



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

“Gravedad en sistemas análogos”

Tesis que presenta

Alhan Moreno Ruiz

para obtener el Grado de

Doctor en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: Dr. David Bermúdez Rosales

Ciudad de México

Julio, 2023

*En memoria de mi madre,
María Teresa.*

*A mi tía Carmen y mi abuela,
a quienes les debo todo.*

*A Carina,
que no dejó que yo cayera.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi tía María del Carmen y mi abuela Guadalupe por su apoyo incondicional, no solo en estos cuatro años sino toda mi vida, mis logros también les pertenecen a ellas.

Mi gratitud por siempre al Dr. David Bermúdez Rosales por su dedicación y paciencia al dirigirme en este proyecto.

A Carina quien me motivó, acompañó y me brindó su cariño incondicional. A mis amigos Fernando y Jason por su apoyo.

A los miembros del jurado: la Dra. Nora Eva Bretón Báez, el Dr. Alonso Contreras Astorga, el Dr. Pablo Roig Garcés y el Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich, por sus comentarios para hacer de este trabajo el mejor posible.

También menciono al CONAHCyT por la beca de doctorado número 735444, que me permitió dedicarme completamente al desarrollo de este trabajo por los últimos cuatro años, y al CINVESTAV por otorgarme el apoyo para culminar esta tesis.

Alhan Moreno Ruiz

Resumen

En este trabajo repasamos aspectos teóricos sobre gravedad análoga y los aplicamos a casos particulares en sistemas ópticos, acústicos y espejos acelerados. Revisamos la creación de métricas efectivas en sistemas acuáticos y ópticos. En un fluido se crea el análogo del horizonte de eventos a partir de ondas superficiales, mientras que para el sistema óptico el análogo se crea con la luz misma y el efecto Kerr.

Hacemos una descripción a profundidad del efecto Hawking considerando la dispersión para ambos sistemas, donde por medio de una descripción de modos ortonormales y la matriz de dispersión se llega a la emisión de partículas por parte del horizonte y en consecuencia se obtiene la temperatura del sistema que viene dada por una integral compleja.

Luego, usamos este resultado para obtener la temperatura de Hawking de perfiles de velocidad ideales pero útiles para desarrollar aproximaciones para sistemas reales. El perfil de velocidad lineal es la primera aproximación que resolvemos y la que aparece en la literatura. Los perfiles posteriores nos permiten ver cómo la temperatura deja de ser constante debido a la dispersión para los dos sistemas análogos. Posteriormente encontramos una solución para un perfil cuadrático que sólo podemos resolver como una serie infinita. Aplicamos las soluciones lineal y cuadrática a un perfil de velocidad tangente hiperbólica para los casos sónico y óptico y un solitón para el caso óptico.

Por otro lado, hacemos un repaso al efecto Fulling-Davis y obtenemos el espectro de emisión de un par de trayectorias: el espejo negro y el espejo negro cuánticamente puro. El espectro del espejo negro es exactamente el mismo que la de un agujero negro de Schwarzschild. A partir de esta trayectoria se construye el espejo negro cuánticamente puro que soluciona las inconsistencias presentes en la primera.

Se construye el espacio-tiempo generado por la nueva trayectoria del espejo negro cuánticamente puro, que ha recibido el nombre de Schwarzschild-Planck y proponemos un arreglo experimental que recrea dicha métrica en el sistema análogo óptico.

Finalmente, estudiamos la ecuación de Korteweg-de Vries que describe ondas superficiales en un fluido que se mueve, proponemos una solución numérica con distintas condiciones iniciales y obtenemos su evolución temporal.

Abstract

In this work, we review theoretical aspects of analog gravity and apply them to particular cases in optical and acoustic systems and accelerated mirrors. We review creating effective metrics in aquatic and optical systems. In a fluid, the analog of the event horizon is created from surface waves, while for the optical system, the analog is created with the same light and the Kerr effect.

We make an in-depth description of the Hawking effect considering the scattering for both systems, where using a description of orthonormal modes and the scattering matrix we arrive at the emission of particles by the horizon and consequently the temperature of the system that is obtained. is given by a complex integral.

We then use this result to obtain the Hawking temperature of ideal but useful velocity profiles for developing approximations for real systems. The linear velocity profile is the first approximation that we solve and the one that appears in the literature. The subsequent profiles do not allow us to see how the temperature ceases to be constant due to dispersion for the two analogous systems. Later we find a solution for a quadratic profile that we can only solve as an infinite series. We apply the linear and quadratic solutions to a hyperbolic tangent velocity profile for the sonic and optical cases and a soliton for the optical case.

On the other hand, we review the Fulling-Davis effect and obtain the emission spectrum of a pair of trajectories: the black mirror and the quantum pure black mirror. The spectrum of the black mirror is the same as that of a Schwarzschild black hole. From this trajectory the quantum pure black mirror is built that solves the inconsistencies present in the first one.

The space-time generated by the new trajectory of the quantum pure black mirror, which has received the name of Schwarzschild-Planck, is constructed and we propose an experimental arrangement that recreates said metric in the analogous optical system.

Finally, we study the Korteweg-de Vries equation that describes surface waves in a moving fluid, we propose a numerical solution with different initial conditions and we obtain their temporal evolution.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Agujeros negros astrofísicos	4
1.2. Campo cuántico	4
1.3. Efecto Hawking	5
1.4. Problema transplanckiano	8
2. Gravedad análoga	9
2.1. El espacio-tiempo de un agujero negro como un medio móvil	9
2.1.1. Métrica general para un medio que fluye	11
2.2. El agujero negro más simple	11
2.2.1. Cantidades geométricas	12
2.2.2. Gravedad superficial	13
2.3. Ondas de gravedad (<i>gravity waves</i>)	14
2.3.1. Modelo	14
2.3.2. Tensor métrico	15
2.4. Análogo óptico	16
2.4.1. Guía de onda	17
2.4.2. Tensor métrico	19
3. Efecto Hawking en medios dispersivos	21
3.1. Sistema acústico	21
3.1.1. Ecuación de onda	21
3.1.2. Modos <i>in</i> y <i>out</i>	23
3.1.3. Temperatura de Hawking	26
3.2. Análogo óptico	28
3.2.1. Descomposición en modos	29
3.2.2. Modos <i>in</i> y <i>out</i>	30
3.2.3. Temperatura de Hawking	31

4. Temperatura de Hawking en distintos perfiles de velocidad	35
4.1. Sistema acústico	35
4.1.1. Perfil lineal	35
4.1.2. Perfil raíz cuadrada	36
4.1.3. Perfil raíz cúbica	38
4.1.4. Generalización de los perfiles raíz n -ésima	38
4.1.5. Perfil lineal inverso	39
4.1.6. Perfil de Schwarzschild	40
4.1.7. Perfil raíz cúbica inverso	41
4.1.8. Generalización de los perfiles raíz n -ésima inverso	42
4.2. Sistema óptico	43
4.2.1. Perfil lineal	43
4.2.2. Perfil raíz n -ésima inverso	44
4.2.3. Perfil raíz n -ésima	46
4.3. Aproximación a segundo orden	47
4.3.1. Aproximación de segundo orden para perfiles físicos	48
4.4. Solución numérica	49
5. Análogo óptico de la métrica de Schwarzschild-Planck	51
5.1. Coeficientes de Bogoliubov	52
5.1.1. Modos <i>in</i> , <i>out</i> y <i>left</i>	53
5.1.2. Número de partículas	53
5.2. Trayectoria del espejo negro	54
5.2.1. Coeficiente β	55
5.2.2. Espectro térmico	55
5.3. Trayectoria del espejo negro cuánticamente puro	56
5.3.1. Coeficiente β	57
5.3.2. Espectro cuasi-térmico	57
5.4. Espacio-tiempo de Schwarzschild-Planck	58
5.5. Análogo óptico de la métrica de Schwarzschild-Planck	60
5.5.1. Tensor de energía momento y energía total	61
5.5.2. Cantidades geométricas	63
6. Soluciones a la ecuación Korteweg-de Vries	67
6.1. Ecuación Korteweg-de Vries (KdV)	67
6.1.1. Energía	68
6.1.2. Pequeñas perturbaciones	68
6.2. Solución numérica	69
6.2.1. Solitones	70
6.2.2. Ruido como estado inicial	73
7. Conclusiones	77

Artículos científicos originales

A. Moreno-Ruiz and D. Bermudez, "Hawking temperature in dispersive media: Analytics and numerics", *Annals of Physics*, vol. 420, p168268, 2020.

A. Moreno-Ruiz and D. Bermudez, "Optical analogue of the Schwarzschild-Planck metric", *Classical and Quantum Gravity*, vol. 39, p145001, 2022.

Introducción

En 1783, en el marco de la mecánica clásica se propuso un objeto gravitacional tan masivo que la velocidad de escape en su superficie fuera igual o mayor a la velocidad de la luz. Esta fue la primera descripción de un objeto gravitacional que atrapa la luz conocido como estrella negra. John Michell imaginó una estrella con simetría esférica de masa M , cuyo horizonte está definido como la región del espacio de radio r donde la velocidad de escape es igual a la velocidad de la luz c . Una partícula de masa m necesita una energía cinética de $mc^2/2$ para contrarrestar la energía potencial gravitacional GmM/r , donde G es la constante de gravitación de Newton [1].

Después de esto, durante más de un siglo las leyes de Newton sirvieron para describir la gran mayoría de fenómenos físicos de esa época con solo algunas incógnitas. Hasta que en 1915, Albert Einstein propuso las ecuaciones de campo que relacionaban la curvatura geométrica del espacio-tiempo con la energía y el momento [2].

En el mismo año de su descubrimiento, Karl Schwarzschild encontró la primera solución analítica de las ecuaciones de Einstein para una masa esférica. En esta solución se incluye un nuevo objeto del cual nada puede escapar, ni siquiera la luz, fue llamado agujero negro y sus fronteras horizontes de eventos [3]. Sin embargo, en 1974 Stephen Hawking demostró que considerando campos cuánticos en el fondo clásico del agujero negro de Schwarzschild, estos radian con temperatura [4, 5]

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}, \quad (1.0.1)$$

donde \hbar es la constante reducida de Planck, c es la velocidad de la luz, k_B la constante de Boltzman, G la constante gravitacional y M la masa del agujero negro.

La masa mínima de un agujero negro no rotante y sin carga está acotada por el límite de Chandrasekhar [6]. Teniendo esto en consideración, la temperatura tiene un máximo de 4.5×10^{-8} K. Este valor es menor que la radiación cósmica de fondo del universo que es medida por el fondo cósmico de microondas o *cosmic microwave background* (CMB) [7], dificultando la medición de la radiación de un agujero negro astrofísico.

En este capítulo repasaremos los conceptos que llevaron a Hawking a obtener la temperatura del agujero negro.

1.1. Agujeros negros astrofísicos

Einstein propuso sus ecuaciones para relacionar la geometría del espacio-tiempo con la distribución de energía y momento

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.1.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, R es el escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

En 1915 Schwarzschild encontró una solución exacta a la ecuaciones de Einstein que describen el espacio-tiempo producido por un cuerpo masivo en reposo, esféricamente simétrico, que no rota y que no tiene carga [3]. La solución dada en coordenadas (t_s, r, θ, ϕ) ; t_s es el tiempo de Schwarzschild, mientras que r, θ y ϕ son las coordenadas esféricas comunes. La solución tiene la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt_s^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (1.1.2)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2$ es el elemento de línea angular y $r_S = 2GM/c^2$ es el radio de Schwarzschild. En general, esta métrica se usa para describir el espacio vacío fuera de una densidad de masa esférica. Esta métrica presenta dos singularidades en $r = \{0, r_S\}$. La singularidad $r = r_S$ es llamada horizonte de eventos, cuando un cuerpo astrofísico tiene esta singularidad expuesta, se le llama agujero negro. La singularidad en el horizonte de eventos es debida a la mala elección de las coordenadas y se remueve con un cambio de coordenadas, i.e., la única singularidad real es en $r = 0$ [8].

1.2. Campo cuántico

En teoría cuántica de campos, el estado del vacío está descrito por el operador de aniquilación

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0, \quad \forall k, \quad (1.2.1)$$

donde k establece el nivel de energía del campo conforme a la relación de dispersión $\omega(k)$. El estado del vacío cumple

$$\langle 0 | \hat{N}_k | 0 \rangle = 0, \quad (1.2.2)$$

donde $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ es el operador número. El estado vacío representa el nivel más bajo de energía posible para un sistema y en general no contiene partículas.

La mecánica cuántica juega un papel fundamental en el comportamiento de los campos de materia. Aún no se tiene una teoría cuántica de la gravedad, pero como una aproximación se define un esquema consistente en el cual la métrica del espacio-tiempo es tratada de forma clásica y está acoplada a un campo de materia, el cual sí es tratado de forma cuántica. Esto es una aproximación semiclásica.

