[78$]] por 11,
2 ^EL RESULTADO es [[$22B, 154C[858.$]]

1 También multiplique ^USTED [[$11B, 2C[54,$]] por 2,
2 ^EL RESULTADO es [[$22B, 4C[108.$]]

1 Retire ^USTED A [[$22B, 4C[108$]] [[$22B, 154C[858$,]]
2 el residuo es [[$150C[750.$]]

1 Divide ^USTED ^A [[$150C[750$]] por 150,
2 ˜α resulta 5,
β que es el tercer número C

1 ˜ β˜ βCuando encontró
α que $1C$ vale 5, de la ecuación [[que es [[$2B, 14C[78,$]]]]
α˜ α quitar $14C$ [[que es 70,]]
β ^LO CUAL da residuo de 8 [[que vale $2B$,]]
2 ^ENTONCES es igual a 4, el segundo número B.

1 ˜β Y como se tiene en la tercera ecuación el número 40,
α quitarle $5C$ y $1B$, [[que es 29]]
2 ^ENTONCES su residuo 11, ^ES número A.

Así que hay tres números $11.4.5$ [[que fueron encontrados.]]

12.3.3 Metafunción Textual

12.3.3.1 Texto Babilonio

1			La superficie y la línea cuadrada	[[que he acumulado]] : ^ES 3/4.
2			1	^ES la proyección [[que usted puso.]]
3			La mitad de 1	se rompe,
4			1/2 y 1/2	se hace espacio (un rectángulo, aquí un cuadrado),
5			1/4	a 3/4 se añade:
6	^ Y		^SE OBTIENE	1,
7	^QUE		hace	1 equilátero.
8			1/2 [[que has hecho sostener en el interior de 1]]	se arranca:
9	^ Y		SE OBTIENE	1/2 [[la línea cuadrada.]]
	Textual	**Interpersonal**	**Experiencial**	
		Tema		**Rema**

12.3.3.2 Texto de Diofanto

1			Dividir un cuadrado	en dos cuadrados:
2			^YO	Propongo
3			Dividir el 16	en dos cuadrados.
4			^YO	Puse
5	que		el primer número	es δ^{υ}
6	entonces		el otro ^NÚMERO	es $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$
7	Así que	es necesario	que $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$	[[sea un cuadrado.]]
8			^TÚ	Toma el cuadrado de un múltiplo aleatorio de ς [[del cual la raíz cuadrada de 16 sea sustraída.]]
9			^NOSOTROS	Tomemos <<por ejemplo>> $2\varsigma - 4\dot{\mu}$
10	o,		cuyo cuadrado	es igual a $4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$
11			^NOSOTROS	Ponemos esto (^$4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$ igual a $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$
12	Si		^NOSOTROS	sumamos los números faltantes en ambos lados
13	y si		^NOSOTROS	restamos iguales de iguales
14			^NOSOTROS	encontramos
15	que		$5\delta^{\upsilon}$	es igual a 16ς
16	y		ς	$= \frac{16}{5}$
17	De lo cual		se deduce	
18	que		uno de los números	es igual a $\frac{256}{25}$
19	y		el otro	^ES (^IGUAL) a $\frac{144}{25}$.

20	Por lo que		la suma de los números	es $\frac{400}{25}$
	Textual	Interpersonal	Experiencial	
	Tema			Rema

12.3.3.3 Texto de al-Khwârizmî

1			^YO	He dividido diez en dos partes;
2	luego		^YO	he multiplicado cada parte por sí misma
3	y		sumadas	resultan cincuenta y ocho dirhams
4			Haces	de una de las partes cosa
5	y		^HACES	la otra diez menos la cosa.
6	luego		^TÚ	Multiplica diez menos cosa por sí mismo
7			resulta	cien y un tesoro menos veinte cosas
8	luego		^TÚ	Multiplica cosa por cosa
9			resulta	tesoro
10	luego		suma	ambos
11			resulta	la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams
12	luego		^TÚ	Restaura esos cien y dos tesoros de las veinte cosas sustraídas
13	y		^TÚ	súmalas a los cincuenta y ocho
14			resulta	cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dirhams y veinte cosas.
15	luego		^TÚ	Reduce eso a un solo tesoro
16			tomando	la mitad del conjunto,
17			resulta	cincuenta dirhams y un tesoro igual a veintinueve dirhams y diez cosas
18	luego		^TÚ	Opón con ese el otro
19			^TÚ	quitando veintinueve de cincuenta,
20			queda	veintiún y tesoro igual a diez cosas.
21	Entonces		^TÚ	halla la mitad de las raíces,
22			resulta	cinco;
23			^TÚ	Multiplica ^CINCO por sí mismo
24			resulta	veinticinco.
25	luego		^TÚ	Quita de esto el veintiuno conectado con el tesoro,
26			queda	cuatro.
27	luego		^TÚ	Extrae su raíz
28			^LA RAÍZ	es dos.
29	luego		^TÚ	Quítala de la mitad de las raíces, [[que es cinco,]]
30			queda	tres.
31			^TRES	es una de las dos partes,
32	y		la otra ^PARTE	es siete
33			Este problema	se refiere a uno de los seis tipos,
34	que		^EL CUAL	es “tesoro y números igual a raíces”. (p. 28-29)
	Textual	Interpersonal	Experiencial	
	Tema			Rema

12.3.3.4 Texto de Cardano

1			^TÚ	Encuentra un número que sea igual a su raíz cuadrada más el doble de su raíz cúbica.
2	<<, entonces,>>	Dices	^TÚ	
3	que si		tal número	es x^6
4			su raíz cuadrada	es necesariamente x^3
5	y		^LA MULTIPLICACIÓN DE dos veces su raíz cúbica	es $2x^2$
6	Por lo tanto		x^6	$= x^3 + 2x^2$
7			Reduciéndolos ^AMBOS POLINOMIOS	en x^2 a potencias inferiores
8			x^4	$= x + 2.$
9	Ahora bien, si		x^4	$= x + 2.$
10			$x^4 - 1$	$= x + 1$
11	Puesto que		se han restado	iguales de iguales
12			^TÚ	Divide <<, por lo tanto,>> ambos por $x + 1$ [[como divisor común]]
13	y		tendrás	[[$x^3 - x^2 + x - 1 = 1$]]
14	Por lo tanto		$x^3 + x$	$= x^2 + 2$
15	Por lo tanto,		según el capítulo XVIII,	x es igual a $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} + \frac{47}{54}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} - \frac{47}{54}} + \frac{1}{3}$
16	y		la sexta potencia de ésta	es el número buscado
17	y		^x^6	es igual a su raíz cuadrada más dos veces su raíz cúbica,
18	y		estas raíces	son dos veces el cuadrado de esta cantidad más su cubo.
	Textual	**Interpersonal**	**Experiencial**	
		Tema		**Rema**

12.3.3.5 Texto de Bombelli

1			Iguálese $1\overset{6}{\smile} p36$	a $20\overset{3}{\smile}$;
2	^Y		Restáurese $20\overset{3}{\smile}$.	por parte
3	Lo que dará		$1\overset{6}{\smile} p36\ m\ 20\overset{3}{\smile} p36$	*eguale a zero*

4	por lo que		la mitad del cubo, [[que será $m10$,]]	agregándola al lado de $1\overset{6}{\smile}$, [[que es $1\overset{3}{\smile}$]]
5			da	$1\overset{3}{\smile}m10$
6	del cual		su cuadrado	es $1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100$
7	lo cual		supera al 36	por 64.
8	Pero		Agregando 64,	a cada una de las partes
9			hará $1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100$	$eguale\ a\ 64$
10	por lo que		con el ^CALCULO	el lado de ambas partes,
11			se tendrá	[[$1\overset{3}{\smile}m10\ eguale\ a\ 8$,]]
12			$1\overset{6}{\smile}p36$	$Eguale\ a\ 20\overset{3}{\smile}$
13			$1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p36$	$Eguale\ a\ 0$
14			$1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100$	$Eguale\ a\ 64$
15			$1\overset{3}{\smile}m10$	$Eguale\ a\ 8$
16			$1\overset{3}{\smile}$	$Eguale\ a\ 18$
17			$1\overset{1}{\smile}$	$Eguale\ a\ R.c.18$
18			Restaurando	el negativo
19			Se tendrá	$1\overset{3}{\smile}\ Eguale\ a\ 18$
20	por lo que		con el ^CALCULO DEL lado cúbico de ambas de las partes	se tendrá [[$1\overset{1}{\smile}\ Eguale\ a\ R.c.18$]]
21	Pero		la incógnita	valdrá $R.c.18$
	Textual	**Interpersonal**	**Experiencial**	
	Tema			**Rema**

12.3.3.6 Texto de Buteo

1			Encontrar	tres números, [[de los cuales el primero y un tercio de los otros hacen 14. | | El segundo con el cuarto de los otros ^HACEN 8. | | El tercero con la quita parte de los demás ^HACEN 8.]]
2		Pon	^TÚ	
3	^QUE		el primero	sea $1A$
4	^Y		el segundo	sea $1B$
5	y		el tercero	sea $1C$
6	Por lo tanto,		$1A,\frac{1}{3}B,\frac{1}{3}C$	[14
7	También		$1B,\frac{1}{4}A,\frac{1}{4}C$	[8
8	Además		$1C,\frac{1}{5}A,\frac{1}{5}B$	[8
9			Con estas ecuaciones	se obtendrán la primera, la segunda y la tercera [[como se muestra.]]
10			$3A,B,C$	[42 [[^LA 1^a]]
11			$4B,A,C$	[32 [[^LA 2^a]]
12			$5C,A,B$	[40 [[^LA 3^a]]
13			A partir de estas ecuaciones diferentes	<< ya sea multiplicando o sumando otras >> se hace [[que por medio de la pérdida de la menor con la mayor // dejar cantidades solas. De este modo.]]
14			Multiplique ^USTED	la segunda ecuación por 3

15			Es ^EL RESULTADO	[[$3A, 12B, 3C[96$]]
16			Retire ^USTED	la primera, ^DE $3A, 12B, 3C[96$
17			el residuo	es [[$11B, 2C[54.$]]
18	Por otro lado,		se multiplica	la tercera ecuación por 3,
19			^EL RESULTADO	Es [[$3A, 3B, 15C[120$]]
20			Quitarle la primera	^A [[$3A, 12B, 3C[96$]]
21			el residuo	^ES [[$2B, 14C[78.$]]
22			Multiplique ^USTED	^A [[$3A, 12B, 3C[96$]]por 11
23			^EL RESULTADO	es [[$22B, 154C[858.$]]
24	También		Multiplique ^USTED	[[$11B, 2C[54,$ por 2,]]
25			^EL RESULTADO	es [[$22B, 4C[108.$]]
26			Retire ^USTED	A [[$22B, 4C[108$]] [[$22B, 154C[858,$]]
27			el residuo	es [[$150C[750$]]
28			Divida ^USTED	^A [[$150C[750$]] por 150,
29			resulta	5,
30	que		^5 es	el tercer número C
31	Cuando		^USTED	encontró
32	que		$1C$	vale 5, de la ecuación [[que es [[$2B, 14C[78,$]]]]
33			quitar $14C$ [[que es 70,]]	^A [[$2B, 14C[78$]]
34	^LO CUAL		da	residuo de 8 [[que vale $2B$,]]
35	^ENTONCES		es igual a 4,	el segundo número B.
36	Y		como se tiene en la tercera ecuación el número 40,	quitarle $5C$ y $1B$, [[que es 29]]
37			su residuo 11	^ES ^EL número A.
38	Así que		hay tres números	[[[[$11. 4. 5$ [[que fueron encontrados.]]]]
	Textual	Interpersonal	Experiencial	
	Tema			Rema

12.4 Interpretación de la gramática funcional

12.4.1 Texto Babilonio

<table>
<tr><th>Recurso semiótico</th><th>Met. Experiencial
TRANSITIVIDAD</th><th>Met. Lógica
TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN</th><th>Met. Textual
TEMA-REMA</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Lenguaje Natural</td><td>• Participantes: La mayoría de los participantes son cantidades, el resto aluden a formas geométricas.
• Procesos: Se ve una predominancia de los procesos materiales, así de los relacionales identificativos.
• Circunstancias: No hay uso de circunstancias.</td><td>• TAXIS: En los complejos clausulares se identifican únicamente relaciones Paratácticas.
• R. LÓG-SEM: Se dan únicamente relaciones semánticas de EXPANSIÓN del tipo Extensión.</td><td>Los Temas Experienciales recurren en su mayoría a Participantes y en menor cantidad Procesos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Interpretación Funcional</td></tr>
<tr><td>Pareciera que los participantes que predominan son cantidades sobre las cuales se opera. No obstante, si bien en el texto aparecen valores numéricos, el significado experiencial detrás, de acuerdo con Høyrup (1986, 2002) corresponde a una realidad semiótica figural como se muestra en la imagen de abajo. Las cantidades se corresponden con áreas de cuadrados y rectángulos que son manipulados. En este sentido la manipulación de figuras geométricas constituye la justificación epistémica que da sentido al procedimiento.</td><td>Dado que se presentan únicamente relaciones paratácticas, los significados al interclausulares son independientes. En donde en una cláusula se presenta un significado y es extendido con el apoyo de otra cláusula por medio de la Extensión.
En términos de lo que se está organizando lógicamente en el texto, se muestra una acción sobre los participantes y consecuentemente la consecuencia o producto de dicha acción.</td><td>Puesto que los Temas Experienciales son mayormente Participantes, el mensaje en el texto Babilonio refiere a la línea que se desea determinar y el resultado de sus modificaciones, puesto que los Remas contienen los resultados de las modificaciones.</td></tr>
</table>

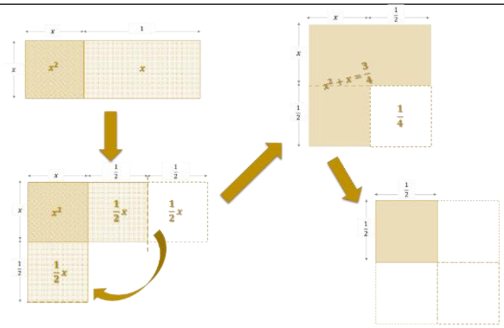
	 El hecho de que los procesos sean predominantemente materiales implica que el significado de la experiencia remarcada en el texto es la acción sobre los participantes, agregando que las circunstancias son nulas en el mismo, indica que se la experiencia se limita exclusivamente a describir la acción y el producto de esa acción, sin recurrir a las condiciones, causas o razones por las cuales se actúa.		

Tabla 50. Interpretación funcional de la gramática del texto Babilonio

12.4.2 Texto de Diofanto

Recurso semiótico	Met. Experiencial TRANSITIVIDAD	Met. Lógica TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN	Met. Textual TEMA-REMA
Lenguaje Natural	• Participantes: Los participantes que no son simbólicos representan los números del problema y su especie (el cuadrado, por ejemplo). • Procesos: Los procesos más empleados son relacionales y materiales respectivamente. • Circunstancias: Las circunstancias en el texto de Diofanto son escasas, son del tipo Locación, Manera, Rol y Beneficiario.	• TAXIS: Aparecen en el texto Diofantino relaciones tanto Paratácticas como Hipotácticas con predominancia de las primeras. • R. LÓG-SEM: Se presentan relaciones semánticas de EXPANSIÓN del tipo Extensión y Realce, junto con relaciones de PROYECCCIÓN del tipo Locución.	Los Temas Experienciales son predominantemente Participantes y en menor cantidad Procesos y solo una Circunstancia.
	Interpretación Funcional		
	El lenguaje natural resalta que se está trabajando y operando con números. La función de estos participantes no simbólicos corresponde con ser los identificados y portadores de sus respectivos Participantes simbólicos con la finalidad de posteriormente ser tratados de esta última manera, es decir, simbólica. El mayor uso de Procesos Relaciones indica que el método Diofantino, a diferencia del texto Babilonio previo, trata sobre la relación de igualdad entre los polinomios del problema. De este modo, instaura una forma sistemática de trabajar con la igualdad pero de manera no simbólica.	Puesto que hay relaciones Paratácticas e Hipotácticas en el texto de Diofanto, muestra una complejidad mucho mayor que el babilonio en términos lógicos, toda vez que se representan significados independientes y dependientes. Esto último se logra con el recurso de cláusulas condicionales que obligan a la cláusula secundaria a depender de la primera. No obstante, dentro de esta estructura lógica también se presentan relaciones independientes extendidas, tal como se ve en el caso de las cláusulas 12, 13, 14, 15 y 16:	Puesto que los Temas Experienciales son mayormente Participantes, el mensaje en el texto Diofantino refiere a los números que se deben encontrar y elementos de los polinomios a los que les serán atribuido o identificado expresiones simbólicas. Cabe resaltar que la mayoría de los Participantes en los Temas Experienciales son retóricos y no simbólicos, dejando ver que en los Temas el Lenguaje Natural predomina mientras que en los Remas el simbólico predomina.

		β˜1 Si sumamos ^NOSOTROS los números 2 y si restamos iguales de iguales, α˜α ^NOSOTROS encontramos β˜1 que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς 2 y $\varsigma = \frac{16}{5}$. El orden del significado lógico en este complejo clausular es: *encontramos que* $5\delta^{\upsilon}$ *es igual a* 16ς *y* $\varsigma = \frac{16}{5}$, *si sumamos los números faltantes a ambos lados y si restamos iguales de iguales.* Las relaciones de Realce tienden a enfatizar los requisitos para que ciertas acciones tomen lugar. En este caso las condiciones que determinan ciertas transformaciones de las expresiones. Las relaciones de Extensión agregan, por su parte, más información independiente sobre la cláusula principal. Es decir, una agregación de la condición, o bien, sobre el efecto.	
Simbolismo[38]	• Participantes: Los participantes simbólicos representan polinomios sobre los cuales se opera de manera separada, no como una ecuación simbólica actual, sino como co-polinomios (Oaks, 2009, 2012; Heeffer, 2008b, 2010a). • Procesos: Los procesos simbólicos representan las operaciones aritméticas, lo que O'Halloran (2005) ha denominado *procesos operativos*. En este sentido, los		El recurso Textual al que hace uso el simbolismo de Diofanto es al de simplificación tipográfica, empleando abreviaciones de palabras griegas como los símbolos que definen las expresiones algebraicas. Por otro lado, la organización de los Temas y Remas en los que hay cláusulas con predominancia de participantes simbólicos siempre coincide con el Rema como el atributo o identificador. Por lo tanto, estos se

[38] Se ha mencionado en el apartado 5.2 que la notación empleada en el texto es una versión anacrónica del simbolismo de Diofanto, solo para facilitar la comunicación de los procedimientos y resultados.

	Procesos Simbólicos en Diofanto, son el restar y fraccionar —. El símbolo para la suma es elidido en el texto puesto que las expresiones de Diofanto están organizadas de manera que todos los términos positivos se colocaban a la izquierda juntos, mientras los negativos se colocaban juntos después de los positivos separados por el símbolo $\pitchfork$. Por ejemplo, la expresión $2x^3 - 5x^2 + 8x - 1$, como se ha representado aquí, se escribiría: $k^{\upsilon}\bar{\beta}\varsigma\bar{\eta} \pitchfork \delta^{\upsilon}\bar{\varepsilon}\dot{\mu}\bar{\alpha}$. En el texto Diofantino no se emplea un signo para la igualdad. Para ver más sobre el simbolismo de Diofanto, ver Meskens (2010). • Circunstancias: No se presentan circunstancias simbólicas		encuentran a la derecha del Portador o identificado. Considérese por ejemplo la cláusula 13: "*y* $\varsigma = \frac{16}{5}$.". Donde el atributo (el valor asociado a la incógnita como resultado) $\frac{16}{5}$ se encuentra a la derecha. En el caso de la cláusula 11: "*Ponemos esto* (^$4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$) *igual a* $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$", puede verse que previo a esta cláusula se estaba trabajando con el participante $4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$ que resultó como una transformación de otro participante. Como este participante era un objetivo del proceso completo, pues resulta de una estrategia, este se asocia con el identificador $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$ en la cláusula 11, dado que debe cumplirse que son el mismo número. Entonces el identificador es nuevamente el Rema, por lo que se encuentra a la derecha.
	Interpretación Funcional		
	Con ayuda de los procesos relacionales identificativos y atributivos procedentes del lenguaje natural es posible la *adopción semiótica* (O'Halloran, 2005). Por ejemplo, en la cláusula 6: "*entonces el otro ^NÚMERO es* $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$." A partir de esta cláusula al referirse en el texto al segundo número será de manera simbólica. De manera que la función de los participantes y procesos simbólicos es el tránsito del lenguaje natural al simbólico para sintetizar el discurso y señalar el tipo de números con los que se está trabajando (cantidad, cuadrado, cubo, cuadrado-cuadrado). De acuerdo con Klein (1968) los símbolos representan "tipos" de número que son necesarios de diferenciar.		Diofanto fue el primero al que se le atribuye la invención de los símbolos algebraicos. Los símbolos de Diofanto son abreviaciones de las palabras más usadas en su discurso. Por ejemplo, el símbolo para la incógnita ς. Corresponde con la última letra de la palabra $\alpha\rho\iota\tau\mu\sigma\varsigma$. La función principal del simbolismo en este ejemplo es la de síntesis de la información que se emplea recurrentemente por medio de una tipografía sistemática.

Tabla 51. Interpretación funcional de la gramática del texto de Diofanto

12.4.3 Texto de al-Khwârizmî

Recurso semiótico	Met. Experiencial TRANSITIVIDAD	Met. Lógica TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN	Met. Textual TEMA-REMA
Lenguaje Natural	• Participantes: Los participantes más empleados en el discurso son cantidades y polinomios retóricos. Por ejemplo, en la cláusula 5 se menciona: "*y ^HACES la otra diez menos la cosa*". En la que el participante *diez menos la cosa*, puede ser representado anacrónicamente en términos simbólicos como $10 - x$. • Procesos: Los procesos más empleados son materiales, existenciales y relacionales identificativos. • Circunstancias: Se incluyen circunstancias de Agente, Beneficiario, Rol: Producto, Manera: Grado y de Locación: Tiempo.	• TAXIS: Se emplean principalmente relaciones Paratácticas. • R. LÓG-SEM: Se presentan principalmente relaciones semánticas de EXPANSIÓN de Realce y en menor cantidad del tipo Expansión.	Hay una notable predominancia de Temas Experienciales con Procesos.
	Interpretación Funcional		
	Puesto que predominan los procesos materiales y existenciales puede interpretarse el significado de la experiencia remarcada en el texto es la acción sobre los participantes, la estructura experiencial indica cómo se aplican ciertas operaciones a polinomios para reducir por medio de las técnicas del *aljabar* y *almuchabala* a una relación que posea una estructura canónica de las que se tiene una regla específica para resolverla. En el caso del texto de al-Khwârizmî, se incluyen circunstancias como forma de especificar con quién y	Dado que se presentan principalmente relaciones paratácticas, los significados interclausulares son independientes. En donde en una cláusula se presenta un significado y es extendido con el apoyo de otra cláusula por medio de la Extensión y el Realce. En este sentido, su estructura lógica es similar a la babilonia. No obstante, la estructura lógica sigue un patrón muy específico, en el que los complejos clausulares son usualmente conformados por dos cláusulas, en la que en la principal se indica una acción y en la secundaria el producto.	La configuración de los Temas con Procesos en las cláusulas muestra que el mensaje del texto de al-Khwârizmî es el de mostrar una secuencia de pasos, que adquiere una estructura reiterada de operación y resultado. De manera que la función Textual en este ejemplo es la de describir un algoritmo.

	por quién se está operando y a quién afecta esta operación.	Por ejemplo, las cláusulas 6 y 7: 1 **Multiplica ^TÚ luego diez menos cosa por sí** 2 **resulta cien y un tesoro menos veinte cosas.** En términos de lo que se está organizando lógicamente en el texto, se muestra una acción sobre los participantes y consecuentemente la consecuencia o producto de dicha acción.	

Tabla 52. Interpretación funcional de la gramática del texto de al-Khwârizmî

12.4.4 Texto de Cardano

Recurso semiótico	Met. Experiencial TRANSITIVIDAD	Met. Lógica TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN	Met. Textual TEMA-REMA
Lenguaje Natural	• Participantes: Los participantes retóricos suelen aludir a los *identificados* que será relacionados con las expresiones simbólicas, así como también aludir a las ecuaciones específicamente (los lados de la ecuación) respecto a su transformación. Por ejemplo en la cláusula 12: "*Divide, ^TÚ <<por lo tanto,>> **ambos** por $x + 1$ [[como divisor común]]*". • Procesos: Se puede ver una predominancia de los procesos relacionales, por sobre los materiales. • Circunstancias: Agente, Contingencia: Concesión, Contingencia: Condición, Proyección: Ángulo y Rol: Producto.	• TAXIS: Se emplean de forma equilibrada relaciones Paratácticas e Hipotácticas. • R. LÓG-SEM: Se presentan principalmente relaciones semánticas de EXPANSIÓN del tipo Extensión y Realce.	Hay predominancia de Temas Experienciales que recurren a Participantes.
	Interpretación Funcional		
	Puesto que los participantes retóricos suelen fungir por un lado como los *identificados*, al igual que en el discurso de Diofanto, estos permiten la *adopción semiótica* (O'Halloran, 2005) de la misma manera. Por otro lado, su otra función es destacar sobre qué participantes se está operando, o bien con qué participantes se transforman las ecuaciones. Esto es acompañado en pocas ocasiones con las circunstancias, las cuales indican el objetivo con la transformación, condición y con quién se efectúa la transformación.	Puesto que hay casi la misma cantidad de relaciones Paratácticas e Hipotácticas en el texto de Cardano, este se asemeja al Diofantino, puesto que muestra la misma complejidad en tanto se organizan significados independientes y dependientes. Al igual que con Diofanto, esto último se logra con el recurso de cláusulas condicionales que obligan a la cláusula secundaria a depender de la primera. Como en el caso de las cláusulas 9, 10 y 11. β Ahora bien, si $x^4 = x + 2$ α˜α $x^4 - 1 = x + 1$, β puesto que se han restado de los iguales.	La configuración de los Temas con Participantes en las cláusulas muestra que el mensaje del texto de Cardano refiere a los números que se deben encontrar y elementos de los polinomios a los que les serán atribuido o identificado expresiones simbólicas.

		Una diferencia respecto al texto Diofantino es que el texto de Cardano es totalmente organizado en complejos clausulares, permitiendo únicamente una cláusula sin relación lógica con otras. Por lo tanto, en su totalidad el texto de Cardano es más complejo que el Difantino.	
Simbolismo	• <u>Participantes:</u> Los participantes simbólicos, corresponden en ocasiones a ecuaciones, si bien, la ecuación en sí misma podría considerarse una cláusula con el proceso relacional identificativo o atributivo como núcleo, es de destacar que en ocasiones la ecuación funciona como un grupo nominal, dando lugar a un significado metafórico. Por ejemplo, en la cláusula 13: "*tendrás [[* $x^3 - x^2 + x - 1 = 1$ *]]*". Donde aquí la ecuación es un resultado, es decir, un objeto que puede ser entendido en el lenguaje natural como "esto". En este sentido, se da lugar a una *metáfora semiótica* (O'Halloran, 2005), pues como se ha dicho, el estatus funcional que le corresponde a este elemento en su respectivo recurso semiótico cambia. En este caso en el lenguaje natural, se hace alusión a la ecuación como si fuera un grupo nominal, mientras que en el simbolismo correspondería a una cláusula. • <u>Procesos:</u> A diferencia de los ejemplos de Diofanto y al-Khwârizmî, aquí se muestran procesos simbólicos, que de acuerdo con O'Halloran (2005), son considerados *procesos operativos*, tanto para las operaciones aritméticas y de la igualdad en el contexto de la igualdad de polinomios simbólicos. Es decir, en una ecuación. En este sentido, a diferencia de sus predecesores como ha dejado mostrar el análisis histórico-epistemológico, a partir de Cardano, la ecuación adquiere el estatus de		Se identifica que casi la mitad de los Participantes de los Temas Experienciales son polinomios. Por lo tanto, a diferencia de Diofanto, Cardano presenta como constituyentes genuinos en su discurso a los polinomios, mientras que en el texto de Diofanto esto no sucede. También se pude identificar que a partir de Cardano como ha mostrado Heeffer (2008b, 2009, 2010b), se da el primer indicio del tratamiento de ecuaciones simbólicas incrustadas en el discurso. En la imagen__ se muestra la imagen del documento original en la que puede apreciarse cómo algunas ecuaciones aparecen por separado.

	cláusula. Por ejemplo, en las cláusulas 8 y 10: "$x^4 = x + 2$" y "$x^4 - 1 = x + 1$", puede verse que ambas cláusulas son totalmente simbólicas. • Circunstancias: No se presentan circunstancias en términos simbólicos. La forma en la que Cardano representaba la igualdad en el estatus del signo actual "$=$" era por medio de las palabras $\boldsymbol{aequatur}$, $\boldsymbol{aequalis}$, $\boldsymbol{aequalia}$. Por ejemplo, la ecuación $x^3 - x^2 + x - 1 = 1$, en la notación de Cardano era escrita de la siguiente manera: $1\ \boldsymbol{cubum}\ \boldsymbol{m}: 1\ \boldsymbol{qdrato}\ \boldsymbol{p}: 1\ \boldsymbol{positione}\ \boldsymbol{m}: 1\boldsymbol{aequalia}\ 1$ Los signos $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{m}$ ($+$ y $-$ respectivamente) fueron las abreviaciones de las palabras $\boldsymbol{plus}$ y $\boldsymbol{minus}$ que los algebristas medievales previos a Cardano desarrollaron y que prevalecieron hasta finales del Renacimiento.		
	Interpretación Funcional		
	Puesto que en el texto de Cardano se puede identificar que los participantes simbólicos aparecen de igual manera que los no-simbólicos, así como que los no-simbólicos aluden a los participantes que son manipulados por las operaciones sobre las igualdades, además de que hay una predominancia de los procesos relacionales (sobre los cuales se ve un equilibrio también entre los simbólicos y los retóricos) puede interpretarse que el significado experiencial del discurso está enfocado en el tratamiento explícito de ecuaciones. Más aún, un hecho muy importante es que en el texto de Cardano por primera vez se presentan cláusulas totalmente simbólicas. Al igual que en el caso de Diofanto, los procesos relacionales son los que permiten la *adopción semiótica*.		Al igual que Diofanto, el recurso textual al que hace uso el simbolismo de Cardano es al de simplificación tipográfica empleando abreviaciones de palabras tanto para los símbolos que definen las potencias algebraicas, como de las operaciones aritméticas. Por otro lado, puede verse una innovación en el discurso de Cardano, pues el significado Textual también permite ahora darle un estatus más visual a la ecuación como lo deja ver la siguiente imagen.

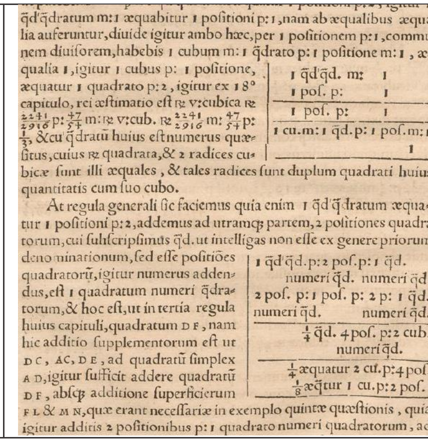
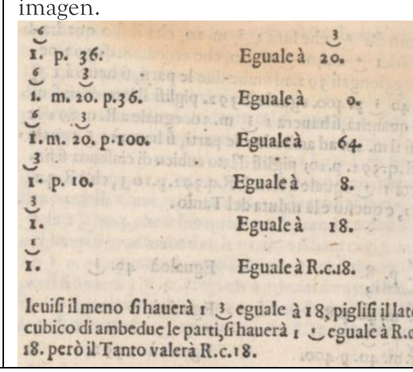
			 q̃d'q̃dratum m:1 æquabitur 1 poſitioni p:1, nam ab æqualibus æqualia auferuntur, diuide igitur ambo hæc, per 1 poſitionem p:1, communem diuiſorem, habebis 1 cubum m:1 q̃drato p:1 poſitione m:1, æqualia 1, igitur 1 cubus p: 1 poſitione, æquatur 1 quadrato p:2, igitur ex 18° capitulo, rei æſtimatio eſt ℞ v:cubica ℞ $\frac{2241}{2916}$ p: $\frac{47}{54}$ m: ℞ v:cub. ℞ $\frac{2241}{2916}$ m: $\frac{47}{54}$ p: $\frac{1}{3}$, & cu q̃dratū huius eſt numerus quæſitus, cuius ℞ quadrata, & 2 radices cubicæ ſunt illi æquales, & tales radices ſunt duplum quadrati huius quantitatis cum ſuo cubo. 1 q̃d'q̃d. m: 1 1 poſ. p: 1 1 poſ. p: 1 1 cu. m: 1 q̃d. p: 1 poſ. m: 1 1 At regula generali ſic faciemus quia enim 1 q̃d'q̃dratum æquatur 1 poſitioni p:2, addemus ad utramq; partem, 2 poſitiones quadratorum, cui ſubſcripſimus q̃d. ut intelligas non eſſe ex genere priorum denominationum, ſed eſſe poſitiões quadratorū, igitur numerus addendus, eſt 1 quadratum numeri q̃dratorum, & hoc eſt, ut in tertia regula huius capituli, quadratum D F, nam hic additio ſupplementorum eſt ut D C, A C, D E, ad quadratū ſimplex A D, igitur ſufficit addere quadratū D F, abſq; additione ſuperficierum F L & M N, quæ erant neceſſariæ in exemplo quintæ quæſtionis, quia igitur additis 2 poſitionibus p:1 quadrato numeri quadratorum, ad 1 q̃d'q̃d. p:2 poſ. p:1 q̃d. numeri q̃d. numeri q̃d. 2 poſ. p:1 poſ. p: 2 p: 1 q̃d. numeri q̃d. numeri q̃d. $\frac{1}{4}$ q̃d. 4 poſ. p:2 cub. numeri q̃d. $\frac{1}{4}$ æquatur 2 cu. p:4 poſ. $\frac{1}{8}$ æq̃tur 1 cu. p:2 poſ.

Tabla 53. Interpretación funcional de la gramática del texto de Cardano

12.4.5 Texto de Bombelli

Recurso semiótico	Met. Experiencial TRANSITIVIDAD	Met. Lógica TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN	Met. Textual TEMA-REMA
Lenguaje Natural	• Participantes: Los participantes retóricos suelen aludir a los *identificados* que será relacionados con las expresiones simbólicas, así como también aludir a los entes con los que se transforman las ecuaciones. Por ejemplo: en las cláusulas 18 y 19 "*Restaurando **el negativo***", "*se tendrá* $1\overset{3}{\smile}\ Eguale\ a$ 18". Se puede notar que en el caso del discurso de Bombelli, solo tres Participantes son retóricos. • Procesos: En este caso, se identifica presencia de Procesos Existenciales, así como mayor predominancia de Procesos Relacionales y presencia considerable de Procesos Materiales, sin embargo, dentro de los procesos relacionales la minoría son retóricos. • Circunstancias: Las circunstancias que se emplean son del tipo: Alcance: Espacio, Atributo, Beneficiario, Extensión: Comitativo	• TAXIS: En el caso del texto de Bombelli se recurre más a relaciones Hipotácticas. • R. LÓG-SEM: Se presentan principalmente relaciones semánticas de EXPANSIÓN del tipo Elaboración, Extensión y Realce. Siendo más predominante este último tipo.	Hay equilibrio en los Temas Experienciales involucrando tanto Participantes como Procesos.
	Interpretación Funcional		
	Puesto que los participantes retóricos suelen fungir por un lado como los *identificados*, al igual que en el discurso de Diofanto y Cardano, estos permiten la *adopción semiótica* (O'Halloran, 2005) de la misma manera. Por otro lado, su otra función es destacar sobre qué participantes se está operando, o bien con qué participantes se transforman las ecuaciones. El hecho de que existan mayormente procesos relacionales indica que el significado experiencial trata sobre el tratamiento de las ecuaciones. Las circunstancias	En el texto de Bombelli no hay cláusulas que no estén relacionadas con alguna otra. Todas las cláusulas presentan relaciones de dependencia con otras. Solo en el caso de las cláusulas 12 a la 17 se ven estas como totalmente aisladas cada una respecto de la otra, sin embargo, esto parece funcionar más en términos Textuales a nivel del Discurso más que gramaticalmente. De este modo se logra identificar que los complejos clausulares son amplios.	Puesto que hay un equilibrio Temas Experinciales con Participantes y Procesos, el tipo de discurso es similar al Diofantino y de Cardano, con la particularidad que en el caso de Bombelli, los Participantes de los Temas no son retóricos. Por lo tanto, se alude explícita y específicamente a polinomios. De manera que el mensaje

	empleadas refuerzan esta afirmación pues aluden a cómo, por quién, a quién, por medio de qué se está actuando sobre los participantes.	Por ejemplo, véase el primer complejo clausular compuesto de las cláusulas 1 a la 7: α˜1 Iguálese $1\overset{6}{\smile} p36$ a $20\overset{3}{\smile}$; 2 ^Y restáurese $20\overset{3}{\smile}$ por parte. β˜α Lo que dará $1\overset{6}{\smile} p36\ m\ 20\overset{3}{\smile} p36\ \ eguale$ β˜α por lo que la mitad del cubo, [[que será]] β˜1 da $1\overset{3}{\smile} m10$, 2˜1 del cual su cuadrado es $1\overset{6}{\smile} m20\overset{3}{\smile} p100$, 2 lo cual supera al 36 por 64. Por lo tanto, casi la totalidad de la organización lógica del texto corresponde con significados complejamente dependientes. Las relaciones Lógico-Semánticas se encargan de indicar, enfatizar y extender las causas y efectos presentes en el texto.	es la ecuación y su manipulación para determinar su solución.
Simbolismo	• Participantes: Como en el texto de Cardano, los participantes simbólicos en Bombelli, corresponden en ocasiones a ecuaciones, o bien a polinomios con los que se están transformando las ecuaciones. A diferencia del texto de Cardano, en el texto de Bombelli, la mayor parte de los participantes son ecuaciones. • Procesos: Al igual que con Cardano, aquí se muestran procesos simbólicos tanto para las operaciones aritméticas y de la igualdad en el contexto de la igualdad de polinomios simbólicos. Es decir, en una ecuación. La notación de Bombelli, es muy cercana a la forma en la que actualmente se usa el simbolismo, pues el proceso de transformación de las ecuaciones es muy fácil de seguir visualmente con su simbolismo. La ecuación $1\overset{6}{\smile} m20\overset{3}{\smile} p36\ Eguale\ a\ 0$, se traduce anacrónicamente como $x^6 - 20x^3 + 36 = 0$. Las potencias $x, x^2, x^3, \ldots$ para Bombelli son $1\overset{1}{\smile}, 1\overset{2}{\smile}, 1\overset{3}{\smile}, \ldots$. Los signos para la	No hay complejos clausulares. A pesar de que se presentan aisladas las cláusulas 12 a la 17, estas parecen tener más una función Textual a nivel del Discurso.	En el texto de Bombelli se identifica que los Temas Experienciales son predominantemente Participantes Simbólicos, por lo tanto, como se mencionó, el mensaje del texto es la ecuación, a través de la manipulación de los polinomios involucrados, para determinar la solución.

	suma, resta e igualdad son las abreviaturas de las mismas palabras que las de Cardano, solo que en italiano. La diferencia con nuestro simbolismo reside en su estatus ontológico de número (Klein, 1968).		
	Interpretación Funcional		
	Puede interpretarse que el significado experiencial del discurso está enfocado en el tratamiento explícito de ecuaciones, puesto que la mayor parte de los Participantes son Simbólicos, además de que los Procesos Relacionales y Materiales aluden a la igualdad y a las operaciones sobre las igualdades respectivamente.		Al igual que Diofanto y Cardano, el recurso textual al que hace uso el simbolismo de Bombelli es al de simplificación tipográfica empleando abreviaciones de palabras tanto para los símbolos que definen las potencias algebraicas, como de las operaciones aritméticas. Bombelli da muestra en su texto que la ecuación simbólica ya tiene un estatus casi simbólico por completo, debido a las abreviaturas que usa. Es tal el estatus de la ecuación como un objeto visual que al igual que Cardano, Bombelli incrusta las ecuaciones en el discurso, incluso ilustrando todas las ecuaciones que fueron descritas en el texto previo como se puede ver en la siguiente imagen.  1. p. 36. Eguale à 20. 1. m. 20. p. 36. Eguale à 0. 1. m. 20. p. 100. Eguale à 64. 1. p. 10. Eguale à 8. 1. Eguale à 18. 1. Eguale à R.c.18. leuisi il meno si hauerà 1 eguale à 18, piglisi il lato cubico di ambedue le parti, si hauerà 1 eguale à R.c. 18. però il Tanto valerà R.c.18.

			Por lo tanto, tanto como en Cardano en Bombelli las ecuaciones empiezan a cumplir una función Textual a nivel del discurso en tanto se muestran por separado, incluso como si fuese una imagen incrustada en el discurso.

Tabla 54. Interpretación funcional de la gramática del texto de Bombelli

12.4.6 Texto de Buteo

Recurso semiótico	Met. Experiencial TRANSITIVIDAD	Met. Lógica TAXIS-EXPANSIÓN-PROYECCIÓN	Met. Textual TEMA-REMA
Lenguaje Natural	• Participantes: En el texto de Buteo los Participantes Retóricos explícitamente corresponden con los números que se desean determinar y grupos nominales bajo el título de "resultados" o "residuos", así como a las ecuaciones mismas. Por ejemplo, en la cláusula 9: "*Con estas ecuaciones se obtendrán **la primera, la segunda y la tercera** [[como se muestra.]]*" y en la cláusula 16: "*Retire* ^*USTED* ***la primera***, ^DE $3A, 12B, 3C[96$"; o bien en la cláusula 27: "*el **residuo** es [[* $150C[750$ *]]*". • Procesos: En este caso, se identifica presencia de Procesos Existenciales, como en el caso de Bombelli, así como mayor predominancia de Procesos Relacionales y presencia considerable de Procesos Materiales. • Circunstancias: Se identifican Circunstancias del tipo: Locación: Tiempo, Manera: Medio, Agente, Causa: Razón y Manera: Grado.	• TAXIS: En el caso del texto de Buteo se recurre más a relaciones Paratácticas. • R. LÓG-SEM: Se presentan principalmente relaciones semánticas de EXPANSIÓN del tipo Elaboración, Extensión y Realce y de PROYECCCIÓN del tipo Idea.	Se identifica que los Temas Experienciales involucran más Participantes, aunque también se recurre en gran medida a Procesos. La cantidad de Participantes Retóricos representan casi la misma cantidad que los Simbólicos.
	Interpretación Funcional		
	Solo al principio del texto de Buteo, los Participantes Retóricos fungen como los *identificados*, al igual que en el discurso de Diofanto, Cardano y Bombelli para permitir la *adopción semiótica* (O'Halloran, 2005), puesto que son los números que se desean determinar. En el resto del texto los participantes retóricos son las ecuaciones, o bien, los productos de las operaciones con las ecuaciones como "el resultado". Los recursos gramaticales de Buteo son muy similares a los del texto de al-Khwârizmî, puesto que predominan los	Dado que se presentan principalmente relaciones paratácticas, los significados interclausulares son independientes. En donde en una cláusula se presenta un significado y es extendido con el apoyo de otra cláusula por medio de la Extensión y el Realce. En este sentido, su estructura lógica es muy cercana a la de al-Khwârizmî. Tal es el caso que, incluso se identifica el mismo patrón en el que los complejos clausulares son	El tipo de discurso es similar al de al-Khwârizmî, con la diferencia de que Buteo incluye sistemáticamente ecuaciones simbólicas como Participantes. Se alude, por lo tanto, explícita y específicamente a polinomios y elementos de las ecuaciones y lo que se hace sobre estos. De manera que el mensaje es la

	Materiales y los Relacionales Identificativos. Por lo tanto, en el texto de Buteo, el significado experiencial está centrado en describir el proceso para operar con las ecuaciones y el resultado de cada operación. Los procesos relacionales identificativos suelen estar asociados no al establecimiento de igualdades entre polinomios, sino a asociar las ecuaciones como resultados de la operación. Las circunstancias refuerzan estos significados pues aluden como en el caso de al-Khwârizmî y Bombelli a cómo, por quién, a quién, por medio de qué se está actuando sobre los participantes, solo que en este caso los participantes generalmente no son polinomios, sino ecuaciones. Esto parece estar asociado al tipo de situación, pues se encuentra resolviendo un sistema de ecuaciones.	usualmente conformados por dos cláusulas, en la que en la principal se indica una acción y en la secundaria el producto. Por ejemplo, las cláusulas 14 y 15: 1 **Retire ^USTED la primera ^DE [[$3A, 12B, 3C[96$]]** 2 **el residuo es [[$11B, 2C[54.$]]** En términos de lo que se está organizando lógicamente en el texto, se muestra una acción sobre los participantes y consecuentemente la consecuencia o producto de dicha acción.	ecuación y su manipulación para determinar su solución.
Simbolismo	• <u>Participantes:</u> Los participantes simbólicos, en su mayoría corresponden a ecuaciones. Esto implica que como en el texto de Cardano, la ecuación funciona como un grupo nominal, dando lugar a un significado metafórico. En general, el texto de Buteo, en estos términos es el más metafórico que incluso los de Viète y Descartes, puesto que se identifican numerosas metáforas semióticas. De hecho las cláusulas 15-17, 19-28 y 32 presentan esta característica. Por ejemplo: en la 17 se tiene "*el residuo es [[* $\mathbf{11B, 2C[54.}$ *]]*". De esta manera, el estatus funcional que le corresponde a este elemento en su respectivo recurso semiótico cambia. En este caso en el lenguaje natural, se hace alusión a la ecuación como si fuera un grupo nominal "el residuo", mientras que en el simbolismo correspondería a una cláusula. A diferencia de Bombelli, los participantes simbólicos se encuentran en una cantidad similar a los retóricos. Esto puede deberse, como ya se mencionó al tipo de problema.	No hay complejos clausulares simbólicos. Al igual que en los textos de Cardano y Bombelli, en el texto de Buteo aparece un conjunto de tres ecuaciones juntas, pero no articuladas con el resto del texto, sino para más bien como para ilustrar las ecuaciones y las transformadas. Por lo tanto, se interpreta igual que la función es más Textual a nivel del Discurso.	Permanece la característica que el recurso textual al que hace uso el simbolismo de Buteo es al de simplificación tipográfica. Así como que hay más Participantes como Temas Experienciales.

	• <u>Procesos:</u> Heeffer (2008b, 2010b) señala que a partir de Buteo se constituye la ecuación simbólica, pues sus ecuaciones a diferencia de sus predecesores emplean símbolos tanto para las operaciones como para la igualdad. • <u>Circunstancias:</u> No se encuentran circunstancias simbólicas. La notación de Buteo es muy cercana a la forma en la que actualmente se usa el simbolismo para un sistema de ecuaciones, puesto que se designa a cada incógnita con una letra diferente—el primero en hacer esta innovación fue Michael Stifel (Heeffer, 201b)—. Es por eso por lo que, al igual que Bombelli es posible leer muy bien las ecuaciones. En el simbolismo de Buteo la ecuación $3A, B, C[42$, se puede reescribir en términos actuales como $3x + y + z = 42$. Los signos de suma son representados por la coma ",", mientras que el signo igual lo representa con un corchete "[". Es simbólica la ecuación porque no emplea ningún tipo de símbolo como abreviación de palabras como sí lo hacían sus predecesores. Sin embargo, al igual que los otros ejemplos de notación simbólica previa a Viète, la diferencia con nuestro simbolismo reside en el estatus ontológico de número (Klein, 1968).		
	Interpretación Funcional		
	Puesto que, tanto, las características de los Participantes siguen las mismas funciones que las de los ejemplos previos, considerando, también, que los significados experienciales tienden a resaltar el proceso de transformación y resolución de las ecuaciones.		Los significados textuales en el discurso algebraico de Buteo parecen funcionar en los mismos términos que Bombelli y Cardano, reslatando que el mensaje es la ecuación y su transformación. Buteo da muestra en su texto que la ecuación simbólica ya tiene un estatus simbólico por completo. Por lo tanto, el grupo de ecuaciones incrustadas a un lado del texto cumple con la función de un objeto visual al igual

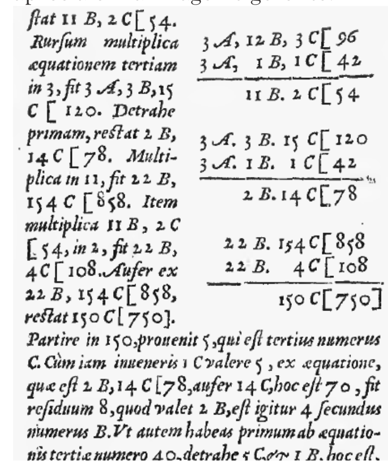
			que Cardano y Bombelli como se aprecia en la imagen siguiente.  ſtat 11 B, 2 C[54. Rurſum multiplica æquationem tertiam in 3, fit 3 A, 3 B, 15 C[120. Detrahe primam, reſtat 2 B, 14 C[78. Multiplica in 11, fit 22 B, 154 C[858. Item multiplica 11 B, 2 C[54, in 2, fit 22 B, 4 C[108. Aufer ex 22 B, 154 C[858, reſtat 150 C[750]. 3 A, 12 B, 3 C[96 3 A, 1 B, 1 C[42 11 B. 2 C[54 3 A. 3 B. 15 C[120 3 A. 1 B. 1 C[42 2 B. 14 C[78 22 B. 154 C[858 22 B. 4 C[108 150 C[750] Partire in 150, prouenit 5, qui eſt tertius numerus C. Cùm iam inueneris 1 C valere 5, ex æquatione, quæ eſt 2 B, 14 C[78, aufer 14 C, hoc eſt 70, fit reſiduum 8, quod valet 2 B, eſt igitur 4 ſecundus numerus B. Vt autem habeas primum ab æquationis tertiæ numero 40, detrahe 5 C & 1 B, hoc eſt,

Tabla 55. Interpretación funcional de la gramática del texto de Buteo

12.5 Análisis de la Actividad Algebraica General

12.5.1 Problema Babilonio

"La superficie y la línea cuadrada que he acumulado: 3/4."

1 la proyección que usted puso. La mitad de 1 se rompe, 1/2 y 1/2 se hace espacio [un rectángulo, aquí un cuadrado], 1/4 a 3/4 se añade: 1, hace 1 equilátero. 1: 1/2 la línea cuadrada. (Høyrup, 1986, p. 450).

12.5.1.1 Análisis Descriptivo

Este ejemplo muestra un método para la resolución de un problema que en términos anacrónicos sería de la forma $x^2 + x = a$; es decir, que consiste en la suma de dos cantidades, una cuadrática (la superficie) y una lineal (línea cuadrada) que en conjunto suman $3/4$.

De acuerdo con los trabajos de Høyrup (1986, 2002) y Radford (1996, 2002) este ejemplo se enmarca en lo que se denomina "geometría ingenua" en la que, a partir de configuraciones y reconfiguraciones figurales se justifica el método de resolución. (Véase Figura 86).

Para resolverlo el método consiste en el siguiente, donde se usará la notación actual para facilitar la lectura del proceso. Por tanto, la superficie será x^2 y la línea cuadrada x.

1. La proyección 1 representa la línea cuadrada y que en términos visuales se corresponde con un rectángulo de área x.
2. Posteriormente se divide la proyección 1 en dos (o sea el rectángulo anterior), obteniéndose 1/2 y 1/2 (dos rectángulos de área $\frac{1}{2}x$, que en particular ambos rectángulos cumplen ser dos cuadrados).
3. Después se separan esos dos rectángulos, lo que se menciona como "se hace espacio" para comenzar a formar otros cuadrado.
4. Se agrega un rectángulo de área $\frac{1}{4}$ (también un cuadrado) para completar un cuadrado. Con este paso se construye un cuadrado en el que se encuentra, en términos de superficie, la misma área total inicial, además de un cuadrado de área $\frac{1}{4}$.
5. Finalmente, para determinar la línea cuadrada (x), se agrega $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$, formando un equilátero (cuadrado) de lado 1. Por lo tanto la línea cuadrada tendría que ser $\frac{1}{2}$ para cumplir con las operaciones.

12.5.1.2 Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	Descripción
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	Se describe un procedimiento estandarizado para resolver un problema en el que se manipulan las cantidades involucradas, muy cercanamente al método algebraico actual de completar el cuadrado. Cada cantidad involucrada en el problema es imaginada como una figura geométrica que se va manipulando hasta construir un cuadrado que permita determinar la longitud del lado de interés.
¿Para qué lo hace?	La intención en este paradigma es establecer un método para la resolución de problemas del tipo $x^2 + x = a$.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	Un *razonamiento figural* que deja ver una *aprensión operativa* en el sentido de Duval (1998), puesto que el procedimiento responde a la manipulación de figuras geométricas de manera que se modifican éstas para definir nuevas configuraciones, añadiendo y manipulando las distintas partes de la configuración geométrica como un rompecabezas.
¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	La noción de superficie, conservación de área de una figura geométrica, las operaciones aritméticas y el binomio cuadrado.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	No hay uso de simbolismo

Tabla 56. Análisis cualitativo del Problema Babilonio

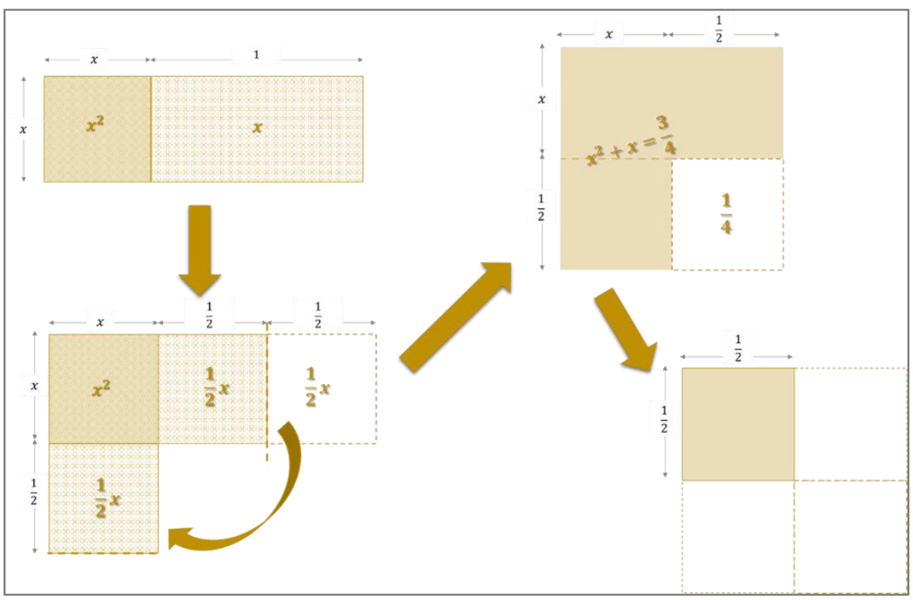


Figura 86. Ejemplo de método de completar el cuadrado babilonio

12.5.2 Problema de Diofanto

II.8. Dividir un cuadrado en dos cuadrados:

Propongo dividir el 16 en dos cuadrados. Puse que el primer número es δ^{υ}, entonces el otro es $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$. Así que es necesario que $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$ sea un cuadrado. Toma el cuadrado de un múltiplo aleatorio de ς del cual la raíz cuadrada de 16 sea sustraída. Tomemos por ejemplo $2\varsigma - 4\dot{\mu}$ o, cuyo cuadrado es igual a $4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$. Ponemos esto igual a $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$. Si sumamos los números faltantes en ambos lados y si restamos iguales de iguales, encontramos que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς y $\varsigma = \frac{16}{5}$. De lo cual se deduce que uno de los números es igual a $\frac{256}{25}$ y el otro a $\frac{144}{25}$. Por lo que la suma de los números es $\frac{400}{25}$.

12.5.2.1 Análisis Descriptivo

Este problema de Diofanto consiste en la ejemplificación del método para resolver un problema que involucra la adición de dos números cuadrados cuya suma es una cantidad específica (16 en este caso). En términos anacrónicos, sería de la forma $a = b^2 + c^2$. Este tipo de problema es clásico en los textos algebraicos, al menos desde Diofanto hasta el propio Viète. El método que describe Diofanto se basa en trabajar únicamente con una incógnita.

El procedimiento consiste en los siguientes pasos:

1. Designar de manera simbólica las dos cantidades. La primera la designa con el símbolo δ^{υ}, símbolo correspondiente con la especie de número cuadrado que actualmente se escribiría como x^2. De manera que, puesto que ambos suman 16, entonces el otro número tendrá que ser $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$ ($16 - x^2$, en términos actuales), donde el símbolo $\dot{\mu}$, representa las unidades que no están asociadas con la incógnita, es decir, un término independiente.
2. Una vez designados ambos números desconocidos por medio de representantes simbólicos, Diofanto hace uso de una estrategia sumamente sofisticada, por medio de un razonamiento general, en el que asocia el hecho de que dado que la cantidad $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$ cumple con la propiedad de ser un cuadrado, entonces puede igualarse con el cuadrado de una diferencia compuesta de cualquier múltiplo de la cantidad buscada junto con la raíz cuadrada de 16. Por ello, elige la diferencia $2\varsigma - 4\dot{\mu}$ ($2x - 4$), con la cual logrará eliminar el término independiente 16 y así dejar todo en términos de un cuadrado y el *arithmos*.
3. Se igualan entonces las expresiones $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$ y $4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$ ($4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$ en términos actuales que es el trinomio resultante de elevar al cuadrado $2\varsigma - 4\dot{\mu}$).
4. Se procede a operar con ambos polinomios sumando y restando las cantidades que permitirán dejar e igualdad la cantidad cuadrada $5\delta^{\upsilon}$ ($5x^2$) con 16ς ($16x$).

5. Finalmente, Diofanto muestra que $\varsigma = \frac{16}{5}$ $(x = \frac{16}{5})$, igualdad sobre la cual no justifica o menciona por qué se da. Considerando que el *arithmos* era una cantidad compuesta de unidades (Klein, 1968), esta no podía ser cero, es probablemente por ello por lo que seguramente Diofanto dividió por un *arithmos* ambas cantidades obteniendo la igualdad.
6. El número encontrado (*arithmos*) era la cantidad que cumplía la relación $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon} = 4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$ (utilizando la estructura actual de la igualdad), es decir, que cumplía con formar el cuadrado $16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}$. En este sentido, $\frac{16}{5}$ no era la respuesta al problema, sino su cuadrado, mientras que el otro número se calculaba restándose éste a 16. Obteniendo los números finales $a = \frac{256}{25}$ y $b = \frac{144}{25}$.

12.5.2.2 Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	Descripción
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	Se describe un procedimiento para resolver un problema específico en el que se emplea un simbolismo que permite distinguir tipos de cantidades para ser manipuladas y formar expresiones para encontrar equivalencias con la finalidad de determinar una cantidad desconocida llamada *arithmos*. Se denotan desde el principio los números de interés con un simbolismo que corresponde con la naturaleza o tipo de cantidad (especie) que compone a cada número. Posteriormente se establecen estrategias aritméticas, tales como la de corresponder la expresión de un múltiplo aleatorio del *arithmos* con la expresión del problema. Esta estrategia parece relacionarse con una forma paramétrica de pensamiento en la que se vincula una expresión, aunque específica como $2\varsigma - 4\dot{\mu}$, pero que proviene de una consideración general en la que éste es un caso específico, pues se menciona "*Toma el cuadrado de un múltiplo aleatorio*". Con base en esta estrategia es posible encontrar equivalencias en las que el *arithmos*, o incógnita en términos actuales, sea relacionado con los números declarados al inicio y así resolver el problema mediante el método general para resolver igualdades que es plasmado por Diofanto de la siguiente manera: "Si las mismas potencias de la incógnita se dan en ambos lados pero con diferentes coeficientes debemos tomar como de igual a igual hasta que tengamos una sola expresión igual a otra. Si hay en ambos lados, o en ambos lados, términos con coeficientes negativos, los defectos deben ser añadidos por ambos lados, hasta que haya los mismos de ambos lados con coeficientes positivos, cuando debemos tomar como de antes. Debemos inventar siempre, si posible, reducir nuestras ecuaciones para que puedan contener una un solo término igualado a otro" (Diofanto, citado en Heath, 1885, p. 29).
¿Para qué se hace?	La intención es establecer un método para la resolución de problemas del tipo $a = b^2 + c^2$.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	La justificación de este método específico reside en *las propiedades aritméticas de un binomio*, es decir, en conocer los términos que lo componen tras realizar la operación cuadrado de un binomio. Por otro lado, como Klein (1968) muestra muy convincentemente, la base del proceso descrito general con las igualdades descrito por Diofanto es sobre la especie y no sobre las cantidades. Esto quiere decir que el método es la designación de especies de números y su adición o sustracción de acuerdo con las mismas. Esto recae en

	consideraciones ontológicas sobre la noción de número visto como una colección de multitudes. Por lo tanto, se recurre a la clasificación de cada tipo de número dentro de naturalezas específicas. Nótese que la operación “$2\varsigma - 4\dot{\mu}$ o, cuyo cuadrado es igual a $4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma$”, los símbolos no se mantienen, pues para el cuadrado de 2ς se le asigna $4\delta^{\upsilon}$.
¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	Una noción generalizada del cuadrado de un binomio, la noción de especies de números y de la equivalencia entre expresiones.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	El simbolismo tiene la función de designación de los tipos de cantidades para operar aritméticamente sobre las del mismo tipo. Para ello su forma visible cumple con ser una abreviación de las palabras griegas asociadas a cada tipo de cantidad. En este sentido sirve para sintetizar en el discurso las partes más relevantes para la solución del problema, pues representan tipos de números, es decir, especies.

Tabla 57. Análisis cualitativo del Problema de Diofanto

12.5.3 Problema de al-Khwârizmî

He dividido diez en dos partes; luego he multiplicado cada parte por sí misma y sumadas resultan cincuenta y ocho dirhams. Haces de una de las partes cosa y la otra diez menos la cosa. Multiplica luego diez menos cosa por sí mismo, resulta cien y un tesoro menos veinte cosas. Multiplica luego cosa por cosa, resulta tesoro. Suma luego ambos, resulta la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams. *Restaura* luego esos cien y dos tesoros de las veinte cosas sustraídas y súmalas a los cincuenta y ocho, resulta cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dirhams y veinte cosas. *Reduce* luego eso a un solo tesoro tomando la mitad del conjunto, resulta cincuenta dirhams y un tesoro igual a veintinueve dirhams y diez cosas. *Opón* luego con ése el otro, quitando veintinueve de cincuenta, queda veintiún y tesoro igual a diez cosas. Entonces halla la mitad de las raíces, resulta cinco; multiplica por sí mismo, resulta veinticinco. Quita luego de esto el veintiuno conectado con el tesoro, queda cuatro. Extrae luego su raíz, es dos. Quítala luego de la mitad de las raíces, que es cinco, queda tres. Es una de las dos partes, y la otra es siete. Este problema se refiere a uno de los seis tipos, que es “tesoro y números igual a raíces”. (p. 28-29)

12.5.3.1 Análisis Descriptivo

Este problema de al-Khwârizmî consiste en la ejemplificación del método para resolver un problema del mismo tipo que el del ejemplo de Diofanto, es decir, de la adición de dos números cuadrados cuya suma es una cantidad específica (58 en este caso). Desde la estructura de al-Khwârizmî sería $Tesoro + número = raíz$, es una combinación entre partes del método Diofantino y Babilionio. Al igual que Diofanto se trabaja solo con una incógnita. El tratado de al-Khwârizmî consistía, como el mismo señala, en un compendio de las técnicas del *aljabar* que se le había sido solicitado por el Califa.

El procedimiento es el siguiente:

1. Designar a una de las cantidades como $cosa$ (incógnita), lo cual conlleva a determinar la expresión de la otra cantidad. En este caso, puesto que la suma de los dos números es diez, uno de ellos será $cosa$ (x) y la otra $diez\ menos\ cosa$ $(10 - x)$.
2. Emplear las expresiones anteriores para conformar la relación que involucra sus cuadrados. Esto es la expresión "he multiplicado cada parte por sí misma y sumadas resultan cincuenta y ocho dirhams" (dirhams corresponde al término independiente). Por lo tanto, se multiplican ambas expresiones: $cosa$ por $cosa$ y $diez\ menos\ cosa$ por $diez\ menos\ cosa$, obteniendo así: $tesoro$ (x^2) y $100\ más\ tesoro\ menos\ 20\ cosa$ $(100 + t - 20c)$. Ambas juntas cumplen que su suma son 58 dirhams. Por lo tanto al sumar ambas expresiones se tiene lo siguiente: $cien\ y\ dos\ tesoros\ menos\ veinte\ cosas\ igual\ a\ cincuenta\ y\ ocho\ dirhams$ $(100 + 2x - 20c = 58)$.
3. A partir de tener la expresión con la que se intentará resolver el problema, se aplican las operaciones de *al-jabar*, *al-muquabala*, *Radd* y *Ikmâl* o *Takmîl*. Las cuales pueden compararse con las operaciones de operar sobre las especies en el sentido de Diofanto, así como la multiplicación para que el coeficiente del tesoro sea uno. Con esto lo que se busca es reducir la expresión a una forma "normal" que es con la que se cuenta una regla de resolución ya demostrada para encontrar los valores específicos. Estas reglas para las formas "normales" son definidas por el mismo tipo de razonamiento que el expuesto en el problema Babilonio.
   En este caso se suma a ambas expresiones $veinte\ cosa$, dejando $cien\ y\ dos\ tesoros\ igual\ a\ cincuenta\ y\ ocho\ dirhams\ y\ veinte\ cosas$ ($100 + 2t = 58 + 20c$). Posteriormente se dividen las expresiones por 2 para dejar solo un tesoro, resultando $cincuenta\ dirhams\ y\ un\ tesoro\ igual\ a\ veintinueve\ dirhams\ y\ diez\ cosas$ $(100 + 58 + t = 29 + 10c)$.
   Finalmente, se resta 29 a ambas expresiones resultando la expresión $veintiún\ y\ tesoro\ igual\ a\ diez\ cosas$ $(21 + t = 10c)$, la cual coincide con la forma normal "tesoro y números igual a raíces".
4. Puesto que ya se ha dejado la expresión como una forma normal solo falta aplicar la regla para obtener los valores específicos "Entonces halla la mitad de las raíces, resulta cinco; multiplica por sí mismo, resulta veinticinco. Quita luego de esto el veintiuno conectado con el tesoro, queda cuatro. Extrae luego su raíz, es dos. Quítala luego de la mitad de las raíces, que es cinco, queda tres. Es una de las dos partes, y la otra es siete."

12.5.3.2 Análisis cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	Descripción
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	Se describe un procedimiento para resolver un problema específico en el que, a pesar de no contar con un simbolismo se describen en lenguaje natural los distintos tipos de cantidades para ser manipuladas y formar expresiones con la intención de reducir estas expresiones a una forma normal que cuente con una regla predeterminada. El tipo de método general es una combinación entre el método Diofantino relacionado con las especies y el razonamiento figural con el que se justifican las reglas normales.

	Se designan las cantidades para distinguirlas en tanto su naturaleza o especie. Se opera sobre estas para construir una expresión general que será reducida posteriormente con las reglas de *al-jabar*, *al-muquabala*, *Radd* y *Ikmâl* o *Takmîl*, las cuales consisten en reducir los términos semejantes y dejar el término cuadrático con coeficiente uno y acomodar la expresión para que quede de una forma normal sobre la cual se pueda aplicar un algoritmo predeterminado.
¿Para qué lo hace?	La intención es establecer un método para la resolución de problemas que involucren la adición de dos cuadrados igualados a una raíz.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	La primera parte del método coincide con la justificación Diofantina respecto a las operaciones aritméticas y la manipulación de las especies. La parte en la que se aplica la regla de la forma normal, se basa en un razonamiento figural como el mostrado en el problema babilonio.
¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	La noción de superficie, conservación de área de una figura geométrica, la noción de especies de números y la de equivalencia entre expresiones.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	No hay uso de simbolismo. De acuerdo con los estudios de Oaks (2009, 2012), los árabes tenían una tradición oral de aprendizaje que implicó que no le prestaran mucha atención al desarrollo de formas simbólicas de representación en sus textos, pues el aprendizaje era evidenciado con la recitación de la información.

Tabla 58. Análisis cualitativo del Problema de al-Khwârizmî

12.5.4 Problema de Cardano

Encuentra un número que sea igual a su raíz cuadrada más el doble de su raíz cúbica. Dices, entonces, que si tal número es x^6, su raíz cuadrada es necesariamente x^3 y dos veces su raíz cúbica es $2x^2$. Por lo tanto $x^6 = x^3 + 2x^2$. Reduciéndolos en x^2 a potencias inferiores, $x^4 = x + 2$.

(Puse dos veces la raíz del cubo ya que, aunque la regla es general, esto se puede resolver de dos maneras, como se verá). Ahora bien, si $x^4 = x + 2$, $x^4 - 1 = x + 1$. Para los iguales se han restado de los iguales. Divide, por lo tanto, ambos por $x + 1$ como divisor común y tendrás $x^3 - x^2 + x - 1 = 1$, por lo tanto $x^3 + x = x^2 + 2$. Por lo tanto, según el capítulo XVIII, x es igual a $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} + \frac{47}{54}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} - \frac{47}{54}} + \frac{1}{3}$ y la sexta potencia de ésta es el número buscado y es igual a su raíz cuadrada más dos veces su raíz cúbica, y estas raíces son dos veces el cuadrado de esta cantidad más su cubo.

Pero por la regla general trabajaríamos así: Puesto que $x^4 = x + 2$, Añadimos a ambos lados $2bx^2$ que escribimos así para que usted pueda entender que esto no es de la naturaleza de los primeros términos sino es de la naturaleza del coeficiente de x^2. Por lo tanto, el número que debe añadirse es el siguiente cuadrado del coeficiente de x^2, y esto es, como en la tercera regla de esta regla capítulo, el DF cuadrado. Esta adición de los suplementos [es decir, $2bx^2$] es el de DC y DE hasta el cuadrado simple AD. Por lo tanto, basta con añadir el DF cuadrado sin añadir las superficies FL y MN que eran necesarios en el ejemplo del quinto problema. Ya que, por lo tanto, sumando $2b[x^2] + b^2$ a $x + 2$ hace un total de $2b[x^2] + b^2 + x + 2 + b^2$ y esto tiene raíz, debe ser que el cuadrado de la mitad de la cantidad media,

x, es igual al producto de los extremos. Por lo tanto, $\frac{1}{4}x^2 = (2b^3 + 4b)x^2$. Y, habiendo dividido ambos lados por x^2, $\frac{1}{4} = 2b^3 + 4b$. Y $\frac{1}{8} = b^3 + 2b$. Donde b es igual a $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}} + \frac{1}{16}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}} + \frac{1}{16}}$. Dos veces esto, por lo tanto, es el número de cuadrados que hay que añadir a ambos lados y el cuadrado de éste será el número que se sumará a ambos lados y, (...)

(El procedimiento continúa mostrando que la ecuación final a resolver es la siguiente:

$$x^2 + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}} + \frac{1}{16}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}} + \frac{1}{16}} = x\sqrt{\sqrt[3]{19\frac{23}{108} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{19\frac{23}{108} - \frac{1}{2}}} + \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1051}{3456} + \sqrt{\frac{2075}{442.368}}} + \sqrt[3]{\frac{1051}{3456} - \sqrt{\frac{2075}{442.368}}} + \frac{2}{3}} \quad).$$

12.5.4.1 Análisis Descriptivo

Este problema de Cardano consiste en la ejemplificación de un problema particular para el cual muestra dos métodos distintos para resolver una ecuación de grado seis. Con éste muestra dos formas de resolver la ecuación, la primera es reducir la ecuación original a una de grado tres para posteriormente aplicar las reglas para resolver cúbicas y así encontrar los números, mientras que la segunda propuesta es reducir la ecuación original a una de grado cuatro en la que muestra el método desarrollado por su pupilo, como él señala. para la cual ya ha descrito un método general para resolverla. En este sentido, al álgebra de Cardano, así como la mayor parte de los tratados algebraicos que precede a Viète tienen como finalidad reducir las ecuaciones a formas conocidas para aplicarles la regla de resolución al estilo que al-Khwârizmî desarrolló. Este problema consiste en encontrar un número que sea igual a su raíz cuadrada más el doble de su raíz cúbica. El procedimiento es el siguiente:

1. Cardano menciona que si ese número fuera, en términos modernos x^6, entonces su raíz cuadrada sería necesariamente x^3 , mientras que su raíz cuadrada sería respectivamente x^2. De manera que la ecuación que propone resolver es $x^6 = x^3 + 2x^2$.
2. Para el primero procedimiento reescribe la ecuación de la siguiente manera:

Ecuación original	$x^6 = x^3 + 2x^2$
Dividir por x^2 la ecuación	$x^4 = x + 2$
Restar uno a ambos lados	$x^4 - 1 = x + 1$
Dividir la ecuación por $x + 1$	$x^3 - x^2 + x - 1 = 1$
Rescribiendo la ecuación como	$x^3 + x = x^2 + 2$

3. Con esta reducción y forma de la ecuación Cardano menciona aplicar lo expuesto en el capítulo octavo para encontrar la raíz $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} + \frac{47}{54}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} - \frac{47}{54}} + \frac{1}{3}$ cuya sexta potencia sería el número buscado. En este sentido, emplea la misma lógica vista en al-Khwârizmî en la que se determinan reglas generales para distintos casos de formas

normales de las ecuaciones para ser aplicadas una vez que se han reducido las ecuaciones a dichas formas normales.

4. Para el segundo método en el que muestra el procedimiento para resolver las cuárticas, parte de la ecuación reducida $x^4 = x + 2$ y realiza las siguientes operaciones:

- Ecuación de partida

$$x^4 = x + 2$$

- Sumar a ambos lados $2bx^2 + b^2$ para completar un cuadrado correspondiente a x^4

$$x^4 + 2bx^2 + b^2 = x + 2 + 2bx^2 + b^2$$
$$(x^2 + b)^2 = x + 2 + 2bx^2 + b^2 \ (1)$$

- Si el lado derecho fuera un cuadrado perfecto podría sacarse la raíz cuadrada de ambos lados de (1) para así resolver una ecuación cuadrática. Por lo que el siguiente paso es verificar que se cumpla lo siguiente:

Si $2bx^2 + x + (b^2 + 2)$

Entonces debe cumplirse que $2\sqrt{2b}\sqrt{b^2 + 2} = 1$

$$\sqrt{2b(b^2 + 2)} = \frac{1}{2}$$
$$\sqrt{2b^3 + 4b} = \frac{1}{2}$$
$$2b^3 + 4b = \frac{1}{4}$$
$$b^3 + 2b = \frac{1}{8}$$

- Al resolver la ecuación cúbica se obtiene el valor de b

$$b = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}} + \frac{1}{16}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}} + \frac{1}{16}}$$

- Con este valor de b construye la ecuación que al completar el cuadrado y sacar las raíces a ambos lados queda como

$$x^2 + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}} + \frac{1}{16}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}} + \frac{1}{16}}$$
$$= x\sqrt{\sqrt[3]{19\frac{23}{108}} + \frac{1}{2} - \sqrt[3]{19\frac{23}{108}} - \frac{1}{2}}$$
$$+ \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1051}{3456} + \sqrt{\frac{2075}{442.368}}} + \sqrt[3]{\frac{1051}{3456} - \sqrt{\frac{2075}{442.368}}} + \frac{2}{3}}$$

12.5.4.2 Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	Descripción
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	Se describen dos métodos para resolver una misma ecuación particular de grado seis. La intención en el primer método es reducir la ecuación inicial a una ecuación cúbica para aplicar la regla general para resolver una ecuación cúbica de la forma $x^3 + x = x^2 + 2$, mientras que para el segundo método se reduce la ecuación a una de grado cuatro para aplicar también la regla general para resolver una ecuación cuártica de la forma: $x^4 = x + 2$. Una de las consideraciones más importantes respecto al álgebra de Cardano es que propiamente él inicia con la objetivación de la ecuación algebraica, en tanto muestra explícitamente las operaciones que se encuentra haciendo sobre ellas. Por ejemplo, la base de ambos métodos es primero reducir la ecuación a otra de grado menor, para ello divide toda la ecuación por polinomios. Una vez reducida la ecuación a una forma normal, se aplica la regla general para esa forma. Es interesante ver los procedimientos algebraicos tan sofisticados que Cardano usa, a pesar de no poseer la autoría de dichas

	reglas para la cúbica y cuartica. Por ejemplo, para resolver la ecuación de grado cuatro, el método requiere de completar dos cuadrados en ambos lados de la ecuación, sin embargo, para logra eso en el lado derecho de la ecuación, se requiere encontrar un parámetro b que permita completar el cuadrado perfecto, lo cual como se ve en el procedimiento conlleva a su vez resolver una ecuación cúbica. Cardano elabora demostraciones sobre estas reglas, siguiendo el esquema del *razonamiento figural* que se hereda desde las culturas babilónicas. Además, muestra un total dominio y entendimiento de estas reglas.
¿Para qué lo hace?	La intención es demostrar un método para la resolución de problemas que involucren una ecuación de grado seis.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	La justificación epistémica en Cardano corresponde tanto a un razonamiento aritmético generalizado como a uno figural, en tanto requiere de este último para definir reglas generales para resolver cada tipo de ecuación, así como de las reglas aritméticas para justificar los procedimientos de reducción de ecuaciones. En este sentido, muestra una cercanía con la forma en la que al-Khwârizmî hace álgebra, solo que Cardano cuenta con la diferencia de contar con un simbolismo que le permite objetivar la ecuación en su discurso.
¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	Una noción generalizada sobre las propiedades aritméticas que cumplen los polinomios en términos cercanos a lo paramétrico, la noción de especies de números y la de ecuación.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	El simbolismo tiene la función de designación de los tipos de cantidades para operar aritméticamente sobre las del mismo tipo. Para ello su forma visible cumple con ser una abreviación de las palabras italianas asociadas a cada tipo de cantidad y operadores aritméticos. En este sentido sirve para sintetizar en el discurso al igual que con Diofanto, sin embargo, una función más importante es objetivar la ecuación en tanto un recurso visual para seguir más fácilmente las operaciones y los procedimientos. Heeffer (2009, 2010b) ha mostrado que Cardano es el primero que opera sobre polinomios simbólicos y que sirvió como punto de partida para la concreción de la ecuación simbólica (ecuación que se compone con signos para las operaciones y la igualdad).

Tabla 59. Análisis cualitativo del Problema de Cardano

12.5.5 Problema de Bombelli

Iguálese $1\overset{6}{\smile}p36$ a $20\overset{3}{\smile}$; restáurese $20\overset{3}{\smile}$ por parte. Lo que dará $1\overset{6}{\smile}p36\ m\ 20\overset{3}{\smile}p36\ \ eguale\ a\ zero$; por lo que la mitad del cubo, que será $m10$, agregándola al lado de $1\overset{6}{\smile}$, que es $1\overset{3}{\smile}$ da $1\overset{3}{\smile}m10$, del cual su cuadrado es $1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100$, lo cual supera al 36 por 64. Pero agregando 64, a cada una de las partes hará $1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100\ eguale\ a\ 64$, por lo que el lado de ambas partes, se tendrá $1\overset{3}{\smile}m10\ eguale\ a\ 8$,

$$\begin{array}{lll}
1\overset{6}{\smile}p36 & Eguale\ a & 20\overset{3}{\smile} \\
1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p36 & Eguale\ a & 0 \\
1\overset{6}{\smile}m20\overset{3}{\smile}p100 & Eguale\ a & 64 \\
1\overset{3}{\smile}m10 & Eguale\ a & 8 \\
1\overset{3}{\smile} & Eguale\ a & 18 \\
1\overset{1}{\smile} & Eguale\ a & R.c.18
\end{array}$$

Restaurando el negativo se tendrá $1\overset{3}{\smile}$ $Eguale\ a\ 18$, por lo que con el lado cúbico de ambas de las partes, se tendrá $1\overset{1}{\smile}$ $Eguale\ a\ R.c.18$. Pero la incógnita valdrá $R.c.18$.

12.5.5.1 Análisis Descriptivo

Este problema de Bombelli consiste en la ejemplificación de la forma para resolver una ecuación particular de grado seis. Se ubica en el capítulo *potenza cuba, eguale à cubi, e numero*, es decir, sexta potencia igual a un cubo y un número. Esta ecuación cumple la propiedad de que puede completarse como un cuadrado en la potencia tres. Es por ello por lo que la ecuación es muy particular. El procedimiento es el siguiente:

1. El primer paso es la construcción del cuadrado juntando los términos $1\overset{6}{\smile}p36$ $(x^6 + 36)$ y $20\overset{3}{\smile}$ $(20x^3)$, lo cual conforma la ecuación $1\overset{6}{\smile}p36\ m\ 20\overset{3}{\smile}p36\ \ eguale\ a\ zero$ $(x^6 - 20x^3 + 36 = 0)$, que carece de el término independiente 100, razón por la cual se agregan 64 a ambos lados de la ecuación. Obteniendo el cuadrado perfecto en $1\overset{3}{\smile}$ (x^3): $1\overset{3}{\smile}m10$ $(x^3 - 10)$.
2. Se calcula la raíz cuadrada de ambos términos de la ecuación consiguiendo la ecuación $1\overset{3}{\smile}m10\ eguale\ a\ 8$ $(x^3 - 10 = 8)$, la cual se resuelve para obtener el valor $R.c.18$ $(\sqrt[3]{18})$.

12.5.5.2 Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	**Descripción**
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	Se muestra un ejemplo para resolver una ecuación de grado seis, la cual puede ser reescrita como un cuadrado perfecto. La intención es reducir la ecuación a una de grado tres que solo contenga la potencia cúbica, sin ninguna otra potencia, permitiendo así despejar directamente la incógnita. Se reduce la ecuación original a una de grado menor. La estrategia es completar un cuadrado perfecto en la potencia cúbica para sacar la raíz cuadrada directa al binomio y así resolver de manera directa la ecuación resultante, la cual no posee otros términos algebraicos.
¿Para qué lo hace?	La intención es demostrar un método para la resolución de problemas que involucren una ecuación de grado seis.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	La justificación epistémica para este problema en Bombelli corresponde tanto a un razonamiento aritmético generalizado que se basa claramente en el razonamiento figural para completar un cuadrado. Es generalizado en tanto, en su discurso no hay rastros de recurrir a lo figural. En este sentido puede verse en Bombelli cómo la herencia de esos métodos fue desplazándose del campo semántico figural hacia el aritmético. No obstante, en el tratado de Bombelli se sigue recurriendo al razonamiento figural para demostrar las reglas generales, por lo tanto, también se conserva la forma en la que es empleada este tipo de razonamiento, así como también el recurrir a la reducción a formas normales.

¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	Una noción generalizada sobre las propiedades aritméticas, la noción de especies de números, la noción de binomio cuadrado y la de ecuación.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	El simbolismo tiene la función de designación de los tipos de cantidades para operar aritméticamente sobre las del mismo tipo. Para ello su forma visible cumple con ser una abreviación de las palabras italianas asociadas a cada tipo de cantidad y operadores aritméticos. En este sentido sirve para sintetizar en el discurso al igual que con Diofanto y Cardano, sin embargo, una función más importante al igual que en este último es objetivar la ecuación en tanto un recurso visual para seguir más fácilmente las operaciones y los procedimientos. Al igual que en el texto de Cardano, el procedimiento completo es "ilustrado" utilizando únicamente ecuaciones, por lo que se incrusta en el texto los pasos de reducción y solución de la ecuación. Nótese que se interrumpe el proceso descrito en prosa.

Tabla 60. Análisis cualitativo del Problema de Bombelli

12.5.6 Problema de Buteo

Encontrar tres números, de los cuales el primero y un tercio de los otros hacen 14. El segundo con el cuarto de los otros 8. El tercero con la quita parte de los demás 8. Pon el primero sea $1A$, el segundo $1B$ y el tercero $1C$. Por lo tanto, $1A, \frac{1}{3}B, \frac{1}{3}C$ [14. También $1B, \frac{1}{4}A, \frac{1}{4}C[8$. Además $1C, \frac{1}{5}A, \frac{1}{5}B[8$.

Con estas ecuaciones se obtendrán la primera, la segunda y la tercera como se muestra.

$$3A, B, C[42\ 1^a$$

$$4B, A, C[32\ 2^a$$

$$5C, A, B[40\ 3^a$$

A partir de estas ecuaciones diferentes, ya sea multiplicando o sumando otras se hace que por medio de la pérdida de la menor con la mayor dejar cantidades solas. De este modo.

Multiplica la segunda ecuación por 3, es $3A, 12B, 3C[96$. Retire la primera, el residuo es $11B, 2C[54$. Por otro lado, se multiplica la tercera ecuación por 3, es $3A, 3B, 15C[120$.

Quitarle la primera, el residuo $2B, 14C[78$. Multiplica por 11, es $22B, 154C[858$.

También multiplica $11B, 2C[54$, por 2, es $22B, 4C[108$. Retire $22B, 154C[858$, el residuo es $150C[750$. Divide por 150, resulta 5, que es el tercer número C. Cuando encontró que $1C$ vale 5, de la ecuación que es $2B, 14C[78$, quitar $14C$ que es 70, da residuo de 8 que vale $2B$, es igual a 4, el segundo número B. Y como se tiene en la tercera ecuación el número 40, quitarle $5C$ y $1B$, que es 29 su residuo 11, número A. Así que hay tres números $11.4.5$ que fueron encontrados.

12.5.6.1 Análisis Descriptivo

Este problema de Buteo consiste en la ejemplificación de la forma para resolver un problema que da lugar a tres ecuaciones, lo cual en términos actuales corresponde a un problema de sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. El tratado en el que se ubica este ejemplo es un libro que predominantemente trata sobre aritmética, su título *Logística…* refuerza esta idea, el cual alude a una palabra griega con la que se distinguía a la aritmética práctica (Klein, 1968).

El procedimiento es el siguiente:

1. Establecer las tres ecuaciones con base en las relaciones establecidas para cada una en el enunciado del problema. Así, se establecen tres ecuaciones:
   a. $1A, \frac{1}{3}B, \frac{1}{3}C\ [14$ $\quad (x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 14)$
   b. $1B, \frac{1}{4}A, \frac{1}{4}C[8$ $\quad (x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = 8)$
   c. $1C, \frac{1}{5}A, \frac{1}{5}B[8$ $\quad (x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = 8)$
2. Se tranforman las ecuaciones originales en otras cuyos coeficientes sean enteros para una más fácil operatividad. Obteniendo las ecuaciones que son nombradas respectivamente como 1^a, 2^a y 3^a para poder referirse a ellas cuando se esté operando:
   a. $3A, B, C[42\ 1^a$ $\quad (3x + y + z = 42)$
   b. $4B, A, C[32\ 2^a$ $\quad (4x + y + z = 32)$
   c. $5C, A, B[40\ 3^a$ $\quad (5x + y + z = 40)$
3. Se multiplica la seguna por 3, dando como resultado $3A, 12B, 3C[96$ $(3x + 12y + 3z = 96)$. A esta se le resta la primera ecuación, obteniendo como resultado la ecuación $11B, 2C[54$ $(11y + 2z = 54)$.
4. Se multiplica la tercera por 3, dando como resultado $3A, 3B, 15C[120$ $(3x + 3y + 15z = 120)$. A esta se le resta también la primera ecuación, obteniendo como resultado la ecuación $2B, 14C[78$ $(2y + 14z = 78)$. Esta última se multiplica por 11 dando la ecuación $22B, 154C[858$ $(22y + 154z = 858)$.
5. Se multiplica $11B, 2C[54$ $(11y + 2z = 54)$ por 2, lo que da $22B, 4C[108$ $(22y + 4z = 108)$. A ésta última se le resta la ecuación $22B, 154C[858$ $(22y + 154z = 858)$, obteniendo la ecuación $150C[750$ $(150z = 750)$. De esta última ecuación se determina que el valor de C es 5.
6. Se emplea la ecuación $2B, 14C[78$ $(2y + 14z = 78)$ para determinar el valor de B sabiendo que C es 5, obteniendo que B es 4.
7. Finalmente, con los valores de B y C, de la tercera ecuación se determina que el valor de A es 11.

12.5.6.2 Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	Descripción
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	En términos generales lo que se está describiendo por Buteo es la operación sobre ecuaciones, para eliminar sistemáticamente incógnitas y así determinar otras ecuaciones más simples que permitan determinar el valor de una de ellas para obtener los valores de las restantes. El método de resolución consiste en primero reescribir las ecuaciones originales en otras cuyos coeficientes sean enteros para facilitar los cálculos y emplear un sistema de designación para cada una de estas con la finalidad de poder referirse a estas mientras se operan—parecería que este último paso debe estar orientado más a la explicación del método y no en sí a la resolución. Posteriormente, se recurre a una aritmética sobre las ecuaciones de manera que multiplicando y dividiendo éstas se puedan construir pares de ellas en las que alguna de las incógnitas posea los mismos coeficientes para eliminarlas a través de la resta de una con otra. Se debe reducir las ecuaciones a una en la que solo se involucre una incógnita para determinar su valor y con él, en otra ecuación en la que se involucre esa misma incógnita y otra de las tres se pueda usar para obtener el valor de una segunda incógnita. Finalmente, con los dos valores obtenidos éstos se usan en una de las ecuaciones originales transformadas para obtener el último valor de la incógnita.
¿Para qué lo hace?	Demostración de la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	El procedimiento que muestra Buteo en este tipo de resolución está basado también en un razonamiento aritmético generalizado, en el que ahora las operaciones aritméticas no son solo aplicadas a números y polinomios, sino a ecuaciones. Es por ello por lo que Heeffer (2009, 2010b) identifica en Buteo la culminación del desarrollo del modelo simbólico de pensamiento, pues los objetos a los que se aplican las operaciones aritméticas son simbólicos. Sin embargo, en términos más concretos, su justificación epistémica parece responder a una generalización del método de falsa posición de las culturas mesopotámicas, lo cual hace que dicha justificación del método sea también un razonamiento aritmético.
¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	Una noción generalizada sobre las propiedades aritméticas aplicadas a las ecuaciones y la de ecuación.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	El simbolismo tiene la función como en Bombelli y Cardano de proveer de un estatus visual a la ecuación para mostrar cómo se puede transformar las ecuaciones. La diferencia está en que la ecuación en Buteo es totalmente simbólica, toda vez que tiene símbolos que no son abreviaciones tanto para las operaciones como para las incógnitas y signo igual. Se muestra más como una herramienta de traducción manipulable, por el tipo de problemas que aborda Buteo en su tratado.

Tabla 61. Análisis cualitativo del Problema de Buteo

12.5.7. Problema 2 de Viète

DOS TRATADOS SOBRE LA COMPRENSIÓN Y LA CONSTITUCIÓN DE LAS ECUACIONES

PRIMER TRATADO: SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LAS ECACIONES

Capítulo XV

Está por mostrarse que cuando, en las ecuaciones, las potencias son sustraídas de términos de afección homogéneos, las raíces son dobles.

Sea la diferencia entre B y A igual a S y sea B mayor que S. O B es más grande [que A] o A es mayor [que B]. En el primer caso $B - A\ aequetur\ S$. Y que $B - S\ es\ A$

En el segundo caso $A - B\ aequetur\ S$. Y $B + S\ es\ A$. En el primer caso, cuando $B - A\ aequetur\ S$, Eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación y

$$\left.\begin{matrix} B\ quadratum \\ -B\ in\ A\ bis \\ +A\ quadrato \end{matrix}\right\} aequabitur\ S\ quadrato$$

Y, habiendo acomodado la ecuación en apropiadamente,

$$\left.\begin{matrix} B\ in\ A\ bis \\ -A\ quadrato \end{matrix}\right\} aequabitur \begin{cases} B\ quadratum \\ -S\ quadrato \end{cases}$$

Como en el segundo caso, cuando $A - B\ aequetur\ S$ eleva al cuadrado ambos lados y $\left.\begin{matrix} B\ quadratum \\ -B\ in\ A\ bis \\ +A\ quadrato \end{matrix}\right\} aequabitur\ S\ quadrato$ y, habiendo acomodado la ecuación apropiadamente, $\left.\begin{matrix} B\ in\ A\ bis \\ -A\ quadrato \end{matrix}\right\} aequabitur \begin{cases} Bq \\ -Sq \end{cases}.$

Por lo tanto la ecuación tiene la misma forma en ambos casos y la raíz es doble. La forma es la de un plano basado en la raíz y la afección por la sustracción del cuadrado.