De acuerdo a la relatividad general clásica, un agujero negro puede absorber materia y su tamaño jamás disminuirá [9]. Hawking descubrió en 1974 que si se considera un

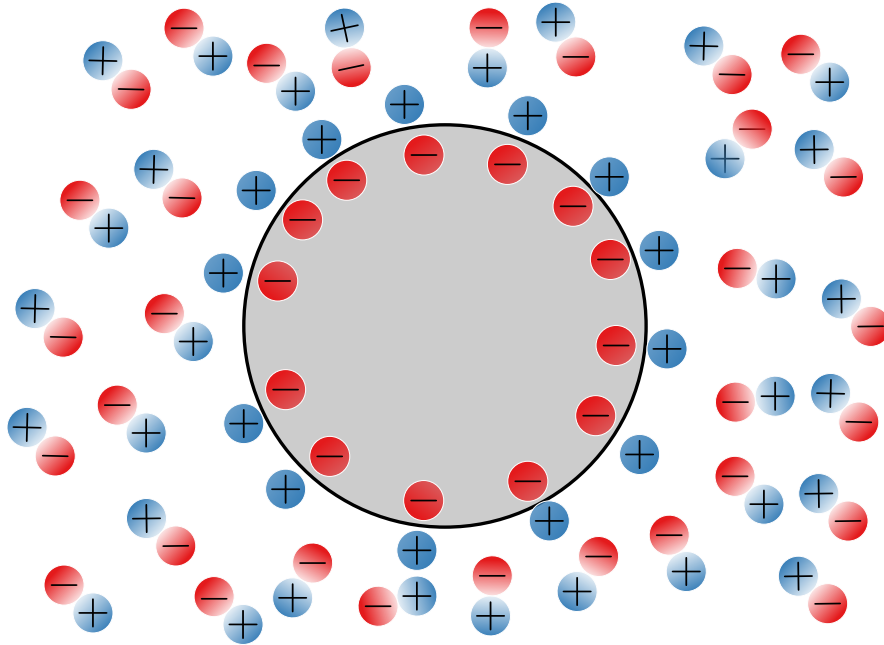


Figura 1.1: Creación y aniquilación de partículas virtuales alrededor de un agujero negro, el círculo es el radio de Schwarzschild. La región gris es el interior del agujero negro y la blanca el exterior.

campo cuántico en el fondo clásico del agujero negro, este emite radiación de partículas y por lo tanto se evapora [4].

Una forma bastante sencilla de comprender lo que ocurre en el mecanismo es considerar un par de partículas virtuales en la vecindad del horizonte de eventos. Por la curvatura del espacio-tiempo hay estados con energía negativa dentro del horizonte, mientras que afuera hay estados con energía positiva. La primera partícula no puede escapar mientras que la segunda sí escapa y se convierte en una partícula real como se muestra en la figura 1.1.

1.3. Efecto Hawking

Para estudiar el efecto Hawking se hace la aproximación de suponer que los campos de materia obedecen una ecuación de onda común, pero la métrica de Minkowski es reemplazada por la métrica del espacio-tiempo de un agujero negro (1.1.2) [5]. Para ver cómo surge la emisión térmica consideramos por simplicidad un campo escalar, sin masa, hermitiano ϕ , el cual obedece la ecuación de onda covariante

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi = 0, \quad (1.3.1)$$

en el espacio-tiempo asintótico de una estrella que colapsará para producir un agujero negro. El tensor $g^{\mu\nu}$ en coordenadas del cono de luz tortuga (u, v) tiene la forma

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \frac{r_S}{r} \\ 1 - \frac{r_S}{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3.2)$$

que diverge cuando $r = r_S$, por lo que estas soluciones no representan el espacio-tiempo de forma completa.

El operador de campo se expresa en los modos estacionarios

$$\hat{\phi}(u, v) = \sum_i \left(f_i(u, v) \hat{a}_i + f_i^*(u, v) \hat{a}_i^\dagger \right), \quad (1.3.3)$$

donde f_i son una familia completa de funciones ortonormales, que son solución de la ecuación de onda (1.3.1) y que caracterizan los modos con frecuencia positiva. Mientras que los operadores \hat{a}_i y \hat{a}_i^\dagger son interpretados como operadores de aniquilación y creación, respectivamente, para las partículas con frecuencia positiva.

El operador de campo $\hat{\phi}$ puede ser expresado en términos de soluciones que representan modos entrantes y salientes que cruzan el horizonte de eventos. Para esto se hace un cambio a coordenadas que cubran todo el espacio-tiempo, el tensor métrico ahora es representado en las coordenadas cono de luz de Kruskal (U, V)

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r_S}{r(U, V)} \exp \left[1 - \frac{r(U, V)}{r_S} \right] \\ \frac{r_S}{r(U, V)} \exp \left[1 - \frac{r(U, V)}{r_S} \right] & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3.4)$$

hay que señalar que se remueve la divergencia en $r = r_S$ (horizonte de eventos) y solo queda la divergencia en $r = 0$ (singularidad). Por lo que ahora podemos representar el campo en $r > 0$. El operador de campo ahora se representa en un nuevo conjunto de operadores y eigenfunciones

$$\hat{\phi}(U, V) = \sum_i \left(p_i(U, V) \hat{b}_i + p_i^*(U, V) \hat{b}_i^\dagger \right). \quad (1.3.5)$$

Las funciones p_i son solución a la ecuación de onda (1.3.1), su valor es cero en el horizonte de eventos y son asintóticamente salientes con frecuencia positiva. Existe una relación lineal entre ambos grupos de funciones f_i y p_i dada por

$$p_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*). \quad (1.3.6)$$

Los coeficientes α y β son llamados coeficientes de Bogoliubov y (1.3.6) es la *transformación de Bogoliubov*. A partir de esta relación puede apreciarse que el estado de vacío definido en (1.2.1) es en general diferente al estado vacío $|\tilde{0}\rangle$, que satisface

$$\hat{b}_i |\tilde{0}\rangle = 0, \quad \forall i. \quad (1.3.7)$$

Lo que se debe establecer a continuación es cuál es el estado del vacío del sistema, ya que (1.2.1) y (1.3.7) no representan al mismo estado. Al considerar un observador en el infinito se podría pensar que el estado está descrito por el estado $\hat{a}_k |0\rangle = 0$ en las coordenadas tortuga. Sin embargo, el campo en este estado tiene una energía infinita cerca del horizonte (inclusive restando la energía del punto cero). Además de que cualquier densidad de energía influye en la métrica a través de las ecuaciones de Einstein (1.1.1).

Una densidad de energía que diverge indica que la reacción inversa de las fluctuaciones cuánticas en el estado $|0\rangle$ son tan grandes cerca del horizonte que la métrica de Schwarzschild no es una buena aproximación para el espacio-tiempo resultante, por lo que la idea de que el estado del vacío sea descrito por $|0\rangle$ es inconsistente. Por otro lado, el campo en el estado $|\tilde{0}\rangle$ tiene una densidad de energía finita en el horizonte (despreciando la energía de punto cero). En este caso, la reacción inversa de las fluctuaciones cuánticas en la métrica son despreciables. Por lo tanto, en la presencia de un agujero negro clásico [9] uno tiene que emplear el estado de vacío $|\tilde{0}\rangle$ en lugar del estado $|0\rangle$ para describir campos cuánticos alrededor del horizonte de eventos.

Ahora calculemos el número de partículas del operador \hat{N}_k en el estado $|\tilde{0}\rangle$

$$\langle \tilde{0} | \hat{N}_k | \tilde{0} \rangle = \langle \tilde{0} | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k | \tilde{0} \rangle. \quad (1.3.8)$$

Podemos relacionar ambos pares de operadores mediante una transformación lineal, que recibe el nombre de transformación de Bogoliubov

$$\hat{a}_k = \sum_j \left(\alpha_{jk} \hat{b}_j^\dagger + \beta_{jk} \hat{b}_j \right), \quad (1.3.9a)$$

$$\hat{a}_k^\dagger = \sum_j \left(\alpha_{ik}^* \hat{b}_i + \beta_{ik}^* \hat{b}_i^\dagger \right), \quad (1.3.9b)$$

sustituyendo la transformación en la ecuación (1.3.8) obtenemos

$$\langle \tilde{0} | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k | \tilde{0} \rangle = \sum_{j,i} \langle \tilde{0} | \left(\alpha_{ik}^* \hat{b}_i + \beta_{ik}^* \hat{b}_i^\dagger \right) \left(\alpha_{jk} \hat{b}_j^\dagger + \beta_{jk} \hat{b}_j \right) | \tilde{0} \rangle,$$

y utilizando las propiedades de los operadores de aniquilación y creación la expresión se reduce a

$$\langle \tilde{0} | \hat{N}_k | \tilde{0} \rangle = \sum_m |\beta_{km}|. \quad (1.3.10)$$

Es decir, el vacío contiene partículas para un observador en el infinito.

Para encontrar la forma de β_{km} , se suponen soluciones de onda plana para las funciones $f_i(u, v)$ y $p_i(\tilde{u}, \tilde{v})$

$$f_i(u, v) = \exp[i\omega(u + v)], \quad p_i(U, V) = \exp[i\Omega(U + V)]. \quad (1.3.11)$$

Hacemos uso de la condición de colapso gravitacional para un cascarón esférico [10]

$$u(U) = U - \frac{c}{\kappa} \ln \left| \frac{\kappa U}{c} \right|, \quad (1.3.12)$$

donde $\kappa = c^2/(2r_S)$ nos permite relacionar las coordenadas de Kruskal con las tortuga. Así obtenemos

$$\langle \tilde{0} | \hat{N}_k | \tilde{0} \rangle = \left[\exp \left(\frac{2\pi c \omega}{\kappa} \right) - 1 \right]^{-1}, \quad (1.3.13)$$

que al comparar con la distribución de partículas bosónicas [9]

$$n(E) = \left[\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (1.3.14)$$

sin masa, momento ω y energía $E = \hbar|\omega|$, notamos que tienen la misma forma. Obtenemos la temperatura de Hawking igualando las ecuaciones (1.3.13) y (1.3.14)

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}. \quad (1.3.15)$$

Un observador en infinito medirá un espectro térmico de partículas con esta temperatura.

La producción de partículas es consecuencia directa del hecho de que el vacío visto por un observador asintótico no es el mismo que el de un observador cayendo hacia el agujero negro. Es importante señalar que la interpretación de partícula cerca del horizonte de eventos es precisa pero distinta a la del observador que cae, porque las partículas de Hawking tienen longitudes de onda comparables al tamaño del horizonte. Además, el argumento previo acerca del estado del vacío no está particularmente relacionado con la gravedad, es independiente de las ecuaciones de campo de Einstein, se aplica para un espacio-tiempo curvo en general. Otra propiedad importante de la radiación de Hawking es que las partículas están enredadas [1] pero el par de partículas está separado por el horizonte por lo que su enredamiento no puede ser observado.

1.4. Problema transplanckiano

Los cálculos que llevan a la conclusión de que un agujero negro astrofísico radia dependen de la validez de la teoría cuántica de campos en un fondo curvo para energías grandes [11]. Debemos tener en cuenta que la frecuencia no es una cantidad invariante, sino que depende del observador. Como consecuencia, si centramos nuestra atención en un paquete de ondas en el futuro infinito tendrá cierta frecuencia medida por un observador; sin embargo, si retrocedemos en el tiempo, el paquete de ondas tendrá una frecuencia mayor debido al efecto Doppler. Cuanto más cerca se origine el paquete de ondas del horizonte de eventos, su frecuencia es mayor y su longitud de onda se reduce [12]. En otras palabras, la radiación de Hawking se origina en longitudes de onda extremadamente cortas, mucho menores que la escala de Planck, dada por

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}. \quad (1.4.1)$$

Se espera que las teorías físicas conocidas fallen en la escala de Planck, cualquier nueva teoría en esta escala afectará a la radiación de Hawking. Esto es conocido como el problema transplanckiano. Una futura teoría cuántica de la gravedad deberá explicar el comportamiento de los campos en las cercanías del horizonte de eventos. Por lo tanto, la validez de la aproximación semiclásica usada para derivar la radiación de Hawking está en duda.

Gravedad análoga

Hace más de 40 años, en 1981, Unruh propuso estudiar el efecto Hawking en sistemas análogos [13]. Aunque en un comienzo esta propuesta pasó sin ser reconocida, sus ideas tomaron especial relevancia en las dos últimas décadas, como se muestra el histograma de citas de la figura 2.1, dando paso a una nueva área de investigación llamada gravedad análoga.

La gravedad análoga estudia fenómenos usualmente relacionados con gravedad con otros sistemas físicos. Las propiedades de la relatividad general que son descritas por los modelos análogos son las cinemáticas (es decir que dependen de la métrica) y no dinámicas (que dependen directamente de las ecuaciones de Einstein). Su estudio se basa en la existencia de una métrica efectiva que codifica la noción de espacio-tiempo de la relatividad general [11]. En este capítulo veremos cómo se generan las métricas en sistemas físicos análogos.

2.1. El espacio-tiempo de un agujero negro como un medio móvil

Las trayectorias de luz para la métrica de Schwarzschild (1.1.2) son

$$\frac{dt_s}{dr} = \pm \frac{1}{c} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}. \quad (2.1.1)$$

Lejos del radio de Schwarzschild $r \gg r_S$ se tiene que $|dt_s/dr| \rightarrow 1/c$, así que la luz se comporta como si viajara en el espacio plano. Sin embargo, $|dt_s/dr|$ diverge cuando nos aproximamos al radio de Schwarzschild por lo que la luz viaja muy lentamente [14].

Como ya se mencionó anteriormente, la singularidad $r = r_S$ no es una singularidad del espacio-tiempo, esto se ve claramente al hacer un cambio de coordenadas, para este caso usamos las coordenadas de Painlevé [15], Lemaitre [16], Gullstrand [17] (PLG)

$$t = t_s + 2\frac{\sqrt{r_S r}}{c} + \frac{r_S}{c} \ln \left(\frac{\sqrt{r/r_S} - 1}{\sqrt{r/r_S} + 1} \right), \quad (2.1.2)$$

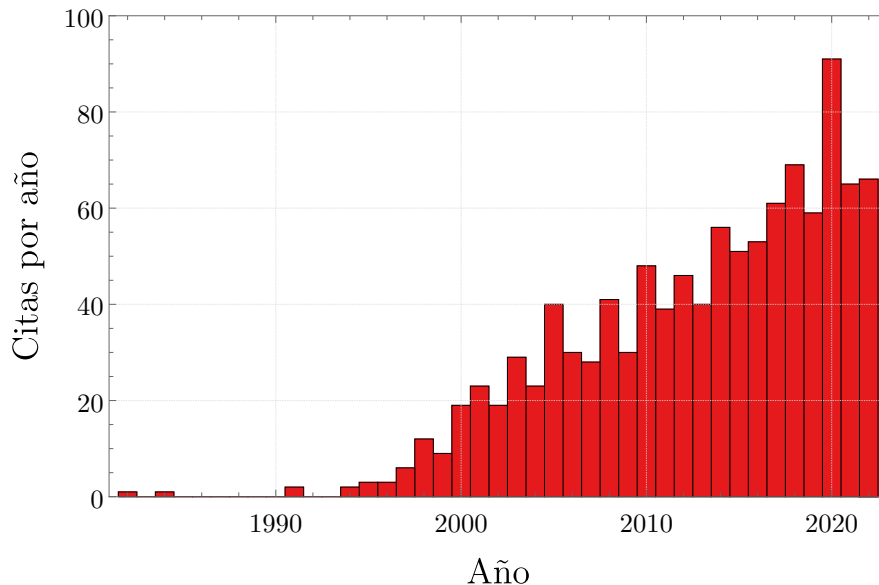


Figura 2.1: Histograma de citas del artículo *Experimental Black Hole Evaporation?* [13]

sustituyéndolo en la métrica de Schwarzschild (1.1.2), obtenemos una nueva representación

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(dr + \sqrt{\frac{r_S}{r}} c dt \right)^2, \quad (2.1.3)$$

conocida como métrica de Schwarzschild en las coordenadas de PLG.

Encontramos las dos geodésicas nulas fijando $ds^2 = 0$

$$\frac{dt}{dr} = \mp \frac{1}{c} \left(1 \pm \sqrt{\frac{r_S}{r}} \right)^{-1}. \quad (2.1.4)$$

Estas ecuaciones representan las trayectorias de un fotón que se copropaga y contrapropaga respecto a la dirección en la que fluye el espacio-tiempo y tiene una velocidad total $c - c\sqrt{r_S/r}$. Un fotón localizado en el horizonte parece estático, ya que la velocidad del espacio-tiempo y la velocidad del fotón son iguales en magnitud, pero contrarias en dirección. Por otro lado, un fotón localizado fuera del horizonte de eventos escapa muy lentamente al principio, pero su velocidad incrementa conforme se aleja. Finalmente, un fotón localizado en la cercanía del radio de Schwarzschild tendrá una velocidad total negativa y por consiguiente, no puede escapar y eventualmente llega a la singularidad ($r = 0$). Esta geodésica define un marco de referencia inercial, que llamaremos marco comóvil, en este marco la velocidad de la luz es c . En la figura 2.2, los casos que mencionamos para la luz: en rojo, los fotones que se originan dentro del horizonte de eventos no escapan y viajan a la singularidad, mientras que los que se originan fuera del horizonte, como lo mencionamos les toma cierto tiempo, pero logran escapar. La ecuación (2.1.4) con signos menos y más representa la trayectoria de un fotón que se propagan con el fluido, con una velocidad total $-c - c\sqrt{r_S/r}$, se grafican en azul en la figura 2.2 [13].

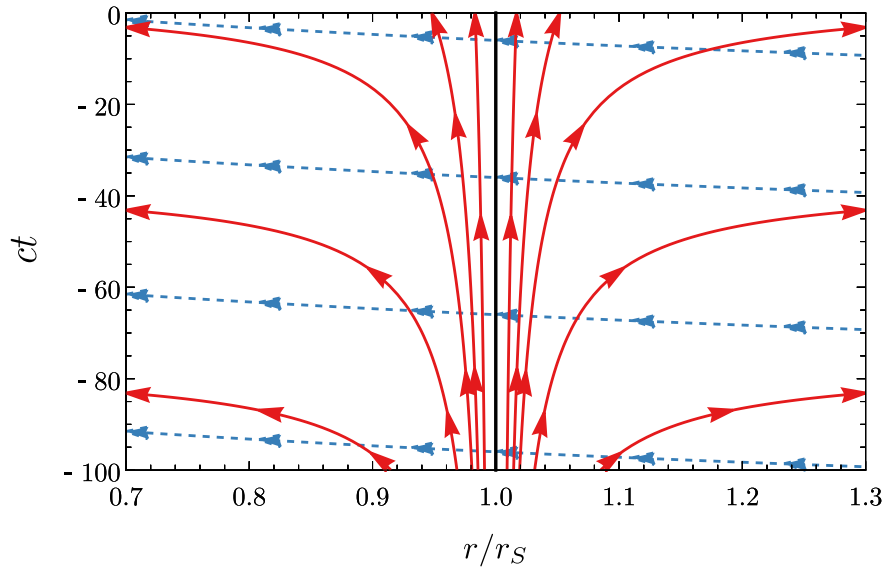


Figura 2.2: Trayectorias que sigue la luz cerca del radio de Schwarzschild. Las líneas azules punteadas representan las trayectorias de fotones copropagantes que viajan hacia la singularidad y las trayectorias rojas continuas las trayectorias de los fotones contra-propagantes que intentan escapar de la singularidad.

2.1.1. Métrica general para un medio que fluye

De la métrica de Schwarzschild en coordenadas PLG (2.1.3) podemos interpretar el espacio-tiempo como un fluido. En la figura 2.3 se observa como el espacio-tiempo viaja hacia un agujero negro o fluye desde un agujero blanco que es el inverso temporal de un agujero negro. Esta analogía con un medio en movimiento forma la base para los agujeros negros artificiales y los horizontes de eventos análogos. Reemplazamos el factor $c\sqrt{r_S/r}$ en la ecuación (2.1.3) con un perfil de velocidades general $u(r)$ y la métrica se expresa como [13]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr + u(r)dt)^2, \quad (2.1.5)$$

donde c es interpretada como la velocidad de las ondas respecto del medio (no necesariamente la velocidad de la luz) y u es la velocidad del medio en que se propagan dichas ondas. Por otro lado, también podemos permitir que la métrica efectiva se origine por interacciones distintas a las gravitacionales. De ahora en adelante supondremos que el medio se mueve hacia la izquierda, así que $u < 0$. De la ecuación (2.1.5) obtenemos el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 - u^2 & -u \\ -u & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

2.2. El agujero negro más simple

La relatividad general en sistemas que sólo poseen una dimensión espacial y una temporal o (1+1)D, se comporta de manera muy distinta a la de los sistemas (3+1)D, ya que se presentan inconsistencias sutiles que impiden la conexión entre ambos sistemas

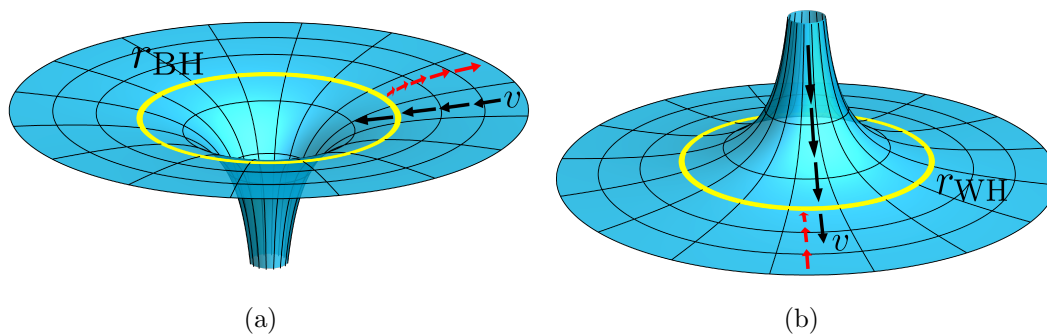


Figura 2.3: Ilustración del espacio-tiempo fluyendo hacia un agujero negro (b) y espacio-tiempo emergiendo desde un agujero blanco (a). La línea amarilla representa el horizonte de eventos r_S .

y que veremos a continuación. En 1991, Robert B. Mann probó que este tipo de sistemas tienen soluciones del tipo agujero negro [18].

Cualquier sistema estacionario en (1+1)D con la condición $|g| = -1$ puede ser escrito en coordenadas ortogonales usando el proceso de Gram–Schmidt con un campo independiente $\alpha(x)$, como

$$ds^2 = \alpha(x)c^2dt_0^2 - \alpha(x)^{-1}dx^2, \quad (2.2.1)$$

donde t_0 es el tiempo y x es la posición. Como en el sistema original (3+1)D, la condición de horizonte se tiene cuando $\alpha(x) = 0$ [18, 19]. Aparentemente, hay una región del espacio-tiempo inaccesible, pero esto se debe a que el sistema no está representado en las mejores coordenadas [8]. En este texto se escribirá c de forma explícita para hacer más fácil la conexión con los sistemas análogos.

En las coordenadas PLG la métrica toma la forma

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx + v(x)dt)^2, \quad v(x) = c\sqrt{1 - \alpha(x)}. \quad (2.2.2)$$

El espacio-tiempo puede ser visto como un fluido galileano [20, 21], la ecuación de geodésica nula es

$$\frac{dt}{dx} = -[v(x) \pm c]^{-1}, \quad (2.2.3)$$

que define un sistema local inercial llamado marco comóvil, y los signos $+$ y $-$ representan los rayos copropagantes y contrapropagantes, respectivamente.

En este capítulo veremos cómo el agujero negro es representado como un fluido que tiene un sumidero en la singularidad. La conexión con el fluido se obtiene explícitamente usando las coordenadas PLG [14, 22]. A continuación, vamos a describir la métrica (2.2.1) estudiando sus cantidades geométricas.

2.2.1. Cantidades geométricas

En (1+1)D hay ocho símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\beta}^\mu$, pero sólo seis son distintos de cero

$$\Gamma_{01}^0 = -\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\alpha(x)^{-1}\alpha'(x), \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}\alpha(x)\alpha'(x), \quad (2.2.4)$$

donde $\alpha'(x) = d\alpha(x)/dx$. Las otras tres componentes son obtenidas usando la simetría $\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\nu}^{\mu}$.

El tensor de curvatura de Riemann $R_{\nu\beta\gamma}^{\mu}$ está compuesto de dieciséis componentes, sólo cuatro son distintas de cero

$$R_{001}^1 = \alpha(x)^2 R_{101}^0 = \frac{1}{2}\alpha(x)\alpha''(x). \quad (2.2.5)$$

Las dos componentes restantes se obtienen usando la propiedad $R_{\nu\beta\gamma}^{\mu} = R_{\nu\gamma\beta}^{\mu}$.

Las componentes distintas de cero del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ son

$$R_{00} = \frac{1}{2}\alpha(x)\alpha''(x), \quad R_{11} = -\frac{\alpha''(x)}{2\alpha(x)}. \quad (2.2.6)$$

Los escalares de Ricci R y Kretschmann K son

$$R = -\alpha''(x), \quad K = [\alpha''(x)]^2. \quad (2.2.7)$$

Finalmente, uno de los resultados más notables en gravedad (1+1)D es el hecho de que el tensor de Einstein G es siempre cero

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.2.8)$$

En consecuencia, las ecuaciones de campo de Einstein no condicionan al tensor métrico. Las conclusiones de esto son: (1) Solo hay soluciones de vacío, i.e., el espacio-tiempo sólo tiene curvatura, no materia. (2) Cualquier métrica es solución de las ecuaciones de Einstein en el espacio-tiempo (1+1)D, en particular, los que tienen horizonte de eventos [18, 19].