Que sea B 6, S 4 y A $1N$. Entonces

$$12N - 1Q\ aequetur\ 20, \text{ Y } 1N \text{ es } 6 - 4 \text{ o } 6 + 4.$$

Se conoce que esta ambigüedad existe en todas las situaciones similares. Así si se propone que $\left.\begin{matrix} D\ in\ A \\ -A\ quadrato \end{matrix}\right\} aequabitur\ \{Z\ plano$. D puede decirse que es $B\ bis$ y $Z\ plano$ es $B\ quadratum - S\ quadratum$ [sic]. Más aún, es claro por el sexto teorema del capítulo precedente que cubos sustraídos de sólidos basados en un grado menor son derivados de las ecuaciones de los cuadrados ambiguos y, por los teoremas tercero, sexto y noveno del capítulo XII, que las cuartas potencias sustraídas de planos-planos basados en un grado menor son derivados de lo mismo. Es claro, entonces, que esto puede extenderse a ecuaciones de grado mayor.

12.5.7.1. Análisis Descriptivo

El problema que se encuentra resolviendo Viète está enmarcado en su tratado *Æqvationvm Recognitione Et Emendatione Tractatvs Dvo*, en el cual Viète estudia las propiedades de las ecuaciones tanto sobre la forma con la que son constituidas a partir de su relación con relaciones entre proporciones, así como de su estructura relacionada con sus raíces. En este caso, establece un Teorema en el cual explica que, si se tiene, en términos anacrónicos, una ecuación de la forma $dx - x^2 = z$ (*). Entonces, conociendo el valor de la diferencia entre dos números A y B que Viète denota como S, donde A es la raíz de la ecuación (el valor de x en términos actuales), y el valor B, las dos raíces se obtienen de sustraer y de sumar S a B. El valor B se obtiene de la relación $2B = d$, mientras que el de S de la relación $B^2 - S^2 = z$, ambas relaciones respecto a (*).

Para demostrar este hecho Viète realiza el siguiente procedimiento:

1. Primero declara la propiedad que desea demostrar. En este caso menciona que “Está por mostrarse que cuando, en las ecuaciones, las potencias son sustraídas de términos de afección homogéneos, las raíces son dobles” (Viète, 1983, p. 205).
2. Posteriormente señala y designa los números involucrados en esta propiedad de manera que menciona que se tiene una diferencia que denota como S entre dos números B y A y que B es mayor que S. Esto implica que se tienen dos casos. El primero es que $B > A$ y el segundo $B < A$. Por lo tanto, con base en ambos casos se tendrían dos relaciones: Para el primer caso

Notación original de Viète (1615)	Notación en Viète (1983)
$\boldsymbol{B - A\ aequetur\ S}$	$B - A = S$

Mientras que para el segundo se tendría

Notación original de Viète (1615)	Notación en Viète (1983)
$\boldsymbol{A - B\ aequetur\ S}$	$A - B = S$

3. Partiendo de estas dos relaciones Viète construye la ecuación cuadrática elevando al cuadrado ambas expresiones obteniendo para ambos casos la misma forma. Para el primer caso $B - A\ aequetur\ S$ se obtiene:

Notación original de Viète (1615)	Notación en Viète (1983)
$\boldsymbol{\left.\begin{matrix} B\ quadratum \\ -B\ in\ A\ bis \\ +A\ quadrato \end{matrix}\right\} aequabitur\ S\ quadrato}$	$B^2 - 2BA + A^2 = S^2$
$\boldsymbol{\left.\begin{matrix} B\ in\ A\ bis \\ -A\ quadrato \end{matrix}\right\} aequabitur \left\{\begin{matrix} B\ quadratum \\ -S\ quadrato \end{matrix}\right.}$	$2BA - A^2 = B^2 - S^2$

De manera análoga se obtiene la misma expresión para el segundo caso $\boldsymbol{A - B\ aequetur\ S}$.

Notación original de Viète (1615)	Notación en Viète (1983)
$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{B\ quadratum} \\ \boldsymbol{-B\ in\ A\ bis} \\ \boldsymbol{+A\ quadrato} \end{matrix}\right\} \boldsymbol{aequabitur\ S\ quadrato}$	$B^2 - 2BA + A^2 = S^2$
$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{B\ in\ A\ bis} \\ \boldsymbol{-A\ quadrato} \end{matrix}\right\} \boldsymbol{aequabitur} \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{B\ quadratum} \\ \boldsymbol{-S\ quadrato} \end{matrix}\right.$	$2BA - A^2 = B^2 - S^2$

4. Con base en que para ambos casos se obtiene la misma ecuación Viète establece que una ecuación de la forma $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{D\ in\ A} \\ \boldsymbol{-A\ quadrato} \end{matrix}\right\} \boldsymbol{aequabitur} \{\boldsymbol{Z\ plano}$ (que en notación de Viète (1983) sería $DA - A^2 = Z^p$) posee dos raíces donde $\boldsymbol{D}$ sería $\boldsymbol{B\ bis}$ $(2B)$ y $\boldsymbol{Z\ plano}$ es $\boldsymbol{B\ quadratum - S\ quadratum}$ $(B^2 - S^2)$.
5. De manera concreta propone un ejemplo para ilustrar esta propiedad. Él propone la ecuación $\boldsymbol{12N - 1Q\ aequetur\ 20}$ ($12x - x^2 = 20$, en notación actual), donde $B = 6$ y $S = 4$. Por lo tanto, las raíces son $6 - 4 = 2$ y $6 + 4 = 10$.
6. Al final Viète establece que esta propiedad puede extenderse a ecuaciones de mayor grado con sus respectivas particularidades.

12.5.7.2. Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	**Descripción**
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	Viète analiza el caso de una ecuación que tiene la forma específica $dx - x^2 = z$, que en notación de Viète esta ecuación se escribiría como $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{D\ in\ A} \\ \boldsymbol{-A\ quadrato} \end{matrix}\right\} \boldsymbol{aequabitur} \{\boldsymbol{Z\ plano}$, de la cual destaca que ha sido construida a partir de la adición y sustracción de dicho parámetro B con la raíz A, lo cual determina otro parámetro S, que es la diferencia entre la raíz y el parámetro B. Con base en esto señala que los coeficientes de la ecuación dependen de estos parámetros B y S, con lo cual es posible determinar las dos raíces de la ecuación, pues se obtienen fórmulas para determinar los parámetros B y S respecto a los coeficientes. El procedimiento detallado por Viète muestra que las relaciones generales que encuentra al estudiar las ecuaciones son obtenidas a partir de la construcción de las ecuaciones con base en el establecimiento previo de parámetros que se encontrarán como constituyentes de la ecuación final. Este estudio se basa en la multiplicación de ecuaciones lineales que involucran a la raíz y que no se encuentran igualadas a cero. Por ejemplo, $\boldsymbol{B - A\ aequetur\ S}$ equivalente a $b - x = k$, consiste en una ecuación lineal que contiene dos cantidades conocidas b y k que se relacionan directamente con la raíz x. Al elevar ambas partes de la ecuación para construir una ecuación cuadrática se obtiene otra ecuación cuadrática en la que sus coeficientes muestran visualmente relaciones específicas con los parámetros conocidos y puesto que estos parámetros se relacionan con la raíz, entonces, esto permite obtener las raíces de la ecuación. Este procedimiento es después desarrollado más efectivamente por Thomas Harriot con la ayuda de un simbolismo más nítido. Incluso el mismo Descartes cuando discute la regla de los signos muestra cómo a partir de la multiplicación de ecuaciones lineales de la forma $x - a = 0$, para casos específicos de a, construye los polinomios sobre los

	que analiza los cambios de signo para determinar la cantidad de raíces positivas y negativas (falsas en sus propios términos). En particular se cumplirá que $2B = d$, mientras que el de S de la relación $B^2 - S^2 = z$.
¿Para qué lo hace?	En el caso del ejemplo específico propuesto por Viète: $12x - x^2 = 20$, la exploración sobre la expresión simbólica permite la obtención de una relación directa entre los coeficientes de esta y la raíz. Puesto que $12 = 2B$ y $B^2 - S^2 = 20$, considerando que la raíz es la suma o diferencia de los valores de B y S se obtienen los valores 6 y 2. De esta manera el objetivo es determinar una fórmula para cualesquiera coeficientes que pudiera tener la ecuación.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	La justificación epistémica en este tipo de problema muestra estar anclada en un razonamiento simbólico y visual, pues la forma en la que se emplea el simbolismo es para la investigación de propiedades generales.
¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	Propiedades aritméticas y de las ecuaciones.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	El simbolismo que emplea Viète tiene la función una herramienta visual que permite develar los patrones que se identifican en las estructuras de las ecuaciones.

Tabla 62. Análisis cualitativo del Problema 2 de Viète

12.5.8. Problema 3 de Viète

CINCO LIBROS DE ZETÉTICA

PRIMER LIBRO

Zetética I

Dada la diferencia entre dos raíces y la suma para determinar las raíces

Sea B la diferencia entre dos raíces y sea D su suma. Las raíces serán encontradas.

Sea A la raíz más pequeña. La mayor será entonces $A + B$. Entonces la suma de las raíces es $2A + B$. Pero esto ha sido dado como D. Por lo tanto $2A + B = D$. Y, por transposición, $2A = D - B$. Habiendo divido todo por 2, $A = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}B$.

O sea E la raíz mayor. La menor sería entonces $E - B$. Entonces, la suma de las raíces es $2E - B$. Pero esto había sido dado como D. Por lo tanto, $2E - B = D$. Y, por transposición, $2E = D + B$. Dividiendo todo por 2, $E = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}B$.

Dada, por lo tanto, la diferencia entre dos raíces y su suma, las raíces pueden ser encontradas, pues

La mitad de la suma de las raíces menos la mitad de su diferencia es igual a la menor raíz, y [la mitad de la suma de las raíces] más [la mitad de su diferencia es igual] a la mayor.

Es esto lo que la Zetética deja claro.

Sea B 40 Y D 100. A es entonces 30 y E es 70

12.5.8.1. Análisis Descriptivo

En este ejemplo Viète se encuentra mostrando cómo emplear la Zetética para la resolución de un problema típico en los tratados algebraicos desde el tiempo de Diofanto. La Zetética consiste en la parte del problema que va desde el establecimiento de las condiciones de este hasta la solución de la ecuación. Por ello, en este tratado, los problemas que Viète resuelve centran su atención en la constitución de ecuaciones que cumplen las condiciones de problemas, de manera que dependiendo de los valores de los parámetros en las ecuaciones se obtengan las soluciones específicas para cada caso. En este sentido, se identifica una intención en proponer fórmulas generales para cada problema.

En particular en este ejemplo Viète muestra una fórmula general para tratar con las situaciones en las que se debe determinar el valor de dos raíces distintas, sobre las cuales se conoce su suma y su diferencia. El método de resolución sigue la manera clásica de otros algebristas que resolvieron este tipo de problemas, en la que las expresiones se dejan en términos de una incógnita. Una de las diferencias en la forma de Viète es que las cantidades a determinar representan raíces y no números. Sin embargo, la más importante, como se ha mencionado, es que hace uso de cantidades generales, es decir, parámetros. El procedimiento es el siguiente:

1. Designación de las dos raíces y establecimiento de las relaciones entre las mismas de acuerdo con las condiciones del problema. En este caso es que la diferencia entre las raíces y su suma están dadas y las denomina como B y D respectivamente. Viète designa para un primer caso a una de las raíces A, la cual es la menor de las dos y la otra $A + B$, puesto que la raíz mayor resulta de la adición de la menor con la diferencia entre ambas.
2. Puesto que se conoce la suma D, entonces se suman las expresiones de ambas raíces, es decir, A y $A + B$, obteniendo $2A + B = D$, lo cual es igual a $2A = D - B$, que es lo mismo que $A = \frac{D}{2} - \frac{B}{2}$.
3. Para un segundo caso, en el que la raíz que emplea para las expresiones es la mayor se designa como E, de manera que la menor sería por consiguiente $E - B$, y de manera análoga al caso anterior se obtiene que la expresión de la suma es $2E - B = D$, por lo que $E = \frac{D}{2} + \frac{B}{2}$.
4. Como parte del método de Viète, en la parte de Porística expresa la regla para calcular ambas raíces en términos retóricos y finalmente como parte de la síntesis, que para Viète es la Exegética se propone un ejemplo particular para probar la fórmula.

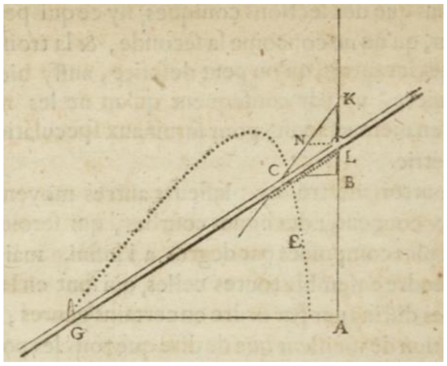
12.5.8.2. Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	Descripción
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	La actividad matemática de Viète en este ejemplo no es muy lejana a la actividad que otros algebristas previos a él desarrollaron. Este problema es uno de los problemas clásicos de dividir un número en dos partes cuya suma es dada. El procedimiento consiste en establecer dos expresiones para las dos raíces en términos de una sola, es decir, una incógnita. Con base en estas expresiones se manipulan las ecuaciones y se obtiene una expresión general.
¿Para qué se hace?	Lo que Viète busca es mostrar cómo su método analítico permite resolver este tipo de problemas de una manera más general que lo hecho previamente. Su intención es determinar fórmulas generales por medio de ecuaciones paramétricas para que con cualesquiera valores de los parámetros de la ecuación sea posible determinar la solución.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	La justificación epistémica en este tipo de problema muestra estar anclada en un razonamiento que combina la actividad algebraica clásica con uno simbólico. Es clásica, en tanto está anclada en las propiedades aritméticas de la ecuación, y simbólica porque la finalidad de la resolución es determinar ecuaciones paramétricas que generalizan las propiedades aritméticas clásicas.
¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	Propiedades aritméticas y de las ecuaciones.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	El simbolismo que emplea Viète tiene la función de establecer fórmulas generales para cualesquiera casos de los parámetros D y B.

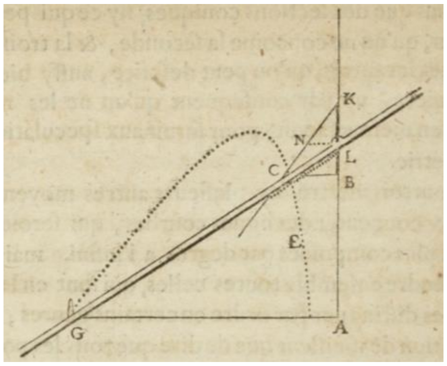
Tabla 63. Análisis cualitativo del Problema 3 de Viète

12.5.9. Problema 1 de Descartes

Como si quisiera saber de qué género es la línea EC que imagino descrita por la intersección de la regla GL y la pieza $CNKL$,



cuyo lado KN está prolongado indefinidamente hacia C, y que moviéndose sobre el plano, en línea recta –es decir de tal manera que su lado KL se encuentre siempre aplicado sobre alguna región de la línea BA prolongada de uno y otro lado— hace mover circularmente la regla GL alrededor del punto G, por estar ella vinculada de tal manera que pasa siempre por el punto L. Elijo una línea recta como AB para referir a sus diversos puntos todos los de la línea curva EC; y en esta línea AB elijo un punto, como el A, para empezar por él el cálculo. Digo que elijo éste o aquella porque soy libre de tomarlos como quiera: pues aunque haya muchas maneras de elección para hacer la ecuación más corta y más fácil, siempre, cualquiera sea la manera como se los tome, puede hacerse que la línea aparezca de un mismo género, como es fácil demostrar.



Después de esto, tomando un punto cualquiera de la curva, como el C, sobre el cual supongo que el instrumento que sirve para describirla está aplicado, trazo por este punto C la línea CB paralela a la GA, y puesto que CB y BA son dos cantidades indeterminadas y desconocidas, las designo a una y y a la otra x. Pero, para encontrar la relación de ambas, considero también las cantidades conocidas que determinan el trazado de esa línea curva, tales como GA que denomino a; Kl, que denomino b y NL paralela a GA, que denomino c. Luego digo: como

LN es a LK o c a b, así CB o sea y, es a BK que es por consiguiente $\frac{b}{c}y$; y BL es $\frac{b}{c}y - b$; y AL es $x + \frac{b}{c}y - b$. Además, como CB es a LB o y a $\frac{b}{c}y - b$, así a o sea GA es a LA o $x + \frac{b}{c}y - b$. De manera que multiplicando la segunda por la tercera se obtiene $\frac{ab}{c}y - ab$, que es igual a $xy + \frac{b}{c}yy - by$, que resulta multiplicando las primera por la última; y asì que la ecuación que se debía encontrar es

$$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

En la cual se sabe que la línea EC es de primer género: pues, en efecto, no es otra que una hipérbola.

12.5.9.1. Análisis Descriptivo

El marco de referencia de Descartes también se enmarca en la creación del análisis algebraico. A diferencia de Viète el tipo de tarea que son abordadas por Descartes son geométricas. Su innovación respecto a la concepción de la unidad como una línea y su aritmética para los segmentos, el álgebra de los segmentos, le permite ir más allá de Viète y eludir los problemas de la dimensión. En esencia el proyecto en el que se enmarca *La Géométrie* de Descartes es, justo la disciplina geométrica, aunque como destaca Boss (2001), la geometría para Descartes consistía en la resolución de problemas geométricos. En especial estaba interesado en los problemas de Locus.

El problema que se encuentra resolviendo consiste en mostrar la forma en la que se puede determinar el género de una curva geométrica que es construida por un compás para lo que necesita encontrar una relación entre dos líneas que denomina x e y en las que un punto C se encuentre en alguna de las dos líneas que en el caso del ejemplo, el punto C es parte de y pues C es determinado por la distancia, o el segmento y (el segmento CB). El método Cartesiano como se profundiza en la sección 12.1.3.2 incorpora el álgebra pues por medio del análisis de la ecuación de la curva es posible determinar su género. Una curva de primer género es una curva catalogada entre las secciones cónicas de Apolonio. Por lo tanto, la primera parte del método Cartesiano, es decir, el análisis consiste en la determinación de la ecuación paramétrica que define las relaciones que cumple un punto sobre la curva. Puede decirse que en términos modernos las líneas CB y AB son comparables con los ejes de un sistema de referencia ortogonal similar al de los ejes de un plano Cartesiano. No obstante, en Descartes estos ejes no siempre eran ortogonales como en el caso del Teorema de Pappus, el cual se analiza en el apartado 5.3.2.5.

Por otro lado, en este caso, no muestra la síntesis, la cual consiste en la construcción geométrica de la curva. El procedimiento es el siguiente:

1. Primero Descartes describe la forma en la que el mecanismo funciona para describir la curva EC, señalando las partes del instrumento que se mueven y las que permanecen fijas. Elije un punto C sobre la curva, el cual es el que servirá para determinar las relaciones, así como la línea AB, la cual le servirá para asociar su medida y otras con C.
2. Posteriormente Descartes realiza el trazo auxiliar del segmento CB. Con esta última construcción inicia la designación de las líneas de las que son determinadas y las que no. CB y AB, líneas desconocidas son designadas como x e y respectivamente, mientras que GA, NL y KL, son líneas conocidas que son designadas como a, c y b respectivamente (véase la Figura 87). Con base en estas líneas Descartes inicia el establecimiento de las relaciones entre estas líneas para determinar la ecuación.

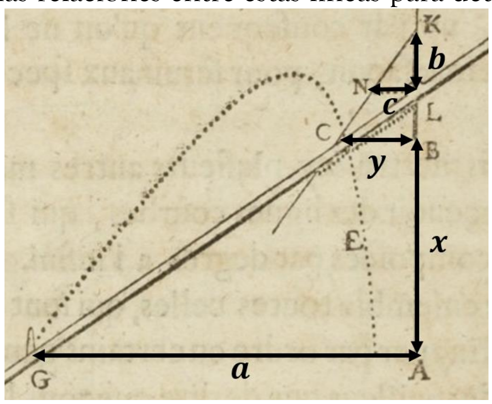


Figura 87. Parámetros e incógnitas en el Problema 1 de Descartes

3. Las primeras relaciones provienen de la relación de semejanza entre los triángulos CBK y NLK. De manera que $\frac{LN}{LK} = \frac{CB}{BK}$ que en términos de los parámetros descritos por Descartes esta misma relación es $\frac{c}{b} = \frac{y}{BK}$, por lo que $BK = \frac{b}{c}y$. Con base en esta relación se cumple que $BL = BK - LK$ que es lo mismo que $BL = \frac{b}{c}y - b$, lo cual implica que $AL = x + \frac{b}{c}y - b$.
4. Por otro lado, la relación de semejanza entre los triángulos GAB con CBL también determinan que $\frac{CB}{CL} = \frac{GA}{LA}$, o bien $\frac{y}{\frac{b}{c}y-b} = \frac{a}{x+\frac{b}{c}y-b}$, proporción que se reescribe de la siguiente manera: $yx + \frac{b}{c}y^2 - by = \frac{ab}{c}y - ab$, la cual al multiplicarla toda por $\frac{c}{b}$, se obtiene la ecuación $\frac{c}{b}yx + y^2 - cy = ay - ac$, que es lo mismo que $y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$. Ecuación que Descartes señala era la que se debía encontrar, con la única diferencia de que y^2 es escrito como yy.

12.5.9.2. Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	Descripción
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	La actividad matemática que despliega Descartes en este ejemplo, a pesar de no ser tan extensa y compleja como la mostrada en el ejemplo previo de Viète, resulta ser un grado de complejidad diferente, puesto que en este caso, Descartes tiene la concepción de que determinando la relación entre dos líneas, en términos de una ecuación—que sirven como referente sobre alguna de las cuales se encuentren los puntos de la curva—permite describir la relación general y con base en esta determinar el género de la curva. La forma en la que establece la ecuación es similar a la forma en la que actualmente se representa una relación de dependencia, es decir, una función. Sin embargo, más allá de establecer este tipo de relación funcional. Una de las consideraciones más importantes del método de Descartes es el de la idea de relacionar dos líneas con las cuales referir los puntos de la curva. En este caso cada punto C resulta de movimientos del instrumento dando por consiguiente variaciones en la distancia a la que el punto C se encuentra de la línea AK, es decir, de la medida del segmento CB (y). Para lograr estas relaciones Descartes considera que una parte fundamental es construir un sistema concreto de designación de las cantidades conocidas y desconocidas que permita manipular las relaciones de la manera más simple posible. Una vez establecido este sistema lo siguiente es valerse de cualquier tipo de relación posible que involucre una igualdad que relacione las líneas o segmentos de interés para convertir las proporciones en ecuaciones.
¿Para qué se hace?	Descartes intenta obtener una relación general con la cual, a través de manipulaciones de los parámetros de ésta, identificar qué tipo de relación, en tanto lugar geométrico, está siendo expresada. Es decir, una ecuación que representa la familia de curvas.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	La justificación epistémica en Descartes parece estar asociada al hecho de que cualquier proporción o relación de igualdad puede dar pie a una ecuación, además de que el establecimiento de una ecuación puede describir relaciones que puedan traducirse en lugares geométricos, aunque no la explica en su tratado.
¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	Semejanza de triángulos, proporciones, ecuación y operaciones sobre esta.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	El simbolismo que emplea Descartes tiene la función de construir, al igual que Viète fórmulas generales para problemas con relaciones definidas, pero en el tenor de relaciones de dependencia. Con base en las ecuaciones paramétricas es posible como recurso visual determinar el género de las curvas basándose en el grado y componentes de la ecuación. La función del simbolismo es la de construir un recurso semiótico que permita articular de manera sintética y visual relaciones de interés tanto para el estudio de problemas, como para el descubrimiento de conocimientos vía el reconocimiento de patrones a través de la abstracción que permite el símbolo algebraico. En el caso de Descartes, la visualización del grado de la ecuación permite determinar el género de la curva y mediante el análisis de casos para los parámetros en sus ecuaciones le permite distinguir incluso qué tipo de curva es.

Tabla 64. Análisis cualitativo del Problema 1 de Descartes

12.5.10. Problema 3 de Descartes

Libro III De la construcción de problemas que son sólidos o más que sólidos

Cuántas raíces verdaderas puede haber en cada ecuación

Se conoce también, de este modo, cuántas raíces verdaderas puede haber y cuántas falsas, en cada ecuación. A saber, puede haber tantas verdaderas como veces los signos $+$ y $-$ se encuentren cambiados; y tantas falsas como veces se encuentren dos signos $+$ o dos signos $-$, que se sigan. Como en la última, después de $+x^4$ sigue $-4x^3$, hay un cambio de signo $+$ en $-$; y después de $-19xx$ sigue $+106x$ y después de $+106x$ viene -120 se tienen otros dos cambios, se deduce que hay tres raíces verdaderas; y una falsa a causa de los dos signos $-$, después de $4x^3$ y $19xx$, que se siguen.

12.5.10.1 Análisis Descriptivo

Este extracto se encuentra dentro del tercer libro de *La Géométrie* en el cual Descartes se dedica al estudio de las ecuaciones, sus raíces y las formas para reducir o transformarlas para resolver los problemas geométricos que involucran más que sólidos, es decir, más allá de las secciones cónicas. En este sentido, este libro trata explícitamente con técnicas algebraicas.

El ejemplo corresponde con la enunciación de Descartes respecto a la regla de los signos que ha sido ampliamente comentado, sobre todo porque no es demostrada por Descartes. Esta regla establece que es posible establecer la cantidad de raíces negativas (falsas en palabras de Descartes) únicamente con fijarse en los cambios de signo que presenta la ecuación. Para explicar la propiedad hace referencia a una ecuación que previamente ha construido a partir de la multiplicación de ecuaciones lineales de la forma $x - a = 0$ para mostrar cómo se relaciona la dimensión de las ecuaciones con su número de raíces, cuáles son las raíces negativas y cómo disminuir la dimensión de una ecuación conociendo alguna de sus raíces. En este sentido, construye la ecuación $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, a partir de la multiplicación de $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$ y $x + 5 = 0$.

En síntesis, la propiedad establece que es necesario fijarse en los cambios de signo $+$ a $-$ en la ecuación para determinar si se tienen raíces negativas, de modo que si no hay cambio de signo entre dos términos consecutivos de la ecuación, se puede establecer que existe una raíz negativa cada vez que esto suceda.

Así, si se presta atención en los signos de cada término de la ecuación

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

Se tiene el siguiente patrón:

x^4	$-4x^3$	$-19x^2$	$+106x$	-120	$= 0$
$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	

Por lo tanto, puede verse que entre el segundo término y el tercero no hay cambio de signo pues se mantiene el signo negativo. De esta manera, como solo hay un caso en el que se mantiene el mismo signo y tres casos en los que sí hay cambio de signo se pude decir que existe una raíz negativa y tres positivas.

12.5.10.2 Análisis Cualitativo

ACTIVIDAD ALGEBRAICA	
Cuestionamientos analíticos	Descripción
¿Qué se hace? y ¿Cómo se hace?	En este caso la actividad matemática que se identifica en el ejemplo de la regla de los signos consiste en la presentación de una propiedad que Descartes encuentra respecto a los cambios de signo y las raíces positivas y negativas. El énfasis en la actividad es dependiente totalmente del recurso semiótico del simbolismo matemático. La argumentación que hace Descartes respecto a la propiedad que presenta se da con base en un caso específico de una ecuación. En este sentido es solo ilustrativo pues no hay demostración. El proceso consiste en fijarse explícitamente en los símbolos $+$ y $-$ de la ecuación para determinar la cantidad de raíces positivas y negativas de la misma.
¿Para qué se hace?	La intención de este tipo de actividad está relacionada con el problema 3 de Viète, en el que se busca una correlación entre los elementos simbólicos y el comportamiento de las raíces de un polinomio.
¿Cuál es la justificación epistémica de la actividad?	La justificación epistémica en este ejemplo muestra claramente estar anclada en un razonamiento simbólico. Pues se basa totalmente en el simbolismo para determinar la respuesta al planteamiento, es decir, la cantidad de raíces positivas y negativas.
¿Qué nociones matemáticas se encuentran en juego?	Raíz de una ecuación y propiedades algebraicas de la multiplicación de ecuaciones lineales de la forma $x - a = 0$.
¿Qué papel juega el simbolismo matemático?	Es el referente por excelencia en este ejemplo pues se depende totalmente de la representación visual de la ecuación para determinar el resultado.

Tabla 65. Análisis cualitativo del Problema 3 de Descartes

12.6. Revisiones bibliográficas

A continuación se presentan las revisiones bibliográficas realizadas para delimitar el objeto de estudio.

12.6.1. Primera revisión: sobre Pensamiento Algebraico y formulación inicial del problema de investigación

Esta primera revisión bibliográfica se enfocó en los trabajos que trataran de describir qué se entendía por Pensamiento Algebraico. Se revisaron distintos documentos compilatorios sobre los estados actuales de la investigación en este tópico.

12.6.1.1. Investigación sobre el Pensamiento Algebraico

La cantidad de literatura relacionada con el Pensamiento Algebraico es sumamente vasta. Como ejemplo de ello están algunas recopilaciones que intentan mostrar estados actuales de la investigación sobre este tópico (Filloy y Kieran, 1989; Bednarz, Kieran, y Lee, 1996; Stacey, Chick, y Kendal, 2004; Kieran, 2006, 2007; Steward, 2017). En cada una de éstas se presentan posturas diferenciadas sobre cómo caracterizar el Álgebra y el Álgebra escolar; dificultades a los que se enfrentan los estudiantes; aspectos didácticos para favorecer el tratamiento del Álgebra escolar, como el trabajo con tecnología y propuestas para replantear curricularmente los contenidos algebraicos, entre otros aspectos.

Naturalmente, la gran mayoría de las investigaciones se han centrado en estudiar la introducción al Álgebra en la escuela, de donde se desprende, por un lado, el reconocimiento de la gran dificultad para transitar del Pensamiento Aritmético al Pensamiento Algebraico. En esta línea se ha mostrado que aun cuando se posee un buen desempeño aritmético, esto no garantiza que el paso al Álgebra será sencillo, debido a que el Pensamiento Algebraico implica **un cambio en la forma de pensamiento** (Serres, 2007; Kieran, 2007; Kilpatrick, et. al. 2001 citado en Cai y Knuth, 2011).

Kieran (citada en Cai y Knuth, 2011) señala a este respecto que, los siguientes aspectos caracterizan los cambios que deben seguirse para transitar del pensamiento aritmético al algebraico:

- Un enfoque en las relaciones y no simplemente en el cálculo de una respuesta numérica;
- Un enfoque en operaciones, así como sus inversas, y en la idea relacionada con hacer/deshacer;
- Un enfoque tanto para representar y resolver un problema más allá de resolverlo únicamente;
- Un enfoque en números y letras, en lugar de en cifras por sí solas;

- La reorientación del significado del signo de igualdad, de un significante para el cálculo de un símbolo que denota una relación de equivalencia entre cantidades. (p. IX).

Kieran (2007) manifiesta que otro de los factores que explica la dificultad en el Álgebra es que, de manera tradicional, los programas de estudio y la práctica educativa mantienen por separado y de manera desconexa la Aritmética y el Álgebra, pues argumenta que en el caso de la educación básica el foco de atención es la Aritmética, mientras que en el caso de la educación media el foco es el Álgebra.

De alguna manera esta corriente inicial sobre los estudios relativos al Pensamiento Algebraico, basados en el tránsito de la Aritmética al Álgebra e inspirado en la indagación de las dificultades y errores manifestados por los estudiantes, despertó con el paso de los años un interés por demostrar que los estudiantes podían pensar de manera algebraica si el tipo de actividad y supuestos sobre lo que se consideraba la competencia algebraica en los primeros años de la educación matemática se replanteaba (Lins y Kaput, 2004). Esto dio pie al surgimiento de las posturas de *pre-Álgebra* y *Early Algebra* (Socas, 2011), planteamientos que, de manera acertada, mostraron que el formalismo del Álgebra podría dejarse para momentos posteriores de la organización curricular de la secundaria (pre-álgebra), así como que el trabajo con la variable, a partir de la observación, análisis y generalización de patrones y propiedades matemáticas podría incorporarse al currículum de la primaria (early algebra); la intención era la de propiciar "determinadas actitudes, incluyendo el análisis de las relaciones entre cantidades, dándose cuenta de la estructura, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, el modelado, lo que justifica, lo que demuestra, y la predicción" (Cai y Knuth, 2011, p. IX).

Estas perspectivas, a su vez permitieron la proliferación acercamientos que planteaban, de manera explícita cuál o cuáles eran las características del Pensamiento Algebraico y, por lo tanto, cómo fundamentar el tratamiento escolar para desarrollarlo. Algunos de estos acercamientos, que se plantearon tiempo atrás en Bednarz, Kieran, y Lee (1996), se consideran han prevalecido, de alguna manera, hasta la actualidad:

1. *Generalización*. Para Mason (2017), el álgebra de la escuela es fundamentalmente la expresión de la generalidad de una forma breve para que pueda ser manipulada. Éste autor describe que sus ideas provinieron de una revisión de muchas fuentes, generalmente de culturas antiguas como la egipcia, babilónica y griega de las cuales reconoció que las raíces del Álgebra son:

    a. Expresión de la generalidad,
    b. Posibilidades y limitaciones (apoyo a la toma de conciencia de las variables)
    c. Reorganización y manipulación (ver por qué expresiones aparentemente diferentes para la misma cosa dan las mismas respuestas)

   d. Aritmética generalizada (letras tradicionales en lugar de números para expresar las reglas de la aritmética) (Mason, 1996, p. 66).

   La propuesta de tratamiento se basa en la idea de transitar del pensamiento aritmético hacia algunos conceptos algebraicos, a través de la construcción de fórmulas con base en el análisis, y generalización de patrones numéricos, figurales, verbales, o literales.

2. *Resolución de problemas.* Los acercamientos sobre *resolución de problemas* se centran en recurrir a la resolución de situaciones que harán emerger estrategias para trabajar con cantidades desconocidas y conocidas, toda vez que la actividad algebraica desde esta postura enfatiza esta finalidad en el uso y desarrollo del Álgebra. Algunos de estos estudios muestran cómo las estrategias aritméticas evolucionan para definir estrategias más generales, en las que el uso de los símbolos juega un papel esencial para esta transición, puesto que se precisa del manejo simbólico para resolver las situaciones (Rojano, 1996 citado en Bednardz, Kieran y Lee, 1996).
3. *Modelación*. Los acercamientos sobre *modelación* tienen como finalidad el propiciar una integración de diversos registros de representación en los que la expresión algebraica, la gráfica, la descripción verbal, las tablas de datos son articulados a partir de la reinterpretación de las características que cierto registro semiótico tiene en otro. De acuerdo con Nemirovsky (1996, citado en Bednardz, Kieran y Lee, 1996), la validez y pertinencia del Álgebra como un objeto escolar requiere de un uso flexible de los distintos sistemas semióticos que permiten describir e interpretar fenómenos y hechos reales.
4. *Pensamiento Funcional*. Los acercamientos basados en la premisa de que el trabajo con la función puede caracterizar el trabajo algebraico, se centran en que la aproximación al Álgebra puede darse a partir de la concepción de la variable y la función (Heid, 1996). Considerando al igual que Mason que la generalización es el rasgo esencial del razonamiento algebraico, operaciones aritméticas se pueden ver como funciones, y la notación algebraica puede prestar apoyo al razonamiento matemático, incluso entre los jóvenes estudiantes. “Nos centramos en el álgebra como aritmética generalizada de los números y las cantidades en que el concepto de función asume un papel importante” (Carraher, Schliemann y Schwuartz, citados en Carraher, Schliemann, Brizuela, y Earnest, 2006, p. 88). Uno de los objetivos en este tipo de enfoque consiste en la resolución de situaciones del “mundo real”, en los que se precisa con identificar las características y propiedades de las funciones y cómo estas pueden asociarse con sus distintas formas de representarlas. Estas posturas, al ser trabajadas en niveles tempranos procuran que las operaciones aritméticas sean trabajadas desde el punto de vista de relaciones funcionales por lo que se proponen actividades que pueden ser analizadas desde el uso de tablas numéricas para generalizar comportamientos.

Aunado a los esfuerzos anteriores, muchos de los autores que se han apegado a cada uno de los acercamientos anteriores, han puesto de manera más explícita sus concepciones sobre lo que caracteriza al Pensamiento y Razonamiento Algebrico. Por ejemplo, Lins y Kaput (2004), consideran que el Pensamiento Algebraico:

> Implica actos de generalización deliberada y expresión de generalidad. En segundo lugar, implica, por lo general como un esfuerzo separado, el razonamiento basado en las formas de generalizaciones sintácticamente estructuradas, incluyendo acciones sintáctica y semánticamente guiadas (p. 48).

De ahí que en Kaput (2008) se reporta que el Pensamiento Algebraico está centrado en dos núcleos fundamentales:

1. Generalización y expresión de la generalización en sistemas de símbolos progresivamente sistemáticos y convencionales.
2. Acción sintácticamente guiada sobre los símbolos dentro de sistemas de símbolos organizados (p. 10)

Radford (2006), a pesar de coincidir con el planteamiento de Socas (2011) relativo a la falta de precisión sobre la caracterización del Pensamiento Algebraico, propone tres aspectos que caracterizan la actividad algebraica:

1. Sentido de indeterminación
2. Objetos indeterminados son manipulados analíticamente
3. Modo simbólico peculiar que tiene para designar sus objetos

Kieran (2004), por su parte, considera que implica el desarrollo de formas de pensar que permitan "analizar las relaciones entre cantidades, observar la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir" (p. 149).

Booker y Windsor (2010), plantean de manera sintética que "el pensamiento algebraico aborda las relaciones matemáticas generales, expresándolas de maneras cada vez más sofisticadas [...]" (p. 411).

Con base en las investigaciones reportadas, es posible identificar una gran diversidad de interpretaciones sobre la actividad algebraica en general. En primer lugar, es claro que el Pensamiento Algebraico es distinto esencialmente del Pensamiento Aritmético y que, por lo tanto, impone gran dificultad en los estudiantes cuando se les solicita transitar entre uno y otro. Asimismo, como varios autores mencionan, el Pensamiento Algebraico está relacionado indudablemente con la capacidad de generalización de relaciones de todo tipo, no únicamente las aritméticas, aunque el dominio de la aritmética generalizada es fundamental para su desarrollo.

Por otro lado, su funcionalidad, tal y como se deja ver en los posicionamientos previos, responde a la resolución de problemas, la modelación y al uso de objetos como la variable y la incógnita (Radford, 1996), de donde se justifican de algún modo, los acercamientos relativos al pensamiento funcional.

12.6.1.2. Algunos trabajos Histórico-Epistemológicos sobre el Álgebra

De manera complementaria, se revisaron también algunos trabajos que reportan cómo se dio el desarrollo conceptual de las ideas algebraicas a lo largo de la historia. En los cuales se reportan fases en el desarrollo evidenciando las características de las situaciones que se resolvían, así como las ideas algebraicas que se desprendían de las mismas (Charbonneau, 1996; Radford, 1996; Moreno y Kaput, 2005; Sfard, 1995; Malissani, 1999). En este sentido, a partir del trabajo de Nesselman, se han retomado por otros investigadores en nuestra disciplina las tres etapas que caracterizaron el desarrollo del Álgebra. Estas tres fases, junto con sus características más generales son las siguientes (Nesselman, citado en Malissani, 1999):

1. *Fase retórica:* anterior a Diofanto de Alejandría (250 d.C.), en la cual se usa exclusivamente el lenguaje natural, sin recurrir a algún signo. Se caracterizó por describir métodos de resolución de problemas concretos sobre comercio y construcción, entre otras necesidades de los pueblos antiguos, y estos se encontraban a manera de enunciados. Las culturas egipcias, griegas y babilónicas fueron representantes de esta fase e inició aproximadamente en 1650 a. de C (Socas, Camacho, Palarea, y Hernández, 1989);
2. *Fase sincopada:* desde Diofanto hasta fines del Siglo XVI, en la cual se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan en lenguaje natural. Durante este período se desarrolló una notación para representar expresiones matemáticas, nuevamente centrando la atención en ecuaciones. Por ejemplo, la expresión $x^3 + 13x^2 + 8x$ en notación de Diofanto se representaba de la siguiente manera: $K^\gamma \alpha\ \Delta^\gamma l\xi\eta$ (Socas, Camacho, Palarea, y Hernández, 1989);
3. *Fase simbólica:* introducida por Viète (1540-1603) y Descartes, en la cual se usan letras para todas la cantidades y signos para representar las operaciones, se utiliza el lenguaje simbólico no sólo para resolver ecuaciones sino también para demostrar reglas generales. Por ejemplo, la ecuación

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$$

Viète la escribía como

$$1QC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N\ aequatur\ 120$$

Sin embargo, el acercamiento más estrecho a la notación actual se la debemos a Descartes con ligeras modificaciones posteriores. Su notación era como como sigue (Socas, Camacho, Palarea, y Hernández, 1989):

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$$

12.6.2. Segunda revisión: sobre el Lenguaje Algebraico

Como se observa en la hipótesis inicial se incluye la idea de que el Pensamiento Algebraico implica **la construcción y manipulación de lenguajes simbólicos que permiten describir, analizar, estudiar y manipular abstracciones de la realidad.**

Por lo tanto, de acuerdo con este objeto de estudio resultante y preguntas de investigación, se realizó una revisión de antecedentes respecto al lenguaje en dos fases. En la primera fase, a su vez se realizaron dos revisiones principales, la primera sobre compilaciones relativas al *estudio del lenguaje*, orientada por dos preguntas: ¿qué es el lenguaje matemático? y ¿cómo se estudia el lenguaje matemático? La segunda, sobre los *referentes teóricos* empleados en los estudios sobre el lenguaje matemático, que se orientó por las preguntas: ¿cómo se usa esta teoría para estudiar el lenguaje matemático? y ¿cuáles son los principios de la teoría empleada? Esta primera fase tuvo una duración aproximada de un año.

La revisión de la segunda fase se realizó sobre las fuentes referenciadas en los trabajos de la primera fase que se consideraran relevantes para un entendimiento más profundo del lenguaje y cómo estudiarlo. Se priorizaron en ambas fases los referentes que establecieran caracterizaciones del lenguaje matemático, y de ser posible del algebraico con la finalidad de construir un marco teórico y metodológico adecuado para el estudio del lenguaje algebraico. Como resultado final de esta segunda fase se tomó postura teórica respecto a la forma de estudiar el lenguaje matemático.

Por cuestiones de presentación los elementos rescatados de la revisión se mostrarán integrados en los siguientes apartados, sin embargo, en el apartado del problema de investigación se mostrarán por separado las conclusiones de cada una de estas dos fases de revisión para mostrar el camino que fue modificando los objetivos de la investigación.

12.6.2.1. El lenguaje

Es claro que el estudio del Lenguaje y su desarrollo es sumamente complejo. Un indicador de esto es la gran cantidad de disciplinas científicas que lo estudian (Lógica, Historia, Fisiología, Psicología, Lingüística, Antropología, Semiótica, Sociología, entre otras) (Hjelmslev, 1971; Leal, 1987).

De hecho, el lenguaje puede ser definido de formas muy diversas:

- Como un conjunto finito o infinito de oraciones, cada una de ellas de longitud finita y construida a partir de un conjunto finito de elementos (Chomsky, 1957, citado en Ríos, 2010, p. 3).
- Como una elaboración social que "contiene un conjunto de instrumentos cognoscitivos (relaciones, clasificaciones, etc.) al servicio del pensamiento" (Piaget y Inhelder, 1981, p. 91).
- Como un sistema semiótico que posee, por sí mismo, cualidades únicas que otros no, y que, por tanto, maximiza las cualidades que son necesarias para que algo funcione como una herramienta psicológica capaz de mediar el desarrollo de la mente (Hasan, 2002).
- Como un sistema convencional de comportamiento vocal habitual mediante el cual los miembros de una comunidad se comunican entre sí (Ren, 1968, p. 1).
- Como medio de comunicación (Austin y Howson, 1979).
- Como un método exclusivamente humano, y no instintivo, de comunicar ideas, emociones y deseos por medio de un sistema de símbolos producidos de manera deliberada. (Hernando, 1995, citado en Ríos, 2010, p. 3).
- Como un instrumento con el que el hombre da forma a su pensamiento y a sus sentimientos, a su estado de ánimo, sus aspiraciones, su querer, su actuar, el instrumento mediante el cual ejerce y recibe influencias, el cimiento más firme y profundo de la sociedad humana (Hjelmslev, 1971, p. 1).
- Como un potencial de significado, es decir, un sistema sociosemiótico que permite producir significados funcionales a las circunstancias en las que los hablantes u oyentes se desenvuelven. Por lo tanto, es un sistema que estructura la realidad y permite la interacción entre individuos (Halliday M. A., 1982).

A pesar de la gran diversidad de definiciones e interpretaciones respecto al lenguaje, algunos aspectos que son regulares, según Ríos (2010), son los siguientes:

> a) El lenguaje puede interpretarse como un sistema compuesto por unidades (signos lingüísticos);
> b) La adquisición y uso de un lenguaje por parte de los organismos posibilita en estos formas peculiares y específicas de relación y de acción sobre el medio social;
> c) El lenguaje da lugar a formas concretas de conducta, lo que permite su interpretación o tipo de comportamiento (p. 5).

Por lo tanto, de estas tres características sobre las concepciones del lenguaje, puede rescatarse que el lenguaje, por un lado, es un sistema semiótico convencional y que también es un mediador; de manera que los individuos actúan sobre su medio social a través de este y, que a su vez estos son afectados por el medio social con base en él. Asimismo, una característica quizás, más importante de acuerdo con el interés del objeto de estudio es el hecho de que algunos estudiosos del lenguaje han manifestado que el lenguaje no tiene como única finalidad la comunicación, sino también para la creación del pensamiento, de manera particular, el conocimiento (Chomsky, citado en Birchenall y Müller, 2014; Halliday, 1982; Pimm, 1987; Morgan, 2014). Este aspecto, puede verse de manera especial en el lenguaje matemático y científico, pues los sistemas que se han designado para estos ámbitos son sumamente particulares e indispensables para su quehacer; a tal grado que el hecho de aprender cada una de las ciencias, implica aprender las ideas y conceptos científicos a través de su lenguaje. Dicho de otra forma, aprender la ciencia, implica aprender su lenguaje (Halliday, 1993).

12.6.2.2. El Lenguaje Matemático

Los lingüistas que han dedicado parte de su trabajo a caracterizar el lenguaje científico han dejado ver que posiblemente una de las causas de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las ciencias, en particular de las matemáticas, es el hecho de que existe una inadvertencia y falta de consideración sobre las características esenciales del lenguaje científico, como por ejemplo las estrategias gramaticales que cada disciplina ha construido para satisfacer la demanda de sus discursos (Halliday, 1993b; Pimm, 1987; Schleppegrell, 2004, 2007; Morgan, 2006; O'Halloran, 2000, 2005, 2007, 2015; Barwell, 2005; Hodgson-Drysdale, 2014).

A decir de Halliday (1993b),

> Los textos científicos son difíciles de leer; y se dice que esto se debe a que están escritos en "lenguaje científico", una "jerga" que tiene el efecto de hacer que el alumno se sienta excluido y alienado del tema (p. 76).

El lenguaje científico es denso, no solo lexicalmente, sino también gramaticalmente, por lo que consta de recursos lingüísticos que han sido creados para cumplir funciones muy específicas (Halliday y Martin, 1993). En este sentido,

> No sería posible representar el conocimiento científico por completo en términos de sentido común; los términos técnicos no son simplemente equivalentes extravagantes para las palabras comunes, y las estructuras conceptuales y los procesos de razonamiento de la física y la biología son muy complejos y muchas veces están muy alejados, en muchos niveles de abstracción, de la experiencia cotidiana. Por lo tanto, el lenguaje en el que se construyen es inevitablemente difícil de seguir (Halliday, 1993b, p. 77).

Este hecho implica que el lenguaje científico, y en particular el matemático, esté caracterizado desde las perspectivas lingüísticas como un lenguaje que es autoritario y como un discurso de poder que excluye a aquellos que desconocen la funcionalidad y características lingüísticas de su lenguaje (O'Halloran, 2000, 2005; Schleppegrell, 2004; Halliday y Martin, 1993).

> las selecciones del sistema interpersonal de significado, tal como patrones de modalización y modulación máxima, falta de explicitación apartadas de formas genéricas convencionales, la estructura de los intercambios como una predominantemente serie de enunciados de comandos imperativos, y los patrones generales de congruencia interpersonal en los simbolismos matemáticos combinan para posicionar las matemáticas como un texto autoritario (O'Halloran, 2000, p. 379)

Morgan (2014) menciona que el Lenguaje Matemático, como un tipo de lenguaje especializado (científico), "permite a los participantes comunicarse eficientemente acerca de los objetos peculiares relativos a su práctica y, para lograr esto, puede simultáneamente excluirse a otra gente que no es especialista en el dominio" (p. 388). El aspecto abstracto del Lenguaje Matemático, así como el uso de su forma especial de lenguaje puede causar dificultades y obstáculos para algunas personas (Morgan, 2014; Drouhard y Teppo, 2004; Pimm, 1987; Halliday, 1982).

Algunas de las líneas dentro de la Matemática Educativa han volteado la mirada hacia estudiar hacia la naturaleza del lenguaje matemático, lo cual ha resultado en el descubrimiento de que otros recursos semióticos[39] además del simbolismo y el lenguaje "natural" son empleados en la actividad matemática (Morgan, 2006). Esto ha surgido a partir del examen de la actividad matemática encontrada en el discurso matemático empleado en textos científicos, así como en observaciones de salones de clases de matemáticas, donde existe un incesable intercambio lingüístico y semiótico para significar los objetos matemáticos. De hecho, Austin y Howson (1979), en una amplia revisión sobre los posibles aportes de la lingüística hacia el campo de la Matemática Educativa, mencionan que, además de que "*La emergencia de conceptos de orden avanzado podría parecer inextricablemente vinculada con el lenguaje*" (p. 167), uno de los hallazgos a partir de ciertos análisis fue que algunos profesores de matemáticas tienden a hablar más que incluso profesores de las áreas de ciencias sociales. Al respecto mencionan que:

> [Los profesores de matemáticas] realizan preguntas más convergentes, hacen enunciaciones más directas y descriptivas, y provocan y rechazan pocas respuestas de los alumnos. No es claro, sin embargo, si estas diferencias provienen de la naturaleza

[39] Se hace uso del término *recursos semióticos* para referirse a lo que en Matemática Educativa típicamente se denomina *registro* (Duval, 1999). El término *sistema semiótico* en la postura lingüística adoptada (O'Halloran, 2005) se emplea para designar otras características del lenguaje en general. Por ello, cuando se haga referencia a sistema semiótico se estará haciendo alusión al lenguaje en general y no a sus recursos semióticos constituyentes respectivos.

> de la materia o de la tradición lingüística y los patrones de enseñanza adoptados por los matemáticos (Austin & Howson, 1979, p. 175).

De acuerdo con estas perspectivas lingüísticas sobre el Lenguaje Matemático, se ha determinado entonces que este está caracterizado como un sistema semiótico múltiple, es decir, multisemiótico, pues consiste en una articulación de al menos, tres recursos semióticos: *imágenes*, *símbolos matemáticos* y por el *lenguaje natural* (Morgan, 2006; O´Halloran, 2000, 2005a, 2007, 2015; Drouhard y Teppo, 2004; Schleppegrell, 2004, 2007; Moschkovich, 2018), esto implica que el Lenguaje Matemático posea, en términos lingüísticos, una riqueza semántica importante (O'Halloran, 2000, 2005) y que "El análisis del lenguaje de las clases de matemáticas estará necesariamente incompleto a menos que las contribuciones e interacciones entre el simbolismo y las formas visuales sean tomadas en cuenta" (O'Halloran 2000, p. 360).

En los trabajos de O'Halloran (2000, 2005a, 2007, 2015) se analiza, en términos lingüísticos, desde una perspectiva multimodal, la naturaleza del lenguaje matemático, donde describe la relación intersemiótica que producen la articulación del simbolismo matemático, imágenes visuales y lenguaje natural.

12.6.2.2.1 El Simbolismo matemático

Para O'Halloran, el simbolismo matemático posee la función de reconfigurar patrones espaciales, temporales y relacionales que capturan significados para la resolución de problemas. En este sentido codifican el significado de manera precisa y económica.

> El simbolismo es una herramienta con la cual razonar, y el objetivo principal de la reconfiguración de las relaciones para resolver problemas significa que los procesos matemáticos y participantes[40] son preservados en el formato más simple posible. Una de las estrategias gramaticales más importantes es la incrustación[41]. Esta estrategia gramatical es crítica porque permite a las configuraciones procesos/participantes ser preservadas para que los enunciados simbólicos puedan ser reconfigurados para la resolución de los problemas (O'Halloran, 2005a, p. 79).

---

[40] Los Procesos y Participantes son constructos teóricos definidos en la Lingüística Sistémica Funcional como unidades de análisis del discurso. Estos constructos son descritos a detalle en el capítulo 4.

[41] La incrustación es una estrategia gramatical que resulta cuando se da un cambio en el estatus funcional de un elemento del discurso (ver O'Halloran, 2005; Butt, Fahey, Feez, y Spinks, 2012; Halliday, 1994; Halliday y Matthiessen, 2014).

12.6.2.2.2. Lenguaje natural

El lenguaje matemático rescata del lenguaje natural ciertos significados que pertenecen al segundo con propósitos matemáticos. Es a partir de una serie de estrategias metafóricas (O'Halloran, 2005a) que se producen ampliaciones de significados lo que conlleva al establecimiento de un *registro*[42] de las matemáticas, en sentido de Halliday (1982). Dicho de otra forma, se produce un tránsito entre el lenguaje natural a un lenguaje matemático con su propio léxico y gramática.

12.6.2.2.3 Imágenes visuales matemáticas

Son recursos semióticos compuestos de más de un sistema de signos, tales como símbolos matemáticos, símbolos lingüísticos, elementos pictográficos, etc (Drouhard y Teppo, 2004; O'Halloran, 2005a). Este tipo de imágenes o representaciones compuestas—como Drouhard y Teppo (2004) las denominan—tienen como finalidad proveer de una carga perceptual los elementos que son codificados a través del simbolismo matemático como una forma particular de representar la realidad; por lo tanto, son consideradas como un apoyo de la percepción matemática (O'Halloran, 2005a).

Estos tres componentes del lenguaje matemático son los que hacen que las matemáticas puedan representar de manera efectiva el mundo, puesto que cada uno de ellos, permiten un potencial de significado particular. Cada uno de ellos cumple con una función donde el significado se crea en una interacción entre los mismos.

De acuerdo con O'Halloran (2000, 2005a, 2007, 2015), el lenguaje matemático ha construido caminos semánticos entre cada recurso semiótico descrito anteriormente, de manera que:

> El lenguaje [natural] es típicamente usado para contextualizar el problema matemático; las imágenes visuales muestran las relaciones y proveen medios para el razonamiento visual espacio temporal; y el simbolismo es usado para resolver el problema. Los usos integrados de estos tres recursos semióticos expanden el poder semántico de las matemáticas en donde el todo es mayor que la suma de sus partes (O'Halloran, 2005a, p. 84).

---

[42] Se habla de "*registro* de las matemáticas" en el sentido de los significados que pertenecen al lenguaje de las matemáticas (esto es la utilización del lenguaje natural de las matemáticas: no de las matemáticas en sí) y que el lenguaje debe expresar para que se le utilice con propósitos matemáticos (Halliday, 1982, p. 256). En este sentido la noción de Registro dentro de la LSF en distinta a la que usualmente se conoce en ME por Duval (1999).

12.6.2.2.4 La habilidad metalingüística

Un aspecto que se considera de suma importancia desde los estudios lingüísticos relativos al Lenguaje Matemático es la importancia de una conciencia metalingüística (Drouhard y Teppo, 2004; Halliday, 1993b; Hodgson-Drysdale, 2014; Morgan, 2006, 2014; O'Halloran, 2000, 2005, 2007, 2015; Schleppegrell, 2004, 2007; Pimm, 1987), la cual alude al hecho de tener un grado de conciencia sobre las reglas y estructuraciones de los lenguajes que se usan (Pimm, 1987). En el caso de las matemáticas y en particular de la aritmética escolar, Pimm (1987) explica que esta es enseñada desde el metalenguaje del álgebra. Esto debido a que las reglas de generalización de la aritmética están dadas por las reglas sintácticas y gramaticales del álgebra. La actividad principal en aritmética y en álgebra escolar se limita a la enseñanza las reglas y cómo se opera sobre las cadenas de símbolos, es decir, sobre el metalenguaje y no sobre el lenguaje por sí mismo.

Esto implica que la instrucción debe promover un tratamiento que construya un lenguaje y que haga explícito el metalenguaje que se emplea para usarlo. Es decir, "*promover la búsqueda de la descomposición y recomposición de expresiones y garantizar que la gimnasia mental necesaria en la manipulación de expresiones tiene sentido*" (Drouhard y Teppo, 2004, p. 240).

Esta habilidad es claramente indispensable, toda vez que existe diferencia significativa en la forma en la que se leen las expresiones escritas del lenguaje natural como en el español, de forma lineal y de izquierda a derecha, con la forma de leer los escritos algebraicos, pues estos no pueden ser leídos de esa forma necesariamente. Por lo tanto, existen ambigüedades entre ambos tipos de lenguajes (Drouhard y Teppo, 2004; Morgan, 2006; O'Halloran, 2000, 2005, 2007).

12.6.2.3. El Lenguaje Algebraico

De acuerdo con la revisión que se ha realizado es notorio que el estudio del Lenguaje Algebraico es escaso en la disciplina. Tómese como ejemplo algunos de los monográficos y números especiales de revistas del campo (Moschkovich, Wagner, Bose, Rodrigues Mendes, y Schütte, 2018; Stacey, Chick, y Kendal, 2004 y el volumen 46 de la revista ZDM dedicado al tópico *Language and Communication in Mathematics Education*); de modo que los trabajos que han descrito aspectos sobre el Lenguaje Algebraico han proporcionado elementos generales de sus características, pero se considera que aún es necesario profundizar en este aspecto.

Por ejemplo, Papini (2003) menciona que el desarrollo del lenguaje y el pensamiento, desde la postura de Vigotsky, de manera general se da porque el lenguaje al que se refería Vigotsky era el lenguaje cotidiano, con el que los sujetos sociales están en constante contacto, por lo que la mediación entre pensamiento y lenguaje se da naturalmente. Por el contrario, tomando en cuenta que el Lenguaje Algebraico no es de uso cotidiano, esta relación dialéctica resulta compleja de entender.

Incluso, esta misma autora señala que el Álgebra y su Lenguaje rompe con la concepción de Vigotsky pues consiste en un ejemplo paradigmático debido a que está caracterizado por un lenguaje escrito, lo cual implica una diferencia con la adquisición de las competencias para participar en los actos del habla (Baquero, 1996, citado en Papini, 2003).

Según Papini (2003), Baquero (1996) señala que:

> Por el solo hecho de pertenecer a una cultura los sujetos aprenden a hablar movidos por la necesidad de la comunicación. Mientras que esta sola pertenencia no alcanza para la apropiación de la lengua escrita. La adquisición de las competencias para la escritura se posibilita con la participación en situaciones sociales específicas, que si bien requieren de la existencia previa del habla no resultan de su evolución espontánea. La escritura requiere de mayor abstracción y para ello de un creciente control voluntario y consciente de los procesos psicológicos superiores (p. 63).

A este respecto, Leal (1987) explica que el desarrollo de la escritura siguió un proceso largo y complejo que se caracterizó por diversas fases: Pictográfica, Ideográfica, Silábica y de componentes mínimos (vocales y consonantes).

Por lo tanto, basándose en este último planteamiento, el Lenguaje Algebraico dado que posee características especiales por, aparentemente, privilegiar lo escrito, requiere de un análisis más cercano a consideraciones lingüísticas que permitan entender su especificidad y posibles vías para la instrucción.

De hecho, dentro de la lingüística existen metodologías enfocadas a la instrucción de la escritura, como la Pedagogía de Género que se basa en un Ciclo de Enseñanza Aprendizaje (CEA) (Rothery, 1996). Cada CEA consta de tres etapas principales: *deconstrucción*, *construcción conjunta* y *construcción independiente* (Humphrey y Macnaught, 2011).

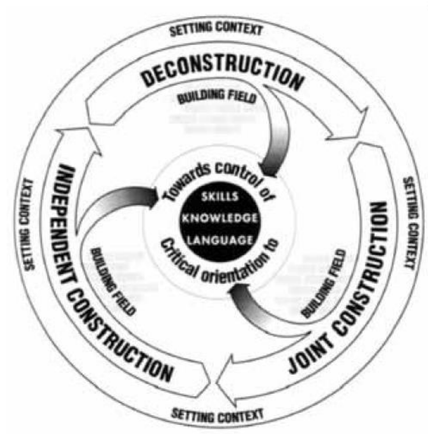


Figura 88. Ciclo de Enseñanza Aprendizaje (Rothery y Stenglin, 1995)

Otra de las consideraciones que hacen importante el estudio del Lenguaje Algebraico es que según O'Halloran, (2000, 2005, 2007) este lenguaje puede contemplarse como la lexicogramática[43] que constituye el lenguaje matemático actual. Esta afirmación está sustentada en el hecho de que la evolución del lenguaje matemático actual está asociado a la evolución respecto al género de los textos matemáticos del "álgebra retórica", "álgebra sincopada" y el "álgebra simbólica".

Aunado a lo anterior, para Pimm (1987) el Álgebra es el metalenguaje con el que se enseña la aritmética en la escuela, pues las reglas que rigen las propiedades aritméticas son las del Álgebra como su generalización, lo cual en cierto sentido ocasiona ambigüedad, en términos de si lo que se enseña es sobre aritmética, o bien, es en realidad una aritmética generalizada. Al respecto menciona:

> El metalenguaje de la aritmética es el álgebra. Mucho pero no todo, de las transformaciones – las leyes de la aritmética – son ya sea enseñadas explícitamente a los alumnos en el metalenguaje, o en la forma de especializaciones aritmética desde las cuales los alumnos esperan extrapolar las formas generales. Ahí se mantiene la ambigüedad si esas leyes son leyes de la aritmética o leyes del álgebra (p. 164).

Un aspecto relevante que se pude interpretar de la hipótesis y preguntas iniciales es la caracterización de que el lenguaje algebraico se pensó como un lenguaje simbólico, pues se creía en esos momentos del trabajo que lo algebraico estaba asociado únicamente con los simbólico ($x + y = 3$; $ax^2 + bx + c = 0$; $\sum_{i=1}^{n} i$). Sin embargo, desde la lingüística existe un debate sobre si los símbolos escritos pueden considerarse lenguajes por sí mismos. Algunos

---

[43] El constructo lexicogramática es una noción desde la LSF que alude a las características del léxico y la gramática del lenguaje como una unidad.

lingüistas afirman que los escritos simbólicos no constituyen lenguajes, pues son la forma escrita del lenguaje, es decir, es un recurso semiótico de representación del lenguaje hablado (Ren, 1968; Pimm, 1987).

En el trabajo de Drouhard y Teppo (2004) se analiza el Lenguaje Algebraico desde una perspectiva lingüística, donde el acercamiento hacia la caracterización del Lenguaje Algebraico se hace analizando tres niveles lingüísticos: sintáxis (la organización y la transformación de los símbolos), semántica (el nivel de significado) y pragmática (la relación entre los signos y los usuarios).

A pesar de los señalamientos relativos a la negación de que los escritos simbólicos no podrían ser considerados como lenguajes, trabajos como los de Kirschner (1987) y Drouhard (1992), demostraron que los escritos simbólicos del Álgebra, en efecto, podrían considerarse un lenguaje. Esto al probar que dichos escritos pueden ser generados por gramáticas particulares, apoyándose en la Gramática Generativa de Noam Chomsky para el caso de las reglas sintácticas, así como de la de Gottlob Fredge para las reglas semánticas (Drouhard y Teppo, 2004), donde se recurre en el segundo caso a las nociones de denotación y sentido, que definen los significados de las expresiones. La idea es que el trabajo con el Álgebra requiere de un cambio constante entre el sentido de las expresiones y los enunciados, pero cuidando que la denotación sea la misma siempre, es decir, no cambiarla. La denotación quiere decir que existen formas distintas de expresar lo mismo, por ejemplo, $2+1$, $6/2$, $4-1$, son formas de denotación del número 3. En el caso de las expresiones y enunciados algebraicos (por ejemplo, $x+3$ y $x+3=5$, respectivamente), las primeras denotan una cantidad indefinida de números, mientras que los segundos representan funciones[44] que poseen un valor de verdad (Por ejemplo, la expresión $2x+3=11$ denota una función cuyo valor es Falso para todos los números reales excepto el 4 (Drouhard y Teppo, 2004, p. 234).

El sentido de las expresiones y enunciados matemáticos permite determinar a la denotación, pues es la forma en la que esta última es dada.

> En el caso de la expresión aritmética (por decir, $2x(3+4)$) el sentido indica cómo encontrar su denotación: aquí, uno debe doblar la suma de 3 y 4. El sentido nos da información de lo que se puede. Por ejemplo, $2x^2+2x$ puede ser factorizado, mientras que $2x(x+1)$ puede ser expandido (Drouhard y Teppo, 2004, p. 235).

---

[44] Para Fredge los enunciados algebraicos s como $2x+3=11$ denotan funciones δ_s de $(\mathbb{R}\cup\{U\}^n)$ a $\{$VERDADERO, FALSO, U$\}$.

> La actividad algebraica –tal como resolver ecuaciones, reducir expresiones, o simplificar una suma de fracciones—son todos juegos que producen una secuencia de cambio de sentido, mientras que, al mismo tiempo, se deja la denotación igual (Drouhard y Teppo, 2004, p. 236).

Por otro lado, la pragmática del lenguaje algebraico está asociada con formas de pasar de la memoria interna a la externa. Es decir, el uso está en formas de sintetizar información que difícilmente puede ser almacenada en la mente con la intención de manipularla.

> Simbolizamos cuando queremos algo que está ausente o perdido de alguna manera – Y trabajamos sobre o con el símbolo como un sustituto, y en ocasiones como un consuelo. A través del trabajo con el símbolo ganamos experiencia sobre la cosa que fue sustituida. Una de las razones principales y centrales por las que se simboliza es porque los símbolos permiten manipular por representantes, cosas que no son fáciles manipulables, o que son imposibles de manejar físicamente (Pimm, 1995, p. 110-11).

Considerando que la semántica de los símbolos algebraicos es oscura o casi nula, su funcionalidad recae, por un lado, en que "los símbolos proveen formas eficientes de almacenar y de transmitir información, porque permiten la compresión de una gran cantidad de información en un espacio pequeño (por ejemplo, una fórmula)" (Pimm, 1987, p. 149); mientras que por otro lado, esto mismo permite "la manipulación para moverse más rápido y sin problemas al ver de manera borrosa la distinción entre el símbolo y el objeto" (Pimm, 1987, p. 139).

Por consiguiente, "mucha de la fluidez en los cálculos que logran los matemáticos con las manipulaciones simbólicas emergen como resultado de ser capaces de trabajar solamente con los mismos símbolos sin pensar acerca de sus significados" (Pimm, 1987, p. 20).

No obstante, esta pragmática de los símbolos ocasiona dificultades en el aula, puesto que corresponden a un sistema muy conservador regido por reglas sintácticas y gramaticales muy específicas, que no son del todo claras para los estudiantes, por un lado, además de que en ocasiones el tratamiento escolar no permite lograr una distinción entre los símbolos y los representados. Este es el caso de las siguientes definiciones (Pimm, 1987):

- Un número entero es par, si este termina en 2, 4, 6, 8, o 0.
- Un número entero es par, si se puede dividir exactamente en dos números enteros iguales (p. 164).

Pimm (1987) explica que en el caso de la primera definición claramente el énfasis de la propiedad que se desea describir está asociada al símbolo, es decir, la propiedad de paridad se asocia al numeral de la cifra del número, mientras que, en la segunda, la paridad está asociada a la divisibilidad. De tal suerte que, así como este caso, hay muchas definiciones que se basan en la representación y no en las nociones matemáticas en juego. En términos de Duval (1999), se confunde el objeto con su representación.

Drouhard y Teppo (2004), consideran que el Lenguaje Algebraico es un subconjunto del Lenguaje Matemático que caracteriza Laborde (1982, 1990, citada en Drouhard y Teppo, 2004), constituido por: *lenguaje natural*, *escritos simbólicos algebraicos*, y *representaciones compuestas* algebraicas[45]. Este sistema semiótico de tres recursos coincide con lo mencionado por O'Halloran (2000, 2005, 2007, 2015) y Morgan (2006) respecto al Lenguaje Matemático en general. De manera más específica, Drouhard y Teppo (2004) señalan que el simbolismo matemático y el lenguaje natural son considerados ambos lenguajes, mientras que las representaciones compuestas no, por lo que son consideradas recursos semióticos[46]. Ellos mencionan que este aspecto implica que el estudio del lenguaje se debe hacer desde aspectos lingüísticos y semióticos.

12.6.3. Tercera revisión bibliográfica y planteamiento del problema de investigación

La intención en esta tercera revisión fue obtener un entendimiento respecto al desarrollo del álgebra simbólica y su naturaleza, tratando de identificar las raíces de la operatividad simbólica. Por lo tanto, con esta revisión se intentó atender a las preguntas de investigación planteadas, con base en preguntas más específicas como ¿cuál fue el desarrollo del álgebra simbólica?, ¿qué tipos de operatividad simbólica estuvieron presentes a lo largo de la historia?, ¿qué justificaba la operatividad del simbolismo algebraico?, ¿cuáles fueron las circunstancias sociales y culturales que definieron dichos lenguajes?

En este sentido se revisaron trabajos dentro de la ME y fuera de ella que abordaran el desarrollo del Álgebra para tener referentes histórico-epistemológicos que permitieran entender la génesis y razón de ser del Pensamiento y Lenguaje Algebraico y la manipulación simbólica. Como ya se mencionó, dentro de esta revisión se procuró consultar trabajos clásicos frecuentemente citados y utilizados en la disciplina, así como estudios más recientes que proveyeron información actualizada, desde nuevas perspectivas, y específica respecto al desarrollo del álgebra en distintas épocas.

Como se mostrará, una de las consecuencias más importantes de esta revisión final fue la concreción del objeto de estudio.

---

[45] En esta investigación, por cuestiones de coherencia con el referente teórico adoptado (O'Halloran, 2005) se emplea por sustitución del término *representaciones compuestas* de Drouhard y Teppo (2004) el de *imágenes visuales* de O'Haloran (2005).

[46] El término original que mencionan Drouhard y Teppo (2004) es sistema semiótico.

12.6.3.1. Desarrollo del álgebra simbólica. Algunos estudios al interior de la ME ilustrativos sobre la operatividad algebraica

Gran parte de las caracterizaciones sobre la naturaleza del Pensamiento Algebraico provienen de estudios histórico-epistemológicos que han estudiado diferentes épocas, culturas y personajes relacionados con la producción de las ideas algebraicas. En términos generales, este tipo de estudio permiten miradas más críticas y comprensivas sobre la complejidad de la evolución, construcción y consolidación de los conocimientos matemáticos. Como aspectos más particulares, permiten comprender mejor las dificultades cognitivas, concepciones y errores de los estudiantes, así como también identificar decisiones sobre el qué se enseña y cómo generar nuevos escenarios para organizar y articular los conocimientos al interior del aula con base en las condiciones que permitieron su emergencia y evolución (Cantoral, 2013; Gallardo, 2002; Radford, 1995, 1997).

Dentro de los resultados más importantes de este tipo de estudios se tiene que la construcción y uso de las ideas algebraicas durante mucho tiempo no estuvo asociado al desarrollo del lenguaje simbólico tan prolífico que actualmente impera. Por ello la gran pertinencia de las aproximaciones como el *early algebra* y el *prealgeba* a la enseñanza del álgebra desde etapas más básicas de la educación, toda vez que estas posturas consideran a bien desarrollar Pensamiento Algebraico de manera progresiva sin necesidad de un sistema de signos tan cercano al actual.

Profundizando en algunos estudios histórico-epistemológicos relativos al Pensamiento Algebraico puede identificarse que la pregunta que plantea Socas (2011) sobre la naturaleza del Pensamiento Algebraico resulta compleja de responder, puesto que tratar de encasillar todo el desarrollo conceptual de las ideas, como así también las distintas formas de algebrizar en una sola definición iría en contra del largo y complejo proceso que la humanidad siguió. Incluso, posterior al momento en el que se constituye el álgebra simbólica —más cercana a nuestro discurso algebraico escolar y científico— hubo diferentes acepciones sobre lo que el álgebra representaba para los matemáticos. Por ejemplo, en Katz y Barton (2007, p. 185) se presentan las definiciones por Colin Maclaurin y Leonhard Euler para argumentar esta idea:

> [...] Colin Maclaurin escribió, en su texto de álgebra de 1748, "El álgebra es un método general de cálculo por medio de ciertos signos y símbolos que han sido ideados para este propósito y que se han encontrado convenientes. Se llama Aritmética Universal, y procede por Operaciones y Reglas similares a las de la Aritmética Común, fundadas sobre los mismos Principios". (Maclaurin, 1748, p. 1). Leonhard Euler, en su propio texto de álgebra de 1770 escribió: "El álgebra ha sido definida, la ciencia que enseña a determinar las cantidades desconocidas por medio de las que son conocidas". (Euler, 1984, p. 186).

De hecho, narrar la historia del álgebra por sí misma es sumamente compleja, por la gran variedad de caminos que pueden seguirse en términos de los objetos de estudio que pueden elegirse. Para Puig (2008), por ejemplo, las consideraciones que deberían tomarse en cuenta para narrar la historia del álgebra, serían:

> [L]a historia del sistema matemático de signos del álgebra, en particular, la historia del cálculo en el plano de la expresión sin recurso al plano del contenido; la historia de los conceptos de número; la historia de las tradiciones subcientíficas de resolución de problemas y la historia del método de análisis para resolver problemas (Puig, 1998, p. 2).

Posteriormente, Puig y Rojano (2004, p. 198), definen seis componentes generales que pueden ser considerados como componentes del estudio de las ideas algebraicas.

1. La historia del simbolismo.
2. La historia de la resolución algebraica de problemas.
3. La historia de la resolución de ecuaciones.
4. La historia de las interacciones del álgebra con otros dominios matemáticos.
5. La historia de la aparición de la idea de las estructuras algebraicas.
6. La historia del concepto de número.

De modo que estudiar la historia del álgebra es complejo, dada esta diversidad de opciones. Ahora bien, en el caso de esta investigación, se partió sobre la idea de estudiar la operatividad simbólica, lo cual llevó a una revisión de trabajos que permitieran generar un entendimiento más robusto sobre las causas de dicha operatividad.

En la Matemática Educativa, trabajos como los de Radford (1995, 1996, 1997, 2002), Filloy (1999), Rojano (1996), Puig (1998), Puig y Rojano (2004), Filloy, Puig y Rojano (2008) Gallardo (2002) y Gallardo y Basurto (2010), entre otros, han proporcionado fundamentos importantes al respecto, estudiando principalmente culturas previas a lo que Nesselman (1842) denominó álgebra simbólica. De manera acertada el estudio de las culturas mesopotámicas (babilónicas y egipcias), griegas, chinas y medievales árabes y del ábaco han dejado ver que la naturaleza del álgebra es tan diversa como las culturas mismas, así como que también los conocimientos algebraicos han presentado características de otros tipos sofisticados de conocimientos como los aritméticos y geométricos respectivos a las distintas épocas y tradiciones culturales.

Por ejemplo, en los trabajos de Radford (1995, 1996, 1997, 2002) se argumenta que el álgebra de Diofanto plasmada en su tratado *Arithmetica* heredó dos elementos fundamentales provenientes del álgebra babilónica y egipcia: el pensamiento proporcional cuya base está fundada en el *método de la falsa posición*; y el *álgebra de cortar y pegar* (con base en las interpretaciones del historiador Jens Høyrup sobre tablillas babilónicas). Radford, basándose en las evidencias encontradas por Høyrup, muestra cómo incluso en algunos tratados algebraicos medievales se pueden rastrear elementos de ambas culturas y señala que la forma en la que es empleado el número indeterminado en la resolución de problemas por Diofanto (*Arithmos*) es una metáfora del uso operativo de la falsa cantidad. De modo que existe una herencia y reinvención de los conocimientos mesopotámicos a través de las culturas posteriores produciendo formas de algebrizar de manera cada vez más sofisticadas.

> La conexión conceptual entre las ideas de falsa posición y las algebraicas también se puede encontrar en las matemáticas post-griegas. Se puede remontar a algunos tratados matemáticos medievales. Es particularmente esclarecedor que, en los métodos de falsa posición, los matemáticos, al principio del procedimiento de resolución de problemas, solían referirse a la acción de elegir los números falsos como "hacer una posición". De la misma manera, cuando un problema se resuelve con álgebra, la introducción de lo desconocido se denomina a veces "hacer una posición" (Radford, 2002, p. 19).

De acuerdo con Radford (1996) la naturaleza del álgebra numérica, basada en la falsa posición, implica un modo de pensamiento hipotético, pues se razona y opera como si se conociera el número desconocido. Esto puede percibirse en su descripción método de la falsa posición:

> [E]l escriba comienza asignando un valor numérico, que se reconoce como falso a priori, a las cantidades buscadas [...]. Utilizando los valores falsos y los datos dados en la declaración del problema, obtiene nuevos datos. Los nuevos datos [...] pueden ser compensados para obtener una solución correcta (Radford, 1996, p. 42).

En Radford (2002) se describe de manera concisa el método de falsa posición y su base en el pensamiento proporcional babilónico, considerando un ejemplo hipotético al estilo de los problemas babilonios sobre la determinación del peso de piedras. El problema consiste en determinar el peso de una piedra que no ha sido pesada desde un inicio y a cuyo peso original se le agrega una onceava parte de este, resultando en un peso total de 1 al medir el peso total. Este problema en términos actuales podría escribirse simbólicamente como $x + \frac{1}{11}x = 1$.

> Supongamos que este problema se refiere al peso de una piedra. El método de la posición falsa es el siguiente: suponemos (según la línea de pensamiento habitual en las matemáticas babilónicas) que la cantidad buscada es 11; entonces, la piedra y una undécima parte de su peso es 12. Sin embargo, deberíamos tener una. Esto significa que necesitamos reducir la "posición falsa", es decir, el valor falso que asumimos al principio (es decir, 11). Para reducirlo, un argumento proporcional elemental muestra que necesitamos tomar una doceava parte de nuestra suposición inicial, por lo que la respuesta al problema es 11/12. (Radford, 2002, p. 17).

Por otro lado, Radford (1996, 2002) muestra que la operatividad de los números indeterminados en algunos casos también se asocia a un razonamiento figurativo en el que se interpreta una relación directa con secuencias de transformación de figuras geométricas (Radford, 1996). Esto lo hace basándose en las interpretaciones de Jens Høyrup, quien a través de su método interpretativo sustentado en el *análisis estructural* y la *lectura cercana* (Høyrup, 2002) logra dilucidar un carácter “geométrico ingenuo” —como él lo denominó—de los métodos empleados por los babilonios para resolver los problemas y así, romper con las interpretaciones clásicas de otros autores que señalaban que dichos métodos seguían una lógica algebraica desde la óptica moderna.

Høyrup (1990, p. 211, citado en Radford, 1996, p. 40) señala a este respecto los siguiente:

> El "álgebra" de la antigua Babilonia no puede haber sido aritmética, es decir, conceptualizada como tratando con números desconocidos organizados por medio de operaciones numéricas. En cambio, parece haber sido organizada sobre la base de una geometría "ingenua", no deductiva.

Tal es el caso del siguiente problema:

> “La superficie y la línea cuadrada que he acumulado: 3/4."
>
> 1 la proyección que usted puso. La mitad de 1 se rompe, 1/2 y 1/2 se hace espacio [un rectángulo, aquí un cuadrado], 1/4 a 3/4 se añade: 1, hace 1 equilátero. 1: 1/2 que has hecho sostener en el interior de 1 se arranca: 1/2 la línea cuadrada. (Traducción con base en Høyrup, 1986, p. 450 y 2002, p. 52).

Descripción que puede seguirse de manera muy cercana bajo las siguientes transformaciones geométricas de acuerdo con Radford (1996, p. 41):

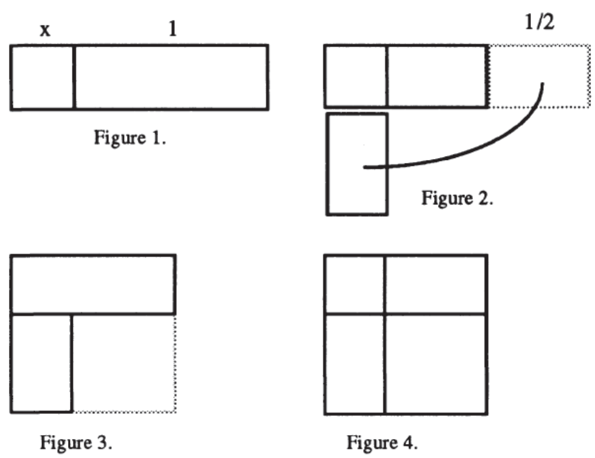


Figure 1.
Figure 2.
Figure 3.
Figure 4.

Uno de los aspectos más interesantes de este tipo de métodos geométricos es que su conceptualización es diferente a los numéricos, pues la cantidad desconocida no es el objeto de los cálculos, mientras que en el álgebra numérica sí lo es. Tómese como ejemplo el descrito anteriormente sobre la falsa posición (Radford, 1996).

Si bien se pueden encontrar en las culturas posteriores a las mesoponámicas los vestigios de los métodos de resolución de problemas babilonios y egipcios, lo cierto es que como se mencionaba al inicio la naturaleza del tipo de textos algebraicos que se construyeron en distintas épocas y culturas demuestran ser distinta. Esto debido a las diferentes prácticas sociales (Radford, 2003) y, por ende, diferentes ontologías sobre el quehacer matemático que caracterizaron los distintos quehaceres de los matemáticos involucrados con el desarrollo de estas ideas.

De manera convincente Radford (1996, 2002) muestra la gran innovación que hace Diofanto sobre la forma en la que resuelve los problemas numéricos, los cuales, a pesar de guardar una estrecha relación con los resueltos por los mesopotámicos, son reinventados y usados para elevar estos métodos a una disciplina más científica (Radford, 2002). Dicha innovación—permeada por la naturaleza del pensamiento griego clásico que buscaba por sobre todas las cosas el origen de las cosas y la organización racional, residió en la categorización de los tipos de cantidades, es decir, de especies de cantidades (*eidos*) (cuadrados, cubos, cuadrados-cuadrados, cubos-cubos, etc.) que en conjunto con la conceptualización de un número general, lo cual rompía con la tradición griega clásica respecto al número, permitieron a Diofanto tratar de manera más general la resolución de igualdades de números conocidos e indeterminados.

Radford (2002) menciona que en el primer libro de la *Arithmetica* de Diofanto se encuentra la primera descripción explícita antigua de cómo operar en las igualdades.

> …si un problema conduce a una ecuación en la que ciertos términos son iguales a términos de la misma especie (eidos) pero con coeficientes diferentes, será necesario restar como de igual a igual en ambos lados, hasta que se encuentre un término igual a un término. Si por casualidad hay términos negativos en ambos lados o en ambos lados, será necesario sumar los términos negativos en ambos lados, hasta que los términos en ambos lados sean positivos, y luego de nuevo restar lo mismo de lo mismo hasta que quede un solo término en cada lado (Heath, 1910, p. 131, citado en Radford, 2002, p. 20).

Obsérvese en el siguiente ejemplo retomado de Meskens (2010) la forma en la que esta operatividad es manifestada. Cabe mencionar que las expresiones simbólicas de Diofanto difieren de las originales, pues el símbolo “$+$” por ejemplo, se elidía en sus expresiones, mientras que el “$-$” correspondía con el símbolo $\pitchfork$, además de que los números correspondían al sistema numérico iónico y heridiónico (Meskens, 2010):

A continuación, como ejemplo se muestra uno de los problemas más famosos de la *Arithmetica*, de acuerdo con Meskens (2010): el problema 8 del segundo libro.

Traducción basada en Meskens (2010, p. 58)	Traducción en términos modernos
II.8. Dividir un cuadrado en dos cuadrados:	
Propongo dividir el 16 en dos cuadrados.	$a + b = 16$
Puse que el primer número es $\boldsymbol{\delta^{\upsilon}}$, entonces el otro es $\boldsymbol{16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}}$. Así que es necesario que $\boldsymbol{16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}}$ sea un cuadrado.	$a = x^2$; $b = 16 - x^2$
Toma el cuadrado de un múltiplo aleatorio de $\boldsymbol{\varsigma}$ del cual la raíz cuadrada de 16 sea sustraída. Tomemos por ejemplo $\boldsymbol{2\varsigma - 4\dot{\mu}}$ o, cuyo cuadrado es igual a $\boldsymbol{4\delta^{\upsilon} + 16\dot{\mu} - 16\varsigma}$.	El cuadrado de un múltiplo aleatorio de x del cual la raíz cuadrada de 16 sea sustraída es de la forma $(kx - 4)$. Sea $(2x - 4)$, cuyo cuadrado es $4x^2 - 16x + 16$
Ponemos esto igual a $\boldsymbol{16\dot{\mu} - \delta^{\upsilon}}$. Si sumamos los números faltantes en ambos lados y si restamos iguales de iguales, encontramos que $\boldsymbol{5\delta^{\upsilon}}$ es igual a $\boldsymbol{16\varsigma}$ y $\boldsymbol{\varsigma = \frac{16}{5}}$. De lo cual se deduce que uno de los números es igual a $\boldsymbol{\frac{256}{25}}$ y el otro a $\boldsymbol{\frac{144}{25}}$. Por lo que la suma de los números es $\boldsymbol{\frac{400}{25}}$.	$4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$ $5x^2 = 16x$ $x = \frac{16}{5}$ $a = \frac{256}{25}$ y $b = \frac{144}{25}$

Tabla 66. Ejemplo de problema de Diofanto

De este problema se muestra cómo Diofanto recurre a las reglas para operar con las igualdades descritas previamente e incluso se puede ver cómo recurría a sustituciones complejas que demostraban una robusta comprensión de las relaciones entre polinomios. De manera que este tipo de presentaciones deja de manera muy clara que a pesar de no contar con un simbolismo tan sofisticado como lo desarrollarían futuros algebristas durante el renacimiento, las reglas de operatividad de los polinomios eran bien conocidas por Diofanto. A pesar de que sus problemas eran paradigmáticos, es decir, se basaban en casos específicos, lo cierto es que en muchos de ellos se deja ver que le importaba obtener la mayor cantidad de soluciones posibles. Tómese como ejemplo lo que menciona "*Toma el cuadrado de un múltiplo aleatorio de* ς", lo cual puede escribirse en términos modernos como $(nk - 4)^2$.

La gran pericia demostrada por Diofanto se deba quizás a que, como se ha argumentado por varios investigadores, fue el equivalente a Euclides para las técnicas y métodos de resolución de problemas que provienen de las culturas mesopotámicas (Meskens, 2010), es decir, es considerado un compilador de estos tipos de conocimientos, al igual que Al-Kwarismi para los árabes. Por lo tanto, considerando este rol atribuido a Diofanto resulta natural que su trabajo sea bastante prolijo y robusto, en comparación con sus predecesores.

A partir de estos ejemplos relativos a las culturas mesopotámicas y griegas, considerando el caso de Diofanto, aunque se puede incluir al segundo libro de los *Elementos* de Euclides como un despliegue de problemas del tipo "algebraico", puede verse que desde la antigüedad existían formas bien sofisticadas de tratar con las ideas algebraicas sin el recurso explícito de un simbolismo tan sistemático como el cartesiano. Incluso esto podía identificarse también en el caso de las culturas chinas y árabes como muestran los trabajos de Gallardo (2002) y Gallardo y Basurto (2010) y Puig (1998) respectivamente.

En el caso de la cultura China se muestra en Gallardo (2002) y Gallardo y Basurto (2010) que los chinos trabajaban en la eliminación sistemática de los coeficientes de los monomios, a partir de matrices, de manera casi idéntica a la que actualmente se hace. Además de que la autora señala que para los chinos las cantidades negativas no representaban ningún problema, lo cual se relacionaba con sus condiciones culturales (Gallardo, 2002, Radford, 1995). Como ejemplo, la autora muestra que el siguiente problema:

Al vender dos vacas y cinco cabras para comprar trece cerdos, hay un excedente de mil unidades de dinero. El monto obtenido de la venta de tres vacas y tres cerdos alcanza exactamente para comprar nueve cabras. Al vender seis cabras y ocho cerdos y comprar cinco vacas, hay un déficit de 600. ¿Cuál es el precio de los animales? (The Fiu Zhang Suanshu. Problema 8, citado en Gallardo y Basurto, 2010, p. 260).	Forma tabular china correspondiente al enunciado del problema $$\begin{matrix} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & 0 & 1000 \end{matrix}$$

Tabla 67. Ejemplo de problema chino

El problema concluye cuando el arreglo tabular queda de la siguiente forma:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -33 & 5 \\ 48 & 45 & -13 \\ 14400 & -3000 & 1000 \end{matrix}$$

De lo cual se obtienen las siguientes soluciones 1200, 500 y 300 (Gallardo y Basurto, 2010). De manera que los chinos podían resolver típicos problemas algebraicos de más de una incógnita sin la necesidad del simbolismo algebraico actual.

Por otro lado, en Puig (1998) se aborda el rol que jugó Muhammad ibn Mûsâ al-Khwârizmî en la historia del álgebra, puesto que en el tratado del árabe *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-*

muqâbala —alkitâb al-mukhtasar fî hisâb al-jabr wa'l-muqâbala, se presenta una forma distinta a sus predecesores de resolver problemas "algebraicos". Incluso, es bien sabido que el término "álgebra" proviene de este arte sistematizado por al-Khwârizmî.

Al igual que en los casos anteriores, en este libro el simbolismo sistemático no es una necesidad crucial para desarrollar y desplegar las ideas y nociones algebraicas.

Como se ha mencionado anteriormente puede considerarse a al-Khwârizmî como un compilador y sistematizador de los conocimientos relativos al arte que trata en su libro. Esto es confirmado por la mención que hace el propio al-Khwârizmî sobre el encargo que el Califa hizo sobre él de escribir un tratado que sistematice los conocimientos relativos a dicho arte.

> componer un tratado conciso sobre el cálculo por al-jabr y al-muqâbala, reducido a lo que es brillante e importante en las aritméticas utilizadas constantemente en los asuntos de herencias y legaciones, en los repartos y los procesos legales, en el comercio y en todos sus asuntos de agrimensura, de excavación de canales, de cálculos geométricos y otras cosas variadas de especie parecida (Puig, 1998, p. 7).

Puig (1998) hace una descripción considerablemente completa sobre el libro de al-Khwârizmî, de donde muestra la estructura general, los tipos de problemas que trata, la estructura de los problemas en tanto partes del proceso desde la enunciación hasta la demostración, las operaciones de cálculo consideradas para la resolución de los problemas y ejemplos de resolución, entre otros aspectos.

Al principio del tratado, al-Khwârizmî hace una caracterización de los tipos de números, o *especies de números* (Puig y Rojano, 2004), que son los únicos necesarios para el arte del al-jabr y al-muqâbala, los cuales denomina (Rosen, 1831, p. 6):

1. *Tesoros*: es la cantidad completa de la raíz multiplicada por sí misma
2. *Raíces*: es una cantidad que se multiplica por sí misma y consistente en unidades, o números hacia arriba, o fracciones hacia abajo
3. *Números simples*[47]: cualquier número que puede ser pronunciado sin la referencia de la raíz o el tesoro.

En general el libro escrito por al-Khwârizmî trata sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas y sobre problemas que pueden ser resueltos por medio de estas. El tipo de ecuaciones que aborda en el libro son las siguientes:

---

[47] Los números simples en el discurso de los problemas es expresado por la palabra "*dirhams*".

Traducción de Puig (1998) sobre las seis formas normales:		Traducción comparable en el lenguaje algebraico actual
Tesoro igual a raíces	$t = r$	$x^2 = x$
Tesoro igual a números	$t = a$	$x^2 = a$
Raíces igual a números	$r = a$	$x = a$
Tesoro y raíces igual a números	$t \pm r = a$	$x^2 \pm x = a$
Tesoro y números igual a raíces	$t + a = r$	$x^2 + a = x$
Raíces y números igual a tesoro	$r + a = t$	$x + a = x$

Tabla 68. Tipos de ecuaciones en el libro de al-Khwârizmî

La importancia de establecer y demostrar al inicio del tratado la validez del proceso de resolución para cada una de estas seis formas normales reside en el hecho de que cuando se tratan con una variedad de problemas en los capítulos subsecuentes del tratado, la intención es reducir los problemas a cualquiera de dichas formas, para luego aplicar el algoritmo de resolución demostrados para cada forma y con eso obtener las soluciones particulares. Este aspecto es algo que se mantendrá a lo largo de los tratados algebraicos hasta el Renacimiento. Las operaciones que se emplean para la reducción a las formas normales son las que dan sentido al tratado como tal, de hecho, son dos de ellas las que dan el título al tratado (Puig, 1998; Filloy, Puig y Rojano, 2008):

1. *Al-jabr*, o restauración: se emplea para eliminar las cantidades negativas (substractivas).
2. *Al-muqâbala*, u oposición: se emplea para eliminar las especies repetidas (términos semejantes).
3. *Radd*, o reducción: se emplea para "dejar un tesoro", es decir, que el coeficiente del término buscado sea uno por medio de la división de toda la "expresión". Oaks[48] (2009, 2012) y Heeffer (2008b, 2010a) muestran que la idea de polinomios que se tenía en la tradición árabe estaba más relacionada con *co-polinomios*, es decir, no eran entendidos en el sentido actual, pues se pensaba en operar sobre las expresiones por separado y estas operaciones afectaban a la otra expresión sin hacer mención explícita de operar en términos de la igualdad como ecuación.
4. *Ikmâl* o *Takmîl*, o completar: al igual que la anterior se emplea para dejar un tesoro y esto se hace mediante la multiplicación cuando el término buscado tiene como coeficiente una fracción.

[48] En la gran mayoría de los problemas resueltos en árabe medieval, las operaciones indicadas en la enunciación se realizan antes de que se establezca la ecuación. Esto es para asegurar que los dos lados de la ecuación sean polinomios. Idealmente, una ecuación en el álgebra árabe afirma la igualdad de dos cantidades fijas, no de dos cantidades que permanecen sin realizar debido a la presencia de la aritmética (Oaks, 2009, p. 170).

En Puig (1998) se muestran tres ejemplos de problemas que son reducidas a la quinta forma normal (tesoro y números igual a raíces), donde al final del problema menciona que ese aplique la regla para la quinta forma con el objetivo de obtener los valores de la solución.

A continuación, se muestra dos de esos ejemplos:

Traducción de Puig (1998, p. 14-15):	**Traducción al lenguaje algebraico actual**
He dividido diez en dos partes; luego he multiplicado cada parte por sí misma y sumadas resultan cincuenta y ocho dirhams (Enunciado)	
Construcción de la expresión que representa el problema	
Haces de una de las partes cosa y la otra diez menos la cosa.	Sea c la cosa. c; $10 - c$
Multiplica luego diez menos cosa por sí mismo, resulta cien y un tesoro menos veinte cosas.	Dado que el producto de la cosa por sí misma es un tesoro, se obtiene que: $(10 - c) \cdot (10 - c) = 100 + t - 20c$
Multiplica luego cosa por cosa, resulta tesoro	$c \cdot c = t$
Suma luego ambos, resulta la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams	$100 + 2t - 20c = 58$
Reducción a la forma quinta normal	
Restaura luego esos cien y dos tesoros de las veinte cosas sustraídas y súmalas a los cincuenta y ocho, resulta cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dirhams y veinte cosas.	$100 + 2t = 58 + 20c$
Reduce luego eso a un solo tesoro tomando la mitad del conjunto, resulta cincuenta dirhams y un tesoro igual a veintinueve dirhams y diez cosas.	$50 + t = 29 + 10c$
Opón luego con ése el otro, quitando veintinueve de cincuenta, queda veintiún y tesoro igual a diez cosas.	$21 + t = 10c$
Aplicación de la regla de a quinta forma normal	
Entonces halla la mitad de las raíces, resulta cinco; multiplica por sí mismo, resulta veinticinco. Quita luego de esto el veintiuno conectado con el tesoro, queda cuatro. Extrae luego su raíz, es dos. Quítala luego de la mitad de las raíces, que es cinco, queda tres.	
Resultado	
Es una de las dos partes, y la otra es siete.	
Comentario	
Este problema se refiere a uno de los seis tipos, que es “tesoro y números igual a raíces”. (p. 28-29)	

Tabla 69. Problema de al-Khwârizmî (Recuperado de Puig 1998, p. 14-15)

Traducción de Puig (1998, p. 16-17):	Traducción al lenguaje algebraico actual (Puig, 1998, p. 16-17)
Sea un tesoro, cuyo tercio y tres dirhams se le quita y luego se multiplica lo que queda por sí mismo y resulta el tesoro	$\left[t-\left(\frac{1}{3}t+3\right)\right]\cdot\left[t-\left(\frac{1}{3}t+3\right)\right]=t$
Quita un tercio y tres dirhams del tesoro, queda dos tercios de él menos tres dirhams, lo que es la raíz.	Si designamos la razón como r $$t-\left(\frac{1}{3}t+3\right)=\frac{2}{3}t-3=r$$ Esa expresión se identifica con la raíz, ya que multiplicada por sí misma es el tesoro.
Multiplica por tanto dos tercios de cosa, esto es del tesoro, menos tres dirhams por sí mismo.	El tesoro se identifica con la cosa $t\rightarrow c$. $$\left(\frac{2}{3}c-3\right)\cdot\left(\frac{2}{3}c-3\right)[=c]$$
Dos tercios multiplicado por dos tercios resulta cuatro novenos del tesoro y tres dirhams substractivos por dos tercios de cosa, resulta dos raíces	La cosa, que ha substituido al tesoro, como se multiplica por sí misma, da origen a una nueva cantidad que es un tesoro: $cc\rightarrow t$. Y como es una cantidad que se multiplica por sí misma, es ahora una raíz: $c\rightarrow r$. $$\frac{4}{9}t+9-4r=r$$
De nuevo tres dirhams substractivos por dos tercios de cosa, resulta dos raíces y menos tres por menos tres, resulta nueve dirhams. Son por tanto cuatro novenos de tesoro y nueve dirhams menos cuatro raíces, igual a una raíz.	

Tabla 70. Problema de al-Khwârizmî (Recuperado de Puig 1998, p. 16-17)

Como consecuencia de las primeras traducciones al latín que se hicieron sobre los tratados árabes del arte del al-jabr y al-muqâbala, la recepción de las ciencias en la Europa Oriental durante el siglo XII, como así también de las nuevas necesidades sociales, basadas en el desarrollo mercantil, se vio una creciente difusión de estos conocimientos que derivó en la creación de las escuelas del ábaco (Radford, 1995; Filloy, Puig y Rojano, 2008).

Cabe mencionar que de acuerdo con Oaks (2012) se señala que la tradición cultural árabe de enseñanza estaba fuertemente basada en la oralidad, es decir, en que los manuscritos se recitaban para aprender de memoria las reglas ahí descritas, por lo tanto, esto de alguna manera explica porque en el principio no se desarrolló una notación simbólica en los tratados árabes.

En este tenor, Oaks (2012, p. 33) presenta dos citas de dos autores de tratados que mencionan lo siguiente "[h]e compuesto este libro en forma de pregunta y respuesta, porque es fácil de entender, simplifica las nociones y facilita la memorización", "porque lo que el oído oye se establece firmemente en el corazón".

Los cálculos eran efectuados en tablas de arena y otros instrumentos en los que se simbolizaban ciertas partes que en ocasiones eran incorporadas en el texto como ilustraciones, aunque en el texto la descripción era retórica (Oaks, 2012).

Inclusive, el álgebra para los árabes era considerada una técnica más entre otras para resolver problemas:

> El álgebra fue sólo una de varias técnicas de resolución de problemas numéricos en el Islam medieval. Sus reglas se explican no sólo en los libros dedicados al álgebra, sino también en los últimos capítulos de muchos libros de aritmética, generalmente justo después del método de falsa posición doble. En muchos de estos libros se presentan problemas resueltos para ilustrar una variedad de métodos de resolución de problemas (Oaks, 2012, p. 39).

Lo cierto es que la difusión de los conocimientos, métodos y técnicas árabes dieron pie al desarrollo del álgebra tanto en esas épocas cercanas como futuras.

En Radford (1995) se presenta el siguiente problema del *Libber Abacci* de Leonardo Pisano, de la traducción de Boncompagni (1857), en el cual es claro ver la relación con la tradición árabe, pues es un problema del tipo que aborda Al-Khwârizmî en su tratado, y cuya resolución también se asemeja en mucho.

> Divide 10 en dos partes, junta sus cuadrados, y eso hace $62\frac{1}{2}$
>
> Que la primera parte sea una sola cosa, y esto multiplicado por sí mismo hace un tesoro.
>
> De la misma manera, multiplica la segunda parte, que es 10 menos una cosa, por sí misma; para la multiplicación haces esto: 10 veces 10 es igual a 100; una cosa sustraída multiplicada por una cosa sustraída constituye un tesoro que hay que sumar. Y dos veces 10 multiplicado por una cosa sustraída hace 20 cosas sustraídas y así por 10 menos 1 cosa multiplicada por sí misma hace 100 y un tesoro disminuido por 20 cosas. Sumando esto al cuadrado de la primera parte, es decir, al tesoro, habrá 100 y dos tesoros menos veinte cosas, y esto equivale a 62 1/2 denarios.
>
> Añade, por lo tanto, veinte cosas a cada parte, habrá 100 y dos tesoros iguales a 20 cosas y 62 1/2 denarios. Desechado, por lo tanto, 62 1/2 de cada parte, quedarán dos tesoros y 37 1/2 denarios que equivalen a 20 raíces; esta investigación ha sido llevada a la tercera regla de los casos mixtos, es decir, los tesoros y los números son iguales a las raíces.
>
> Para introducir la regla, divide los números y las raíces por el número de tesoros, es decir, por 2, y hará un tesoro y 18 3/4 denarios iguales a 10 raíces. Por lo tanto, dividir a la mitad las raíces, viene 5, que multiplicado por sí mismo será 25; de este restar 18 3/4, y 6 1/4 restos, restar la raíz [cuadrada] de éstos, que es 2 1/2, de la mitad de las raíces, que es de 5, y permanecerá 2 1/2; y esa es una de las partes anteriormente mencionadas; de esta derecha hasta 10 hay 7 1/2, que es la segunda. (Radford, 1995, p. 33).

Sin embargo, conforme el tiempo progresó también se dieron otros avances en algunos de estos personajes pertenecientes a la cultura del ábaco. Como ejemplo de esto puede citarse el tipo de soluciones que Jordanus de Nemore propuso en su tratado *De Numeris Datis*.

Considérese el problema que aparece en Høyrup (2010, p. 14)

> Si un número dado se divide en dos y se da el producto de uno con el otro, cada uno de ellos también se dará por necesidad.

> Que el número dado abc sea dividido en ab y c, y que el producto de ab con c sea dado como d, y que el producto de ab con c sea similar al producto de abc con sí mismo e. Entonces se toma el cuádruple de d, que es f. Cuando esto se retira de e, queda g, y éste será el cuadrado de la diferencia entre ab y c. Por lo tanto, se extrae la raíz de g, y será b, la diferencia entre ab y c. Y puesto que b será dado, c y ab también se dará ab.

La interpretación que usualmente se le ha dado al tipo de método de Jordanus es la de contemplar un modo general de resolución de ecuaciones, donde trata con números generales (Filloy, 1999; Puig y Rojano, 2004; Filloy, Puig y Rojano, 2008), similar a lo que Viète inventará con su arte analítico. Para Høyrup (2010), no necesariamente en contradicción con lo anterior, menciona que "Jordanus no opera con sus símbolos, cada cálculo lleva a la introducción de una nueva letra. Lo que Jordanus ha inventado aquí es una representación simbólica de un algoritmo, no un álgebra simbólica difusa" (Høyrup, 2010, p. 14).

Es claro que, con la discusión previa de estos trabajos clásicos en nuestra disciplina, a pesar de que todos los ejemplos ilustrados corresponden a lo que se considera etapas preliminares y algunas considerablemente distantes, en el tiempo, de lo que actualmente conocemos como álgebra simbólica, existía todo un gran cúmulo de conocimientos, técnicas y de tradición en la resolución de problemas "algebraicos". Por lo tanto, aun considerando los orígenes mesopotámicos del álgebra, puede verse que las ideas y métodos son considerablemente complejas.

Cabe mencionar que este tipo de trabajos permitieron acercamientos considerables sobre la epistemología de distintos aspectos del álgebra, lo cual ha proveído a la enseñanza del álgebra importantes consideraciones.

12.6.3.2. Desarrollo del álgebra simbólica. Estudios recientes fuera de la ME ilustrativos sobre la operatividad algebraica

Al paso de los años y posterior a estos trabajos, que se consideran clásicos en ME, se ha seguido profundizando en el entendimiento de la historia, epistemología y filosofía del álgebra. Uno de los aspectos más importante de los estudios históricos contemporáneos sobre el desarrollo del álgebra es que los métodos y miradas que se tienen ahora tratan cada vez más de tomar posturas más contextuales, evitando lo más posible caer en anacronismos. El historiador Albrecht Heeffer (2014) por ejemplo, señala que:

> [L]a epistemología histórica de las prácticas matemáticas se ha convertido en un interesante nuevo dominio de estudio. Tal aproximación favorece una fuerte contextualización del conocimiento matemático, su desarrollo y su circulación, al estudiar las prácticas matemáticas cognitivas y materiales dentro del contexto social y económico en la historia (p. 90).

Como consecuencia de estas nuevas formas de acercarse a la historia de las matemáticas se ha llegado, incluso, a la conclusión de que el modelo tripartito de Nesselman (1842), de las fases de desarrollo del discurso algebraico *retórica*, *sincopada* y *simbólica* refleja una visión normativa sobre el quehacer de los distintos discursos algebraicos (Radford, 1997, 2002; Heeffer, 2009, 2010a), toda vez que se mira a los acontecimientos históricos desde una epistemología moderna, formal, y platonista (Radford, 1997). Por lo tanto, dichas fases reflejan de manera limitada las verdaderas innovaciones que se dieron en cada una de dichas fases.

> [D]esde una perspectiva sociocultural, esta división del álgebra parece ser completamente diferente: el álgebra sincopada no fue una etapa intermedia de maduración en la que el conocimiento tomó una especie de descanso en su agotadora carrera hacia el simbolismo. En cambio, fue una mera estrategia técnica que las limitaciones de la escritura y la falta de impresión en tiempos pasados se impusieron a los escribas diligentes que tenían que copiar los manuscritos a mano (Radford, 1997, p. 27).

De manera más contundente Heeffer (2009, 2010a) refiere a una necesidad importante sobre generar modelos alternativos al de Nesselman, tarea a la que se advoca, proponiendo tres fases distintas resaltando primero lo obsoleto que resulta para la práctica científica actual seguir considerando el modelo de Nesselman. De manera sintética son tres problemas, de acuerdo con Heeffer que se consideran relevantes en esta distinción tripartita que usualmente la asocia con el título “el mito del álgebra sincopada”.

1. *Problema de cronología*. Nesselman considera el período del álgebra retórica[49] a partir de Iamblichus, al álgebra árabe, el álgebra italiana del ábaco y Regiomontano, período que abarca aproximadamente de 250 a 1470. El período del álgebra sincopada abarca desde la *Arithmetica* de Diofanto hasta el álgebra europea de mediados del siglo 17, en el que se incluyen, incluso Viète y Descartes. Finalmente, el período de álgebra simbólica es el álgebra moderna con el simbolismo que conocemos hoy día. Sin embargo, los estudiosos de Diofanto ubican a la *Arithmetica* entre 250 y 350. Por lo tanto, las etapas retórica y sincopada se sobreponen casi por completo, razón por la cual cabe hacer la pregunta sobre si ambos sistemas no se influenciaron uno al otro.
2. *El rol de los escribas*. Las primeras traducciones árabes de la *Arithmetica* se obtuvieron alrededor del siglo 12, lo cual separa por mucho tiempo el manuscrito original de su primera traducción y que en ese período de tiempo se dieron innovaciones por los escribas en la transcripción de los manuscritos, entre ellos abreviaciones de las palabras para ahorrar tiempo, esfuerzo y dinero, por lo cual Heeffer señala que la sincopación podría no ser invención de Diofanto sino de los escribas. La evidencia más contundente que se tiene al respecto es que en las primeras traducciones árabes de la *Arithmetica* no poseían sincopaciones.

[49] En la distinción de Nesselman (1842) no se consideran las culturas mesopotámicas babilonia y egipcia, puesto que no se habían descubierto las tablillas y papiros que hoy conocemos.

3. *Sobre símbolos y ligaduras*. Esta tercera crítica se centra en la caracterización de "retórico", "sincopado" y "simbólico", puesto que la característica de sincopado es que hay una predominancia retórica con el uso de algunos símbolos como abreviaciones operaciones e incógnitas. Otros autores como por ejemplo Jacob Klein han mostrado convincentemente que lo que suele considerarse como símbolo en la *Arithmetica*, no es cercano al símbolo algebraico (Klein, 1968), posición que Heeffer comparte. Por lo tanto, la categoría sincopada se vería desprovista del elemento que la distingue de la retórica.

Es importante decir que según Heeffer (2008b, 2009, 2010a) este "mito" del álgebra sincopada podría ser una consecuencia del proyecto Humanista del renacimiento en el que la idea principal era negar las raíces "barbáricas" del álgebra, aludiendo a las culturas árabes y del ábaco. Esto ya ha sido ampliamente señalado en distintos momentos por distintos autores (Cifoletti, 2006; Høyrup, 2002, 2010; Wagner, 2010; Oaks, 2009).

Tomando estas consideraciones y basándose en los avances más recientes, así como en sus propios análisis sobre las prácticas algebraicas, principalmente árabes y medievales, Heeffer (2008b, 2009, 2010a) propone un modelo alternativo de tres fases, que considera una postura diferente sobre el simbolismo.

> 1. *Álgebra no simbólica*: es un tipo de álgebra algorítmica que trata sólo con valores numéricos o con un modelo no simbólico. Ejemplos típicos son el álgebra geométrica griega o el método chino para resolver problemas lineales con múltiples incógnitas (Fāng chéng 方程).
>
> 2. *Álgebra proto-simbólica*: álgebra que utiliza palabras o abreviaturas de lo desconocido pero que no tiene carácter simbólico. Esto incluiría el álgebra de Diofanto, el álgebra árabe, el álgebra primitiva del Ábaco y el álgebra cósica alemana primitiva.
>
> 3. *Álgebra simbólica*: álgebra que utiliza un modelo simbólico, que sólo permite manipulaciones a nivel de símbolos. Establecido alrededor de 1560 y preparado por el ábaco y el álgebra cósica posterior, Michael Stifel, Girolamo Cardano y la tradición algebraica francesa. (Heeffer, 2009, p. 9).

Como profundización en la revisión de la historia del álgebra contemporánea se identificaron distintos autores que han profundizado en diversos aspectos de las prácticas algebraicas que no se había hecho antes, e incluso sobre autores sobre los que no se había profundizado del todo. En la Figura 89 se presenta una línea del tiempo respecto a estos autores y sus respectivos trabajos.

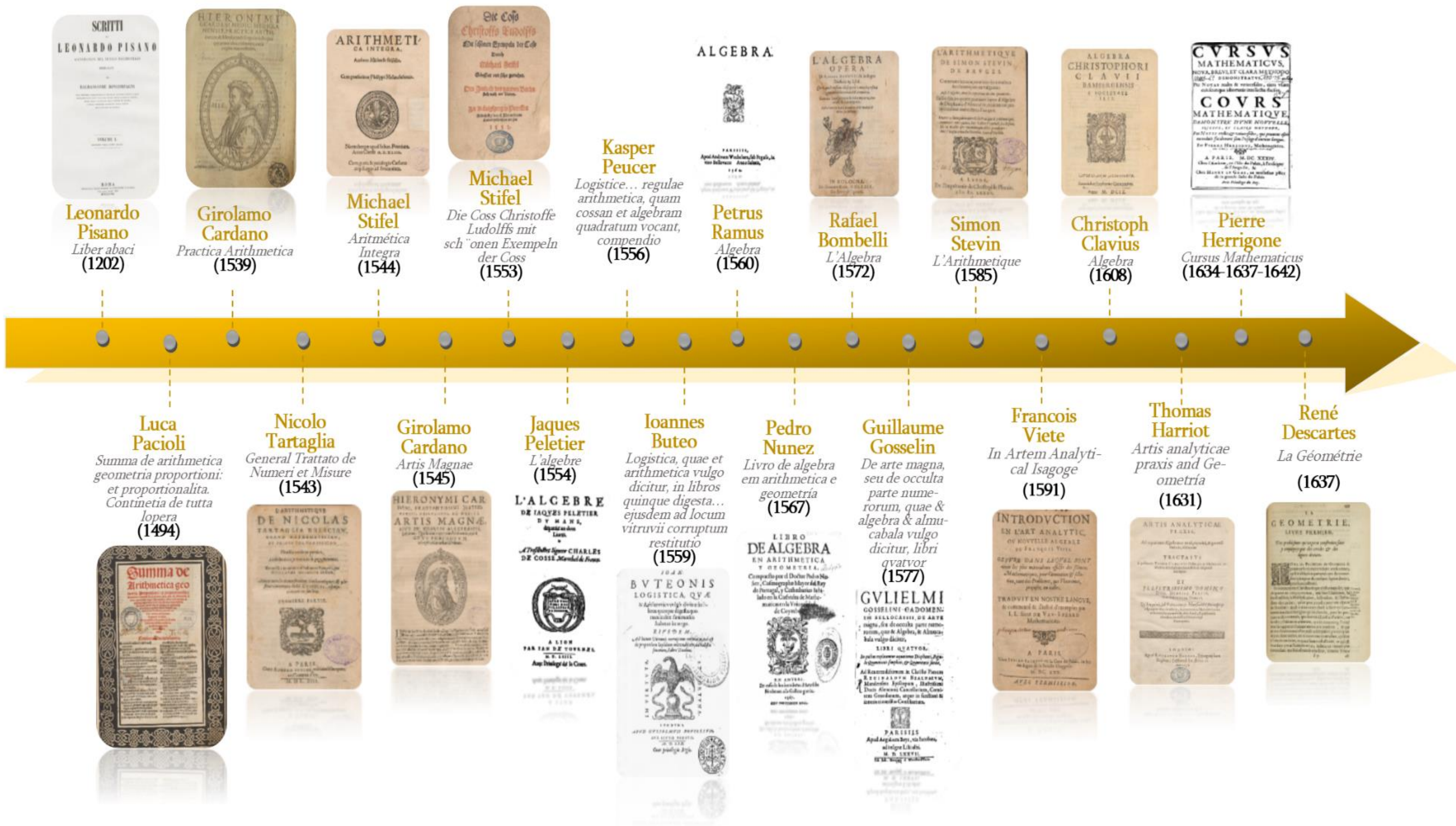


Figura 89. Línea del tiempo de algunos tratados algebraicos durante el Renacimiento

A continuación, se describirán las consideraciones más relevantes que los autores revisados en esta segunda fase de la revisión histórico-epistemológica del álgebra han reportado.

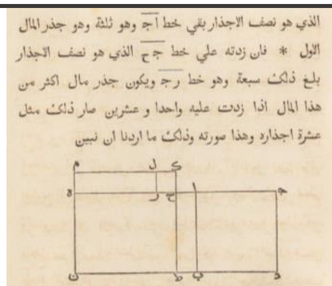
Albercht Heeffer se ha interesado en estudiar el álgebra medieval árabe, del ábaco y cósica abarcando un período de tiempo considerablemente amplio, en el que ha postulado la relevancia del razonamiento simbólico, el cual, no depende exclusivamente del uso sistemático de un lenguaje simbólico como el actual. Es por ello por lo que ha criticado fuertemente el modelo tripartido de Nesselman y por lo tanto lo ha llevado a proponer la alternativa antes mostrada.

La postura que defiende Heeffer está basada en una concepción sobre lo simbólico, está relacionada con lo que considera un *razonamiento basado en el modelo*, donde dicho razonamiento sigue un modelo simbólico. Este tipo de razonamiento está caracterizado por la capacidad que tiene el simbolismo no solo para representar sino también para crear nuevos objetos (Heeffer, 2008a, 2010a, 2014). Su postura trata de mostrar que previo a los algebristas clásicamente citados por haber construido el simbolismo algebraico, como Viète y Descartes, la forma de pensar ya poseía una carga simbólica considerable, sin un recurso semiótico simbólico como el moderno.

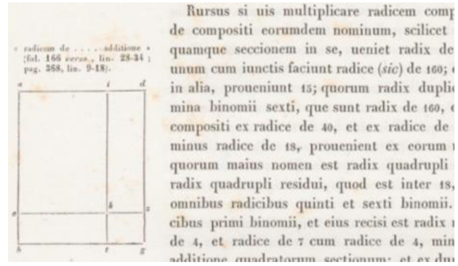
> En nuestra opinión, el camino hacia el álgebra simbólica fue pavimentado por varios pasos previos que han sido funcionales en el desarrollo del modo simbólico de razonamiento. El principal obstáculo para reconocer la importancia de los acontecimientos anteriores ha sido la *confusión entre el uso de símbolos y el razonamiento simbólico*. [...] [S]e pueden identificar varios casos de razonamiento simbólico en la resolución de problemas algebraicos mientras no se utilizan símbolos (Heeffer, 2008a, p. 153).

En Heeffer (2008a, 2008b, 2010a) se argumenta que fue durante el siglo 16 en la que se dio la transición de un razonamiento basado en modelos geométricos hacia el razonamiento simbólico. Este tránsito se dio en la generalización de las reglas aritméticas con la intención de generar explicaciones de "objetos que no eran comprendidos o aceptados" en términos ontológicos, el caso de las cantidades negativas, irracionales e imaginarias (Heeffer, 2008a, 2009, 2010a).

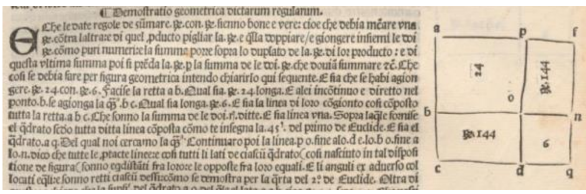
Si bien tanto para los árabes como para los matemáticos del ábaco, las técnicas de resolución no eran todas completamente geométricas, sí lo eran las justificaciones de sus procedimientos para la resolución de formas normales. En este sentido los fundamentos de las reglas y algoritmos para la resolución de problemas estaban basadas en razonamientos figurales como el descrito por Høyrup (1986, 2002) como "álgebra de cortar y pegar". Actualmente, esta forma de pensamiento refleja lo que Duval (1999) considera como *aprensión operativa* (véase Figura 90).



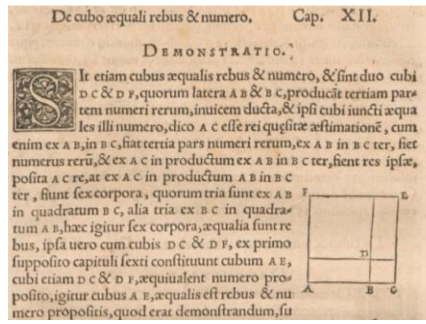
al-Khwârizmî (Rosen, 1831, p. 13)
Justificación de la regla "*un tesoro y veintiún dírhems son iguales a diez raíces*" (p. 341 pdf)



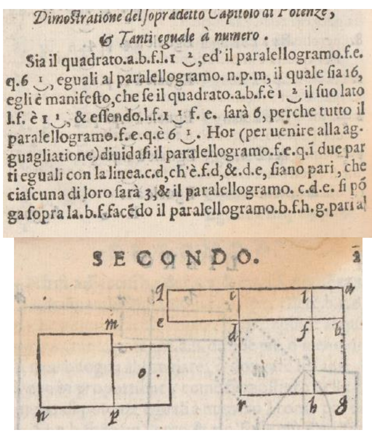
Lenardo Pisano (1202, traducción 1857, p. 368)
Justificación de la extracción de una raíz.



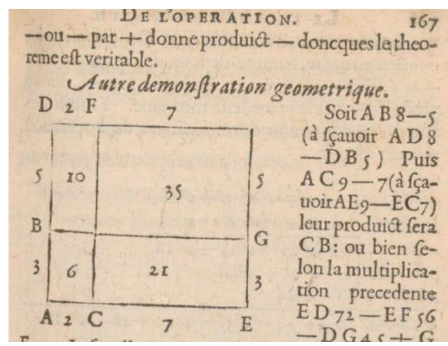
Luca Pacioli (1523, fol. 117)
Demostración de la extracción de una raíz.



Girolamo Cardano (1545, fol. 31)
Demostración del caso *Cubo igual a cuadrado y número*.



Rafael Bombelli (1572, p. 251-252)
Demostración del caso potencia y tanto iguale a número



Simon Stevin (1585, p. 167)
Demostración de la regla de los signos, desde un ejemplo específico $(8-5)(9-7)$.

Figura 90. Justificación epistémica basada en el razonamiento figural

Heeffer (2014) muestra que así como los modelos geométricos funcionaban como justificaciones epistémicas de los procedimientos para definir reglas para ciertos casos, también diagramas aritméticos cumplían la misma función para justificar reglas aritméticas y, que estas fueron, empleadas como forma de justificar resultados no aceptados. En particular, muestra el caso de Dardi, citado en Høyrup (2010) quien justifica el producto de dos números negativos y el caso de cómo Cardano justifica el producto de $\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15}$, ambos bajo el algoritmo de la multiplicación cruzada.

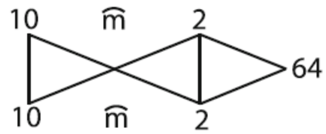


Figura 91. Justificación de Dardi basada en la multiplicación cruzada (Høyrup, 2010, p. 23)

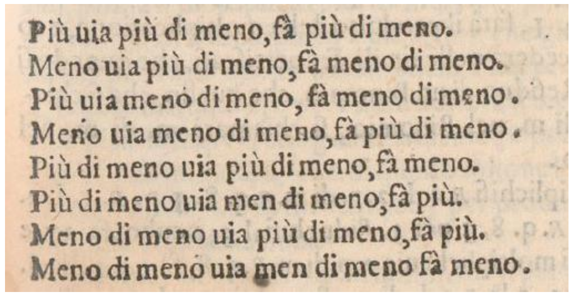
Dardi tratar de justificar que el producto de dos números negativos es positivo y emplea el siguiente razonamiento: Dado que $8{\cdot}8{=}64$, lo cual es lo mismo que $(10-2)\cdot(10-2)=64$. Entonces de acuerdo con la regla de la multiplicación cruzada (representada visualmente con el diagrama) se obtiene que $(10-2)\cdot(10-2)=100-20-20+(-2)(-2)=64$, obteniendo que $(10-2)\cdot(10-2)=60+(-2)(-2)=64$, por lo que $(-2)(-2)=4$ para que la regla se cumpla la relación entre las cantidades. De esta manera la multiplicación cruzada funge como una justificación epistémica que trasciende de los objetos aceptados hacia otros objetos cuya naturaleza no es clara. Es decir, permite la creación de nuevos conocimientos.

De la misma manera, Heeffer muestra que Cardano en el capítulo de "reglas para postular los negativos" trata un problema cuadrático que trata de dividir el número 10 en dos partes, las cuales cumplan que su producto sea 40. Problema al que se refiere como imposible[50] dada la naturaleza de la cantidad $\sqrt{-15}$. El resultado al que llega son las cantidades $5+\sqrt{-15}$ y $5—\sqrt{-15}$. Nuevamente al usar el algoritmo de multiplicación cruzada se llega a que $\left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(5+\sqrt{-15}\right)=25-(\sqrt{-15})(\sqrt{-15})=40$, por lo que el producto $\left(\sqrt{-15}\right)\left(\sqrt{-15}\right)$ tendría que ser (-15) para que se cumpla la relación.

Es claro con estos ejemplos ver que el rol que juegan las operaciones aritméticas básicas va saliendo de poco en poco del campo de los números enteros, lo cual permite conceptualizar y justificar la validez de otros objetos. Es el mismo caso de Bombelli quien extrapola estas reglas para operar con las cantidades imaginarias (Figura 92).

---

50 "manisestum est quod casus seu quaestio est impossibilis, sic tame operabimur" (Cardano, 1545, p. 66).



Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia menò di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di menò uia men di meno fà meno.

Figura 92. Reglas para la multiplicación de números imaginarios en L'Algebra de Bombelli (1572, p. 169)

Los planteamientos que hace Heeffer sobre el razonamiento simbólico relativos a la generalización de las operaciones aritméticas le permite caracterizar ciertas fases que permitieron la emergencia de lo que denomina la *ecuación simbólica* (Heeffer, 2008a, 2009, 2010a, 2010b) durante el período de los tratados de Cardano y Gousselin (1539-1577), período en el que se dio la transición al modelo simbólico de razonamiento. En Heeffer (2008a) se describen seis fases[51] que se presentan a continuación.

1. *La expansión de los operadores aritméticos a los polinomios*. Relacionado con el hecho de que las operaciones aritméticas eran aplicadas tanto a objetos aceptados como no aceptados. En este sentido tanto los objetos como las operaciones fueron reconceptualizadas como primer paso.

2. *Igualación de expresiones polinómicas*. En esta fase se da un cambio con la práctica clásica de operar con co-polinomios hacia la operación con los polinomios al hacer explícito que la afectación de operaciones se da en ambos miembros de la igualdad. En los trabajos medievales árabes, hindús y del ábaco se dio esta práctica de operar sobre co-polinomios.

> Cada operación que se realiza en uno de ellos [polinomios] debe ir seguida de una operación correspondiente para mantener la equivalencia aritmética del co-polinomio. En lugar de operar sobre ecuaciones, el álgebra árabe y la tradición abbaco operan sobre los polinomios coiguales[52], siempre teniendo en cuenta su relación y equivalencia aritmética. Esta noción está íntimamente relacionada con la operación al-jabr en el álgebra árabe temprana (Heeffer, 2010, p. 59).

---

[51] Estos planteamientos provienen del análisis que Heeffer realizó sobre alrededor de treinta tratados algebraicos entre 1460 y 1577.

[52] "El término coaequare denota el acto de mantener iguales a los polinomios relacionados. Toda la retórica de los textos del ábaco se basa en la reformulación de un problema utilizando lo desconocido y la manipulación de polinomios co-iguales para llegar a una expresión reducible en lo incógnita. Uno busca en vano las ecuaciones en los textos del ábaco" (Heeffer, 2008b, p. 27).

En Oaks (2009, 2012), Heeffer (2008b) y Høyrup (2010) se explica que es errónea la interpretación de la operación *al-jabr* como una operación que se aplica a ecuaciones, sino más bien es una operación que alude al hecho de completar co-polinomios basándose en significados geométricos principalmente.

Es en Cardano (1539) que Heeffer (2008a, 2008b, 2010b) considera se da la primera manifestación de igualación de dos polinomios. En la siguiente Figura 93 se muestra la igualación de dos polinomios planteadas en el tratado de Cardano *Practica Arithmetica*. Los polinomios en términos anacrónicos son $196 + 336x + 144x^2$ y $4160 - 2904x - 1452x^2$. Al igualarlos se obtiene la ecuación $4160 = -3240x - 1596x^2$.

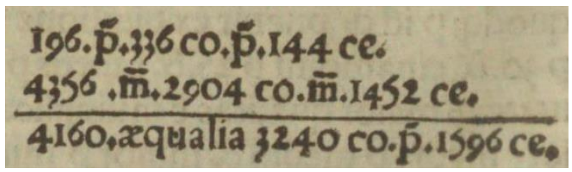
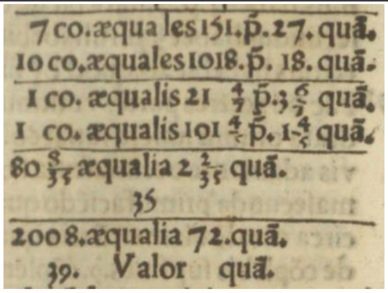

196.p̃.336 co.p̃.144 ce.
4356 .m̃.2904 co.m̃.1452 ce.
4160.æqualia 3240 co.p̃.1596 ce.

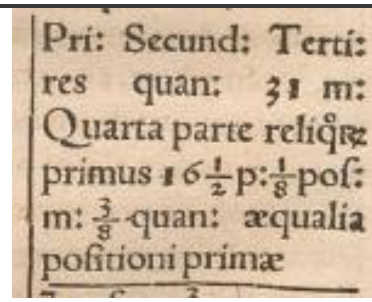
Figura 93. Primera igualación de polinomios en Cardano Practica Arithmetica (1539, p. 424)

3. *Introducción de la segunda incógnita*. El uso de dos incógnitas para la resolución de problemas fue un paso esencial para la operatividad sobre las ecuaciones y para el desarrollo del simbolismo respectivo. Heeffer (2010b) argumenta que antes de 1560 no se solía emplear más de una incógnita en la resolución de los problemas, sino una. Era común que las expresiones quedaran en términos de la primera incógnita, por ejemplo, los clásicos problemas para dividir a un número —por ejemplo, el número diez— en dos partes cuya diferencia sea dada empleaban expresiones del tipo: $x, 10 - x$. Incluso existían críticas sobre el uso de dos incógnitas para la resolución de los problemas, considerando la estrategia como confusa y más difícil de acuerdo con Pedro Nuñez (Heeffer, 2010b).

En la Figura 94 se muestran dos ejemplos de Cardano de sus tratados *Practica Arithmetica* y *Ars Magna* en los que resuelve problemas cuya solución propone por medio de la introducción de dos incógnitas junto con un signo para ambas. En el primer caso usa co y quà, mientras que en el segundo caso res y $quan$, lo que equivaldría en la notación actual a dos incógnitas de grado 1 cada una.



Cardano *Practica Arithmetica* (1539, p. 435)



Pri: Secund: Terti:
res quan: 31 m:
Quarta parte reliq̃s
primus 16½ p: ⅛ pos:
m: ⅜ quan: æqualia
positioni primæ

Cardano *Ars Magna* (1545, p. 21)

Figura 94. Introducción de la segunda incógnita en los trabajos de Cardano

4. *Expansión de operadores aritméticos a ecuaciones*. Consiste en multiplicar o dividir por un escalar. Esto lo encuentra también por primera vez en Cardano (1539). En la siguiente imagen divide las ecuaciones $7x = 151 + 27y$ y $10x = 1018 + 18y$ por 7 y 10 respectivamente.

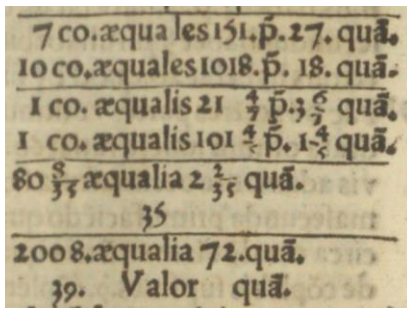
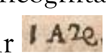
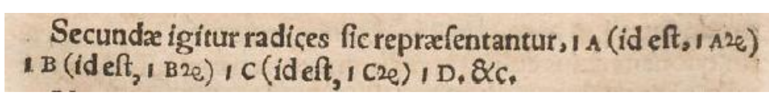


Figura 95. Operatividad sobre las ecuaciones en Cardano Practica Arithmetica (1539, p. 435)

5. *Introducción de letras para múltiples incógnitas.* Se recurre explícitamente al uso de varias letras para representar cada una de las incógnitas del problema, práctica que esencialmente no existía hasta antes del trabajo de Stifel (1544). En la imagen Stifel describe su primer intento de sistema para la designación de más de una incógnita. Para la primera incógnita usa la letra A junto con la estructura cósica clásica, es decir  , mientras que para las siguientes usa las siguientes letras del alfabeto respetando la misma estructura cósica anterior como se muestra en la Figura 96.



Secundæ igitur radices sic repræsentantur, 1 A (id est, 1 A2e) 1 B (id est, 1 B2e) 1 C (id est, 1 C2e) 1 D, &c.

Figura 96. Sistema de notación para múltiples incógnitas en Stifel Arithmetica Integra (1544, p. 252)

6. *Manipulación sistemática de ecuaciones lineales para eliminar incógnitas*. El reconocimiento de la distinción de varias incógnitas permitió eventualmente expandir las reglas aritméticas para la manipulación de ecuaciones, como sumarlas, restarlas para la eliminación sistemática de las incógnitas. Heeffer argumenta que fue Buteo (1559) (ver Figura 10) quien concluyó esta etapa

de conceptualización de la ecuación simbólica puesto que empleaba las operaciones aritméticas no únicamente en una ecuación sino en conjuntos de ecuaciones para eliminar las incógnitas. Esto implica una extensión de las operaciones aritméticas a las ecuaciones, es decir, objetos que no son cantidades.

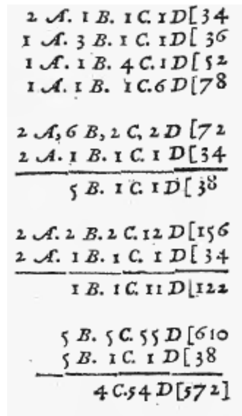


Figura 97. Manipulación sistemática de ecuaciones lineales en Buteo Logistica (1559, p. 194)

Además de Buteo, se tienen los casos de Cardano (1539, 1545), Stifel (1553), Peletier (1554) y Gosselin (1577), entre otros que mostraron eliminaciones sistemáticas de ecuaciones (ver Heeffer, 2010b).

Por otro lado, estudios como el de Stedall (2011) han sintetizado y profundizado en los avances que se hicieron respecto al estudio de las ecuaciones, principalmente, durante el período entre Cardano y Lagrange (1545-1771), mostrando la asombrosa capacidad que Cardano poseía para avanzar en el terreno del álgebra y el estudio de las ecuaciones, a pesar de trabajar con un simbolismo tedioso que al ojo moderno no permite a simple vista seguir con facilidad los procesos que pronunciaba.

El despliegue del análisis que hace Stedall (2011) se basa en la crítica que hizo Lagrange en 1771 en su *Reflexiones* sobre la falta de avance que se había hecho en el estudio de las ecuaciones desde Cardano y su *Ars Magna*. A partir de esta premisa Stedall hace un recorrido amplio sobre el estudio de las ecuaciones, partiendo de Cardano presentando síntesis de análisis robustos sobre los distintos algebristas en ese período[53], en particular, interesó ver los aportes de Cardano, Bombelli, Stevin, Viète, Harriot, Girard, Descartes, pues de acuerdo con el interés

[53] Este trabajo (Stedall, 2011) se divide en tres partes, la primera de Cardano a Newton (1545-1707), la segunda de Newton a Lagrange (1707-1771) y la tercera posterior a Lagrange. Para esta descripción nos centramos en la primera parte de ese trabajo.

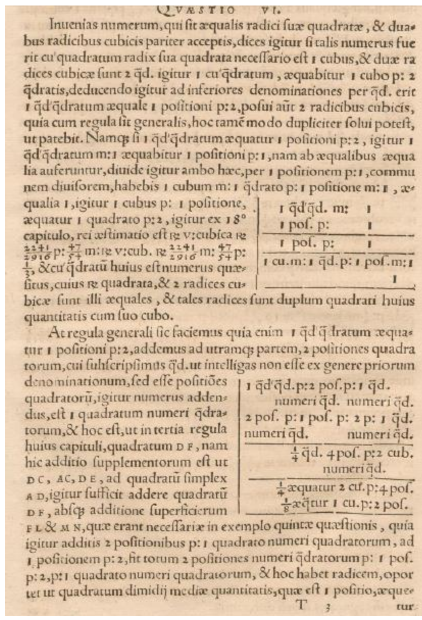
del objeto de estudio es, justo en este período (1539-1637), que la operatividad simbólica fue progresando hasta lo que hoy nos es más cercano.

El profundo análisis que muestra Stedall (2011) sobre la obra *Ars Magna* de Cardano deja ver que esta consistió en una compilación de reglas, métodos, técnicas y casos especiales que dejan ver el profundo entendimiento que Cardano poseía sobre las ecuaciones y sus estructuras. Empero, a pesar de no contar con una notación tan conveniente como la actual. Al finalizar la descripción, de manera general, Stedall (2011, p. 17) resume los mayores logros de Cardano como los siguientes:

1. Una regla general para resolver ecuaciones cúbicas, con reglas particulares para el caso irreductible donde la regla general parece no funcionar.
2. Un algoritmo, demostrado por ejemplos trabajados, que puede ser aplicado para resolver cualquier ecuación cuártica.
3. Un entendimiento de que las raíces de las ecuaciones pueden ser positivas o negativas, y en el caso cuadrático un indicio de que podrían ser incluso imaginarias.
4. Una investigación del número de raíces reales, y si son positivas y negativas, de cualquier ecuación cúbica.
5. Un entendimiento de que las raíces de las ecuaciones cuadráticas (con coeficientes racionales) son sumas de racionales y raíces cuadradas, y que a veces la raíz cuadrada puede ser de una cantidad negativa; y que las raíces de las ecuaciones cúbicas pueden ser combinaciones de racionales y raíces cúbicas.
6. La observación de que la sustitución de un número de la forma $l \pm \sqrt{m}$ en una ecuación polinómica da lugar a dos igualdades separadas, en cantidades racionales e irracionales respectivamente.
7. La idea de que las ecuaciones pueden transformarse de un tipo a otro mediante simples sustituciones. Los que Cardano usaba eran de la forma
   a) $x \to -x$
   b) $x \to \frac{k}{x}$
   c) $x \to x \pm k$
8. Un interés especial en las ecuaciones de tres términos de la de la forma $x^n + q = px^m$, con reglas para su solución.
9. Un intento rudimentario de encontrar una solución numérica aproximada cuando la solución exacta no es fácil de encontrar, la primera discusión conocida publicada sobre este problema por un escritor europeo.

Basta con ver la tabla de contenidos de *Ars Magna* para darse cuenta de la amplitud de nociones matemáticas que Cardano trata de manera sumamente hábil, incluyendo métodos de resolución para ecuaciones cúbicas, cuartícas, en incluso de grado mayor.

Un ejemplo de ecuación de grado mayor a cuatro es la que se presenta en el problema 6 del capítulo 39 (ver Figura 98), el cual es analizado en Stedall (2011) para mostrar el método para resolver ecuaciones de grado cuatro, descubierto por su pupilo Ludovico Ferrari, que, a pesar de no presentar una regla general, es trabajado por distintos ejemplos, tal vez como forma de mostrar su validez.



QVÆSTIO VI.

Inuenias numerum, qui ſit æqualis radici ſuæ quadratæ, & duabus radicibus cubicis pariter acceptis, dices igitur ſi talis numerus fuerit cu' quadratum radix ſua quadrata neceſſario eſt 1 cubus, & duæ radices cubicæ ſunt 2 q̄d. igitur 1 cu' q̄dratum, æquabitur 1 cubo p: 2 q̄dratis, deducendo igitur ad inferiores denominationes per q̄d. erit 1 q̄d' q̄dratum æquale 1 poſitioni p: 2, poſui aūt 2 radicibus cubicis, quia cum regula ſit generalis, hoc tamē modo dupliciter ſolui poteſt, ut patebit. Namq; ſi 1 q̄d' q̄dratum æquatur 1 poſitioni p: 2, igitur 1 q̄d' q̄dratum m: 1 æquabitur 1 poſitioni p: 1, nam ab æqualibus æqualia auferuntur, diuide igitur ambo hæc, per 1 poſitionem p: 1, communem diuiſorem, habebis 1 cubum m: 1 q̄drato p: 1 poſitione m: 1, æqualia 1, igitur 1 cubus p: 1 poſitione, æquatur 1 quadrato p: 2, igitur ex 18° capitulo, rei æſtimatio eſt R v: cubica R $\frac{2241}{2916}$ p: $\frac{47}{54}$ m: R v: cub. R $\frac{2241}{2916}$ m: $\frac{47}{54}$ p: $\frac{1}{3}$, & cu' q̄dratū huius eſt numerus quæſitus, cuius R quadrata, & 2 radices cubicæ ſunt illi æquales, & tales radices ſunt duplum quadrati huius quantitatis cum ſuo cubo.

1 q̄d' q̄d. m: 1
1 poſ. p: 1
1 poſ. p: 1
1 cu. m: 1 q̄d. p: 1 poſ. m: 1
1

At regula generali ſic faciemus quia enim 1 q̄d' q̄dratum æquatur 1 poſitioni p: 2, addemus ad utramq; partem, 2 poſitiones quadratorum, cui ſubſcripſimus q̄d. ut intelligas non eſſe ex genere priorum denominationum, ſed eſſe poſitiões quadratorū, igitur numerus addendus, eſt 1 quadratum numeri q̄dratorum, & hoc eſt, ut in tertia regula huius capituli, quadratum D F, nam hic additio ſupplementorum eſt ut D C, A C, D E, ad quadratū ſimplex A D, igitur ſufficit addere quadratū D F, abſq; additione ſuperficierum F L & M N, quæ erant neceſſariæ in exemplo quintæ quæſtionis, quia igitur additis 2 poſitionibus p: 1 quadrato numeri quadratorum, ad 1 poſitionem p: 2, fit totum 2 poſitiones numeri q̄dratorum p: 1 poſ. p: 2, p: 1 quadrato numeri quadratorum, & hoc habet radicem, oportet ut quadratum dimidij mediæ quantitatis, quæ eſt 1 poſitio, æque-

1 q̄d' q̄d. p: 2 poſ. p: 1 q̄d.
numeri q̄d. numeri q̄d.
2 poſ. p: 1 poſ. p: 2 p: 1 q̄d.
numeri q̄d. numeri q̄d.
$\frac{1}{4}$ q̄d. 4 poſ. p: 2 cub.
numeri q̄d.
$\frac{1}{4}$ æquatur 2 cu. p: 4 poſ.
$\frac{1}{8}$ æq̄tur 1 cu. p: 2 poſ.

T 3 tur

Figura 98. Resolución de una ecuación de grado 6 en Cardano Ars Magna (1545, p. 75)

El problema consiste en encontrar un número que sea igual a su raíz cuadrada más el doble de su raíz cúbica. Cardano menciona que si ese número fuera, en términos modernos x^6, entonces su raíz cuadrada sería necesariamente x^3, mientras que su raíz cuadrada sería respectivamente x^2. De manera que la ecuación que propone resolver es $x^6 = x^3 + 2x^2$. Incluso muestra dos formas de resolver la ecuación, la primera es reducir la ecuación original a una de grado tres para posteriormente aplicar las reglas para resolver cúbicas y así encontrar los números, mientras que la segunda propuesta es reducir la ecuación original a una de grado cuatro en la que muestra el método desarrollado por su pupilo.

Para el primero procedimiento reescribe la ecuación de la siguiente manera:

Procedimiento	Traducción anacrónica
Ecuación original	$x^6 = x^3 + 2x^2$
Dividir por $\boldsymbol{x^2}$ la ecuación	$x^4 = x + 2$
Restar uno a ambos lados	$x^4 - 1 = x + 1$
Dividir la ecuación por $\boldsymbol{x+1}$	$x^3 - x^2 + x - 1 = 1$
Rescribiendo la ecuación como	$x^3 + x = x^2 + 2$

Tabla 71. Estrategia 1 para resolver una ecuación de grado 6 por Cardano

Con esta reducción y forma de la ecuación Cardano menciona aplicar lo expuesto en el capítulo octavo para encontrar la raíz $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}}+\frac{47}{54}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}}-\frac{47}{54}} + \frac{1}{3}$ cuya sexta potencia sería el número buscado.

Para el segundo método en el que muestra el procedimiento para resolver las cuárticas, parte de la ecuación reducida $x^4 = x + 2$.

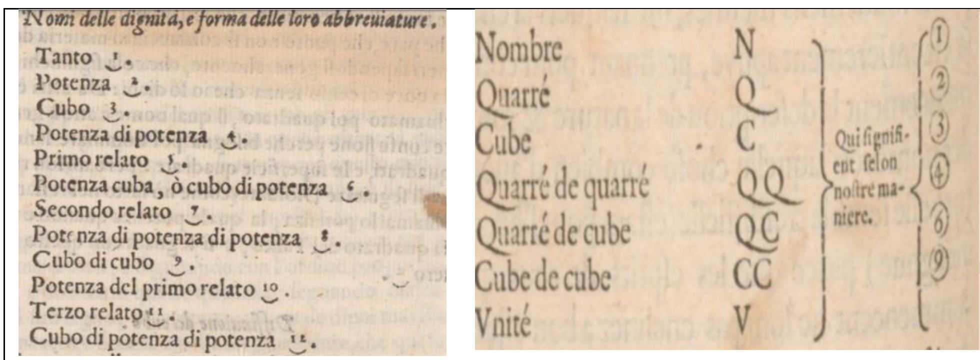
Ecuación de partida	$\boldsymbol{x^4 = x + 2}$
Sumar a ambos lados $\boldsymbol{2bx^2 + b^2}$ para completar un cuadrado correspondiente a $\boldsymbol{x^4}$	$x^4 + 2bx^2 + b^2 = x + 2 + 2bx^2 + b^2$ $(x^2 + b)^2 = x + 2 + 2bx^2 + b^2$ (1)
Si el lado derecho fuera un cuadrado perfecto podría sacarse la raíz cuadrada de ambos lados de (1) para así resolver una ecuación cuadrática. Por lo que el siguiente paso es verificar que se cumpla lo siguiente:	Si $2bx^2 + x + (b^2 + 2)$ Entonces debe cumplirse que $2\sqrt{2b}\sqrt{b^2+2} = 1$ $\sqrt{2b(b^2+2)} = \frac{1}{2}$ $\sqrt{2b^3 + 4b} = \frac{1}{2}$ $2b^3 + 4b = \frac{1}{4}$ $b^3 + 2b = \frac{1}{8}$
Al resolver la ecuación cúbica se obtiene el valor de $\boldsymbol{b}$	$b = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}}+\frac{1}{16}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}}+\frac{1}{16}}$
Con este valor de $\boldsymbol{b}$ construye la ecuación que al completar el cuadrado y sacar las raíces a ambos lados queda como	$x^2 + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}}+\frac{1}{16}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2075}{6912}}+\frac{1}{16}}$ $= x\sqrt{\sqrt[3]{19\frac{23}{108}+\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{19\frac{23}{108}-\frac{1}{2}}}$ $+ \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1051}{3456}+\sqrt{\frac{2075}{442.368}}} + \sqrt[3]{\frac{1051}{3456}-\sqrt{\frac{2075}{442.368}}} + \frac{2}{3}}$

Tabla 72. Estrategia 2 para resolver una ecuación de grado 6 por Cardano

Empleando el método para resolver las ecuaciones cuadráticas obtiene el valor buscado. El valor final obtenido por este método difiere del encontrado por el método anterior. Cardano menciona que a pesar de ser diferentes en forma, deben ser el mismo número y que este último valor, habría que reducirlo con las técnicas mostradas para reducir radicales.

Esto reafirma la gran habilidad que Cardano poseía para seguir estos largos procedimientos sin la ayuda tan conveniente y potente del lenguaje actual. Para el ojo moderno tan acostumbrado al simbolismo actual resulta complejo seguir estos pasos solo con la descripción verbal y semi-simbólica que Cardano presenta.

Tanto los problemas, los tipos de ecuaciones y las técnicas de Cardano son recuperadas por los algebristas posteriores de manera que permitieron crear y extender a formas más generales algunas reglas y métodos que Cardano dejaba no tan claros. Sin embargo, uno de los aspectos más interesantes es que sus seguidores crearon nuevas formas de escribir las ecuaciones. Tal es el caso de Rafael Bombelli, quien ideó una notación muy eficiente para representar las distintas potencias de la incógnita, aunque no para el caso en el que se tienen más de una incógnita en el problema (véase Figura 99), notación que retoma Simon Stevin con leves modificaciones.



Bombelli *L'Algebra* (1572, p. 204) Stevin *L'Arithmetique [...]* (1585, p. 436)

Figura 99. Simbolismo en Bombelli y Stevin de las potencias de la incógnita

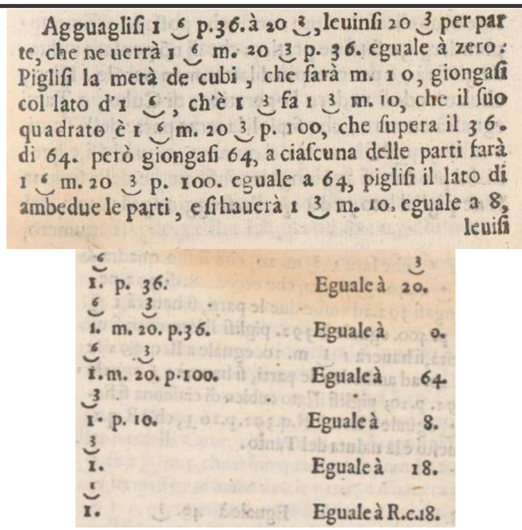
En este sentido la ecuación $x^6 = x^3 + 2x^2$ se escribía en la notación de Bombelli como:

$$1\overset{6}{\smile}\ Eguale\ a\ 1\overset{3}{\smile} + 2\overset{2}{\smile}$$

Mientras que para Stevin sería algo de la siguiente forma:

$$1⑥ Egales\ \text{à}\ 1③ + 2②$$

De esta manera, a pesar de que los sucesores a Cardano reinterpretaron y generaron algunos nuevos descubrimientos, la nueva notación permitía más claro seguir los procedimientos de resolución de las ecuaciones. Tómese como ejemplos, los siguientes dos casos en los que tanto Bombelli como Stevin resuelven ecuaciones de grado seis y cuatro, respectivamente, las cuales son resueltas mediante la técnica de completar el cuadrado:



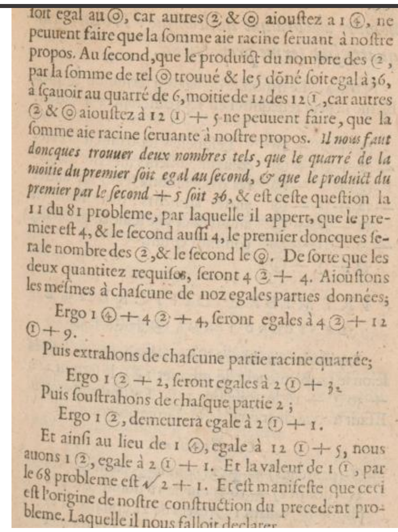
Agguaglisi 1 $\overset{6}{\smile}$ p.36. à 20 $\overset{3}{\smile}$, leuinsi 20 $\overset{3}{\smile}$ per parte, che ne uerrà 1 $\overset{6}{\smile}$ m. 20 $\overset{3}{\smile}$ p. 36. eguale à zero: Piglisi la metà de cubi, che farà m. 10, giongasi col lato d'1 $\overset{6}{\smile}$, ch'è 1 $\overset{3}{\smile}$ fa 1 $\overset{3}{\smile}$ m. 10, che il suo quadrato è 1 $\overset{6}{\smile}$ m. 20 $\overset{3}{\smile}$ p. 100, che supera il 36. di 64. però giongasi 64, a ciascuna delle parti farà 1 $\overset{6}{\smile}$ m. 20 $\overset{3}{\smile}$ p. 100. eguale a 64, piglisi il lato di ambedue le parti, e si hauerà 1 $\overset{3}{\smile}$ m. 10. eguale a 8, leuisi

1 $\overset{6}{\smile}$. p. 36.	Eguale à 20 $\overset{3}{\smile}$.
1 $\overset{6}{\smile}$. m. 20 $\overset{3}{\smile}$. p. 36.	Eguale à 0.
1 $\overset{6}{\smile}$. m. 20 $\overset{3}{\smile}$. p. 100.	Eguale à 64.
1 $\overset{3}{\smile}$. p. 10.	Eguale à 8.
1 $\overset{3}{\smile}$.	Eguale à 18.
1 $\overset{1}{\smile}$.	Eguale à R.c.18.

En este ejemplo Bombelli proponer resolver la ecuación $x^6 + 36 = 20x^3$, sobre la cual trabaja de la siguiente manera:

$$x^6 + 36 = 20x^3$$
$$x^6 - 20x^3 + 36 = 0$$
$$x^6 - 20x^3 + 100 = 64$$
$$x^3 - 10 = 8$$
$$x^3 = 18$$
$$x = \sqrt[3]{18}$$

Bombelli (1572, p. 280)



soit egal au ⓪, car autres ② & ⓪ aiouftez a 1 ④, ne peuuent faire que la somme aie racine seruant à nostre propos. Au second, que le produict du nombre des ②, par la somme de tel ⓪ trouué & le 5 dōné soit egal à 36, à sçauoir au quarré de 6, moitie de 12 des 12 ①, car autres ② & ⓪ aiouftez à 12 ① + 5 ne peuuent faire, que la somme aie racine seruante à nostre propos. *Il nous faut doncques trouuer deux nombres tels, que le quarré de la moitie du premier soit egal au second, & que le produict du premier par le second + 5 soit 36*, & est ceste question la 11 du 81 probleme, par laquelle il appert, que le premier est 4, & le second aussi 4, le premier doncques sera le nombre des ②, & le second le ⓪. De sorte que les deux quantitez requises, seront 4 ② + 4. Aiouftons les mesmes à chascune de noz egales parties données;

Ergo 1 ④ + 4 ② + 4, seront egales à 4 ② + 12 ① + 9.

Puis extrahons de chascune partie racine quarrée;

Ergo 1 ② + 2, seront egales à 2 ① + 3.

Puis soustrahons de chasque partie 2;

Ergo 1 ②, demeurera egale à 2 ① + 1.

Et ainsi au lieu de 1 ④, egale à 12 ① + 5, nous auons 1 ②, egale à 2 ① + 1. Et la valeur de 1 ①, par le 68 probleme est √ 2 + 1. Et est manifeste que ceci est l'origine de nostre construction du precedent probleme. Laquelle il nous falloit declarer

En este ejemplo Stevin proponer resolver la ecuación $x^4 = 12x + 5$, sobre la cual trabaja para obtener la siguiente ecuación:

$$x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 12x + 9$$

De donde obtiene que:

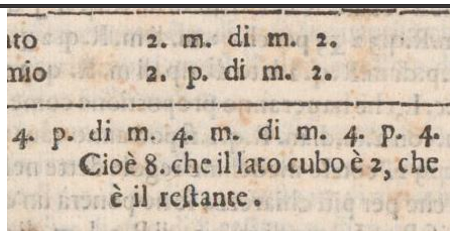
$$x^2 + 2 = 2x + 3$$
$$x^2 = 2x + 1$$
$$x = \sqrt{2} + 1$$

Stevin (1585, p. 353)

Figura 100. Bombelli y Stevin resolviendo ecuaciones de grado 4 por el método de completar al cuadrado

A diferencia de Stevin, Bombelli describe el procedimiento y las ecuaciones dentro del discurso prosa y, además muestra las ecuaciones y su resolución en un espacio independiente, mientras que Stevin permanece con la tradición de escribir todo en prosa como se ve en la Figura 13.

Complementariamente con los desarrollos en la notación, la cual no perduró en lo subsecuente, Bombelli logró operar con las cantidades imaginarias $\sqrt{-1}$,—*più di meno* en sus palabras—. Esto con base en la exploración que seguramente debió haber hecho sobre las operaciones aritméticas, de manera que posiblemente sobre la base de resultados bien definidos sobre operaciones convencionales con las cantidades enteras y radicales de enteros, logró idear una forma de obtener cantidades enteras a partir de cantidades que involucraban partes imaginarias. Por ejemplo, en la parte final del libro primero aborda las operaciones con la unidad imaginaria, y logra mostrar que por ejemplo el producto de la multiplicación $2 - 2\sqrt{-1}$ por $2 + 2\sqrt{-1}$ es 8, lo cual presenta un resultado impresionante y que cuando se compara con otros ejemplos presentados previamente da un sentido importante sobre la relación entre la confianza y resultados previos vía las operaciones aritméticas con la creación de nuevos resultados (ver Figura 101).

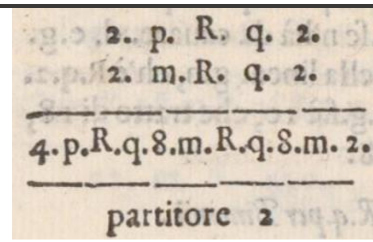

2. m. di m. 2.
2. p. di m. 2.
4. p. di m. 4. m. di m. 4. p. 4.
Cioè 8. che il lato cubo è 2, che
è il reſtante.

Bombelli multiplicando las cantidades $2 - 2\sqrt{-1}$ y $2 + 2\sqrt{-1}$ que en términos modernos la operación queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} 2 - 2\sqrt{-1} \\ 2 + 2\sqrt{-1} \\ \hline 4 + 4\sqrt{-1} - 4\sqrt{-1} + 4 \end{array}$$

De donde los conjugados se eliminan obteniendo que el producto es 8.

Bombelli (1572, p. 280)


2. p. R. q. 2.
2. m. R. q. 2.
4.p.R.q.8.m.R.q.8.m.2.
partitore 2

Bombelli multiplicando las cantidades $2 - \sqrt{2}$ y $2 + \sqrt{2}$ que en términos modernos la operación queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} 2 - \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} \\ \hline 4 + \sqrt{8} - \sqrt{8} - 2 \end{array}$$

De donde los conjugados se eliminan obteniendo que el producto es 2.

Bombelli (1572, p. 92)

Figura 101. Bombelli multiplicando números imaginarios y su justificación basada en resultados aritméticos previos

Ambos ejemplos son abordados en el primer libro de Bombelli, el cual consta de 195 páginas aproximadamente, de donde el ejemplo de la derecha se presenta mucho antes que el ejemplo de la izquiera, el cual aparece al final este primer libro. Por lo tanto, puede verse la semejanza en el tratamiento de ambas operaciones y que seguramente a partir del ejemplo de la derecha pudo haber dado la idea de trabajar sobre estas cantidades no aceptadas.

Por otro lado, otro de los aspectos importantes de ver a Bombelli realizar este tipo de manipulaciones, dejan ver que, como menciona Wagner (2010), existe una abstracción compleja en este tratamiento, puesto que la cantidad $\sqrt{-1}$ es operada como si fuera de la misma clase de los números aceptados, es decir, de la misma naturaleza. De ahí que en el caso del ejemplo de la derecha existía una necesidad importante por respetar la homogeneidad de los tipos de números pues la cantidad $2\sqrt{2}$ es escrita como $\sqrt{8}$, debido a esta condición. Es decir, no tenía sentido $2\sqrt{2}$ pues no existían para los algebristas de la época los coeficientes, aspecto que justamente se rompe con la cantidad $4\sqrt{-1}$, la cual no es reducida a un número de naturaleza definida y que, por consiguiente, se opera sobre esta en el sentido moderno, como coeficiente y una literal que se arrastra en los cálculos.

Wagner (2010) ha profundizado en este aspecto y argumenta que las prácticas económicas durante el período de las matemáticas del ábaco se entretejieron para dar progresivamente al paso que muestra Bombelli al tratar cantidades con naturaleza no definida como si sí fuera definida.

> Como resultado, los productos de la forma $2\sqrt{3}$ son raros en las matemáticas del ábaco y del Renacimiento, y se suprimen a favor de la forma $\sqrt{4}\sqrt{3} = \sqrt{12}$. La ontología de la matemática del ábaco distingue las cantidades de acuerdo con sus diversas naturalezas, pero llevar los cálculos a un resultado final simple depende de la práctica de las cantidades como convertibles en formas que tienden a homogeneizarlas. [...] Sostengo que la cohabitación de las prácticas de conversión económica y aritmética en los textos del ábaco proyecta la fluidez de las entidades económicas sobre las aritméticas, y socava la práctica de distinguir las cantidades según una taxonomía rígida. (Wagner, 2010, p. 495).

Se argumenta que durante el período del ábaco y el Renacimiento se dio entonces una desestabilización de la naturaleza de las cantidades, en términos de que la homogeneización de estas no se mantuvo como condición primordial para operar sobre los signos proto-algebraicos (Wagner, 2010). Sin embargo, esto no fue lo único que se puede ver en Bombelli como un último representante de la cultura del ábaco y a la vez como un representante del humanismo renacentista, sino también la emergencia de entidades algebraicas como los parámetros y variables. Parámetros en el sentido de que si bien, en los problemas que se resolvían típicamente en este tipo de tratados, es decir, problemas en los que las cantidades eran particulares, en el caso de Bombelli, como evolución del método de falsa posición, en realidad eran elecciones arbitrarias que se modificaban de acuerdo con los requerimientos obtenidos por la resolución particular. Es en este sentido que las cantidades elegidas para el problema en verdad podrían interpretarse como arbitrarias en el contexto de esos trabajos. Por otro lado, el caso de variable se puede identificar en problemas en los que se llega a inecuaciones, por lo que se discuten específicamente condiciones que deben cumplir los valores de las incógnitas para satisfacerlas (Wagner, 2010).

Retomando el trabajo de Stedall (2011), se discute el avance que se siguió posteriormente a estos autores. En particular, se menciona a Viète como aquél que logró invertir la relación entre álgebra y geometría, puesto que previo a él, la mayoría de los algebristas recurrían a la geometría para justificar las reglas algebraicas de resolución de ecuaciones. Él en cambio, trató de independizar al álgebra para transformarla en una ciencia independiente (Charboneau, 1996): en el *arte analítico*.

> Él [Viète] vio más claramente que cualquier otro escritor anterior que las cantidades desconocidas en las ecuaciones algebraicas podrían corresponder a números o a magnitudes geométricas, y que por lo tanto uno podía moverse suavemente hacia atrás y hacia adelante entre las construcciones geométricas y las ecuaciones. Al reconocer el álgebra como una herramienta para abrir problemas geométricos, llegó a identificarla con el método de 'análisis'. que supuestamente había sido usado pero escondido por los antiguos. En manos de Viète, el álgebra se transformó de la simple *regula cosa* (regla de las 'cosas') de escritores anteriores a un una nueva y sofisticada técnica, el "arte analítico" (Stedall, 2011, p. 21).

Dentro de los avances que logró Viète, no relució su notación, puesto que la forma de escribir las ecuaciones mezclaba palabras con los símbolos. No obstante, fue el primero en designar símbolos tanto para las cantidades conocidas como para las incógnitas. De acuerdo con Klein (1968), es a apartir de Viète que el concepto de número cambia para ser concebido como una cantidad tanto continua como discreta, y que por lo tanto definió lo que él (Viète) denominó el *álgebra especiosa*, álgebra que se aplicaba a las letras, mientras que el álgebra típicamente aplicada sobre números la denominó *algebra numerosa*.

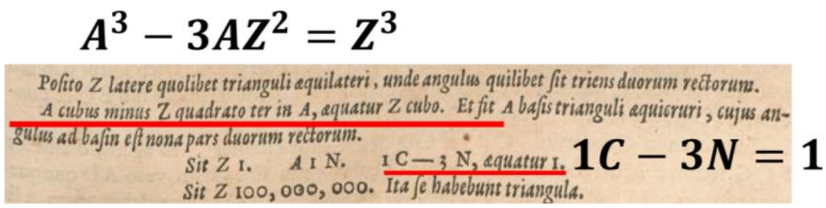
> [L]o que pertenece a la zetética comienza, de acuerdo con el arte de la lógica, con silogismos y entimemas cuyas premisas son las reglas fundamentales con las que se establecen las ecuaciones y las proporciones. Estos se derivan de axiomas [nociones comunes] y teoremas [entimemas] creados por el análisis mismo. La Zetetica, sin embargo, tiene su propio método de proceder. Ya no limita su razonamiento a los números, una deficiencia de los antiguos analistas, sino que trabaja con una logística simbólica recién descubierta que es mucho más fructífera y poderosa que la logística numérica para comparar magnitudes entre sí (Viète, 1983, p. 13).

La visión de Viète estaba influenciada por lo que se conocía como el análisis griego, el cual le sirve como base para definir su *arte analítico*, donde el uso de símbolos y la operatividad sobre ellos es lo que en conjunto definen dicho arte.

Viète divide su arte analítico en tres partes (Charboneau, 1996):

1. Zetética: representa el marco de operatividad de los símbolos para obtener ecuaciones o proporciones.
2. Porística: se asegura que la cadena de implicaciones del análisis pueda revertirse de tal manera que se pueda obtener una demostración sintética (Charboneau, 1996, p. 33).
3. Exegética: Traducción del resultado en términos, aritméticos o geométricos según sea el caso.

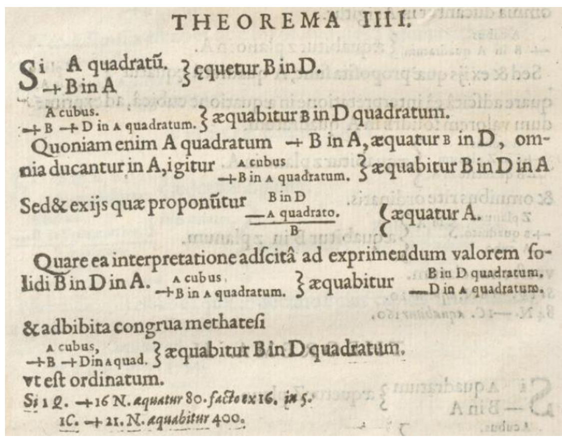
En términos de su notación Viète usa las vocales A, E, I, O, U para denotar las incógnitas, en tanto que las consonantes $B, C, D, F, G, H, \ldots$ son empleadas para denotar las cantidades conocidas. En general, Viète no trabaja con ecuaciones específicas, sino con ecuaciones generales como parte de su método analítico. Un ejemplo de ecuación en estos términos sería la siguiente: $B\ in\ A - A\ quadratum\ aequatur B\ in\ D$, que en términos actuales correspondería a la ecuación $ax - x^2 = b$. Curiosamente, cuando recurría a ecuaciones particulares empleaba la notación cósica clásica (véase Figura 102), la ecuación $x^2 - 16x = 80$ la escribía como $Q - 16N = 80$.


$A^3 - 3AZ^2 = Z^3$

Posito Z latere quolibet trianguli æquilateri, unde angulus quilibet fit triens duorum rectorum.
A cubus minus Z quadrato ter in A, æquatur Z cubo. Et fit A basis trianguli æquicruri, cujus angulus ad basin est nona pars duorum rectorum.
Sit Z 1. A 1 N. 1 C — 3 N, æquatur 1. $1C - 3N = 1$
Sit Z 100,000,000. Ita se habebunt triangula.

Figura 102. Viète y las ecuaciones generales paramétricas y particulares con base en la notación cósica clásica

Lo cierto es que el tipo de escritura que desarrolló Viète no era tan diferente a sus predecesores (ver Figura 103). Incluso, algunos de ellos tenían sistemas para representar las ecuaciones más eficientes que Viète, por ejemplo, los de Bombelli y Stevin, sin embargo, no se sabe si Viète no conoció o ignoró estos avances en la notación, por lo que sus textos no eran tan fáciles de leer como los mencionados.


THEOREMA IIII.

Si A quadratũ. + B in A } æquetur B in D.
A cubus. + B + D in A quadratum. } æquabitur B in D quadratum.
Quoniam enim A quadratum + B in A, æquatur B in D, omnia ducantur in A, igitur A cubus + B in A quadratum. } æquabitur B in D in A.
Sed & ex ijs quæ proponũtur B in D — A quadrato. / B } æquatur A.
Quare ea interpretatione adſcitâ ad exprimendum valorem ſolidi B in D in A. A cubus + B in A quadratum. } æquabitur B in D quadratum. — D in A quadratum.
& adbibita congrua methatesi
A cubus, + B + D in A quad. } æquabitur B in D quadratum.
vt eſt ordinatum.
Si 1 Q. + 16 N. æquatur 80. facto ex 16. in 5.
1C. + 21. N. æquabitur 400.

Figura 103. Simbolismo en Viète en *De Æqvationvm Recognitione Et Emendatione Tractatvs Dvo* (1615, p. 38)

No obstante, a pesar de que el simbolismo desarrollado por Viète en términos modernos podría parecer no tan sofisticado, pues las descripciones de las potencias que se arrastraban junto al símbolo de la incógnita en términos de palabras completas como cuadratum, cubus, etc., lo cierto es que Viète ciertamente fue el primer algebrista que trabajó sobre expresiones generales, lo cual le permitió llegar, darle un nuevo sentido al uso del simbolismo algebraico. Lo convirtió explícitamente en un instrumento que le permitiría obtener nuevos conocimientos.

En el Teorema I del capítulo XV del tratado *Æqvationvm Recognitione Et Emendatione Tractatvs Dvo*, Viète construye una ecuación cuadrática a partir de considerar las siguientes expresiones, donde B es conocido y S es la diferencia entre A y B.

$$B - A = S \text{ cuando } B \text{ es mayor que } A$$
$$A - B = S \text{ cuando } A \text{ es mayor que } B$$

Al elevar al cuadrado ambos lados (para el primer caso) se obtiene lo siguiente:

$B\ quadratum - B\ in\ A\ bis + A\ quadrato\ aequatur\ S\ quadrato \qquad B^2 - 2BA + A^2 = S^2$

$B\ in\ A\ bis - A\ quadrato\ aequalisit\ B\ quadrato - S\ quadrato \qquad 2BA - A^2 = B^2 - S^2$

De manera análoga se obtiene la misma expresión para el segundo caso

$$2BA - A^2 = B^2 - S^2$$

Si se tiene que $B = 6$ y $S = 4$, entonces se obtiene la ecuación:

$$12N - Q\ aequatur\ 20 \qquad 12x - x^2 = 20$$

Y por lo tanto se puede determinar que $x = 2$ y $x = 10$.

Es decir, en este ejemplo se puede ver que es a partir de la exploración sobre la expresión simbólica que se puede obtener una relación directa entre los coeficientes de esta y la raíz. Si se partiera de la expresión general $2BA - A^2 = B^2 - S^2$ es posible establecer que $12 = 2B$, en tanto que $B^2 - S^2 = 20$, ecuaciones de las cuales se pueden obtener los valores de B y S y, por lo tanto A, considerando que A es la suma o diferencia de los valores de B y S.

Uno de los más hábiles seguidores de Viète fue Thomas Harriot, quien llevó aún más lejos la virtud del arte analítico, en el sentido de usar el simbolismo como herramienta para descubrir nuevos resultados relacionados con la constitución de las ecuaciones. Esto puede verse claramente en los trabajos de Jaqueline Stedall (2000, 2002, 2003, 2007, 2008, 2011), en los que muestra cómo Harriot, en particular, logró investigar y obtener las relaciones entre las raíces y los coeficientes de los polinomios.

> Harriot fue más allá: el simbolismo se convirtió para él no sólo en una forma más concisa de escribir, una especie de abreviatura matemática, sino también en una herramienta de investigación. Esto lo hemos visto hasta cierto punto ya en su manejo de las fórmulas para las progresiones aritméticas, que fue capaz de manipular en nuevas formas sin ninguna referencia a su significado (Stedall, 2007, p. 390).

Mucho de esto fue logrado por una notación más conveniente (ver Figura 104), siguiendo a Viète usaba las vocales para las incógnitas y las consonantes para las cantidades conocidas, sin embargo, Harriot eliminó las palabras para describir las potencias y lo reemplazó por la repetición de la incógnita tantas veces como la potencia indicara, así como la palabra para la igualdad por el signo igual[54], tal y como el que es usado hoy con la diferencia de que las líneas

---

[54] El signo igual fue propuesto por primera vez por Robert Recorde (1557) en *The Whetstone of Witte, which is the second part of Arithmetike, containing the Extraction of root, the Cossike Practice, with the Rules of Equation, and the Woorkes of Surde Numbers*. En el capítulo que dedica al tratamiento de ecuaciones que titula

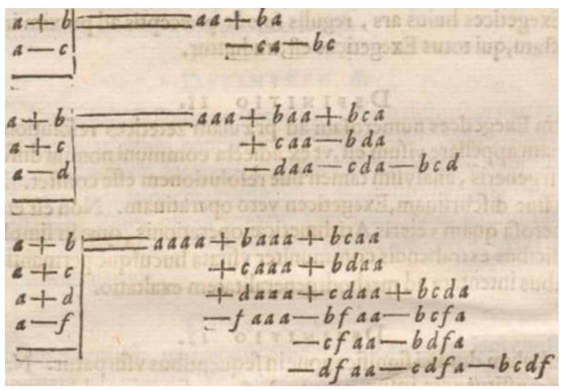
eran más prolongadas. Por ejemplo, la misma ecuación del ejemplo primero de Viète quedaría como $ba - aa = c$, es decir, $ax - x^2 = b$. Incluso, es sobre Harriot las acusaciones más frecuentes a Descartes sobre el plagio, pues la notación de este último, a excepción del exponente, es muy parecida (Stedall, 2002).

Isagoge
To add (Z square)/G to (A plane)/B
the sum will be (G in A plane) + (B in Z square)/B in G
Praxis

$$\frac{ac}{b} + \frac{dd}{g} = \frac{acg + bdd}{bg}$$

Figura 104. Transformación de la notación de Viète por Harriot (Stedall, 2008, p. 465)

De la Figura 105 puede verse claramente que Harriot investigaba multiplicando factores lineales, que de acuerdo con Stedall (2011) es una de sus mayores contribuciones a la teoría de las ecuaciones y, que con ello podía verse de manera "transparente" la relación entre las raíces y los coeficientes del polinomio.


$a+b$ ═ $aa+ba$
$a-c$ — $-ca-bc$

$a+b$ ═ $aaa+baa+bca$
$a+c$ — $+caa-bda$
$a-d$ — $-daa-cda-bcd$

$a+b$ ═ $aaaa+baaa+bcaa$
$a+c$ — $+caaa+bdaa$
$a+d$ — $+daaa+cdaa+bcda$
$a-f$ — $-faaa-bfaa-bcfa$
$-cfaa-bdfa$
$-dfaa-cdfa-bcdf$

Figura 105. Harriot Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas nova expedita et generali methodo resolvendas (1631, p. 4)

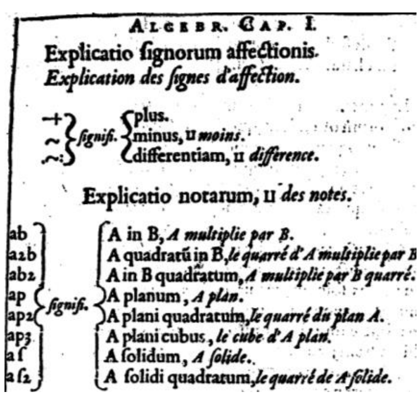
Es claramente "visible" que para un polinomio de grado tres con raíces $-b, -c$ y d, el coeficiente del término cuadrático está compuesto por la relación $b + c - d$, mientras que el coeficiente del término lineal por la relación $bc - bd - cd$ y cuyo término independiente es el producto $-bcd$. En palabras de Stedall (2007, p. 383). "[L]as matemáticas de Harriot casi no tienen palabras, porque él espera [...] que su lector pueda ver lo que está haciendo, ya sea siguiendo un argumento simbólico o a partir de la disposición de su material".

"*Las reglas de las ecuaciones comúnmente llamadas reglas del álgebra*". Al introducir el símbolo =, Recorde menciona que la razón por la que elige dos líneas paralelas es porque "dos cosas no pueden ser más iguales".

Otros trabajos (Massa Steve, 2008, 2012) han mostrado la relación y la adaptación que matemáticos posteriores a Viète hicieron de sus trabajos, dejando ver que el desarrollo del simbolismo cada vez más independiente del texto retórico pudo haber sido ocasionado por reescrituras personales e individuales de los textos originales de Viète como forma de hacer más clara la lectura misma y extender los resultados (Stedall, 2007).

En los trabajos de Massa Steve (2008, 2012) puede verse claramente cómo la inspiración en Viète que tuvo Pierre Herrigone permitió construir una escritura más simbólica y también más preocupada por dejar claro la forma en la que se debía demostrar. De acuerdo con Massa (2008, 2012) Herrigone tenía en mente un plan didáctico en el que la simplicidad, claridad y estructura de la escritura eran fundamentales para dicho plan. Su objetivo primordial era "introducir un lenguaje simbólico como lenguaje universal para tratar tanto las matemáticas puras como las mixtas utilizando nuevos símbolos, notas de margen (que él llamaba "citas") y abreviaturas" (Massa, 2008, p. 286).

Como se puede observar en la Figura 106, Herrigone no solo modificó la notación de Viète, tal y como lo hizo Harriot, sino también elaboró un sistema de abreviaturas para expresiones recurrentes de forma retórica, de manera que el texto luciera casi sin palabras sino únicamente con simbolismo. Las potencias de la incógnita fueron asociadas con un numeral al final del término algebraico.



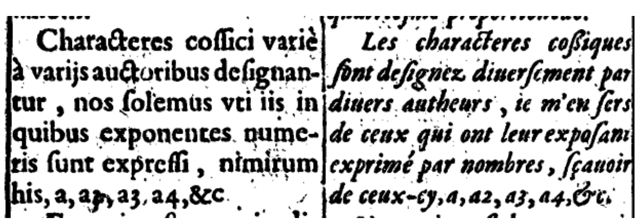
ALGEBR. CAP. I.

Explicatio ſignorum affectionis.
Explication des ſignes d'affection.

+ ~ ~: ſignif. plus. / minus, ꝰ *moins*. / differentiam, ꝰ *difference*.

Explicatio notarum, ꝰ *des notes*.

ab ſignif. A in B, *A multiplie par B*.
a2b ſignif. A quadratũ in B, *le quarré d'A multiplie par B*
ab2 ſignif. A in B quadratum, *A multiplie par B quarré*.
ap ſignif. A planum, *A plan*.
ap2 ſignif. A plani quadratum, *le quarré du plan A*.
ap3 ſignif. A plani cubus, *le cube d'A plan*.
aſ ſignif. A ſolidum, *A ſolide*.
aſ2 ſignif. A ſolidi quadratum, *le quarré de A ſolide*.



Characteres coſſici variè à varijs auctoribus deſignantur, nos ſolemus vti iis in quibus exponentes numeris ſunt expreſſi, nimirum his, a, a2, a3, a4, &c.

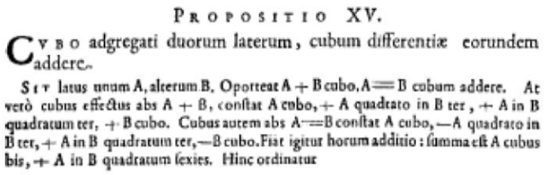
Les characteres coſſiques ſont deſignez diuerſement par diuers autheurs, ie m'en ſers de ceux qui ont leur expoſant exprimé par nombres, ſçauoir de ceux-cy, a, a2, a3, a4, &c.

Herrigone (1634, p. 6)

Figura 106. Sistema simbólico de notación por Herrigone (1634, p. 5-6)

De acuerdo con Massa Steve (2012), las tres contribuciones del método de Herrigone son

1. la notación original,
2. el razonamiento axiomático-deductivo y
3. la presentación de las proposiciones

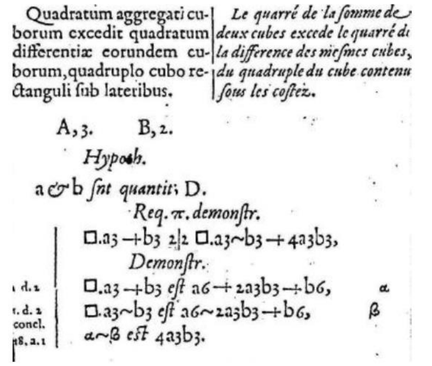


PROPOSITIO XV.

CVBO adgregati duorum laterum, cubum differentiæ eorundem addere.

SIT latus unum A, alterum B. Oportent A + B cubo, A == B cubum addere. At verò cubus effectus abs A + B, constat A cubo, + A quadrato in B ter, + A in B quadratum ter, + B cubo. Cubus autem abs A == B constat A cubo, — A quadrato in B ter, + A in B quadratum ter, — B cubo. Fiat igitur horum additio: summa est A cubus bis, + A in B quadratum sexies. Hinc ordinatur

Figure 3. Proposition XV in Viète's *Ad Logisticen Speciosam* (Viète, 1970, 20)



Quadratum aggregati cuborum excedit quadratum differentiæ eorundem cuborum, quadruplo cubo rectanguli sub lateribus.	*Le quarré de la somme de deux cubes excede le quarré de la difference des mesmes cubes, du quadruple du cube contenu sous les costez.*

A, 3. B, 2.

Hypoth.

a & b *snt quantit*; D.

Req. π. demonstr.

□.a3 + b3 2|2 □.a3 ∼ b3 + 4a3b3,

Demonstr.

1 d. 2 □.a3 + b3 *est* a6 + 2a3b3 + b6, α

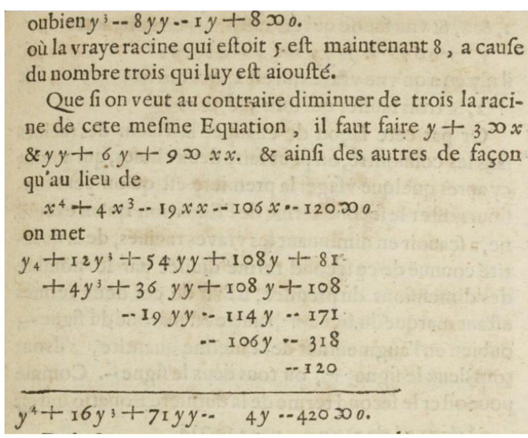
1. d. 2 □.a3 ∼ b3 *est* a6 ∼ 2a3b3 + b6, β

concl. 18. a. 1 α ∼ β *est* 4a3b3.

Figure 4. Proposition V. XIX in Hérigone's Algebra (Hérigone, 1634, II, 46)

Figura 107. Comparación de la misma proposición entre Viète y Herrigone

Finalmente, el paso decisivo para la notación más cercana a la actual la dio Descartes cuando publica su *Discours de la méthode*, dentro del cual, aparece *La Géométrie*, en la cual demuestra al igual que Viète y sus seguidores la potencialidad y la independencia del simbolismo algebraico para investigar y obtener nuevos resultados. Como, por ejemplo, asociar a las curvas una ecuación algebraica que permitiera distinguir el tipo de curva que era a partir de la estructura de la ecuación. Investigadores como Serfati (2010) han señalado que Descartes se sitúa en el último de seis patrones de la escritura simbólica, el cual está caracterizado por la representación de conceptos compuestos. Sus exponentes son un ejemplo de ello, puesto que el superíndice representa el concepto de multiplicación reiterada de cantidades.



oubien $y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0$.
où la vraye racine qui estoit 5 est maintenant 8, a cause du nombre trois qui luy est aiousté.

Que si on veut au contraire diminuer de trois la racine de cete mesme Equation, il faut faire $y + 3 \infty x$ & $yy + 6y + 9 \infty xx$. & ainsi des autres de façon qu'au lieu de

$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0$

on met

$$
\begin{array}{rrrrr}
y^4 + 12y^3 & + 54yy & + 108y & + 81 & \\
+ 4y^3 & + 36yy & + 108y & + 108 & \\
 & - 19yy & - 114y & - 171 & \\
 & & - 106y & - 318 & \\
 & & & - 120 & \\
\hline
y^4 + 16y^3 & + 71yy & - 4y & - 420 & \infty 0.
\end{array}
$$

Figura 108. Notación exponencial de Descartes (1637, p. 375).