2.2.2. Gravedad superficial

La gravedad superficial κ es la aceleración causada directamente por la geometría del espacio-tiempo. Su valor en el horizonte nos permite asignar una temperatura al agujero negro geométrico [23]. La fórmula explícita para κ es

$$\kappa^2 = -\frac{c^4}{2} (\nabla^{\nu} k^{\mu}) (\nabla_{\nu} k_{\mu}), \quad (2.2.9)$$

donde k^{μ} es el vector de Killing en un sistema de coordenadas apropiado. Esta definición nos da κ en todo el espacio-tiempo, no sólo en el horizonte [24]. Esto nos será útil para conectar con sistemas análogos posteriormente. Para la métrica general (1 + 1)D en coordenadas PLG (2.2.2), la gravedad superficial es dada por

$$\kappa(x) = \left| \frac{c^2}{2} \alpha'(x) \right|. \quad (2.2.10)$$

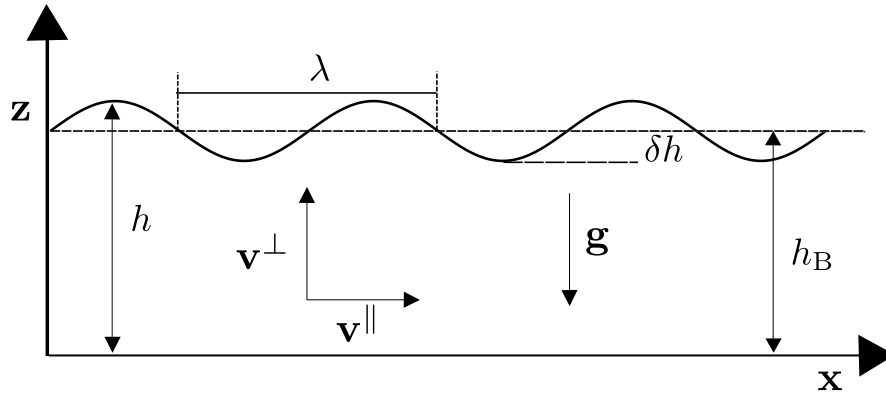


Figura 2.4: Arreglo experimental para ondas de gravedad en un estanque, se resaltan los parámetros importantes para el cálculo de la ecuación de onda.

2.3. Ondas de gravedad (*gravity waves*)

En 2002, Ralf Schützhold y William Unruh [25] propusieron un modelo en el que las ondas superficiales (ondas de gravedad) de un fluido en un tanque poco profundo podían recrear el análogo de un horizonte de eventos. En este sistema es posible variar la velocidad de estas ondas de forma sencilla, sólo variando la profundidad del tanque. Las ondas de gravedad no deben ser confundidas con las ondas gravitacionales, las cuales son generadas de la interacción de cuerpos astrofísicos y se propagan en el espacio-tiempo. Las ondas de gravedad obtienen su nombre debido a que la aceleración gravitacional determina la velocidad de propagación y la relación de dispersión del medio.

2.3.1. Modelo

La forma más simple del modelo es suponer un líquido sobre un fondo horizontal plano, en el que las fuerzas sobre el líquido sean tales que solo exista un flujo horizontal estacionario que resulte en una altura constante del líquido. Por simplicidad se considera un líquido sin viscosidad, incompresible e irrotacional en su flujo. Bajo estas consideraciones la densidad del líquido ρ permanece constante. La ecuación de continuidad puede ser escrita en términos de la velocidad local \mathbf{v} como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.3.1)$$

Si se desprecia la viscosidad del fluido, su dinámica está gobernada por la ecuación no lineal de Euler

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \frac{\mathbf{f}}{\rho}, \quad (2.3.2)$$

donde p es la presión, $\mathbf{g} = -g\hat{z}$ es la aceleración gravitacional y $\mathbf{f} = -\rho\nabla_{\parallel}V^{\parallel}$ es una fuerza horizontal necesaria para establecer un flujo estacionario horizontal, como se muestra en la figura 2.4.

Un perfil de flujo irrotacional $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ simplifica la ecuación de Euler (2.3.2) y además se introduce un potencial de velocidad ϕ tal que $\mathbf{v} = \nabla\phi$ y se llega a la ecuación de Bernoulli

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 = \frac{p}{\rho} - gz - V^{\parallel}. \quad (2.3.3)$$

Como condiciones de frontera del sistema se toma que la velocidad debe ser cero en el fondo del tanque, la presión cero en la superficie desplazada y el cambio en la altura del fluido determinado por la velocidad vertical:

$$v^{\perp}(z=0) = 0, \quad p(z=h) = 0, \quad v^{\perp}(z=h) = \frac{dh}{dt} = \dot{h} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)h. \quad (2.3.4)$$

Se consideran perturbaciones $\delta\mathbf{v}$ al flujo de fondo \mathbf{v}_B que corresponde a pequeños desplazamientos verticales δh de la altura del fluido h . El flujo de fondo obedece

$$\nabla_{\perp} \mathbf{v}_B = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_B^{\parallel} \rightarrow \nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_B = \mathbf{0}, \quad (2.3.5)$$

en palabras más simples la altura de fondo h_B es contante y

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}_B^2 = -\frac{p_B}{\rho} - gz - V^{\parallel}, \quad (2.3.6)$$

donde p_B está dada por $g(h_B - z)$.

2.3.2. Tensor métrico

Las perturbaciones también son consideradas irrotacionales, así que están dadas por una función potencial $\delta\phi$. Las perturbaciones de la ecuación de Bernoulli (2.3.3) son dadas por

$$\delta\phi + \mathbf{v}_B^{\parallel} \cdot \delta\phi = -\frac{\delta p}{\rho}. \quad (2.3.7)$$

De la condición de frontera para la presión junto con $p_B = g(h_B - z)$ se obtiene

$$\delta p(z = h_B) = g\rho\delta h, \quad (2.3.8)$$

y de forma similar para la velocidad vertical

$$\delta v^{\perp}(z = h_B) = \delta h + (\mathbf{v}_B^{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel})\delta h, \quad \delta v^{\perp}(z = 0) = 0. \quad (2.3.9)$$

Es de gran utilidad expandir la perturbación del potencial $\delta\phi$ en su serie de Taylor

$$\delta\phi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \delta\phi_{(n)}(x, y). \quad (2.3.10)$$

Sustituyendo en las condiciones de frontera (2.3.4) se obtiene

$$\delta\phi_{(1)} = 0. \quad (2.3.11)$$

Y de la ecuación de continuidad (2.3.1) se obtiene la restricción

$$\nabla_{\parallel}^2 \delta\phi_{(0)} + \delta\phi_{(2)} = 0, \quad (2.3.12)$$

y así para valores más grandes de n . Además, debe suponerse que la longitud de onda λ de las perturbaciones es mucho más grande que la profundidad de fondo h_B . Con esta hipótesis, los términos de orden mayor en la serie de Taylor son despreciados por ser potencias de $h_B/\lambda \ll 1$, dado que $\nabla_{\parallel}^2 = \mathcal{O}(1/\lambda^2)$. Manteniendo los dos primeros términos no triviales en la ecuación (2.3.12) se obtiene

$$\delta v^{\perp}(z = h_B) = -h_B \nabla_{\parallel}^2 \delta\phi_{(0)}. \quad (2.3.13)$$

Combinando las ecuaciones (2.3.8), (2.3.9) y (2.3.10) tenemos

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_B^{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} \right)^2 - gh_B \nabla_{\parallel}^2 \right] \delta\phi_{(0)} = 0. \quad (2.3.14)$$

Reescribiendo esta ecuación de onda en forma tensorial

$$\square \delta\phi_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g_{\text{eff}}^{\mu\nu} \partial_{\nu} \delta\phi_{(0)}) = 0, \quad (2.3.15)$$

donde la métrica efectiva y su inversa son

$$g_{\text{eff}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{v}_B^{\parallel} \\ \mathbf{v}_B^{\parallel} & \mathbf{v}_B^{\parallel} \cdot \mathbf{v}_B^{\parallel} - gh_B \mathcal{I} & \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{\mathbf{v}_B^{\parallel}}{\sqrt{gh_B}} \right)^2 & \frac{\mathbf{v}_B^{\parallel}}{gh_B} \\ \frac{\mathbf{v}_B^{\parallel}}{gh_B} & \frac{\mathcal{I}}{gh_B} \end{pmatrix}, \quad (2.3.16)$$

donde \mathcal{I} es la matriz identidad 3×3 . Vemos que $g_{\mu\nu}^{\text{eff}}$ tiene la forma del tensor métrico del agujero negro más simple en coordenadas PLG (2.1.6).

2.4. Análogo óptico

En el caso de los modelos de gravedad análoga óptica, la aparición de un horizonte cinemático para la luz es extremadamente difícil de reproducir, como lo implica el diseño de un flujo de materia a velocidades cercanas a las de la luz. Ulf Leonhardt propuso en 2002 [26] el uso de la llamada luz lenta, esto es, cuando la velocidad de fase de la luz es reducida a fracciones de c con la ayuda de transparencias electromagnéticas inducidas. Sin embargo debido a que tanto la velocidad de grupo como la de fase son importantes para construir los análogos, esta propuesta no fue exitosa, ya que sólo afecta la velocidad de fase [27], y considera un perfil de velocidad de grupo parabólico de la luz de prueba [26].

Basándose en la idea de que las propiedades del medio son las que determinan el horizonte de eventos, en el sentido de que, si las propiedades del medio cambian como un frente de ondas propagándose, no habrá en esencia distinción de un medio que está en movimiento. Leonhardt y colaboradores entonces propusieron en 2008 [28] que en

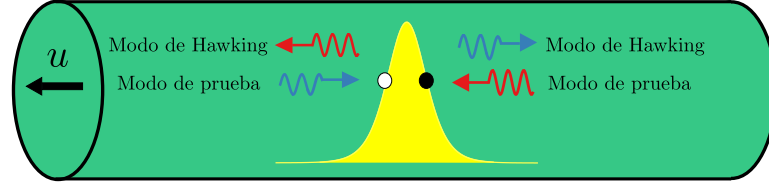


Figura 2.5: Pulso de bombeo viajando en una fibra óptica. Para el efecto Hawking estimulado en el marco comóvil, se ilustra el corrimiento al azul y rojo respectivamente en ambos lados del pulso para ambos horizontes.

lugar de crear un medio móvil, sólo es necesaria una perturbación localizada del índice de refracción generada por un pulso de bombeo que viaja a una velocidad cercana a la de la luz en el medio y un cambio en el sistema de referencia. Para crear dicha perturbación se propuso un solitón

$$\delta n(\tau) = \delta n_{\max} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right), \quad (2.4.1)$$

donde δn_{\max} es la intensidad máxima del solitón y τ_0 la duración. El solitón es enviado por una fibra óptica como se muestra en la figura 2.5, el índice de refracción se modifica debido al efecto Kerr óptico [29].

2.4.1. Guía de onda

Consideramos una fibra homogénea en z e infinitamente larga, la transformada de Fourier de la susceptibilidad y del campo eléctrico son

$$\tilde{\chi}_g = \tilde{\chi}_g(\omega, x, y), \quad \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r}) = \tilde{E}_{\pm}(\omega, z) \mathbf{U}_{\pm}(\omega, x, y) \quad (2.4.2)$$

y se requiere que los modos de la fibra \mathbf{U}_{\pm} sean eigenfunciones de la parte transversal de la ecuación de onda para luz monocromática con eigenvalores $\beta_{\pm}^2(\omega)$,

$$\left[-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}_{\pm}) + (1 + \tilde{\chi}_g) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{U}_{\pm} \right] = \beta_{\pm}^2 \mathbf{U}_{\pm}, \quad (2.4.3)$$

para fibras de un solo modo de propagación o monomodo sólo existe un eigenvalor β_{\pm}^2 para cada polarización óptica y frecuencia ω . Dado que \mathbf{U}_{\pm} está normalizada, es decir $\int |\mathbf{U}_{\pm}(\omega, x, y)| dx dy = 1$, el efecto no lineal actúa principalmente dentro de una región estrecha cerca del centro de la fibra en $(x, y) = (0, 0)$. Bajo estas condiciones una buena aproximación es

$$[\partial_z^2 + \beta_{\pm}^2(i\partial_t)] E_{\pm} = \frac{\partial_t^2 P_{\pm}}{\epsilon_0 c^2}, \quad (2.4.4)$$

donde E_{\pm} es la componente z del campo eléctrico y P_{\pm} es la polarización definida como

$$P_{\pm} = 2\epsilon_0\kappa \left(|E_{\pm}|^2 E_{\pm} + \frac{2}{3}|E_{\mp}|^2 E_{\pm} + \frac{1}{3}E_{\mp}^2 E_{\pm}^* \right). \quad (2.4.5)$$

ϵ_0 la permeabilidad eléctrica del vacío y κ denota la constante no lineal de Kerr propia del material. Los eigenvalores β_{\pm}^2 de los modos transversales de propagación establecen el índice de refracción efectivo n_{\pm} de la fibra para pulsos de luz $E_{\pm}(t, z)$ definido por la relación

$$\beta_{\pm} = \frac{n_{\pm}}{c}\omega. \quad (2.4.6)$$

El análogo del horizonte se crea usando un pulso de bombeo que interactúa con un campo de prueba débil en el caso clásico o con el estado de vacío en el caso cuántico. En ambos casos, el campo de prueba es débil y se desprecian los efectos de la reacción inversa del fondo y de la auto interacción no lineal. Además, la intensidad del pulso $I(z, t)$ no es fija en las coordenadas de laboratorio, se puede describir el sistema sólo con el campo de prueba, que está descrito por el potencial vectorial A que genera los campos eléctrico E y magnético B

$$E = -\partial_t A, \quad B = \partial_z A. \quad (2.4.7)$$

El potencial obedece la ecuación de onda

$$[c^2 \partial_z^2 + c^2 \beta^2 (i\partial_t) - \partial_t \chi \partial_t] A = 0, \quad (2.4.8)$$

donde $\chi \propto I(z, t)$ denota la susceptibilidad debida al efecto Kerr del pulso de prueba y $\beta = \beta_{\pm}$ de la ecuación (2.4.6) que corresponde a la polarización de prueba y denota el índice de refracción efectivo n_0 . La ecuación de onda (2.4.8) muestra que el pulso establece un medio móvil efectivo. Por ello, lo mejor es usar como coordenadas el tiempo de retardo τ y el tiempo de propagación ζ definidos como

$$\tau = t - \frac{z}{u}, \quad \zeta = \frac{z}{u}, \quad (2.4.9)$$

donde u es la velocidad de grupo del pulso de bombeo. En este caso las propiedades efectivas del medio dependen sólo de $I = I(\tau)$. En estas coordenadas τ toma el papel del espacio y ζ del tiempo. La ecuación de onda (2.4.8) en el marco comóvil toma la forma

$$(\partial_{\zeta} - \partial_{\tau})^2 A = \partial_{\tau} \frac{u^2}{c^2} n^2 \partial_{\tau} A, \quad (2.4.10)$$

donde el índice de refracción total n consiste en el índice lineal efectivo n_0 y la contribución debida al efecto Kerr χ

$$n^2 = n_0^2 + \chi. \quad (2.4.11)$$

2.4.2. Tensor métrico

Por simplicidad el medio se considera sin dispersión, es decir, el índice de refracción de prueba n_0 no depende de la frecuencia. Haciendo una descripción relativista de la ecuación de onda (2.4.10) para las coordenadas y sus derivadas

$$x^\mu = (\zeta, \tau), \quad \partial_\mu = (\partial_\zeta, \partial_\tau), \quad (2.4.12)$$

y la matriz

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 - \frac{u^2 n^2}{c^2} \end{pmatrix} \quad (2.4.13)$$

que es bastante parecida al tensor métrico de las ondas que se mueven en un fluido (2.3.16). El tensor métrico efectivo $g_{\mu\nu}$ es el inverso de $g^{\mu\nu}$ es

$$g_{\mu\nu} = \frac{c^2}{n^2 u^2} \begin{pmatrix} \frac{u^2 n^2}{c^2} - 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4.14)$$

De esta forma, vemos que el tensor efectivo para ondas transversales de una fibra tiene la misma forma que el tensor general para el agujero negro más simple (2.1.6).

Efecto Hawking en medios dispersivos

La radiación de Hawking en sistemas análogos puede ser vista como un efecto de los campos cuánticos en el espacio curvo. Hay algunos requisitos que se deben cumplir a fin de reproducir la radiación de Hawking análoga en el laboratorio: un sistema análogo cuántico cuya descripción efectiva pueda ser separada en un fondo clásico más algún campo cuántico. Además, la geometría análoga debe ser configurada a fin de incluir algún tipo de horizonte para la propagación de los campos cuánticos [14].

La dispersión en los sistemas análogos lleva a la solución del problema transplanciano de la radiación de Hawking y también a eliminar posibles fuentes de inestabilidad que pueden atenuar la radiación [30].

El estado cuántico del vacío $|0\rangle$ es definido con el operador de aniquilación \hat{a} por $\hat{a}|0\rangle = 0, \forall \hat{a}$. Sin embargo, en la teoría cuántica de campos en espacios curvos, la definición del operador de aniquilación y del estado del vacío varía [9]. Esto abre la posibilidad a la creación de partículas del vacío a través de varios mecanismos como el del Efecto Hawking [4], el efecto Unruh [31], el efecto Casimir dinámico [32], el efecto Fulling-Davis [33, 34] y el efecto Schwinger [35]. En nuestros modelos, la existencia de modos con norma negativa permiten la creación de partículas a través de un análogo del efecto Hawking [36].

3.1. Sistema acústico

Se consideran ondas que se propagan con una velocidad de fase c en la superficie del fluido que está fluyendo con velocidad local u . Además, la velocidad $c = c(k)$ depende del vector de onda debido a la dispersión, cuya dependencia está dada por la naturaleza del líquido [14, 37].

3.1.1. Ecuación de onda

Para hacer una descripción general del problema se propone una densidad lagrangiana que contenga los términos dispersivos modelados por la aparición de derivadas de

mayor orden [14]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}|(\partial_t - u\partial_z)\phi|^2 - \frac{1}{2}|c(-i\partial_z)\phi|^2. \quad (3.1.1)$$

Aplicar el principio de mínima acción a la ecuación (3.1.1) nos lleva a una generalización de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi^*)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_z^2 \phi^*)} \right) - \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_z^3 \phi^*)} \right) + \dots = 0. \quad (3.1.2)$$

Sustituyendo la lagrangiana \mathcal{L} , encontramos la ecuación de onda:

$$(\partial_t - \partial_z u) (\partial_t - u\partial_z)\phi - c^2 (-i\partial_z) \partial_z^2 \phi = 0. \quad (3.1.3)$$

La densidad lagrangiana (3.1.1) es invariante bajo traslaciones en el tiempo, lo que implica que existen modos estacionarios. En general proponemos una solución de ondas planas

$$\phi(t, z) = e^{-i(\omega t - kz)}, \quad (3.1.4)$$

al sustituirla en la ecuación de onda (3.1.3) obtenemos

$$(-\omega^2 + i\omega u\partial_z + i\omega\partial_z u + \partial_z u^2\partial_z)e^{ikz} - c^2 (-i\partial_z) \partial_z^2 e^{ikz} = 0. \quad (3.1.5)$$

Para obtener la relación de dispersión suponemos que la variación del perfil de velocidad sobre una longitud de onda del campo ϕ es despreciable, así que el vector local existe y es determinado por el valor local de u . Despreciando las derivadas de u , encontramos

$$(\omega - uk)^2 = [c(k)k]^2, \quad (3.1.6)$$

para estudiar la radiación de Hawking tomamos la raíz positiva de la ecuación que nos lleva a la relación de dispersión

$$\omega - u(z)k = c(k)k. \quad (3.1.7)$$

El medio se moverá a la izquierda, formando un análogo del horizonte de un agujero negro. En el marco comóvil la frecuencia está desplazada por la fórmula de Doppler (3.1.7). En la figura 3.1, la línea recta punteada verde corresponde a la región asintótica con velocidad u_2 , mientras que la línea sólida morada corresponde a la región asintótica con velocidad u_1 . Por la conservación de la energía [14, 22], las ondas deben propagarse con un vector de onda determinado por las intersecciones de la curva de dispersión $\pm c(k)k$ (roja y azul) con las líneas rectas $\omega - u_1k$ (morado) y $\omega - u_2k$ (verde), considerando que el medio se mueve hacia la izquierda ($u < 0$). La velocidad de grupo v_g es la pendiente de la curva de dispersión $\pm c(k)k$.

La densidad lagrangiana también es invariante bajo rotaciones de fase: $\phi \rightarrow \phi e^{i\alpha}$, donde α es una constante real. Esta simetría implica que existe una cantidad escalar conservada, definida como el siguiente producto interno

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_1^* (\partial_t - u\partial_z)\phi_2 - \phi_2 (\partial_t - u\partial_z)\phi_1^*) dz, \quad (3.1.8)$$

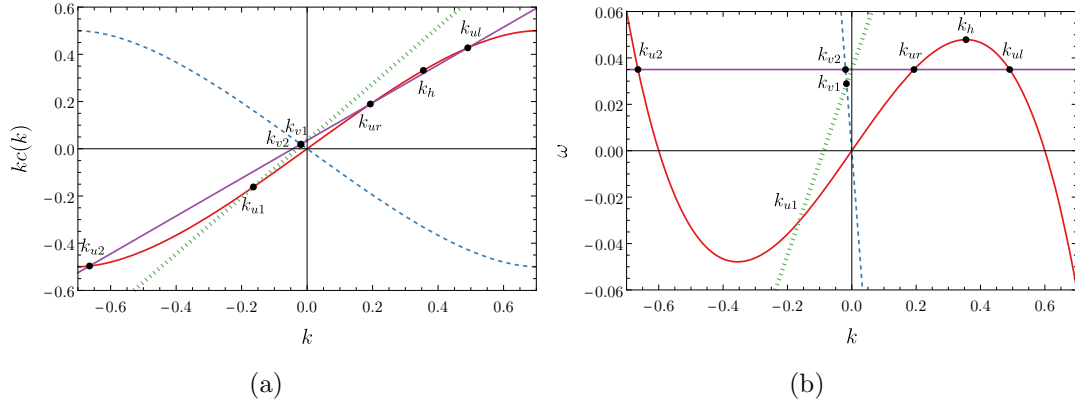


Figura 3.1: Solución gráfica a la relación de dispersión (3.1.7) para ondas que se propagan en un medio móvil, en el marco de laboratorio (a) y el marco comóvil (b).

donde ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación de onda (3.1.3).

Si consideramos paquetes de onda con posición z y vector de onda k y con una frecuencia ω . Su dinámica está gobernada por las ecuaciones de Hamilton [37]:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_g + u, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial z} = -ku', \quad (3.1.9)$$

donde $u' = du/dz$ es el gradiente de la velocidad del medio y $v_g = d[c(k)k]/dk$ es la velocidad de grupo de la onda. El horizonte se forma cuando la velocidad del flujo es mayor que la velocidad de la onda, pero debemos identificar de qué velocidad estamos hablando: Hay un horizonte de velocidad de grupo cuando $|u| = v_g$ y un horizonte de fase cuando $|u| = c(k)$. Para el efecto Hawking se necesitan ambos horizontes aunque tienen distintos roles. En la figura 3.2 se muestra la solución numérica a las ecuaciones de Hamilton (3.1.9).

La onda k_{ur} tiene velocidad de grupo mayor que la velocidad del flujo ($v_g > |u|$) y por lo tanto la onda se propaga a la derecha y escapa del horizonte como se muestra en la figura 3.2 (trayectoria roja). La onda k_{ul} se mueve hacia la izquierda con velocidad $v_g < |u|$ y no puede escapar del horizonte de eventos es representada en la figura 3.2 por la línea azul. Estas soluciones existen y son reales solo en la región subsónica, en la región supersónica existen, pero son imaginarias. Las ondas k_{ur} y k_{ul} coinciden en la condición $v_g = |u|$ formando un horizonte de velocidad de grupo [14, 22]. Una tercera onda k_u corresponde a una onda de Hawking con vector de onda negativo que se mueve a la izquierda. La solución k_v se mueve con el fluido. Para los siguientes cálculos se despreciará el modo copropagante k_v ya que su contribución al efecto Hawking es insignificante [22].

3.1.2. Modos *in* y *out*

Identificamos que existen dos regiones determinadas por las velocidades asintóticas del fluido: subsónica (derecha) y supersónica (izquierda). De la figura 3.1 se observa que existen tres modos en la región subsónica: un modo moviéndose a la derecha k_{ur} que

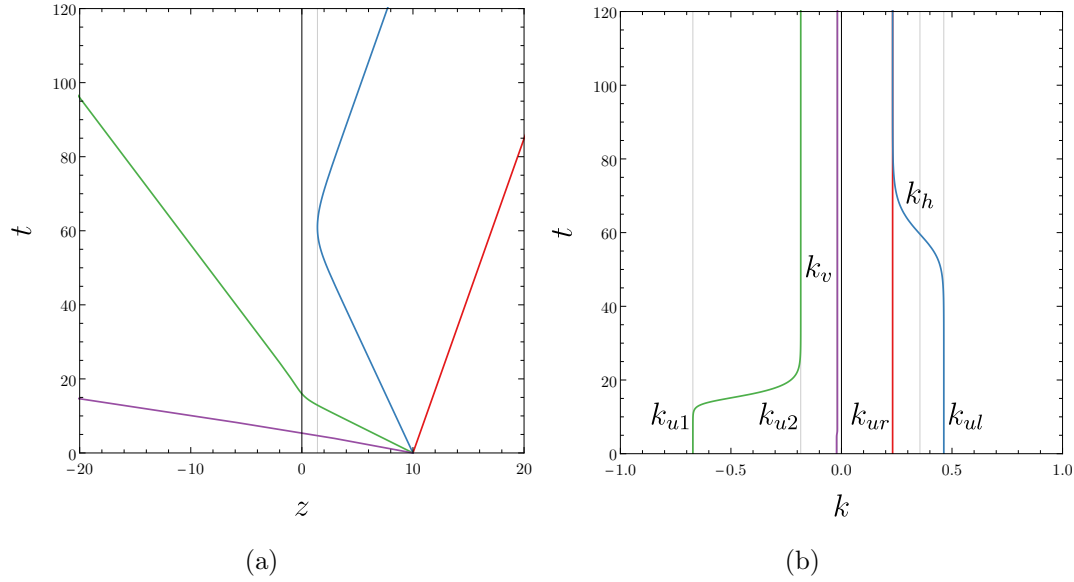


Figura 3.2: Trayectorias para paquetes de onda con $z_0 = 10$ y diferente vector de onda inicial k_{ul} (azul), k_{ur} (rojo), k_u (verde) y k_v (morado) bajo el perfil de velocidad tangente hiperbólica. En el espacio de posiciones (a) y momentos (b).