El pensamiento filosófico influenciado por la corriente conciliatoria de Proclo sobre Platón y Aristóteles (Sasaki, 2003; Cifoletti, 2004, 2006)), llevaron a Descartes a postular al álgebra como la *Mathesis Universalis*, aunque aparece únicamente en las *Regulae ad directionem ingenii*.

Es decir, la ciencia común a la aritmética y a la geometría que permitiría librar a ambas de sus propios defectos (Sasaki, 2003).

Es de suma importancia reconocer que el empleo de un simbolismo más conveniente permitía "visualizar" de manera importante las relaciones implícitas entre las estructuras de los polinomios y sus raíces, lo cual permitió entender de manera más profunda la forma de cómo resolver las ecuaciones.

En el caso de Descartes, su famosa regla de las raíces se basa en la forma de la ecuación, pues la regla dice que "puede haber tantas verdaderas [raíces positivas] como veces los signos $+$ y $-$ se encuentren cambiados; y tantas falsas [raíces negativas] como veces se encuentren dos signos $+$ o dos signos $-$, que se sigan." (Descartes, 1947, p. 146) En este ejemplo, el argumento de la determinación de cuantas raíces positivas o negativas hay se basa en la inspección de la expresión simbólica.

Como se mostrará en la sección 6.1.2 el pensamiento de Viète y Descartes se vio influenciado, así como los algebristas del siglo XVI y XVII por la cultura renacentista y humanista. Sus invenciones responden a las necesidades y proyecciones sociales de la época. Si bien, ninguno de los dos mencionó explícitamente influencias de otros matemáticos de la época en sus tratados, Cifoletti (2004, 2006), postula que existía una corriente francesa predominante de pensamiento importante durante el Renacimiento que pudo haber influenciado directamente a Viète y Descartes en sus producciones. Fue a través de Jaques Peletier, Peter Ramus, Jean Borel (Buteo) y Guillaume Gosselin que se transmitió una corriente de pensamiento que pretendía crear nuevas raíces del álgebra, con la intención de desestimar la tradición árabe y del ábaco, pues para los humanistas el conocimiento no podía provenir y responder a prácticas "barbáricas" como el comercio. Con estas ideas en mente el humanismo algebraico se caracterizó por determinar raíces nuevas al álgebra. Estas raíces, como fue característico del contexto Renacentista (ver sección 12.1.1), las iban a definir en el pensamiento griego, incluyendo la recuperación de la Artihtmetica de Diofanto.

> Los algebraistas crearon una genealogía ilustre para el álgebra, derivada de Grecia (Diofanto) y no de las escuelas de ábaco. Tres características de esta tradición (ábaco tardío, retórica y genealogía) se remontan al humanismo italiano: El álgebra de Cardano y Tartaglia, la *imitatio* (traducción a una nueva cultura erudita vernácula), y la construcción de una historia para la disciplina. Los algebraistas franceses transformaron radicalmente los tres. Su traducción les autorizó a abandonar los últimos vínculos con la tradición medieval y a construir una nueva disciplina que pudieran describir como nacional. La adopción de esta disciplina por parte de la élite jurídica se vio facilitada por la interpretación retórica de la lógica desarrollada en París al mismo tiempo. (Cifoletti, 2006, p. 393).

De esta manera, Cifoletti muestra cómo Peletier construye las bases para su álgebra en la reformulación de la retórica, donde la demostración jugo un rol primordial (Cifoletti, 2006). Al tratar de reformular la manera en la que se demostraba se acudió a la lógica de Cicerón en la que se advertía que se debían mantener ciertas verdades innatas (*nociones comunes*) para basar el conocimiento, aunque para asegurar que dicho conocimiento pudiera aspirar a la certeza se debían seguir ciertas normas formales de acuerdo con reglas lógicas (Cifoletti, 2006).

Estas ideas, de acuerdo con Cifoletti (2006), provenían de Proclo, quien en los comentarios que hace sobre la obra de Euclides *Los Elementos* propone lo que conocemos como axiomas y sobre los cuales puede basarse el conocimiento. Estos axiomas son los siguientes (Morrow, 1970, citado en Cifoletti, 2006, p. 395):

1. Las cosas que son iguales a la misma cosa también son iguales entre sí.
2. Si se añaden iguales a iguales, los conjuntos son iguales
3. Si se restan iguales de iguales, los restos son iguales.
4. El todo es más grande que la parte.
5. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

Como Klein (1968) mostró, en el tratado de *Introducción al arte analítico* de Viète, al inicio establece axiomas de Euclides relativos a algunos libros sobre geometría y otros sobre las proporciones como bases fundamentales para tratar con las ecuaciones y proporciones.

El estudio profundo de los Elementos de Euclides, a partir de las traducciones que estos autores hicieron, permitió encontrar un vínculo bastante conveniente que logró romper con la tradición árabe y del ábaco para demostrar las reglas para trabajar las ecuaciones, puesto que las proposiciones del segundo libro, que también pueden interpretarse como problemas de ecuaciones, les permitió sustituir y omitir la tradición previa que existía sobre las justificaciones geométricas de los algoritmos para resolución de ecuaciones, algo que siguió predominando hasta antes de Viète.

Incluso como señala Cifoletti (2006) la misma noción de *Mathesis Universalis* que iba a ser mencionada por Descartes en la Regla IV de sus *Regulae ad directionem ingenii* también proviene de estas corrientes de pensamiento sobre la reformulación de la retórica. Es Petrus Ramus que profundizó sobre esta idea y del cuál se sabe influyó en Clavius de quien Descartes también basó sus estudios (Sasaki, 2003, Cifoletti, 2006).

Complementariamente con esta reforma de la retórica que moldeó la forma en la que se concebía el álgebra y la manera de darle sentido, otras de las contribuciones que tuvieron estos mismos personajes —Peletier, Ramus, Borel y Gosselin— es en la forma de escribir los textos matemáticos. Una de las características del humanismo fue la explícita preparación de los futuros *oradores* (Cifoletti, 2004), razón por la cual existía una necesidad por formar en las artes del texto para construir textos cada vez más científicos. Basándose en la tradición dialéctica[55] de la época dos nociones eran las que caracterizaban la visión sobre la escritura *inventio* y *dispotio* (Cifoletti, 2004). La primera noción hacía alusión sobre la elección de los tópicos que serían importante para discutir, mientras que la segunda aludía a la forma de presentar los argumentos, es decir, de la forma en la que se organizaba el argumento (Cifoletti, 2004).

Como primer representante de esta tradición humanística francesa Peletier innova en la forma en la que escribe y más aún al establecer explícitamente que se deben construir ecuaciones, de las cuales es necesario nombrar las distintas incógnitas, así como también numerar las ecuaciones para ser más fáciles de seguir por el lector. Muy probablemente, retomó para este efecto los trabajos de Michael Stifel quien se considera el primero en emplear varias incógnitas en la resolución de problemas.

En palabras de Cifoletti (2004, p. 129):

> Tenemos que asignar un símbolo al número desconocido, luego capturar la forma de la pregunta, es decir, interpretar el problema en función de lo desconocido y sus potencias, y establecer el problema como una ecuación, y luego modificar esta última, por ejemplo mediante una reducción, para obtener una ecuación "buena".

A continuación, se muestra un ejemplo de resolución de un mismo problema por Cardano y por Peletier —propuesto por Cardano. Nótese que a pesar de que a Peletier le toma tres páginas la resolución del problema la densidad del escrito de Cardano es considerable. A partir de este ejemplo es notorio que Peletier estaba comprometido con la forma de escribir, es decir, la estructura del texto era muy importante para poder mostrar de manera más científica la resolución de los problemas. Esto incluye asignar incluso una literal para cada incógnita y el nombrar las ecuaciones e invocarlas en el discurso de la resolución[56] (compárense las Figuras 109 y 110).

---

[55] Incluso "Peletier define el álgebra como la dialéctica, es decir, el arte del razonamiento (Cifoletti, 2004, p. 126).

[56] Si bien la Fuente de inspiración para este hecho debe provenir de los trabajos de Michael Stifel, como se menciona en Heeffer (2010) se puede reconocer una ambigüedad en la forma en la que Stifel representaba las incógnitas en la *Artihmetica Integra*. No es hasta su segundo trabajo *Die Coss* (1553) que mejora estos inconvenientes, lo cual se encuentra muy cercano a la fecha de publicación del *L'Algebra* de Peletier (1554), por lo que habría que considerar la posibilidad de que la propuesta de Peletier sea original, aún basada en la *Artihmetica Integra* (1544).

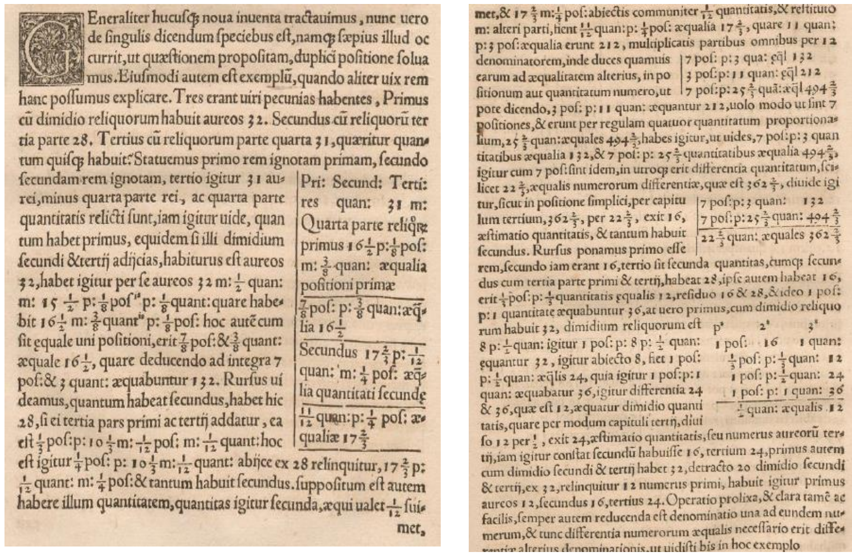


Figura 109. Resolución de un problema de más de una incógnita en Cardano *Ars Magna* (1545, p. 21-22)

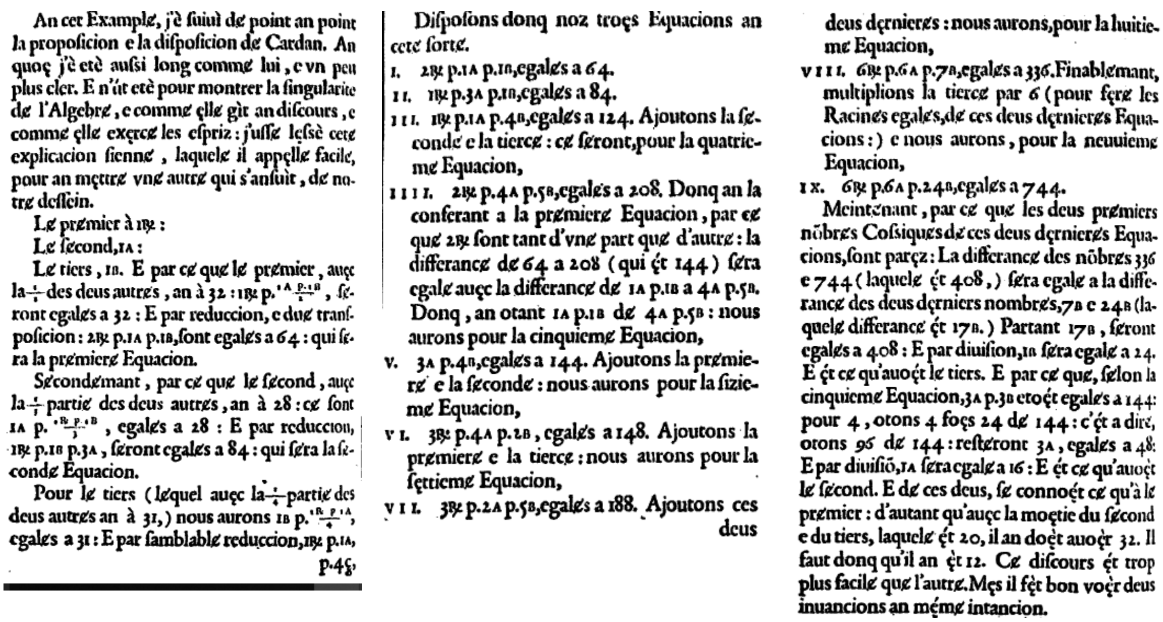


Figura 110. Adaptación por Peletier en *L'algebra* de la resolución del problema que resuelve Cardano en la Figura 22 (Peletier, 1575, p. 110-112)

Con base en la postura de Cifoletti respecto a la reforma que estos algebristas humanistas franceses impulsaron, se considera importante tomar en cuenta que estas se hicieron no solo sobre la retórica de la demostración, sino en la forma y estructura misma de la escritura, y que sentaron las bases para lo que Viète y Descartes construyeron posteriormente.

13. Anexos de la segunda fase de estudio

13.1. Transcripciones de la EBT

13.1.1. Procesos de construcción de la ecuación paramétrica en la EBT para la Actividad 1

A continuación mostraremos el proceso de construcción de la ecuación paramétrica en el marco de la EBT. Es decir, lo sucedido en la interacción entre investigador y estudiantes. La descripción del proceso se divide por estudiante.

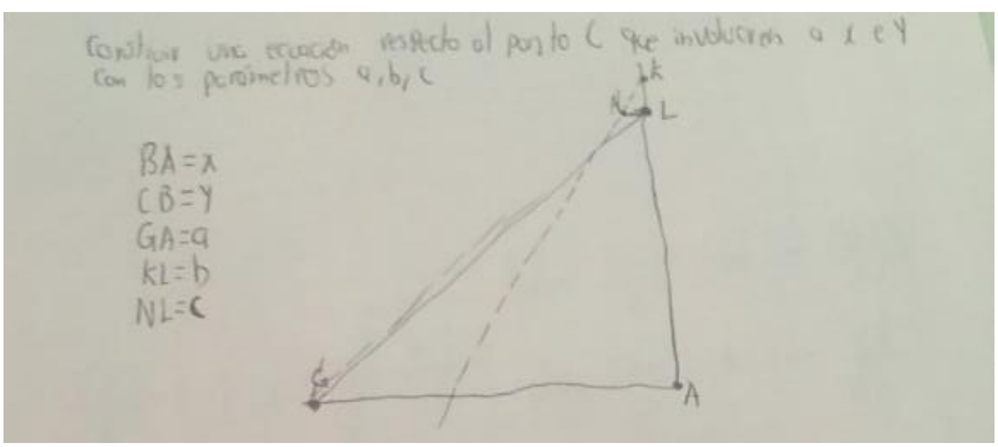
13.1.1.1. Estudiante 1 (E1)

En términos generales la actividad se le dificultó al participante, por dificultades con los conocimientos involucrados, tanto a nivel geométrico como algebraico.

En un primer momento, mostró dificultades en identificar qué hacer, es decir, él mismo se refirió al hecho de que no sabía qué hacer y que “estaba perdido” según sus palabras, lo cual lo motivó a solicitar el acceso al anexo 2.1. El investigador le preguntó qué había hecho hasta ese momento, a lo cual respondió que no tenía ninguna idea concreta de qué hacer. Así, se le dio la instrucción de abrir el anexo 2.1.

L1. **E1**: *Disculpe*
L3. **E1**: *¿Puedo… puedo ver el anexo?*
L4. **I**: *A ver antes de… de… ver el anexo me pláticas más o menos qué estás pensando*
L5. **E1**: *Mmmm realmente estoy perdido*
L8. **E1**: *Lo máximo he podido plantear, o sea, pero sólo he planteado los datos que se me dan. No… no logro llegar a pensar en algo.*

En su hoja de trabajo (que se obtuvo hasta el final de la sesión) se muestra que ordena la información que considera relevante de la situación información y de dar sentido a los datos del instrumento.



El participante manifestó dudas respecto a lo que significaba en la instrucción del inciso f) la idea de establecer relaciones respecto a c, en el sentido de que no entendía a qué se refería eso. El investigador recurrió al instrumento para mostrar que el instrumento construye el punto c, por los valores específicos de los parámetros y las reglas que forman la intersección. Le especificó también que las relaciones que debía establecer entre las figuras debían involucrar a c. En específico se refirió a las imágenes del anexo 2.1 y le mostró cómo en los triángulos que se forman, el punto c es parte de las figuras, por lo tanto, lo único que debía hacer era determinar relaciones en esos triángulos.

L12. **E1**: *Mmmmm cuando se refiere a respecto al punto C ¿es para determinar el punto C?*

L13. **I**: *Sí, o sea que... estem... digamos todas las relaciones o sea las relaciones que busques... que... que determines tienen que involucrar al punto C porque al final de cuentas, la curva digamos, como tú pusiste al principio, es construida por ese punto C cuando mueves L ¿no? entonces digamos la relación que tú tienes que establecer tiene que involucrar digamos, o sea, tienes que ver involucra el punto C. Eso es más o menos a lo que se refiere.*

L14. **E1**: *Entonces, en teoría lo que debo de armar es una ecuación con respecto al punto C ¿no?*

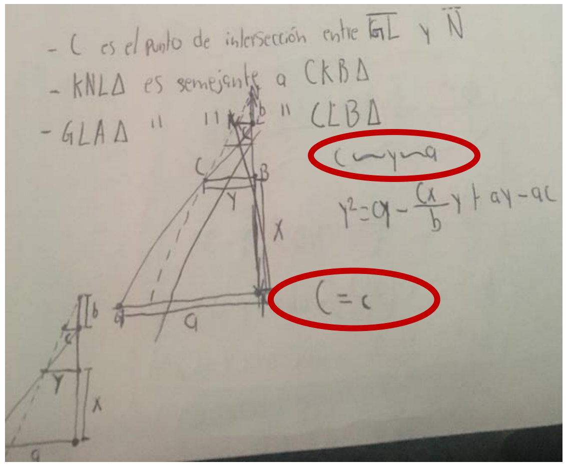
L15. **I**: *Sí, es decir, tú tienes, ya viste que ese instrumento en sí, lo que permite es construir ese punto C. Sí, porque si te das cuenta el punto C es una intersección ¿no? es un corte entonces, que se genera al cortar la recta...*

L16. **E1**: *GL y... la recta, no sé, eh... la recta K nada más, la línea punteada.* [Se refiere a la recta KN]

L17. **I**: *Exacto, entonces como... digamos por defecto de esa intersección se genera el punto C, entonces en verdad el instrumento, así tal cual, es lo que permite construir, digamos, esa, esa curva ¿no? entonces tú tienes que buscar, digamos con los datos que tienes allá, es decir, eh como te dicen en la actividad la estrategia de Descartes fue identificar que habían cantidades que determinaban esa construcción, es decir, ese punto C se ubica allá específicamente por la acción de ciertas medidas que tiene el instrumento, ¿sí? que en este caso los parámetros ¿sí? y hay otras que van a ser, digamos, variables en este caso, que son como tú ponías en el recuadro, dices que algunas cambiaban algunas que... que no. Esos parámetros son las cantidades fijas y las variables son las cantidades que van cambiando ¿sí? entonces una vez que tiene eso, él nombra, él va a decir, bueno, a va a ser GA, b va a ser, no me acuerdo si NL o KL y c una de esas dos también, y luego va a decir que y es CB, y x va a ser BA. Entonces con esos datos él lo que hizo es establecer ciertas relaciones para obtener una ecuación ¿sí?*

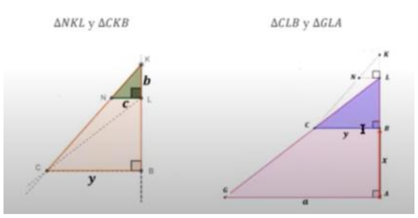
L18. **I**: *Y la sugerencia pues digamos está en el anexo 2.1, es decir, fíjate en las relaciones que están allí ante los... eh las imágenes para ver qué puedes concluir de ello ¿sí?*

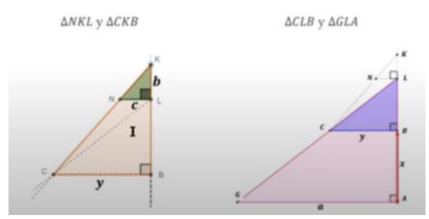
Después de un momento analizando el anexo 2.1, mencionó que identificaba la semejanza, pero no muestra cómo usar esa información para determinar una ecuación. En la hoja de trabajo puede verse que intenta usar la propiedad de semejanza determinando una relación de semejanza entre los segmentos NL, CB y GA, en términos de c, y y a, respectivamente. Asimismo, nótese que en la parte inferior establece una igualdad, en la que se infiere escribe el caso cuando en el instrumento se cumple que las longitudes de NL y CB coinciden.



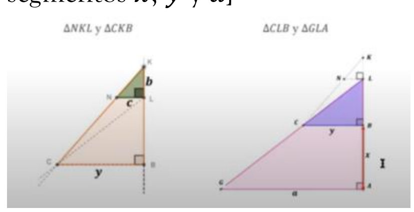
En ese momento el investigador le preguntó qué implicaba el hecho de que los triángulos fueran semejantes. El estudiante respondió que determinaba una relación de "escala" entre los triángulos. El investigador lo llevó a reformular la idea de escala para transitar hacia la de proporción, sin embargo, el participante no pudo relacionarlo. Bajo esta consideración el investigador le comentó explícitamente que podía pensarse en la proporción, sin especificar cómo, ni qué proporciones podrían construirse.

L21. **E1**: *entiendo que, o sea, no logro formar… entiendo que…* a, y *son semejantes debido a que el triángulo CLB y GLA son semejantes* [señala con el puntero los triángulos respectivos], *y por lo tanto, como* y *y* c *son semejantes por las mismas razones, entonces, por lo tanto,* a *es semejante a* c.





L22. **E1**: *Más lo que… y también comprendo que… que* x *sería perpendicular con* y *y con* a *y con* c. [señala con el puntero los segmentos x, y y a]



L24. **E1**: *Al igual que… que* b *sería perpendicular, pero dudaría en decir que* b *y* x *son semejantes, más no logro ponerlo en una ecuación. Todo esto que tengo apuntado.*

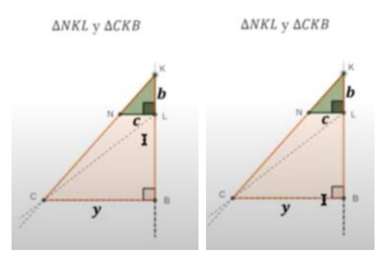
L25. I: *Ok, bien eh ¿qué significa que los ángulos?, por ejemplo, fíjate solamente en la pareja de la izquierda que sería el triángulo NKL y el triángulo CKB ¿qué significa? o ¿qué propiedad implica el hecho de que el triángulo NKL sea semejante con el triángulo CKB?*

L26. **E1**: *Mmmm que los ángulos son iguales.*

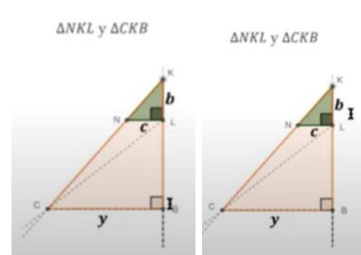
L27. **I**: *Ok y ¿qué más? ¿qué más podría ser?*
L28. **E1**: *¿Las medidas son a escala?*
L29. **I**: *Ajá… exacto a escala qué puedo decir estem… ¿de qué otra manera podría decir la escala?*
L30. **E1**: [20 segundos de pausa] Mmmm *pues serían parecidas serían…*
L31. **I**: *Podría decir que son proporcionales ¿no?*
L32. **E1**: *Sí, proporcionales.*
L33. **I**: *Es decir, el hecho de que haya escala significa que la una figura con respecto a la otra…*
L34. **E1**: *¡Ah una proporción!*
L35. **I**: *Exacto, entonces en el caso de esta figura ¿qué proporción podrías establecer? ¿podrías establecer algunas?*

Con esta orientación el participante inició con el establecimiento de proporciones, entre las dos parejas de triángulos indicados en el anexo 2.1. No obstante, estas relaciones no resultaron adecuadas por el hecho de que estaba estableciendo proporciones entre triángulos que no cumplían con la relación de semejanza.

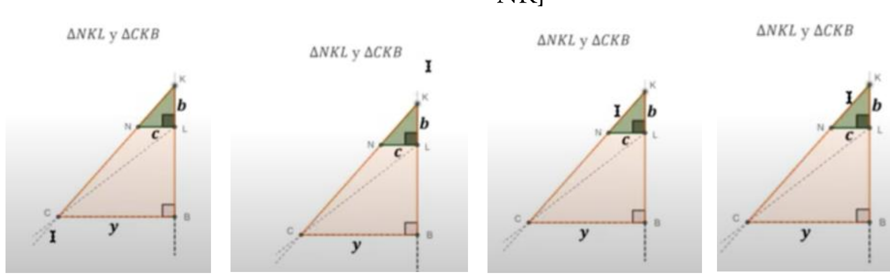
L37. **E1**: *Mmmm y es… c es proporcional a y* [con el puntero señala los segmentos c y y] *pero no…*



L41. **E1**: *y KB es proporcional a b*, [con el puntero señala los segmentos KB y KL] *pero…*



L42. **E1**: *Al igual que CK es proporcional la NK.* [Con el puntero señala los segmentos CK y NK]



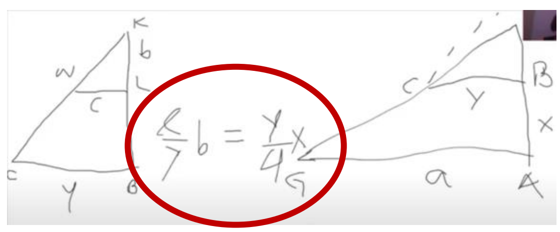
L40. **I**: *Ok, entonces intenta establecer una proporción utilizando justamente estos datos que tienes acá, así como me comentaste ¿si? y, de la misma manera fíjate que en este triángulo va a pasar algo similar, o sea, en la otra pareja de triángulos que es CLB y GLA ¿no? =*
L41. **E1**: *=Son semejantes*

L42. **I**: *Exacto, como son semejantes, pues deben guardar una proporción esos triángulos y allá tienes otros datos. Entonces, en la pareja de la izquierda, ahí involucras a* y *con* c *y* b, *y en la pareja a la derecha allá estás involucrando a* x *con* y *y* a. *Entonces trata de establecer alguna alguna proporción, estem… para cada par de triángulos y… identifica a ver si con eso te podrías, estem… podrías avanzar ¿sí?*

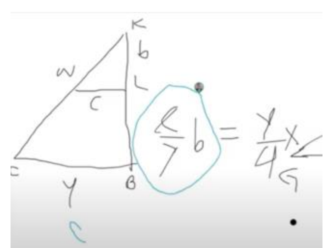
L48. **E1**: *Creo estoy un poco perdido, porque sí entiendo una proporción, pero no cómo se podría plantear simplemente qué… quiero entender que la misma proporción que se halla en el triángulo NKL y CKB es la que me permitirá relacionarlo con el punto c.*

L49. **I**: […] *fíjate aquí la idea cuando se menciona* […] *que tienen que involucrar el punto c si te fijas en los dos triángulos, o sea, en las dos parejas de triángulos que tienes, el punto C es parte de la figura. Entonces, por ejemplo, en el NKL con CKB, ves que C, de hecho, es un vértice de la base del triángulo naranja ¿no? y en el otro, en la otra pareja de morado y el rosado el punto C también es parte de la figura, entonces a eso se refiere la idea de que lo involucren. Solamente el hecho de que esos triángulos que tienes ahí, ya el punto C sea parte de… de esos triángulos, ya está involucrado, digamos, como se espera, bueno como se dice en la instrucción. Entonces como ya está involucrado C lo único que, digamos, debes hacer esta vez es ver en esos triángulos qué tipo de relaciones podrías encontrar utilizando estas cantidades* c, b, y, a *y* x *para poder determinar una ecuación ¿sí? Entonces la idea es que como tú me decías, bueno podría haber una proporción allá en el primer par de triángulos y en el otro, otra proporción. Entonces intenta determinarlas a ver qué sucede.* […]

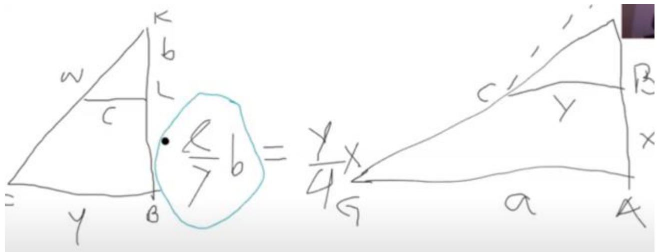
L56. **E1**: *Lo que yo vi era* c *sobre, esta la ecuación que… me alcanzó a plantear… sobre* y *por* b *es igual a* y *sobre* a *por* x [Escribe la ecuación en la pizarra digital]

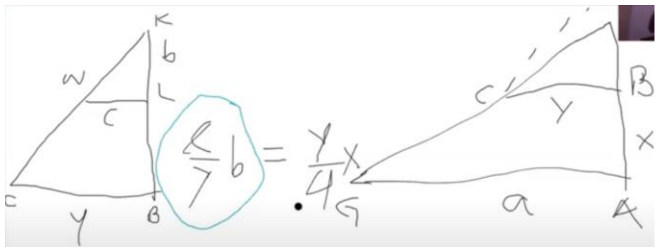


L57. **I**: *Ok, vamos a ver. Entonces aquí la pregunta es… eh esta… esta parte de aquí* […]. *Por ejemplo, el hecho de* c, *eh bueno esta ¿no?* c *sobre* y *por* b *¿de dónde estem… dónde sale? ¿por qué, digamos, tú dices que eso, digamos, se cumple?* [encierra la expresión $\frac{c}{y}b$] *¿de dónde sale?*



L58. **E1**: *de la semejanza de… de la semejanza de… como son semejantes y decidí uniirlos creyendo que este el resultado, este coeficiente. Sería igual que este coeficiente de aquí. Debido a las semejanzas* [señala con el puntero las razones $\frac{c}{y}$ y $\frac{y}{a}$, lo cual indica que está relacionando los triángulos NKL y CKB con los triángulos CKB y GLA como si cumplieran la relación de semejanza]

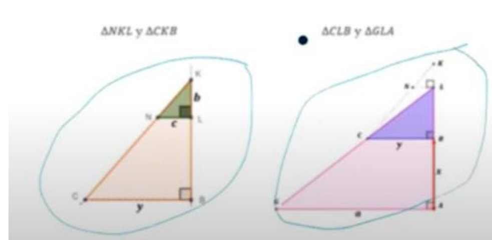




Con base en este planteamiento, el investigador lo cuestionó para propiciar una ruptura con esta relación que estaba determinando. Para ello, la interacción se centró en el cuestionamiento y reflexión respecto a la semejanza entre los triángulos que estaba relacionando para determinar las proporciones. Con esta interacción, el participante argumentó que no se cumplían estas relaciones que determinó. De esta manera, el investigador, lo invitó a centrarse por separado en las parejas de triángulos intervinientes en el problema y explicitados en el anexo 2.1.

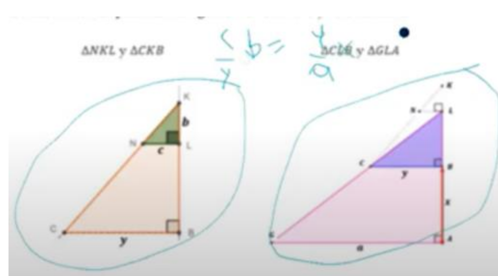
Quizás el hecho de establecer estas relaciones pueda deberse a que, puesto que no hay instrucciones específicas sobre los pasos a seguir para construir la ecuación, pudiera pensarse que las relaciones deben encontrarse entre los triángulos de la izquierda y los de la derecha, por lo que podría estar inducido por la misma actividad.

L59. **I**: *Ok, la pregunta que tengo aquí por ejemplo será que… […] tú está estableciendo una igualdad entre medidas entre estos dos triángulos, como me estás mostrando, es decir, entre estos y estos ¿no?* [encierra los triángulos CKB y GLA].

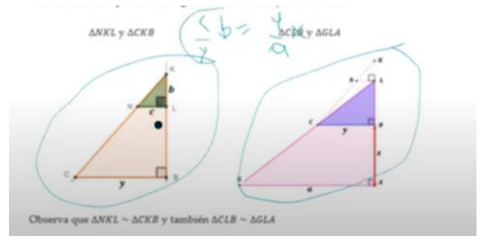


L60. **I**: *Porque estás estableciendo, bueno tú dices qué… bueno,* c *sobre* y, *por* b, *es igual a* y *sobre* a, *por* b [escribe la proporción propuesta por el estudiante] *¿no?*=

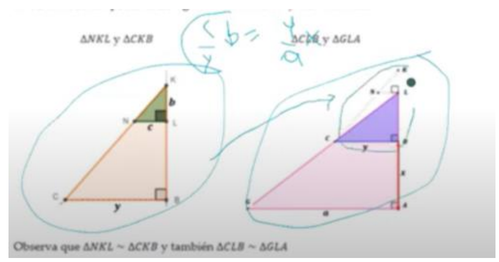
L61. **E1**: =*Por equis.*



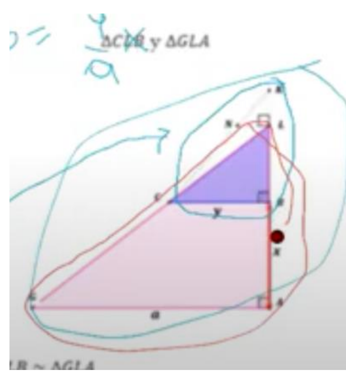
L62. **I**: *[…] Por equis, ahora está…fíjate que éstas relacionan entonces aquí las medidas de estos… eh estos dos triángulos como te decía,* [señala los triángulos CKB y los triángulos de la imagen de la derecha GLA y CKB] *con respecto a estas.*



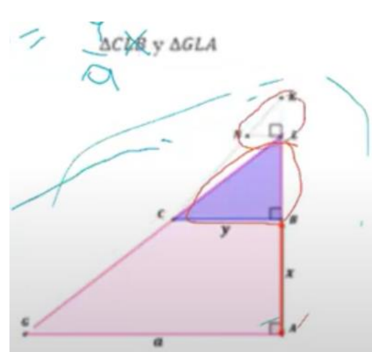
L63. **I**: *De hecho, esos dos triángulos son los que están aquí arribita ¿no? Entonces este pedacito,* [relaciona con una flecha los triángulos CKB en ambas imágenes con una flecha y encerrándolo en la imagen de la derecha]



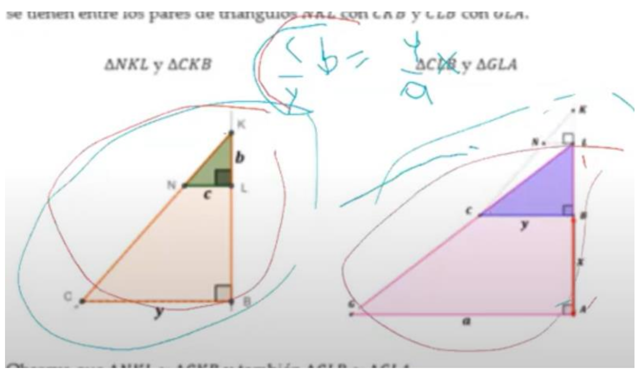
L64. **I**: *Entonces la pregunta es: para que tú puedas establecer esta igualdad entre las medidas entre estos dos triángulos que son eh esos que están aquí en azul* [se refiere al triángulo CKB], *con estos dos que están aquí en rojo,* [encierra el triángulo GLA] *tendríamos que ver que, entre sí, ellos sean semejantes ¿sí?*



L65. **I**: *Ahora la pregunta es si en verdad, por ejemplo, […] estos triángulos, específicamente este triángulo es semejante con este* [borra las líneas dibujadas anteriormente y encierra los triángulos NKL y CKB] *¿qué dirías? ¿que son semejantes, o no?*

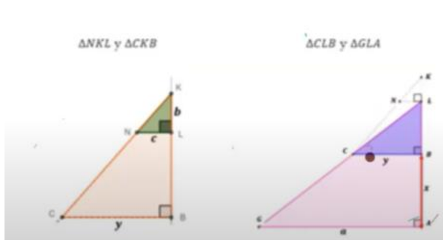


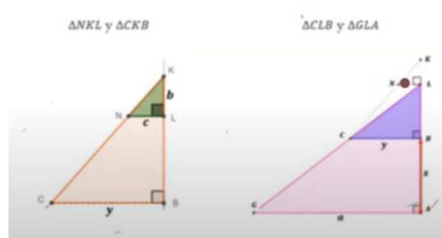
L66. **E1**: *no lo sería.*
L67. **I**: *¿Por qué no?*
L68. **E1**: *Porque… mmm no… bueno es que, si nos basamos según en la apariencia, se puede decir que el ángulo N, no es igual que el ángulo C.*
L69. **I**: *Ok, exacto. Entonces eso significa que esos triángulos no son semejantes ¿ok? por lo tanto, cuando tú haces estas esta [relación-]*
L70. **E1**: *[Es incorrecta.*
L71. **I**: *Claro, porque no… estás relacionado como si estos dos, digamos éstos, tuvieran, digamos, relación de semejanza con estos y esto es lo que justamente me acabas de decir que no, no se cumple ¿no?* [encierra los triángulos CKB y NKL de la izquierda junto con el triángulo GLA].



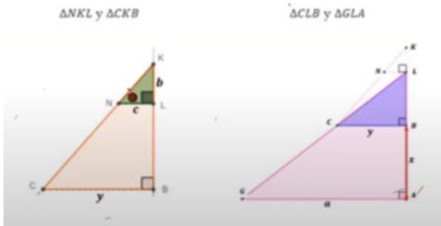
A partir de esta interacción el investigador orienta al estudiante para determinar las proporciones correctas.

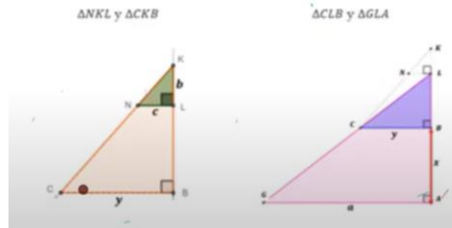
L72. **I**: *Entonces la idea es aquí fíjate solamente cuando miras este este par de triángulos, por ejemplo, fíjate solo en los de la izquierda.*
L73. **I**: *ya… ya teniendo eso en cuenta, es decir, ya vimos que no, o sea no podría establecer relaciones entre estos entre este par de triángulos el de aquí con los de aquí ¿no? porque no son semejantes, justo por la razón que diste, que el ángulo que hay, por ejemplo, en este caso, este que está aquí, no sería igual con éste* [señala los ángulos LCB y KNL en la imagen de la derecha] *y como no son iguales, pues no serían semejantes,*



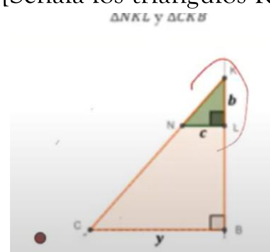


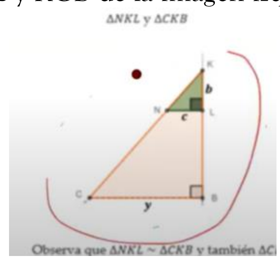
L74. **I**: *Pero lo que sí vemos aquí es que este ángulo en el de la izquierda con respecto a éste,* [señala los ángulos KNL y KCB en la imagen de la izquierda] *si son iguales ¿no?*



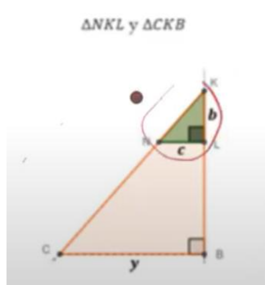


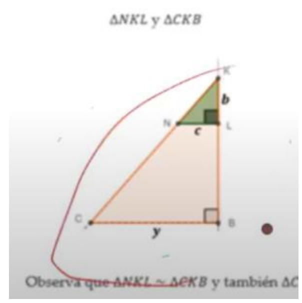
L75. **I**: *Entonces, por eso se dice que estos dos, es decir, la pareja de este chico verde, con este naranja, son los semejantes.* [Señala los triángulos KNL y KCB de la imagen izquierda]



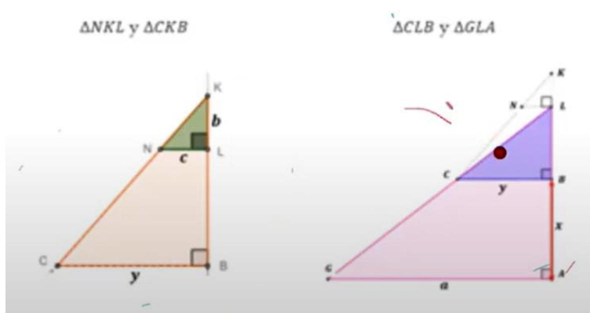


L76. **I**: *Entonces, sabiendo que esos dos triángulos son semejantes, este pequeño con este,* [señala nuevamente los triángulos KNL y KCB de la imagen izquierda] *entonces ¿cómo podría establecer esa proporción?*

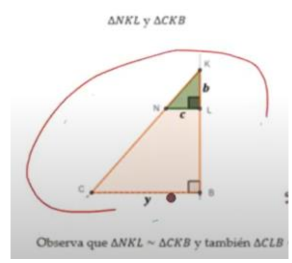




L77. **I**: *Porque como ya había… dijimos no podía establecerlo directamente ahora con este* [señala el triángulo GLA]… *con estos de aquí,*



L78. **I**: *Sino más bien aquí, con estos dos*, [señala el triángulo CKB]



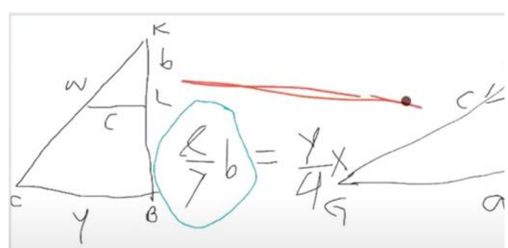
L79. **I**: *¿cómo podríamos establecer una proporción?*

L80. **E1**: *Mmmmm*

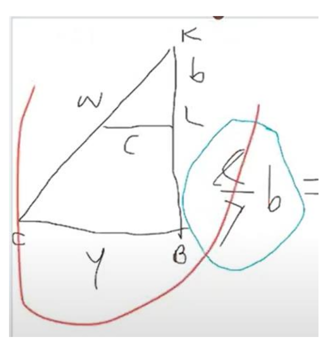
L82. **E1**: *En serio, no busco una proporción que aquí se cumpla y en [él-]…*

L84. **E1**: *que en este cumpla y que en el segundo también se cumpla* [señala con el láser digital los triángulos CKB y NKL de la izquierda junto con el triángulo GLA].

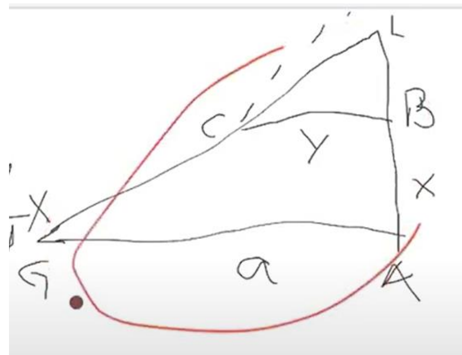
L85. **I**: O *sea, por… como… como decíamos… como no no se puede establecer digamos relación de semejanza entre estos pares de triángulos* [señala los los triángulos CKB y NKL de la izquierda junto con el triángulo GLA] *veámoslo por separado.*



L86. **I**: *Primero establece… vamos a establecer relaciones aquí,* [señala con el láser digital el triángulo CKB] *que si se puede porque aquí sí son semejantes,*



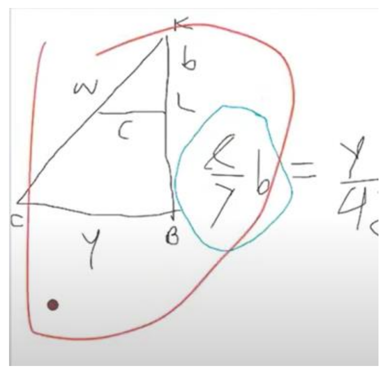
L87. **I**: *Y una vez que establezcamos una relación allá de proporción, después, aparte, vamos a trabajar con este ¿si?*



L88. **I**: *Es decir, como por separado, porque van a salir relaciones tanto en este como en el de aquí* [se refiere a los triángulos previamente señalados], *que van a involucrar a las cantidades de interés, que son y, c, b, a y x,*

L89. **I**: *Pues primero hagámoslo por… por pedazos, digamos, en este… en esta pareja en la izquierda eh* [señala con el láser digital el triángulo CKB] *¿qué relación de proporcionalidad podrías establecer?*

L90. **I**: *Así como lo venías haciendo más o menos, ¿cómo quedaría una relación de proporción?*

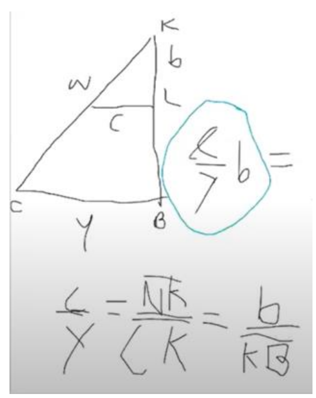


L91. **E1**: *sería mmm una relación de proporción*

L92. **E1**: *c sobre y mmmm es igual a… al… al segmento NK sobre el segmento CK, que es igual, al segmento… es igual a b, sobre el segmento, ((imperceptible, la hipótesis es: falta una rayita))… KB. Sí, es KB.*

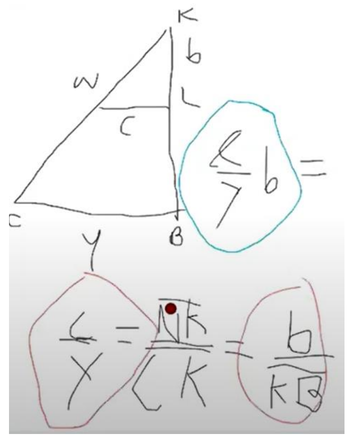
L93. **E1**: *este sería más o menos* [*la*-]

L95. **E1**: [*la proporción.*]

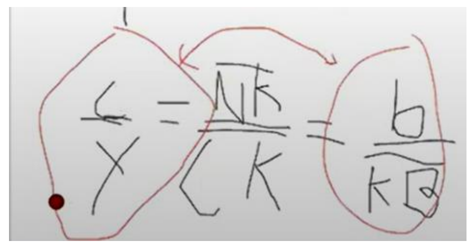


Puesto que el estudiante logra determinar la proporción correcta entre los triángulos KCB y KNL, entonces el investigador lo lleva a analizar los elementos que están involucrados en la proporción.

L96. **I**: *Exactamente, eso sería una proporción y fíjate… que aquí tienes ya involucrado dos cantidades, o sea, las cantidades de interés porque aquí tienes c, y y aquí tienes b y BK,*

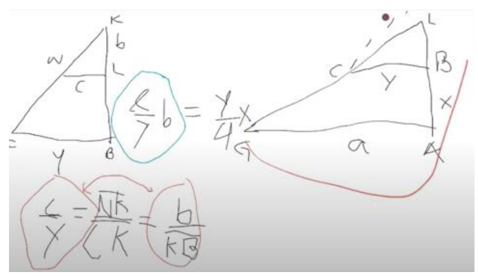


L97. **I**: *Entonces fíjate que de estas dos puede establecer una ¿no? porque eso también es correcto… también se cumple con digamos… con este lado ¿no? como pusiste aquí, pero usando estas dos ya tienes como […] que c sobre y es igual a b sobre KB.* [Dibuja una flecha bidireccional para indicar que se deben relacionar las razones $\frac{c}{y}$ y $\frac{b}{KB}$]



L98. **E1**: *Sobre KB.*

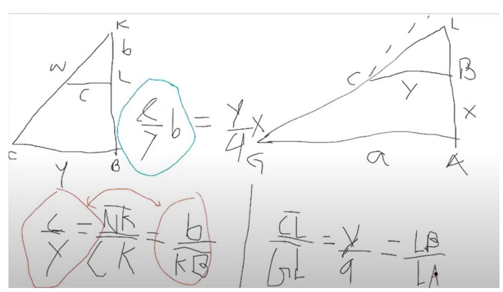
L99. **I**: *Ok, entonces, así como estableciste este, has algo para usar… lo mismo para este triángulo* [señala con el láser digital el triángulo GLA], *a ver qué sale en el otro, ¿que saldría en el otro?*



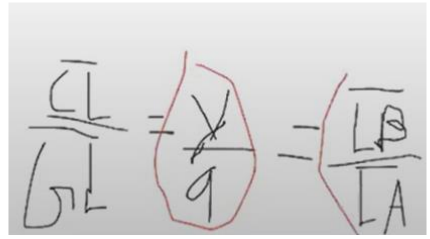
L100. **E1**: *¿En ese otro sacar la misma proporción?*

L101. **I**: *Exacto, sacando una proporción.*

L102. **E1**: *Mmm un segmento, voy a dividirlo creo que así.* [Dibuja una línea que separa la proporción anterior con lo otra proporción que propondrá]. *Segmento… CL sobre GL es igual al segmento es igual a y sobre a que es igual a L… L… LB sobre LA.*



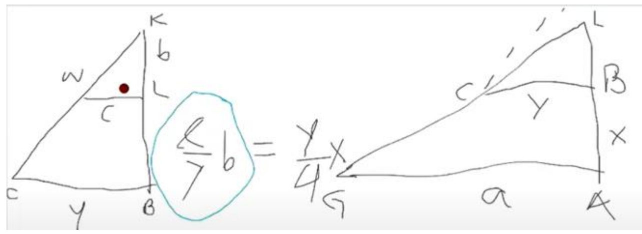
L103. **E1**: *Esta sería la proporción. Entonces, bajo el mismo razonamiento emmm… tomaríamos esta que involucra… mmm y, a, y no sé si podríamos tomar esta segunda, ya que ésta involucra x pero no directamente, o sea es una cantidad que trae consigo x, más no es x en sí misma.* [Encierra las razones $\frac{y}{a}$ y $\frac{LB}{LA}$].

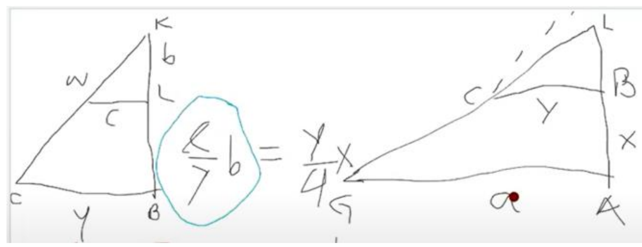


L104. **E1**: *Así que no sé si… si cumpliría con… con los mismo que acá que en este segundo.*

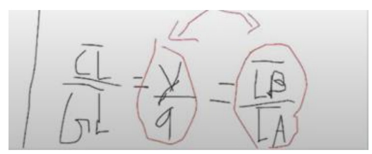
L105. **I**: *Ok, pues… ¿tú qué piensas en ese sentido?*

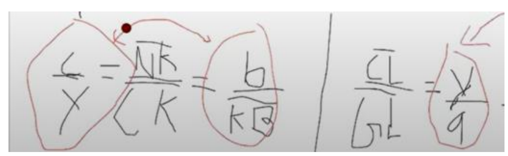
L106. **E1**: *Mmmmm a mí me parece que involucra la cantidad, por lo tanto, si está relacionado con x. Y es la misma semejanza que habría tanto aquí que habría acá* [señala con el puntero las dos parejas de triángulos].



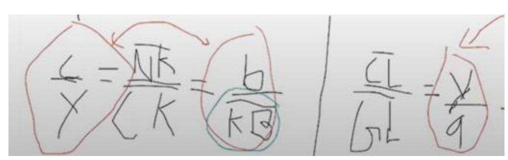


L107. **I**: *Ok, entonces eh fíjate… utilizando este resultado que ya tienes, es decir, estas dos, por ejemplo, esta que tienes aquí* [relaciona con una flecha bidireccional las razones $\frac{y}{a}$ y $\frac{LB}{BA}$] *y la primerita que vimos, c es a y como b es a KB.* [Señala con el puntero las razones $\frac{c}{y}$ y $\frac{b}{KB}$]





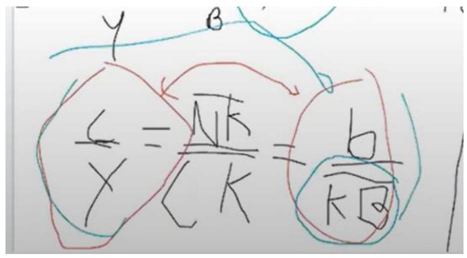
L108. **I**: *Intenta… que ¿qué faltaría ahora? por ejemplo, que tienes, digamos, estos segmentos ¿no? bueno digamos, tienes acá, como bien decías, segmentos que están en términos… todavía no están así exactamente en términos de las… de los parámetros y de x e y. Dice LB y LA y aquí en este caso tenemos a KB.* [Encierra los términos KB, LB y LA].



L109. **I**: *Entonces lo que faltaría ahora es ver cómo poder expresar estos tres, digamos, en términos de esas que tienes, es decir x e y, o con los parámetros.*

L110. **E1**: *Podríamos reemplazar KB por otras variables.*

L111. **I**: *Exactamente, que involucren a los, en este caso, b, c, a... lo que ... o sea, a los parámetros ¿si? y a x e y. Entonces, considera a estas dos proporciones porque sí ¿sí recuerdas? cada una en sí misma ésta... está con esta forman una proporción* [se refiere a las razones $\frac{c}{y}$ y $\frac{b}{KB}$], *porque recuerda que la proporción es una igualdad de dos razones. Esta es una razón y esta es otra razón ¿no?* [se refiere nuevamente a las razones $\frac{c}{y}$ y $\frac{b}{KB}$] *entonces, la igualdad de esas dos razones forma esa proporción, que es lo que tienes aquí. Acá hay una proporción. Es la igualdad de dos razones, que es y es a a, como LB es a LA ¿sí?* [Encierra en azul las razones $\frac{c}{y}$ y $\frac{b}{KB}$ y dibuja una línea para relacionarlas]

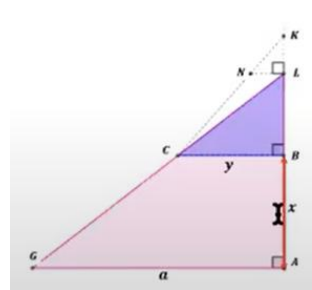


L112. **I**: *Entonces trabaja con estas, a ver qué es lo que puedes, estem obtener, para lograr, digamos, estem... determinar... K... quién es KB en términos de los parámetros, o de las incógnitas quién es LB y quién es LA ¿sí?*

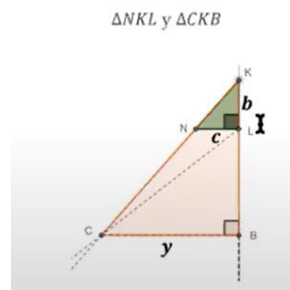
El estudiante comenzó otro proceso de trabajo para usar las proporciones determinadas en la construcción de la ecuación. No obstante, no supo qué hacer con las proporciones, llevándolo a establecer relaciones aleatorias para conseguir términos como los encontrados en la ecuación de Descartes, en específico el cuadrado de y. Por ejemplo, estableció que: $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB} = \frac{c^2}{y^2} = \frac{c}{y} \cdot \frac{b}{BK}$, lo cual muestra un razonamiento correcto, pero sin efecto en la resolución.

L115. **E1**: *Mmmmm entonces, solo para corroborar algo. La resta... ya que LA conforma LB y x... si a LA le restó LB me quedo solamente con x ¿no?* [señala con el puntero los segmentos LA y LB]

ΔCLB y ΔGLA



L116. **E1**: *Al igual que… que si la… proporción… mmm se iguala…*



L117. **E1**: *Igual a c sobre y igual a b sobre… sobre KB…*

L118. **E1**: Mmmmm *si… a c sobre y lo elevó al cuadrado, sería lo mismo que multiplicar c sobre y, por b sobre KB ¿no?*

L119. [señala con el puntero los segmentos LB y KB]

L120. **I**: *Mmmmm a ver esta última… perdón. Si elevo al cuadrado ¿qué elevas al cuadrado?*

L121. **E1**: Mmmm *c sobre y,*

L122. **I**: *Ok.*

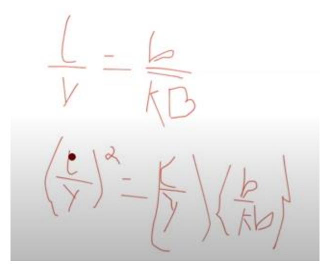
L123. *E1: Sería equivalente a multiplicar c sobre y, por b sobre KB.*

L124. **I**: *Mmmmm a ver eso… ¿de dónde?… ¿de dónde saldría esa, como… como relación?*

L125. **E1**: *Teniendo en cuenta que… […]*

L126. **E1**: *Teniendo lo mismo de antes… Teniendo que c sobre y es igual a b, sobre KB. Mmmmm entonces estaré bien en afirmar que c sobre y al cuadrado sería igual*

L127. **E1**: que c y *por b sobre KB* [escribe las relaciones $\frac{c}{y}=\frac{b}{KB}\rightarrow\left(\frac{c}{y}\right)^2=\frac{c}{y}\cdot\frac{b}{KB}$].



L129. **E1**: *Esto sería correcto ¿no?*

L130. **I**: *Y allá te estás basando de… justamente [de..-].*

L131. **E1**: *[De esta proporción, de c sobre y, igual a b sobre KB. Teniendo en cuenta que son lo mismo, entonces elevarlo al cuadrado sería igual que multiplicarlos entre sí.*

L132. **I**: *Sí, sí se cumpliría.*

L133. **E1**: *Ok.*

L134. **E1**: *¿Puedo sustituir términos? empleando en vez de referirme como LB pongo, o para susti… para… referirme a… en el segundo triangulo, a LA denominó como f ¿puedo sustituirlos así?*

L135. **I**: *Como tú gustes, como tú consideres.*

Posterior a esta interacción, el estudiante continuó con la resolución. Durante el proceso de resolución el estudiante preguntó sobre la razón de la información respecto de la perpendicularidad, mostrando dudas respecto a la función de esa información. El investigador le comentó que eso permitía fundamentar el establecimiento de las proporciones (ver L136-L140 de la transcripción).

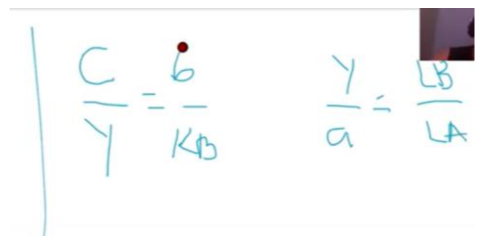
Durante el proceso de resolución posterior, el estudiante indica al investigador que estaba tratando de "conectar" ambas relaciones en una sola ecuación, pero que no sabía cómo hacerlo. Esto dio pie a una interacción en la que el investigador propone al estudiante el análisis de las proporciones a las que se había llegado ($\frac{c}{y} = \frac{b}{BK}$ y $\frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$) con la intención de mostrarle cómo interpretar sus componentes en términos de los elementos de los triángulos semejantes y sus respectivas asociaciones con los parámetros y variables. Al final de esta interacción el investigador propone específicamente operar sobre la proporción para determinar a KB en términos de los parámetros y variables.

L141. **I**: *¿cómo vas? ¿qué vas haciendo ahora?*

L142. **E1**: *Voy buscando cómo plantear la... la ecuación.*

L143. **I**: *Ok.*

L144. **E1**: *Porque teniendo el factor que restando dos lados me da... me da x, y teniendo como elevarlo al cuadro más, estaba planeando... No veo la conexión entre la proporción de... de... de estos triángulos con la proporción de ese triángulo, no veo cómo puedo conectar los dos en la misma ecuación.*



L145. **I**: *Mira... [...]. Tú ya sabes ¿no? de lo anterior ya sabes que c es a y como, b es a KB, y por otro lado tienes que y es a a, como en este caso, era...*

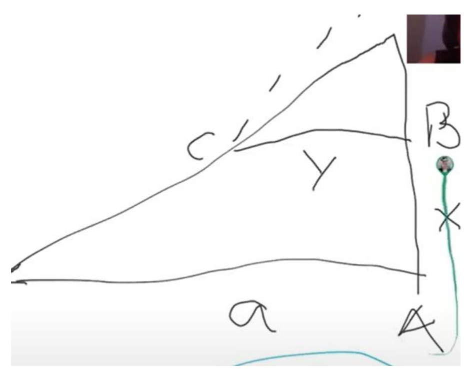
L146. **E1**: *LB a LA*

L147. **I**: *Ok, LB es a LA.* [escribe las dos proporciones $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$ y $\frac{y}{a} = \frac{Lb}{LA}$]

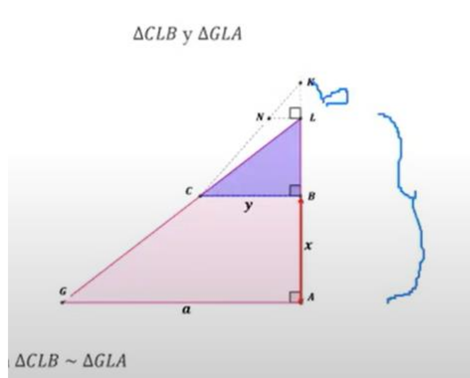
L148. **I**: *Y tú dices que... es una de las cosas que me parece interesante, dices que... estás buscando como una conexión entre... entre estas dos. Ahora, hace un rato dijimos, por ejemplo, en la figura, que...eh, por ejemplo, este lado de LA y LB contenía x, pero también de alguna manera, podría relacionarlo con b, no sé si recuerdas.*

L149. **E1**: Mmmm *conte... contenía a x mmmm.*

L150. **I**: *¿Sí? Mira [...] Entonces fíjate que... voy a hacer así con... nada más con el apuntador. Fíjate, tú dijiste: aquí tengo a LB y LA, que es este que está aquí ¿no? y... eh LB, que está por aquí, y LA, digamos LA relaciona lo que sería, digamos, el segmento Estem es un segmento que contiene a x pero también está, digamos, relacionada con el de b, KL ¿sí?* [señala con el láser digital el segmento LA]

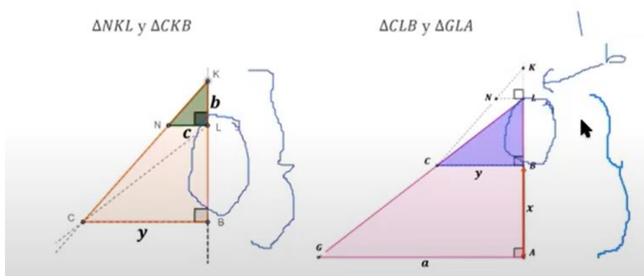


L151. **I**: *[…] entonces fíjate que aquí tú tienes que este de aquí es* b *¿no? aquí tienes a* x *y tú decías, por ejemplo, que en este caso, eh el lado LA, que sería todo este de aquí ¿no? todo este podrías verlo con una resta ¿no? ¿sí?* [dibuja una llave y la letra b para mostrar las relaciones entre el parámetro b , el segmento LA y la variable x].



L152. **E1**: *Una resta de… o una suma de* b *más LA sería KA. KA menos* b *es igual a LA.*

L153. **I**: *Ok, aquí tienes a* b. *Aquí está* b *entonces fíjate de una cosa, de estem… claro tú me estás diciendo esta idea de que puedes verlo como una diferencia. El lado LA, pero fíjate que aquí en el triángulo, en el de la izquierda, estem KB* [dibuja una llave para destacar el segmento KB], *si te das cuenta, está involucrando a LB ¿sí? es decir, esta parte y esta parte es la misma que está aquí* [encierra LB en el triángulo de la izquierda y también en el triángulo LGA de la derecha] *¿sí? Ok, entonces, de alguna manera si quieres verlo así, está… de alguna manera conociendo quién es este LB también podrías relacionarlo con… con el otro triángulo, y de esa manera poder estem establecer esa conexión que dices ¿ok? Entonces aparte de eso, […] entonces no sé si te convence el hecho de que… lo que te mostré te muestra que hay como una conexión entre esos dos.*



L154. **E1**: *Sí, mas no me ubico en cómo plantearlo.*

L155. **I**: *Ok, entonces ahorita vamos a ver. Lo importante es que ya hayas visto que hay una conexión, que es lo que buscabas. Ahora fíjate que… ¿qué podemos hacer con esta proporción? o sea, teniendo que* c *es a* y *cómo* b *es a KB ¿podrías decir quién es KB, en esta proporción,* [señala con el láser virtual la proporción $\frac{c}{y}=\frac{b}{KB}$] *en esta proporción, sólo en esta, en términos de* c, b *y* y *o ¿qué podrías hacer con esa proporción? con esta igualdad.*

L156. **E1**: c *es a* y *lo que* b *a KB. KB sería él… sería el segmento que conecta LB con* b

L157. **I**: *Ok, perfecto y aparte de eso, o sea, en esta proporción ¿tú podrías determinar o expresar el valor de KB, en términos de… de estos tres, decir KB.*

L158. **I**: *[…] ¿podrías expresar a KB en términos de c, y y b. Es decir, KB cómo se relaciona con estos tres de acá.*

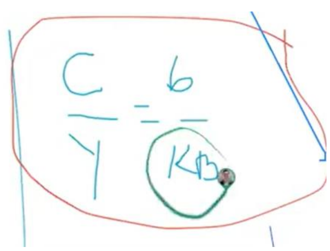
L159. **E1**: *En relación […] del triángulo es que cabe los… los toques se podría decir, o sea por un mismo… mmm… KB conforma los dos triángulos, tanto del lado de KL como él de KB.*

L160. **I**: *Ok, a ver dices que KB conforma… […]*

L161. **I**: *Bien, entonces fíjate, te digo, en la en la proporción que tienes allá. c es a y, como b es a KB. ¿Qué puedes hacer con esa proporción? así solo la proporción ¿qué puedes hacer con esa proporción? o ¿qué operaciones puedes hacer allá?*

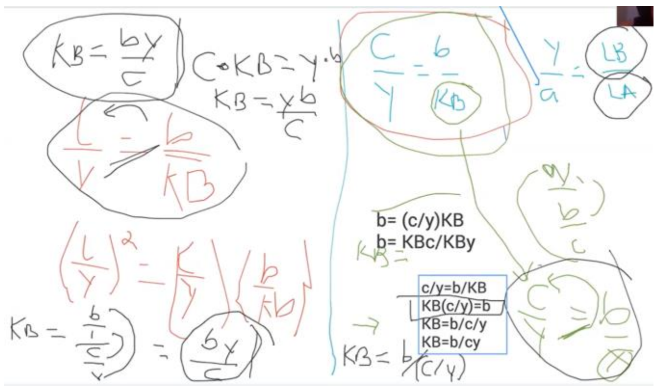
L162. **E1**: *A ver, podría intentar despejar, ahí podría intentar despejarse, por ejemplo, que sería… si c esta dividiendo a y, pasaría multiplicando y b es a KB por y, y calcularía c.*

L163. **I**: *Ok, entiendo, o sea, digamos la estrategia y, claro tú como dices puedo despejar a c en términos de los demás y si, por ejemplo, la aplicas para KB, es decir, como c ya sabes, o sea, tienes definido c, tiene definido b, y tienes definido y, pero no sabes quién es KB, ¿puedes aplicar esa… esa estrategia para decir quién es KB, es decir, despejar KB.* [señala con el láser virtual el término KB]



Durante el proceso para expresar a KB en términos de los parámetros y variable, el estudiante muestra dificultades con la manipulación algebraica, por lo cual la interacción se centró en atender a esas dificultades (ver L164-L209). Una vez que se atendieron estas dificultades y determinado el valor de KB, deja que el participante continúe con el procedimiento para determinar LB y LA, las dos cantidades de la otra proporción que no están escritas en términos de los parámetros y variables. El investigador comenta al estudiante que podría usar algunas de las relaciones ya antes mencionadas entre la suma y diferencia de los segmentos que los involucran. No obstante, después de un momento, el participante menciona que no encuentra una forma de conectar las dos proporciones, algo sobre lo que previamente ya había determinado de manera correcta, al establecer que el segmento KB forma parte del segmento LB, lo cual el investigador le hace ver empleando la imagen de los triángulos.

L210. **I**: *Entonces, aquí la cuestión es, como la… el digamos la operación… las operaciones con la proporción. Entonces fíjate de lo siguiente, con esto lo que estamos diciendo es que ya puedo establecer, o sea, ya KB a KB ya sé quién es en términos de los parámetros y de la incógnita. KB es* b *entre* c *por* y*. ¿sí? y una vez… como dijimos cómo están conectados estos dos triángulos, digo estos dos pares de triángulos ya que sé quién es KB, podría decir, por ejemplo, quién es LB y, sucesivamente quién es LA, ¿sí?* [encierra la expresión $\frac{by}{c}$ y los términos LB y LA en la proporción de la esquina superior derecha de la pizarra]



L211. **E1**: *Entonces sería despejar…*

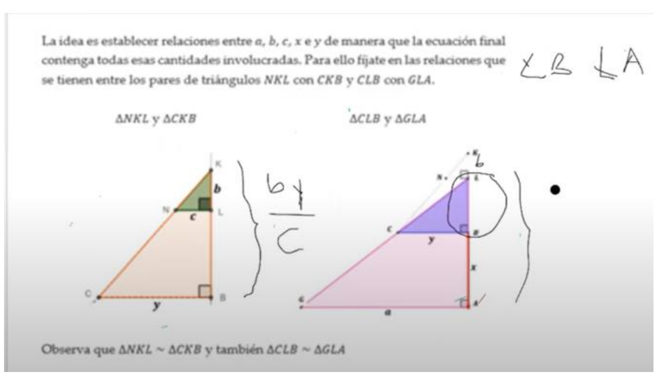
L212. **I**: *Entonces, por ejemplo, lo que… claro que aquí, cuando despejes en esta, por ejemplo, eh pues no te… no te va… a solamente te va a quedar… o sea, te van a quedar, digamos, igual en términos de LB y LA porque no sabes exactamente, eh [-]*

L213. **E1**: *[Ninguno de los dos.*

L214. **I**: *Exactamente, por eso, como tú decías, la clave es… en… está… es… está en encontrar como la relación que hay entre los triángulos, por qué, veamos que […] ¿quiénes te faltan ahora a ver? ¿quién es LB y LA?* [escribe LB y LA]

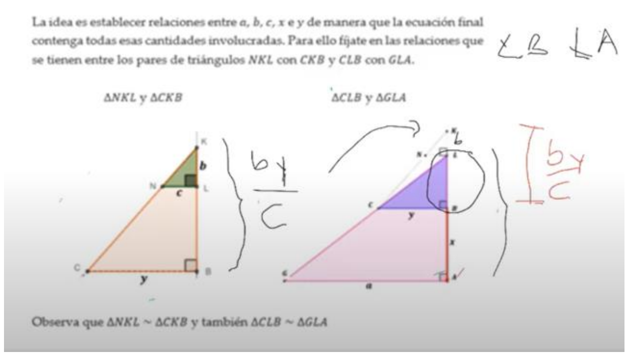
L215. **E1**: *sabemos que…*

L216. **I**: *Entonces que sería este ¿no? este es LA, LB perdón, pero y el de abajo, pues bueno todo ese complemento sería LA.* [encierra LB en el triángulo GLA y señala el segmento LA con una llave].



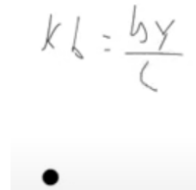
L217. **I**: *Pero lo que sí sabes es que… este pedacito de acá es b ¿no? y ya sabes además que KB, que sería todo esto,* [dibuja una llave para señalar el segmento KB en el triángulo CKB de la izquierda] *lo que acabamos de encontrar es b por y entre c ¿no? KB. Entonces tengo que… todo esto sería b por y, entre c,* [escribe $\frac{by}{c}$].

L218. **I**: *¿dónde está KB aquí? pues sería…* [dibuja una flecha que relaciona el segmento KB del triángulo de la izquierda con el segmento KB del triángulo de la derecha] *[…] Esto de aquí ¿no?* [dibuja una línea para ubicar el segmento KB en los triángulos de la derecha] *¿ya?, entonces tengo que esto es b por y entre c.* [escribe la expresión $\frac{by}{c}$].

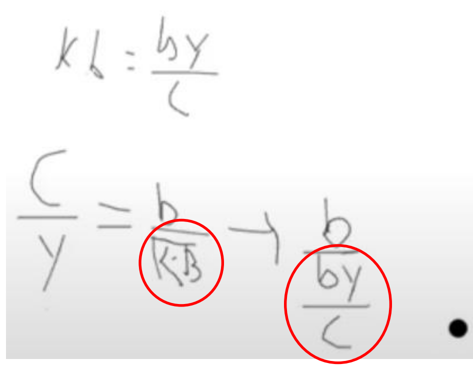


L219. **E1**: *Mmmm en teoría ya lo tendría.*

L221. **E1**: *Ok, entonces […] agarré y planteé que teniendo que KB es igual a by sobre c y decidí hacer una sustitución en la igualdad original.* [escribe la expresión $KB = \frac{by}{c}$].

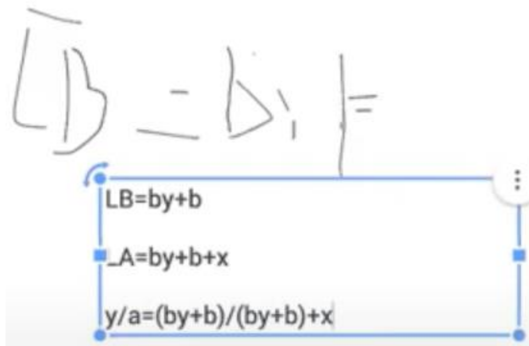


Posterior al establecimiento de esta expresión el estudiante muestra el trabajo que hizo con esta. Como puede leerse en el extracto L222-L232, el estudiante realiza una manipulación algebraica redundante al sustituir el equivalente de KB determinado previamente ($KB = \frac{by}{c}$).



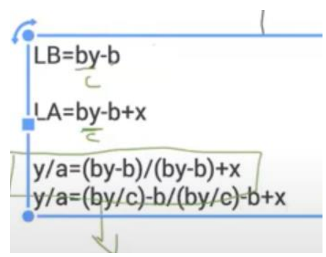
El investigador revisa con el estudiante esta manipulación, mostrándole el carácter redundante de esta. Posteriormente, le solicita que use el resultado $KB = \frac{by}{c}$ para reescribir a LB. Si bien la sustitución que hace el estudiante es la que se espera, este no se percata de que no sustituye adecuadamente al equivalente de KB, omitiendo el denominador c. Esto, en consecuencia, afecta las otras equivalencias propuestas.

L233. **I**: *[Ok y entonces así reescrita podría poner que -]*
L234. **E1**: *[LB forma parte de b por y entre c.*
L235. **I**: *Exactamente.*
L236. **E1**: *Entonces así ya rescrita podría poner que LB sería by*
L237. *más b… […]* [escribe las expresiones mientras explica]
L238. **E1**: *Seria… LB es igual a by más b y luego para calcular LA que LA sería básicamente sería LB, eh más x, por qué eh LB más… entonces sería by más b más x, y a la hora de colocar la segunda igualdad sería… si no me equivoco es y sobre a, sería igual… que by más b sobre by, más b… eh* ((murmura ¿cómo se llama esto?)) *y menos b más x, sería creo que así.*



A propósito de esta situación el investigador le hace ver al estudiante la omisión y cómo esta afecta al resto de las equivalencias (ver L239-L250). De esta manera, el estudiante corrige la expresión:

L254. **I**: *Entonces, allá sólo falta ajustar la c, o sea, digamos, que tengas que es by sobre c, es lo único que hace falta ¿no?*
L255. **E1**: *by sobre c, entonces sería… dividido entre a, sería bueno… y sobre c, está con mayúsculas by sobre c mmmm menos b sobre by sobre c menos b, más x.* [corrige la expresión $\frac{y}{a} = \frac{by-b}{by-b} + x$, escribiendo $\frac{y}{a} = \frac{\frac{by}{c}-b}{\frac{by}{c}-b+x}$]

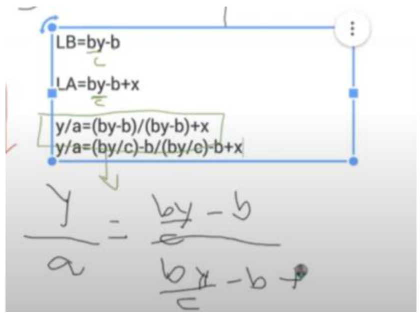


Una vez concretando la expresión, el investigador propone al estudiante que se trabaje sobre la proporción $\frac{y}{a} = \frac{\frac{by}{c}-b}{\frac{by}{c}-b+x}$. Como puede verse en la línea L267 el estudiante muestra dudas sobre el hecho de si este proceso le permitirá obtener la ecuación solicitada.

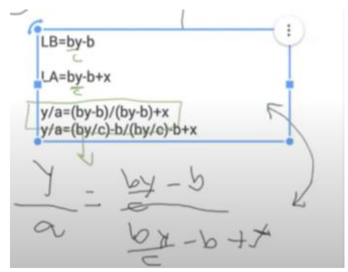
L258. **I**: *Ok, entonces ahora lo que hay que hacer es, recuerda que allá tienes una proporción ¿no? tendrías esto… a ver… tendrías, digamos, si lo escribimos así con… tendrías y es a a, como… […]*

L259. **E1**: *Podría ser un intercambio de denominadores.*

L260. **I**: *y es a b, como, perdón y es a a, como by sobre c, menos b es a… tienes acá by, by sobre c menos b más x ¿no?* [escribe la proporción $\frac{y}{a}=\frac{\frac{by}{c}-b}{\frac{by}{c}-b+x}$]

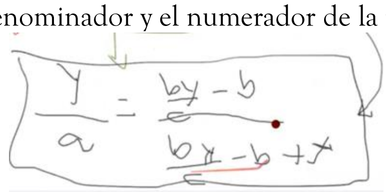
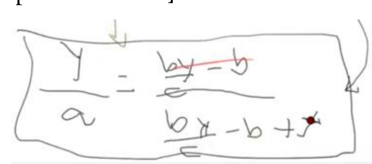


L261. **I**: *Digamos esta sería la misma proporción que tienes ahora como normalmente la acomodamos ¿no?* [dibuja una flecha para relacionar la forma de escritura propuesta por el estudiante y la que él le propone emplee]. *Entonces de aquí ¿qué podemos hacer?*

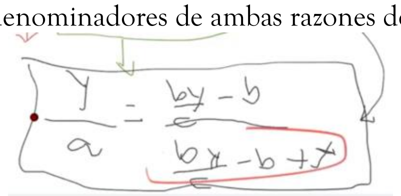
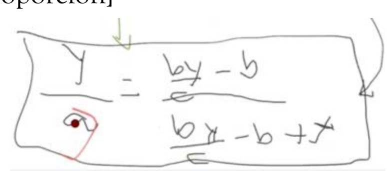


L262. **E1**: *Mmmm podríamos a ver.*

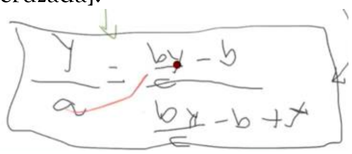
L263. **E1**: Entonces *lo primero que se podría hacer sería o eliminar lo común, pero solo nos dejaría denominador x, más no habría el numerador,* [señala las expresiones $\frac{by}{c}-b$ y $\frac{by}{c}-b$ en el denominador y el numerador de la razón respectivamente]

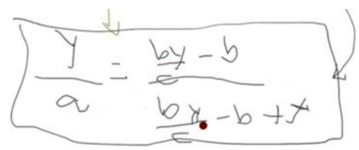
 

L264. **E1**: *O lo segundo podría ser que esto de aquí, lo intercambiamos* [señala con el láser digital los denominadores de ambas razones de la proporción]

L265. **E1**: *y multiplicamos a por by, sobre c menos b, y a y multiplicamos por by sobre c menos b más x.* [señala con el láser digital los términos que se multiplicarían de manera cruzada].





L266. **I**: *Exacto, podríamos hacer eso que comentas ¿no? porque al final estás operando con la proporción, o sea, como… como dijimos hace un rato, cuando tienes una proporción, eh y es a, como esta cantidad que tienes a la otra ¿no? es a la otra, es lo mismo que multiplicar, digamos, de manera cruzada. Entonces, realiza las operaciones estas de la multiplicación cruzada a ver qué obtienes.*

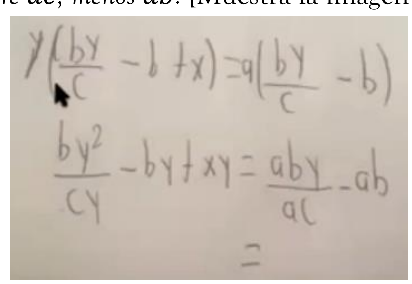
L267. **E1**: *¿Y lo que obtendría sería la ecuación o seguiría siendo una… una semejanza nada más?*

L268. **I**: *Pues digamos una vez que tengas el resultado lo comparamos a ver… a ver qué queda* [Audio inaudible]

Posteriormente, el estudiante construye la expresión $\frac{by^2}{cy} - by + xy = \frac{aby}{ac} - ab$, señalando que no puede simplificarla más. El investigador le comenta al participante que su expresión es casi la misma que la de Descartes y cuestiona sobre qué faltaría para quedar como la solicitada. El participante comenta acertadamente que, el despeje de la y^2, pero que no estaba seguro de cómo despejarla, así que pregunta el estudiante sobre si su razonamiento para despejar era adecuado, lo cual resulto ser el caso. De esta manera llega finalmente a la ecuación solicitada.

L273. **E1**: *No se me ocurre… simplificarlo más.*

L274. **E1**: *Ok, entonces quedaría está última de aquí. Que sería by al cuadrado, sobre cy menos by más xy, es igual a by sobre ac, menos ab.* [Muestra la imagen de su procedimiento].



Nótese que la manipulación algebraica, nuevamente no es la adecuada, razón por la cual el investigador interactúa de nuevo con el estudiante para hacerle notar los errores. Una vez que se aclaran, el estudiante corrige la expresión y le comenta que la expresión tiene elementos similares a la ecuación solicitada.

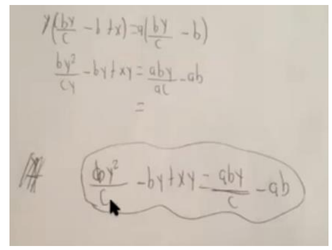
L286. **I**: *Y ya con esto ya estás bien cerquita de la ecuación. No sé si te das cuenta. Te das cuenta... te das cuenta que ya apareció el* y^2.

L287. **E1**: *Ya pareció* y^2.

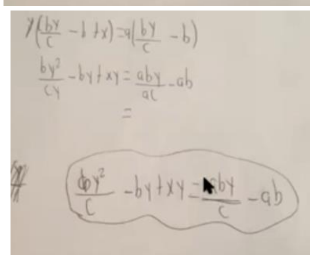
L288. **I**: *Y apareció* xy, *etcétera. Entonces, eh, ok, hasta allá. Entonces ya tienes* by^2, *digamos ¿qué faltaría para que la ecuación fuese todavía más, o sea, digamos más parecida? o sea, digamos, ya viste que la ecuación original cómo es... digo la ecuación de Descartes.*

L289. **E1**: y^2 *es igual a* cy.

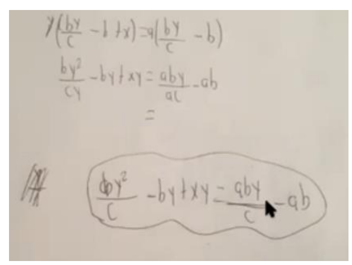
L290. **I**: *Entonces, date cuenta que, el* y^2 *está despejado de alguna manera ¿no? entonces lo que hay que hacer es despejar* y *cuadrada. ¿Cómo podrías despejar?*



L291. **E1**: *Eh primero dejamos* by^2 *sobre* c, *sólo ¿no? que estaría pasando menos* by *hacia el otro lado. Y más* xy *pasándolo menos* xy *y luego sería entonces el signo que esté sobre* c *haciendo lo que sería. Pero no habría por dónde no multiplicar, o sea, sí puedo pasar el* c *para aquí y multiplicar todo el otro lado por* c. [señala con el puntero el parámetro c y la expresión de la derecha de la igualdad para explicar su duda respecto a cómo operar la proporción]



L292. **I**: *Sí, porque o sea, digamos que la regla básica de la... de la ecuación, recuerda... o sea, en verdad una forma de entender la forma en la que se está operando con la ecuación es entender que hay que hacer la misma operación a ambos lados del signo igual ¿sí? entonces, por ejemplo, si yo tengo... quisiera digamos quitar el* c *que está dividiendo a* y, *lo que puede hacer es multiplicar todo por* c, *es decir, tanto el lado izquierdo, como el lado derecho.*



L293. **E1**: *¿Aunque aquí haya un* aby *por* c*? ¿también lo multiplicó por* c*? ¿no importa?* [señala con el puntero la expresión $\frac{aby}{c}$]

L294. **I**: *Sí, entonces, eh eso. Entonces multiplica por c. De hecho, si quieres trabájalo, trata de despejar, o sea, cuando ya creas que ya tienes y cuadrada despejada, igualmente me comentas y ya lo vemos, la ya... lo... lo revisamos.*

L295. **E1**: *Claro.*

L296. **E1:** *Mmmm, lo único es que no sabría cómo deshacerme de la b.*

L297. **I:** *Ok, la b, qué, o sea, cómo afecta.*

L298. **E1:** *pasa multiplicando, o sea si está multiplicando pasa dividiendo.*

L299. **I:** *Exactamente, podrías dividir*

L300. **E1:** *[sube la imagen de la ecuación y su procedimiento] Justamente es aquí. Coincide ahorita que despejé en cy coincide, ay coincide, menos ac coincide, sin embargo, aquí no me queda menos cxb por y, si no que me queda menos xy sobre b.*

L301. **I:** *Ahh, ok.*

L302. *[...]*

L303. *[...] a ver, entonces dices y cuadrada igual a, ahhh ahí está allá arriba allá.*

L304. **E1:** *Esta sería ay positiva menos ac , más cy, menos cxy sobre b.*

L305. **I:** *Ok. Pues en verdad ya tienes la ecuación, ya has llegado, recuerda que cuando tienes ese cxy sobre b es lo mismo que tengas cx sobre b por y. Es exactamente lo mismo, o bien, puedes tener c, aparte por xy sobre b...*

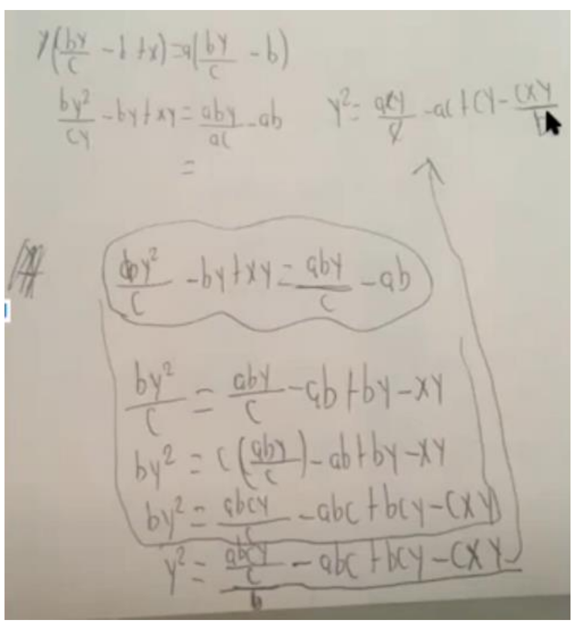
L306. **E1:** *Ok, ok.*

L307. **I:** *Serían equivalentes...*

L308. **E1:** *Ahh bueno sí, sería lo mismo porque son literales.*

L309. **I:** *O sea, al final lo que pasa es que porque estás multiplicando, o sea, digamos, si... si cuando multiplicas números de fracciones, digamos, aunque un... no tengas una... una cantidad que esté por fuera, digamos, esté dividida, representa como enteros ¿no? entonces cuándo tú multiplicas cualquier fracción por ese entero esa... esa cantidad sólo multiplica el numerador, no al denominador ¿sí? entonces por eso queda... queda ese equivalente...*

L310. **E1:** *Equivalente...*



13.1.1.2. Estudiante 2 (E2)

En términos generales la estudiante mostró ciertas dificultades con el uso de los conocimientos geométricos involucrados. En específico, respecto al establecimiento de las proporciones entre los triángulos semejantes.

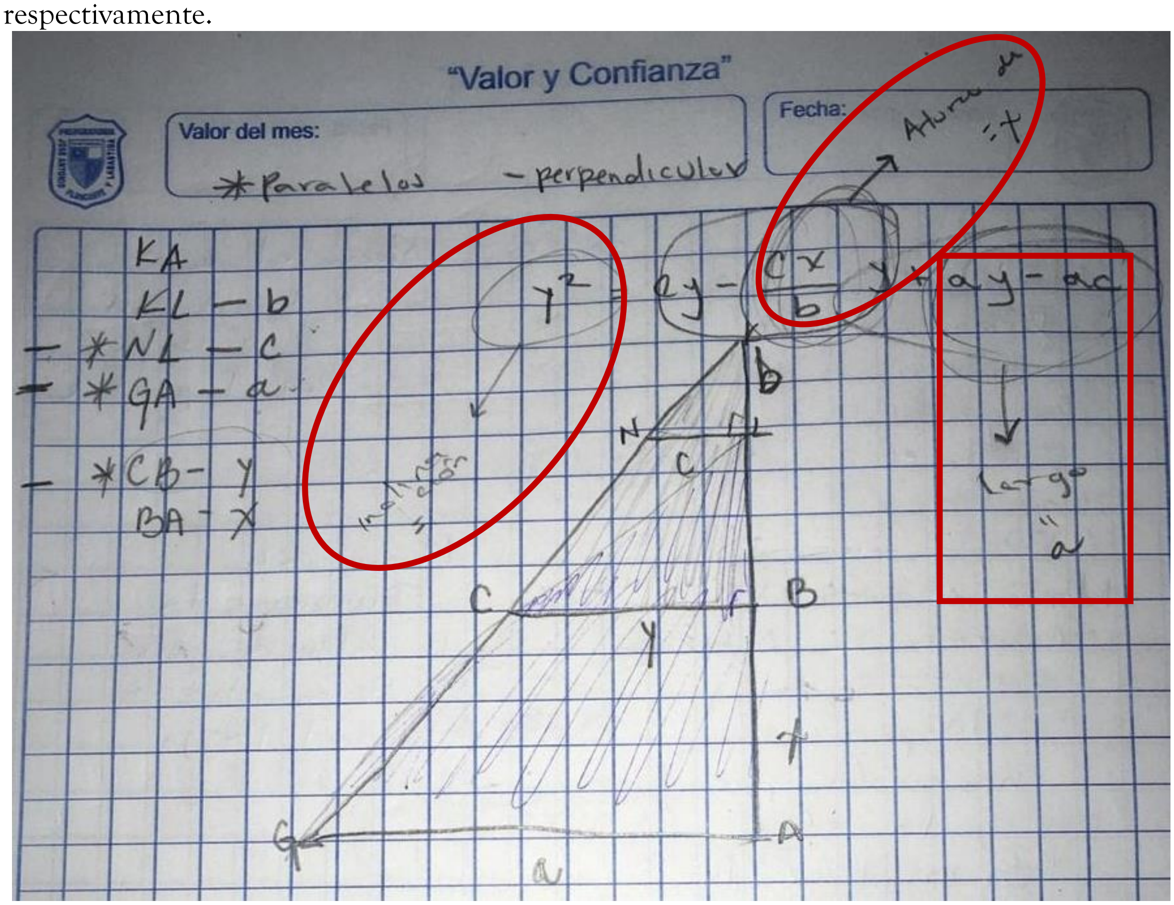
Al inicio de la resolución manifestó no saber qué hacer en la actividad. Comentó que no entendía bien las instrucciones, en el sentido de que no identificaba por qué se daban las identificaciones entre los segmentos y los parámetros involucrados (p. ej. KL=b). Ella pensaba que debía sustituir en la ecuación estos valores, y que no entendía la idea de "construir". Respecto a esto, el investigador le indicó que debía "llegar" a la ecuación de Descartes y para ello, repitió el procedimiento de la descripción, en el que la idea era establecer relaciones entre los parámetros y las variables, y que Descartes usó ciertas designaciones para ello. Esto puede mostrarse en las Líneas de la 1 a la 17 de la transcripción.

L1. **E2**: ☺*Me perdí*☺((risa nerviosa))
L2. **I**: *Ok, ¿me puedes contar qué estás pensando… más o menos?… o sea… veamos qué… qué pasa por tu mente en estos momentos, a ver.*
L3. **E2**: *Es que… ajá… estaba escribiendo, o sea, estaba ordenando lo que decía… el ejercicio ¿no? porque se me hace más fácil así, pero, o sea ya que iba a empezar a hacerlo, me perdí en la, o sea, qué cuando me dice que construya la ecuación, o sea ¿tengo que cambiar los valores a los que me da… o…? es que me perdí.*
L4. **I**: *Ok, no, la idea es que tú puedes llegar a esa ecuación, o sea te pongo en la ecuación para que sepas cuál es la ecuación a la que tienes=de hecho, es la ecuación de la curva anaranjada. Entonces la intención aquí es que tú puedas llegar a esa ecuación, es decir, hacer cierto tipo de operaciones o lo que tú consideres, para llegar a esa ecuación. Es decir, básicamente hacer como que, en cierto modo, lo que Descartes hizo, aunque, claro, no sabes qué hizo exactamente ¿no? pero eso sí, como un procedimiento para que tú puedes llegar a esa ecuación.*
L5. **E2**: *Ah* [*ok*-]
L6. **I**: [*Lo que tienes que saber, es eso, que cada segmento del instrumento se denominó con cierto parámetro en este caso KL es en esa ecuación esa letra b, representa, digamos, al segmento KL, esa c, representa el segmento NL, el a representa el segmento GA, y así, y claro, ehhh* y *y* x *pues representan esos segmentos CB y BA que son los variables ¿no? las variables que viste… identificaste en el instrumento. Entonces básicamente para eso es esta última parte, o sea, él lo que hizo es: voy a designar a estos segmentos con estas letras b, c, a, etc etcétera y con eso construyó esa ecuación que incluye digamos a todos esos segmentos allá.*
L7. **I**: *No sé si queda claro o… aún… aún no.*
L8. **E2**: *O sea, es que sí queda claro, pero.. pues… no sé qué hacer y eso.*
L9. **I**: *Ok, entonces ¿quieres… ¿quieres pensar un momentito? ¿o prefieres estem… pasar ehhh directo al, como el apoyo?*
L10. **E2**: *Lo voy a pensar un poquito.*
L11. **I**: *A ver, piénsalo un poquito y me platicas más o menos qué… no te preocupes si no tienes algo concreto, ya para eso está, como el apoyo ¿sí?*
L12. **E2**: *Ok.*

Posterior a esta interacción la estudiante manifiesta dificultades para avanzar, razón por la cual solicita acceso al documento de apoyo. Al cuestionarla sobre lo que estaba haciendo, mencionó que no sabía qué hacer (véase L13-L17).

L13. **E2**: ☺*Ay, no… no puedo*☺.
L14. **I**: *Ok, ¿quieres que consultemos el anexo?*
L15. **E2**: *Sí.*
L16. **I**: *A ver qué estuviste pensando más o menos, o sea, lo que sea que haya pasado por tu mente.*
L17. **E2**: *O sea…traté como que ver, o sea, de dónde, o sea, cómo… cómo por qué sacó esos ¿ya sabes?… o sea, por qué… por qué esas operaciones y así, pero no… no… no le encuentro el hilo.*

En su hoja de trabajo (que se obtuvo hasta el final de la sesión) se muestra cómo trata de organizar la información y de dar sentido a los datos del instrumento. Por ejemplo, obsérvese que trata de identificar qué representan las variables, usando flechas para señalar relaciones identificativas entre y^2, x y el parámetro a, y las palabras "inclinación", "altura" y "largo" respectivamente.



Al abrir el anexo 2.1, el investigador leyó y reformuló la información descrita en el documento y le indicó que debía establecer relaciones con esos triángulos, dada la propiedad de semejanza. Con base en esta indicación la estudiante inició el proceso para el entendimiento de las relaciones geométricas descritas en el anexo y, por tanto, subyacentes en la situación. En este caso las relaciones de semejanza entre los pares de triángulos NKL y CKB y CLB y GLA.

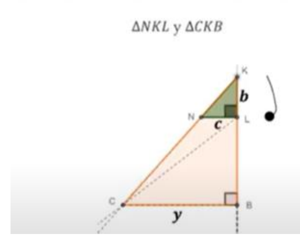
Después de un tiempo trabajando con el apoyo brindado en el anexo 2.1, la estudiante muestra nuevamente dificultades para utilizar la información presentada en el apoyo en la resolución de la situación.

L18. **E2**: ☹*No… no puedo.*☹
L19. **I**: *¿Quieres comentar algo?, ¿que revisemos algo?*
L20. **E2**: *Es que… no… ahhh… no, no tengo… siento que no tengo nada en concreto, o sea, estoy perdida*.

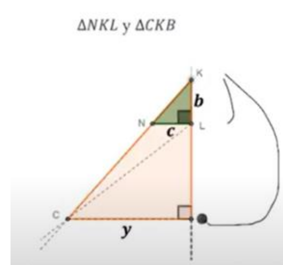
Cabe destacar que esta estudiante respondió de manera acertada a uno de los dos ítems del pretest, relacionados con el establecimiento de las relaciones de proporcionalidad. Al revisar con la estudiante sus respuestas en el pretest, durante la sesión de introducción, se le comentó cómo resolver ambos ítems, por lo que tenía un conocimiento previo sobre el establecimiento de las relaciones de proporcionalidad dados dos triángulos semejantes. No obstante, en la situación no pudo establecer estas relaciones.

La estudiante manifestó que no sabía que hacer explícitamente, por lo cual el investigador le pidió que le explicara en el *Jamboard* sus ideas. En la pizarra digital, la estudiante mencionó que se encontraba tratando de relacionar las medidas de los dos pares de triángulos NKL - CKB, y CLB - GLA —como en el caso del estudiante E1—. Por esta razón, el investigador la cuestionó sobre el hecho de si los triángulos NKL y CLB eran semejantes, ella comentó que sí, implicando una interacción para orientar a la estudiante hacia el establecimiento de las relaciones geométricas correctas matemáticamente como puede observarse en el siguiente extracto de la transcripción.

L21. **E2**: ☺*Es que… estoy eh perdida*☺, *o sea, pues, o sea, por lo que entendí… este triángulo* [Ingresa al *Jamboard* y señala el triángulo NKL], …

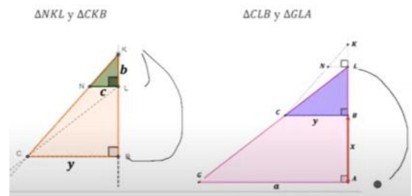


L22. **E2:** *y este triángulo* [señalando el triángulo CKB] *son semejantes ¿no?*



L23. **I**: *Ajá.*

L24. **E2**: *Entonces… llegué a la… o sea, llegué a la conclusión de que los tres triángulos esos y este* [señalando el triángulo GLA] *son semejantes ¿no?*



L29. **E2**: *Entonces pues es que traté de buscar una relación ¿no? y llegué a la conclusión de que c, y y a son semejantes*

L30. **I**: *Ok.*

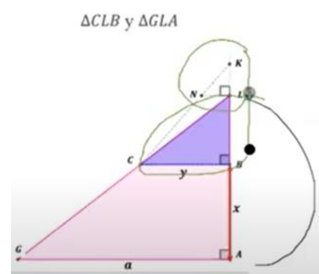
L31. **E2**: *Y me perdí.*

L32. **I**: *La pregunta aquí es: ¿estos dos triángulos, en este caso, NKL, que es el verdecito, con este morado* [se refiere al triángulo CLB] *son semejantes?*

L33. **E2**: *¿Sí?*

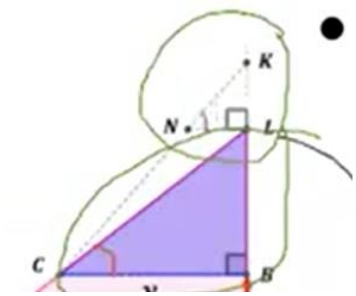
L34. **I**: *¿Qué debe cumplir… que deben cumplir dos triángulos para que sean semejantes?*

L35. **E2**: *Según yo, los triángulos semejantes tienen que tener los mismos ángulos ¿no?*



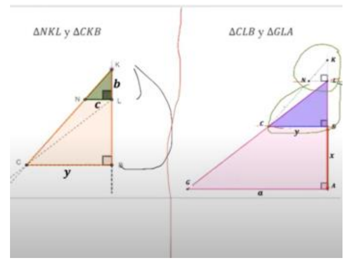
L36. **I**: *Ok, perfecto en eso estamos de acuerdo. Ahora vamos a fijarnos en este ángulo que está aquí* [coloca la marca de ángulo en el ángulo BCL] *y este ángulo que está acá* [Coloca la marca de ángulo en el ángulo KNL], *por ejemplo, ¿serían iguales de los ángulos?*

L37. **E2**: *No.*



Con esta afirmación el investigador señaló que no podían establecerse relaciones de semejanza entre esos triángulos, y la interacción estuvo centrada en establecer las relaciones de proporcionalidad entre los triángulos NKL con CKB. La estudiante manifestó nuevamente dificultades para recordar la propiedad de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos. Por este motivo, el investigador planteó ejemplos concretos con medidas sobre los lados de los triángulos para que la estudiante recordara la propiedad de proporcionalidad entre los triángulos, a lo cual respondió de manera satisfactoria, como puede verse en el siguiente extracto.

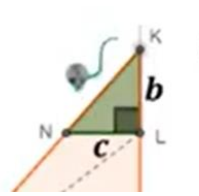
L45. **I**: *Entonces no son semejantes entre sí estos y éstos* [refiriéndose a los triángulos BCL y KNL]. *Entonces lo que hay que ver es… vamos a fijarnos y de… eh, digamos, por separado. Primero trabaja con este que está… estos que están a la izquierda ¿sí? y luego vamos trabaja con los que están a la derecha.* [Dibuja una línea que divide la imagen para separar los pares de triángulos].

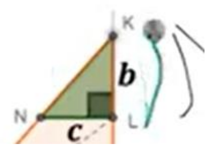


L46. **I**: *Mira ¿qué propiedad además de que tengan los ángulos iguales? ¿qué otra propiedad cumplen dos triángulos que sean semejantes?*

L47. **E2**: ((se mueve en su silla, mostrando indecisión y desesperación)) *Ay* [Silencio por 36 segundos]

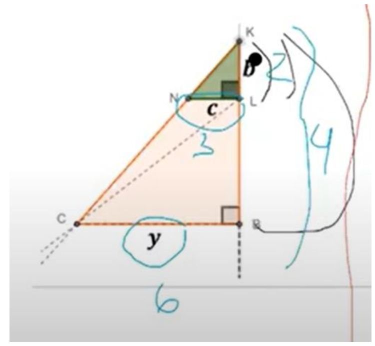
L48. **I**: *Por ejemplo, en específico. ¿qué relación tendría que cumplir, por ejemplo, en sus medidas? Por ejemplo, a este lado el **b*** [utiliza el láser virtual para señalar los lados NK y KL del triángulo NKL].





L49. **E2**: *O sea, sí sé, pero no sé cómo decirlo.*
L50. **I**: *A ver… ehhh como tú lo… ¿cómo lo explicarías? así como como tú lo entiendas*
L51. **E2**: *O sea, ¿con dos triángulos semejantes?*
L52. **I**: *Mjum, sí.*
L53. **E2**: *O sea, tienen que ser. O sea, tiene que ser como qué… ahhh… Es que no sé qué palabra usar.*
L54. **I**: *Descríbeme lo que piensas.*
L55. **E2**: *Que… o sea, que tiene que tener, o sea tienen que ser ¿equivalentes?. o sea que tienen que tener como que… AH…* ((grita)) *Dios. Es que no sé qué palabra usar.*
L56. **E2**: *Tiene que ser… Ajá, pues que… a… ah por qué no tengo la palabra… la palabra… por Dios… Es que tienen que ser… a escala… o sea, como que… ¿sí? ¿no? o sea, que tienen que tener la misma escala.*

L57. **I**: *Ok, como están... están a escala. Exacto, entonces, por ejemplo, si aquí mide, por ejemplo, no sé, suponte qué... mide 2 centímetros, o sea mide, por ejemplo, el lado* b *mide 2 centímetros* [escribe 2 a un lado del triángulo] *y este mide el total, digamos, KB mide 4* [escribe 4 y una llave para indicar que el lado KB mide 4 cm]. *Entonces, por ejemplo, ¿qué relación debe haber entre este* c *y este el de* y *¿no? suponte que si* c *es 3* [escribe 3 abajo del lado NL], *por ejemplo, ¿qué medida tendría que tener el otro?*

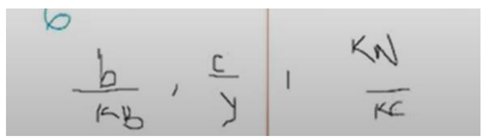


L58. **E2**: 6.

L59. **I**: 6 *¿no? o sea como... ¿cómo le llamamos a esto? se le llama que hay... tiene que guardar cierta proporción ¿no? entre sus...*

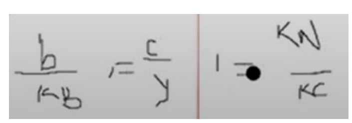
L60. **E2**: ☺*Ahí está... sí.* ☺ ((Risa))

Una vez recordada la propiedad de proporcionalidad, el investigador, solicita a la estudiante establecer las proporciones para ese par de triángulos. La estudiante logra relacionar las razones entre los lados de los triángulos y, se le solicita que lo escriba matemáticamente. La respuesta de la estudiante es la siguiente:



Puesto que no se presentan las razones como una relación de proporcionalidad, el investigador solicita nuevamente a la estudiante que explicara qué es lo que se cumplía entre esas razones, es decir, el significado de la propiedad de proporcionalidad entre los lados. La estudiante responde que "debían ser lo mismo", por lo que el investigador le pidió que escribiera matemáticamente la idea de "ser lo mismo".

L66. **I**: *Ok, bien. Entonces tú dices que así como tienes, bueno aquí esta razón que es b entre KB, es una razón, o sea, es una división. Recuerda una razón es una división entre dos cantidades. Tienes otra que es c... otra razón que es c entre y, y otra que es KN entre KC, ¿qué debe pasar entre estas tres? ¿qué se debe cumplir?* [señalando, encerrando las tres razones que propuso E2].



L67. **E2**: *Que... tengan la misma proporción.*

L69. **E2**: *Que sean proporcionales. O sea que al dividir tengan el mismo resultado.*

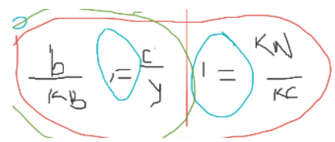
L70. **I**: *Ok, exacto y ¿cómo escribo eso que sea lo mismo?*

L71. **E2**: [Dibuja el signo igual entre las razones]

Al establecer la relación de equivalencia, el investigador hace hincapié en dos aspectos. El primero es el hecho de que la relación de igualdad podía ayudarla para determinar la ecuación y el segundo, el hecho de que en las proporciones se encuentran relacionados algunos parámetros y variables. Escribió la proporción $\frac{b}{KB} = \frac{c}{y}$ y le preguntó a la estudiante que se podía hacer con esa proporción, qué operaciones se podían hacer. La estudiante respondió que multiplicar, a lo cual el investigador mencionó si se podría despejar el valor de KB en términos de b, y, y c, lo cual realizó:

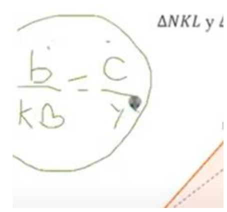
L73. **I**: *Entonces, fíjate de algo interesante. Aquí este ya salió algo que te puede ayudar con la ecuación ¿no?*

L74. **I**: *Que es el signo de igual ¿no? o sea, ya tienes propiamente una relación de igualdad y además fíjate de otra cosa interesante, que… en este caso en la primera, es decir, en está aquí ya tienes relacionado* b, c, *y en una misma igualdad ¿sí?* [encierra en verde la proporción $\frac{b}{KB} = \frac{c}{y}$]



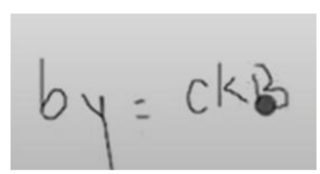
L75. **I**: *Es decir en esta prop… en esta proporción que es* b *es* KB. *Como, o sea, es igual, o sea la medida entre* b *y* KB *tiene que ser la misma como tú decías entre* c *y* y. [escribe en la parte superior izquierda la proporción $\frac{b}{KB} = \frac{c}{y}$]

L76. **I**: *Entonces, nota que aquí ya tienes una relación de igualdad que tiene a los parámetros* b, c *y* a, *la variable* y… *¿ok? ahora fíjate, si tenemos esta proporción ¿podría saber cuánto?, bueno, ¿podría escribir a KB en términos de estos tres? ¿en términos de este, este y el de acá?* [coloca marcas junto a los elementos de la proporción]

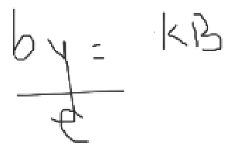


L77. **I**: *¿O qué puedo hacer con esta proporción? ¿qué operaciones puedo hacer con esta proporción?*

L81. **E2**: *O sea, es que no… yo… o sea multipliqué KB por* c *y* y *por* b. *Me quedó* by [escribe by], *obviamente… igual a…* c… *eh no sé si es al revés. Sobre esto.*

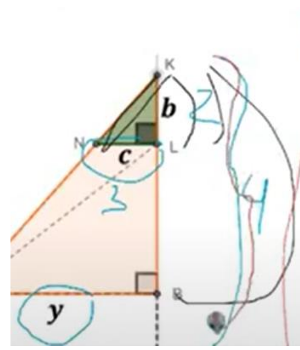


Al solicitarle a la estudiante que despeje a KB en la expresión, esta escribe lo siguiente:



Con base en este resultado el investigador enfatiza la relación entre la expresión determinada y lo que representa en la imagen.

L87. **I**: *Exactamente. Muy bien, entonces fíjate que ya tienes la medida, en este caso, en términos de los parámetros, de… ehhh pues todo el segmento este que te decía el KB. Es decir, KB este pedazo* [dibuja una llave para señalar el lado KB]…

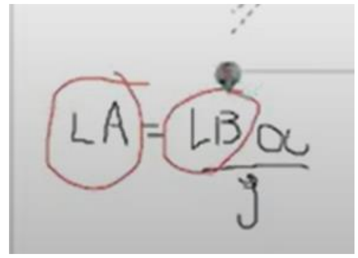


L88. **I**: *es igual o más bien…* by *entre* c ¿ok? [dibuja una flecha y escribe la expresión $\frac{by}{c}$]

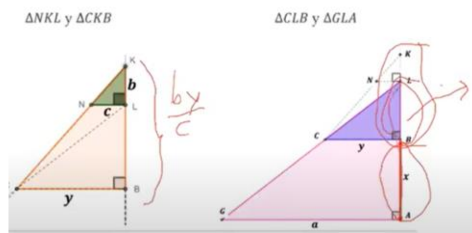
Posteriormente el investigador pide a la estudiante que realice el mismo procedimiento para el otro par de triángulos. En el proceso la estudiante muestra dificultades para establecer de manera adecuada la proporción (véase L92-L100). Esto genera una interacción para orientar a la estudiante para reconsiderar la forma en que estaba relacionando los lados de los triángulos. Cuando se aclara la dificultad la estudiante escribe la proporción $LA = \frac{LBa}{y}$.

A partir de esta relación el investigador comenta a la estudiante que al igual que en el caso anterior, las expresiones deberían escribirse en términos únicamente de los parámetros y variables. Por lo tanto, le comenta que debía reescribir a LA y LB en términos de estas cantidades.

L101. **I**: *Eh sí, ok. Perfecto en este caso sí, es… es… es correcto la… la relación. Entonces, por ejemplo, mira, así como hicimos el de hace un rato, bueno, que tuvimos que ver… como la ecuación al final no tiene LA, LB y KB tuvimos que… hay que expresar a LA y a LB en términos de las… de esas cantidades que están allá,* a, b, *y* c. *Entonces qué falta aquí, en esta… en esta estem… relación que tienes. Necesitamos saber específicamente quién es LA, quién es LB…* [encierra LA y LB]

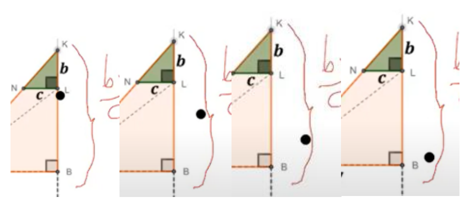


L102. **I**: *¿sí? en términos de* a, b, c, *o* x *y* y, *¿sí?* para saber *ya cómo va a quedar, digamos, esta relación con solamente esas cantidades involucradas, por ejemplo, si te fijas aquí, LB que está, digamos, en este pedazo, aquí…* [encierra el segmento LB] *por ejemplo, ¿cómo podrías saber cuánto mide? esta parte de aquí mide x ¿no? la de abajo, la de aquí* [encierra el segmento AB (x)]. Y, *por otro lado, también lo que ya vimos, o sea ya viviste es que KB que esta parte es* $\frac{by}{c}$ [escribe la expresión $\frac{by}{c}$] *¿no? ¿sí? y fíjate que KB también está por aquí ¿ok?* [encierra KB en el triángulo CKB de la derecha]…



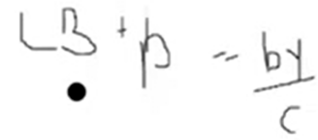
Después de trabajar en la reescritura de LA y LB, la estudiante llega a la expresión $LB = \frac{by}{c} - b$, al establecer una relación aditiva entre el segmento LB y KB.

L112. **E2**: *Porque, pues obviamente, nada más queremos el valor de esta parte* [señalando el segmento LB], …



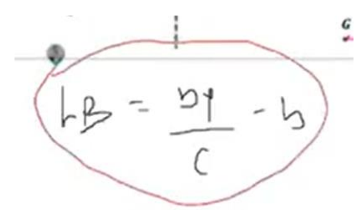
No obstante, en este segmento la estudiante se muestra indecisa sobre el resultado, dejando ver una falta de conciencia sobre la finalidad de su resultado. Esto genera una interacción para que pudiera aclararse el objetivo de la reescritura de LA y LB en términos de los parámetros y variables.

L113. **E2**: *o sea tendrías que quitarle este valor,*
L115. **E2**: *y… pues ya, o sea lo… le reste la b, lo pasé… luego pase multiplicando la c… ajá, sí.*
L116. **E2**: *No, creo que lo hice mal.*
L117. **E2**: *Porque… ajá, o sea, hice esto ¿no? lo pasé… pasé LB men… más b… más b y eso me daba igual a $\frac{by}{c}$ ¿no? pero yo lo pasé… lo pasé dividiendo y no tenía que haberlo pasado dividiendo, tenía que haberlo pasado multiplicando.* [escribe la expresión $LB + b = \frac{by}{c}$]

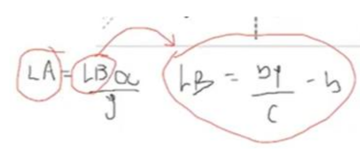


En este proceso, la estudiante se desorientó respecto al procedimiento e inició con una manipulación de la expresión de LB, para lo cual el investigador le cuestionó sobre lo que se estaba realizando para reorientar la actividad, una vez logrado esto le pidió que determinara LA, lo cual dedujo y explicó al investigador cómo lo había determinado. Seguidamente el investigador pidió que propusiera qué se podía hacer una vez conociendo las expresiones para LA y LB.

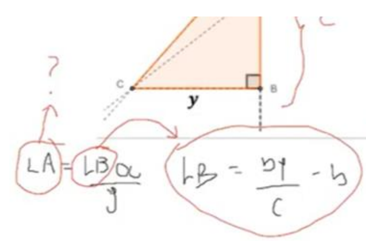
L118. **I**: *Digamos aquí, digamos, la pregunta es: ¿qué estamos tratando de hacer ahora? Acuérdate eh queremos decir quién es LB y quién es LA ¿no? porque son los últimos dos datos que nos hacen falta para ya tener como todo en términos de los parámetros y las cinco… y las variables. Entonces, por lo que tienes aquí, de hecho esta, pues ya tienes ¿no? quién es LB, es decir, este que yo no sabía quién es,* [encierra la expresión $LB = \frac{by}{c} - b$] *ahora sí sé quién es…*



L119. **I**: *Es este ¿no?* [traza una flecha vinculando las expresiones $LA = \frac{LBa}{y}$; $LB = \frac{by}{c} - b$]…



L120. **I**: *digamos como tratando de re… re… reorientar un poco lo que… lo que estás pensando. Al final, lo que estamos tratando hacer ahorita es encontrar quiénes son. Ahora falta este ¿no? este… quién es ¿no?* [señala LA en la expresión y escribe un signo de interrogación]



L121. **E2**: *Ajá*. [escribe la expresión $LA = \frac{by}{c} - b + x$]

$$LA = \frac{by}{c} - b + x$$

L122. **I**: *Ok, a ver entonces ¿cómo dedujiste LA?*

L123. **E2**: by *entre* c, *menos* b, *porque, pues ya, o sea, ya teníamos LB que eso era lo que valía, y LB forma parte del otro triángulo también. Entonces, nada más le agregó la* x.

L124. **I**: *Ok, perfecto, muy bien. Entonces, ahora, ya tienes igual quién es LA, que es justamente… es esta parte ¿no? entonces ¿qué hace falta ahora por hacer? por ejemplo ¿qué se te ocurre hacer ahora?*

L125. **E2**: *¿Unirlos los dos?*

L126. **I**: *¿En qué sentido? ¿a qué te refieres con unir?* […].

L127. **E2**: *O sea, sumar los dos lados, o sea tanto el ese. Tanto el KB como… ah no espera.*

L128. **I**: *Tranquila, o sea, toma tu tiempo, o sea piensa, por ejemplo, qué… recuerda ¿qué estamos haciendo? partimos… para recapitular… partimos de… de establecer las reacciones sobre unos triángulos ¿ok? En este segundo triángulo encontramos una relación, que es esta que pusiste acá, esta es la… de la que partimos. LA es igual a LB por* a, *entre* y *¿ok?* [encierra la expresión $LA = \frac{LBa}{y}$]

L129. **I**: *digamos esta es la relación de la que partiste y ahora, ya sabes quiénes son LB y quiénes son LA. Entonces ¿qué se te ocurre hacer, a partir de eso?*

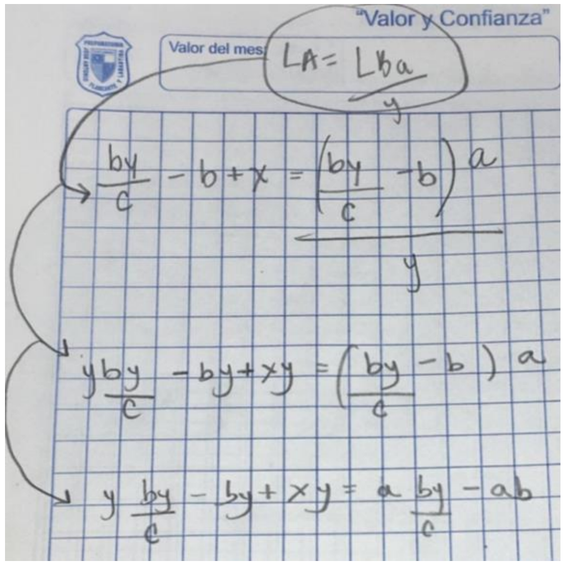
L130. **E2**: *¿Resolverlo? o sea ¿cambiar los valores?*

L131. **I**: *O sea cuando dices, por ejemplo, resolverlo ¿a qué te refieres?*

L132. **E2**: *O sea, cambiar… o sea la… lo que está encerrado en verde cambiar los valores, o sea poner los valores de LA y los de LB y pues ya resolverlo y despejar las letras.*

L133. **I**: *Sí, a mí me me… digamos que estem… es la idea* […]

Con este resultado, el investigador le preguntó qué podía realizar, a lo cual mostró nuevamente desorientación respecto a lo que se debía hacer. El investigador reorientó la actividad diciendo que se estaban encontrando esos valores dada la proporción inicial y luego preguntó qué podía hacer la estudiante, ella respondió que "resolver" (sustituir los valores de LA y LB en la proporción). Esto finalmente la lleva a concretar la ecuación, tras recomendaciones sobre la manipulación simbólica por parte del investigador. La primera expresión que obtiene es la siguiente:



Durante todo el siguiente extracto (L136-150) se refieren a esta expresión.

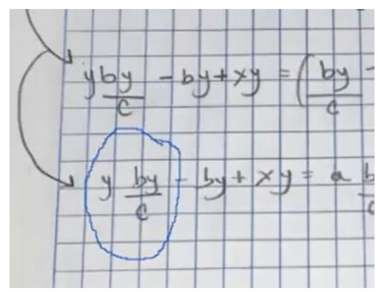
L136. **I**: [...] *Tienes LA... ok... mjum. Ok. Perfecto, entonces tienes* y*... a ver si ya me cargó aquí... a ver.. creo que ya. Ok, al final llegaste que tienes* y *por* by *entre* c *menos* by *más* xy *igual a* a *por* by *entre* c *menos* ab *. Perfecto, a ver vamos a ver el procedimiento, ¿ok?... Ok. Perfecto, ahora ¿qué notas con respecto a la ecuación de... de Descartes? que es...*

L137. *¿se parecen o no? más o menos... la... a la ecuación.*

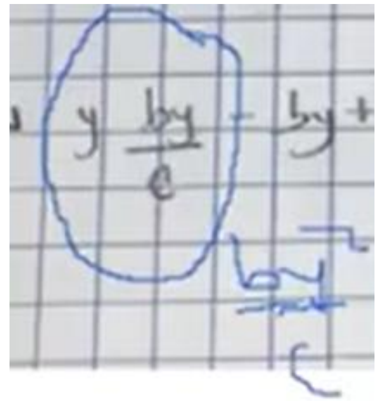
L138. **E2**: *Según yo, no se parecen.*

L139. **I**: *Pues vamos a ver los términos porque, por ejemplo, fíjate tú tienes eh en la ecuación aparece un* y *cuadrada, para empezar ¿no?*

L140. **I**: *Fíjate tienes* y *por* by *entre c ¿ok?* [encierra el término $y\frac{by}{c}$ de la expresión $y\frac{by}{c} - by + xy = a\frac{by}{c} - ab$]



L141. **I**: *entonces esa y que, de hecho, están multiplicando a esa fracción, de allá, podría salir un cuadrado ¿no? porque y por esa fracción, ¿qué te quedaría? te quedaría… ¿qué te quedaría? y por la fracción by entre c*



L142. **E2**: *yb… O sea me da… según como lo estoy haciendo yo me da yb por y al cuadrado entre c.*

L143. **I**: *Ok, ¿porque tienes eh y by cuadrada? ¿de dónde? ¿de dónde? cómo lo…*

L144. **E2**: *O sea yo lo multipliqué lineal, o sea*

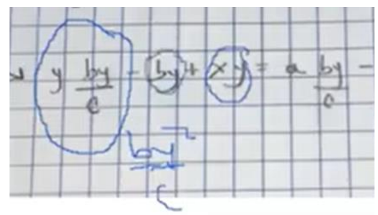
L145. *y pues hay un by*

L146. **I**: *Ok, entonces si multiplicas by por y*

L147. **E2**: *sería by al cuadrado.*

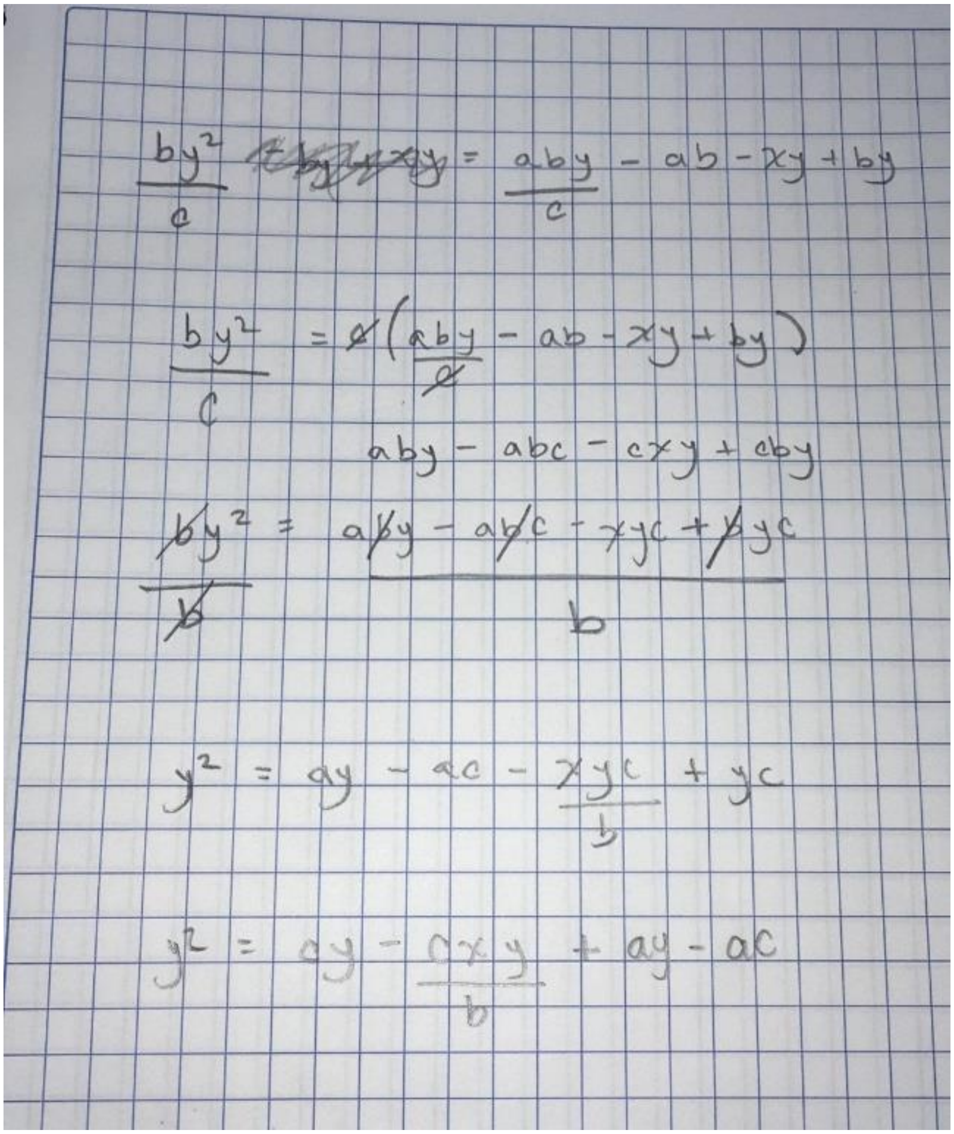
L148. **I**: *Exactamente, es decir, esto sería, aquí abajito sería by cuadrada entre c ¿no?* [escribe la expresión $\frac{by^2}{c}$]

L149. **I**: *ok, entonces fíjate que allá ya salió un cua… el cuadrado, una y cuadrada como el de la ecuación. Otra cosa, otro dato, en la ecuación de Descartes también tienes un cy, cx por y, y… aquí tengo, por ejemplo, mira aquí tienes un xy, aquí tienes, el by ¿ok?* [encierra los términos $-by + xy$]



L150. **I**: *Entonces si te das cuenta sí es muy parecida a la ecuación, porque tienen los términos que incluye la ecuación. ¿Qué es lo que hace falta? digamos, para que se parezca todavía aún más, pues que el… que la y cuadrada estuviese como despejada ¿no? en este caso, es decir, de acá, donde aparece la y cuadrada, podría despejar a la y cuadrada* y con eso, *a ver que te quedaría ¿sí?*

L153. [Concluye con la expresión solicitada]



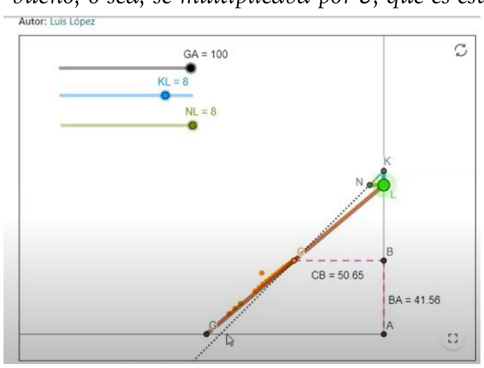
13.1.1.3. Estudiante 3 (E3)

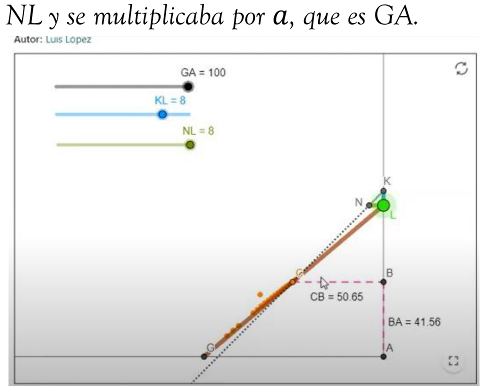
En términos generales la actividad se le dificultó al participante, por dificultades con los conocimientos involucrados, tanto a nivel geométrico como algebraico.

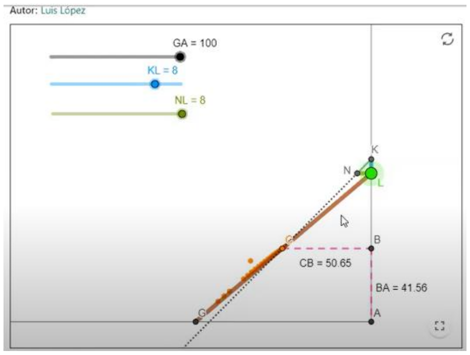
Al momento de abordar el inciso f, respecto a la ecuación de Descartes, la instrucción no fue clara para el participante, el investigador tuvo que reformular la intención del inciso, mencionando que debía realizar el proceso que Descartes realizó para construir la ecuación, especificando que debía establecer relaciones referentes al instrumento.

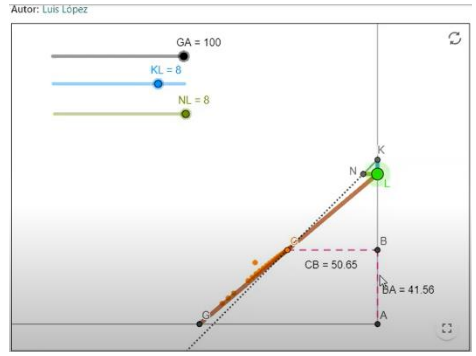
Después de las indicaciones del investigador, el participante inició el proceso de resolución de la actividad, en el cual, al inicio, estuvo centrado en dar sentido a la ecuación, probando valores específicos para verificar que la ecuación se cumpliera:

L1. **E3:** *Eh bueno, al principio quería ver si en verdad la ecuación me funcionaba ¿no? Esto de… eh y pues nada más sustituí los valores por los que me aparecían en GeoGebra y… y no me daba. Y yo así de… ah porque no me da. Pero ya luego me di cuenta de que, bueno ahí me pasé un poquito el tiempo de… tratando de buscar por qué no me daba, y pero ya al final encontré por qué no, y ya es cuando empecé a pensar, o sea cómo… cómo pues podría haber llegado a esta ecuación ¿no? qué… qué… qué patrones o qué regularidades había visto Descartes para poder llegar a esa conclusión a esa ecuación. Y pues empecé a jugar ¿no? empecé a ver, a comparar qué tenían en común las… las… las letras que se multiplicaban ¿no? Por ejemplo, vi que a, se… solo se multiplicaba, o sea, en este caso a es GA, solo se multiplicaba por el CB y NL, o sea, por líneas paralelas a GA.* [señala con el puntero los segmentos GA, CB, NL]. *Ok. Y c, que en este caso es NL, solo se multiplicaba por eh y, que es CB, y x que viene siendo BA, o sea por una paralela y una perpendicular. Y y se multiplicaba… bueno, o sea, se multiplicaba por c, que es esta de NL y se multiplicaba por a, que es GA.*

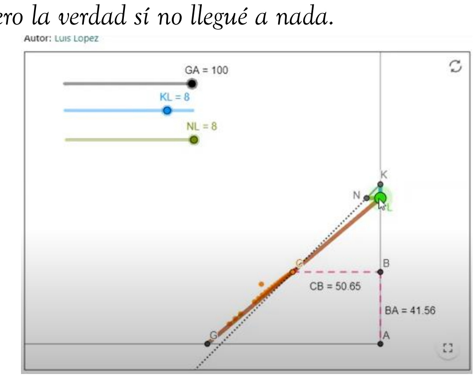




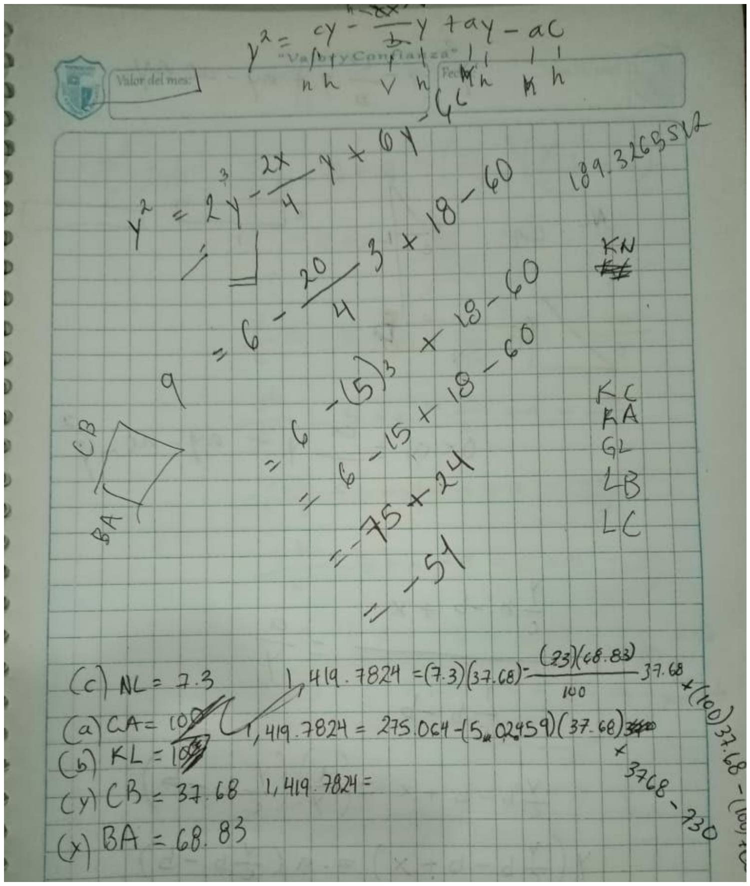




L2. **E3:** *O sea, y así fui jugando ¿no? y vi si había como que algún patrón o algo de que tenía algunas… algunos límites por cuáles se podía multiplicar ¿no?, porque la verdad no sabía en qué más pensar. Y luego esto de… eh me quedé pensando cómo pudiera averiguar cuánto valía LB, porque aquí, en este caso no me dice cuánto vale LB.* [señala con el puntero el segmento LB] *Solo me dice cuánto vale KL y cuánto me dice BA, pero pues el segmento LB no me dice cuánto vale. O sea, cuando ya, coloco en una posición a L. Y no sé, pero a mí me resultaba un poco así querer saber eso, porque sentía que con eso iba… iba a poder hallarlo, pero pues eh como que eso fue, no sé seguir viendo quién se repetía y quién no se repetía. Pero la verdad sí no llegué a nada.*



En su hoja de trabajo (que se obtuvo hasta el final de la sesión) puede observarse cómo el estudiante comprueba la veracidad de la ecuación al sustituir en ésta valores específicos provenientes de casos particulares al manipular el applet.

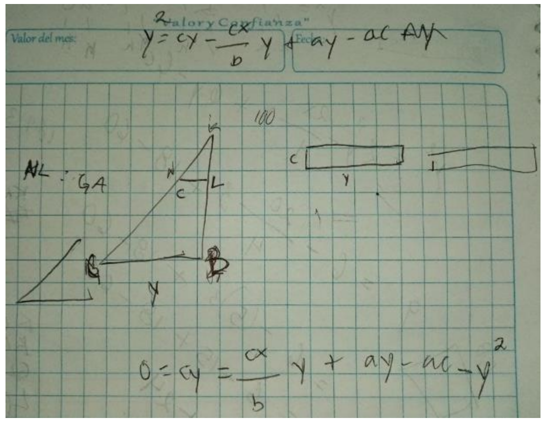


Posteriormente, el estudiante indica que tiene una propuesta de la cual podría provenir la ecuación solicitada. Este método refleja una justificación epistémica figural, pues se asocian los componentes de la ecuación con representaciones figurales como cuadrados, rectángulos. El estudiante reconoce, sin embargo, que no le es posible llegar a la ecuación con esta estrategia.

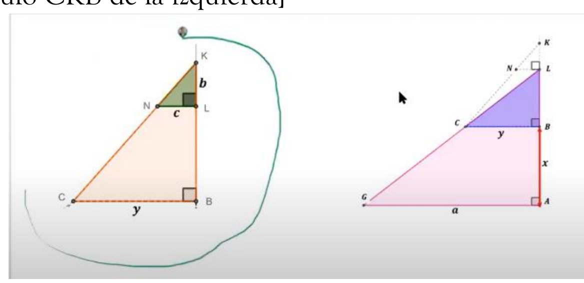
L3. **E3:** *Ok. Ceo que ya tengo más o menos una idea.*

5. **E3:** *Ya me salí de buscar… bueno sí encontré una relación ¿no? pero como que un poco peculiar. A ver pues, en verdad que es y al cuadrado, pues y al cuadrado sería un cuadrado ¿no? del lado y por y, y se… y si hicimos que el cuadrado de y por y es igual a todas esas operaciones. Eh pues, es decir, todo lo que se va a ir multiplicando, para ir como que rellenando ese cuadrado ¿no? hasta formar un cuadrado que sea igual a y por y, y pues eso es lo que eh hacen las operaciones ¿no? por ejemp… te va a ir rellenando ese cuadrado hasta que te de esa cantidad, que pues yo la interpreté como un área ¿no? hasta que te dé el área de y al cuadrado. Entonces ya, pues, por ejemplo, tenemos que c por y, y es un… obviamente es un rectangulito ¿no? pues entonces ese rectangulito, pues va a servir para rellenar, eh ya después tenemos la otra operación de cx entre b por y, y ahí pues sería otro rectangulito ¿no? que rellenaría también ahí y así seguiría rellenando todo hasta alcanzar a pues a llenar…*

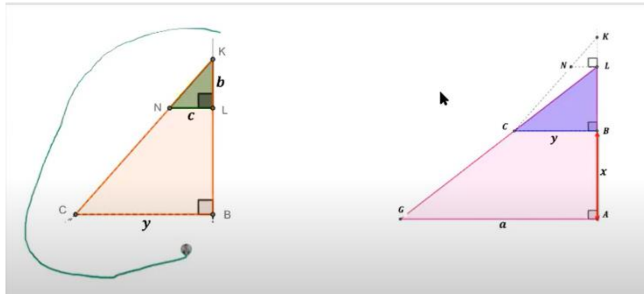
6. **I:** y.



7. **E3:** *Ese cuadrado de y al cuadrado, o sea, así se me vino a la mente y, pues creo que tiene un poco lógica, pero así… así cómo llegar de eso a una ecuación así, no sé si se me hizo un poco complicado, pero creo que así se encuentra como que una relación entre todo ello, bueno una pequeña relación ¿no?*
8. **I:** *Ándale. Bueno allá salen las imágenes que tienes en… en la… en el apoyo ¿no? y tú dic…estás comentando, claro, que ahorita está viendo otras relaciones, pero, por ejemplo, buscando esta… como tratar de darle sentido a la ecuación en términos de cómo podrían de alguna manera relacionarse las cantidades, y cómo ¿no? Entonces eh que, digamos, puede ser una… una ruta. Ahora si… si nosotros nos fijamos en los triángulos. Por ejemplo, en el triángulo… aquí voy a con un… en ese triángulo, por ejemplo, ¿qué relación podría determinar sabiendo que hay semejanza entre ellos?* [señala con el láser digital el triángulo CKB de la izquierda]

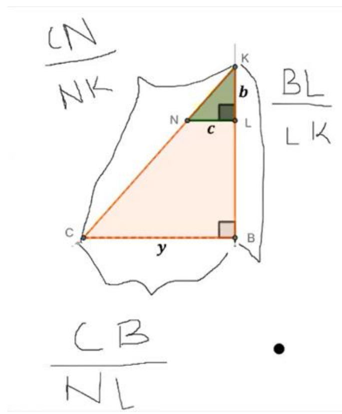


9. **E3:** *¿En ese triángulo?* [refiriéndose al triángulo CKB]
10. **I:** *Mjum. Sí.*
11. **E3:** *¿Qué relación? Pues…. pues que ¿ambos tienen los ángulos iguales?*
12. **I:** *Ok. Eso es una. ¿Qué otra relación? o más bien, digamos, ¿qué tiene como consecuencia el hecho de que dos triángulos sean semejantes? o sea, tienen sus lados… para que sean semejantes tienen que tener los ángulos iguales ¿no? pero eso eh digamos, como consecuencia ¿qué determina?*
13. **E3:** *Que pues su área… pues que ¿sus lados no sé, sean proporcionales?*
14. **I:** *Ok.*
15. **E3:** *O… o sus áreas*
16. **I:** *Por ejemplo, que sus lados sean proporcionales. Entonces, por ejemplo, si vemos esto ok, eh ¿podrías establecer una proporción entre los lados en este primer triángulo?* [señala nuevamente con el láser al triángulo CKB de la izquierda] *O sea ¿para este? ¿el de la izquierda? ¿qué proporción podríamos establecer allá?*

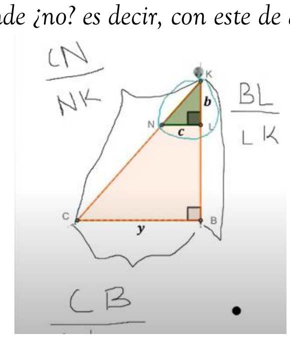
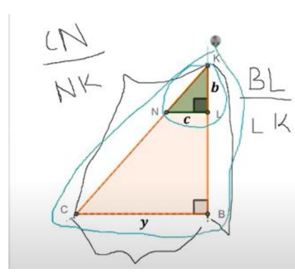


17. **I**: *Entonces ¿qué proporción podemos determinar allá en esas… con respecto a ese triángulo verde y el naranja no, que sería completo?*

L20. **E3**: *Bueno eso sería como que ajá del… del… de este lado ¿no? pues de este sería…* [se toma un tiempo y escribe las razones $\frac{BL}{LK}$, $\frac{CN}{NK}$, $\frac{CB}{NL}$ dibujando en la imagen los lados del triángulo CKB que las involucran] *y pues ya ah bueno en este sí claro. Sería… ¿eso era lo que tenía en mente o?*

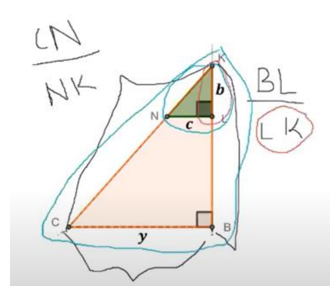


L21. **I**: *Ok. Sí, ahora vamos a ver una situación. Por ejemplo, cuando tú relacionas eh los, digamos, los triángulos que son semejantes, en este caso, decimos que, por ejemplo, este triángulo ¿no? el verde, es semejante con el grande ¿no? es decir, con este de acá ¿ok?* [encierra los triángulos NKL y CKB]

L22. **I**: *Entonces por ejemplo cuando tu relacionas el lado, que en este caso sería el lado KL o LK, el que tienes aquí, es este pedacito ¿no? el de aquí.* [encierra el término LK de la razón y el segmento KL]

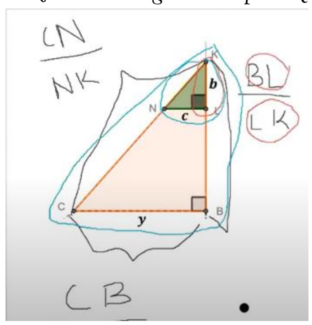
L23. **E3**: *Ah ok, ya entiendo.*

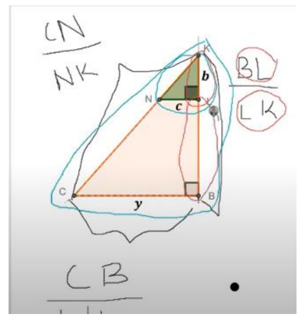


L24. **I**: *Entonces ajá…*

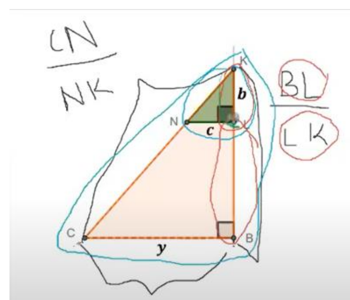
L25. **E3**: *¿sería pues CKB entre NKL la proporción?*

L26. **I**: *No, a lo que me refiero más bien, es que, por ejemplo, a lo que me refiero es que cuando relacionas, o sea lo que has hecho es, digamos, está bien ¿no? ahora el detalle nada más es que lo que estás relacionando es solamente, fíjate, este BL, que tienes aquí,* [señala el término BL de la razón] *sólo corresponde a un pedazo del triángulo completo ¿no?* [encierra el segmento BL en la imagen]



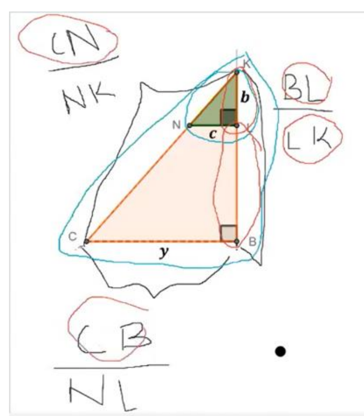


L27. **I**: *es decir, no sé si… no sé si se identificas, es decir, yo estoy relacionando este triángulo, el verde, con respecto a todo el triángulo completo, que sería este naranja.* [dibuja el contorno del triángulo CKB]. *Entonces cuando relaciono a este lado, que es KL, ¿su correspondiente cuál sería? con respecto al… al triangulo completo.*

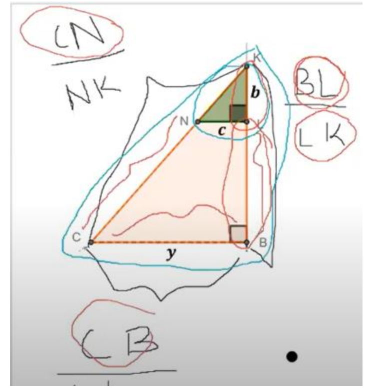


L28. **E3**: *Ah KB. ¿Su co… o sea, su correspondiente?*

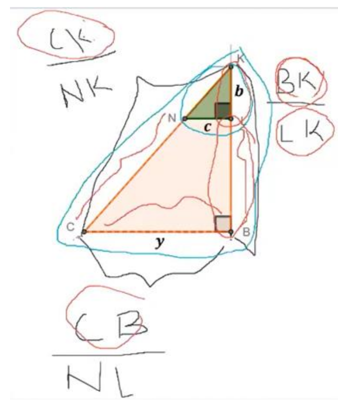
L29. **I**: *O sea, el lado que le corresponde. Ya viste que normalmente tienes… así como lo has hecho… si te das cuenta lo que hiciste es relacionar los lados que se corresponden. Estem eh, por ejemplo, CL con NK ¿no? digamos, del lado donde están y, digo perdón, CB con eh NL. Ehh KL con BL ¿no? o sea, digamos, estás relacionando con sus correspondientes, pero si te das cuenta eh las… las… las… tanto LK como CN, y como CB… […]… CN y CB y este BL, perdón,* [señala los términos BL, CN y CB de las razones]



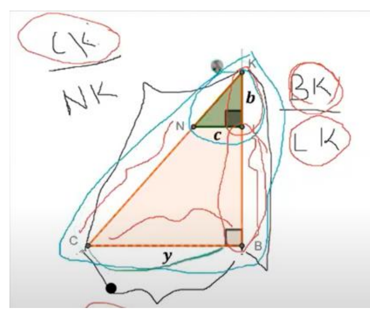
L30. **I**: *que es este, está aquí, son estos segmentos, es decir, es este CL, CB y BL,* [señala en la imagen los segmentos CB, CN, BL] *es decir, es un pedazo del triángulo completo ¿no? o sea, no es, digamos, todo el lado, digamos, del triángulo.*



L31. **E3**: *Sí.*
L32. **I**: *Entonces ¿cómo quedaría la proporción? Digamos, si yo relaciono el lado completo con el que se corresponde ¿cómo quedaría?*
L33. **E3**: *Ah pues sería entonces. Sí, sí, sí, sí me equivoqué. Perdón.*
L34. **I**: *No, no te preocupes.*
L35. **E3**: *Eh* [murmura] *y ya, por ejemplo, por qué por qué CB sí es...*



L36. **I**: *Ah ok. CB sí es, de hecho. Muy bien. Entonces, justamente ahora, sí ya tienes como una relación entre los lados eh correspondientes, es decir, el correspondiente de lado KL del triángulo verde, pues sería el lado KB, que es del triángulo completo ¿sí? porque recuerda que lo que estás relacionando es la figura que sea semejante. Y lo que es semejante es... son esos dos triángulos. Si yo me fijaba nada más en estos pedazos que, tú tenías acá, me estoy fijando, de hecho, en como en un trapecio ¿no?* [señala con el láser digital el trapecio CNLB].



L37. **E3**: *Sí.*
L38. **I**: *Estoy relacionando el trapecio con el triángulo ¿ok? Entonces eso digamos ya no... no correspondía, sino más bien, era el... el triángulo verde con el completo, que sería CKB ¿no? con NKL.*

Una vez que el estudiante ha llegado al establecimiento correcto de las razones involucradas en el triángulo, el investigador cuestiona al estudiante para que pueda establecer la equivalencia entre las razones. No obstante, el estudiante no identifica esta propiedad, razón por la cual el investigador genera una interacción para identificar esta propiedad. Para ello, emplea la misma estrategia a la que recurre con el otro y otra estudiante, plantear medidas concretas a los lados del triángulo.

L39. **I**: *Bien. Ahora. Bien ya estableciste cómo… recuerda esto le llamamos… esto es una razón ¿no? porque eso es, digamos, eh solamente la división entre dos de sus lados. ¿Qué se cumple entre esas razones? ¿entre esas tres razones? ¿cuál es la propiedad que tienen estas tres razones?*

L40. **E3**: *¿Cómo que propiedad? o sea, ¿algo que tengan en común?*

L41. **I**: *Ajá.*

L42. **E3**: *Mmmm Ah no sé* [risa]

L43. **I**: [risa] *Ok. ¿Cómo son entre sí estás? por ejemplo, esta con ésta, en términos de sus… de su magnitud, o lo que… o la cantidad que representa cada una de ellas.*

L44. **E3**: *Mmmmm no sé de verdad. Estoy perdido.*

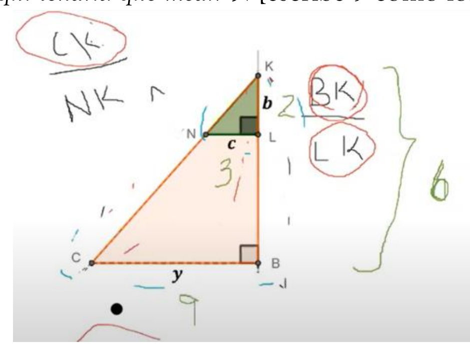
L45. **I**: *Tranquilo, no te preocupes. Bien, vamos a ver lo siguiente, imagínate que KL… […] eh hazte cuenta que mide, por ejemplo, esta parte dos.* [escribe 2 como longitud de KL] *Aquí mide, supongamos tres ¿no? NL.* [escribe 3 como longitud de NL] *Todo el completo, por ejemplo, digamos que mide cinco, por ejemplo, bueno vamos a poner seis.* [escribe 6 como longitud de KB] *Seis ¿no? que sería KB ¿cuánto tendría que medir y en este caso?*

L46. **E3**: *Pues tendría que medir 9.*

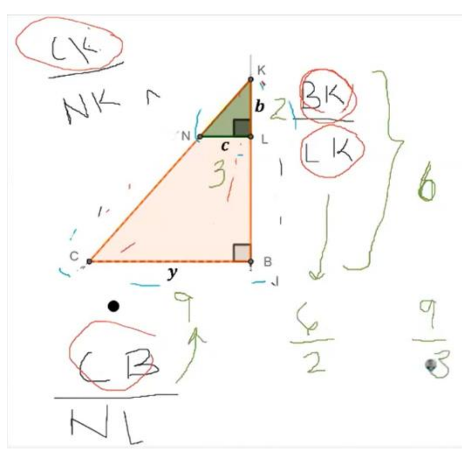
L47. **I**: *Ok. ¿Por qué tendría que medir 9?*

L48. **E3**: *Porque Ah porque pues la razón de proporcionalidad es 3… 3 a 1.*

L49. **I**: *Ok, exacto. Entonces aquí tendría que medir 9.* [escribe 9 como longitud de CB].

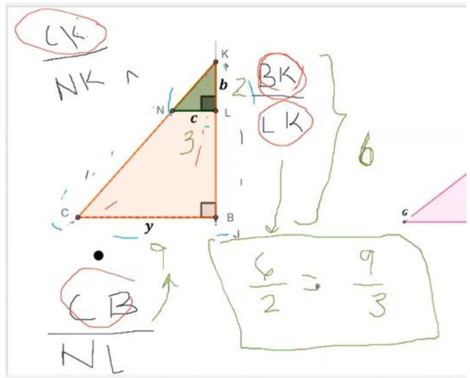


L50. **I**: *Entonces ¿qué pasa si me fijo ahora en la razón? Por ejemplo, BK y LK, que serían estas, serían 6 entre 2 ¿sí?… estoy haciendo como ésta ¿no? con las medidas… y luego tengo ahora este que sería CB con NL. CB sería 9 y NL sería 3. ¿Cómo son estas cantidades entre sí?* [escribe las razones $\frac{6}{2}$ y $\frac{9}{3}$, refiriéndose a las razones $\frac{BK}{LK}$ y $\frac{CB}{NL}$, respectivamente, que el estudiante escribió previamente].

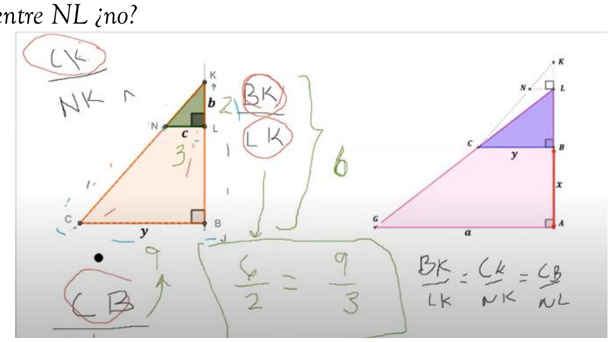


L51. **E3**: *Iguales.*

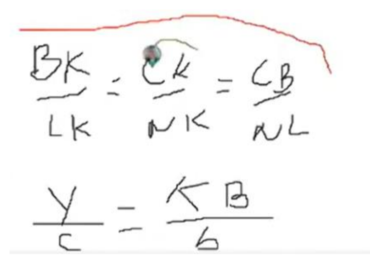
L52. **I**: *¿Iguales no?* [Escribe el signo igual entre las razones $\frac{6}{2}$ y $\frac{9}{3}$ para destacar la relación de equivalencia].



L53. **I**: *Es decir, una de las propiedades que tienen, o sea, digamos, cuando dices que son proporcionales es porque la razón que va a haber entre los lados correspondientes es la misma. Es decir, que BK entre LK tiene que ser la igual a CK entre NK, y a su vez, esas dos tienen que ser igual a CB entre NL, porque van a guardar justamente esta relación de proporcionalidad. Entonces, con base en esto, podemos decir lo siguiente, digámoslo así, tendríamos que BK entre LK es igual a CK entre NK, y esto es igual a CB entre NL ¿no?*



L54. **I**: *Ahora ¿qué pasa si yo sustituyó los valores que conozco de entrada en la... de la de la figura, es decir, los parámetros? Es decir,* c, b *y* y. *¿cómo quedaría por ejemplo la proporción en esta proporción qué tenemos aquí?* [señala con el puntero la proporción]



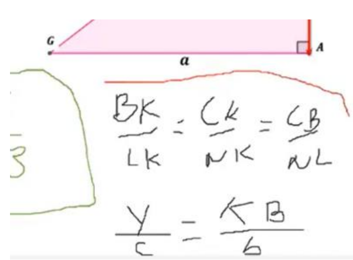
L55. **E3**: *quedaría...*

L56. **E3**: *Ah ok. Eh sería por ejemplo...* [murmura] *¿Hasta contando los otros no? ¿los que... los de aquí?*

L57. **I**: *Eso es... eso lo podremos hacer ahorita después, para ver qué otras relaciones van a salir.*

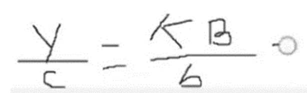
L58. **E3**: *Pues ¿cuál otro más sería? porque pues él* b *está solito.*

L59. **I**: *Ok. Tendrías que relacionar* b *y ¿con cuál está?*

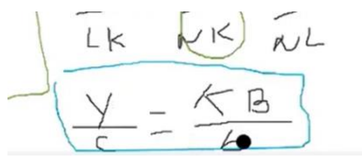


L60. **E3**: *Pues sería... KB... ajá, ok, ok... a ver [...]* [escribe la proporción $\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$]

L61. [El investigador no se percata que el estudiante iba a seguir escribiendo, pues el estudiante escribe otro signo igual después de la razón $\frac{\text{KB}}{\text{b}}$. Al escuchar la intervención del investigador el estudiante borra el signo de igual]



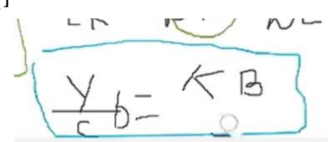
L62. **I**: *Ok. Entonces esos son los que conoces ¿no? que serían estem porque los otros, es decir, el... la razón que tiene a CK y NK, pues digamos que es esta, pues en cierto modo, por ahora no interesa porque no tiene estem... no está... no está digamos relacionado con los parámetros, en este caso, que serían b, c y la variable y, sino más bien estas dos que acabas de poner aquí. Estem, entonces una vez que ya tengo esto fíjate, que ya tienes allá una relación, y de hecho, de equivalencia,* [encierra la proporción $\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$] *que involucra a los parámetros b y c, a y, pero bueno, tienes a KB. Ahora ¿qué puedo hacer con esta proporción? Digamos, que tengo... que tengo acá en azul ¿qué se puede hacer?, ¿cómo se ópera?, o ¿qué se puede hacer allá?*



L63. **E3**: *Se puede... pues pasa... o sea, hacer con esta... en esta ecuación... o sea, en esta igualdad ¿qué puedo hacer en esta igualdad de acá?*

L64. **I**: *Mjumm*

L65. **E3**: *Podría quedar eh yc por b, es igual a KB. O sea, si paso, o sea, en dado caso que pudiera pasar la b acá quedaría pues...* [borra el denominador de la razón $\frac{KB}{b}$ y lo escribe como un factor que afecta a la razón $\frac{y}{c}$]

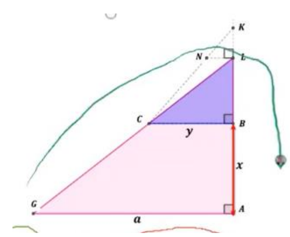


L66. **I**: *Mjumm*

L67. **E3**: *[...] ¿a eso se refería o?*

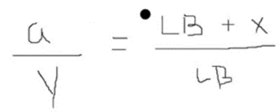
L68. **I**: *Sí.*

L69. **I**: *Sí, así digamos, qué opera… ¿cómo se ópera la proporción? Entonces te quedaría que KB, bueno, de hecho, y entre c por b es igual a KB ¿no? entonces ya sabes que KB sería esa cantidad y fíjate que ya KB está en términos de… eh los parámetros y la variable. Ahora eso pasó en este par de triángulos ¿cómo sería la proporción en el trián… en los triángulos de la derecha? Es decir, en… en estos ¿no? en el CLB con eh GLA.* [señala con el láser virtual el triángulo GLA de la derecha]



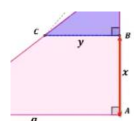
L70. **E3**: *¿Aquí mismo?*

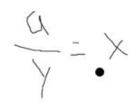
L71. **I**: *Sí,* [escriben en otra hoja] *Entonces ¿qué re… ¿cómo quedaría la proporción allá estem con los que nos interesan no, que serían* y, x *y* a?

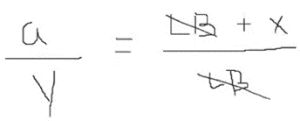


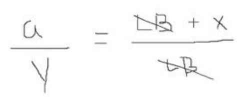
L72. **E3**: *Ok, a ver. Quedarían. […]. Aquí* x *¿cómo se interpretaría? ah… Ok, no importa lo voy a igualar a la otra. A ver LK… O… o ya sé… ya sé.* [escribe la proporción $\frac{a}{y} = \frac{LB+x}{LB}$]

L73. **E3**: *Y pues aquí, pues se elimina… se eliminarían estos ¿no?* [dibuja una línea diagonal sobre LB en el numerador y denominador de la expresión $\frac{LB+x}{LB}$ representando la división de ambas cantidades, aunque la operación es errónea] *y ya quedaría ¿está bien?* [escribe, como consecuencia de la operación previa, $\frac{a}{y} = x$].

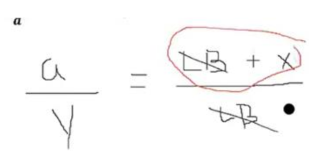








L74. **I**: *Pues, de hecho, la… la operación* [risa], *digamos, esta que acabas de mostrar no… no es, digamos, correcta ¿no? está de la cancelación. Porque recuerda que aquí tienes… tienes la suma.* [señala el numerador de la razón $\frac{LB+x}{LB}$]. *En todo caso pudieras separarla…*

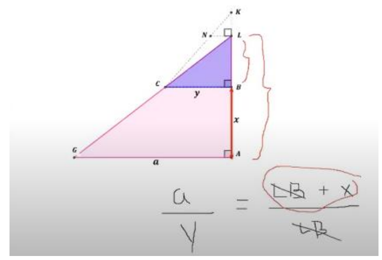


L75. *E3: Me confundo con… con… con física porque en que se cancelan las… las unidades de, por ejemplo, segundos se cancela con segundos.*

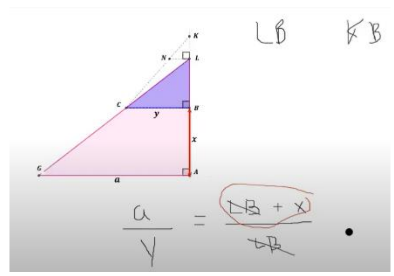
El investigador le comenta al estudiante sobre el error, sin embargo, le propone partir del resultado de la proporción planteada.

L76. **I**: *Ya, eso se puede hacer recuerda solamente cuando tienes un producto, o sea, una multiplicación en el numerador. Si es una multiplicación sí puedes, digamos, dividir automáticamente estem, si no tienes que se pue... se puede separar la suma de alguna manera.*

L77. **I**: *Ahora vamos a trabajar con esta que ya... antes de cancelar, digamos, tienes a es a y, como LB más x, es a LB ¿no? y esta deriva de que el correspondiente digamos a... digamos eh el lado... estás relacionando este del completo ¿no? que sería LA, que es LB más x, entre este ¿no? que sería LB* [dibuja dos llaves para señalar los segmentos correspondientes que se relacionan mediante la razón $\frac{LB+x}{LB}$], *lo cual eso es correcto ¿ok?*

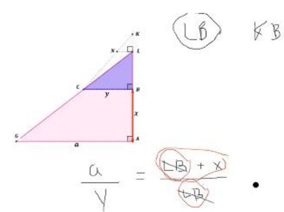


L78. **I**: *Bien, entonces ¿qué pasa ahora? que ya tienes aquí una... otra proporción dónde estem eh tienes a x y a, tienes a, a y, pero tienes al segmento LB. Entonces ¿qué tendríamos que hacer ahora? o ¿qué podríamos hacer?, ¿hay alguna relación entre LB y la que acabamos de determinar? es decir, en la anterior, que sería ¿cuál fue? KB ¿no? creo que KB es la que quedó, así como, por ejemplo... Es decir ¿podemos expresar a LB en términos de los parámetros igual?* [Escribe LB y KB para destacar que es necesario relacionar ambos para dejar la expresión en términos de los parámetros].



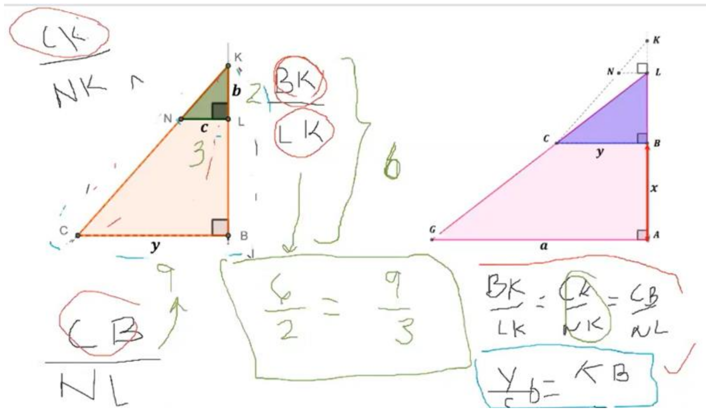
L79. **E3**: *¿cómo? ¿cómo? ¿cómo fue?*

L80. **I**: *Digamos que ahorita ya tenemos otra proporción, pero tenemos a LB ¿no? digamos LB, y este pues no está en términos de los parámetros.* [Encierra LB en la proporción $\frac{a}{y} = \frac{LB+x}{LB}$].



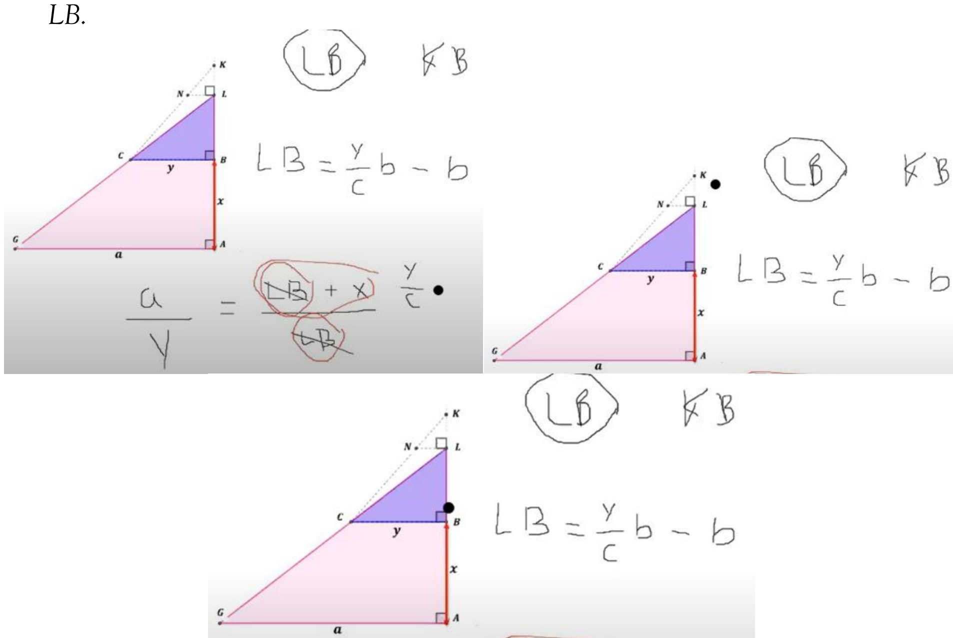
L81. **I**: *Entonces, lo que hay que hacer es dejar todo en términos de los parámetros y las incógnitas. Entonces hay que, digamos, de alguna manera encontrar alguna otra relación que haga que LB ya quede en términos de los parámetros. Entonces eh, por ejemplo, [...] ¿hay alguna relación entre, por ejemplo, lo que ya obtuve aquí, que sería KB, con respecto a LB que es el que me... me interesa?* [regresan a la página en la que se encuentra las relaciones que permitieron determinar KB en términos de y, c y b].

L82. **E3**: *Sí. Sí Porque, o sea, allá tenemos ahí los otros... las otras letras las... o sea, allá... se podrían relacionar esas letras con la... con la x.*



L83. **E3**: *¿Es así?* [escribe la expresión $LB = \frac{y}{b}b - b$]

L85. **E3**: *Pues sí queríamos igualar LB, pero con… con… con las incógnitas, pues nada más por… o sea, pues sabemos que KB es igual a y entre c por b, pero pues solo queremos el LB y pues KL es igual a b,* [señala con el puntero el segmento KL en la imagen] *entonces nada más tendríamos que quitar el KL al KB,* [señala con el puntero el segmento KB en la imagen] *para obtener el LB.*



L86. **I**: *Perfecto. Entonces ya tienes ahora sí todas las… en esta última proporción ¿qué pasa si, por ejemplo, ahora sí sustituyes, digamos, los elementos? Es decir, LB en la proporción y opera la proporción a ver qué te queda.*

L87. **E3**: *o sea…*

L88. **I**: *Sí te escucho. Sí.*

L89. **E3**: *O sea mantengo LB o cómo… cómo… cómo.*

L90. **I**: *O sea, digamos, como ya sabes quién es LB ahora en términos de los parámetros y la incógnita, entonces la idea es, sustituye ahora en la proporción que tienes aquí, en esta página, y opérala a ver qué… qué obtienes.*

L91. **E3**: *Way me va a quedar una división sobre otra división.*

L92. **I**: *Mjumm.*

L93. **E3**: *O sea no es… no es tan… o sea no es… no quiere decir que esté mal, pero va a quedar medio extraño.*

L94. **I**: *Si quieres hazlo en tu libreta para que sea más fácil y estem, y ya cuando lo tengas […] lo revisamos, […]*

L95. **E3**: *Claro.*

L96. **I**: *Sí.*

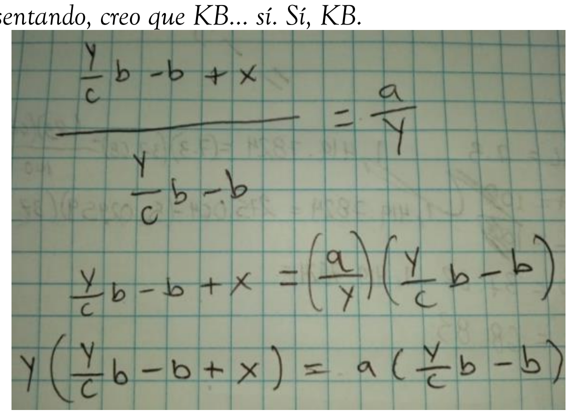
L97. **E3**: *¿Con esta ecuación tengo que llegar a la misma ecuación de Descartes?*

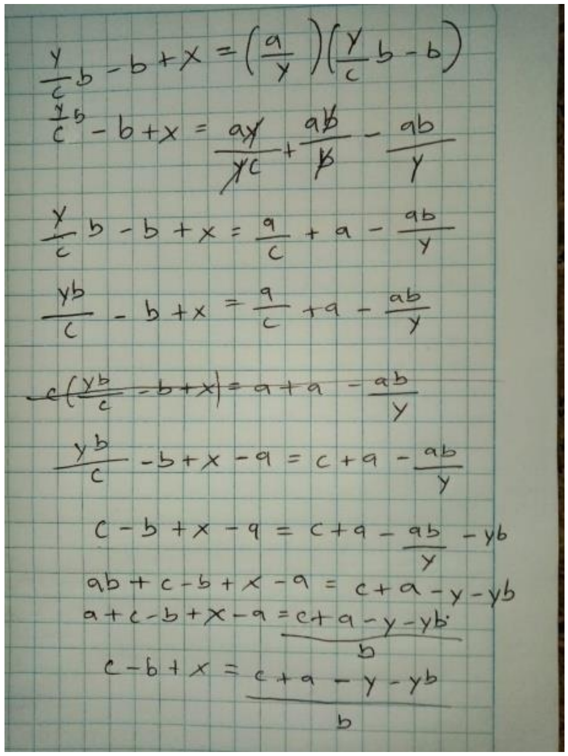
L98. **I**: *Digamos que lo que quería ver es más o menos a qué llegas. ¿Cómo… ¿ya… ya… llegaste a…? ¿qué te quedo?*

L99. **E3**: *Pues es que estaba como que intentando dejar a la y sola, pero como eh empezaba como una división entre una división sí estaba un poquito difícil intercambiar, ir intercambiando en la ecuación todos los términos. O sea, y llegué a uno que creo que es lo más pequeño, o sea, no lo más pequeño sino lo más simple que se puede llegar, pero pues no sé si esté bien. […]*

L100. **I**: *Ok. Entonces, si quieres empezar por la… la primerita a ver, cómo es que… ahorita vamos bajando.*

L101. **E3**: *Pues ah así me quedo la primera vista y éste venía representando… voy a ir aquí… aquí rápido… creo que venía representando el LB, la de arriba eh sí creo que sí. Sí. LB la de arriba y la de abajo venía representando, creo que KB… sí. Sí, KB.*





L102.

L103. **I**: *Ah ok.*

L104. **E3**: *KB. Sí... ¿por qué?... LB...*

L105. **I**: *LB ¿no?*

L106. **E3**: *Pero ¿por qué? A ver... Ahh no, ok, ok, ok. No, porque aquí está la x, está bien, está bien. Sí, porque, o sea, venía representando LB, pero además está la x, y ya sirve para igualar a las proporciones. Y pues es igual a y. Eh pues en principio pasé todo lo que estaba dividiendo en la... la... en la de la izquierda, lo pasé a la derecha eh así me quedo después. Y de aquí me pase a hacerlo de esta forma donde aquí ya estaba como que multiplicando. Y en está como que ya traté de hacer que todos los términos se multiplicarán entre sí, y esta de... y pues me quedó de esta forma. No sé si haya sido la correcta, pero así me quedo. O sea, d... a entre y, multiplicando a y entre c, por b por menos b. Y quedó de esa forma. Y después siguiendo simplificándola... bueno ajá hice las cancelaciones por qué pues en este caso creo que sí eran válidas ¿no? por que eh habían multiplicaciones. Y me quedo ya de esta forma un poco más simplificada, y pues aquí ¿qué... ¿qué es lo que falta? Ah ok, aquí en esta parte, donde dice... donde decía y entre c por b, pues nada más quise significar ya la... la... esa multiplicación, y pues quedó yb entre c ¿no? Aquí me puse a hacer algo, pero pues dije mejor no... Entonces, después eh la c... la cb... Ah no, no, no, la a de... la a entre c que está aquí, quise pasarla ab arriba ¿no? al otro lado, pero pues, entonces ahora va a estar restando ¿no? pero no sé si haya estado correcto que se hiciera eso. ¿Sí es válido hacerlo? O...*

Por el hecho de mostrar errores en la sintaxis algebraica el investigador interactúa con el estudiante para aclarar los errores (ver L107-L112). Una vez aclaradas las dudas el investigador comenta al estudiante que de no ser por los errores algebraicos hubiera podido determinar la ecuación.

L113. I: *Ok. Bueno, fíjate que de cualquier forma, tanto esa forma, como la que haces abajo ¿qué podemos hacer aquí? Mira, si no… si te das cuenta lo que está haciendo falta en las expresiones que tienes, pues es de alguna manera el cuadrado ¿no? la y cuadrada ¿no? ¿de dónde sale la y cuadrada? en verdad ya tienes la ecuación. Desde que estableciste esa proporción, esta de aquí, ya está la ecuación, de aquí va a salir la ecuación ¿ok? Entonces, es esta la única… el único, digamos, insumo que necesitas para ya determinarla, los demás son cuentas algebraicas. Entonces, por ejemplo, fíjate, si aquí tú multiplica esta, el de aquí, y por todo esto, pues va a ser multiplicar, digamos, y por cada uno de los… de los sumandos, en este caso, que están en este paréntesis ¿no? Entonces, tendrías y, por este, te quedaría allá… allá te sale la y cuadrada. Te quedaría y cuadrada por b entre c, menos by más y por, bueno x por y, te queda xy, y aquí te sale el otro término xy que también está en la ecuación. Y aquí del lado derecho puedes multiplicar esto también. a por y, te va a quedar ayb sobre c, si lo quieres ver así, menos a por b, te va a quedar menos ab ¿no? Y aquí, ya solamente, de hecho, como te va a quedar el y cuadrada, fíjate, lo voy a poner aquí… y cuadrada por b entre c, menos by, más xy, igual a lo que tengo aquí a la derecha. Entonces, ¿qué falta aquí? pues podrías ya despejar y cuadrada, digamos, pasas multiplicando… o multiplicas toda la ecuación por c, y luego divides toda la ecuación por b, y ya te va… te quedaría, digamos, la… la… la expresión ¿no?. Entonces, aquí más bien es un detalle de… de cuentas algebraicas lo que te hace falta, pero en verdad ya… ya tienes la… digamos, la ecuación.*

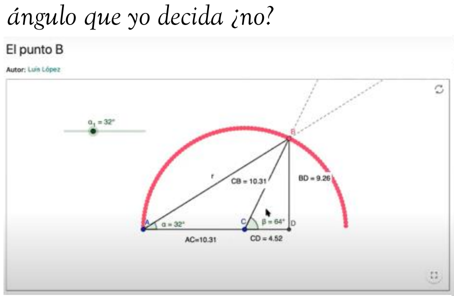
13.1.2. Procesos de construcción de la ecuación paramétrica en la EBT para la Actividad 2

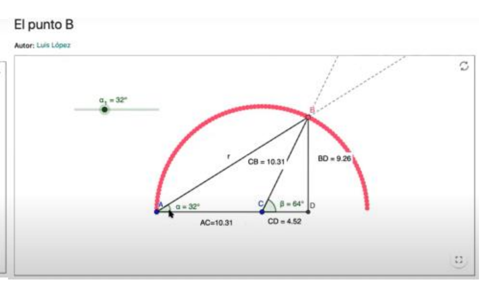
13.1.2.1. Estudiante 1 (E1)

En términos generales, la actividad no causo complicaciones importantes en el participante. Se identificaron los parámetros y variables de manera efectiva en la imagen.

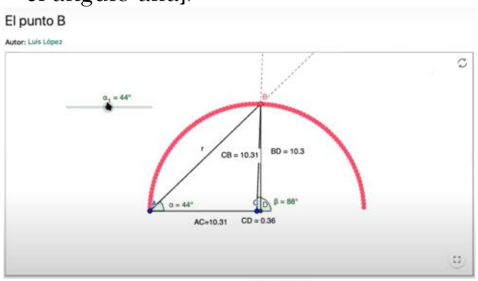
En primera instancia, el estudiante trabaja con el establecimiento de las cantidades paramétricas y variables (ver L2-L9).

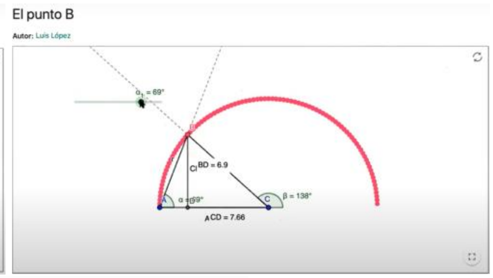
L4. **E1**: *Me doy cuenta de que la variable en sí involucra los ángulos, que serían alfa y beta, y que serían dos alfa.* [señala con el puntero los ángulos β y α respectivamente]. *Porque los… β ya serían una variable al ser parte de… al depender de. Y α pues es dependiendo del… del ángulo que yo decida ¿no?*

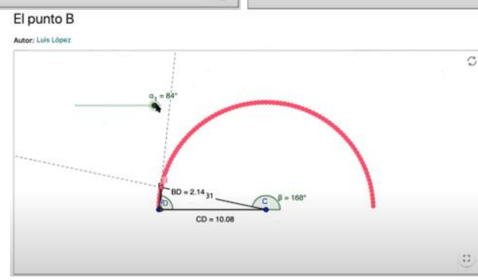




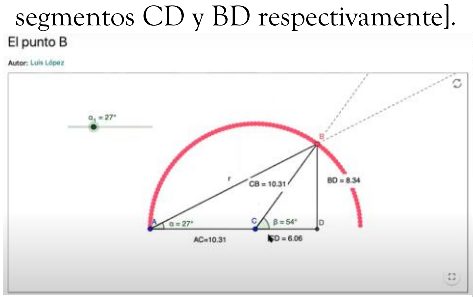
L5. **E1**: *Pero también lo que se modifica además de alfa sería la longitud de r, que aunque no se vea la longitud, se puede deducir al ver cómo voy cambiando el ángulo como r va disminuyendo o aumentando.* [mueve el deslizador para mostrar cómo la longitud r cambia al modificar el ángulo alfa].

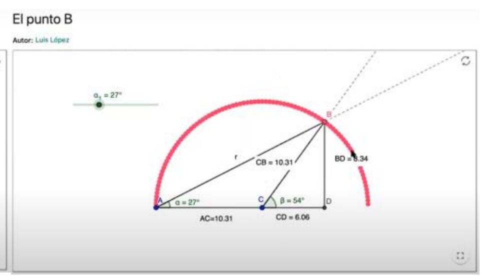




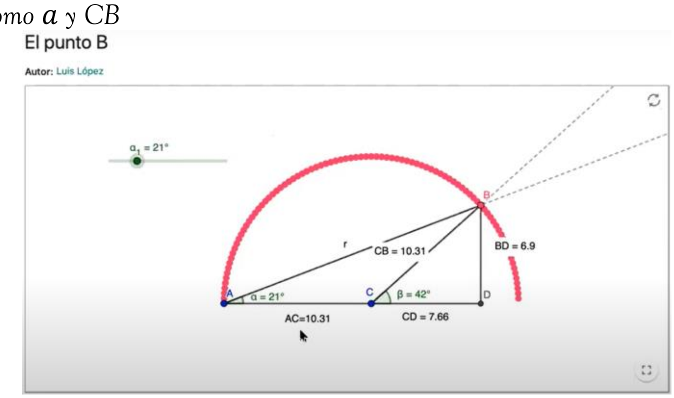


L6. **E1**: *Sin embargo, lo… al igual que CD y BD, que aquí claramente se ve debido a los marcadores, cómo va cambiando la… la longitud lo… la… el tamaño ¿no?* [señala con el puntero los segmentos CD y BD respectivamente].





L7. **E1**: *Algo lo que nunca cambia sería* AC [señala con el puntero el segmento AC] *que fue definido como a y CB*



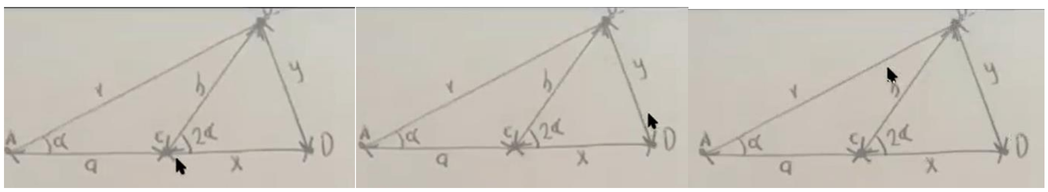
L8. **E1**: *Entonces, los parámetros serían a y CB y las variables serían α β, r, CD y BD.*

A partir de la respuesta del estudiante, el investigador le recuerda el objetivo de la actividad.