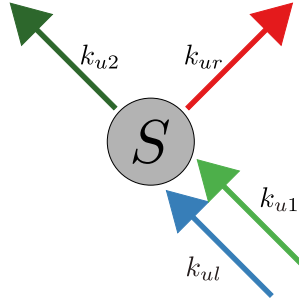


Figura 3.3: Diagrama que representa de forma sencilla al horizonte de eventos como un dispersor.

escapa del horizonte de eventos, un modo que se propaga hacia la izquierda k_{ul} que se mueve hacia el horizonte y un modo k_{u2} con vector de onda negativo k_u . En la región supersónica solo existe un modo k_{u1} . En la figura [3.3](#) se ilustra como se acomodan los modos en un diagrama de dispersión.

Suponemos que el horizonte de eventos funciona como un dispersor, por lo que solo nos interesan los modos en el pasado asintótico ϕ^{in} y en el futuro asintótico ϕ^{out}

$$\phi^{out} = S\phi^{in}, \quad (3.1.10)$$

donde S es la matriz de dispersión y ϕ^{out} y ϕ^{in} son vectores. Los modos entrantes o *in* son los que interactúan con el dispersor en el pasado asintótico: (ϕ_{u1}, ϕ_{ul}) y los salientes son los que pueden escapar del dispersor (ϕ_{u2}, ϕ_{ur}) .

Así, podemos escribir la ecuación [\(3.1.10\)](#) en componentes:

$$\phi_{ur}^{out} = \alpha\phi_{ul}^{in} + \beta\phi_{u1}^{in}, \quad (3.1.11a)$$

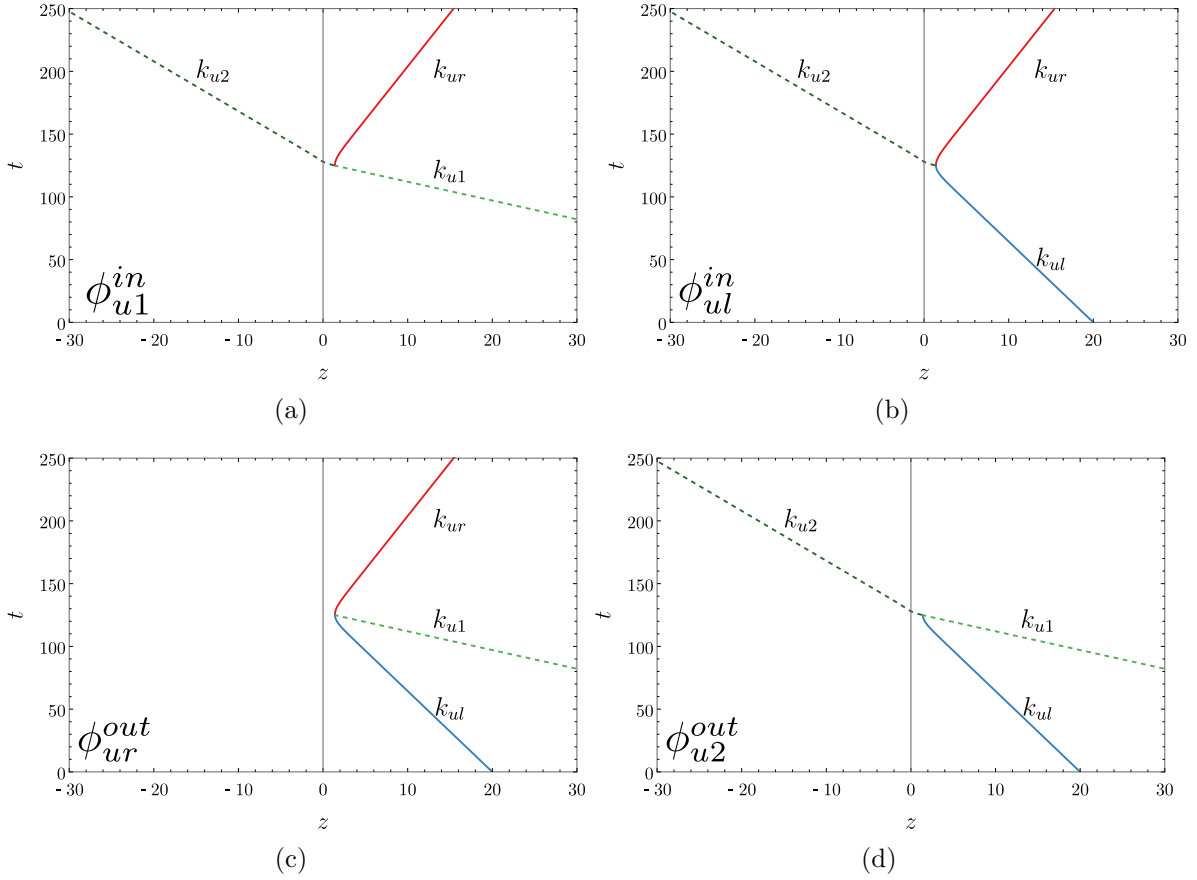


Figura 3.4: Diagramas de espacio-tiempo de las trayectorias de los modos *in* y *out*, las líneas continuas representan modos con norma positiva y las punteadas con norma negativa. Se muestran los modos entrantes: (a) y (b) y los modos salientes: (c) y (d).

$$\phi_{u2}^{out} = \kappa \phi_{ul}^{in} + \lambda \phi_{u1}^{in}. \quad (3.1.11b)$$

Los coeficientes α , β , κ y λ son las componentes de la matriz S . Suponemos que los modos salientes y entrantes forman una base ortonormal, respecto al producto escalar (3.1.8) y están normalizados a $\delta(\omega_1 - \omega_2)$. Utilizando la suposición anterior y el hecho de que el producto escalar (3.1.8) es bilineal, calculamos la norma del primer modo saliente (3.1.11a) y obtenemos:

$$1 = |\alpha|^2 - |\beta|^2, \quad (3.1.12)$$

lo cual implica que la amplitud del modo incidente ϕ_{ul}^{in} es multiplicada por un factor $|\alpha| \geq 1$. En la figura 3.4(b) observamos lo más parecido al efecto Hawking, de la inversa de la matriz S se obtiene

$$\phi_{ul}^{in} = \alpha \phi_{ur}^{out} + \beta \phi_{u2}^{out} \quad (3.1.13)$$

y usando el producto interno obtenemos la misma relación que la ecuación (3.1.12), de esta forma es más fácil entender que al conservarse la norma se crean partículas con norma positiva k_{ur} y con norma negativa k_{u2} .

Si solo consideramos la radiación que escapa, promediada sobre la pareja de Hawking, el estado cuántico reducido de cada modo que escapa es entonces, un estado de máxima entropía, un estado térmico. Su temperatura es dada por la ley de Boltzmann

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^2 = \exp \left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right), \quad (3.1.14)$$

donde \hbar es la constante de Planck reducida y k_B es la constante de Boltzmann.

Es conveniente caracterizar los paquetes de onda por su vector de onda en lugar de la posición z . De la misma manera, el vector de onda es mejor indicador del horizonte de eventos que la posición en sistemas dispersivos, esto porque el horizonte se vuelve difuso, es distinto para cada vector de onda, mientras que h_h es siempre el mismo.

3.1.3. Temperatura de Hawking

El efecto Hawking conecta vectores de onda negativos con positivos, como veremos en esta sección. En una región donde el flujo sea uniforme, las soluciones para las raíces de la relación de dispersión (3.1.7) son ondas planas

$$\phi_j = A_j \exp(ik_j z), \quad A_j^2 = \frac{1}{4\pi c(k_j) |k_j v_g(k_j)|}, \quad (3.1.15)$$

que se muestran en la figura 3.1. Hemos normalizado las ondas planas a función delta en ω . Como ya se mencionó, las ondas k_{ur} y k_{ul} tienen norma positiva, mientras que la onda k_u tiene norma negativa. Las ondas asintóticas son convertidas parcialmente unas en otras como se muestra en la figura 3.4, donde los modos globales *in* y *out* solo tienen un modo entrante o saliente respectivamente. Si consideramos la transformación espacial de Fourier $\tilde{\phi}(k)$ y derivamos la ecuación (3.1.3) en el espacio de momentos [38] tenemos

$$\left[\frac{\omega}{k} - u(i\partial_k) \right]^2 (k\tilde{\phi}) = c^2(k)k\tilde{\phi}. \quad (3.1.16)$$

Para pequeñas variaciones en el perfil de velocidad aproximamos $\tilde{\phi}$ usando el método de integral de fase en el espacio de momentos k . Para esto, consideramos $u(i\partial_k)$ como $u(i\epsilon\partial_k)$, donde ϵ es un parámetro pequeño, desarrollamos en serie

$$u(z) \approx u' i\epsilon\partial_k, \quad (3.1.17)$$

representamos

$$k\tilde{\phi} = \exp \left[\epsilon^{-1}(\tilde{\phi}_0 + \epsilon\tilde{\phi}_1 + \epsilon^2\tilde{\phi}_2 + \dots) \right], \quad (3.1.18)$$

y sustituimos el ansatz en la ecuación (3.1.16), que nos lleva a

$$\frac{\omega^2}{k^2} - 2\frac{\omega}{k}u'i\partial_k\tilde{\phi}_0 + u'^2i^2\partial_k\tilde{\phi}_0^2 + \epsilon \left[-2\frac{\omega}{k}iu'\partial_k\tilde{\phi}_1 + u'^2i^2(\partial_k^2\tilde{\phi}_0 + 2\partial\tilde{\phi}_0\partial_k\tilde{\phi}_1) \right] = c^2(k). \quad (3.1.19)$$

Ordenando el resultado en potencias de ϵ obtenemos un sistema de ecuaciones acoplado para $\tilde{\phi}_m$ que truncamos a $m = 1$. Finalmente removemos ϵ , incorporándolo en

la escala de $u(z)$. De esta manera obtenemos el cuadrado de la relación de dispersión (3.1.7) con

$$i\partial_k \tilde{\phi}_0 = z, \quad (3.1.20)$$

y la ecuación diferencial

$$2\partial_k \tilde{\phi}_1 + \partial_k \ln \left[u'(i\partial_k \tilde{\phi}_0) c(k) \right] = 0. \quad (3.1.21)$$

Así, en el espacio de momentos k tenemos

$$\tilde{\phi}(k) = \frac{\Phi_0}{k \sqrt{u'(z(k))c(k)}} \exp \left(-i \int^k z(\kappa) d\kappa \right), \quad (3.1.22)$$

donde $\Phi_0 = 1/(4\pi^2)$. Para regresar al espacio de las posiciones z , hacemos uso de la transformada inversa de Fourier en la aproximación del punto silla

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k) \exp(ikz) dk = \sum_j \phi_j \exp \left(-i \int^{k_j(z)} z(\kappa) d\kappa \pm i \frac{\pi}{4} \right), \quad (3.1.23)$$

las ϕ_j son las ondas planas normalizadas que aparecen en la ecuación (3.1.15), pero ahora z debe variar. La fase y la amplitud de las ondas planas deben depender del contorno de integración de la fase en la ecuación (3.1.23), aunque no de su forma, sino de su topología. Usando distintos contornos topológicos [39] nos da como resultado los diferentes modos *in* y *out* de la figura 3.4. La figura 3.5 muestra el contorno integral que distingue el modo ϕ_{ur}^{out} que produce la radiación de Hawking, definido en la figura 3.4. Las líneas continua, punteada y discontinua indican los valores permitidos de los vectores de onda k_{ur} , k_{ul} y k_u , respectivamente para velocidades entre u_1 y u_2 . El contorno es elegido bajo el siguiente argumento: el modo ϕ_{ur}^{out} es la superposición (3.1.11a) de los modos *in* ϕ_{ul}^{in} y ϕ_u^{in} . En el lado derecho del horizonte de eventos la componente k_{ul} proviene de $\alpha \phi_{ul}^{in}$ y la componente k_u vienen de $\beta \phi_u^{in}$. La componente k_{ul} difiere de la componente k_{ur} por un factor de fase, porque la integral de $z(k)$ entre k_{ur} y k_{ul} es real en el eje real y por lo tanto es real en cualquier contorno. Concluimos que $|\beta/\alpha|$ corresponde al peso relativo de la componente k_u para el modo ϕ_{ur}^{out} que se puede ver del resultado (3.1.23)

$$\phi_{ur}^{out} = \phi_{ul}^{in} \exp \left[-i \int^{k_{ur}(z)} z(\kappa) d\kappa \right] + \phi_u^{in} \exp \left[-i \int^{k_u(z)} z(\kappa) d\kappa \right] \quad (3.1.24)$$

La ventaja de este método es que encontramos el coeficiente $|\alpha/\beta|$ de ondas parciales con vectores de onda k grandes donde la aproximación de punto silla para derivar la expresión (3.1.23) es bastante precisa. De acuerdo a la ecuación (3.1.24) la amplitud de la componente k_u es dada por $\text{Im}(\int z dk)$ tomando la mitad inferior del contorno de integración de la en la figura 3.5. Dado que el perfil de velocidad $u(z)$ es real para z real en el plano complejo obedece $u(z^*) = u^*(z)$, y lo mismo ocurre para $z(k)$. Aunque integremos del vector de onda positivo al negativo, cerramos la integral en el contorno superior del plano complejo k . La parte real de la integral es cero, mientras que la parte

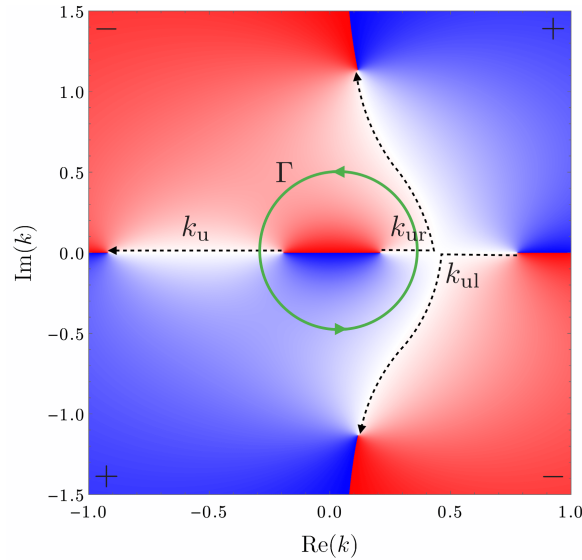


Figura 3.5: Densidad $\text{Im}(z)$ para la relación de dispersión (3.1.7) tomando el vector de onda k como una cantidad compleja. Las líneas punteadas cumplen $\text{Im}(z) = 0$, por lo que z es real para esos vectores de onda. Los vectores de onda k_u y k_{ur} están desconectados por una rama de corte, donde la parte imaginaria de z cambia abruptamente (interfaz azul-rojo).