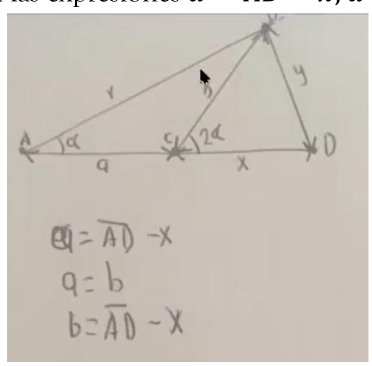
L5. **I**: *Ok, perfecto. Entonces, eh ahora pasamos a la siguiente… ahora sí a tratar de determinar la… la ecuación. Entonces nada más recuerda la instrucción: la idea es determinar una propiedad* *geométrica donde el punto b esté involucrado respecto a algunos parámetros y variables que tú consideres y para ello pues hay que determinar, bueno eso... es básicamente esa es la idea ¿sí?*

A propósito de la indicación, momentos más tarde, el estudiante explica que ha considerado dos tipos de relación que, de acuerdo con él, cumplen con las condiciones establecidas. La primera es la relación de Pitágoras, y la segunda es de tipo trigonométrico. Si bien, la relación de Pitágoras es la que determinaría la ecuación, el estudiante muestra dificultades algebraicas y geométricas para usar esta relación, puesto que se aplican de manera incorrecta al triángulo ABC, siendo este un triángulo no rectángulo. Asimismo, manifiesta resultados algebraicamente incorrectos respecto al desarrollo de un binomio al cuadrado (ver L11-L17).

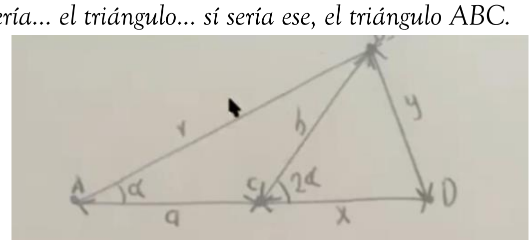
L13. **E1**: *Entonces más que nada empecé a establecer relaciones que, por ejemplo, primero definí eh CD y BD como x e y a CB como b.* [Muestra con el puntero estos elementos en el triángulo]



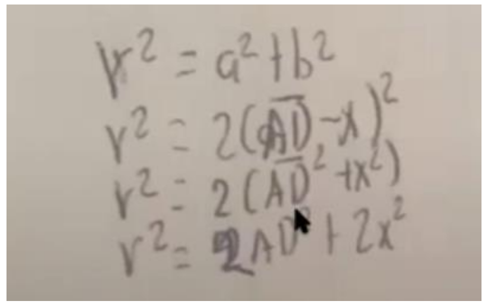
L14. **E1**: *Entonces definí relaciones, que a es igual a AD menos x, sabiendo que a es igual a b, entonces, por lo tanto, b es igual al mismo valor que produce AD menos x, o sea igual a AD menos x.* [Hace referencia a las expresiones $a = AD - x; a = b; b = AD - x$]



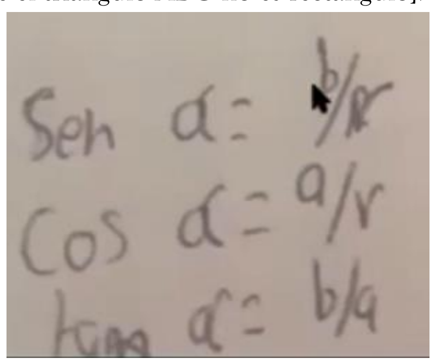
L15. **E1**: *Entonces en base de esto tengo que relacionarlo con un r con teorema de Pitágoras, que ese r al cuadrado es igual a a al cuadrado más c al cuadrado, los catetos tomando en cuenta el triángulo AB... este sería... el triángulo... sí sería ese, el triángulo ABC.*



L16. **E1**: *Entonces pero teniendo en cuenta que estos dos valen lo mismo es equivalente a duplicarlo y elevarlo al cuadrado sería 2AD menos x al cuadrado. Entonces simplemente sería 2 AD al cuadrado más x, al cuadrado sale AD al cuadrado más 2x al cuadrado. Entonces, tendríamos r* *al cuadrado igual a 2AD al cuadrado más 2x al cuadrado más… lo único que involucra a AB en este caso, sería r al cuadrado. Más 2AD al cuadrado más x al cuadrado,* [Hace referencia a la expresión $r^2 = a^2 + b^2$ y su reescritura empleando las relaciones previas $a = AD - x; a = b; b = AD - x$, de tal suerte que obtiene las expresiones $r^2 = 2(AD - x)^2; r^2 = 2(AD^2 + x^2); r^2 = 2AD^2 + 2x^2$, de las cuales la segunda y tercera son incorrectas al aplicar de manera equivocada las propiedades algebraicas]



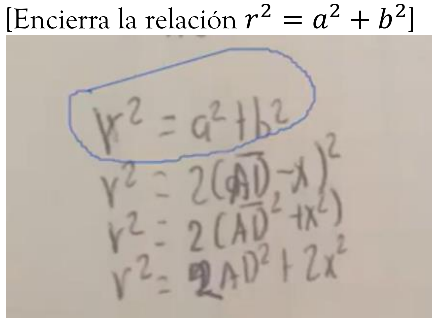
L17. **E1**: *y luego aquí intenté por trigonometría más abajito, pero pues no encontré nada claro, un poco.* [Hace referencia a las expresiones $Sen\ \alpha = \frac{b}{r}; Cos\ \alpha = \frac{a}{r}; tan\ \alpha = \frac{b}{a}$, las cuales no se cumplen dado que el triángulo ABC no es rectángulo].



Estas dificultades generan una interacción para atender, por parte del investigador, a las dificultades mostradas (ver L18-L22).

L18. **I**: *Ok, bien. Vamos a hacer anotaciones allá sobre el mismo… Entonces, tenemos lo siguiente: fíjate, aquí comentas que utilizaste esta relación de Pitágoras en el triángulo… éste que está acá, en el triángulo éste a…*

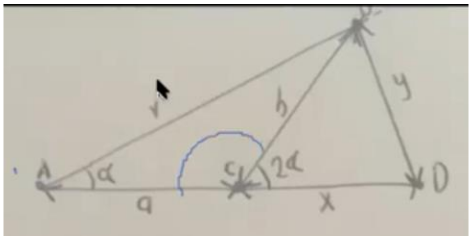
L19. **I**: *[…] en el ABC ¿no?* [Encierra la relación $r^2 = a^2 + b^2$]



L20. **I**: *Ahora un detalle; recuerda, ¿cuándo puedo aplicar Pitágoras? ¿para qué tipo de triángulo se puede aplicar Pitágoras?*

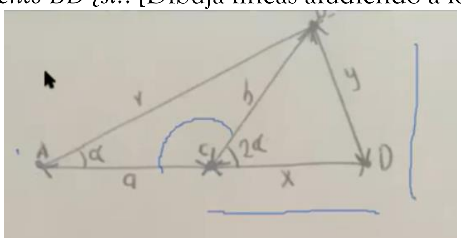
L21. **E1**: *Mmmm triángulos rectángulos sí es cierto.*

L22. **I**: *Exacto, exactamente. Entonces esta relación… estem… no cumpliría para este ángulo ¿no? es decir en este ángulo como no es recto no cumpliría ¿ya?* [dibuja la marca de ángulo en el ángulo ACB],



No obstante, puesto que el investigador reconoce que la relación geométrica y la intención del estudiante son pertinentes para la solución le recuerda que como dato en la construcción se tiene que los segmentos CD y BD son perpendiculares.

L23. **I**: *Pero, por ejemplo, sí te dan por dato, o sea, digamos, si quisieras probar con esta relación, sí te da como dato que, el… digamos, ésta… el segmento, creo que te dice CD, chécate en los datos, es perpendicular con el segmento BD ¿sí?.* [Dibuja líneas aludiendo a los segmentos CD y BD]

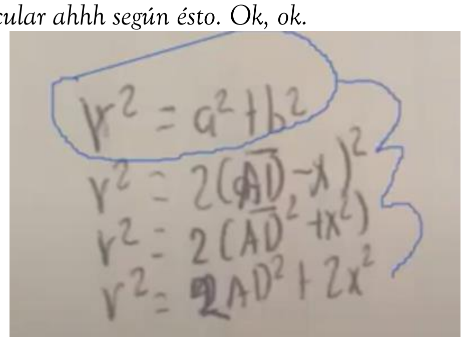


L24. **I**: *Entonces, chécalo eh no recuerdo ahorita bien la instrucción. Entonces allá sí podría formarse un triángulo rectángulo y quizás te puede ayudar ¿sí? Entonces claro que, derivado de esta consideración, pues, esto digamos, este ya no lo cumplirían ¿no? o sea, estas tres relaciones que tienes aquí.* [señala las relaciones $r^2 = 2(AD - x)^2; r^2 = 2(AD^2 + x^2); r^2 = 2AD^2 + 2x^2$]

L25. **E1**: *Ya no lo cumplirían. Ok, ok. […]*

L26. **I**: *[…] mira en el inciso d. Considera BD es perpendicular a AD.*

L27. **E1**: *BD es perpendicular ahhh según ésto. Ok, ok.*

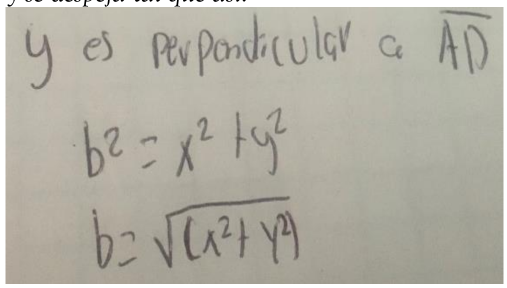


Con esta orientación, el estudiante prosigue con su proceso de resolución y determina la ecuación (ver L28-L34).

L28. **E1**: *Tendría algo, más no sé si, es igual que antes ¿no?*

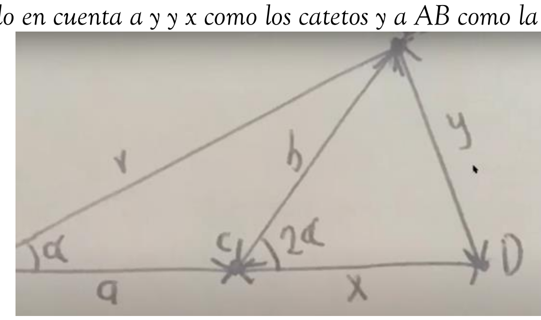
L29. **I**: *Ok, vamos a ver.*

L30. **E1**: *Entonces sería esto de acá [Muestra en la pantalla su hoja de trabajo con la ecuación]. Entonces sabiendo que y es perpendicular a AD, o sea, BD es perpendicular a AD. Usamos teorema de Pitágoras, en el cual x al cuadro más y al cuadrado. b al cuadrado igual a x el cuadro más y el cuadrado, y se despeja tal que así.*



L31. **I**: *Ok eso ¿en dónde está? digamos aquí ¿en qué parte de la figura está? ¿a qué te refieres? vamos a ver…*

L32. **E1**: *Sería esto de aquí. Este triángulo de aquí* [hace zoom a su pantalla y muestra el triángulo ABD]. *Tomando en cuenta a y y x como los catetos y a AB como la hipotenusa.*

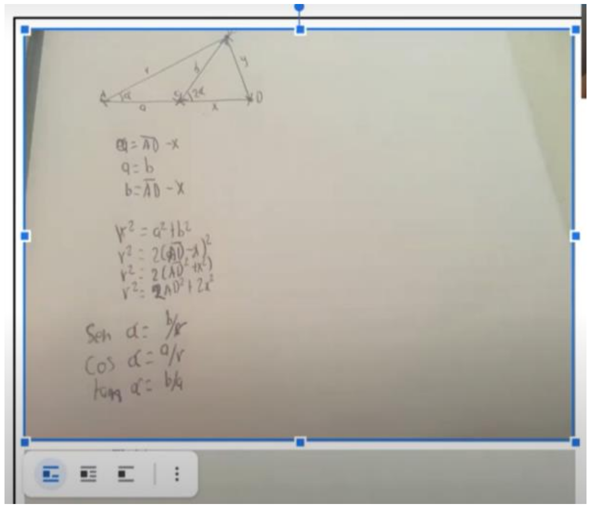


L33. **I**: *Ok.*

L34. **E1**: [inaudible] *por el hecho de que olvide el dato de que era un ángulo recto.*

Por la interacción que el investigador tuvo previamente con la estudiante E2, en la cual identificó que la estudiante no reconoció que la ecuación a la que llegó cumplía con las condiciones indicadas en la situación —el involucramiento del punto B en la relación geométrica (ver L35-L46) y que la ecuación derivada de esa relación involucre los parámetros e incógnitas (ver L47-L57)—, prosigue con el estudiante E1 llevándolo a reconocer si la ecuación determinada cumple con las condiciones solicitadas en la situación. No obstante, esta última condición se torna compleja por dos hechos, el primero es que el estudiante no reconoce a r como un parámetro, sino variable, además de que no se reconoce la equivalencia entre los parámetros a y b; el segundo hecho es que la condición establecida en la situación induce al estudiante a considerar que en la ecuación todos los parámetros y variables deben incluirse "*La idea es determinar una propiedad geométrica que involucre al punto B, respecto de los parámetros y las variables. Para ello, el primer paso es determinar qué cantidades son parámetros y cuáles variables. Posteriormente, identifica una relación geométrica que involucre a los parámetros y variables, y que pueda derivar en una ecuación algebraica*". Esto determina que la interacción entre estudiante e investigador trate de esclarecer esta idea.

Durante la revisión de la primera condición el estudiante proyecta su pantalla y argumenta con base en la imagen de su hoja de trabajo:



L35. **I**: *Ok, perfecto. Entonces vamos a revisar lo que dice la instrucción a ver si, digamos, si la... lo que propones ya cumple con la condición. [...]:*

L36. **I**: *Ok, dice... ok... la idea, [...], es determinar una propiedad geométrica que involucre al punto B. Entonces veamos ¿tenemos eso ya? es decir ¿tengo una propia geométrica donde está involucrar punto B?*

L37. **E1**: *Está involucrado el punto B, al encontrarse B e y que b sería el segmento CB y y sería el segmento BD.*

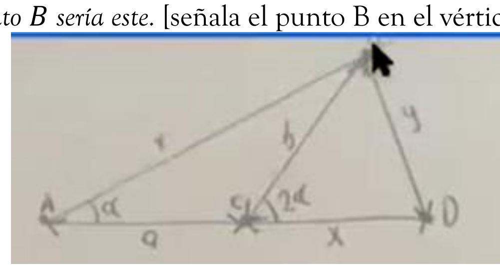
L38. **I**: *Ok, ¿podrías mostrármelo en la imagen?*

L39. **E1**: *Mmm voy a exportar las imágenes acá aunque este mal es parte por seguimiento ¿no?*

L40. **I**: *Ok, exacto. Entonces tenemos, primero la propiedad que cumple... estem... una propiedad geométrica que relacione el punto B, o más bien igual donde B esté involucrado, en el punto B está involucrado. [...].*

L41. **I**: *Ándale, ok ¿dónde esta B? ¿el punto B dónde está en la imagen?*

L42. **E1**: *Este sería... el punto B sería este.* [señala el punto B en el vértice del triángulo]



L43. **I**: *Ok. Entonces en la figura que estás utilizando que en este caso sería ese triángulo ¿no? el CBD ¿no?*

L44. **E1**: *El CBD mjum.*

L45. **I**: *Ándale entonces allá, digamos, tenemos una propiedad geométrica que está involucrando el punto B ¿estarías de acuerdo o no?*

L46. **E1**: *Mmmm diría que sí lo involucra por al... al utilizar primero la figura geométrica que se forma con CBD, que es este triángulo rectángulo, aunque aquí no se traza como rectángulo. Luego se utiliza el segmento b y el segmento y que involucran que entre sí está son delimitados por el punto B.*

L47. **I**: *Ok, bien entonces podemos decir que ya tengo una propiedad geométrica que… donde está involucrado el punto B, que como tú dices está delimitado por ese triángulo donde B está involucrado. Ok, entonces cumplimos con eso.*

A continuación se muestra la dificultad para la segunda condición. Nótese que la explicación del investigador no es del todo precisa, pues se le dificulta aclarar por qué en esta ecuación no es necesario involucrar todos los parámetros, además de que la magnitud r no es una variable. Además, puede identificarse que es el investigador quien tiende a concluir que la ecuación determinada por el estudiante es correcta.

L48. **I**: *Y la segunda es que esa relación geométrica involucre también a parámetros y a variables.*

L49. **E1**: *Ah ok, ok.*

L50. **I**: *Entonces la segunda es… vamos a ver eso. Entonces en tu figura la que tienes allá, el triángulo CBD ¿no? estamos involucrando incógnita… bueno las variables y parámetros x e y.*

L51. **E1**: *Estamos involucrando x e y, más falta involucrar a r y a al igual que estamos, también estas involucrando b, x e y, pero falta involucrar a r y a.*

L52. **I**: *Ok, entonces vamos a ver lo siguiente… fíjate, en efecto, digamos la instrucción, de… digamos, que igual no es muy precisa la instrucción, porque la idea no es que involucra todos, sino la intención es que involucres a las variables en términos de uno o más parámetros, es decir si con la… si yo tengo una relación, una propiedad geométrica, donde está involucrado al punto que me interesa y ya tengo la relación entre las dos únicas digamos las dos variables que me det… delimitan ese punto y dentro de esa relación hay algún parámetro… estem… que provino de la construcción inicial, entonces con eso ya podría, eh digamos determinar esa ecuación. Y si te das cuenta, eh tú decías allá que b es igual a ¿no? el b… be minúscula*

L53. **E1**: *b minúscula es igual a minúscula.*

L54. **I**: *Y entonces a es un parámetro ¿no? porque era el, de hecho, el valor inicial con el que se, de hecho, con ese inicio la construcción. Se puso un segmento AD y se ubicó un punto C que delimitó un parámetro, en este caso el valor de a, ¿sí? que es ese segmento AC. Entonces ese en sí mismo ya es el parámetro. Es un parámetro de la construcción. Entonces dado ese valor que tiene a, que de hecho, en la construcción es 10.31 ¿no? en la posición como inicial, eh toda la figura junto con el ángulo, porque también el ángulo va a ser conocido, va a conformar y va a delimitar los segmentos digamos que están formando allá. Entonces, podemos decir que dado que b es igual a a, ya estás involucrando en tu ecuación las dos variables y un parámetro.*

L55. **E1**: *Un parámetro.*

L56. **I**: *Entonces en sí misma, esa ecuación ya cumpliría con esos criterios y ¿qué significa? fíjate… que dado que yo conozco el valor de a ¿si? y si yo conociera por ejemplo alguno, eh el valor de x es decir un pedazo… un… el valor del segmento CD yo puedo saber con esa ecuación dónde estaría ubicado el punto B, porque puedo calcular el valor de y ¿sí?*

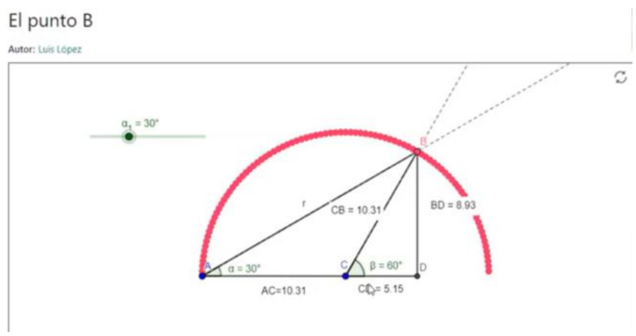
L57. **E1**: *Sí, sí.*

L58. **I**: *Exacto ¿no? es decir, conozco a y si yo conociera, ya sea x o y, pues yo podría saber exactamente dónde está ese punto, porque puedo calcular el otro o viceversa. Conociendo y, yo puedo saber exactamente dónde está ubicado el punto B ¿no? en x, porque… con esa relación que ya tienes ¿sí? entonces esa es la idea.*

13.1.2.2. Estudiante 2 (E2)

En la determinación de los parámetros y variables, la estudiante considera que los parámetros son aquellas cantidades que permanecen fijas, mientras que las variables son las que presentan cambios.

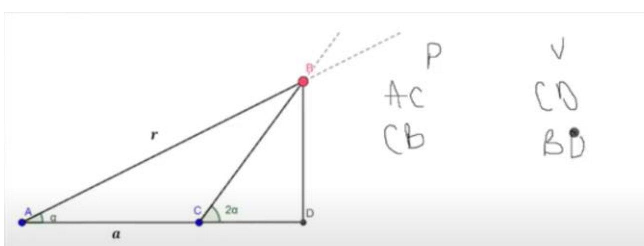
L1. **E2**: *O sea, según yo, los parámetros son los que no... o sea los que son constantes ¿no? O sea no cambian sus valores. Entonces pues AC y CB son constantes, o sea son parámetros. Y pues ya, los demás son CD y BD y los ángulos.* [señala con el puntero los segmentos respectivos en la imagen]



El investigador le solicita a la estudiante que señale de manera precisa las cantidades a las que se refiere.

L2. **I**: *Ok. Entonces tenemos esa... esa figura ¿no? Entonces, por ejemplo, no sé si allá puedas ubicarme... aquí en donde está... bueno ¿qué variables están considerando en la imagen y qué parámetros? para que podamos estem discutir un poquito.*

La estudiante escribe en la pizarra digital que los parámetros son los segmentos AC y CB, mientras que las variables son CD y BD.



Con base en esta interacción, el investigador le propone a la estudiante que determine la ecuación, sin embargo, la estudiante manifiesta no tener algo concreto al respecto (ver L4-L7).

L4. **I**: *Ok. Perfecto. Entonces ahora sí, [...], pues trata de encontrar a ver la relación y la ecuación.*
L5. **E2**: *¡Dios!* [muestra angustia en su tono].
L6. **I**: *Si quieres consultar algo lo podemos hacer sin problema.*

L7. **E2**: *Es que no tengo nada. O sea es que… ajá o sea, esta… estaba pensando en cómo hacerlo pero no tengo nada* [angustia].

Esto provoca una interacción para reconocer lo que interpreta la estudiante respecto a las posibles relaciones que ha determinado en el proceso y lo que debe hacer en la situación (ver L9-L16). Nótese que la estudiante intenta determinar relaciones geométricas (semejanza de triángulos) de manera similar a la situación inicial.

L9. **I**: *A ver, estem, pero qué estás pensando, más o menos ¿qué se te ocurre? o sea ¿qué… qué has estado como analizando?*

L10. **E2**: *Pues es que, o sea, estaba analizando la figura ¿no? y dije pues ¿qué puedo encontrar?, o sea, es que dije a lo mejor y… y tienen, o sea como todas, a lo mejor y son semejantes y ya pero no son.*

L11. **I**: *¿Tienes como parámetros a AC y CB ¿no?*

L12. **E2**: *Mjum*

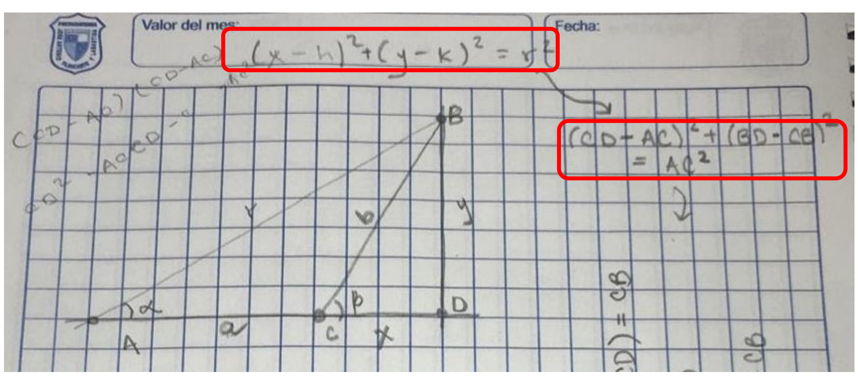
L13. **I**: *Y como variables a CD y a BD ok. Ok, ahora ¿qué se te ocurre hacer con… con esas estem… con esos datos? Digamos cuando dice la instrucción […] de tienes que terminar una propiedad geométrica que involucra al punto B, o sea, ¿qué […] se te viene a la mente cuando lees eso?*

L14. **E2**: *Es que ajá, o sea cuando me dijo… cuando leí lo de la propiedad geométrica, yo dije a lo mejor, o sea, asignarlo a una figura, y pues yo pensé en el círculo, porque dije pues es una circunferencia es un círculo.*

L15. **I**: *Mjum.*

L16. **E2**: *y ya [risa].*

Complementariamente, es importante hacer notar que la estudiante al reconocer que el rastro del punto describe una semicircunferencia trata de relacionar la ecuación de la circunferencia que conoce de su experiencia escolar con lo que experimenta con el applet (nótese el conector lógico de la flecha que usa), sin embargo, no lo logra. Esto se puede ver en su hoja de trabajo recuperada posterior a la interacción.



Cabe destacar que esta estudiante fue la única de los cuatro estudiantes que logró determinar la ecuación de la circunferencia que se planteó en el *pre-test*. No obstante, a pesar de dominar este saber, no le es posible articularlo con la situación planteada en la EBT.

A propósito de no reconocer qué hacer, el investigador interactúa con la estudiante para que pueda avanzar en la resolución de la actividad (ver L17-L19). Nótese también que la orientación no es del todo precisa pues el investigador titubea al momento de tratar que la estudiante comprenda la relación entre el punto de la curva, la ecuación y las relaciones geométricas de las que proviene. Esta dificultad, puede entenderse también desde la inseguridad del investigador por proponer información que sesgue el proceso de construcción de la estudiante.

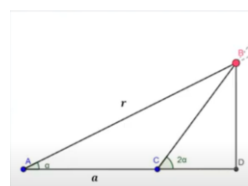
L17. **I**: *Bien. Entonces, partamos de… partamos de esa idea. Tú dices que… claro como ves que hay un círculo allá, pues seguramente tiene que ver. Y justo lo que se… lo que se está tratando de lograr es determinar cómo es que ese círculo se forma ¿sí? en la curva de Descartes recuerda que cuando yo movía el punto L, así como ahorita mueves el ángulo* α *se construía esa curva. Pero si te das cuenta, lo que usamos para determinar la ecuación no es como esa curva en sí misma, sino de dónde proviene, cómo es que se forma esa curva ¿sí? Es decir, utilizamos en el caso de Descartes, pues la relación, o sea, triángulos porque la imagen cómo te muestra […] en el ejemplo está, digamos, ese punto C se construye cuando, digamos, eh con la unión, digamos de dos rectas y esas dos rectas están determinadas por los triángulos ¿ok?*

L18. **E2**: *Mjum.*

L19. **I**: *En este caso, ¿qué figura es la que forma, digamos, en este caso eh o… o… sí, forma o permite construir el punto B?*

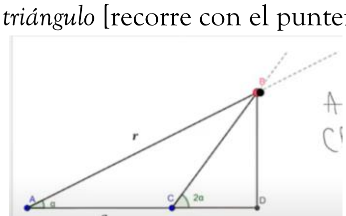
Posteriormente, la interacción se centra en el reconocimiento de la relación geométrica de Pitágoras, lo cual no es identificada por la estudiante en este primer intercambio. Al notar este hecho el investigador le propone a la estudiante que lo analice un tiempo, sin embargo, la estudiante no logra identificar la propiedad. (ver L20-L52)

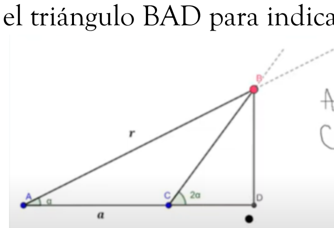
L20. **E2**: O *sea ¿qué figura es la que está conformando no?* O *sea, ésta.* [Se refiere a la imagen que aparece en las instrucciones]

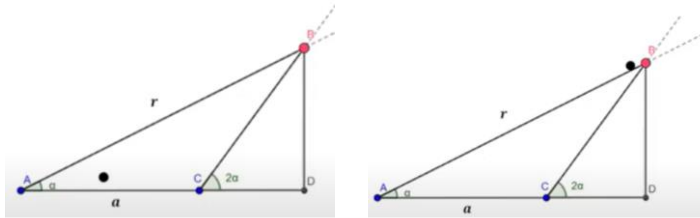


L21. **I**: *Mjum.*

L22. **E2**: *pues un triángulo* [recorre con el puntero el triángulo BAD para indicarlo]

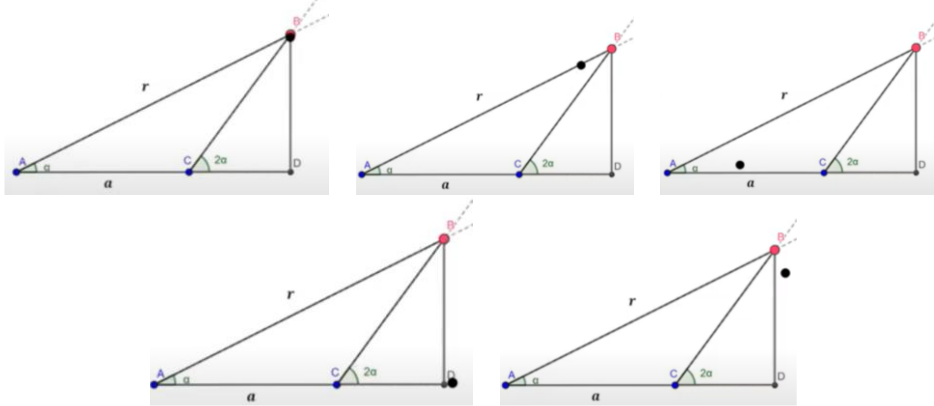






L23. **I**: *Un triángulo, bien. Entonces ya tenemos una idea, hay un triángulo allá. ¿Qué tipo de triángulo es?*

L24. **E2**: *Ah es… es que no sé ¿no? O sea, no sé cuánto mida la… O sea, ¿este? ¿el grandote? O sea, ¿el conformado por los dos? Según yo…* [recorre con el puntero el triángulo BAD para asegurarse sobre qué triángulo está hablando el investigador].



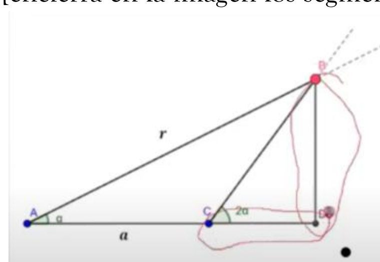
L25. **I**: *Mjuum*

L26. **E2**: *O sea es un triángulo rectángulo ¿no?*

L27. **I**: *Bien. Tienes un triángulo rectángulo.*

L28. **E2**: *Mjum.*

L29. **I**: *Ahora, ¿qué propiedad tiene un triángulo rectángulo? Y recuerda, tú tienes allá, […] está longitud y está longitud ¿no?* [encierra en la imagen los segmentos BD y CD]



L30. **I**: *¿ok? Ahora eh ¿qué propiedad tiene el triángulo rectángulo que de alguna manera involucre a estas dos variables?*

L31. **E2**: *Que tiene un ángulo de 90°.*

L32. **I**: *Ok, exacto, esa es una propiedad, pero además ¿qué otra cosa podrías derivar en un triángulo rectángulo?*

L33. **E2**: Mmmmm

L34. **I**: *Y otra… otra cuestión […] para que podamos estar como más estem entenderte mejor, es cuando hablas de triángulo rectángulo ¿a qué triángulo específicamente te refieres? ¿me puedes señalar allá en la imagen por favor?*

L35. **E2**: *A este* [señala el triángulo BAD]

L36. **I**: *El completo ¿ok? Muy bien, ok. Ahora ¿qué otra propiedad tiene además de tener el ángulo recto un triángulo rectángulo? o ¿qué se puede concluir también o sacar a partir de un triángulo rectángulo?*

L37. **E2**: *Pues todos lados son desiguales.*

L38. **I**: *Eh, digamos dependiendo del triángulo ¿no? porque por ejemplo si tengo un triángulo isósceles rectángulo pues también voy a tener dos lados iguales. Ok. Esa es una propiedad que tiene la figura ¿no? pero bueno, ¿qué otra... qué otra se te ocurre?*

L39. **E2**: [Emite un grito después de 46 segundos]

L40. **E2**: *Ah Dios mio.*

L41. **E2**: *Ah No sé si...* [tono de angustia]

L43. **E2**: *No se me viene nada. Nada, nada, nada.*

L46. **E2**: *Es que lo que se me viene es algo lógico, pero de todos los triángulos.*

L47. **I**: *Mjumm ¿qué será?*

L48. **I**: *Si quieres piénsalo un momentito y si no se te ocurre estem algo en unos seg... o sea, en un momentito, ya estem pasamos con otra... otro apoyo ¿sí?*

L49. **E2**: *Ok.*

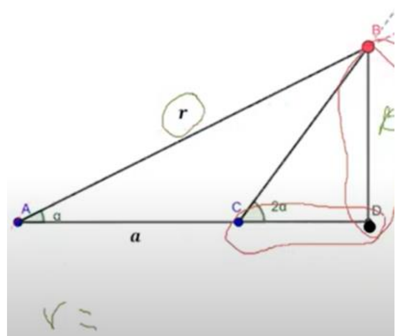
L50. **E2**: [Quejido después de silencio de 10 segundos]

L51. **I**: *Mira no te preocupes. ¿se te ocurrió algo? ¿o no?*

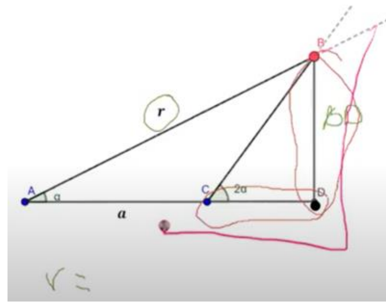
L52. **E2**: *Es que... no, no se me ocurrió.*

La dificultad para identificar la propiedad lleva al investigador generar una interacción para inducir la identificación de la propiedad de Pitágoras (ver L53-L64).

L53. **I**: *Tranquila no pasa nada. Ahora ¿qué pasa si yo te digo lo siguiente? [...]. Eh obviamente este de aquí de la derecha es el segmento BD. [...] ¿Qué pasa si yo te digo... yo te pregunto esto? ¿cuánto es r en este ángulo que estás viendo?* [encierra r en la imagen y escribe debajo del triángulo $r =$]



L54. **I**: *¿cómo puedo calcular r? si estás viendo, digamos, como tú me mencionabas, pues este triángulo rectángulo ¿no? el completo.* [recorre con el láser digital el triángulo BAD]



L55. **E2**: *Ahhh ok.*

L56. **I**: *¿cómo podría calcular r?*

L57. **E2**: *Mmmmm la suma de los cuadrados de los catetos.*

L58. **I**: *Ok. Los cuadrados de los catetos y eso ¿por qué se… por qué puedes hacerlo?*

L59. **E2**: *¿Por la ley de Pitágoras?*

L60. **I**: *Mjumm. La ley de Pitágoras.*

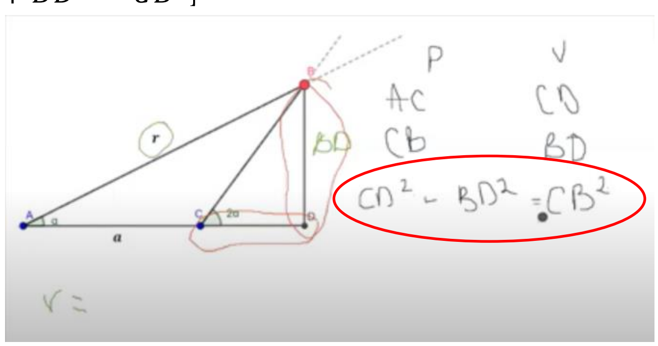
L61. **E2**: *La ley de Pitágoras.*

L62. **I**: *Ok. Entonces esa es una propiedad qué justamente también tiene en un… todo triángulo rectángulo que se va a cumplir… ¿qué se va a cumplir? como tú decías, que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos ¿ok? Ahora con esta información ¿qué podrías concluir? y allá piénsale con calma.*

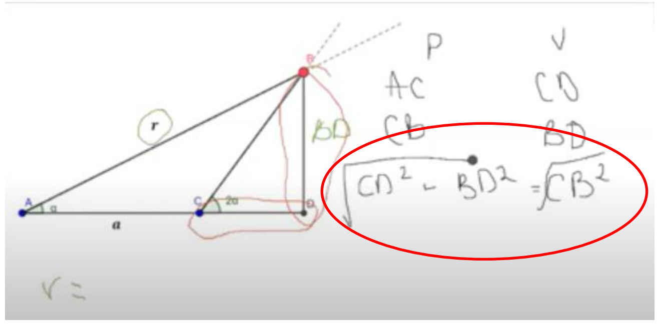
L63. **E2**: *¿Por qué es tan complicado esto?*

Posteriormente la estudiante comenta la relación a la que llegó con base en los planteamientos previos de la propiedad de Pitágoras. No obstante, manifiesta tener dificultades con respecto a qué hacer con la ecuación a la que llegó, dejando ver una algebrización aleatoria en torno a la ecuación planteada.

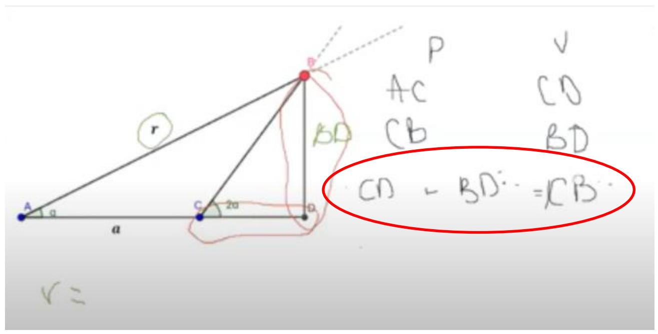
L67. **E2**: *Pues, o sea, estaba viendo, o sea porque ya vio que habíamos dicho que el cuadrado de los catetos… la suma de los cuadrados de los catetos da la hipotenusa ¿no? Entonces, pues obviamente queda así de que C dos, más… más BD al cuadrado es igual a CB al cuadrado.* [Se refiere a la relación $CD^2 + BD^2 = CB^2$]



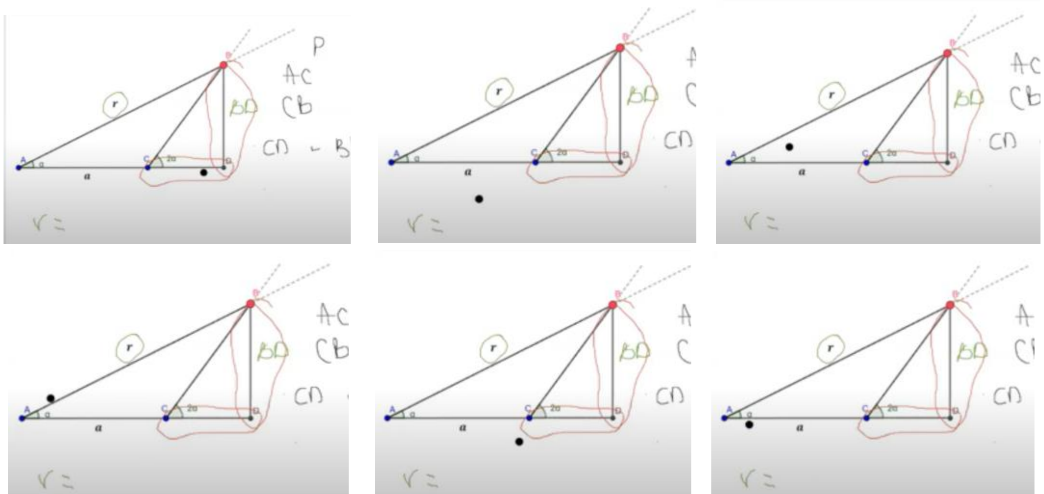
L67. *Entonces dije bueno pues eso que si le quito el cuadrado a este, pues le puedo quitar el cuadrado a estos también. Y me queda CD al cuadrado… ajá me queda eh así.* [Aplica el operador raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación]



L68. *Entonces, dije, bueno, y ahora ¿qué hago? porque me queda así.* [Elimina los cuadrados de cada sumando del miembro izquierdo de la ecuación (erróneamente) y el cuadrado del término CB]

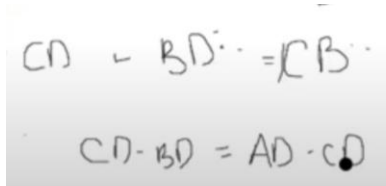


L69. *Entonces, empecé a como que a relacionarlos ¿no? Y dije Ah bueno, pues aquí puedo decir que AC que es lo mismo de que... que CB es igual a... a AB por qué* [inaudible] *AB... AB es igual a... bueno AC es igual a AD menos CB* [desplaza el puntero sobre la imagen para señalar los segmentos de los que está hablando].

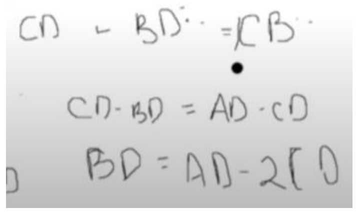


L70. **I**: *Mjumm ok.*

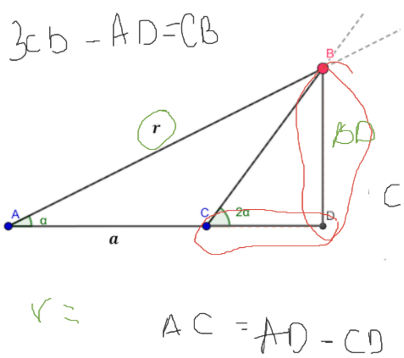
L71. **E2**: *Entonces, luego de eso, o sea, dije, pues igualo esto, esto y esto, porque como, o sea realmente esto vale lo mismo, entonces dije, pues CD más, menos BD es igual a AD menos CD.*



Entonces dije Ah bueno pues lo hago ¿no? CD menos BD es igual a AD menos CD. Y pues ya dije. Ahora ¿qué hago? [risa]. *Y pues dije: no pues voy a… voy a despejar el BD ¿no? Y pues estuve despejando el BD… el… y pues me quedo así, BD es igual a AD menos 2CD, 2CD perdón.*



Y luego dije ¿qué hago? Y pues lo sustituí, o sea sustituí este, por esta cantidad, y pues me daba CD… no, menos CD, … a ver lo voy a escribir aquí arribita… me daba… o sea me quedo así el… me quedó AB… espere… lo voy a volver a escribir aquí porque creo que lo estoy escribiendo… [repasa sus cálculos en su libreta]. *Ah Algo no me cuadra. Bueno ajá ahorita lo volví a hacer* [ruido] *y me quedo así en… me quedó 3CB… 3 CB… es una B…*



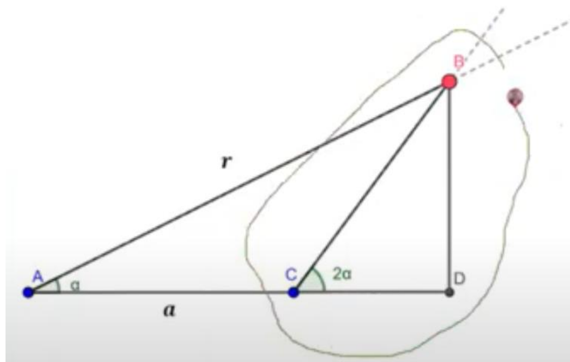
L74. **E2**: *A menos AD es igual a CB. Y pues ahí estoy.*

L75. **I**: *Ok. Eh bien. Aquí vamos a ver un detallito. Me parece… gracias por la explicación. Eh y digamos el razonamiento que… que estás mostrando, eh claro me da la idea, de que justamente estás tratando de encontrar ok. O sea, me… digo, como que qué es lo que tengo que hacer ¿no? O sea, hacia a dónde tengo que llegar. Me da como esa idea. No sé si estás de acuerdo con eso.*

L76. **E2**: *Sí.*

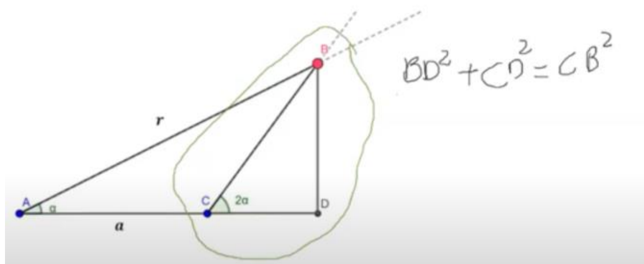
Puesto que el investigador notó que la participante ya había logrado el objetivo de la actividad, sin que ella se diera cuenta, le preguntó si sentía que no sabía que hacer, a lo cual respondió que sí. Entonces el investigador propuso recapitular lo que se solicitaba en la actividad, destacando: encontrar una relación geométrica que involucrara al punto B, y que esa relación involucrara a parámetros y variables, a lo cual respondió que sí. Entonces, el investigador le expresó que ya había llegado a la relación, pero por no saber exactamente qué hacer no le permitió darse cuenta (ver L77-L94). Finalmente, le pidió que si expresaba en términos de literales como Descartes sus etiquetas geométricas cómo debía quedar la ecuación, a lo cual respondió $x^2 + y^2 = a^2$ (ver L95-L96).

L77. **I**: *[...] Ok. Entonces fíjate, tú tienes la propiedad esta. Y ahora, para empezar, digo, noto que te estás centrando ahora en este triángulo ¿no? En este más pequeño.*



L78. **I**: *Entonces lo que dijiste allá es que BD al cuadrado ehh más CD al cuadrado, tiene que ser igual a ehh CB ¿no? al cuadrado.*

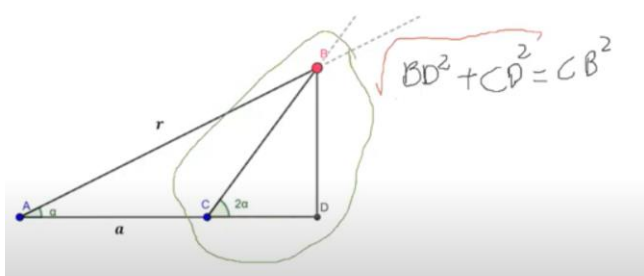
L79. **E2**: *Al cuadrado*



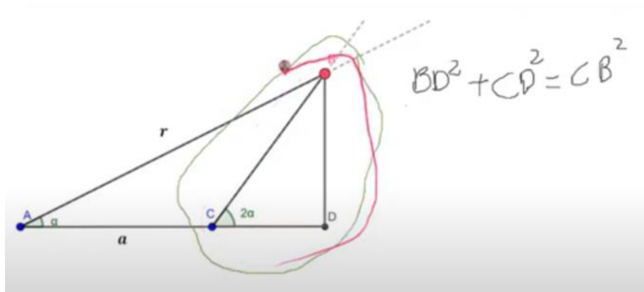
L80. **I**: *Ok. Entonces eh luego tú dices que, claro como que... como no siento que... digo no sabes exactamente que... hacia donde quieres llegar, como ya comentamos, por eso estas buscando qué hacer con la ecuación, y lo que haces es sacarle la raíz cuadrada ¿no? Ahora allá hay un detalle. Que recuerda una cuestión. Cuando yo saco la raíz cuadrada de una suma, por ejemplo, aquí no es lo mismo que sacarle, o sea, digamos el resultado no es lo mismo que la raíz cuadrada de cada sumando, es decir, de cada parte. Digamos, eso no se cumple, sino más bien quedaría algo así.* [Dibuja el signo de radical]

L81. **I**: *La raíz cuadrada sería CB, pero el otro lado se quedaría así, como la raíz cuadrada de todo eso ¿ok?*

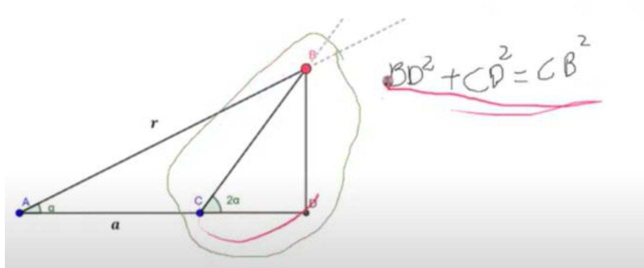
L82. **E2**: *Ah ok.*



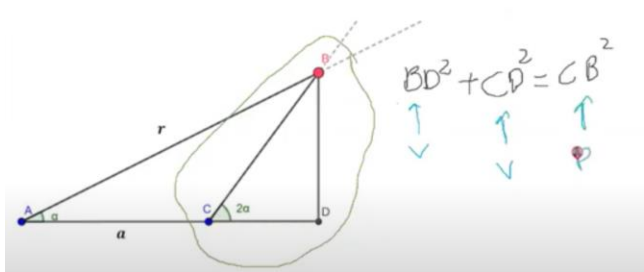
L83. **I**: *Bien entonces, eso me dice, eh digamos que, pues en esencia no se puede hacer mucho en ese sentido, pero fíjate que aquí la idea es ¿qué dijimos? Tenemos que encontrar una propiedad geométrica que, digamos, que justamente determine o haga que ese punto B, que construye la curva a su vez, eh lo estem lo permita digamos, o sea lo deje determinado, es decir, B como tú ya mostraste aquí, está construido y se puede determinar por medio de este triángulo que está, en el que te estás fijando. Y lo que dices es que aquí en este triángulo* [rodea con el láser digital el triángulo BCD] *eh*



L84. **I**: *hay una propiedad geométrica que es esta* [destaca con el láser digital la relación $BD^2 + CD^2 = CB^2$], *justamente, la de Pitágoras, como decíamos hace un momento, que se cumple.*



L85. **I**: *Y otra cosa que podemos notar también en lo que ya tienes, es que… de acuerdo a lo que tú comentaste qué esta es una variable, esta es otra, y aquí tienes, este va a ser un parámetro, como tú dijiste.* [señala y escribe "V" refiriéndose a una variable y una "P" para referirse a un parámetro].



L86. **I**: *Ahora… y eso hay que hacerlo con respecto a los parámetros y variables, es decir, tengo que… esa relación geométrica tiene que involucrar a los parámetros y a las variables, y que además esto, pues claro, nos dé una ecuación. Pregunta: ¿tienes eso? ¿ya tienes una ecuación que involucra parámetros y variables?*

L87. **E2**: *Sí.*

L88. **I**: *¿Sí, no?*

L89. **E2**: *Sí.*

L90. **I**: *Entonces, en la instrucción ¿qué dice? Voy a…voy a leerlo otra vez para que tengas una idea. Dice: la idea es determinar una propiedad geométrica que involucre punto B ¿tenemos eso ya? ¿ya tenemos una propiedad geométrica que involucra al punto B?*

L91. **E2**: *¿Sí, no?*

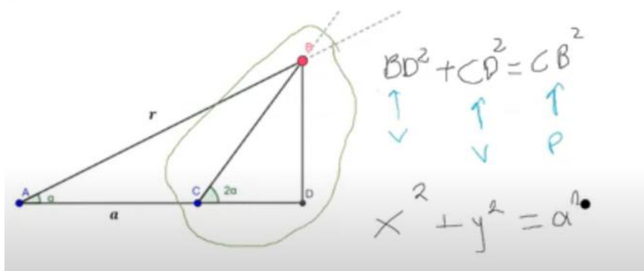
L92. **I**: *Sí, ok. Que sería la de Pitágoras ¿no? o sea, ese triángulo rectángulo que cumple la propiedad Pitágoras.*

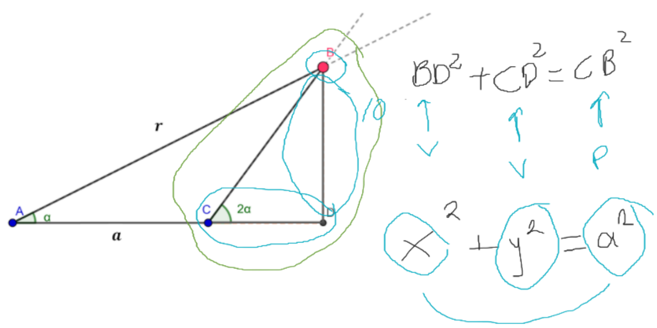
L93. **I**: *Entonces ¿qué podemos concluir? que ya tienes la ecuación ¿sí?*

L94. **E2**: [risa]

L95. **I**: *[…] Imagínate que lo ponemos, ahora sí, en términos de como decía Descartes x y y para las variables y, para el parámetro. ¿Cómo quedaría más o menos la ecuación?*

L96. **E2**: $x^2 + y^2 = a^2$.





13.1.2.3. Estudiante 3 (E3)

En términos generales, el estudiante llegó a otras relaciones que no estaban contempladas en la situación. La relación fue analizada después de la EBT y si bien era matemáticamente correcta, no permitía determinar el lugar geométrico del punto B, lo cual se le mencionó al estudiante en una sesión posterior.

Al principio de la resolución el estudiante comenta lo que entiende respecto a lo que es un parámetro y una variable. En su respuesta puede identificarse que a diferencia de E1 y E2, este estudiante no menciona explícitamente el término "constante", sino "establecidas". No obstante el investigador no profundizó en lo que representaba para el término establecido.

Asimismo, puede interpretarse que esta distinción entre parámetros y variables es determinada por el uso del *applet*.

L3. **E3**: *Nada más para como que, así para recordar, eh ¿los parámetros eran las… como que las cantidades que ya estaban establecidas, no? Así que ya no se pueden cambiar, y pues las variables eran determinadas por los parámetros ¿no?*

L7. **E3**: *Entonces aquí sí puedo hacer como que… uso entre comillas del GeoGebra ¿no?*

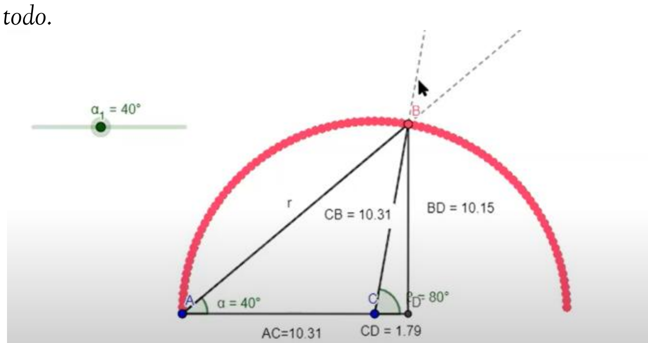
De manera complementaria, el estudiante muestra una necesidad por generar su propio sistema de representación para magnitudes de la figura:

L13. E3: *Eh una duda, en dado caso que pues… eh o sea, en que estoy construyendo la ecuación ¿yo puedo asignar… eh por así decirlo, letras a los segmentos? por ejemplo, a los que no los tienen asignados. Por ejemplo, aquí AC tiene la letra a, y AB tiene la letra r. Entonces ¿yo puedo asignarle, no sé al segmento CD la letra m? ¿para poder así establecer la relación? ¿la ecuación?*

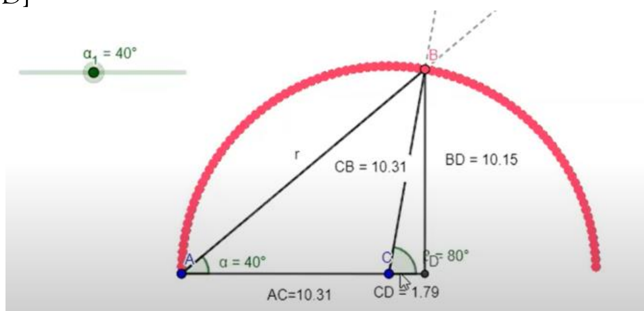
Posteriormente, durante un lapso de aproximadamente 100 minutos, el estudiante menciona que tiene ideas respecto a la determinación de los parámetros y variables y sobre la ecuación. Cabe mencionar que el estudiante muestra en un principio que se encontraba determinando alguna relación proporcional (ver L30-L46), como en el caso de la actividad 1 (El instrumento de Descartes). En esta primera explicación también muestra cómo comienza a analizar casos particulares y el comportamiento de la figura mediante el *applet*. La segunda relación a la que hace referencia el estudiante si bien es correcta (L47-L65), no cumple con la segunda condición de la situación al no involucrar una de las variables. Esta ecuación no estaba prevista en la THA.

L27. **E3**: *después de… Bueno eh al principio ¿no? pues como le dije que iba a hacer, así como que asigné una letra para cada lado, que no tenía letra y… y pues, o sea me había preguntado que cuál había creído que eran los parámetros. Pues los parámetros son AC y BC, porque esos siempre permanecen igual, y ya los demás son los variables entonces ya como que primero empecé a fijarme en los ángulos ¿no? o sea para ver si… si esos podían hacer algo. No sé.*

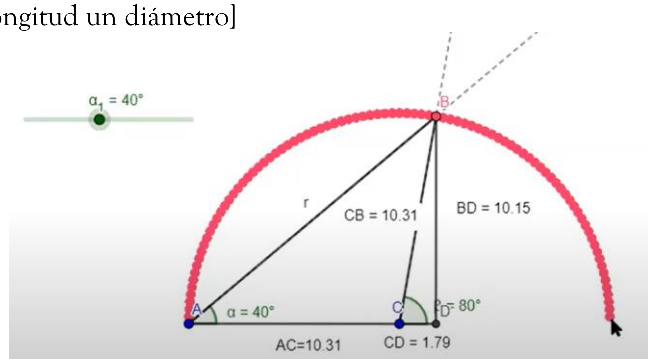
L28. **E3**: *Eh después me acordé del de ayer. Y… como que no sé empecé a relacionar con ángulos inscritos y pues no sé, tomé en cuenta también el… esta partecita de acá.* [Señala con el puntero el ángulo que se forma con la prolongación de los lados AB y AD] *Eh del… lo que se prolonga ¿no? No sé empecé a ver todo.*



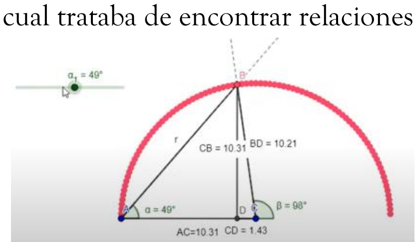
L30. **E3**: *Ajá y… como que empecé a… querer relacionar en este… el… el CD.* [señala con el puntero el segmento CD]

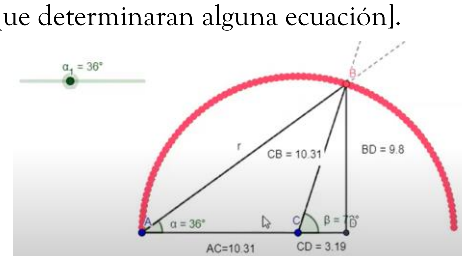


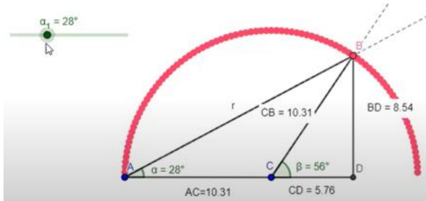
L31. **E3**: *Y… sí ajá y como que me quería inventar igual otro… otro punto que estuviera pegado al otro lado, de tal manera que se formara un diámetro.* [Señala con el puntero el extremo derecho donde se dibuja el rastro del punto B y extiende las manos indicando un segmento que tenga como longitud un diámetro]

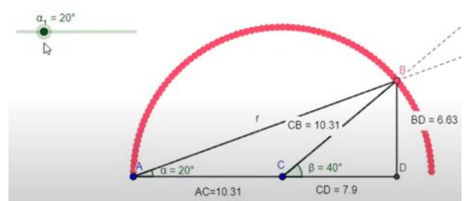


L33. **E3**: *Ajá para poder hacer una operación entre CD y AC ¿no? diciendo a… esto de… CD es igual a… el diámetro menos AC. Y así, igual no sé como que quería encontrar que hubiera alguna proporción entre BD y los demás o CD y los demás ¿no? o sea no proporciones, sino como que estuviera relacionado de alguna forma. De que restándolo, por ejemplo, restando CD, eh que en ese caso es 10.31 menos CD que es 1.79 me daría no sé algún resultado que estuviera relacionado con BD o A… ajá y intercambiando así operaciones ¿no? y después me fijé en la* r *¿no? que dije, a ver en este desconozco totalmente cuánto vale. ¿Cómo podría hallarlo? y pues no sé empecé diciendo que tal vez la suma de AC o CD más BD era el eh* r *por qué, por ejemplo, aquí… […]… se supone que hice algo para que resultara que* r *era igual a AC más BD ¿no?* [Durante la explicación el estudiante modifica la figura para ilustrar el proceso que siguió, en el cual trataba de encontrar relaciones que determinaran alguna ecuación].

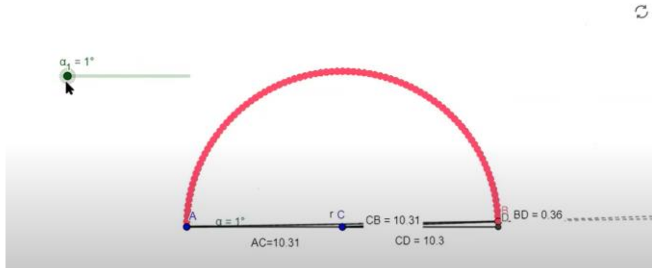




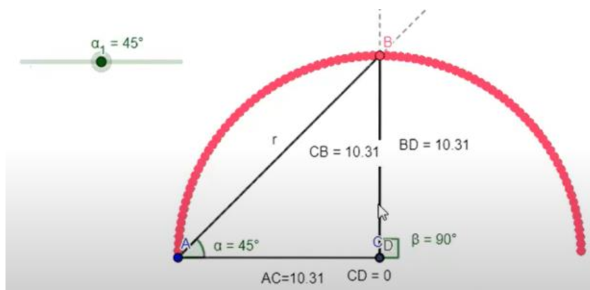




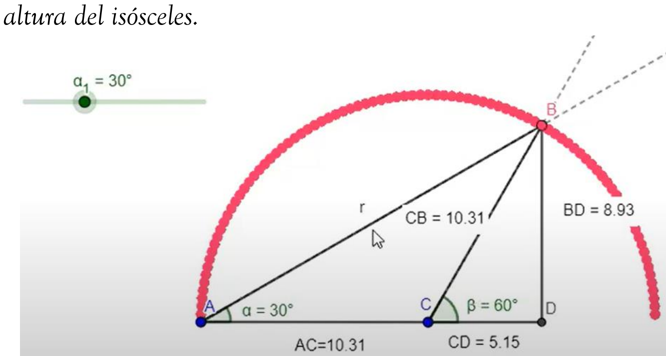
L34. **E3:** *Y porque como que de alguna manera me cuadró de que siempre se iba acercando un poquito a poquito y resultaba que una vez que llegara aquí, o sea, me cuadraba todo* [modifica la figura para ilustrar que cuando el ángulo $\alpha \rightarrow 0$, $r \rightarrow AC + AD$].



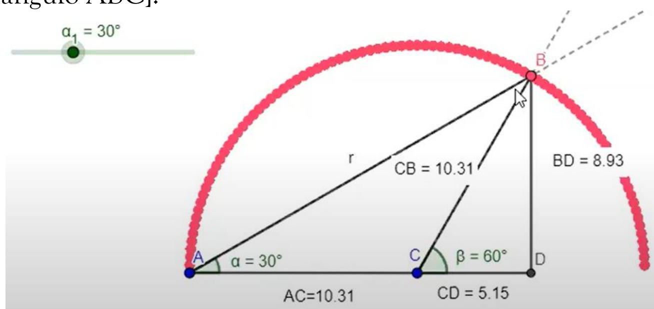
L35. **E3:** *Pero como que se… se destruía toda mi operación cuando se ponía así de esta forma* [modifica el applet para mostrar el caso donde se forma un único triángulo rectángulo isósceles]. *Ya no me acuerdo muy bien porqué pues se destruía, pero pues no… no… eso no me funcionó.*



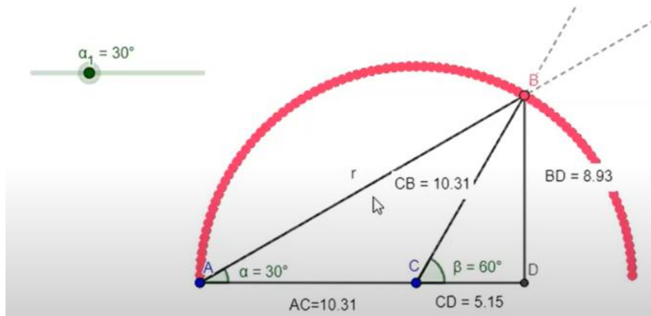
L36. **E3:** *Luego empecé a ver si la suma de AC más CD me daba r. Y así empecé pero pues no llegue a nada al fin y al cabo y luego no sé cómo se me ocurrió dividir el… el triángulo isósceles en… en… a la mitad que en este caso sería la altura* [simula con el puntero el trazo de la altura del triángulo ABC sobre AB], *o sea, por ejemplo, el punto medio de r y prolongarlo para que quede a la altura del isósceles.*



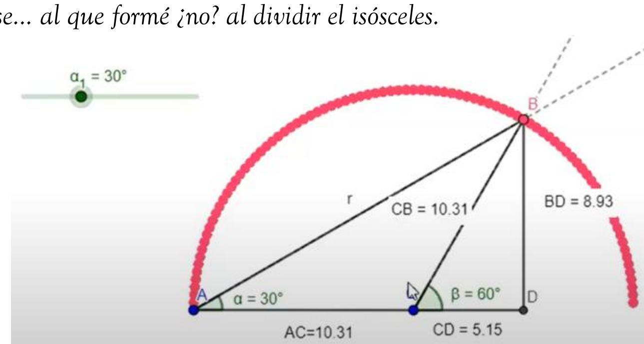
L37. **E3:** *Y me di cuenta que el triángulo que se formaba como uno de los triángulos que se formaban al dividirlo eran proporcionales, o eran semejantes al triángulo ABD, o sea el gigante eh ¿por* *qué? porque, por ejemplo, aquí sabemos que este… este angulito de acá es α.* [señala con el puntero el ángulo ABC].



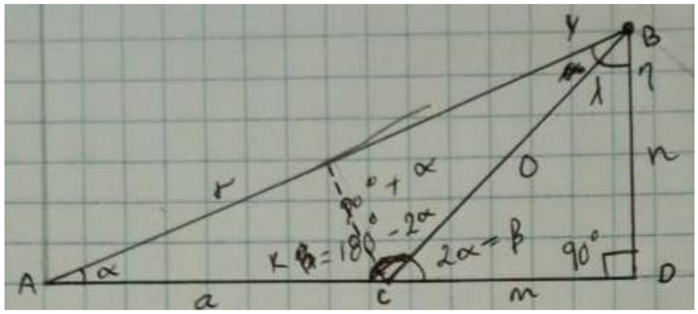
L38. *Aquí* [ilustra con el puntero un punto sobre r, el cual sería un vértice de un triángulo] *pues se va a formar lógicamente un ángulo de 90 grados,*

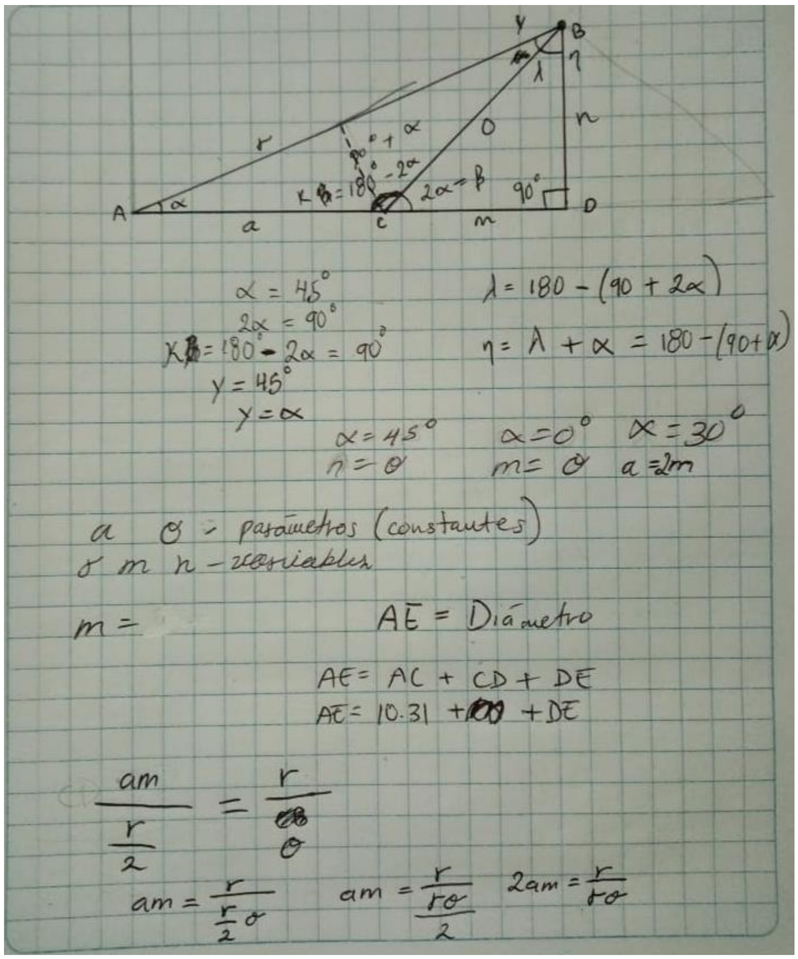


y pues obviamente si ya tenemos asignados los dos ángulos de acá, pues el de aquí [señala con el puntero el ángulo ACB] *va a resultar lo mismo que el… que el del grande ¿no? porque pues el del grande aquí tiene uno de 90, aquí tiene α y aquí tiene pues esta de… uno igual al… al de… al que se… al que formé ¿no? al dividir el isósceles.*

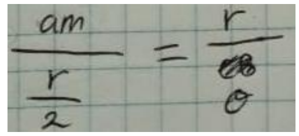


Posteriormente, todo lo descrito por el estudiante corresponde con lo presentado en la siguiente imagen recuperada de su hoja de trabajo:



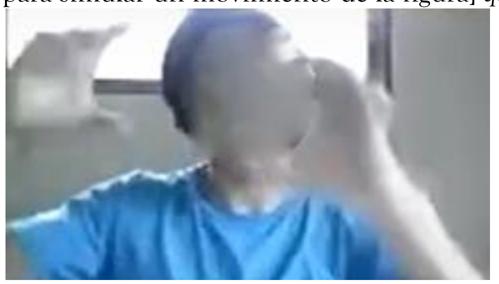


L39. **E3:** *Y ya con eso pues puede sacar como que una ecuación, en la que podía de esa forma relacionar al sacar una razón de proporcionalidad de esos dos triángulos semejantes que ya tenía porque es lo que trataba de hacer igual. Ver cómo sacar una razón de proporcionalidad, porque igual como me puso…me… se ponía el documento que considere que la vez pasada hiciste esto, y esto y esto, o sea de sacar la razón de proporcionalidad, y estaba viendo cómo relacionar los lados, pero esos dos triángulos no eran semejantes en nada. Y entonces está de… pues me di cuenta que, por ejemplo,* am*… ah pero perdón es que* am *es…* m *es mi… es mi letra. A ver, por ejemplo, esta de AD entre eh* r *entre 2 es igual a* r *entre eh o… entre… esto ¿cómo era?… entre CB ¿ok?*



L40. **E3**: *O sea AE... Eh AD entre r entre 2 es igual a r, entre CB porque pues esto... este... es el lado que le corresponde.*

L41. **E3**: *Ahora si orientamos el triángulo, este que está así, y la orientamos de la misma forma* [mueve las manos para simular un movimiento de la figura] *que el grande...*



L42. **E3**: *Pues r entre* [mueve la mano para ilustrar el lado AB del triángulo ABD]*... quedaría entre CB ¿no?*

L43. **E3**: *Y ya de esa forma pude sacar una... una igualdad y ahí ya pues desarrollé ¿no? y AD es igual a r entre r entre r dos* [con la mano hace referencia a un segmento que construyó que tiene como longitud $\frac{r}{2}$], *por o. AD es igual a... eh... ¿cómo se dice?... r entre ro entre 2 y al final me quedó así. Lo más simple posible fue [...] 2AD es igual a r entre ro, entre rCB.*

L50. **E3**: *Y pues al final quedaría entonces dos por a más CB es igual a r entre ro.*

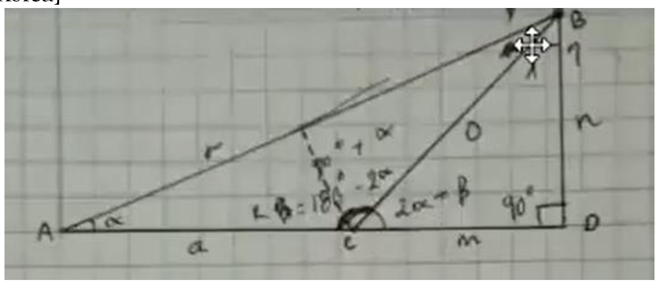
A propósito de la relación que propone el estudiante, el investigador genera una interacción para verificar si esa relación cumpliese con las condiciones planteadas en la situación, a saber, una propiedad geométrica que involucre al punto B y una ecuación derivada de esa propiedad geométrica y que sea expresada en términos de parámetros y variables. La lógica es similar a la que empleó con E1 y E2, al solicitar que al momento trate de responder a estas condiciones.

L51. **I**: *Ok. r entre ro. Ok. Bien, vamos a revisar, por ejemplo, en las instrucciones. [...]. Con las instrucciones de lo que decía, por ejemplo, veamos, veamos las condiciones que dice en la parte* *de la explicación que está arribita ¿no? dice: la idea es determinar una propiedad geométrica que involucre al punto b. Entonces vamos a revisar lo que tienes y, preguntarnos esa relación que tienes, que estás proponiendo allá, ¿involucra al punto b? por ejemplo, es una condición ¿no? habría que revis… vamos a checarlo en tú… en… en la imagen.*

L52. *E3: Nada más como aclaración. O es este, este CB.*

L53. *I: ¿O es qué perdón?*

L54. *E3: CB, o sea este de acá.* [señala con el puntero el segmento CB en su imagen en la hoja de trabajo física]



L55. *I: Ahhh ya, ya, ok.*

L56. *E3: O igual y podría ser a ¿no? porque pues miden lo mismo.*

L57. *I: Exacto. Ok. O es… es digamos a. Ok, entonces sería ar. Bien… Ok. Entonces, esa relación que estás estableciendo, por ejemplo, dónde está la proporción am es a r medios o r entre dos, es igual a r entre o. Esa relación digamos, dónde, eh ¿involucra digamos eh las formas o las figuras donde esté estem o pertenezca el punto b?*

L58. **E3:** *Eh sí, sí involucra por qué… esto de… o sea cómo… ¿a qué se refiere con… con eso? si yo… o sea yo sí involucra porque pues la… al fin y al cabo, el… el triángulo grande ¿no?* [mueve las manos para referirse a un triángulo] *el triángulo rectángulo más grande,*

L59. **E3:** *pues se… parte ¿no? de B. O sea B es parte de uno de sus vértices.*

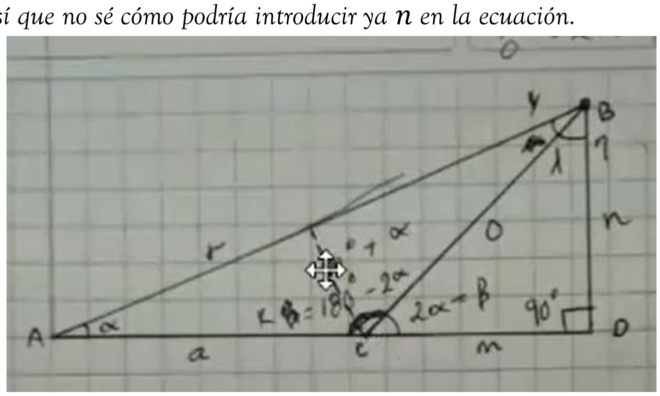
L60. **I**: *Exacto. Mjummm. Ok.*

L61. **E3**: *Y pues en este caso eh* c, *eh representaría AB en el cuadrado más pequeñito ¿no? que se forma.* [Con la mano hace referencia a un triángulo].

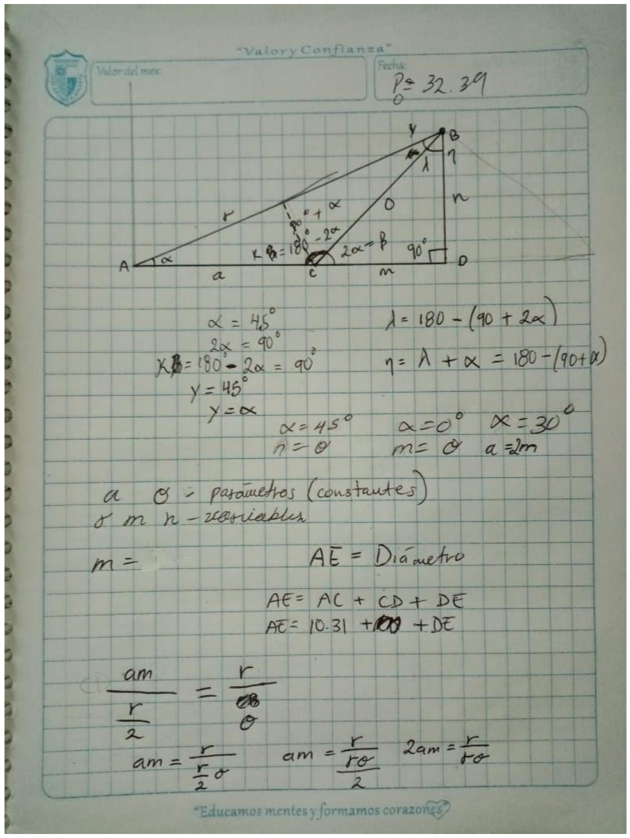
Nótese que el investigador no profundiza en la respuesta afirmativa del estudiante, por el hecho de que no identifica una forma de contradecir lo que menciona el estudiante.

L62. **I**: *Ok. Primera condición entonces. Segunda dice: ahora dice: posteriormente identifica una relación geométrica que involucre a los parámetros y las variables y que se derive en una ecuación. Entonces tenemos que en la imagen que tienes tú mencionas que hay variables* m *y* n *¿ok? esas dos, tanto* m *como* n, *¿están involucradas en tu ecuación?*

L63. **E3**: *No. No la involucré aquí. Pero pues, por ejemplo, cómo puedo decir… igual y esta… esta línea punteada de acá, eh o sea representaría en este caso a* n *¿no? o sea sería proporcional a* m. *Pero ahora sí que no sé cómo podría introducir ya* n *en la ecuación.*



L64.



L65. **I**: *[…] ¿qué otra propiedad geométrica identificas allá en ese… en esa figura que… donde claro esté involucrado en el punto b? O sea, a parte de esa que ya la… que ya identificaste ¿puedes identificar alguna otra?*
L66. **E3**: *¿En cuál figura?*
L67. **I**: *En la completa.*
L68. **E3**: *¿Alguna propiedad geométrica que qué?*

El investigador inicia induciendo al estudiante a reconocer la propiedad de Pitágoras.

L69. **I**: *Que también puedas identificar allá… es decir, por ejemplo, si te fijas en el triángulo, digamos, completo eh ABD, por ejemplo, ¿qué propiedad tiene ese triángulo?*
L70. **E3**: *Mmmmmm… pues es rectángulo* ☺.
L71. **I**: *Ok. Ok. Es rectángulo. Si es un triángulo rectángulo, entonces ¿qué propiedad debe cumplir? es decir, qué… ¿qué puede derivarse de que sea un triángulo rectángulo?*
L72. **E3**: *¿Teorema de Pitágoras?*
L73. *I: Puede ser… ok. Entonces ¿qué pasa?… fíjate ¿qué pasa si aplicas el Teorema de Pitágoras allá?*
L74. **E3**: *Ah puedo hallar* r.

El investigador le da tiempo al estudiante para que trabaje con la propiedad de Pitágoras. Seguidamente cuestiona al estudiante si cumple con la segunda condición.

L79. **E3**: *Me quedó* r *al cuadrado es igual a* m*… a más* m *perdón… al cuadrado, más* n *al cuadrado.*

L80. **I**: *Ok. Entonces, por ejemplo, ¿podrías decir si es… esa ecuación que tienes allá cumple con los criterios? es decir, que la figura que estás viendo, es decir, involucra al punto B, y dos, si esa ecuación incluye a los parámetros y a las variables.*
L81. **E3**: *Sí, sí se puede decir.*
L82. *I: Ok.*
L83. *E3: Pues sí.*

13.2. Transcripciones de los textos de estudiantes

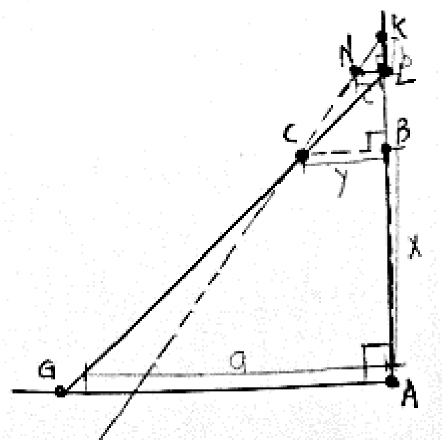
13.2.1. Transcripciones de los textos de estudiantes de la Actividad 1

13.2.1.1. Texto de E1

Plantea los datos

-Se debe de involucrar las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)

-Se posee un applet que muestra lo siguiente



-Las variables son las que se muestran en [sic] el lápiz

-Sabemos que "a", "y" y "c" son paralelas entre sí. Así como el segmento $\overline{KA}$ es perpendicular a ellos.

4. buscar relaciones

-Por si no se ha notado en el applet se generan distintos triángulos:

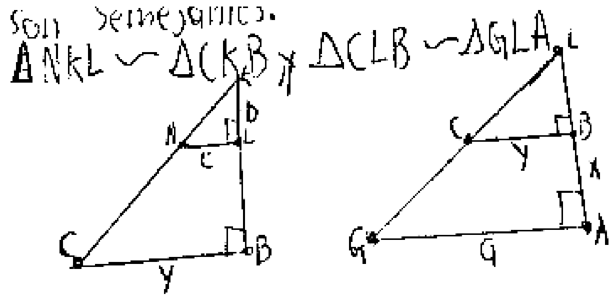
-Al observar detenidamente, notamos que algunos triángulos son semejantes:

ΔCKB

ΔNKL

ΔGLA

ΔCLB



-Al saber que son semejantes, podemos plantear su proporción de la siguiente manera:

ΔNKL y ΔCKB	ΔCLB y ΔGLA
$\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$	$\frac{y}{a} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$

-Y nos quedamos con las proporciones que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)

ΔNKL y ΔCKB	ΔCLB y ΔGLA	*Tomemos $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$ debido a que $\overline{LA}$ contiene x.
$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$	$\frac{y}{a} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$	

-Debemos ~~despejar las proporciones para deshacer~~ reemplazar los datos que importan para poder plantear la ecuación, empezamos con $\overline{KB}$, esto se debe a que tanto b, $\overline{KB}$, $\overline{LB}$ y $\overline{LA}$ conforman una misma recta: $\overline{KA}$, y al despejar $\overline{KB}$, se nos facilitara el despejar $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$.

-Planteamos:

$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$ → Declaramos incógnita → $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$ → regla de 3 → $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$ → Sustituimos y despejamos

$$\frac{c}{y} = \quad \leftarrow \frac{c}{y} = \frac{\frac{b}{1}}{\frac{by}{c}} \quad \leftarrow \frac{c}{y} = \frac{b}{\frac{by}{c}}$$

-Al conocer el valor de $\overline{KB}$ Y al apreciar detenidamente el applet, podemos concluir que $\overline{LB} = \overline{KB} - b$ y $\overline{LA} = \overline{LB} + x$

-Entonces sustituimos en la proporción con el valor real de $\overline{KB}$:

$$\overline{LB} = \left(\frac{by}{c}\right) - b, \overline{LA} = \left(\frac{by}{c} - b\right) + x$$

-Y sustituimos para finalmente despejar

$$\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)} \rightarrow y\left(\frac{by}{c} - b + x\right) = a\left(\frac{by}{c} - b\right)$$

$$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$$

$$\downarrow$$

$$\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$$

$$by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$$

$$by^2 = aby - abc + bcy - cxy$$

$$y^2 = \frac{aby - abc + bcy - cxy}{b}$$

$$y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$$

13.2.1.2. Texto de E2

Ecuación de Descartes

explicación

La ecuación que Descartes desarrolló buscando la relación del punto C involucrando a, x, b, c, y tomando en consideración que:

$KL - b$

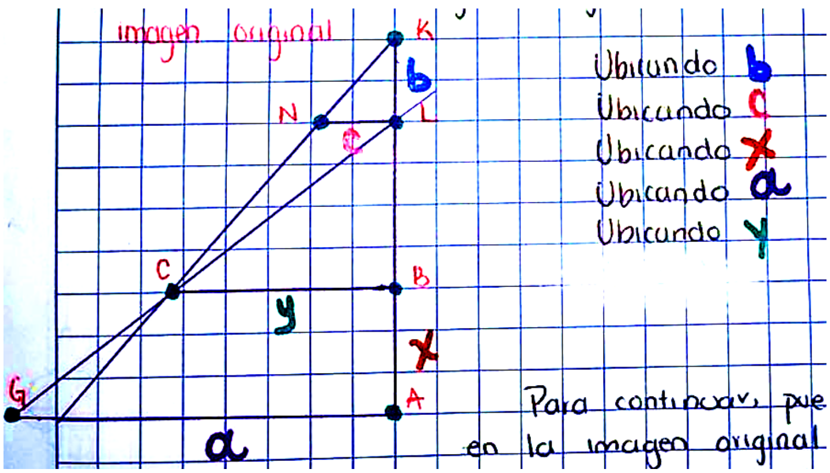
$NL - c$

$BA - x$

$GA - a$

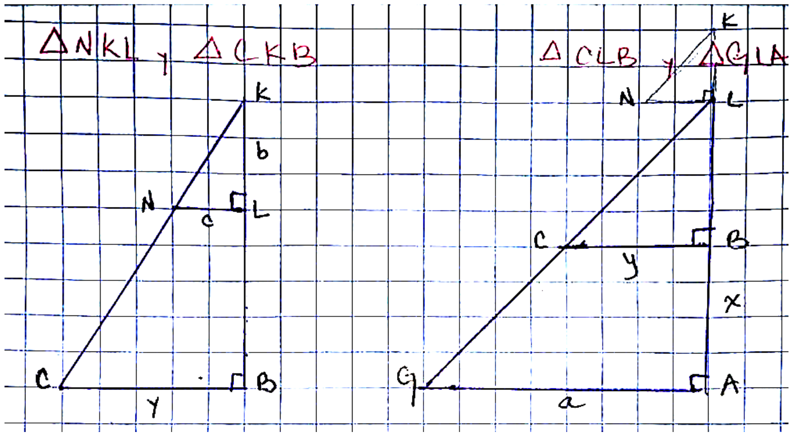
$CB - y$

Teniendo en cuenta esta consideración, designa los valores señalados en la imagen original



Para continuar, puedes observar que en la imagen original se pueden encontrar en su estructura dos pares de triángulos semejantes donde deberás de considerar que para que cumplan esta condición:

1. Los triángulos tienen los mismos ángulos
2. Los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales (la misma)



Considerando las condiciones que deben cumplir los triángulos semejantes deberás escribir las proporciones que cumplen cada par.

ΔNKL y $\Delta CKB = \frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$

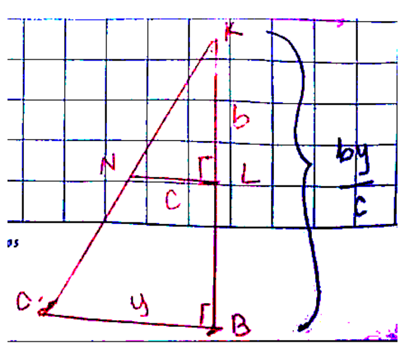
Considera que todos los lados deben tener la misma proporción. Por eso tienes que igualar las cantidades

ΔCLB y $\Delta GLA = \frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$

Primero trabajaremos con la primera equivalencia del primer par de triángulos, ΔNKL y ΔCKB, donde despejarás los datos conocidos del desconocido.

$$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB} \;/\; cKB = by \;/\; \frac{\cancel{c}KB}{\cancel{c}} = \frac{by}{c} \;/\; KB = \frac{by}{c}$$

Teniendo en cuenta lo podemos ubicar en nuestro dibujo del par:

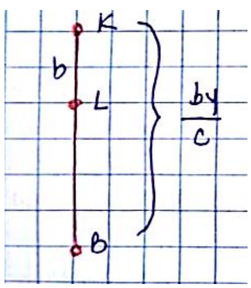


Luego realizaremos el mismo ejercicio, despejando la equivalencia del segundo par de triángulos dejando sola a la longitud LA

$$\frac{LB}{LA} = \frac{y}{a} \;/\; LBa = LAy \;\;/\;\; \frac{LBa}{y} = \frac{LA\cancel{y}}{\cancel{y}} \;\;/\;\; \boxed{\frac{LBa}{y} = LA}$$

Para poder sustituir los valores de LB y LA de la equivalencia encontradas del segundo par es necesario buscar la que represente cada longitud.

Para la LB debemos de considerar que se encuentra ubicada en el primer par de triángulos donde KB resultó ser igual a $\frac{by}{c}$, por lo tanto, para encontrar el valor de LB le podemos restar a $\frac{by}{c}$ la longitud KL que tiene el valor de b quedando de esta manera:

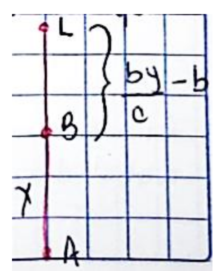


,por lo tanto, para encontrar el valor LB le podemos restar a $\frac{by}{c}$ la longitud KL que tiene el valor de b quedando de esta manera

$$LB = \frac{by}{c} - b$$

Finalmente para obtener el valor de LA es necesario considerar que la longitud LB también forma parte del segundo par de triángulos, pero deber de agregar el valor de la longitud BA que es conocido como x, quedando de esta manera:

$$LA = \frac{by}{c} - b + x$$



Por último, sustituye los valores de la equivalencia $LA = \frac{LBa}{y}$ Con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB y resuelve la equivalencia:

$$\frac{by}{c} - b + x = \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$$

$$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$$

Para concluir y encontrar la ecuación más reducida como la de Descartes despeja la y^2.

$$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$$

$$\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$$

$$by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$$

$$\frac{by^2}{b} = \frac{aby - abc + cby}{b} \frac{-cxy}{b}$$

$$y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$$

13.2.1.3. Texto de E3

Primero que nada, antes de usar de lleno a la determinación de la ecuación, se tiene que identificar ciertas regularidades que existen en la construcción. si notamos, se puede encontrar que el triángulo formado por NKL es semejante al formado por CKB, ya que sus ángulos son iguales y, por lo tanto, tienen una razón de proporcionalidad. lo mismo ocurre en los triángulos CLB y GLA. Ahora, antes de pasar a otro paso, se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos, pues son las que usarán en la ecuación. en primer lugar, el segmento GA será la $\underline{a}$, el segmento KL será la $\underline{b}$, el segmento NL será la $\underline{c}$, el segmento BA será $\underline{x}$ y, por último, el segmento CB será $\underline{y}$. Una vez hecho esto, se podrá identificar con más facilidad las relaciones existentes entre estos segmentos.

Lo que se procederá a hacer empezar a sacar las razones de proporcionalidad de cada triangulo. se empezará con NKL y CKB. Como se dijo, al tener los ángulos iguales, los lados serán proporcionales, entonces, se pueden deducir las siguientes razones de proporcionalidad:

$$\frac{CK}{NK} = \frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}$$

se crean estas igualdades, pues todos los lados poseen la misma razón de proporcionalidad. Posteriormente, que tienen que sustituir algunos segmentos con las literales que se asignaron anteriormente, con lo que quedaría de esta manera:

$$\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$$

Ahora, para poder aislar las literales y que no nos estorbe KB, tenemos que pasar la $\underline{b}$ al lado izquierdo siguiendo las reglas algebraicas. Quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{y}{c} b = KB$$

Con esto, ya tendríamos nuestra primera parte de la ecuación. lo que sigue es trabajar con los otros dos triángulos que se forman, igualmente semejantes entre sí. Tenemos a los triángulos GLA y CLB. De la misma manera, identificamos las razones de proporcionalidad de los lados y deducimos lo siguiente:

$$\frac{GL}{CL} = \frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}$$

~~Ahora, se sustituyen algunos segmentos con las literales y nos queda de esta forma:~~ $\cancel{\frac{a}{y}}$~~.~~

Ahora, tenemos que sustituir algunos segmentos con las literales. El problema acá, es que la $\underline{x}$ no viene representando a un segmento como tal de un triángulo, sino a una parte del segmento LA, que vendría siendo BA. Por lo tanto para poder agregar la $\underline{x}$ a nuestra ecuación se tiene que agregar dentro de una operación. Es decir, para representar el segmento LA, lo que tenemos que hacer es sumarle a la $\underline{x}$ lo que falta de dicho segmento, o sea, LB. Así, ya podemos representar nuestra razón de proporcionalidad e igualarla con la que resulta de $\underline{a}$ e $\underline{y}$. Nos queda así:

$$\frac{a}{y} = \frac{LB + x}{LB}$$

Claro está, no podemos dejarlo así, ya que el término LB nos estorba, por lo que debemos de buscar la forma de representarlo mediante literales. ~~sabemos que el segmento.~~ Si observamos, KA es un segmento que está formado por $KL + LB + BA$. en este caso, el segmento que queremos representar es $LA\ (LB + BA)$ y para eso tenemos que hacer a un lado KL. Sabemos que $KL = b$ y que $KB = \frac{y}{c}b$. Si a KB le restamos KL nos quedaría el segmento LB, el cual queremos representar. Entonces, si representamos la resta $KB - KL$ con las literales, tendríamos esto:

$$\frac{y}{c}b - b = LB$$

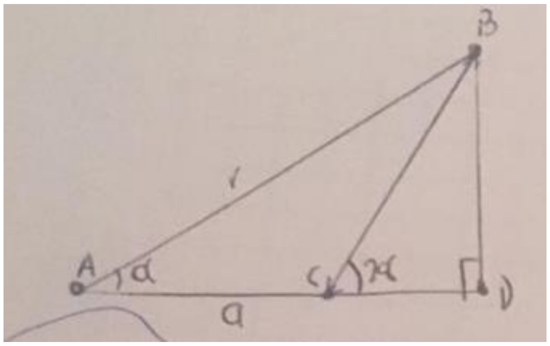
con esta igualdad ya se puede sustituir a LB en nuestra anterior igualdad. Si lo sustituimos, la igualdad resultante sería esta:

$$\frac{a}{y} = \frac{\frac{y}{c}b - b + x}{\frac{y}{c}b - b}$$

de esta forma, se obtiene una ecuación en la que todas las literales están incluidas. Lo que quedaría por hacer son algunas operaciones algebraicas ~~algunas operaciones algebraicas~~ para que la y^2 quede sola y tendríamos así la ecuación a la que descartes llegó.

13.2.2. Transcripciones de los textos de estudiantes de la Actividad 2

13.2.2.1. Texto de E1



La siguiente figura se construyó de la siguiente forma:

C2. Se construye un segmento $\overline{AD}$.
C3. Sobre el segmento $\overline{AD}$ se construye un ángulo con vértice en A que denominaremos α.
C4. Se ubica un punto C sobre el segmento $\overline{AD}$, lo cual determina el segmento $\overline{AC}$, cuya medida se establece como a.
C5. Con vértice en C se construye otro ángulo que tenga el doble de la medida de α, es decir, 2α.
C6. Por el paso anterior, se determina un punto de intersección B entre los ángulos α y 2α. Además, la medida del segmento $\overline{AB}$ queda también determinada por esta construcción, por lo que se denomina r.
C7. El segmento $\overline{BD}$ es perpendicular a el segmento $\overline{AD}$.

-Primero identificaremos las variables y parámetros, que quedaría algo así:

variables: $\overline{CD}$, $\overline{BD}$

parámetros: r, a, $\overline{CB}$

debemos armar una relación geométrica que involucre a estos parámetros y variables y que pueda derivar en una ecuación algebraica.

Si nos damos cuenta en la figura del triángulo CBD es un triángulo rectángulo, por lo que podemos usar el teorema de Pitágoras:

$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \;\rightarrow$ y como $a = \overline{CB} \therefore\rightarrow a = \sqrt{(CD^2 + BD^2)}$

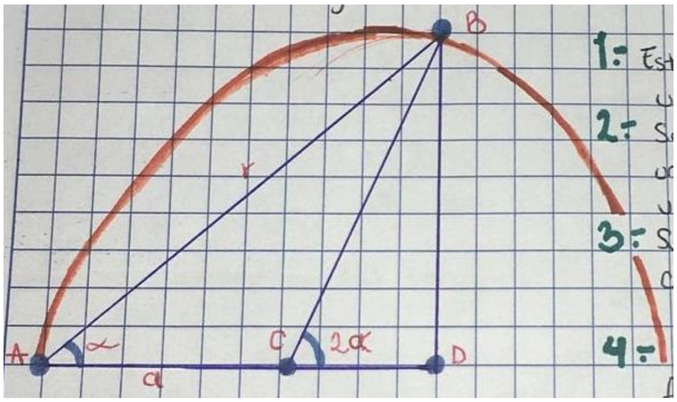
$CB = \sqrt{(CD^2 + BD^2)}$

13.2.2.2. Texto de E2

El punto B

Explicación

Se ha construido una figura teniendo en cuenta que:



C1. Está constituida de un segmento AD

C2. Sobre AD se forma un ángulo con vértice a llamado α

C3. Se ubica un punto C sobre AD AC→ a

C4. Con vértice en C se forma otro ángulo que medirá el doble que α es decir 2α

C5. Se determinará un punto B entre los ángulos α y 2α

C6. La medida AB queda determinada y denominada r

Hay que notar que al modificar el valor del ángulo α el punto B va formando una trayectoria de media circunferencia como se muestra en color naranja en la imagen.

Tomando en cuenta eso, se deberá determinar una ecuación algebraica representando el segmento B, considerando que BD es perpendicular a AD.

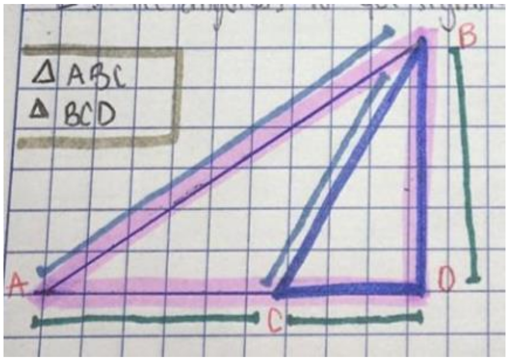
Primero, debes determinar que propiedades que conforman la figura son parámetros (su valor es constante, no cambia) y cuáles son variables (su valor cambia). Para esto deberás considerar que las medidas de AB, BD y CD dependen del valor del ángulo α; mientras que AC y CB tienen una medida continua de 10.31.

VARIABLES ~~/AB~~/BD/CD

PARÁMETROS /AC/CB

Ten en cuenta que para denominar a las longitudes se les representan con variables las letras (x, y) ~~porque para AB ya se usa la r~~, y para los parámetros las letras a y b.

Para poder continuar una relación geométrica que involucre a los parámetros y variables, es necesario que evalúes la imagen del inicio donde podrás percatar que está conformado por 2 $\Delta's$ rectángulos, lo que significa que:



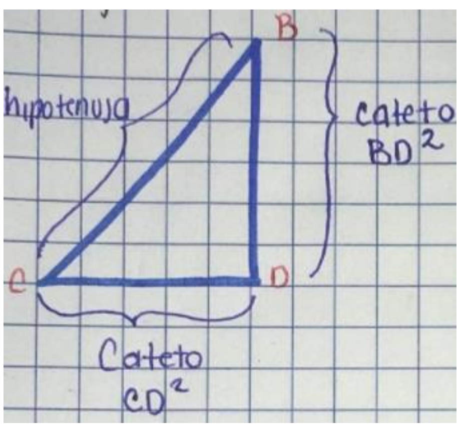
Los triángulos rectángulos tienen como principio que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Recordando que:

Catetos son los lados del Δ que conforman el ángulo de 90°

hipotenusa es el lado que uno de los catetos.

Conociendo esto, busca el triángulo que contenga a las variables y parámetros antes encontrados para posteriormente formular la teoría de pitágoras con el principio de los triángulos rectángulos. En este caso será el ΔBCD.



hipotenusa ↓

$$BD^2 + CD^2 = BC^2$$

Finalmente reemplaza las actitudes de la ecuación con las letras que las representan

$BD - x$

$CD - y$

$BC - b$

$$BD^2 + CD^2 = BC^2$$

↓

$$x^2 + y^2 = b^2$$

13.2.2.3. Texto de E3

Se construye una figura de la siguiente manera:

1. Se construye un segmento AD.
2. Sobre el segmento AD se construye un ángulo con vértice en A que denominaremos α.
3. Se ubica un punto C sobre el segmento AD, lo cual determina el segmento AC, cuya medida se establece como a.
4. Con vértice en C se construye otro ángulo que tenga el doble de la medida de α, es decir, 2α.
5. Por el paso anterior, se determina un punto de intersección B entre los ángulos α y 2α. Además, la medida del segmento AB queda también determinada por esta construcción, por lo que se denomina r.

Ahora, se darán 2 procedimientos que permitirán deducir una ecuación que involucre al punto B, respecto de los parámetros y variables. Asimismo, la ecuación involucrará a los parámetros y variables.

Antes que nada, se necesita definir cuáles son los parámetros y cuáles las variables. Pero para eso, asignaremos literales a aquellos segmentos que no tienen asignado ninguna. tenemos que el segmento AC es denominado $\underline{a}$ y el segmento AB $\underline{r}$. Se denominará al segmento CD como $\underline{m}$, al CB como $\underline{o}$ y al DB como $\underline{n}$.

Si notamos, al modificar el ángulo α, la construcción es modificada también, pero hay algunos segmentos y cantidades que determinan la construcción, es decir, parámetros. Las cantidades que resultan diferentes por esta determinación son las llamadas variables. Por lo tanto, se puede afirmar que $\underline{a}$, $\underline{o}$ y $\underline{r}$ son parámetros, pues estos determinan la construcción. En cambio, m y n resultan afectadas por esas determinaciones. Una vez establecidas las variables se puede proceder a la deducción de la ecuación.

Primer método: Propiedades del triángulo isósceles

Al saber que 2α será determinada por el valor de α, podríamos crear un ejemplo hipotético de lo que pasaría hacia α le asignamos el valor de 45°. En ese caso, 2α = 90°. Así podríamos saber el valor del ángulo complementario de 2α, el cual sería de la misma manera 90°. Con esto, ya se sabría la medida de 2 de los ángulos que forman el triángulo ABC, y podríamos conocer la medida del otro, que tendría que ser 45°. Observamos que el ángulo opuesto a α mide lo mismo, asignemos la cantidad que le asignemos a α en nuestro “experimento mental”. Con esta propiedad del triángulo ABC tendría un carácter de triángulo isósceles y, por consiguiente, los lados AC y AB o, mejor dicho, $\underline{a}$ y $\underline{o}$ medirían lo mismo.

Dicho esto, si nosotros dividimos este triángulo con la altura formada con respecto a $\underline{r}$ y el punto C, los triángulos resultantes de esa división serían semejantes al triángulo ABD, pues poseen los mismos ángulos, ya que se tiene uno de 90°, sabemos que tienen ambos el ángulo α y con estos dos determinados, el ángulo restante sería el mismo también. Teniendo esta información, se pueden sacar las razones de proporcionalidad que se forman a relacionar los lados, y de la igualdad resultante tener la ecuación. Al hacer la igualdad nos queda de la siguiente manera:

$$\frac{a+m}{\frac{r}{2}} = \frac{r}{o}$$

Al hacer algunas operaciones algebraicas y simplificar la ecuación, obtenemos esto:

$$2(a+m) = \frac{r}{ro}$$

Segundo método: Teorema de Pitágoras

Al tener un triángulo rectángulo, este va a tener una propiedad geométrica que está definida mediante el teorema de Pitágoras. Si asociamos y asignamos al teorema las literales que definen nuestros segmentos, obtendremos de igual forma una igualdad que definirá nuestra relación entre variables y parámetros. Nos quedaría así:

$$r^2 = (a+m)^2 + n^2$$

13.3. Análisis de la Actividad 2 en la Entrevista Basada en Tareas.

El proceso seguido para la Actividad 2 es el mismo que se siguió para la Actividad 1.

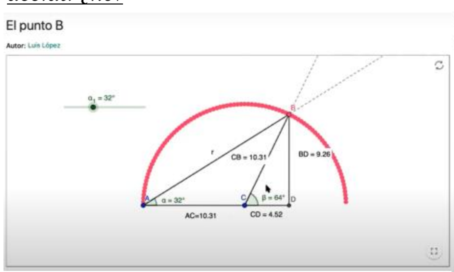
13.3.1. Primer nivel de análisis

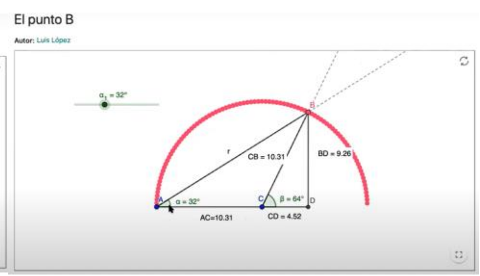
El proceso seguido para la síntesis en la Actividad 2 es el mismo que se siguió para la Actividad 1.

13.3.1.1. Síntesis del Proceso de E1

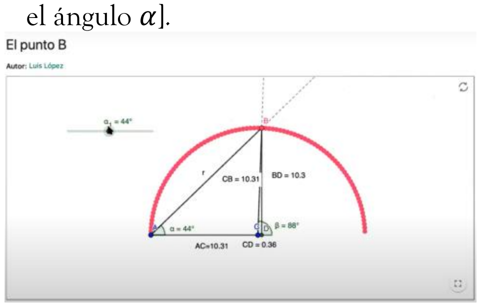
De acuerdo con la EBT, el estudiante comienza con la exploración del applet y la determinación de parámetros y variables (ver L2-L9). Durante esta etapa el estudiante muestra una concepción del parámetro y la variable centrada en la modificación o cambio de sus dimensiones al mover el ángulo α en el primer caso. Los parámetros son interpretados en términos de que sus dimensiones no cambien, mientras que para la variable se considera el cambio de sus dimensiones

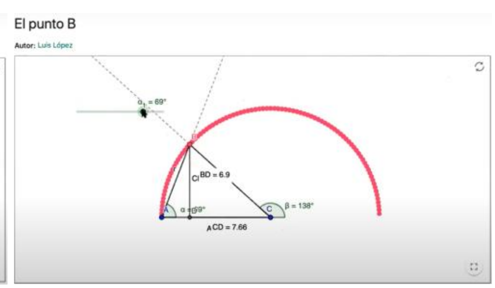
L5. **E1**: *Me doy cuenta de que la variable en sí involucra los ángulos, que serían α y β, y que serían* 2α. [Señala con el puntero los ángulos β y α respectivamente]. *Porque los… β ya serían una variable al ser parte de… al depender de. Y α pues es dependiendo del… del ángulo que yo decida ¿no?*

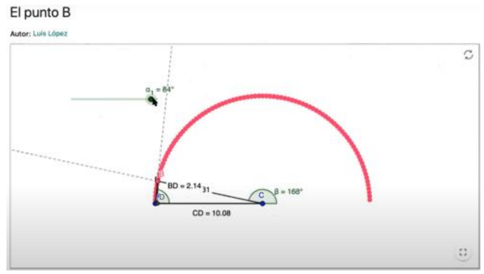




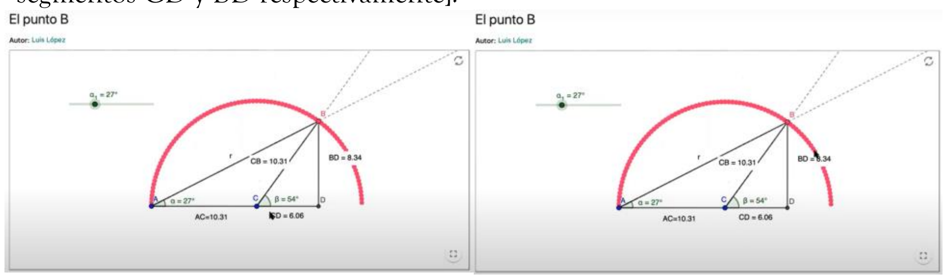
L6. **E1**: *Pero también lo que se modifica además de alfa sería la longitud de r, que aunque no se vea la longitud, se puede deducir al ver cómo voy cambiando el ángulo como r va disminuyendo o aumentando*. [mueve el deslizador para mostrar cómo la longitud r cambia al modificar el ángulo α].



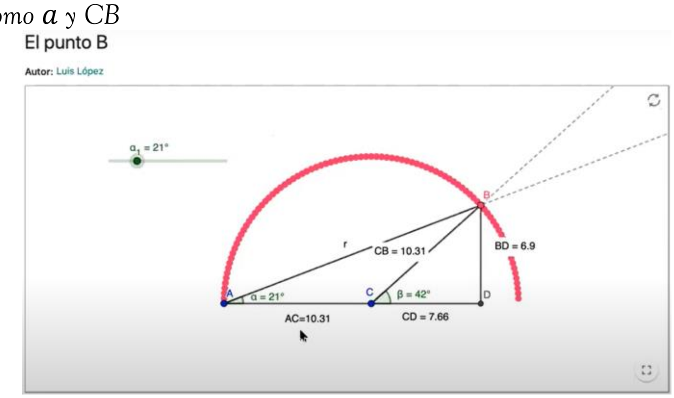




L7. **E1**: *Sin embargo, lo… al igual que CD y BD, que aquí claramente se ve debido a los marcadores, cómo va cambiando la… la longitud lo… la… el tamaño ¿no?* [señala con el puntero los segmentos CD y BD respectivamente].



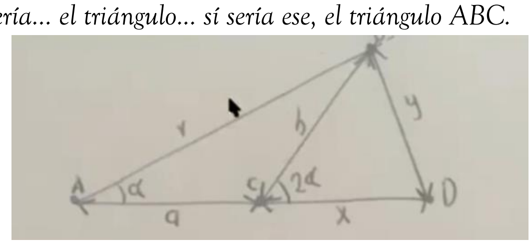
L8. **E1**: *Algo lo que nunca cambia sería AC* [señala con el puntero el segmento AC] *que fue definido como* a *y CB*



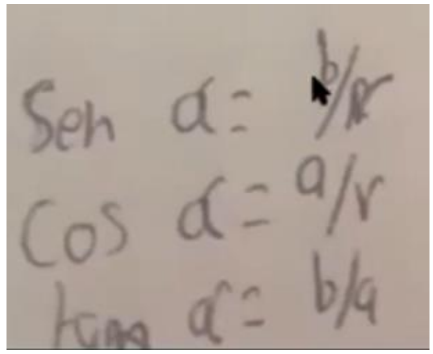
L9. **E1**: *Entonces, los parámetros serían* a *y CB y las variables serían* α β, r, *CD y BD.*

Posteriormente, el estudiante comenta que determinó dos relaciones. La primera geométrica y la otra, como él se refiere, trigonométrica. En el caso de la relación de Pitágoras, es aplicada de manera incorrecta al triángulo ABC (ver L11-L17).

L15. **E1**: *Entonces en base de esto tengo que relacionarlo con un* r *con teorema de Pitágoras, que ese* r *al cuadrado es igual a* a *al cuadrado más* c *al cuadrado, los catetos tomando en cuenta el triángulo AB… este sería… el triángulo… sí sería ese, el triángulo ABC.*

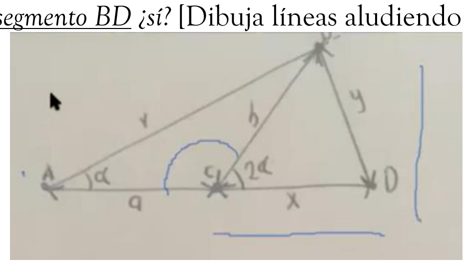


L17. **E1**: *y luego aquí intenté por trigonometría más abajito, pero pues no encontré nada claro, un poco.* [Hace referencia a las expresiones $Sen\ \alpha = \frac{b}{r}; Cos\ \alpha = \frac{a}{r}; tan\ \alpha = \frac{b}{a}$, las cuales no se cumplen dado que el triángulo ABC no es rectángulo].



Puesto que las relaciones no eran aplicables por el hecho de que se aplicaban a un triángulo que no era rectángulo, el investigador le hace ver este error y aborda estas dificultades (ver L18-L22), descartando ambos razonamientos y relaciones. No obstante, puesto que el investigador reconoce que la relación geométrica y la intención del estudiante son pertinentes para la solución, le recuerda que como dato en la construcción se tiene que los segmentos CD y BD son perpendiculares.

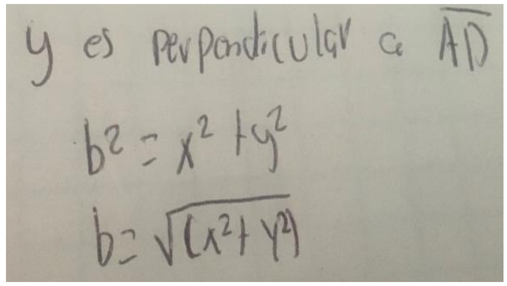
L23. **I**: *Pero, por ejemplo, sí te dan por dato, o sea, digamos, si quisieras probar con esta relación, sí te da como dato que, el… digamos, ésta… el segmento, creo que te dice CD, chécate en los datos, es perpendicular con el segmento BD ¿sí?* [Dibuja líneas aludiendo a los segmentos CD y BD]



L24. **I**: *Entonces, chécalo eh no recuerdo ahorita bien la instrucción. Entonces allá sí podría formarse un triángulo rectángulo y quizás te puede ayudar ¿sí? Entonces claro que, derivado de esta consideración, pues, esto digamos, este ya no lo cumplirían ¿no? o sea, estas tres relaciones que tienes aquí.* [señala las relaciones $r^2 = 2(AD - x)^2; r^2 = 2(AD^2 + x^2); r^2 = 2AD^2 + 2x^2$]

Posteriormente, el estudiante determina la ecuación empleando la relación de Pitágoras (ver L28-L34):

L30. **E1**: *Entonces sería esto de acá* [Muestra en la pantalla su hoja de trabajo con la ecuación]. *Entonces sabiendo que y es perpendicular a AD, o sea, BD es perpendicular a AD. Usamos teorema de Pitágoras, en el cual x al cuadro más y al cuadrado. b al cuadrado igual a x el cuadro más y el cuadrado, y se despeja tal que así.*



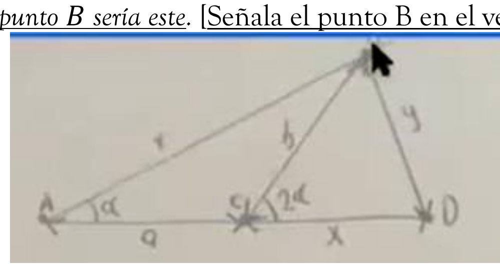
Posteriormente el investigador conduce al estudiante a reconocer si la ecuación determinada cumple con las condiciones solicitadas en la situación, a saber, el involucramiento del punto B en la relación geométrica (ver L35-L46) y que la ecuación derivada de esa relación involucre los parámetros e incógnitas (ver L47-L57).

L35. **I**: *Ok, perfecto. Entonces vamos a revisar lo que dice la instrucción a ver si, digamos, si la… lo que propones ya cumple con la condición. […]*:

L36. **I**: *Ok, dice… ok… la idea, […], es determinar una propiedad geométrica que involucre al punto B. Entonces veamos ¿tenemos eso ya? es decir ¿tengo una propia geométrica donde está involucrar punto B?*

L37. **E1**: *Está involucrado el punto B, al encontrarse B e y que b sería el segmento CB y y sería el segmento BD.*

L42. **E1**: *Este sería… el punto B sería este.* [Señala el punto B en el vértice del triángulo]



L45. **I**: *Ándale entonces allá, digamos, tenemos una propiedad geométrica que está involucrando el punto B ¿estarías de acuerdo o no?*

L46. **E1**: Mmmm *diría que sí lo involucra por al… al utilizar primero la figura geométrica que se forma con CBD, que es este triángulo rectángulo, aunque aquí no se traza como rectángulo. Luego se utiliza el segmento b y el segmento y que involucran que entre sí está son delimitados por el punto B.*

L47. **I**: *Ok, bien entonces podemos decir que ya tengo una propiedad geométrica que… donde está involucrado el punto B, que como tú dices está delimitado por ese triángulo donde B está involucrado. Ok, entonces cumplimos con eso.*

Nótese que para la segunda condición el investigador presenta dificultades para responder ante la explicación del estudiante, en la cual menciona que la ecuación no involucra todas las variables y parámetros identificados. Como puede observarse en la interacción, la idea del estudiante está vinculada con la instrucción de la actividad: "*La idea es determinar una propiedad geométrica que involucre al punto B, respecto de los parámetros y las variables. Para ello, el primer paso es determinar qué cantidades son parámetros y cuáles variables. Posteriormente, identifica una relación geométrica que involucre a los parámetros y variables, y que pueda derivar en una ecuación algebraica*".

Este hecho lleva al investigador a ser él quien mencione que la ecuación del estudiante cumple la segunda condición planteada.

L51. **E1**: *Estamos involucrando x e y, más falta involucrar a r y a al igual que estamos, también estas involucrando b, x e y, pero falta involucrar a r y a.*

L52. **I**: *Ok, entonces vamos a ver lo siguiente… fíjate, en efecto, digamos la instrucción, de… digamos, que igual no es muy precisa la instrucción, porque la idea no es que involucra todos, sino la intención es que involucres a las variables en términos de uno o más parámetros, es decir si con la… si yo tengo una relación, una propiedad geométrica, donde está involucrado al punto que me interesa y ya tengo la relación entre las dos únicas digamos las dos variables que me det… delimitan ese punto y dentro de esa relación hay algún parámetro… estem… que provino de la construcción inicial, entonces con eso ya podría, eh digamos determinar esa ecuación. Y si te das cuenta, eh tú decías allá que b es igual a ¿no? el b… be minúscula*

L53. **E1**: *b minúscula es igual a minúscula.*

L54. **I**: *Y entonces a es un parámetro ¿no? porque era el, de hecho, el valor inicial con el que se, de hecho, con ese inicio la construcción. Se puso un segmento AD y se ubicó un punto C que delimitó un parámetro, en este caso el valor de a, ¿sí? que es ese segmento AC. Entonces ese en sí mismo ya es el parámetro. Es un parámetro de la construcción. Entonces dado ese valor que tiene a, que de hecho, en la construcción es 10.31 ¿no? en la posición como inicial, eh toda la figura junto con el ángulo, porque también el ángulo va a ser conocido, va a conformar y va a delimitar los segmentos digamos que están formando allá. Entonces, podemos decir que dado que b es igual a a, ya estás involucrando en tu ecuación las dos variables y un parámetro.*

L55. **E1**: *Un parámetro.*

L56. **I**: *Entonces en sí misma, esa ecuación ya cumpliría con esos criterios y ¿qué significa? fíjate… que dado que yo conozco el valor de a ¿si? y si yo conociera por ejemplo alguno, eh el valor de x es decir un pedazo… un… el valor del segmento CD yo puedo saber con esa ecuación dónde estaría ubicado el punto B, porque puedo calcular el valor de y ¿si?*

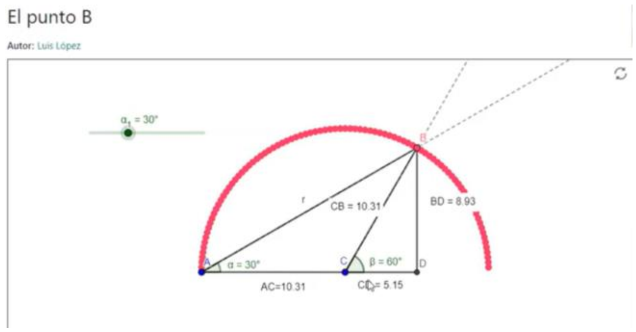
L57. **E1**: *Sí, sí.*

L58. **I**: *Exacto ¿no? es decir, conozco a y si yo conociera, ya sea x o y, pues yo podría saber exactamente dónde está ese punto, porque puedo calcular el otro o viceversa. Conociendo y, yo puedo saber exactamente dónde está ubicado el punto B ¿no? en x, porque… con esa relación que ya tienes ¿sí? entonces esa es la idea.*

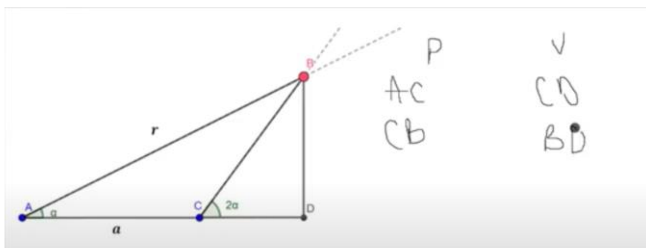
13.3.1.2. Síntesis del Proceso de E2

En la determinación de los parámetros y variables la estudiante atribuye el cambio a las variables y lo constante a los parámetros.

L3. **E2**: *O sea, según yo, los parámetros son los que no… o sea los que son constantes ¿no? O sea no cambian sus valores. Entonces pues AC y CB son constantes, o sea son parámetros. Y pues ya, los demás son CD y BD y los ángulos.* [señala con el puntero los segmentos respectivos en la imagen]



La estudiante escribe en la pizarra digital que los parámetros son los segmentos AC y CB, mientras que las variables son CD y BD.



Posteriormente, el investigador le propone a la estudiante que determine la ecuación, sin embargo, la estudiante manifiesta no tener algo concreto al respecto (ver L4-L7).

L4. **I**: *Ok. Perfecto. Entonces ahora sí, […], pues trata de encontrar a ver la relación y la ecuación.*

L5. **E2**: *¡Dios!* [muestra angustia en su tono].

L6. **I**: *Si quieres consultar algo lo podemos hacer sin problema.*

L7. **E2**: *Es que no tengo nada. O sea es que… ajá o sea, esta… estaba pensando en cómo hacerlo pero no tengo nada* [tono de angustia].

Esto provoca una interacción para reconocer lo que interpreta la estudiante respecto a las posibles relaciones que ha determinado en el proceso y lo que debe hacer en la situación (ver L9-L16). Nótese que la estudiante intenta determinar relaciones geométricas (semejanza de triángulos) de manera similar a la situación inicial.

L9. **I**: *A ver, estem, pero qué estás pensando, más o menos ¿qué se te ocurre? o sea ¿qué… qué has estado como analizando?*

L10. **E2**: *Pues es que, o sea, estaba analizando la figura ¿no? y dije pues ¿qué puedo encontrar?, o sea, es que dije a lo mejor y… y tienen, o sea como todas, a lo mejor y son semejantes y ya pero no son*.

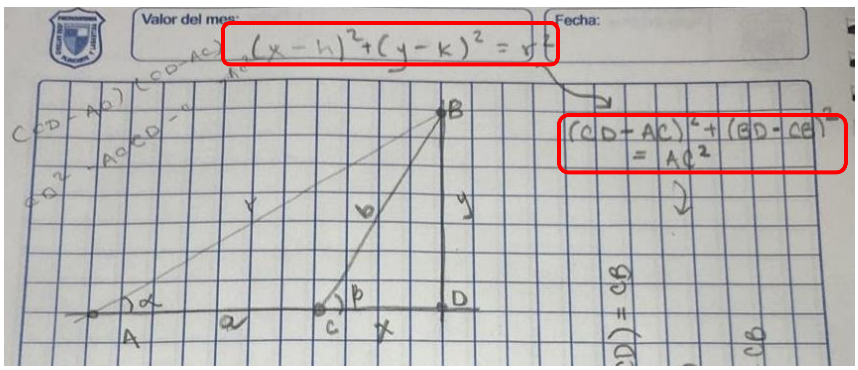
L11. **I**: *¿Tienes como parámetros a AC y CB ¿no?*

L12. **E2**: *Mjum*

L13. **I**: *Y como variables a CD y a BD ok. Ok, ahora ¿qué se te ocurre hacer con… con esas estem… con esos datos? Digamos cuando dice la instrucción […] de tienes que terminar una propiedad geométrica que involucra al punto B, o sea, ¿qué […] se te viene a la mente cuando lees eso?*

L14. **E2**: *Es que ajá, o sea cuando me dijo… cuando leí lo de la propiedad geométrica, yo dije a lo mejor, o sea, asignarlo a una figura, y pues yo pensé en el círculo, porque dije pues es una circunferencia es un círculo.*

La estudiante menciona circunferencia pues con la experiencia en el *applet* reconoce que el rastro del punto B describe una semicircunferencia y trata de relacionar la ecuación de la circunferencia que conoce de su experiencia escolar con lo que experimenta con el applet (nótese el conector lógico de la flecha que usa), sin embargo, no lo logra. Esto se puede ver en su hoja de trabajo recuperada posterior a la interacción.



Esta estudiante logró determinar la ecuación de la circunferencia que se planteó en el *pre-test*. No obstante, a pesar de dominar este saber, no le es posible articularlo con la situación planteada en la EBT.

A propósito de no reconocer qué hacer, el investigador interactúa con la estudiante para que pueda avanzar en la resolución de la actividad (ver L17-L19). Nótese también que la orientación no es del todo precisa pues el investigador titubea al momento de tratar que la estudiante comprenda la relación entre el punto de la curva, la ecuación y las relaciones geométricas de las que proviene. Esta dificultad, puede entenderse también desde la inseguridad del investigador por proponer información que sesgue el proceso de construcción de la estudiante.

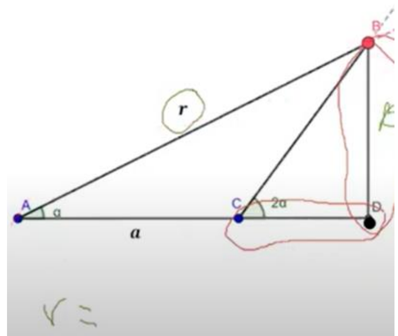
L17. **I**: *Bien. Entonces, partamos de… partamos de esa idea. Tú dices que… claro como ves que hay un círculo allá, pues seguramente tiene que ver. Y justo lo que se… lo que se está tratando de lograr es determinar cómo es que ese círculo se forma ¿sí? en la curva de Descartes recuerda que cuando yo movía el punto L, así como ahorita mueves el ángulo α se construía esa curva. Pero si te das cuenta, lo que usamos para determinar la ecuación no es como esa curva en sí misma, sino de dónde proviene, cómo es que se forma esa curva ¿sí? Es decir, utilizamos en el caso de Descartes, pues la relación, o sea, triángulos porque la imagen cómo te muestra […] en el ejemplo está, digamos, ese punto C se construye cuando, digamos, eh con la unión, digamos de dos rectas y esas dos rectas están determinadas por los triángulos ¿ok?*

L18. **E2**: *Mjum.*

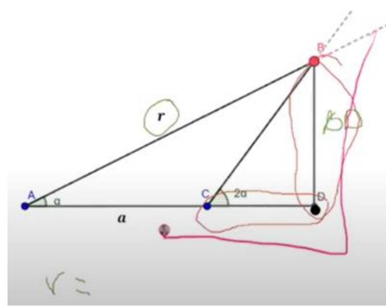
L19. **I**: *En este caso, ¿qué figura es la que forma, digamos, en este caso eh o… o… sí, forma o permite construir el punto B?*

Posteriormente, la interacción se centra en el reconocimiento de la relación geométrica de Pitágoras, lo cual no es identificada por la estudiante en este primer intercambio. Al notar este hecho el investigador le propone a la estudiante que lo analice un tiempo, sin embargo, la estudiante no logra identificar la propiedad (ver L20-L52). Esto implica que el investigador induzca la propiedad pidiéndole calcular el valor de r (ver L53-L64).

L53. **I**: *Tranquila no pasa nada. Ahora ¿qué pasa si yo te digo lo siguiente? […]. Eh obviamente este de aquí de la derecha es el segmento BD. […] <u>¿Qué pasa si yo te digo… yo te pregunto esto? ¿cuánto es r en este ángulo que estás viendo?</u>* [encierra r en la imagen y escribe debajo del triángulo $r =$]



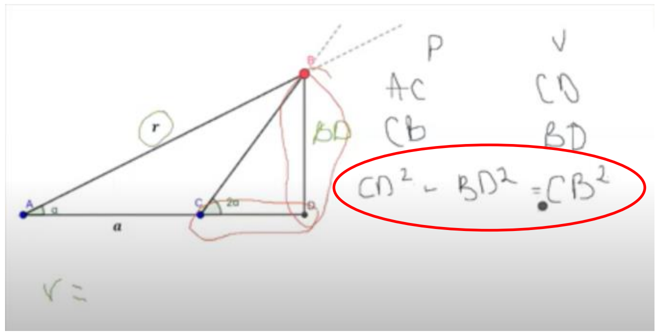
L54. **I**: *<u>¿cómo puedo calcular r? si estás viendo, digamos, como tú me mencionabas, pues este triángulo rectángulo</u> ¿no? el completo.* [Recorre con el láser digital el triángulo BAD]



L57. **E2**: *Mmmmm <u>la suma de los cuadrados de los catetos</u>.*
L58. **I**: *Ok. Los cuadrados de los catetos y eso ¿por qué se… por qué puedes hacerlo?*
L59. **E2**: *<u>¿Por la ley de Pitágoras?</u>*

Si bien, posteriormente, la estudiante establece la relación $CD^2 + BD^2 = CB^2$, la dificultad por reconocer qué hacer la lleva a una algebrización aleatoria, la cual es revisada con el investigador (ver L68-L74). La interacción que se genera a partir de la expresión planteada busca que la estudiante reconozca que la expresión planteada cumple con las condiciones de la situación (ver L75-L96), en este sentido el investigador es el que hace explícito que la expresión es adecuada para cumplir con las condiciones de la situación. Nótese que la explicación para orientar a la estudiante al respecto de lo que se requiere para resolver la situación no es del todo precisa (ver L83).

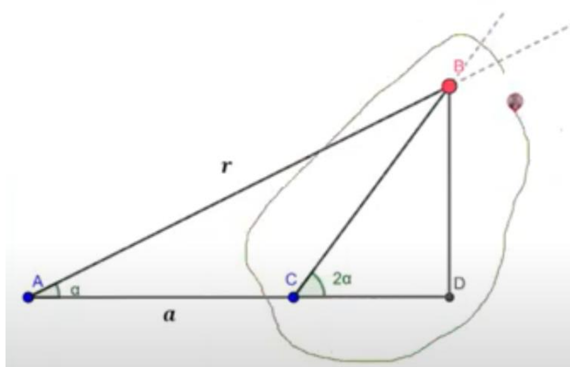
L67. **E2**: *Pues, o sea, estaba viendo, o sea porque ya vio que habíamos dicho que el cuadrado de los catetos… la suma de los cuadrados de los catetos da la hipotenusa ¿no? Entonces, pues obviamente queda así de que C dos, más… más BD al cuadrado es igual a CB al cuadrado*. [Se refiere a la relación $CD^2 + BD^2 = CB^2$]



L75. **I**: *Ok. Eh bien. Aquí vamos a ver un detallito. Me parece… gracias por la explicación. Eh y digamos el razonamiento que… que estás mostrando, eh claro me da la idea, de que justamente estás tratando de encontrar ok. O sea, me… digo, como que qué es lo que tengo que hacer ¿no? O sea, hacia a dónde tengo que llegar. Me da como esa idea. No sé si estás de acuerdo con eso*.

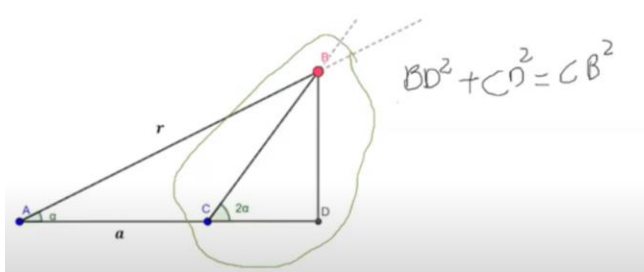
L76. **E2**: *Sí.*

L77. **I**: *[…] Ok. Entonces fíjate, tú tienes la propiedad esta. Y ahora, para empezar, digo, noto que te estás centrando ahora en este triángulo ¿no? En este más pequeño.*



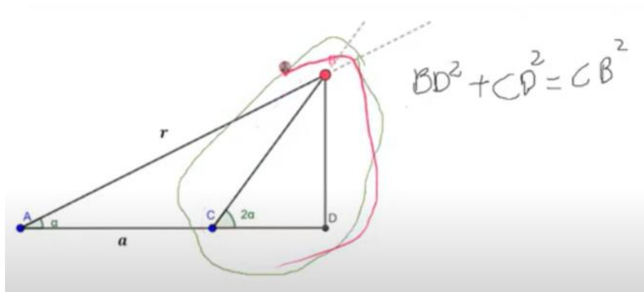
L78. **I**: *Entonces lo que dijiste allá es que BD al cuadrado eh más CD al cuadrado, tiene que ser igual a eh CB ¿no? al cuadrado.*

L79. **E2**: *Al cuadrado*

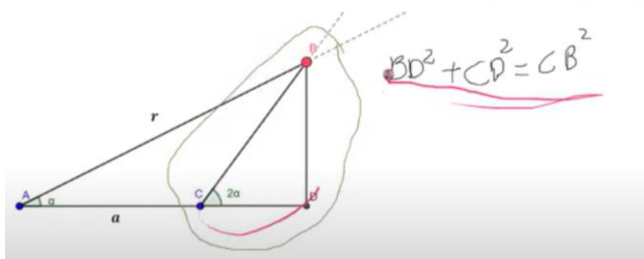


L80. **I**: *Ok. Entonces eh luego tú dices que, claro como que… como no siento que… digo no sabes exactamente que… hacia donde quieres llegar, como ya comentamos, por eso estas buscando qué hacer con la ecuación, […]*

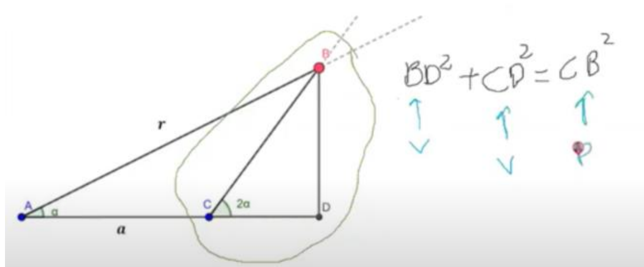
L83. **I**: *Bien entonces, eso me dice, eh digamos que, pues en esencia no se puede hacer mucho en ese sentido, pero fíjate que aquí la idea es ¿qué dijimos? Tenemos que encontrar una propiedad geométrica que, digamos, que justamente determine o haga que ese punto B, que construye la curva a su vez, eh lo estem lo permita digamos, o sea lo deje determinado, es decir, B como tú ya mostraste aquí, está construido y se puede determinar por medio de este triángulo que está, en el que te estás fijando. Y lo que dices es que aquí en este triángulo* [rodea con el láser digital el triángulo BCD] *eh*



L84. **I**: *hay una propiedad geométrica que es esta* [destaca con el láser digital la relación $BD^2 + CD^2 = CB^2$], *justamente, la de Pitágoras, como decíamos hace un momento, que se cumple.*



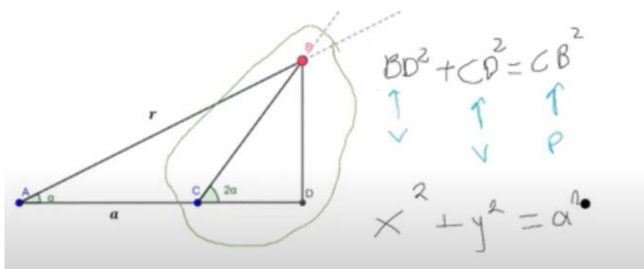
L85. **I**: *Y otra cosa que podemos notar también en lo que ya tienes, es que… de acuerdo a lo que tú comentaste qué esta es una variable, esta es otra, y aquí tienes, este va a ser un parámetro, como tú dijiste.* [señala y escribe "V" refiriéndose a una variable y una "P" para referirse a un parámetro].



L86. **I**: *Ahora… y eso hay que hacerlo con respecto a los parámetros y variables, es decir, tengo que… esa relación geométrica tiene que involucrar a los parámetros y a las variables, y que además esto, pues claro, nos dé una ecuación. Pregunta: ¿tienes eso? ¿ya tienes una ecuación que involucra parámetros y variables?*

L87. **E2**: *Sí.*

L88. **I**: *¿Sí, no?*
L89. **E2**: *Sí.*
L90. **I**: *Entonces, en la instrucción ¿qué dice? Voy a…voy a leerlo otra vez para que tengas una idea. Dice: la idea es determinar una propiedad geométrica que involucre punto B ¿tenemos eso ya? ¿ya tenemos una propiedad geométrica que involucra al punto B?*
L91. **E2**: *¿Sí, no?*
L92. **I**: *Sí, ok. Que sería la de Pitágoras ¿no? o sea, ese triángulo rectángulo que cumple la propiedad Pitágoras.*
L93. **I**: *Entonces <u>¿qué podemos concluir? que ya tienes la ecuación</u> ¿sí?*
L94. **E2**: [risa]
L95. **I**: *[…] Imagínate que lo ponemos, ahora sí, en términos de como decía Descartes x y y para las variables y, para el parámetro. ¿Cómo quedaría más o menos la ecuación?*
L96. **E2**: $x^2 + y^2 = a^2$.



13.3.1.3. Síntesis del Proceso de E3

El estudiante E3, a diferencia de E1 y E2, no menciona explícitamente el término "constante" para referirse al atributo de los parámetros, sino "establecidas", sin embargo, el investigador no profundiza en este significado. Puede interpretarse que esta distinción entre parámetros y variables es determinada por el uso del *applet*.

L4. **E3**: *Nada más para como que, así para recordar, eh <u>¿los parámetros eran las… como que las cantidades que ya estaban establecidas, no?</u> <u>Así que ya no se pueden cambiar, y pues las variables eran determinadas por los parámetros ¿no?</u>*
L7. **E3**: *Entonces aquí sí puedo hacer como que… uso entre comillas del GeoGebra ¿no?*

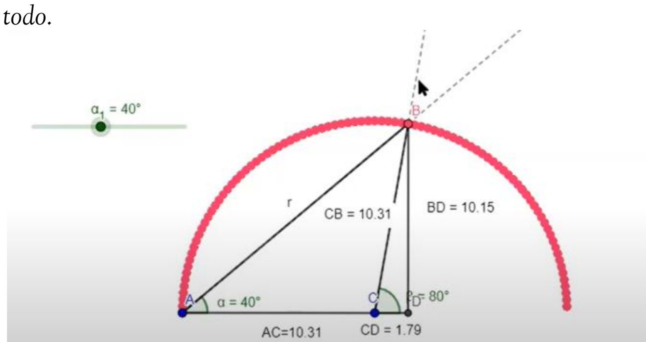
Durante la interacción con el investigador, el estudiante muestra una necesidad por generar su propio sistema de representación para magnitudes de la figura:

L13. **E3**: *Eh una duda, en dado caso que pues… eh o sea, en que estoy construyendo la ecuación <u>¿yo puedo asignar… eh por así decirlo, letras a los segmentos?</u> por ejemplo, a los que no los tienen asignados. Por ejemplo, aquí AC tiene la letra a, y AB tiene la letra r. <u>Entonces ¿yo puedo asignarle, no sé al segmento CD la letra m? ¿para poder así establecer la relación? ¿la ecuación?</u>*

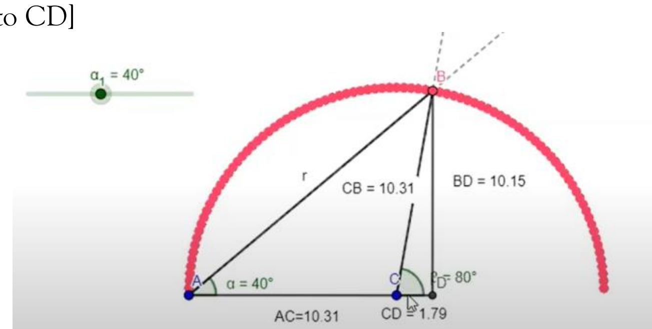
Posteriormente, el estudiante explicita su determinación de los parámetros y variables, así como sobre la ecuación (ver L29-L65). El estudiante muestra en un principio que se encontraba determinando alguna relación proporcional (ver L30-L46), como en el caso de la actividad 1 (El instrumento de Descartes). En esta primera explicación también muestra cómo comienza a analizar casos particulares y el comportamiento de la figura mediante el *applet*. La segunda relación a la que hace referencia el estudiante si bien es correcta (L47-L65), no cumple con la segunda condición de la situación al no involucrar una de las variables. Esta ecuación no estaba prevista en la THA.

L27. **E3**: *después de… Bueno eh al principio ¿no? pues como le dije que iba a hacer, así como que asigné una letra para cada lado, que no tenía letra y… y pues, o sea me había preguntado que cuál había creído que eran los parámetros. <u>Pues los parámetros son AC y BC, porque esos siempre permanecen igual, y ya los demás son los variables</u> entonces ya como que primero empecé a fijarme en los ángulos ¿no? o sea para ver si… si esos podían hacer algo. No sé.*

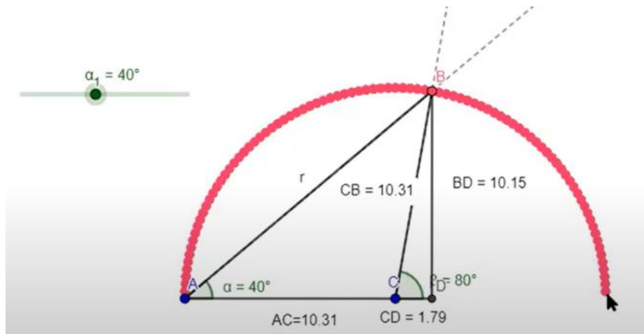
L28. **E3**: *Eh después <u>me acordé del de ayer</u>. Y… como que no sé empecé a relacionar con ángulos inscritos y pues no sé, tomé en cuenta también el… esta partecita de acá.* [Señala con el puntero el ángulo que se forma con la prolongación de los lados AB y AD] *Eh del… lo que se prolonga ¿no? No sé empecé a ver todo.*



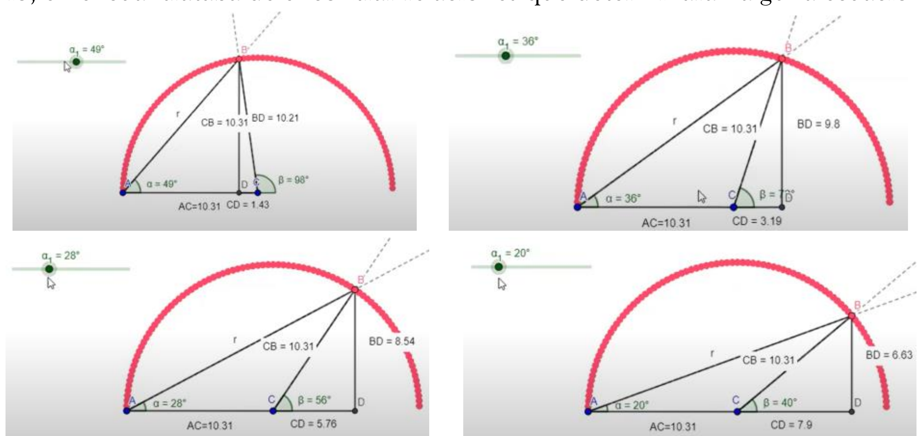
L30. **E3**: *Ajá y… como que empecé a… querer relacionar en este… el… el CD.* [señala con el puntero el segmento CD]



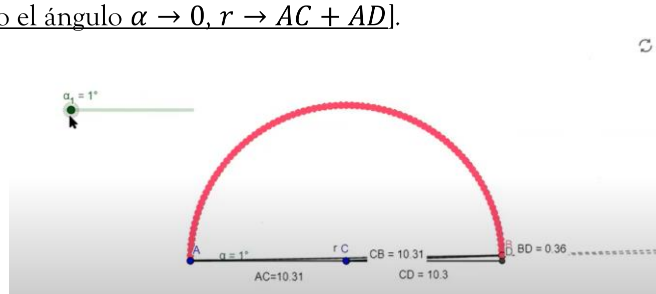
L31. **E3**: *Y… sí ajá y como que me quería inventar igual otro… otro punto que estuviera pegado al otro lado, de tal manera que se formara un diámetro.* [Señala con el puntero el extremo derecho donde se dibuja el rastro del punto B y extiende las manos indicando un segmento que tenga como longitud un diámetro]



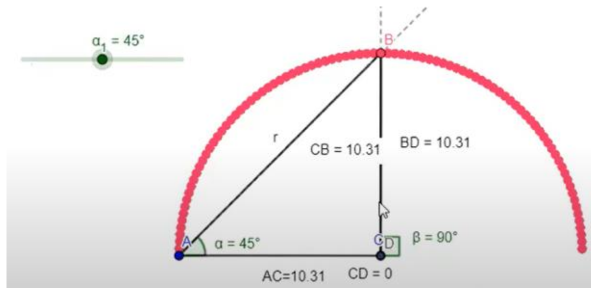
L33. **E3:** *Ajá para poder hacer una operación entre CD y AC ¿no? diciendo a… esto de… CD es igual a… el diámetro menos AC. Y así, igual no sé <u>como que quería encontrar que hubiera alguna proporción entre BD y los demás o CD y los demás ¿no?</u> o sea no proporciones, sino como que estuviera relacionado de alguna forma. De que restándolo, por ejemplo, restando CD, eh que en ese caso es 10.31 menos CD que es 1.79 me daría no sé algún resultado que estuviera relacionado con BD o A… ajá y intercambiando así operaciones ¿no? y después me fijé en la r ¿no? que dije, a ver en este desconozco totalmente cuánto vale. ¿Cómo podría hallarlo? y pues no sé empecé diciendo que tal vez la suma de AC o CD más BD era el eh r por qué, por ejemplo, aquí… […]… se supone que <u>hice algo para que resultara que r era igual a AC más BD ¿no?</u>* [Durante la explicación el estudiante modifica la figura para ilustrar el proceso que siguió, en el cual trataba de encontrar relaciones que determinaran alguna ecuación].



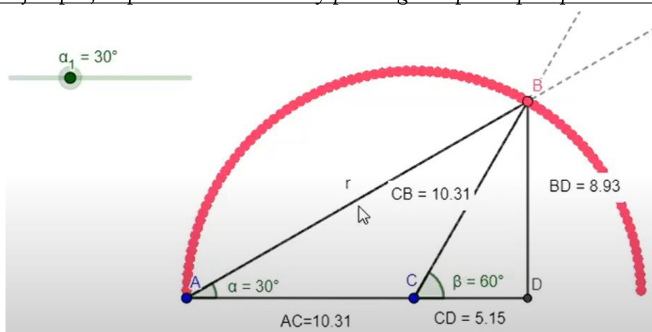
L34. **E3:** *Y porque como que de alguna manera me cuadró de que <u>siempre se iba acercando un poquito a poquito y resultaba que una vez que llegara aquí, o sea, me cuadraba todo</u>* <u>[modifica la figura para ilustrar que cuando el ángulo $\alpha \to 0$, $r \to AC + AD$</u>].



L35. **E3:** *Pero como que se… se destruía toda mi operación cuando se ponía así de esta forma* [modifica el applet para mostrar el caso donde se forma un único triángulo rectángulo isósceles]. *Ya no me acuerdo muy bien porqué pues se destruía, pero pues no… no… eso no me funcionó.*

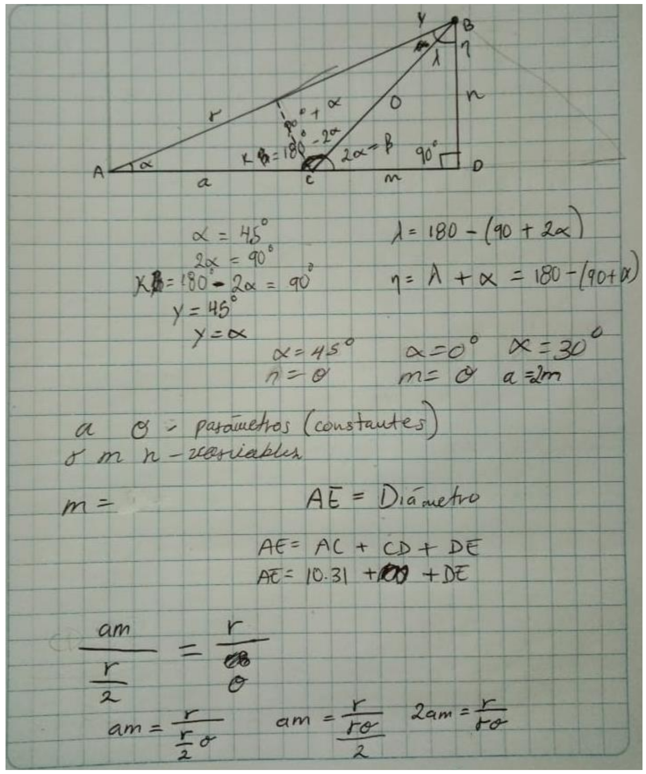


L36. **E3**: *Luego empecé a ver si la suma de AC más CD me daba r. Y así empecé pero pues no llegue a nada al fin y al cabo y luego no sé cómo se me ocurrió dividir el… el triángulo isósceles en… en… a la mitad que en este caso sería la altura* [simula con el puntero el trazo de la altura del triángulo ABC sobre AB], *o sea, por ejemplo, el punto medio de r y prolongarlo para que quede a la altura del isósceles.*

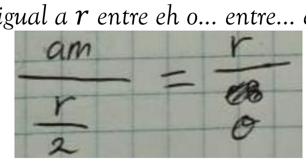


L37. *E3: Y me di cuenta que el triángulo que se formaba como uno de los triángulos que se formaban al dividirlo eran proporcionales, o eran semejantes al triángulo ABD, o sea el gigante eh […]*

Continúa la explicación para mostrar por qué los triángulos a los que se refiere son semejantes (ver L38). Posteriormente, inicia con la explicación de la ecuación a la que llegó (ver L39-L50). Nótese que al explicar la relación (ver L39) inicia mencionando que por las instrucciones del documento trata de establecer relaciones de proporcionalidad, dado que en estas se recurre a la Actividad 1 como ejemplo para orientar el proceso de construcción de la ecuación. La siguiente imagen muestra las relaciones a las que se refiere el estudiante a continuación de lo anterior:



L39. **E3**: *Y ya con eso pues puede sacar como que una ecuación, en la que podía de esa forma relacionar al sacar una razón de proporcionalidad de esos dos triángulos semejantes que ya tenía porque es lo que trataba de hacer igual. Ver cómo sacar una razón de proporcionalidad, porque igual como me puso…me… se ponía el documento que considere que la vez pasada hiciste esto, y esto y esto, o sea de sacar la razón de proporcionalidad, y estaba viendo cómo relacionar los lados, pero esos dos triángulos no eran semejantes en nada. Y entonces está de… pues me di cuenta que, por ejemplo,* am*… ah pero perdón es que* am *es…* m *es mi… es mi letra. A ver, por ejemplo, esta de AD entre eh* r *entre 2 es igual a* r *entre eh o… entre… esto ¿cómo era?… entre CB ¿ok?*



L40. **E3**: *O sea AE… Eh AD entre* r *entre 2 es igual a* r*, entre CB porque pues esto… este… es el lado que le corresponde.*

L41. **E3**: *Ahora si orientamos el triángulo, este que está así, y la orientamos de la misma forma* [mueve las manos para simular un movimiento de la figura] *que el grande…*

L42. **E3**: *Pues* r *entre* [mueve la mano para ilustrar el lado AB del triángulo ABD]… *quedaría entre CB ¿no?*

L43. **E3**: *Y ya de esa forma pude sacar una… una igualdad y ahí ya pues desarrollé ¿no? y AD es igual a* r *entre* r *entre* r *dos* [con la mano hace referencia a un segmento que construyó que tiene como longitud $\frac{r}{2}$], *por o. AD es igual a… eh… ¿cómo se dice?…* r *entre* ro *entre 2 y al final me quedó así. Lo más simple posible fue […] 2AD es igual a* r *entre* ro, *entre* r*CB.*

L50. **E3**: *Y pues al final quedaría entonces dos por a más CB es igual a* r *entre* ro.

A propósito de la relación que propone el estudiante, el investigador genera una interacción para verificar si esa relación cumpliese con las condiciones planteadas en la situación, a saber, una propiedad geométrica que involucre al punto B y una ecuación derivada de esa propiedad geométrica y que sea expresada en términos de parámetros y variables. La lógica es similar a la que empleó con E1 y E2, al solicitar que al momento trate de responder a estas condiciones. Nótese que no tiene claro el estudiante el significado de que la relación geométrica involucre al punto B (ver L58). No obstante, él mismo responde que es parte de la construcción que se encuentra analizando y de la que deriva su ecuación.

L51. **I**: *Ok.* r *entre* ro. *Ok. Bien, vamos a revisar, por ejemplo, en las instrucciones. […]. Con las instrucciones de lo que decía, por ejemplo, veamos, veamos las condiciones que dice en la parte de la explicación que está arribita ¿no? dice: la idea es determinar una propiedad geométrica que involucre al punto B. Entonces vamos a revisar lo que tienes y, preguntarnos esa relación que tienes, que estás proponiendo allá, ¿involucra al punto B? por ejemplo, es una condición ¿no? habría que revis… vamos a checarlo en tú… en… en la imagen.*

L58. **E3**: *Eh sí, sí involucra por qué… esto de… o sea cómo… ¿a qué se refiere con… con eso? si yo… o sea yo sí involucra porque pues la… al fin y al cabo, el… el triángulo grande ¿no?* [mueve las manos para referirse a un triángulo] *el triángulo rectángulo más grande,*

L59. **E3**: *pues es… parte ¿no? de B. O sea B es parte de uno de sus vértices*.

L60. **I**: *Exacto. Mjummm. Ok.*

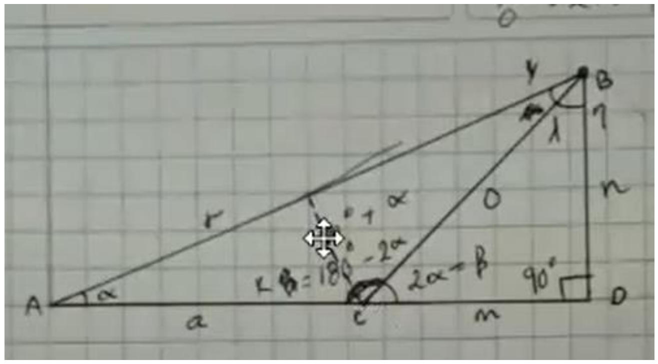
L61. **E3**: *Y pues en este caso eh c, eh representaría AB en el cuadrado más pequeñito ¿no? que se forma.* [Con la mano hace referencia a un triángulo].

Nótese también que el investigador no profundiza en la respuesta del estudiante, por el hecho de que no identifica una forma de contradecir lo que menciona el estudiante. Sin embargo, continúa revisando la segunda condición con él, la intención del investigador es que el estudiante se percate de que su ecuación no involucra una de las variables.

L62. **I**: *Ok. Primera condición entonces. Segunda dice: ahora dice: posteriormente identifica una relación geométrica que involucre a los parámetros y las variables y que se derive en una ecuación. Entonces tenemos que en la imagen que tienes tú mencionas que hay variables m y n ¿ok? esas dos, tanto m como n, ¿están involucradas en tu ecuación?*

L63. **E3**: *No. No la involucré aquí. Pero pues, por ejemplo, cómo puedo decir… igual y esta… esta línea punteada de acá, eh o sea representaría en este caso a n ¿no? o sea sería proporcional a m.*

Pero ahora sí que no sé cómo podría introducir ya n en la ecuación. [Mueve su puntero sobre la imagen]



Al plantearle al estudiante el hecho de que su relación es correcta pero que no cumple la segunda condición, lo induce a reconocer otra relación, particularmente la relación de Pitágoras (ver L65-L74).

L69. **I**: *Que también puedas identificar allá… es decir, por ejemplo, si te fijas en el triángulo, digamos, completo eh ABD, por ejemplo, ¿qué propiedad tiene ese triángulo?*
L70. **E3**: *Mmmmmm… pues es rectángulo ☺.*
L71. **I**: *Ok. Ok. Es rectángulo. Si es un triángulo rectángulo, entonces ¿qué propiedad debe cumplir? es decir, qué… ¿qué puede derivarse de que sea un triángulo rectángulo?*
L72. **E3**: *¿Teorema de Pitágoras?*
L73. *I: Puede ser… ok. Entonces ¿qué pasa?… fíjate ¿qué pasa si aplicas el Teorema de Pitágoras allá?*
L74. **E3**: *Ah puedo hallar r.*

El investigador le da tiempo al estudiante para que trabaje con la propiedad de Pitágoras. Seguidamente cuestiona al estudiante si cumple con la segunda condición.

L84. **E3**: *Me quedó r al cuadrado es igual a m… a más m perdón… al cuadrado, más n al cuadrado.*
L85. **I**: *Ok. Entonces, por ejemplo, ¿podrías decir si es… esa ecuación que tienes allá cumple con los criterios? es decir, que la figura que estás viendo, es decir, involucra al punto B, y dos, si esa ecuación incluye a los parámetros y a las variables.*
L86. **E3**: *Sí, sí se puede decir.*
L87. **I**: *Ok.*
L88. **E3**: *Pues sí.*

13.3.1.4. Tabla comparativa del proceso seguido por cada estudiante

La obtención de la tabla sigue el procedimiento descrito para la tabla comparativa de la Actividad 1.

Momento	Submomentos	Actor	E1	E2	E3
Determinación de los parámetros y variables	Análisis de las cantidades en el *applet*	E	Caracterización y determinación de los parámetros y variables	Caracterización y determinación de los parámetros y variables	Caracterización y determinación de los parámetros y variables
Acercamiento a la determinación de la ecuación sin interacción	Determinación de relaciones geométricas		Relaciones geométricas erróneas por usarse Pitágoras y razones trigonométricas en un triángulo no rectángulo. Dificultades algebraicas.		
				Dificultades para reconocer qué hacer	
					Construcción de una semiótica para designar a los elementos de la construcción
	Revisar la geometría	I	Enfatizar que las relaciones determinadas no se cumplen en el triángulo empleado por no ser rectángulo. Abordar las dificultades algebraicas.		
	Retomar el objetivo de la situación			Cuestionar sobre lo que entiende respecto de la instrucción	
					Afirmar que sí se puede construir una semiótica específica
Acercamiento a la determinación de la ecuación posterior a la interacción	Inducir la relación de Pitágoras	I	Especificar que en la construcción sí se tiene un ángulo recto.	Revisar los tipos de triángulos que se forman (rectángulos)	
	Trabajo geométrico	E		Dificultad para reconocer la relación de Pitágoras.	
				Evocación del conocimiento escolar relativo a la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	
				Dificultad para articular el conocimiento escolar de la ecuación de la circunferencia con la situación	

		I		Inducir la relación de Pitágoras con un ejemplo para calcular el valor de la hipotenusa.	
Determinación de la ecuación	Determinación de la ecuación vía relaciones geométricas válidas	E	Determinación de la ecuación usando la relación de Pitágoras	Determinación de la ecuación usando la relación de Pitágoras	
					Determinación de una relación no esperada.
Revisión de la ecuación	Dificultades para reconocer que la ecuación cumple con las condiciones solicitadas en la situación	E		Algebrización aleatoria	
				Dificultad por reconocer el objetivo de la situación	
		I	Cuestionar si las ecuaciones cumplen con las dos condiciones	Cuestionar si las ecuaciones cumplen con las dos condiciones	Cuestionar si las ecuaciones cumplen con las dos condiciones
		E	Se considera incompleta la ecuación por el hecho de que no contiene todos los parámetros y variables identificadas en la construcción.		Dificultades para reconocer que la ecuación no involucra las dos variables.
		I	Dificultad para explicar por qué no se requieren todos los parámetros en la ecuación	Dificultad para explicar lo que hay que hacer	Dificultad para explicar por qué la ecuación determinada no cumple con lo solicitado en la situación
			Concretar explícitamente que la ecuación determinada sí cumple las condiciones de la situación	Concretar explícitamente que la ecuación determinada sí cumple las condiciones de la situación	
				Solicitar que se escriba la ecuación en términos de los parámetros y variables con notación algebraica	
					Inducir la relación de Pitágoras
					Concretar explícitamente que la ecuación determinada sí cumple las condiciones de la situación

13.3.1.5. Proceso de construcción de la ecuación paramétrica

El procedimiento para la obtención de la tabla es el mismo que se detalla para la tabla comparativa de la Actividad 1 en este nivel.

Proceso de construcción de la ecuación paramétrica en la interacción de la EBT	
¿Qué estaba relacionando y cómo lo estaba haciendo?	¿Qué sucedió en la interacción y cómo se llevó a cabo para el establecimiento de las relaciones de equivalencia que derivaron en la ecuación paramétrica?
1. Análisis de las cantidades en el applet 2. Relaciones geométricas y algebraicas incorrectas (E1) 3. Dificultades para reconocer qué hacer (E2) 4. Construcción de una semiótica (E3)	5. Analizar la geometría subyacente y la operatividad algebraica (E1) 6. Retomar el objetivo de la situación 7. Inducir la relación de Pitágoras
8. Trabajo geométrico 9. Evocación y dificultades para articular el conocimiento escolar relativo a la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ (E2)	10. Inducir la relación de Pitágoras (E2)
11. Determinación de la ecuación vía relaciones geométricas válidas 12. Algebrización aleatoria (E2) 13. Dificultad por reconocer el objetivo de la situación (E2)	14. Cuestionar si las ecuaciones cumplen con las dos condiciones 15. Explicar el objetivo de la situación
16. Dificultades para reconocer que la ecuación cumple con las condiciones solicitadas en la situación	17. Dificultades para explicar lo que hay que hacer, p. ej. por qué no es necesario que todos los parámetros identificados se involucren en la ecuación (E1), por qué la relación alternativa no es válida (E3) y sobre cómo orientar el objetivo para romper la algebrización sin sentido (E2). 18. Inducir la relación de Pitágoras 19. Solicitar que se escriba la ecuación con la notación algebraica (E2) 20. Concluir que las ecuaciones basadas en la relación de Pitágoras cumplen las condiciones de la situación.

En términos sintéticos el proceso de construcción de la ecuación paramétrica en la EBT puede describirse, de manera ordenada, de la siguiente manera:

1. *Análisis de las cantidades en el applet.*
2. *Analizar la geometría subyacente*
3. *Retomar el objetivo de la situación*
4. *Identificación/Determinación de relaciones geométricas*
5. *Trabajo geométrico*
6. *Determinación de relaciones geométricas de equivalencia*
7. *Determinación de ecuaciones paramétricas*
8. *Consciencia respecto a la ecuación paramétrica como solución del problema*

9. *Cuestionamientos específicos respecto al cumplimiento de las condiciones y las ecuaciones construidas*
10. *Explicitar el objetivo de la situación*
11. *Solicitud de sustitución semiótica*
12. *Concluir que las ecuaciones determinadas (relación de Pitágoras) son adecuadas.*

Nótese que las acciones 2 a la 7 son recurrentes en el proceso de construcción, es decir, pueden darse más de una vez durante todo el proceso.

13.3.2. Segundo nivel de análisis: análisis experiencial de los textos

13.3.2.1. Texto de E1 por complejos clausulares

Complejos clausulares	Interpretación
C1. La siguiente figura *se construyó* de la siguiente forma:	Explicitar la construcción
C2. *Se construye* un segmento $\overline{AD}$.	Explicar el proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar
C3. Sobre el segmento $\overline{AD}$ *se construye* un ángulo con vértice en A [[que *denominaremos* α.]]	
C4. *Se ubica* un punto C sobre el segmento $\overline{AD}$, C5. lo cual *determina* el segmento $\overline{AC}$, [[cuya medida *se establece* como a.]]	
C6. Con vértice en C *se construye* otro ángulo [[que *tenga* el doble de la medida de α, es decir, 2α.]]	
C7. Por el paso anterior, *se determina* un punto de intersección B entre los ángulos α y 2α.	
C8. Además, la medida del segmento $\overline{AB}$ *queda también determinada* por esta construcción, C9. por lo que *se denomina* r.	
C10. El segmento $\overline{BD}$ *es* perpendicular a el segmento $\overline{AD}$.	Identificación de relación geométrica
C11. -Primero *identificaremos* las variables y parámetros, C12. que *quedaría* algo así: C13. variables: $\overline{CD}$, $\overline{BD}$ C14. parámetros: r, a, $\overline{CB}$	Establecimiento de parámetros y variables
C15. *debemos armar* una relación geométrica [[que *involucre* a estos parámetros y variables | | y que *pueda derivar* en una ecuación algebraica.]]	Explicitación del objetivo de la resolución
C16. Si *nos damos cuenta* C17. en la figura del triángulo CBD *es* un triángulo rectángulo, C18. por lo que *podemos usar* el teorema de Pitágoras:	Análisis de la geometría subyacente/Identificación de relación geométrica

C19. $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$ C20. → y como $a = \overline{CB}$ ∴ C21. → $a = \sqrt{(CD^2 + BD^2)}$ C22. $CB = \sqrt{(CD^2 + BD^2)}$	Trabajo algebraico y determinación de la ecuación paramétrica

13.3.2.2. Texto de E2 por complejos clausulares

Complejos clausulares	Interpretación
C1. *Se ha construido* una figura [[*teniendo* en cuenta que: *Está constituida* de un segmento AD]]	Explicitar la construcción
C2. Sobre AD *se forma* un ángulo con vértice a llamado α	Explicar el proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar
C3. *Se ubica* un punto C sobre AD AC→ a	
C4. Con vértice en C *se forma* otro ángulo [[que *medirá* el doble que α es decir 2α]]	
C5. *Se determinará* un punto B entre los ángulos α y 2α	
C6. La medida AB *queda determinada y denominada* r	
C7. *Hay que notar* C8. que *al modificar* el valor del ángulo α, C9. el punto B *va formando* una trayectoria de media circunferencia [[como *se muestra* en color naranja en la imagen.]]	Analizar comportamiento del punto B conforme se cambia la construcción
C10. *Tomando* en cuenta eso, C11. *se deberá determinar* una ecuación algebraica C12. *representando* el segmento B, C13. *considerando* C14. que BD *es* perpendicular a AD.	Explicitar el objetivo de la resolución
C15. Primero, *debes determinar* que propiedades [[[[que *conforman* la figura]] *son* parámetros (su valor es constante, no cambia) || y cuáles *son* variables (su valor cambia).]]	
C16. Para esto *deberás considerar* C17. que las medidas de AB, BD y CD *dependen* del valor del ángulo α; C18. mientras que AC y CB *tienen* una medida continua de 10.31.	Identificación de parámetros y variables/Dependencia entre el ángulo y la contrucción

C19. VARIABLES ~~/AB~~/BD/CD C20. PARÁMETROS /AC/CB	Determinación de los parámetros y variables
C21. *Ten en cuenta* C22. que *para denominar* a las longitudes C23. *se les representan* con variables las letras (x, y) ~~porque para AB ya se usa la r~~, C24. y para los parámetros ^*SE LES REPRESENTAN* las letras a y b.	Establecimiento del recurso semiótico
C25. Para [[*poder continuar*]] una relación geométrica [[que involucre a los parámetros y variables,]] *es* necesario [[que *evalúes* la imagen del inicio]] C26. donde *podrás percatar* C27. que *está conformado* por 2 $\Delta's$ rectángulos, C28. *lo que significa* que:	Análisis de la geometría subyacente
C29. Los triángulos rectángulos *tienen* como principio [[que la suma de los cuadrados de los catetos *es* igual al cuadrado de la hipotenusa.]]	Identificación de relaciones geométricas
C30. *Recordando* que: C31. **Catetos** *son* los lados del Δ [[que *conforman* el ángulo de 90°]] C32. **hipotenusa** *es* el lado que uno de los catetos.	Explicación de los elementos involucrados en la relación geométrica
C33. *Conociendo* esto, C34. *busca* el triángulo [[que *contenga* a las variables y parámetros << antes *encontrados* >>]] C35. para posteriormente *formular* la teoría de Pitágoras con el principio de los triángulos rectángulos.	Aplicación de la relación geométrica a alguna figura que involucre los parámetros y variables
C36. En este caso *será* el ΔBCD.	
C37. hipotenusa ↓ [[$BD^2 + CD^2 = BC^2$]]	Establecimiento de la relación geométrica de equivalencia
C38. Finalmente *reemplaza* las variables de la ecuación con las letras que las representan	Sustitución semiótica
C39. $BD - x$ C40. $CD - y$ C41. $BC - b$	
C42. [[$BD^2 + CD^2 = BC^2$]] ↓ [[$x^2 + y^2 = b^2$]]	Determinación de la ecuación paramétrica

13.3.2.3. Texto de E3 por complejos clausulares

Complejos clausulares	Interpretación
C1. *Se construye* una figura de la siguiente manera:	Explicitar la construcción
C2. *Se construye* un segmento AD.	Explicar el proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar
C3. Sobre el segmento AD *se construye* un ángulo con vértice en A [[que *denominaremos* α.]]	
C4. *Se ubica* un punto C sobre el segmento AD, C5. lo cual *determina* el segmento AC, [[cuya medida *se establece* como a.]]	
C6. Con vértice en C *se construye* otro ángulo [[que *tenga* el doble de la medida de α, es decir, 2α.]]	
C7. Por el paso anterior, *se determina* un punto de intersección B entre los ángulos α y 2α.	
C8. Además, la medida del segmento AB *queda también determinada* por esta construcción, C9. por lo que *se denomina* r.	
C10. Ahora, *se darán* 2 procedimientos [[que *permitirán deducir* una ecuación que involucre al punto B, respecto de los parámetros y variables.]]	Explicación del contenido del texto
C11. Asimismo, la ecuación *involucrará* a los parámetros y variables.	Explicitar el objetivo de la resolución
C12. Antes que nada, *se necesita definir* C13. cuáles *son* los parámetros C14. y cuáles ^SON las variables. C15. Pero para eso, *asignaremos* literales a aquellos segmentos [[que *no tienen asignado* ninguna.]]	Explicación de las características entre parámetros y variables
C16. *Tenemos* C17. que el segmento AC *es denominado* *a* C18. y el segmento AB *^ES DENOMINADO* *r*. C19. *Se denominará* al segmento CD como *m*, C20. al CB *^SE DENOMINARÁ* como *o* y C21. al DB *^SE DENOMINARÁ* como *n*.	Sustitución semiótica
C22. Si *notamos*, C23. *al modificar* el ángulo α, C24. la construcción *es modificada* también, C25. pero *hay* algunos segmentos y cantidades [[que *determinan* la construcción, es decir, parámetros.]]	Análisis de la construcción para determinar los parámetros y variables

C26. Las cantidades [[*que resultan* diferentes por esta determinación]] *son* las llamadas variables. C27. Por lo tanto, *se puede afirmar* C28. que a, o y r *son* parámetros, C29. pues estos *determinan* la construcción. C30. En cambio, m y n *resultan afectadas* por esas determinaciones.	
C31. Una vez *establecidas* las variables, C32. *se puede proceder* a la deducción de la ecuación.	Explicitación del proceso
Primer método: Propiedades del triángulo isósceles	
C33. Al *saber* C34. que 2α *será determinada* por el valor de α, C35. *podríamos crear* C36. un ejemplo hipotético de *lo que pasaría* C37. si a α le *asignamos* el valor de 45°. C38. En ese caso, $2\alpha = 90°$.	Exploración de las relaciones geométricas al modificar la construcción
C39. Así *podríamos saber* el valor del ángulo complementario de 2α, C40. el cual *sería* de la misma manera 90°.	
C41. Con esto, ya *se sabría* la medida de 2 de los ángulos [[que *forman* el triángulo ABC,]] C42. y *podríamos conocer* la medida del otro, [[que *tendría* que ser 45°.]]	
C43. *Observamos* C44. que el ángulo opuesto a α *mide* lo mismo, C45. *asignemos* la cantidad [[que *le asignemos* a α en nuestro "experimento mental".]] C46. Con esta propiedad del triángulo ABC *tendría* un carácter de triángulo isósceles C47. y, por consiguiente, los lados AC y AB o, mejor dicho, a y o *medirían* lo mismo.	Exploración de las relaciones geométricas al modificar la construcción/Trabajo geométrico
C48. Dicho esto, si nosotros *dividimos* este triángulo con la altura formada con respecto a r y el punto C, C49. los triángulos resultantes de esa división *serían semejantes* al triángulo ABD, C50. pues *poseen* los mismos ángulos, C51. ya que se *tiene* uno de 90°,	
C52. *sabemos*	

C53. que *tienen* ambos el ángulo α y con estos dos determinados, C54. el ángulo restante *sería* el mismo también.	
C55. *Teniendo* esta información, C56. *se pueden sacar* las razones de proporcionalidad [[que *se forman a relacionar* los lados, y de la igualdad resultante tener la ecuación.]]	
C57. Al *hacer* la igualdad C58. nos *qued*a de la siguiente manera: C59. $\frac{a+m}{\frac{r}{2}} = \frac{r}{o}$	Establecimiento de relación geométrica de equivalencia
C60. Al *hacer* algunas operaciones algebraicas C61. y *simplificar* la ecuación, C62. *obtenemos* esto: C63. $2(a+m) = \frac{r}{ro}$	Trabajo algebraico y determinación de ecuación paramétrica
Segundo método: Teorema de Pitágoras	
C64. Al *tener* un triángulo rectángulo, C65. este *va a tener* una propiedad geométrica [[que *está definida* mediante el teorema de Pitágoras.]]	Determinación de relación geométrica
C66. Si *asociamos y asignamos* al teorema las literales [[que *definen* nuestros segmentos,]] C67. *obtendremos* de igual forma una igualdad [[que *definirá* nuestra relación entre variables y parámetros.]]	Sustitución semiótica
C68. *Nos quedaría* así: C69. $r^2 = (a+m)^2 + n^2$	Determinación de la ecuación paramétrica

13.3.2.4. Tabla comparativa del proceso de algebrización de la geometría desde los textos

La obtención de esta tabla sigue el mismo procedimiento descrito para la tabla comparativa de la Actividad 1 en este nivel.

	E1	E2	E3
Explicitar la construcción	Explicitar la construcción	Explicitar la construcción	Explicitar la construcción
Explicar el proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar	Explicar el proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar	Explicar el proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar	Explicar el proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar
Explorar el comportamiento geométrico de la construcción	Identificación de relación geométrica		
		Analizar comportamiento del punto B conforme se cambia la construcción	
Explicación del contenido del texto			Explicación del contenido del texto
Establecimiento de parámetros y variables	Establecimiento de parámetros y variables		
Explicitación del objetivo de la resolución	Explicitación del objetivo de la resolución	Explicitar el objetivo de la resolución	Explicitar el objetivo de la resolución
Identificación y determinación de parámetros y variables		Identificación de parámetros y variables/Dependencia entre el ángulo y la construcción	Explicación de las características entre parámetros y variables
		Determinación de los parámetros y variables	
Establecimiento y uso del recurso semiótico		Establecimiento del recurso semiótico	
			Sustitución semiótica
Análisis de la geometría subyacente y su aplicación específica	Análisis de la geometría subyacente/Identificación de relación geométrica	Análisis de la geometría subyacente	Análisis de la construcción para determinar los parámetros y variables
		Identificación de relaciones geométricas	
		Explicación de los elementos involucrados en la relación geométrica	
		Aplicación de la relación geométrica a alguna figura que involucre los parámetros y variables	
Explicitación del proceso			Explicitación del proceso
Análisis de la geometría subyacente y trabajo geométrico			Exploración de las relaciones geométricas al modificar la construcción
			Exploración de las relaciones geométricas al modificar la

			construcción/Trabajo geométrico
		Establecimiento de la relación geométrica de equivalencia	Establecimiento de relación geométrica de equivalencia
Trabajo algebraico		Sustitución semiótica	
	Trabajo algebraico y determinación de la ecuación paramétrica	Determinación de la ecuación paramétrica	Trabajo algebraico y determinación de ecuación paramétrica
Determinación de relación geométrica			Determinación de la segunda relación geométrica
Trabajo algebraico			Sustitución semiótica
			Determinación de la segunda ecuación paramétrica

13.3.2.5. Proceso de algebrización de la geometría desde los textos

Con base en la, en términos sintéticos el proceso de construcción de la ecuación paramétrica en los textos puede describirse, de manera ordenada, de la siguiente manera:

1. *Explicitación la construcción*
2. *Explicación del proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar*
3. *Exploración del comportamiento geométrico de la construcción*
4. *Identificación y determinación de parámetros y variables*
5. *Establecimiento y uso del recurso semiótico*
6. *Análisis de la geometría subyacente y su aplicación específica*
7. *Trabajo geométrico*
8. *Determinación de relación geométrica*
9. *Trabajo algebraico/sustitución semiótica*
10. *Determinación de la ecuación paramétrica*

Al igual que en la EBT, las acciones 6 a la 9 son recurrentes en el proceso de construcción.

13.3.3. Tercer nivel de análisis: Comparación entre la actividad matemática de la interacción en la EBT y la manifestada en los textos

Este nivel de análisis, como se ha especificado consiste en retomar las consideraciones del primer nivel y segundo nivel de análisis con la finalidad de concretar el proceso de construcción de la ecuación paramétrica. En este caso se compara lo obtenido en la interacción de la EBT y lo manifestado en los textos por parte de la y los estudiantes. Se buscan complementariedades entre ambos procesos y se determina un proceso general.

Proceso de construcción en la interacción	Proceso de construcción en los textos
1. Análisis de las cantidades en el applet.	1. Explicitar la construcción
2. Análisis de la geometría subyacente	2. Explicación del proceso de construcción del objeto geométrico a estudiar
3. Retomar el objetivo de la situación	3. Exploración del comportamiento geométrico de la construcción
4. Identificación/Determinación de relaciones geométricas	4. Identificación y determinación de parámetros y variables
5. Trabajo geométrico	5. Establecimiento y uso del recurso semiótico
6. Determinación de relaciones geométricas de equivalencia	6. Análisis de la geometría subyacente y su aplicación específica
7. Determinación de ecuaciones paramétricas	7. Trabajo geométrico
8. Consciencia respecto a la ecuación paramétrica como solución del problema	8. Determinación de relación geométrica
9. Cuestionamientos específicos respecto al cumplimiento de las condiciones y las ecuaciones construidas	9. Trabajo algebraico/sustitución semiótica
10. Explicitación del objetivo de la situación	10. Determinación de la ecuación paramétrica
11. Solicitud de sustitución semiótica	
12. Conclusión de que las ecuaciones determinadas (relación de Pitágoras) son adecuadas.	

Puede observarse en la tabla que la epistemología al momento de la EBT se confirma en los textos de la y los estudiantes, no obstante, cabe destacar que en los tres textos, la y los estudiantes inician la explicación mostrando textualmente en los dos estudiantes la información de las instrucciones de la actividad. Esta información es la correspondiente con la explicación sobre cómo se generó la construcción. En este sentido, se identifica la importancia que la y los estudiantes asignan al entendimiento de cómo se genera la construcción.

13.4. Análisis de la gramática funcional de estudiantes

13.4.1. Metafunción Experiencial

13.4.1.1. Texto de E1

1. 1. Plantea los datos

Plantea	^TÚ	los datos
Proceso	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Alcance

2. -Se debe de involucrar las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)

Se debe de involucrar	las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)
Proceso	**Participante**
Material	Alcance

3. -Se posee un applet [[que muestra lo siguiente]]

Se posee	un applet [[que muestra lo siguiente]]
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

4. -Las variables son [[las que se muestran en [sic] el lápiz]]

Las variables	son	[[las que se muestran en [sic] el lápiz]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

5. -Sabemos

Sabemos	^NOSOTROS
Proceso	**Participante**
Mental	Perceptor

6. que “a”, “y” y “c” son paralelas entre sí.

que	“a”, “y” y “c”	son	paralelas entre sí.
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Atribuido	Relacional: Atributivo	Atributo

7. Así como el segmento $\overline{KA}$ *es* perpendicular a ellos.

Así como	el segmento $\overline{KA}$	*es*	perpendicular a ellos.
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Atribuido	Relacional: Atributivo	Atributo

8. 2. buscar relaciones

buscar	relaciones
Proceso	**Participante**
Material	Alcance

9. Por si no se ha notado ^ESO

Por si	no se ha notado	^ESO
Conector	**Proceso**	**Participante**
	Mental	Fenómeno

10. en el applet se generan distintos triángulos:

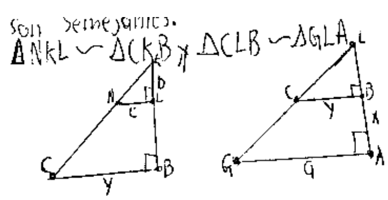
en el applet	se generan	distintos triángulos:
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**
Alcance	Existencial	Existente

11. -Al observar detenidamente,

-Al	observar	detenidamente,
Conector	**Proceso**	**Circunstancia**
	Conductual	Manera: Cualidad

12. notamos

notamos	^NOSOTROS
Proceso	**Participante**
Mental	Perceptor



13. que algunos triángulos son semejantes:

que	algunos triángulos	son	semejantes:
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Atribuido	Relacional: Atributivo	Atributo

14. -Al saber

Al	saber
Conector	**Proceso**
	Mental

15. que son semejantes,

que	^LOS TRIÁNGULOS	son	semejantes:
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Atribuido	Relacional: Atributivo	Atributo

16. podemos plantear su proporción de la siguiente manera:

podemos plantear	^NOSOTROS	su proporción	de la siguiente manera:
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Actor	Alcance	Locación: Espacio

17. ΔNKL y ΔCKB
[[$\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]

ΔNKL y ΔCKB	^LAS PROPORCIONES	^SON	[[$\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
Locación: Lugar	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

18. ΔCLB y ΔGLA
[[$\frac{y}{a} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$]]

^Y ΔCLB y ΔGLA	^LAS PROPORCIONES	^SON	[[$\frac{y}{a} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$]]
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
Locación: lugar	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

19. -Y nos quedamos con las proporciones [[que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)]]

-Y	nos quedamos	^NOSOTROS	con las proporciones [[que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)]]
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Mental	Perceptor	Fenómeno

20. ΔNKL y ΔCKB
[[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]

ΔNKL y ΔCKB	^NOSOTROS	^USAMOS	[[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
Locación: lugar	Actor	Material	Alcance

21. ΔCLB y ΔGLA
[[$\frac{y}{a} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$]]

ΔCLB y ΔGLA	^NOSOTROS	^USAMOS	[[$\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
Locación: lugar	Actor	Material	Alcance

22. *Tomemos $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$

*Tomemos	^NOSOTROS	$\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$
Proceso	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Alcance

23. debido a que $\overline{LA}$ contiene x

debido a que	$\overline{LA}$	contiene	x
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Portador	**Relacional: Atributivo**	Atributo

24. -Debemos reemplazar los datos que importan

- Debemos	reemplazar	^NOSOTROS	los datos que importan
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

25. para poder plantear la ecuación,

Para poder	plantear	la ecuación
Conector	**Proceso**	**Participante**
	Material	Alcance

26. empezamos con $\overline{\mathrm{KB}}$,

empezamos	^NOSOTROS	con $\overline{KB}$
Proceso	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Alcance

27. esto se debe a [[que tanto b, $\overline{\mathrm{KB}}$, $\overline{\mathrm{LB}}$ y $\overline{\mathrm{LA}}$ conforman una misma recta: $\overline{\mathrm{KA}}$,]]

Esto	se debe	a [[que tanto b, $\overline{\mathrm{KB}}$, $\overline{\mathrm{LB}}$ y $\overline{\mathrm{LA}}$ conforman una misma recta: $\overline{\mathrm{KA}}$,]]
Participante	Proceso	**Participante**
Atribuido	Relacional: Atributivo	Atributo

28. y al despejar $\overline{\mathrm{KB}}$,

y	al	al despejar	^NOSOTROS	$\overline{\mathrm{KB}}$
Conjunción	**Conector**	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
		Material	Actor	Alcance

29. se nos facilitara [[el despejar $\frac{\overline{\mathrm{LB}}}{\overline{\mathrm{LA}}}$.]]