Sónico	Óptico
t	ζ
z	τ
k	$-\omega$
ω	ω'
$c(k)$	$n(\omega)$

Tabla 3.1: Tabla de equivalencia entre las coordenadas de los análogos sónico y óptico.

imaginaria aumenta dos veces. Entonces obtenemos de la fórmula (3.1.14) el resultado (37)

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = -i \oint_{\Sigma} z(k) dk. \quad (3.1.25)$$

3.2. Análogo óptico

En el análogo óptico ocurre algo similar que en el análogo sónico, la diferencia está en el hecho de que los cambios en el perfil son más pequeños, por lo que los intervalos de las frecuencias en el marco del laboratorio para las que existe el horizonte de eventos son pequeños. En la tabla 3.1 se ilustra la equivalencia entre las variables del análogo sónico con el análogo óptico.

3.2.1. Descomposición en modos

Proponemos una densidad lagrangiana [40] que considere los efectos de la dispersión, modelada por la aparición de derivadas de orden mayor en las coordenadas (ζ, τ)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} |(\partial_\zeta - u\partial_\tau)\phi|^2 - \frac{1}{2} \phi \hat{F}(i\partial_\tau)\phi, \quad (3.2.1)$$

donde el perfil de velocidad está definido por

$$u(\tau) = \frac{c}{v_{gh}} \left(1 - \frac{v_{gh}}{c} \delta n(\tau) \right), \quad (3.2.2)$$

consideramos una perturbación con forma de solitón

$$\delta n(\tau) = \delta n_{\max} \text{sech}^2 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right), \quad (3.2.3)$$

y el operador \hat{F} es

$$\hat{F}(i\partial_\tau) = (i\partial_\tau)^2 - \frac{(i\partial_\tau)^2}{\Omega_0}, \quad (3.2.4)$$

donde Ω_0 define la escala de frecuencias para la dispersión. Sustituyendo la densidad lagrangiana \mathcal{L} , ecuación (3.1.1), encontramos la ecuación de onda:

$$(\partial_\zeta - \partial_\tau u) (\partial_\zeta - u\partial_\tau)\phi = \hat{F}(i\partial_\tau)\phi. \quad (3.2.5)$$

La densidad lagrangiana es invariante bajo traslaciones en ζ , lo que implica que existen modos estacionarios de la forma

$$\phi(\zeta, \tau) = e^{-i\omega'\zeta} \phi_{\omega'}(\tau). \quad (3.2.6)$$

En la aproximación de la óptica geométrica, la variación del perfil de velocidad sobre una longitud de onda del campo ϕ es despreciable, así que el vector local existe y es determinado por el valor local de u . Despreciando las derivadas de u y ω , encontramos

$$\omega' - \omega v(\tau) = \omega \frac{v_{gh}}{c} n(\omega), \quad (3.2.7)$$

donde $n(\omega)$ es la relación de dispersión de la fibra. En la figura 3.6 se muestra la soluciones gráficas de la relación de dispersión, la recta morada representa la energía constante ω' y los puntos resaltan las frecuencias ω que la conservan. Las líneas roja y naranja sólidas son la solución de la relación de dispersión en la región alejada del pulso de bombeo para los modos contrapropagantes y copropagantes, respectivamente. Las frecuencias copropagantes que existen en esta región son ω_{ur} , ω_{ul} , ω_{u1} y la contrapropagantes ω_{v1} .

Las líneas verde y azul punteadas son la relación de dispersión en la región donde el pulso de bombeo es más intenso para los modos copropagantes y contrapropagantes, respectivamente. El modo copropagante es ω_{u2} y el contrapropagante es ω_{v2} .

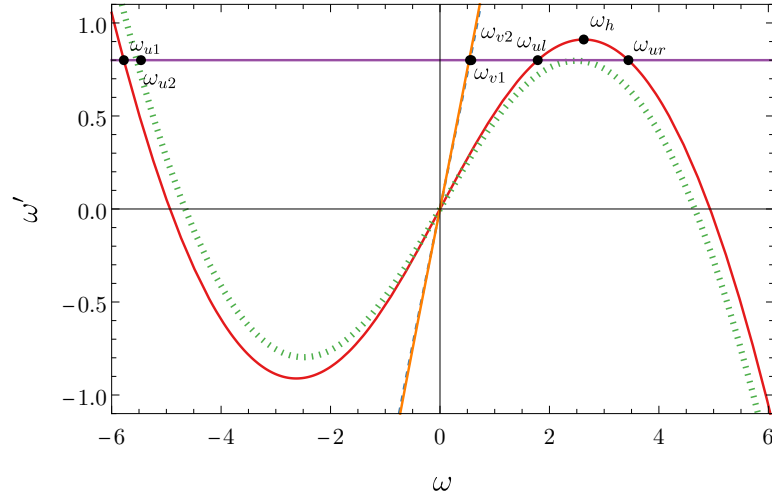


Figura 3.6: Relación de dispersión para el análogo óptico, la línea roja es la dispersión sin considerar la contribución del solitón ($\delta n = 0$), la línea verde punteada considera el efecto del solitón ($\delta n = \delta n_{\max}$). Los puntos señalan las frecuencias que conservan la energía ω' en el marco comóvil.

La densidad lagrangiana también es invariante bajo rotaciones de fase: $\phi \rightarrow \phi e^{i\alpha}$, donde α es una constante real, esta simetría implica que existe una cantidad escalar conservada, definida por el producto interno

$$(\phi_1, \phi_2) = \frac{\epsilon_0 c^2}{v_{g0} \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} [\phi_1^* (\partial_\zeta - u(\tau) \partial_\tau) \phi_2 - \phi_2 (\partial_\zeta - u(\tau) \partial_\tau) \phi_1^*] d\tau, \quad (3.2.8)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación de onda (3.1.3). A partir de esto definimos la norma de las ondas, las ondas ω_{ur} y ω_{ul} poseen norma positiva y la onda ω_u posee norma negativa. Las ecuaciones de Hamilton para el análogo óptico son

$$\frac{d\tau}{d\zeta} = -\frac{\partial \omega'}{\partial \omega} = \frac{\omega'}{\omega} - \omega \frac{v_{g0}}{c} n'(\omega), \quad \frac{d\omega'}{d\zeta} = \frac{\partial \omega'}{\partial \tau} = -\frac{v_{g0}}{c} \delta n'(\tau). \quad (3.2.9)$$

En la figura 3.7 se muestra la solución gráfica para un par de fotones en azul la trayectoria de un fotón que siente el efecto del agujero negro y en amarillo la trayectoria de un fotón que siente el efecto del agujero blanco.

3.2.2. Modos *in* y *out*

El horizonte se forma donde el flujo excede la velocidad de la onda de prueba, de nuevo consideramos un horizonte de velocidad de grupo cuando $|u| = v_g$. Las ondas con $|u| > c$ sufren el efecto Hawking. En el espacio reconocemos que existen tres regiones, dos donde $\delta n(\tau) \rightarrow 0$ (derecha e izquierda) y una con $\delta n(\tau) = \delta n_{\max}$ (centro). Existen tres modos en la región $\delta n(\tau) \rightarrow 0$: un modo moviéndose a la derecha ω_{ur} que escapa del horizonte de eventos, un modo que se propaga hacia la izquierda ω_{ul} que se mueve hacia el horizonte y un modo ω_{u1} con frecuencia negativa. Mientras que en la región $\delta n(\tau) = \delta n_{\max}$ solo existe un modo ω_{u2} .

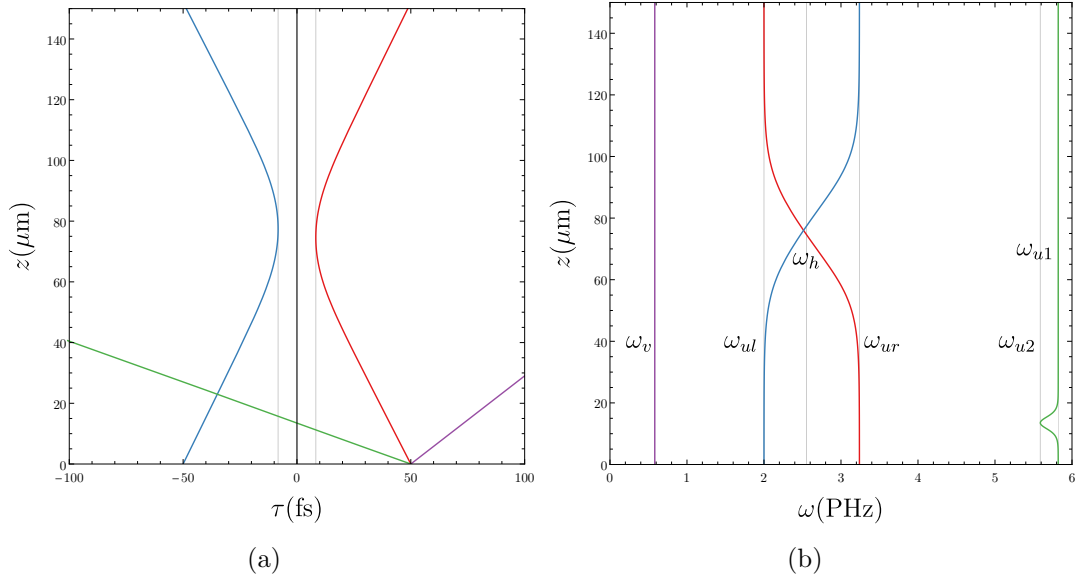


Figura 3.7: Trayectorias para fotones. (a) Trayectorias para paquetes de onda con 4cuatro frecuencias iniciales distintas dadas por el empatamiento de fase. (b) Corrimiento en la frecuencia para los fotones (izquierda).

Suponemos que el horizonte de eventos funciona como un dispersor, por lo que solo nos interesan los modos en el pasado asintótico (modos entrantes) y en el futuro asintótico (modos salientes)

$$\phi^{out} = S\phi^{in}, \quad (3.2.10)$$

donde S es la matriz de dispersión y ϕ^{out} y ϕ^{in} son vectores.

Siguiendo la misma argumentación que en el caso sónico podemos llegar a que el modo de salida es un modo térmico con temperatura dada por:

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^2 = \exp\left(-\frac{\hbar\omega'}{k_B T}\right). \quad (3.2.11)$$

Es conveniente caracterizar los paquetes de onda por su frecuencia en lugar del tiempo de retardo τ , la frecuencia es un mejor indicador para un horizonte que el tiempo de retardo cuando se considera un medio dispersivo, ya que su ubicación espacial cambia con la frecuencia.