^A NOSOTROS	se nos facilitara	[[el despejar $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$.]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Actor	Material	Alcance

30. -Planteamos: [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$]]

Planteamos	^NOSOTROS	[[$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$]]
Proceso	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Alcance

31. → Declaramos incógnita

→	Declaramos	^NOSOTROS	^LA incógnita
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

32. → $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$

→	$\frac{c}{y}$	=	$\frac{b}{?}$
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

33. → regla de 3

→	^APLICAMOS	^NOSOTROS	^LA regla de 3
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

34. → $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$

→	$\frac{c}{y}$	=	$\frac{b}{?}$
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

35. → Sustituimos y despejamos

→	Sustituimos y despejamos	^NOSOTROS	^EN $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Meta

36. [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\frac{by}{c}}$]]

^SE OBTIENE	[[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\frac{by}{c}}$]]
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

37. -Al conocer el valor de $\overline{\mathrm{KB}}$

Al	conocer	el valor de $\overline{KB}$
Conector	**Proceso**	**Participante**
	Mental	Fenómeno

38. y al apreciar detenidamente el applet,

y	al	apreciar	detenidamente	el valor de $\overline{KB}$
Conjunción	**Conector**	**Proceso**	**Circunstancia**	**Participante**
		Mental	Manera: Cualidad	Fenómeno

39. podemos concluir

podemos concluir	^NOSOTROS
Proceso	**Participante**
Mental	Perceptor

40. que $\overline{\mathrm{LB}} = \overline{\mathrm{KB}} - b$

que	$\overline{\mathrm{LB}}$	$=$	$\overline{\mathrm{KB}} - b$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

41. y $\overline{\mathrm{LA}} = \overline{\mathrm{LB}} + x$

y ^QUE	$\overline{\mathrm{LA}}$	$=$	$\overline{\mathrm{LB}} + x$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

42. -Entonces sustituimos en la proporción con el valor real de $\overline{\mathrm{KB}}$:

-Entonces	sustituimos	^NOSOTROS	en la proporción	con el valor real de $\overline{KB}$:
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**
	Material	Actor	Locación: Lugar	Alcance

43. $\overline{LB} = \left(\frac{by}{c}\right) - b,$

^ENTONCES	$\overline{LB}$	$=$	$\left(\frac{by}{c}\right) - b,$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

44. $\overline{LA} = \left(\frac{by}{c} - b\right) + x$

^ENTONCES	$\overline{LA}$	$=$	$\left(\frac{by}{c} - b\right) + x$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

45. -Y sustituimos ^NOSOTROS ^LO ^OBTENIDO

y	sustituimos	^NOSOTROS	^LO OBTENIDO	^EN LA PROPORCIÓN
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
	Material	Actor	Alcance	Locación: Lugar

46. para finalmente despejar

para	finalmente	despejar
Conector	**Conector**	**Proceso**
		Material

47. [[$\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)}$]]

^SE OBTIENE	[[$\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)}$]]
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

48. $\rightarrow y\left(\frac{by}{c} - b + x\right) = a\left(\frac{by}{c} - b\right)$

$\rightarrow$	$y\left(\frac{by}{c} - b + x\right)$	$=$	$a\left(\frac{by}{c} - b\right)$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

49. $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$

^ENTONCES	$\frac{by^2}{c} - by + xy$	$=$	$\frac{aby}{c} - ab$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

50. $\downarrow \frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$

$\downarrow$	$\frac{by^2}{c}$	$=$	$\frac{aby}{c} - ab + by - xy$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

51. $by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$

^ENTONCES	by^2	=	$c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

52. $by^2 = aby - abc + bcy - cxy$

^ENTONCES	by^2	=	$aby - abc + bcy - cxy$
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

53. $y^2 = \frac{aby - abc + bcy - cxy}{b}$

^ENTONCES	y^2	=	$\frac{aby - abc + bcy - cxy}{b}$
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

54. $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$

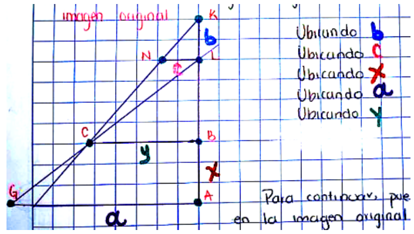
^ENTONCES	y^2	=	$ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

13.4.1.2. Texto de E2

1. La ecuación [[que Descartes desarrolló || buscando la relación del punto C || involucrando $a, x, b, c,$ || y tomando en consideración que: [[$KL - b$]] [[$NL - c$]] [[$BA - x$]] [[$GA - a$]] [[$CB - y$]]]] designa los valores señalados en la imagen original

La ecuación [[que Descartes desarrolló || buscando la relación del punto C || involucrando $a, x, b, c,$ || y tomando en consideración que: [[$KL - b$]] [[$NL - c$]] [[$BA - x$]] [[$GA - a$]] [[$CB - y$]]]]	designa	los valores señalados en la imagen original
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

2. Teniendo en cuenta esta consideración,



Teniendo en cuenta	esta consideración
Proceso	**Participante**
Mental	Fenómeno

3. Para continuar, puedes observar

Para continuar,	Puedes observar	^TÚ
Conector	**Proceso**	**Participante**
	Mental	Perceptor

4. que en la imagen original se pueden encontrar en su estructura dos pares de triángulos semejantes

que	en la imagen original	se pueden encontrar	en su estructura	dos pares de triángulos semejantes
Conector	**Circunstancia**	**Proceso**	**Circunstancia**	**Participante**
	Locación: Lugar	Existencial	Locación: Lugar	Existente

5. donde deberás de considerar

donde	deberás de considerar	^TÚ
Conjunción	**Proceso**	**Participante**
	Mental	Perceptor

6. que para que cumplan esta condición:

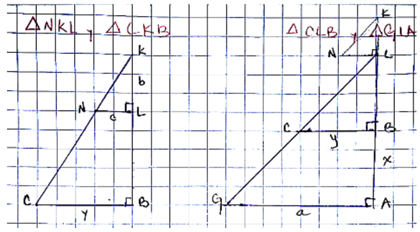
que	para que ^LOS TRIÁNGULOS	cumplan	esta condición:
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

7. 1. Los triángulos tienen los mismos ángulos

1. Los triángulos	tienen	los mismos ángulos
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

8. 2. Los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales (la misma)

2. Los triángulos semejantes	tienen	los lados proporcionales (la misma)
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo



9. Considerando las condiciones [[que deben cumplir los triángulos semejantes]]

Considerando	las condiciones [[que deben cumplir los triángulos semejantes]]
Proceso	**Participante**
Mental	Fenómeno

10. deberás escribir las proporciones [[que cumplen cada par]]

Deberás escribir	^TÚ	las proporciones [[que cumplen cada par]]
Proceso	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Alcance

11. ΔNKL y ΔCKB $=$ [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$]]

ΔNKL y ΔCKB	$=$	[[$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

12. ΔCLB y ΔGLA $=$[[$\frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$]]

ΔCLB y ΔGLA	$=$	[[$\frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

13. Considera

Considera	^TÚ
Proceso	**Participante**
Mental	Perceptor

14. que todos los lados deben tener la misma proporción

que	todos los lados	deberás tener	la misma proporción
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

15. Por eso tienes que igualar las cantidades

Por eso	tienes que igualar	^TÚ	las cantidades
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

16. Primero trabajaremos con la primera equivalencia del primer par de triángulos, ΔNKL y ΔCKB, [[donde despejarás los datos conocidos del desconocido.]]

Primero	trabajaremos	^NOSOTROS	con la primera equivalencia del primer par de triángulos, ΔNKL y ΔCKB, [[donde despejarás los datos conocidos del desconocido.]]
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

17. $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$

$\frac{c}{y}$	$=$	$\frac{b}{KB}$
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

18. $/ \ cKB = by$

/	cKB	$=$	by
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

19. $/ \ \frac{cKB}{c} = \frac{by}{c}$

/	$\frac{cKB}{c}$	$=$	$\frac{by}{c}$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

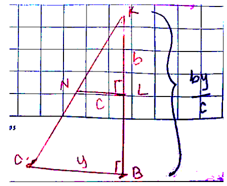
20. $/ \quad KB = \frac{by}{c}$

/	KB	$=$	$\frac{by}{c}$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

21. lo podemos ubicar en nuestro dibujo del par:

^KB	lo podemos ubicar	^NOSOTROS	en nuestro dibujo del par:
Participante	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**
Fenómeno	Mental	Perceptor	Locación: Lugar

22. Teniendo en cuenta



Teniendo	^ESTO en cuenta
Proceso	**Participante**
Mental	Fenómeno

23. despejando la equivalencia del segundo par de triángulos

despejando	la equivalencia del segundo par de triángulos
Proceso	**Participante**
Material	Alcance

24. dejando sola a la longitud LA

dejando	sola	a la longitud LA
Proceso	**Circunstancia**	**Participante**
Relacional:Atributivo	Atributo	Portador

25. Luego realizaremos el mismo ejercicio,

Luego	realizaremos	^NOSOTROS	el mismo ejercicio,
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

26. $\frac{LB}{LA} = \frac{y}{a}$

$\frac{LB}{LA}$	$=$	$\frac{y}{a}$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

27. $/LBa = LAy$

/	LBa	$=$	LAy
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

28. $/\frac{LBa}{y} = \frac{LAy}{y}$

/	$\frac{LBa}{y}$	$=$	$\frac{LAy}{y}$
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

29. $/\frac{LBa}{y} = LA$

/	$\frac{LBa}{y}$	$=$	LA
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

30. Para poder sustituir los valores de LB y LA de la equivalencia [[encontradas del segundo par]]]]

Para	poder sustituir	los valores de LB y LA de la equivalencia [[encontradas del segundo par]]
Conector	**Proceso**	**Participante**
	Material	Alcance

31. es necesario [[buscar la que represente cada longitud.]]

es	necesario	[[buscar la que represente cada longitud.]]
Proceso	**Participante**	**Participante**
Relacional: Atributivo	Atributo	Portador

32. Para la LB debemos de considerar

Para la LB	debemos de considerar	^NOSOTROS
Participante	**Proceso**	**Participante**
Alcance	Mental	Perceptor

33. que se encuentra ubicada en el primer par de triángulos [[donde KB resultó ser igual a $\frac{by}{c}$,]]

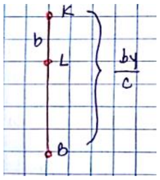
que	^LB	se encuentra ubicada	en el primer par de triángulos [[donde KB resultó ser igual a $\frac{by}{c}$,]]
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

34. por lo tanto, para encontrar el valor LB

por lo tanto,	para	encontrar	el valor LB,
Conector	**Conector**	**Proceso**	**Participante**
		Material	Alcance

35. le podemos restar a $\frac{by}{c}$ la longitud KL [[que tiene el valor de b]]

le podemos restar	^NOSOTROS	a $\frac{by}{c}$	la longitud KL [[que tiene el valor de b]]
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Beneficiario	Alcance



36. quedando de esta manera:

quedando	de esta manera:	^LA EXPRESIÓN
Proceso	**Circunstancia**	**Participante**
Existencial	Manera: Cualidad	Existente

37. $LB = \frac{by}{c} - b$

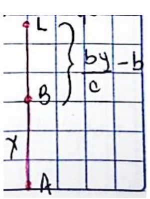
LB	$=$	$\frac{by}{c} - b$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

38. Finalmente para [[obtener el valor de LA]] **es** necesario considerar que la longitud LB también forma parte del segundo par de triángulos,]]

Finalmente	para [[obtener el valor de LA]]	es	necesario	[[considerar que la longitud LB también forma parte del segundo par de triángulos,]]
Conector	**Participante**	Proceso	**Circunstancia**	**Participante**
	Portador	**Relacional: Atributivo**	Manera: Cualidad	Atributo

39. pero ^ES ^NECESARIO [[deber de agregar el valor de la longitud BA [[que es conocido como x,]]]]

pero	^ES	^NECESARIO	[[deber de agregar el valor de la longitud BA [[que es conocido como x,]]]]
Conector	Proceso	**Participante**	**Participante**
	Relacional: Atributivo	Atributo	Portador



40. quedando de esta manera:

quedando	de esta manera:	^LA EXPRESIÓN
Proceso	**Circunstancia**	**Participante**
Existencial	Manera: Cualidad	Existente

41. $LA = \frac{by}{c} - b + x$

LA	$=$	$\frac{by}{c} - b + x$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

42. Por último, sustituye los valores de la equivalencia [[$LA = \frac{LBa}{y}$]] con los valores [[hallados [sic]]] anteriormente para LA y LB

Por último,	^TÚ	sustituye	los valores de la equivalencia [[$LA = \frac{LBa}{y}$]]	con los valores [[hallados [sic]]] anteriormente para LA y LB
Conector	**Participante**	Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
	Actor	Material	Alcance	Acompañamiento: Adición

43. y resuelve la equivalencia:

y	resuelve	^TÚ	La equivalencia
Conector	Proceso	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

44. $\frac{by}{c} - b + x = \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$

$\frac{by}{c} - b + x$	$=$	$\frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

45. $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$

$\frac{by^2}{c} - by + xy$	$=$	$\frac{aby}{c} - ab$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

46. Para concluir

Para	concluir
Conector	Proceso
	Mental

47. y encontrar la ecuación más reducida como la de Descartes

y	encontrar	^TÚ	la ecuación más reducida como la de Descartes
Conjunción	Proceso	**Participante**	**Participante**
	Mental	Perceptor	Fenómeno

48. despeja la y^2.

despeja	^TÚ	la y^2
Proceso	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Alcance

49. $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$

$\frac{by^2}{c} - by + xy$	=	$\frac{aby}{c} - ab$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

50. $\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$

$\frac{by^2}{c}$	=	$\frac{aby}{c} - ab + by - xy$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

51. $by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$

$\frac{by^2}{c}$	=	$c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

52. $\frac{by^2}{b} = \frac{aby-abc+cby}{b} \frac{-cxy}{b}$

$\frac{by^2}{c}$	=	$\frac{aby - abc + cby}{b} \frac{-cxy}{b}$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

53. $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$

y^2	=	$ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

13.4.1.3. Texto de E3

1. Primero que nada, antes de usar de lleno a la determinación de la ecuación,

Primero que nada,	antes de	usar	de lleno	a la determinación de la ecuación,
Circunstancia	**Circunstancia**	**Proceso**	**Circunstancia**	**Participante**
Contingencia: Condición	Contingencia: Condición	Material	Modo	Alcance

2. se tiene que identificar ciertas regularidades [[que existen en la construcción.]]

Se tiene que identificar	ciertas regularidades [[que existen en la construcción.]]
Proceso	**Participante**
Mental	Fenómeno

3. si notamos,

si	notamos	^ NOSOTROS,
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**
Contingencia: Condición	Mental	Perceptor

4. se puede encontrar

se puede encontrar
Proceso
Mental

5. que el triángulo [[formado por NKL]] es semejante al ^TRIÁNGULO [[formado por CKB,]]

que	el triángulo [[formado por NKL]]	es	semejante al ^TRIÁNGULO [[formado por CKB,]]
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

6. ya que sus ángulos son iguales

ya que	sus ángulos	son	iguales
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

7. y, por lo tanto, tienen una razón de proporcionalidad.

y, por lo tanto,	^LOS TRIÁNGULOS	tienen	una razón de proporcionalidad.
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

8. lo mismo ocurre en los triángulos CLB y GLA.

lo mismo ^LA PROPORCIONALIDAD	ocurre	en los triángulos CLB y GLA.
Participante	**Proceso**	**Participante**
Atributo	Relacional: Atributivo	Portador

9. Ahora, antes de pasar a otro paso,

Ahora,	antes de	pasar	a otro paso,
Conjunción	**Circunstancia**	**Proceso**	**Participante**
	Contingencia: Condición	Material	Alcance

10. se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos,

Se tiene que asignar	determinadas literales	a los distintos segmentos,
Proceso	**Participante**	**Participante**
Material	Alcance	Beneficiario

11. pues son las ^LITERALES [[que usarán en la ecuación.]]

pues	son	las ^LITERALES	[[que usarán en la ecuación.]]
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Relacional: Identificativo	Identificado	Identificador

12. en primer lugar, el segmento GA será la $\underline{a}$,

en primer lugar,	el segmento GA	será	la $\underline{a}$,
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

13. el segmento KL será la $\underline{b}$,

el segmento KL	será	la b,
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

14. el segmento NL *será* la $\underline{c}$,

el segmento NL	será	la c,
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

15. el segmento BA será $\underline{x}$

el segmento BA	será	la x,
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

16. y, por último, el segmento CB será y.

y, por último,	el segmento CB	será	la y,
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

17. Una vez hecho esto,

Una vez	hecho	esto,
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**
Contingencia: Condición	Material	Alcance

18. se podrá identificar con más facilidad las relaciones existentes entre estos segmentos.

se puede identificar	con más facilidad	las relaciones existentes entre estos segmentos.
Proceso	**Circunstancia**	**Participante**
Mental	Manera: Cualidad	Fenómeno

19. Lo que [[se procederá a hacer]] será [[empezar a sacar las razones de proporcionalidad de cada triangulo.]]

Lo que [[se procederá a hacer]]	será	[[empezar a sacar las razones de proporcionalidad de cada triangulo.]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

20. se empezará con NKL y CKB.

se empezará	con NKL y CKB.
Proceso	**Participante**
Material	Alcance

21. Como se dijo,

Como	Se dijo
Circunstancia	**Proceso**
Manera: Comparación	Verbal

22. al tener los ángulos iguales,

al	tener	^LOS TRIÁNGULOS	los ángulos iguales,
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

23. los lados serán proporcionales,

los lados	serán	proporcionales,
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

24. entonces, se pueden deducir las siguientes razones de proporcionalidad:

Entonces,	se pueden deducir	las siguientes razones de proporcionalidad:
Conjunción	**Proceso**	**Participante**
	Mental	Fenómeno

25. $\frac{CK}{NK} = [[\frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}]]$

$\frac{CK}{NK}$	=	$[[\frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}]]$
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

26. Se crean estas igualdades,

Se crean	estas igualdades,
Proceso	**Participante**
Existencial	Existente

27. pues todos los lados poseen la misma razón de proporcionalidad.

pues	todos los lados	poseen	la misma razón de proporcionalidad.
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

28. Posteriormente, se tienen que sustituir algunos segmentos con las literales [[que se asignaron anteriormente,]]

Posteriormente,	se tienen que sustituir	algunos segmentos con las literales [[que se asignaron anteriormente,]]
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**
Contingencia: Condición	Material	Alcance

29. con lo que quedaría de esta manera:

con lo que	quedaría	de esta manera:	^LA EXPRESIÓN
Circunstancia	**Proceso**	**Circunstancia**	**Participante**
Acompañamiento: Adición	Existencial	Modo: Manera	Existente

30. $\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$

$\frac{y}{c}$	=	$\frac{KB}{b}$
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

31. Ahora, para poder aislar las literales

Ahora,	para	poder aislar	las literales
Conector	**Conector**	**Proceso**	**Participante**
		Material	Alcance

32. y que no nos estorbe KB,

y que	no nos estorbe	^A NOSOTROS	KB,
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Mental	Perceptor	Fenómeno

33. tenemos [[que pasar]] la ***b*** al lado izquierdo

tenemos [[que pasar]]	^NOSOTROS	la b	al lado izquierdo
Proceso	**Participante**	**Participante**	**Participante**
Material	Actor	Alcance	Benefinciario

34. siguiendo las reglas algebraicas.

siguiendo	las reglas algebraicas.
Proceso	**Participante**
Material	Alcance

35. Quedaría de la siguiente manera:

Quedaría	de esta manera:	^LA EXPRESIÓN
Proceso	**Circunstancia**	**Participante**
Existencial	Manera: Cualidad	Existente

36. $\frac{y}{c}b = KB$

$\frac{y}{c}b$	$=$	KB
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

37. con esto, ya tendríamos nuestra primera parte de la ecuación.

con esto	ya tendríamos	^NOSOTROS	nuestra primera parte de la ecuación.
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
Acompañamiento: Adición	Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

38. lo [[que sigue]] es [[trabajar con los otros 2 triángulos [[que se forman, igualmente semejantes entre sí.]]]]

lo [[que sigue]]	es	[[trabajar con los otros 2 triángulos [[que se forman, igualmente semejantes entre sí.]]]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

39. tenemos a los triángulos GLA y CLB.

^NOSOTROS	tenemos	a los triángulos GLA y CLB.
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

40. de la misma manera, identificamos las razones de proporcionalidad de los lados

de la misma manera,	identificamos	^NOSOTROS	las razones de proporcionalidad de los lados
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
Manera: Comparación	Mental	Perceptor	Fenómeno

41. y deducimos lo siguiente:

y	deducimos	^NOSOTROS	lo siguiente:
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Mental	Perceptor	Fenómeno

42. $\frac{GL}{CL} = [[\frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}]]$

$\frac{GL}{CL}$	=	$[[\frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}]]$
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

43. Ahora, tenemos que sustituir algunos segmentos con las literales.

Ahora,	tenemos que sustituir	^NOSOTROS	algunos segmentos	con las literales.
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Beneficiario	Alcance

44. El problema acá, es [[[[que la $\underline{x}$ no viene representando a un segmento como tal de un triángulo, sino a una parte del segmento LA, [[que vendría siendo BA.]]]]

El problema acá,	es	[[[[que la $\underline{x}$ no viene representando a un segmento como tal de un triángulo, sino a una parte del segmento LA, [[que vendría siendo BA.]]]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

45. Por lo tanto para poder agregar la $\underline{x}$ a nuestra ecuación

Por lo tanto	para poder agregar	la $\underline{x}$	a nuestra ecuación
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Alcance	Beneficiario

46. se tiene que agregar dentro de una operación.

se tiene que agregar	^LA x	dentro de una operación.
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Alcance	Locación: Lugar

47. Es decir, para representar el segmento LA,

Es decir,	para	representar	el segmento LA,
Concector	**Concector**	**Proceso**	**Participante**
		Material	Alcance

48. lo [[que tenemos que hacer]] es [[sumarle a la $\underline{x}$ lo que falta de dicho segmento, o sea, LB.

lo [[que tenemos que hacer]]	es	[[sumarle a la $\underline{x}$ lo que falta de dicho segmento, o sea, LB.
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

49. Así, ya podemos representar nuestra razón de proporcionalidad

Así,	ya podemos representar	^NOSOTROS	nuestra razón de proporcionalidad
Conector	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

50. e, igualarla con la que resulta de $\underline{a}$ e $\underline{y}$.

e,	igualarla	^LA RAZÓN	con la que resulta de $\underline{a}$ e $\underline{y}$.
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
	Material	Actor	Alcance

51. Nos queda así:

Nos queda	así:	^LA EXPRESIÓN
Proceso	**Circunstancia**	**Participante**
Existencial	Manera: Cualidad	Existente

52. $\frac{a}{y} = \frac{LB+x}{LB}$

$\frac{a}{y}$	=	$\frac{LB+x}{LB}$
Participante	Proceso	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

53. [[Claro está,]] no podemos dejarlo así,

[[Claro está,]]	^NOSOTROS	no podemos dejarlo	^LA EXPRESIÓN	así.
Circunstancia	**Participante**	Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
Manera: Cualidad	Actor	Relacional: Atributivo	Portador	Manera: Comparación

54. ya que el término LB nos estorba,

ya que	el término LB	nos estorba	^A NOSOTROS
Conjunción	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Fenómeno	Mental	Perceptor

55. por lo que debemos de buscar [[la forma de representarlo mediante literales.]]

por lo que	debemos de buscar	^NOSOTROS	[[la forma de representarlo mediante literales.]]
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
Causa: Razón	Mental	Perceptor	Fenómeno

56. Si observamos,

si	observamos	^ NOSOTROS
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**
Contingencia: Condición	Mental	Perceptor

57. KA es un segmento [[que está formado por $KL + LB + BA$.]]

KA	es	un segmento [[que está formado por $KL + LB + BA$.]]
Participante	**Proceso**	**Participante**
Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

58. en este caso, el segmento [[que queremos representar]] es $LA\ (LB + BA)$

en este caso,	el segmento [[que queremos representar]]	es	$LA\ (LB + BA)$
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
Locación: Lugar	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

59. y para eso tenemos que hacer a un lado KL.

y	para	eso ^EL REPRESENTAR	tenemos que hacer	^NOSOTROS	a un lado	KL.
Conjunción	**Conector**	**Participante**	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**
		Meta	Material	Actor	Locación: Lugar	Beneficiario

60. Sabemos

Sabemos	^NOSOTROS
Proceso	**Participante**
Mental	Perceptor

61. que $KL = b$

que	KL	$=$	b
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

62. y que $KB = \frac{y}{c}b$.

y que	KB	$=$	$\frac{y}{c}b.$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

63. Si a KB le restamos KL

Si	a KB	le restamos	^NOSOTROS	$\frac{y}{c}b.$
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
Contingencia: Condición	Beneficiario	Material	Actor	Alcance

64. nos quedaría el segmento LB, [[el cual queremos representar]]

nos quedaría	el segmento LB, [[el cual queremos representar]]
Proceso	**Circunstancia**
Existencial	Existente

65. Entonces, si representamos la resta $KB - KL$ con las literales,

Entonces,	si	representamos	^NOSOTROS	la resta $KB - KL$	con las literales,
Conector	**Conjunción**	**Proceso**	**Participante**	**Participante**	**Circunstancia**
		Material	Actor	Alcance	

66. tendríamos esto:

tendríamos	^NOSOTROS	esto:
Proceso	**Participante**	**Participante**
Relacional: Atributivo	Portador	Atributo

67. $\frac{y}{c}b - b = LB$

$\frac{y}{c}b - b$	$=$	LB
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

68. con esta igualdad ya se puede sustituir a LB en nuestra anterior igualdad.

con esta igualdad	ya se puede sustituir	a LB	en nuestra anterior igualdad.
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**	**Participante**
Acompañamiento: Adición	Material	Alcance	Beneficiario

69. Si lo sustituimos,

si	lo ^LB	^NOSOTROS	sustituimos
Circunstancia	**Participante**	**Participante**	**Proceso**
Contingencia: Condición	Alcance	Actor	Material

70. la igualdad resultante sería esta:

la igualdad resultante	sería	esta
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

71. $\frac{a}{y} = \frac{\frac{y}{c}b-b+x}{\frac{y}{c}b-b}$

$\frac{a}{y}$	$=$	$\frac{\frac{y}{c}b-b+x}{\frac{y}{c}b-b}$
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

72. de esta forma, se obtiene una ecuación [[en la que todas las literales están incluidas.]]

de esta forma,	se obtiene	una ecuación [[en la que todas las literales están incluidas.]]
Circunstancia	**Proceso**	**Participante**
Modo: Manera	Existencial	Existente

73. Lo [[que quedaría por hacer]] son algunas operaciones algebraicas

lo [[quedaría por hacer]]	son	algunas operaciones algebraicas
Participante	**Proceso**	**Participante**
Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

74. para que la y^2 quede sola

para que	la y^2	quede	sola
Circunstancia	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
Causa: Razón	Portador	Relacional: Atributivo	Atributo

75. y tendríamos así la ecuación [[a la que descartes llegó.]]

y	tendríamos	^NOSOTROS	así	la ecuación [[a la que descartes llegó.]]
Conjunción	**Proceso**	**Participante**	**Circunstancia**	**Participante**
	Relacional: Atributivo	Poseedor		Atributo

13.4.2. Metafunción Lógica

13.4.2.1. Texto de E1

1. *Plantea* los datos
-*Se debe de involucrar* las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)
-*Se posee* un applet [[que *muestra* lo siguiente]]
-Las variables *son* [[las que *se muestran* en [sic] el lápiz]]

α -*Sabemos*
β˜1 que “a”, “y” y “c” *son* paralelas entre sí.
2 Así como el segmento $\overline{KA}$ *es* perpendicular a ellos.

2. *buscar* relaciones

β Por si *no se ha notado*
α en el applet *se generan* distintos triángulos:

α -Al observar detenidamente,
β˜ α *notamos*
β que algunos triángulos *son* semejantes:

β˜α -*Al* saber
β que *son* semejantes,
1˜α ˜1 podemos plantear su proporción de la siguiente manera:
2 ΔNKL y ΔCKB ^LAS PROPORCIONES ^SON $\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$
3 ^Y ΔCLB y ΔGLA ^LAS PROPORCIONES ^SON $\frac{y}{a} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$
2˜1 -Y *nos quedamos* con las proporciones [[que *contengan* los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)]]:
2 ΔNKL y ΔCKB ^USAMOS $\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$
3 ^Y ΔCLB y ΔGLA ^USAMOS $\frac{y}{a} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$

α **Tomemos* $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$
β debido a que $\overline{LA}$ *contiene* x.

α -*Debemos reemplazar* los datos que importan
β para *poder plantear* la ecuación,

α *empezamos* con $\overline{KB}$,
β esto *se debe* a
γ~1 que tanto b, $\overline{KB}$, $\overline{LB}$ y $\overline{LA}$ *conforman* una misma recta: $\overline{KA}$,
2˜ β y *al despejar* $\overline{KB}$,
α se nos facilitara [[el despejar $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$.]]

α -Planteamos:

β $\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$

1 → Declaramos incógnita

2 → $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$

3 → regla de 3 → $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$

4~1 → Sustituimos

2 y despejamos

3 ^QUEDANDO [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\frac{by}{c}}$]]

β~1 -Al *conocer* el valor de $\overline{KB}$

2 y *al apreciar* detenidamente el applet,

α~α podemos concluir

β~1 que $\overline{LB} = \overline{KB} - b$

2 y $\overline{LA} = \overline{LB} + x$

α -Entonces *sustituimos* en la proporción con el valor real de $\overline{KB}$:

[[$\overline{LB} = \left(\frac{by}{c}\right) - b$,]]

β ^QUEDANDO $\overline{LA} = \left(\frac{by}{c} - b\right) + x$

α -Y *sustituimos*

β para finalmente *despejar*

$$\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)}$$

α → $y\left(\frac{by}{c} - b + x\right) = a\left(\frac{by}{c} - b\right)$

β ^→ $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$

γ ↓ $\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$

δ ^→ $by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$

ε ^→ $by^2 = aby - abc + bcy - cxy$

ζ ^→ $y^2 = \frac{aby-abc+bcy-cxy}{b}$

η ^→ $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$

13.4.2.2. Texto de E2

Ecuación de Descartes
explicación

La ecuación [[que Descartes desarrolló]] buscando la relación del punto C [[involucrando a, x, b, c, | | y tomando en consideración que: [[$KL - b$]] [[$NL - c$]] [[$BA - x$]] [[$GA - a$]] [[$CB - y$]] designa los valores señalados en la imagen original.

β	Teniendo en cuenta esta consideración,
α˜ α	Para continuar, puedes observar
β˜ α	que en la imagen original se pueden encontrar en su estructura dos pares de triángulos semejantes
β˜α	donde deberás de considerar
β˜1	que para que *cumplan* esta condición:
2	1. Los triángulos *tienen* los mismos ángulos
3	2. Los triángulos semejantes *tienen* los lados proporcionales (la misma)

β	Considerando las condiciones [[que deben cumplir los triángulos semejantes]]
α	deberás escribir las proporciones [[que *cumplen* cada par]]

ΔNKL y ΔCKB = [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$]]
ΔCLB y ΔGLA =[[$\frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$]]

α	Considera
β˜α	que todos los lados deben tener la misma proporción.
β	Por eso tienes que igualar las cantidades

1	Primero trabajaremos con la primera equivalencia del primer par de triángulos, ΔNKL y ΔCKB,
2	donde *despejarás* los datos conocidos del desconocido.

α	$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$
β	/ $cKB = by$
γ	/ $\frac{cKB}{c} = \frac{by}{c}$
δ	/ $KB = \frac{by}{c}$

β	lo podemos ubicar en nuestro dibujo del par:
α˜ α	Teniendo en cuenta
β	despejando la equivalencia del segundo par de triángulos
γ	dejando sola a la longitud LA

Luego realizaremos el mismo ejercicio,

α	$\frac{LB}{LA} = \frac{y}{a}$
β	/ $LBa = LAy$

γ $\frac{LBa}{y} = \frac{LAy}{y}$
δ $\frac{LBa}{y} = LA$

β Para poder sustituir los valores de LB y LA de la equivalencia [[encontradas del segundo par]]
α es necesario [[buscar la que represente cada longitud.]]

α Para la LB debemos de considerar
β ˜ α que se encuentra ubicada en el primer par de triángulos [[donde KB *resultó ser* igual a $\frac{by}{c}$,]]
β ˜ 1 ,por lo tanto, para *encontrar* el valor LB
2 ˜ α le *podemos restar* a $\frac{by}{c}$ la longitud KL [[que *tiene* el valor de b]]
β quedando de esta manera:
γ $LB = \frac{by}{c} - b$
β Finalmente para *obtener* el valor de LA
α ˜ 1 es necesario considerar
2 que la longitud LB también *forma* parte del segundo par de triángulos,
3 ˜ α pero ^ES NECESARIO *deber de agregar* el valor de la longitud BA [[que *es conocido* como x,]]
β quedando de esta manera:

γ $LA = \frac{by}{c} - b + x$

1 Por último, sustituye los valores de la equivalencia [[$LA = \frac{LBa}{y}$]] con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB
2 y resuelve la equivalencia:

α $\frac{by}{c} - b + x = \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$
β $\wedge\!\!\longrightarrow \frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$

α~1 Para concluir
2 y encontrar la ecuación más reducida <<como la de Descartes>>
β *despeja* la y^2.

α $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$
β $\wedge\!\!\longrightarrow \frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$
γ $\wedge\!\!\longrightarrow by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$
δ $\wedge\!\!\longrightarrow \frac{by^2}{b} = \frac{aby - abc + cby}{b} \frac{-cxy}{b}$
η $\wedge\!\!\longrightarrow y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$

13.4.2.3. Texto de E3

α	Primero que nada, antes de usar de lleno a la determinación de la ecuación,
β	se tiene que identificar ciertas regularidades [[que *existen* en la construcción.]]

α	si *notamos*,
β ˜ α	*se puede encontrar*
β ˜ α	que el triángulo [[*formado* por NKL]] *es* semejante al ^TRIÁNGULO [[*formado* por CKB,]]
β ˜ α	ya que sus ángulos *son* iguales
β ˜ 1	y, por lo tanto, *tienen* una razón de proporcionalidad.
2	lo mismo *ocurre* en los triángulos CLB y GLA.

α	Ahora, antes de pasar a otro paso,
β ˜ α	se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos,
β	pues *son* las ^LITERALES [[que *usarán* en la ecuación.]]

1	en primer lugar, el segmento GA *será* la ***a***,
2	el segmento KL *será* la ***b***,
3	el segmento NL *será* la ***c***,
4	el segmento BA *será* ***x*** y, por último,
5	el segmento CB *será* ***y***.

α	Una vez hecho esto,
β	se podrá identificar con más facilidad las relaciones existentes entre estos segmentos.

Lo que se procederá a hacer es [[empezar a sacar las razones de proporcionalidad de cada triangulo.]]

se *empezará* con NKL y CKB.

α	Como se dijo,
β ˜ α	al tener los ángulos iguales,
β ˜ α	los lados serán proporcionales,
β	entonces, *se pueden deducir* las siguientes razones de proporcionalidad:

$$\frac{CK}{NK}=\frac{KB}{KL}=\frac{CB}{NL}$$

α	se crean estas igualdades,
β	pues todos los lados *poseen* la misma razón de proporcionalidad.

α	Posteriormente, que tienen que sustituir algunos segmentos con las literales [[que se asignaron anteriormente,]]
β	con lo que quedaría de esta manera:

$$\frac{y}{c}=\frac{KB}{b}$$

β ˜ 1	Ahora, para poder aislar las literales
2	y que no nos estorbe KB,
α ˜ α	tenemos que pasar la ***b*** al lado izquierdo
β	siguiendo las reglas algebraicas.

Quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{y}{c}b = KB$$

con esto, ya tendríamos nuestra primera parte de la ecuación.

lo [[que sigue]] es [[trabajar con los otros 2 triángulos [[que se forman, igualmente semejantes entre sí.]]]]

tenemos a los triángulos GLA y CLB.

1 de la misma manera, identificamos las razones de proporcionalidad de los lados
2 y deducimos lo siguiente:

$$\frac{GL}{CL} = \frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}$$

Ahora, tenemos que sustituir algunos segmentos con las literales.

α El problema acá, *es* [[[[que la $\underline{x}$ no viene representando a un segmento como tal de un triángulo, sino a una parte del segmento LA, [[que vendría siendo BA.]]]]
β˜β Por lo tanto para poder agregar la $\underline{x}$ a nuestra ecuación
α˜1 se tiene que agregar dentro de una operación.
2˜β Es decir, para representar el segmento LA,
α lo [[que tenemos que hacer]] es [[sumarle a la $\underline{x}$ lo que falta de dicho segmento, o sea, LB.

1 Así, ya *podemos representar* nuestra razón de proporcionalidad
2 e *igualarla* con la que resulta de $\underline{a}$ e $\underline{y}$.

Nos queda así:

$$\frac{a}{y} = \frac{LB + x}{LB}$$

α Claro está, no podemos dejarlo así,
β˜α ya que el término LB nos estorba,
β por lo que debemos de buscar [[la forma de representarlo mediante literales.]]

α Si observamos,
β KA es un segmento [[que está formado por $KL + LB + BA$.]]

1 en este caso, el segmento [[que queremos representar]] es $LA\ (LB + BA)$
2 y para eso tenemos que hacer a un lado KL.

α *Sabemos*
β˜1 que $KL = b$
2 y que $KB = \frac{y}{c}b$.

α Si a KB le restamos KL
β nos quedaría el segmento LB, [[el cual queremos representar.]]

α Entonces, si representamos la resta $KB - KL$ con las literales,
β tendríamos esto:

$$\frac{y}{c}b - b = LB$$

con esta igualdad ya se puede sustituir a LB en nuestra anterior igualdad.

α Si lo sustituimos,
β la igualdad resultante sería esta:

$$\frac{a}{y} = \frac{\frac{y}{c}b - b + x}{\frac{y}{c}b - b}$$

de esta forma, se obtiene una ecuación [[en la que todas las literales *están* incluidas.]]

1 Lo que [[*quedaría por hacer*]] *son* algunas operaciones algebraicas
2 para que la y^2 *quede* sola
3 y *tendríamos* así la ecuación [[a la que descartes *llegó*.]]

13.4.3. Metafunción Textual

13.4.3.1. Texto de E1

1	1.		Plantea	los datos
2	-	Se debe de	involucrar	las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)
3	-		Se posee	un applet [[que muestra lo siguiente]]
4	-		Las variables	son [[las que se muestran en [sic] el lápiz]]
5	-		Sabemos	^NOSOTROS
6	que		"a", "y" y "c"	son paralelas entre sí
7	Así como		el segmento $\overline{KA}$	es perpendicular a ellos.
8	2.		buscar	relaciones
9	Por si	no	se ha notado	^ESO
10			en el applet	se generan distintos triángulos:
11	-		Al observar	detenidamente,
12			notamos	^NOSOTROS
13	que		algunos triángulos	son semejantes:
14	-		Al saber	^NOSOTROS
15	que		^LOS TRIÁNGULOS	son semejantes,
16		podemos	plantear	su proporción de la siguiente manera:
17			ΔNKL y ΔCKB	^LAS PROPORCIONES ^SON [[$\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]
18	^Y		ΔCLB y ΔGLA	^LAS PROPORCIONES ^SON [[$\frac{y}{a} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$]]
19	- Y		nos quedamos	^NOSOTROS con las proporciones [[que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)]]
20			ΔNKL y ΔCKB	^NOSOTROS ^USAMOS [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]
21			ΔCLB y ΔGLA	^NOSOTROS ^USAMOS [[$\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]
22			*Tomemos	$\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$
23	debido a que		$\overline{LA}$	contiene x.
24	-	Debemos	reemplazar	los datos que importan
25	para	poder	plantear	la ecuación,
26			empezamos	^NOSOTROS con $\overline{KB}$
27			esto	se debe a [[que tanto b, $\overline{\mathrm{KB}}$, $\overline{\mathrm{LB}}$ y $\overline{\mathrm{LA}}$ conforman una misma recta: $\overline{\mathrm{KA}}$,]]
28	y al		al despejar	^NOSOTROS $\overline{\mathrm{KB}}$,

29			^A NOSOTROS	se nos facilitara [[el despejar $\frac{\overline{\mathrm{LB}}}{\overline{\mathrm{LA}}}$.]]
30	-		Planteamos:	^NOSOTROS [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{\mathrm{KB}}}$]]
31	→		Declaramos	^NOSOTROS incógnita
32	→		$\frac{c}{y}$	$= \frac{b}{?}$
33	→		^APLICAMOS	^NOSOTROS ^LA regla de 3
34	→		$\frac{c}{y}$	$= \frac{b}{?}$
35	→		Sustituimos y despejamos	^NOSOTROS ^EN $\frac{c}{y} = \frac{b}{?}$
36			^SE OBTIENE	[[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\frac{by}{c}}$]]
37	-Al		conocer	^NOSOTROS el valor de $\overline{\mathrm{KB}}$
38	y al		apreciar	detenidamente el applet,
39		podemos	concluir	^NOSOTROS
40	que		$\overline{\mathrm{LB}}$	$= \overline{\mathrm{KB}} - b$
41	y ^QUE		$\overline{\mathrm{LA}}$	$= \overline{\mathrm{LB}} + x$
42	-Entonces		sustituimos	en la proporción con el valor real de $\overline{\mathrm{KB}}$:
43	^ENTONCES		$\overline{LB}$	$= \left(\frac{by}{c}\right) - b$,
44	^ENTONCES		$\overline{LA}$	$= \left(\frac{by}{c} - b\right) + x$
45	-y		sustituimos	^NOSOTROS ^LO OBTENIDO ^EN LA PROPORCIÓN
46	para	finalmente	despejar	
47			^SE OBTIENE	[[$\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)}$]]
48	→		$y\left(\frac{by}{c} - b + x\right)$	$= a\left(\frac{by}{c} - b\right)$
49	^ENTONCES		$\frac{by^2}{c} - by + xy$	$= \frac{aby}{c} - ab$
50	↓		$\frac{by^2}{c}$	$= \frac{aby}{c} - ab + by - xy$
51	^ENTONCES		by^2	$= c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$
52	^ENTONCES		by^2	$= aby - abc + bcy - cxy$
53	^ENTONCES		y^2	$= \frac{aby - abc + bcy - cxy}{b}$
54	^ENTONCES		y^2	$= ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$
	Textual	**Interpersonal**	**Experiencial**	
	Tema			**Rema**

13.4.3.2. Texto de E2

1			La ecuación [[que Descartes desarrolló]] buscando la relación del punto C [[involucrando a, x, b, c, | | y tomando en consideración que: [[$KL - b$]] [[$NL - c$]] [[$BA - x$]] [[$GA - a$]] [[$CB - y$]]	designa los valores señalados en la imagen original
2			Teniendo en cuenta	esta consideración,
3	Para continuar	puedes,	observar	^TÚ
4	que		en la imagen original	se pueden encontrar en su estructura dos pares de triángulos semejantes
5	donde	deberás de	considerar	^TÚ
6	que para que		^LOS TRIÁNGULOS	cumplan esta condición:
7	1.		Los triángulos	tienen los mismos ángulos
8	2.		Los triángulos semejantes	tienen los lados proporcionales (la misma)
9			Considerando	las condiciones [[que deben cumplir los triángulos semejantes]]
10		deberás	escribir	^TÚ las proporciones [[que cumplen cada par]]
11			ΔNKL y ΔCKB	$=$ [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$]]
12			ΔCLB y ΔGLA	$=$[[$\frac{y}{a} = \frac{LB}{LA}$]]
13			Considera	^TÚ
14	que		todos los lados	deben tener la misma proporción
15	Por eso	tienes que	igualar	^TÚ las cantidades
16	Primero		trabajaremos	con la primera equivalencia del primer par de triángulos, ΔNKL y ΔCKB, [[donde despejarás los datos conocidos del desconocido.]]
17			$\frac{c}{y}$	$= \frac{b}{KB}$
18	/		cKB	$= by$
19	/		$\frac{cKB}{c}$	$= \frac{by}{c}$
20	/		KB	$= \frac{by}{c}$
21			^KB	lo podemos ubicar en nuestro dibujo del par:
22			Teniendo	^ESTO en cuenta
23			despejando	la equivalencia del segundo par de triángulos
24			dejando	sola a la longitud LA
25	Luego		realizaremos	^NOSOTROS el mismo ejercicio,
26			$\frac{LB}{LA}$	$= \frac{y}{a}$
27	/		LBa	$= LAy$
28	/		$\frac{LBa}{y}$	$= \frac{LAy}{y}$
29	/		$\frac{LBa}{y}$	$= LA$

30	Para		poder sustituir	los valores de LB y LA de la equivalencia [[encontradas del segundo par]]]]
31			es	necesario [[buscar la que represente cada longitud.]]
32			Para la LB	debemos de considerar ^NOSOTROS
33	que		^LB	se encuentra ubicada en el primer par de triángulos [[donde KB resultó ser igual a $\frac{by}{c}$,]]
34	por lo tanto,		para encontrar	^TÚ el valor LB
35		le podemos	restar	^NOSOTROS a $\frac{by}{c}$ la longitud KL [[que tiene el valor de b]]
36			quedando	de esta manera: ^LA EXPRESIÓN
37			LB	$= \frac{by}{c} - b$
38	Finalmente		para [[obtener el valor de LA]]	es necesario [[considerar que la longitud LB también forma parte del segundo par de triángulos,]]
39	pero		^ES NECESARIO	[[deber de agregar el valor de la longitud BA [[que es conocido como x,]]]]
40			quedando	de esta manera: ^LA EXPRESIÓN
41			LA	$= \frac{by}{c} - b + x$
42	Por último,		sustituye	los valores de la equivalencia [[$LA = \frac{LBa}{y}$]] con los valores hallados [sic] anteriormente para LA y LB
43	y		resuelve	^TÚ la equivalencia:
44			$\frac{by}{c} - b + x$	$= \frac{\left(\left(\frac{by}{c}\right) - b\right)a}{y}$
45			$\frac{by^2}{c} - by + xy$	$= \frac{aby}{c} - ab$
46	Para		concluir	
47	y		encontrar	la ecuación más reducida como la de Descartes
48			despeja	^TÚ la y^2.
49			$\frac{by^2}{c} - by + xy$	$= \frac{aby}{c} - ab$
50			$\frac{by^2}{c}$	$= \frac{aby}{c} - ab + by - xy$
51			by^2	$= c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$
52			$\frac{by^2}{b}$	$= \frac{aby - abc + cby}{b} \frac{-cxy}{b}$
53			y^2	$= ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$

Textual	**Interpersonal**	**Experiencial**	
Tema			**Rema**

13.4.3.3. Texto de E3

1	Primero que nada,		antes de	usar ^TÚ de lleno a la determinación de la ecuación,
2		se tiene que	identificar	^POR NOSOTROS ciertas regularidades [[que existen en la construcción.]]
3	si		notamos	^NOSOTROS,
4		se puede	encontrar	
5	que		el triángulo [[formado por NKL]]	es semejante al ^TRIÁNGULO [[formado por CKB,]]
6	ya que		sus ángulos	son iguales
7	y, por lo tanto,		^LOS TRIÁNGULOS	tienen una razón de proporcionalidad.
8			lo mismo ^LA PROPORCIONALIDAD	ocurre en los triángulos CLB y GLA.
9	Ahora,		antes de	Pasar ^TÚ a otro paso,
10		se tiene que	asignar	^POR NOSOTROS determinadas literales a los distintos segmentos,
11	pues		son	las ^LITERALES [[que usarán en la ecuación.]]
12	en primer lugar,		el segmento GA	será la $\underline{a}$,
13			el segmento KL	será la $\underline{b}$,
14			el segmento NL	será la c,
15			el segmento BA	será la x,
16	y, por último,		el segmento CB	será la y,
17			Una vez	hecho ^TÚ esto,
18		se podrá	identificar	^POR NOSOTROS con más facilidad las relaciones existentes entre estos segmentos.
19			Lo que [[se procederá a hacer]]	será [[empezar a sacar las razones de proporcionalidad de cada triangulo.]]
20			se empezará	con NKL y CKB
21			Como	se dijo,
22	al		tener	^LOS TRIÁNGULOS los ángulos iguales,
23			los lados	serán proporcionales,
24	entonces,	se pueden	deducir	las siguientes razones de proporcionalidad:
25			$\frac{CK}{NK}$	$= [[\frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}$
26			Se crean	estas igualdades,
27	pues		todos los lados	poseen la misma razón de proporcionalidad.
28	Posteriormente,	se tienen que	sustituir	^POR TI algunos segmentos con las literales [[que se asignaron anteriormente,]]
29	con lo que		quedaría	de esta manera ^LA EXPRESIÓN:
30			$\frac{y}{c}$	$= \frac{KB}{b}$
31	Ahora, para	poder	aislar	las literales
32	y que	no	nos estorbe	^A NOSOTROS KB,
33		tenemos [[que	pasar]]	la $\underline{b}$ al lado izquierdo
34			siguiendo	^ NOSOTROS las reglas algebraicas.
35			Quedaría	de la siguiente manera ^LA EXPRESIÓN:
36			$\frac{y}{c}b$	$= KB$

37			con esto,	ya tendríamos ^ NOSOTROS nuestra primera parte de la ecuación.
38			lo [[que sigue]]	es [[trabajar con los otros 2 triángulos [[que se forman, igualmente semejantes entre sí.]]]]
39			^ NOSOTROS	tenemos a los triángulos GLA y CLB.
40			de la misma manera,	Identificamos ^NOSOTROS las razones de proporcionalidad de los lados
41	y		deducimos	^NOSOTROS lo siguiente:
42			$\frac{GL}{CL}$	$= [[\frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}]]$
43	Ahora,	tenemos que	sustituir	algunos segmentos con las literales.
44			El problema acá	es [[[[que la x no viene representando a un segmento como tal de un triángulo, sino a una parte del segmento LA, [[que vendría siendo BA.]]]]
45	Por lo tanto	para poder	agregar	^NOSOTROS la x a nuestra ecuación
46		se tiene que	agregar	dentro de una operación.
47	Es decir, para		representar	el segmento LA,
48			lo [[que tenemos que hacer]]	es [[sumarle a la $\underline{x}$ lo que falta de dicho segmento, o sea, LB.
49	Así,	ya podemos	representar	^NOSOTROS nuestra razón de proporcionalidad
50	e,		igualarla	con la que resulta de $\underline{a}$ e $\underline{y}$.
51			Nos queda	así ^LA EXPRESIÓN:
52			$\frac{a}{y}$	$= \frac{LB + x}{LB}$
53		[[Claro está,]]	^NOSOTROS	no podemos dejarlo ^LA EXPRESIÓN así,
54	ya que		el término LB	nos estorba ^A NOSOTROS,
55	por lo que	debemos de	buscar	[[la forma de representarlo mediante literales.]]
56	Si		observamos,	^NOSOTROS
57			KA	es un segmento [[que está formado por $KL + LB + BA$.]]
58			en este caso,	el segmento [[que queremos representar]] es $LA\ (LB + BA)$
59	y para		eso ^EL REPRESENTAR	tenemos que hacer ^NOSOTROS a un lado KL.
60			sabemos	^NOSOTROS
61	que		KL	$= b$
62	y que		KB	$= \frac{y}{c} b.$
63	Si		a KB	le restamos ^NOSOTROS KL
64			nos quedaría	el segmento LB, [[el cual queremos representar]]
65	Entonces, si		representamos	^NOSOTROS la resta $KB - KL$ con las literales,
66			tendríamos	^NOSOTROS esto:
67			$\frac{y}{c} b - b$	$= LB$
68			con esta igualdad	ya se puede sustituir a LB en nuestra anterior igualdad.

69		Si	lo ^LB	sustituimos,
70			la igualdad resultante	sería esta:
71			$\frac{a}{y}$	$= \frac{\frac{y}{c}b - b + x}{\frac{y}{c}b - b}$
72	de esta forma,		se obtiene	una ecuación [[en la que todas las literales están incluidas.]]
73			Lo [[que quedaría por hacer]]	son algunas operaciones algebraicas
74	para que		la y^2	quede sola
75	y		tendríamos	^NOSOTROS así la ecuación [[a la que descartes llegó.]]
	Textual	**Interpersonal**	**Experiencial**	
		Tema		**Rema**

13.4.4 Tabla de frecuencias sobre los elementos de los sistemas de TRANSITIVIDAD, TAXIS, LÓGICO-SEMÁNTICA y TEMA

A continuación, se muestra la tabla de frecuencias que sirvió de base para construir las interpretaciones que se presentaron en el apartado 7.4.2.

TEXTO	Metafución Experiencial							Metafución Lógica							Metafución Textual		
	TRANSITIVIDAD-PROCESOS-							TAXIS		R. LOG-SEM					TEMA EXPERIENCIAL		
	E.	Ma.	Me.	R. A.	R. I.	V.	C.	P.	H.	El.	Ex.	R.	L.	I.	Pa.	Pro.	Cir.
E1	4	19	8	6	16	0	1	14	22	2	14	15	0	5	22	27	5
% Total	7%	35%	15%	11%	30%	0%	2%	39%	61%	6%	39%	42%	0%	14%	41%	50%	9%
E2	3	11	10	11	18	0	0	8	30	2	6	24	0	6	25	23	5
% Total	6%	21%	19%	21%	34%	0%	0%	21%	79%	5%	16%	63%	0%	40%	47%	43%	9%
E3	6	20	12	14	22	1	0	13	25	3	10	21	1	3	34	32	9
% Total	8%	27%	16%	19%	29%	1%	0%	34%	66%	8%	26%	55%	3%	8%	45%	43%	12%
Total por tipo	13	50	30	31	56	1	1	35	77	7	30	60	1	14	81	82	19
% total por tipo	7%	27%	16%	17%	31%	1%	1%	31%	69%	6%	27%	54%	1%	13%	45%	45%	10%

Tabla 73. Tabla de frecuencias sobre los elementos de los sistemas de TRANSITIVIDAD, TAXIS, LÓGICO-SEMÁNTICA y TEMA

13.5. Análisis de los sistemas y mecanismos de intersemiosis

13.5.1 Texto de E1

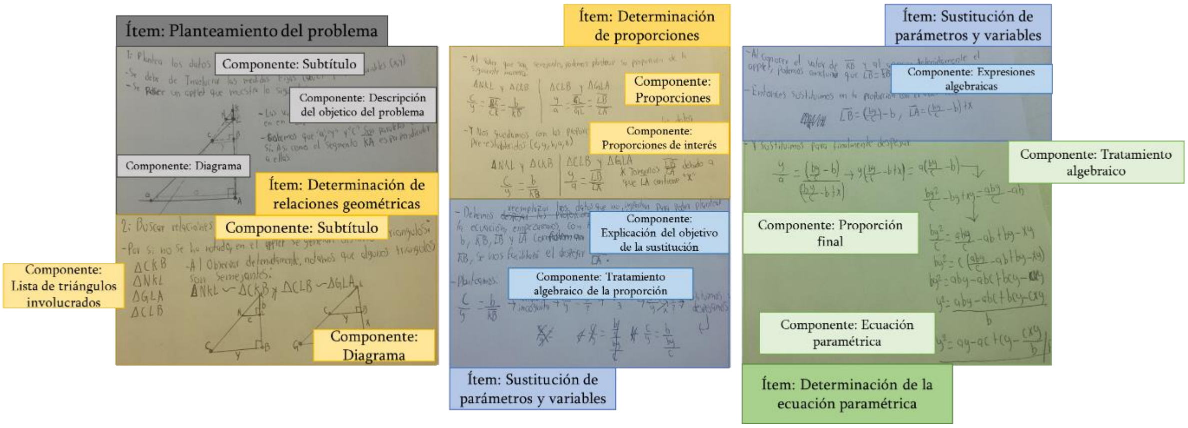
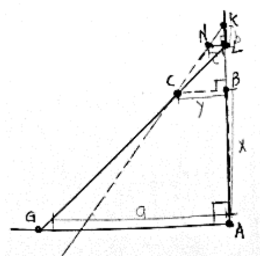


Figura 111. Estructura discursiva en un texto de E1

Texto seccionado por Ítems

1. 1. Plantea los datos
2. -Se debe de involucrar las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)
3. -Se posee un applet [[que muestra lo siguiente]]



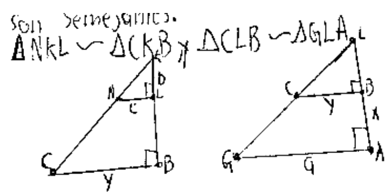
4. -Las variables son [[las que se muestran en [sic] el lápiz]]
5. -Sabemos
6. que "a", "y" y "c" son paralelas entre sí.
7. Así como el segmento $\overline{KA}$ es perpendicular a ellos.

---

8. 2. buscar relaciones
9. -Por si no se ha notado
10. en el applet se generan distintos triángulos:

ΔCKB
ΔNKL
ΔGLA
ΔCLB

11. -Al observar detenidamente,
12. notamos
13. que algunos triángulos son semejantes:



14. -Al saber
15. que son semejantes,
16. podemos plantear su proporción de la siguiente manera:

$\underline{\Delta NKL \text{ y } \Delta CKB}$

17. $\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$

$\underline{\Delta CLB \text{ y } \Delta GLA}$

18. $\frac{y}{a} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$

19. -Y nos quedamos con las proporciones [[que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)]]
20. $\underline{\text{y } \Delta CKB}$
21. $\underline{\text{y } \Delta GLA}$
22. *Tomemos $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$
23. debido a que $\overline{LA}$ contiene $\underline{x}$.

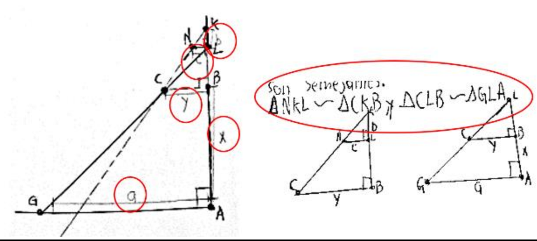
$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$

$\frac{y}{a} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$

24. -Debemos reemplazar los datos que importan
25. para poder plantear la ecuación,
26. empezamos con $\overline{KB}$,
27. esto se debe a [[que tanto b, $\overline{KB}$, $\overline{LB}$ y $\overline{LA}$ conforman una misma recta: $\overline{KA}$,]]
28. y al despejar $\overline{KB}$,
29. se nos facilitara [[el despejar $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$.]]
30. -Planteamos: [[$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$]]
31. → Declaramos incógnita
32. $\rightarrow \frac{c}{y} = \frac{b}{?}$
33. → regla de 3
34. $\rightarrow \frac{c}{y} = \frac{b}{?}$
35. → Sustituimos y despejamos
36. $\frac{c}{y} = \frac{b}{\frac{by}{c}}$
37. -Al conocer el valor de $\overline{KB}$
38. y al apreciar detenidamente el applet,
39. podemos concluir
40. que $\overline{LB} = \overline{KB} - b$
41. y $\overline{LA} = \overline{LB} + x$
42. -Entonces sustituimos en la proporción con el valor real de $\overline{KB}$:
43. $\overline{LB} = \left(\frac{by}{c}\right) - b$,
44. $\overline{LA} = \left(\frac{by}{c} - b\right) + x$

45. -Y sustituimos
46. Para finalmente despejar
47. $\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)}$
48. $\rightarrow y\left(\frac{by}{c} - b + x\right) = a\left(\frac{by}{c} - b\right)$
49. $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$
50. $\downarrow \frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$
51. $by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$
52. $by^2 = aby - abc + bcy - cxy$
53. $y^2 = \frac{aby - abc + bcy - cxy}{b}$
54. $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$

13.5.1.1. Sistemas Intersemióticos

MULTISEMIOSIS			
SIGNIFICADO TEXTUAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	Hay Cohesión Intersemiótica puesto que se recurre, principalmente a la Referencia Directa entre Participantes y Circunstancias de los recursos semióticos de las imágenes, el texto ligüístico y el simbolismo. Por ejemplo, "los datos", "las medidas fijas", "las variables" , "un applet", "distintos triángulos", "las proporciones" etc., los cuales se emplean sistemáticamente para vincular los elementos de las imágenes con la intención de que se den las asociaciones a lo largo del texto con elementos como a, b, c, x, y, ΔNKL y ΔCKB, $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$, etc.
	MEZCLA INTERSEMIÓTICA	X	Las imágenes muestran un claro uso de la mezcla intersemiótica, empleando elementos lingüísticos y simbólicos. 
	ENLACES DISCURSIVOS	X	Las viñetas numéricas tienen la función de especificar los apartados del texto, señalando una progresión discursiva respecto al proceso de resolución. Dejando ver qué es primero y qué después. (Ver Cláusula 1 y 8) C1.1. Plantea los datos C8.2. buscar relaciones
	SUBTÍTULOS		Si bien, los enlaces discursivos tienen la intención de distinguir partes del texto, no son empleadas como subtítulos a los cuales se hace referencia.
LEXICO-GRAMÁTICA	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	La primera sustitución intersemiótica se da en la segunda cláusula cuando E1 establece sin ser explícito la vinculación entre los participantes "las medidas fijas" y "variables" con sus correspondencias simbólicas. C2. "*-Se debe de involucrar las medidas fijas (a, b, c) las variables (x, y)*". Mediante la elipsis con el uso de paréntesis se establece esta sustitución, de tal suerte que en el resto del texto, se emplean los equivalentes simbólicos. De igual forma, otro ejemplo se da en la cláusula 12, en la que se hacer referencia a triángulos que posteriormente aparecen de manera simbólica: C12. "*[[-Por si no se ha notado]] en el applet se generan distintos triángulos*:" ΔCKB ΔNKL ΔGLA

			ΔCLB
	ADOPCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	Además de presentar características similares respecto a los textos antiguos respecto a la adopción semiótica —como el hecho de usar los representantes simbólicos en el lenguaje natural como si fueran de la misma naturaleza semiótica, como en las cláusulas 6 y 27: "*que "a", "y" y "c" son paralelas entre sí*", "*y al despejar KB,*"—, en el texto de E1 puede verse cómo el paradigma del discurso matemático es sumamente diferente al de los textos de Viète y Descartes, puesto que la Adopción Semiótica es tan sistemática que al final del texto, los elementos lingüísticos incluso desaparecen, quedando complejos clausulares simbólicos. Es decir, se adopta el simbolismo al grado de ser un recurso semiótico autónomo en el texto (ver Cláusulas 41-51).
	DEIXIS	X	Los artículos definidos "la", "el" ayudan en términos gramaticales a indicar que el Participante es existente, lo cual induce a rastrearlo en la Imagen. Por otro lado, cuando se emplean los deícticos posesivos y demostrativos como, por ejemplo, en la cláusula 15: "*podemos plantear su proporción de la siguiente manera:*" permiten hacer Referencia Intersemiótica respecto a los Participantes simbólicos o lingüísticos de los triángulos.
	ETIQUETAS	X	El uso de las etiquetas A, B, C, … en la imagen son fundamentales para desarrollar los Significados Textuales y Experienciales.
SIGNIFICADO EXPERIENCIAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	Se identifica la ideación intersemiótica por el hecho, de que las imágenes son empleadas para hacer explícito con qué se está trabajando y a partir de qué tipo de circunstancias se logrará resolver la situación. En este sentido, se deja ver que, al igual que los textos antiguos, la secuencia de actividades estará basada en el análisis de los componentes de la imagen, y progresivamente, se orientará a lo simbólico al emplear la Mezcla Intersemiótica en estas imágenes. Estos procedimientos son a nivel gramatical reforzados a través de relaciones de transitividad, generalmente por medio de Procesos Relacionales que permitirán rastrear en el texto lingüístico las partes de la imagen que están siendo modificadas o, bien que son recuperadas para su tratamiento algebraico.
	SUBTÍTULOS		No hay uso de subtítulos en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X	A través de Procesos Relacionales Identificativos, se establecen Relaciones de Transitividad entre los Participantes del Lenguaje Natural y la Imagen. Por ejemplo en la cláusula 24: "*que tanto b, KB, LB y LA conforman una misma recta: KA,*". O en las cláusulas 38 y 39: "*que* $\overline{LB} = \overline{KB} - b$" "*y* $\overline{LA} = \overline{LB} + x$"
	LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN	X	Se encuentra más presente la simbolización, por ejemplo, al emplear la notación simbólica Δ para representar la palabra "triángulo".
	METÁFORA SEMIÓTICA	X	Las metáforas semióticas son interpretadas con base en la elipsis que se presentan en algunas cláusulas, en las que las ecuaciones, proporciones o imágenes se presentan como equivalentes a

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>“objetos” grupos nominales. Por ejemplo, en las cláusulas 19, 20, 30, 34 y 51, en las que las cláusulas simbólicas se interpretan como resultados: “$\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c}-b\right)}{\left(\frac{by}{c}-b+x\right)}$”, “$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$”.</td></tr>
<tr><td></td><td>ETIQUETAS</td><td>X</td><td>El uso de las etiquetas A, B, C, … en la imagen son fundamentales para desarrollar los Significados Textuales y Experienciales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">SIGNIFICADO LÓGICO</td></tr>
<tr><td>Estrato</td><td>Sistema</td><td>Presencia</td><td>Descripción</td></tr>
<tr><td>SEMÁNTICA DEL DISCURSO</td><td>SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN</td><td>X</td><td>Las secuencias de viñetas numéricas contribuyen al significado lógico.
C1.1. Plantea los datos
C8.2. buscar relaciones</td></tr>
<tr><td>LEXICO-GRAMÁTICA</td><td>LÓGICO-SEMÁNTICA</td><td>X</td><td>La línea vertical que divide las dos cláusulas 19 y 20 indican una relación de EXPANSIÓN del tipo Extensión:
ΔNKL y ΔCKB: $\frac{c}{y} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{b}{\overline{KB}}$ | ΔCLB y ΔGLA: $\frac{y}{a} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$

Mientras que si se observa el complejo clausular de las cláusulas 44-51 observamos flechas como conectores lógicos que destacan la relación de dependencia entre las cláusulas y los resultados que se obtienen a partir de la cláusula previa, funcionando como relaciones de EXPANSIÓN del tipo Realce:
$\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c}-b\right)}{\left(\frac{by}{c}-b+x\right)} \rightarrow y\left(\frac{by}{c}-b+x\right) = a\left(\frac{by}{c}-b\right)$
$\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$
$\downarrow$

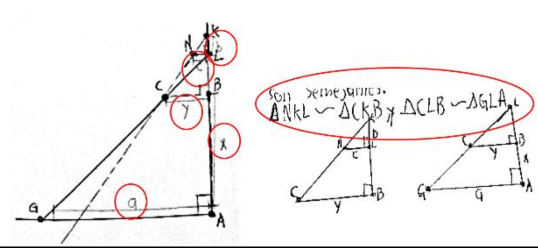
O bien, en el complejo clausular 30-34:
$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}} \rightarrow$ Declaramos incógnita $\rightarrow \frac{c}{y} = \frac{b}{?} \rightarrow$ regla de 3 $\frac{c}{y} = \frac{b}{?} \rightarrow$ Sustituimos y despejamos
$\cancel{\frac{c}{y}} = \quad \cancel{\frac{c}{y}} = \cancel{\frac{\frac{b}{1}}{\frac{by}{c}}} \quad \frac{c}{y} = \frac{b}{\frac{by}{c}}$</td></tr>
<tr><td></td><td>INTERDEPENDENCIA</td><td></td><td>No se identifican relaciones de Interdependencia entre recursos semióticos en el texto.</td></tr>
<tr><td></td><td>INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD</td><td>X</td><td>De igual manera, la espacialidad es empleada para destacar la información relevante, dejando las ecuaciones en líneas separadas, centradas y organizadas una debajo de la otra.

-Y nos quedamos con las proporciones que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x)
ΔNKL y ΔCKB: $\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$ | ΔCLB y ΔGLA: $\frac{y}{a} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$ | *Tomemos $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$ debido a que $\overline{LA}$ contiene x.
-Entonces sustituimos en la proporción con el valor real de $\overline{KB}$:
$\overline{LB} = \left(\frac{by}{c}\right) - b, \overline{LA} = \left(\frac{by}{c} - b\right) + x$</td></tr>
</table>

			-Y sustituimos para finalmente despejar $\frac{y}{a}=\frac{\left(\frac{by}{c}-b\right)}{\left(\frac{by}{c}-b+x\right)} \rightarrow y\left(\frac{by}{c}-b+x\right)=a\left(\frac{by}{c}-b\right)$ $\frac{by^2}{c}-by+xy=\frac{aby}{c}-ab$ $\downarrow$ $\frac{by^2}{c}=\frac{aby}{c}-ab+by-xy$ $by^2=c\left(\frac{aby}{c}-ab+by-xy\right)$ $by^2=aby-abc+bcy-cxy$ $y^2=\frac{aby-abc+bcy-cxy}{b}$ $y^2=ay-ac+cy-\frac{cxy}{b}$
	METÁFORA SEMIÓTICA		No se identifican Metáforas Semióticas Lógicas entre recursos semióticos en el texto.

Tabla 74. Sistemas de intersemiosis en un texto de E1

13.5.1.2. Mecanismos Intersemióticos

MECANISMOS INTERSEMIÓTICOS		
Mecanismo	**Presencia**	**Descripción**
Cohesión Semiótica	X	Hay Cohesión Intersemiótica puesto que se recurre, principalmente a la Referencia Directa entre Participantes y Circunstancias de los recursos semióticos de las imágenes, el texto ligüístico y el simbolismo. Por ejemplo, "los datos", "las medidas fijas", "las variables" , "un applet", "distintos triángulos", "las proporciones" etc., los cuales se emplean sistemáticamente para vincular los elementos de las imágenes con la intención de que se den las asociaciones a lo largo del texto con elementos como a, b, c, x, y, ΔNKL y ΔCKB, $\frac{c}{y}=\frac{b}{\overline{KB}}$, etc.
Adopción Semiótica	X	Además de presentar características similares respecto a los textos antiguos respecto a la adopción semiótica —como el hecho de usar los representantes simbólicos en el lenguaje natural como si fueran de la misma naturaleza semiótica, como en las cláusulas 6 y 27: "*que "a", "y" y "c" son paralelas entre sí*", "*y al despejar KB,*"—, en el texto de E1 puede verse cómo el paradigma del discurso matemático es sumamente diferente al de los textos de Viète y Descartes, puesto que la Adopción Semiótica es tan sistemática que al final del texto, los elementos lingüísticos incluso desaparecen, quedando complejos clausulares simbólicos. Es decir, se adopta el simbolismo al grado de ser un recurso semiótico autónomo en el texto (ver Cláusulas 41-51).
Mezcla semiótica	X	Las imágenes muestran un claro uso de la mezcla intersemiótica, empleando elementos lingüísticos y simbólicos. 

Yuxtaposición y espacialidad	X	La espacialidad es empleada para destacar la información relevante, dejando las ecuaciones en líneas separadas, centradas y organizadas una debajo de la otra. -Y nos quedamos con las proporciones que contengan los datos preestablecidos (c, y, b, a, x) ΔNKL y ΔCKB: $\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$ ΔCLB y ΔGLA: $\frac{y}{a} = \frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$ *Tomemos $\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}}$ debido a que $\overline{LA}$ contiene x. -Entonces sustituimos en la proporción con el valor real de $\overline{KB}$: $\overline{LB} = \left(\frac{by}{c}\right) - b, \overline{LA} = \left(\frac{by}{c} - b\right) + x$ -Y sustituimos para finalmente despejar $\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)} \rightarrow y\left(\frac{by}{c} - b + x\right) = a\left(\frac{by}{c} - b\right)$ $\frac{by^2}{c} - by + xy = \frac{aby}{c} - ab$ $\downarrow$ $\frac{by^2}{c} = \frac{aby}{c} - ab + by - xy$ $by^2 = c\left(\frac{aby}{c} - ab + by - xy\right)$ $by^2 = aby - abc + bcy - cxy$ $y^2 = \frac{aby - abc + bcy - cxy}{b}$ $y^2 = ay - ac + cy - \frac{cxy}{b}$
Transición Semiótica	X	En términos generales se ve Transición Semiótica sistemática, puesto que todo el procedimiento detallado en el Lenguaje Natural hace Referencia a los Participantes del Diagrama, puesto que el Lenguaje Natural explica la forma en la que está siendo construida la figura geométrica del Diagrama. En este sentido, al finalizar el procedimiento por medio de la cláusula 53 "esta es la figura:" se deja ver cómo todo lo anteriormente descrito en el Lenguaje Natural es condensado en la figura geométrica del Diagrama. Descripción del procedimiento para resolver el caso y determinar la regla -> Diagrama.
Metáfora Semiótica	X	Las metáforas semióticas son interpretadas con base en la elipsis que se presentan en algunas cláusulas, en las que las ecuaciones, proporciones o imágenes se presentan como equivalentes a "objetos" grupos nominales. Por ejemplo, en las cláusulas 19, 20, 30, 34 y 51, en las que las cláusulas simbólicas se interpretan como resultados: "$\frac{y}{a} = \frac{\left(\frac{by}{c} - b\right)}{\left(\frac{by}{c} - b + x\right)}$", "$\frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{KB}}$".

Tabla 75. Mecanismos intersemióticos en un texto de E1

13.5.2. Texto de E3

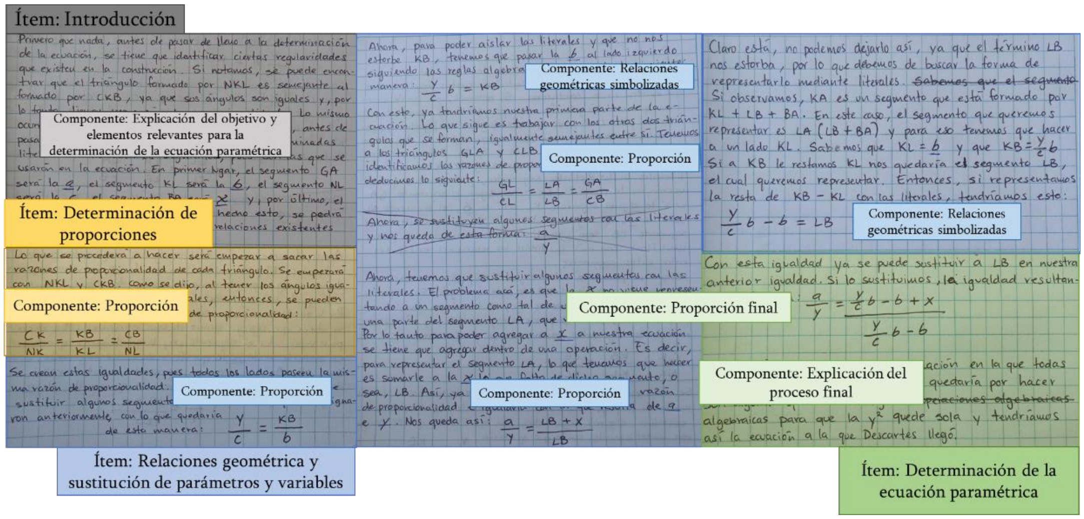


Figura 112. Estructura discursiva en un texto de E3

Texto seccionado por Ítems

1. Primero que nada, antes de usar de lleno a la determinación de la ecuación,
2. se tiene que identificar ciertas regularidades [[que existen en la construcción.]]
3. si notamos,
4. se puede encontrar
5. que el triángulo [[formado por NKL]] es semejante al ^TRIÁNGULO [[formado por CKB,]]
6. ya que sus ángulos son iguales
7. y, por lo tanto, tienen una razón de proporcionalidad.
8. lo mismo ocurre en los triángulos CLB y GLA.
9. Ahora, antes de pasar a otro paso,
10. se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos,
11. pues son las ^LITERALES [[que usarán en la ecuación.]]
12. en primer lugar, el segmento GA será la *a*,
13. el segmento KL será la *b*,
14. el segmento NL será la *c*,
15. el segmento BA será *x*
16. y, por último, el segmento CB será *y*.
17. Una vez hecho esto,
18. se podrá identificar con más facilidad las relaciones existentes entre estos segmentos.

19. Lo que [[se procederá a hacer]] será [[empezar a sacar las razones de proporcionalidad de cada triangulo.]]
20. se empezará con NKL y CKB.
21. Como se dijo,
22. al tener los ángulos iguales,
23. los lados serán proporcionales,
24. entonces, se pueden deducir las siguientes razones de proporcionalidad:
25. $\frac{CK}{NK} = [[\frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}]]$

26. Se crean estas igualdades,
27. pues todos los lados poseen la misma razón de proporcionalidad.
28. Posteriormente, se tienen que sustituir algunos segmentos con las literales [[que se asignaron anteriormente,]]
29. con lo que quedaría de esta manera:
30. $\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$
31. Ahora, para poder aislar las literales
32. y que no nos estorbe KB,
33. tenemos [[que pasar]] la b al lado izquierdo
34. siguiendo las reglas algebraicas.
35. Quedaría de la siguiente manera:
36. $\frac{y}{c}b = KB$
37. con esto, ya tendríamos nuestra primera parte de la ecuación.
38. lo [[que sigue]] es [[trabajar con los otros 2 triángulos [[que se forman, igualmente semejantes entre sí.]]]]
39. tenemos a los triángulos GLA y CLB.
40. de la misma manera, identificamos las razones de proporcionalidad de los lados
41. y deducimos lo siguiente:
42. $\frac{GL}{CL} = [[\frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}]]$
43. Ahora, tenemos que sustituir algunos segmentos con las literales.
44. El problema acá, es [[[[que la x no viene representando a un segmento como tal de un triángulo, sino a una parte del segmento LA, [[que vendría siendo BA.]]]]
45. Por lo tanto para poder agregar la x a nuestra ecuación
46. se tiene que agregar dentro de una operación.
47. Es decir, para representar el segmento LA,
48. lo [[que tenemos que hacer]] es [[sumarle a la x lo que falta de dicho segmento, o sea, LB.
49. Así, ya podemos representar nuestra razón de proporcionalidad
50. e, igualarla con la que resulta de a e y.
51. Nos queda así:
52. $\frac{a}{y} = \frac{LB+x}{LB}$

53. [[Claro está,]] no podemos dejarlo así,
54. ya que el término LB nos estorba,
55. por lo que debemos de buscar [[la forma de representarlo mediante literales.]]
56. Si observamos,
57. KA es un segmento [[que está formado por $KL + LB + BA$.]]
58. en este caso, el segmento [[que queremos representar]] es $LA\ (LB + BA)$
59. y para eso tenemos que hacer a un lado KL.
60. Sabemos
61. que $KL = b$
62. y que $KB\ = \frac{y}{c}b$.
63. Si a KB le restamos KL
64. nos quedaría el segmento LB, [[el cual queremos representar]]
65. Entonces, si representamos la resta $KB - KL$ con las literales,
66. tendríamos esto:

67. $\frac{y}{c}b - b = LB$
68. con esta igualdad ya se puede sustituir a LB en nuestra anterior igualdad.
69. Si lo sustituimos,
70. la igualdad resultante sería esta:
71. $\frac{a}{y} = \frac{\frac{y}{c}b-b+x}{\frac{y}{c}b-b}$
72. de esta forma, se obtiene una ecuación [[en la que todas las literales están incluidas.]]
73. Lo [[que quedaría por hacer]] son algunas operaciones algebraicas
74. para que la $\underline{y^2}$ quede sola
75. y tendríamos así la ecuación [[a la que descartes llegó.]]

13.5.2.1. Sistemas Intersemióticos

MULTISEMIOSIS			
SIGNIFICADO TEXTUAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDENTIFICACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	La Cohesión Intersemiótica a diferencia de E1 y E2 se da únicamente entre el simbolismo y lo lingüístico, puesto que no hay uso de imágenes, aunque el texto puede interpretarse como análogo a los de E1 y E2, por mostrar el uso de componentes léxico-gramaticales similares, como si las imágenes estuvieran presentes. Por ejemplo, "el triángulo", "el segmento", "las literales" , "los lados", "distintos triángulos", "las razones de proporcionalidad" etc., los cuales sirven para vincular los elementos de las imágenes con la intención de que se den las asociaciones a lo largo del texto con elementos como a, b, c, x, y, LB, ΔNKL y ΔCKB, $\frac{c}{y} = \frac{b}{KB}$, etc.
	MEZCLA INTERSEMIÓTICA		No hay uso de imágenes.
	ENLACES DISCURSIVOS		No se identifican enlaces discursivos entre recursos semióticos.
	SUBTÍTULOS		No se identifican.
LEXICO-GRAMÁTICA	SUSTITUCIÓN INTERSEMIÓTICA	X	Las cláusulas 12-16 muestran cómo se da la sustitución intersemiótica: 12. *en primer lugar, el segmento GA será la* $\underline{a}$, 13. *el segmento KL será la* $\underline{b}$, 14. *el segmento NL será la* $\underline{c}$, 15. *el segmento BA será* $\underline{x}$ 16. *y, por último, el segmento CB será* $\underline{y}$.
	<u>ADOPCIÓN INTERSEMIÓTICA</u>	X	A partir de las cláusulas 12-16, en las cláusulas siguientes se recurre a los representantes simbólicos de los segmentos. Como en la cláusula 50: "e, igualarla con la que resulta de $\underline{a}$ e $\underline{y}$." Otro ejemplo es el de las cláusulas 60-65 60. Sabemos

			61. que $\underline{KL = b}$ 62. y que $KB = \frac{y}{c}b$. 63. Si a KB le restamos KL 64. nos quedaría el segmento LB, [[el cual queremos representar]] 65. Entonces, si representamos la resta $\underline{KB - KL}$ con las literales, El texto es más compatible con el de E1 por el hecho de que el uso de la adopción semiótica es sistemático.
	DEIXIS	X	Los artículos definidos "la", "el" ayudan en términos gramaticales a indicar que el Participante es existente, lo cual induce a rastrearlo en la Imagen. Por otro lado, cuando se emplean los deícticos posesivos y demostrativos como, por ejemplo, en la cláusula 6: "*ya que sus ángulos son iguales:*" permiten hacer Referencia Intersemiótica respecto a los Participantes simbólicos o lingüísticos de los triángulos.
	ETIQUETAS	-	El uso de las etiquetas A, B, C, … para referirse a los participantes geométricos queda descontextualizado por el hecho de que no se presenta la imagen para desarrollar de manera robusta los Significados Textuales y Experienciales.
SIGNIFICADO EXPERIENCIAL			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	IDEACIÓN INTERSEMIÓTICA	X	La ideación intersemiótica en este texto es compleja por el hecho de que las imágenes están ausentes, sin embargo, como se ha mencionado antes, la estructura léxico-gramatical concuerda con los textos de E1 y E2 donde se trata de hacer explícito con qué se está trabajando y a partir de qué tipo de circunstancias se logrará resolver la situación. Estos procedimientos son a nivel gramatical reforzados a través de relaciones de transitividad, generalmente por medio de Procesos Relacionales que permitirán rastrear en el texto lingüístico las partes de la imagen que están siendo modificadas o, bien que son recuperadas para su tratamiento algebraico.
	SUBTÍTULOS		No hay uso de subtítulos en el texto.
LEXICO-GRAMÁTICA	RELACIONES DE TRANSITIVIDAD	X	A través de Procesos Relacionales Identificativos, se establecen Relaciones de Transitividad entre los Participantes del Lenguaje Natural y los que corresponderían a la Imagen. Por ejemplo, en las cláusulas 10, 57 y 58 se menciona explícitamente este proceso: "*se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos*,", "*KA es un segmento [[que está formado por KL+ LB+BA*.]]", "*en este caso, el segmento [[que queremos representar]] es LA (LB+BA)*"
	LEXICALIZACIÓN, SIMBOLIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN		No se identifica.
	METÁFORA SEMIÓTICA	X	Las metáforas semióticas son limitadas en el texto de E3, únicamente aparecen cuando se establecen las ecuaciones como

			resultados. Por ejemplo, en las cláusulas 25 y 42: “$\frac{CK}{NK} = [[\frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}]]$,”, “$\frac{GL}{CL} = [[\frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}]]$”.
	ETIQUETAS	X	El uso de las etiquetas A, B, C, … para referirse a los participantes geométricos queda descontextualizado por el hecho de que no se presenta la imagen para desarrollar de manera robusta los Significados Textuales y Experienciales.
SIGNIFICADO LÓGICO			
Estrato	Sistema	Presencia	Descripción
SEMÁNTICA DEL DISCURSO	SECUENCIAS DE IMPLICACIÓN		No se identifican.
LEXICO-GRAMÁTICA	LÓGICO-SEMÁNTICA		No se identifica.
	INTERDEPENDENCIA		No se identifican relaciones de Interdependencia entre recursos semióticos en el texto.
	INTERRELACIÓN DE ESPACIALIDAD Y TEMPORALIDAD	X	Por la limitación de los dos recursos semióticos empleados en el texto de E3, se identifica únicamente la espacialidad para destacar las ecuaciones en líneas separadas, centradas y organizadas una debajo de la otra. proporcionales, entonces, se pueden deducir las siguientes razones de proporcionalidad: $\frac{CK}{NK} = \frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}$ se crean estas igualdades, pues todos los lados poseen la misma razón de proporcionalidad. Posteriormente, que tienen que sustituir algunos segmentos con las literales que se asignaron anteriormente, con lo que quedaría de esta manera: $\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$ Ahora, para poder aislar las literales y que no nos estorbe KB, tenemos que pasar la $\underline{b}$ al lado izquierdo siguiendo las reglas algebraicas. Quedaría de la siguiente manera: $\frac{y}{c}b = KB$ Con esto, ya tendríamos nuestra primera parte de la ecuación. lo que sigue es trabajar con los otros dos triángulos que se forman, igualmente semejantes entre sí. Tenemos a los triángulos GLA y CLB. De la misma manera, identificamos las razones de proporcionalidad de los lados y deducimos lo siguiente: $\frac{GL}{CL} = \frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}$ queda así: $\frac{a}{y} = \frac{LB + x}{LB}$ Claro está, no podemos dejarlo así, ya que el término LB nos estorba, por lo que debemos de buscar la forma de representarlo mediante literales. ~~sabemos que el segmento.~~ Si observamos, KA es un segmento que está formado por $KL + LB + BA$. en este caso, el segmento que queremos representar es $LA\ (LB + BA)$ y para eso tenemos que hacer a un lado KL. Sabemos que $KL = b$ y que $KB = \frac{y}{c}b$. Si a KB le restamos KL nos quedaría el segmento LB, el cual queremos representar. Entonces, si representamos la resta $KB - KL$ con las literales, tendríamos esto: $\frac{y}{c}b - b = LB$ con esta igualdad ya se puede sustituir a LB en nuestra anterior igualdad. Si lo sustituimos, la igualdad resultante sería esta: $\frac{a}{y} = \frac{\frac{y}{c}b - b + x}{\frac{y}{c}b - b}$

	METÁFORA SEMIÓTICA		No se identifican Metáforas Semióticas Lógicas entre recursos semióticos en el texto.

Tabla 76. Sistemas de intersemiosis en un texto de E3

13.5.2.2. Mecanismos Intersemióticos

MECANISMOS INTERSEMIÓTICOS		
Mecanismo	Presencia	Descripción
Cohesión Semiótica	X	La Cohesión Intersemiótica a diferencia de E1 y E2 se da únicamente entre el simbolismo y lo lingüístico, puesto que no hay uso de imágenes, aunque el texto puede interpretarse como análogo a los de E1 y E2, por mostrar el uso de componentes léxico-gramaticales similares, como si las imágenes estuvieran presentes.
Adopción Semiótica	X	A partir de las cláusulas 12-16, en las cláusulas siguientes se recurre a los representantes simbólicos de los segmentos. Como en la cláusula 50: "e, igualarla con la que resulta de <u>*a* e *y*</u>." Otro ejemplo es el de las cláusulas 60-65 60. *Sabemos* 61. *que* <u>$KL = b$</u> 62. *y que* $KB\ = \frac{y}{c} b$. 63. *Si a* <u>*KB le restamos KL*</u> 64. *nos quedaría el segmento* <u>*LB*</u>*, [[el cual queremos representar]]* 65. *Entonces, si representamos la resta* <u>$KB - KL$</u> *con las literales,* El texto es más compatible con el de E1 por el hecho de que el uso de la adopción semiótica es sistemático.
Mezcla semiótica		No se presenta mezcla intersemiótica.
Yuxtaposición y espacialidad	X	Por la limitación de los dos recursos semióticos empleados en el texto de E3, se identifica únicamente la espacialidad para destacar las ecuaciones en líneas separadas, centradas y organizadas una debajo de la otra. proporcionales, entonces, se pueden deducir las siguientes razones de proporcionalidad: $\frac{CK}{NK} = \frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}$ se crean estas igualdades, pues todos los lados poseen la misma razón de proporcionalidad. Posteriormente, que tienen que sustituir algunos segmentos con las literales que se asignaron anteriormente, con lo que quedaría de esta manera: $\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$ Ahora, para poder aislar las literales y que no nos estorbe KB, tenemos que pasar la <u>*b*</u> al lado izquierdo siguiendo las reglas algebraicas. Quedaría de la siguiente manera: $\frac{y}{c} b = KB$ Con esto, ya tendríamos nuestra primera parte de la ecuación. lo que sigue es trabajar con los otros dos triángulos que se forman, igualmente semejantes entre sí. Tenemos a los triángulos GLA y CLB. De la misma manera, identificamos las razones de proporcionalidad de los lados y deducimos lo siguiente: $\frac{GL}{CL} = \frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}$

		queda así: $$\frac{a}{y}=\frac{LB+x}{LB}$$ Claro está, no podemos dejarlo así, ya que el término LB nos estorba, por lo que debemos de buscar la forma de representarlo mediante literales. ~~sabemos que el segmento.~~ Si observamos, KA es un segmento que está formado por $KL + LB + BA$. en este caso, el segmento que queremos representar es $LA\ (LB+BA)$ y para eso tenemos que hacer a un lado KL. Sabemos que $KL = b$ y que $KB = \frac{y}{c}b$. Si a KB le restamos KL nos quedaría el segmento LB, el cual queremos representar. Entonces, si representamos la resta $KB - KL$ con las literales, tendríamos esto: $$\frac{y}{c}b - b = LB$$ con esta igualdad ya se puede sustituir a LB en nuestra anterior igualdad. Si lo sustituimos, la igualdad resultante sería esta: $$\frac{a}{y}=\frac{\frac{y}{c}b-b+x}{\frac{y}{c}b-b}$$
Transición Semiótica	X	En términos generales se ve Transición Semiótica sistemática, puesto que todo el procedimiento detallado en el Lenguaje Natural hace Referencia a los Participantes del Diagrama, puesto que el Lenguaje Natural explica la forma en la que está siendo construida la figura geométrica del Diagrama. En este sentido, al finalizar el procedimiento por medio de la cláusula 53 “esta es la figura:” se deja ver cómo todo lo anteriormente descrito en el Lenguaje Natural es condensado en la figura geométrica del Diagrama. Descripción del procedimiento para resolver el caso y determinar la regla -> Diagrama.
Metáfora Semiótica	X	Las metáforas semióticas son limitadas en el texto de E3, únicamente aparecen cuando se establecen las ecuaciones como resultados. Por ejemplo, en las cláusulas 25 y 42: “$\frac{CK}{NK} = [[\frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}]]$,”, “ $\frac{GL}{CL} = [[\frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}]]$”.

Tabla 77. Mecanismos intersemióticos en un texto de E3