3.2.3. Temperatura de Hawking

El efecto Hawking conecta frecuencias negativas con positivas. Suponiendo una variación lenta del perfil de velocidad, en una región donde el flujo sea uniforme las soluciones son ondas planas:

$$\phi_j = A_j \exp(i\omega_j \tau), \quad (3.2.12)$$

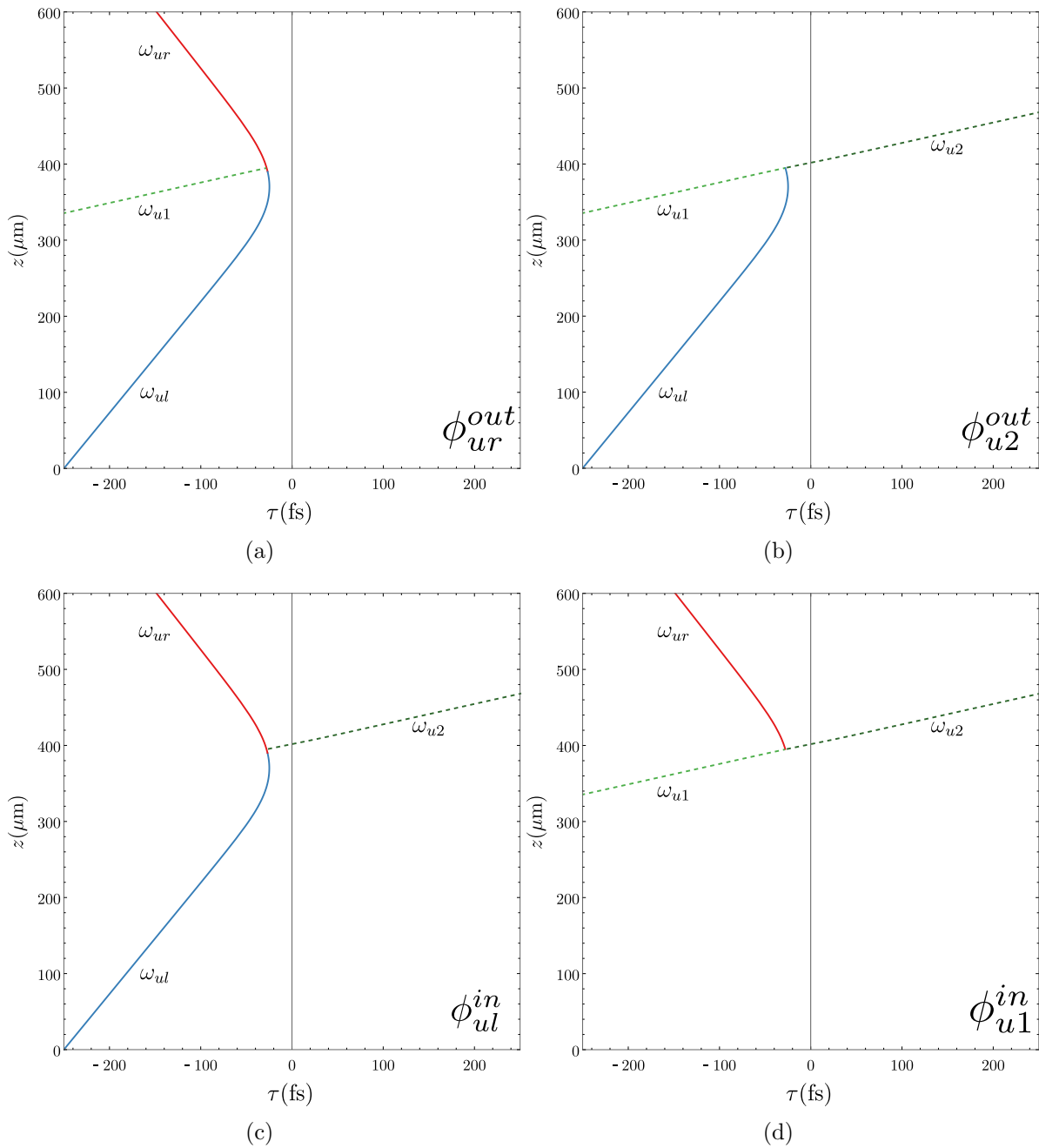


Figura 3.8: Diagramas de tiempo de propagación contra tiempo de retardo de las trayectorias de los modos *in* y *out*, las líneas continuas representan modos con norma positiva, las líneas punteadas representas los modos que tienen norma negativa. Se muestran los modos entrantes ϕ_u^{in} y ϕ_{ul}^{in} y los modos salientes ϕ_{ur}^{out} y ϕ_u^{out} .

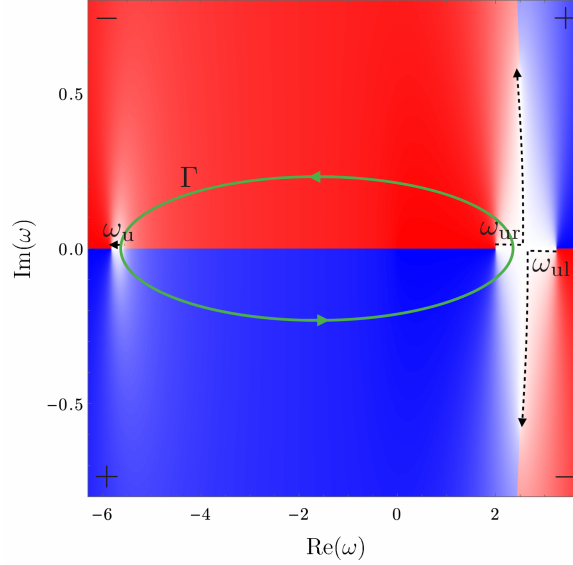


Figura 3.9: Densidad $\text{Im}(\tau)$ para la relación de dispersión (3.2.7) considerando la frecuencia ω como una cantidad compleja. Las punteadas son las regiones donde se cumple $\text{Im}(\tau) = 0$, τ es real para esos vectores de onda. Las líneas están desconectadas por una rama de corte entre las frecuencias, donde la parte imaginaria de τ cambia abruptamente.

para las raíces de la relación de dispersión (3.2.7), que se muestran en la figura 3.6. Hemos normalizado las ondas planas a una función delta en ω , el factor A_j es la constante de normalización. Como ya se mencionó, las ondas ω_{ur} y ω_{ul} tienen norma positiva, mientras que la onda ω_u tiene norma negativa. Las ondas asintóticas son convertidas parcialmente unas en otras cuando el perfil de velocidades varía, como se muestra en la figura 3.8. Si consideramos la transformación espacial de Fourier $\tilde{\phi}(\omega)$ y derivamos la ecuación (3.2.7) en el espacio de momentos [38]

$$\left[\frac{\omega'}{\omega} - u(i\partial_\omega) \right]^2 (\omega\tilde{\phi}) = \frac{n^2(\omega)}{n_{gh}} \omega\tilde{\phi}, \quad (3.2.13)$$

donde $n_{gh} = c/v_{gh}$.

Para pequeñas variaciones en el perfil de velocidad aproximamos $\tilde{\phi}$ usando el método de integral de fase en el espacio de frecuencias ω . Para esto, consideramos $u(i\partial_\omega)$ como $u(i\epsilon\partial_\omega)$, donde ϵ es un parámetro pequeño, representamos

$$\omega\tilde{\phi} = \exp \left[\epsilon^{-1}(\tilde{\phi}_0 + \epsilon\tilde{\phi}_1 + \epsilon^2\tilde{\phi}_2 + \dots) \right], \quad (3.2.14)$$

y sustituimos el *ansatz* en la ecuación (3.2.13). Ordenando el resultado en potencias de ϵ obtenemos un sistema de ecuaciones acoplado como en la sección anterior, el cuadrado de la relación de dispersión (3.2.7) con el retraso temporal dado por

$$i\partial_\omega\tilde{\phi}_0 = \tau, \quad (3.2.15)$$

y la ecuación diferencial

$$2\partial_\omega \tilde{\phi}_1 + \partial_\omega \ln \left[u'(i\partial_\omega \tilde{\phi}_0) \frac{n(\omega^2)}{n_{g0}} \right] = 0. \quad (3.2.16)$$

Así, en el espacio de frecuencias ω tenemos

$$\tilde{\phi}(\omega) = \frac{\Phi_0}{\omega \sqrt{u'[\tau(\omega)] n^2(\omega)/n_{g0}^2}} \exp \left(-i \int^\omega \tau(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \right), \quad (3.2.17)$$

donde $\Phi_0 = 1/(4\pi^2)$. Para regresar al espacio del retraso temporal τ , hacemos uso de la transformada inversa de Fourier en la aproximación del punto silla

$$\phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega = \sum_j \phi_j \exp \left(-i \int^{\omega_j(\tau)} \tau(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \pm i\frac{\pi}{4} \right), \quad (3.2.18)$$

las ϕ_j son las ondas planas normalizadas que aparecen en la ecuación (3.2.12), pero ahora τ debe variar. La fase y la amplitud de las ondas planas dependen del contorno de integración de la fase en la ecuación (3.2.18), aunque no de su forma, sino de su topología. Seleccionar diferentes contornos topológicos [39] da como resultado varias ondas *in* y *out* de la figura 3.8. La figura 3.9 muestra el contorno de integración que distingue el modo ϕ_{ur}^{out} que produce la radiación de Hawking, las líneas continua y discontinua indican los valores permitidos de las frecuencias ω_{ur} , ω_{ul} y ω_u , respectivamente. El contorno de integración lo elegimos bajo el mismo argumento que en la sección anterior: el modo ϕ_{ur}^{out} es la superposición de los modos ϕ_{ul}^{in} y ϕ_u^{in} , donde concluimos que el $|\alpha/\beta|$ puede ser obtenido de la ecuación (3.2.18) como

$$\phi_{ur}^{out} = \phi_{ul}^{in} \exp \left[-i \int^{\omega_{ur}(\tau)} \tau(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \right] + \phi_u^{in} \exp \left[-i \int^{\omega_u(\tau)} \tau(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \right]. \quad (3.2.19)$$

De acuerdo a la ecuación (3.2.19) la amplitud de la componente ω_u es $\alpha i \int \tau d\omega$ tomando la mitad inferior del contorno de integración, que se muestra en la figura 3.9. Aunque integremos de la frecuencia negativa a la positiva, cerramos la integral en el contorno superior. Obteniendo la fórmula

$$\frac{\hbar\omega'}{k_B T} = -i \oint_{\Sigma} \tau(\omega) d\omega. \quad (3.2.20)$$

Temperatura de Hawking en distintos perfiles de velocidad

En este capítulo resolvemos la integral que apareció en el capítulo anterior para encontrar la temperatura de Hawking considerando distintos perfiles de velocidad. Luego, aplicaremos los resultados al perfil de velocidad tangente hiperbólica para el caso sónico y para el caso óptico utilizaremos la tangente hiperbólica y el solitón ya que estos perfiles son los más relevantes en sus respectivos sistemas debido a que aparecen en los sistemas análogos experimentales [22, 37, 41]. Encontramos que el espectro de Hawking deja de ser térmico debido a la dispersión, i.e., la temperatura de Hawking no es constante.

4.1. Sistema acústico

Consideramos ondas en un tanque de agua, en el que modelamos su dispersión de la forma [13, 25, 26, 37, 42]

$$c(k) = c_s \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_z^2}}, \quad (4.1.1)$$

donde c_s es la velocidad del sonido en el medio y k_z define la escala de la dispersión. Y el medio fluye con una velocidad que está dada por perfiles de velocidad ideales, pero que tienen una solución analítica.

4.1.1. Perfil lineal

Consideramos que el perfil de velocidad tiene la forma

$$u(z) = \alpha z. \quad (4.1.2)$$

Para encontrar la temperatura debemos expresar z como función de k , si fijamos la energía ω . De la relación de dispersión

$$\omega - u(z)k = kc(k), \quad (4.1.3)$$

obtenemos:

$$u(z) = \frac{\omega}{k} - c(k), \quad (4.1.4)$$

sustituyendo el perfil $u(z)$ se obtiene

$$z(k) = \frac{\omega}{\alpha k} - \frac{c(k)}{\alpha}. \quad (4.1.5)$$

Recordando que la temperatura está dada por

$$k_B T = \frac{i\hbar\omega}{\oint_{\Sigma} z(k) dk}, \quad (4.1.6)$$

donde Σ es la superficie de integración que encierra los modos k_{ur} y k_{ul} . La integral es

$$\oint_{\Sigma} z(k) dk = \oint_{\Sigma} \left(\frac{\omega}{\alpha k} - \frac{c(k)}{\alpha} \right) dk = \frac{\omega}{\alpha} \oint_{\Sigma} \frac{dk}{k} = \frac{2\pi i \omega}{\alpha}. \quad (4.1.7)$$

Asumiendo de que la función $c(k)$ es una función analítica, la única contribución a la integral de contorno es el primer término de la ecuación (4.1.5), por lo tanto obtenemos

$$T = \frac{\hbar\alpha}{2\pi k_B} \equiv T_0. \quad (4.1.8)$$

Definiendo la temperatura usua de Hawking T_0 que nos será útil al momento de comparar los resultados cuando consideramos dispersión. En la figura 4.1 observamos que la temperatura no depende del vector de onda: es constante. Por tanto, en este caso el espectro de la radiación de Hawking no depende de la dispersión, debido a que no aparece la función $c(k)$ en la ecuación (4.1.8) [37].

4.1.2. Perfil raíz cuadrada

Consideramos un perfil de velocidad que depende de la posición z de la forma

$$u(z) = -u_0 \sqrt{\frac{-(z - z_m)}{a}}, \quad (4.1.9)$$

donde u_0 es la velocidad de las ondas en el medio, a es la escala espacial y $z_m > 0$ es el punto donde se coloca un observador. Despejamos z de la relación de dispersión

$$z = z_m - \frac{a}{u_0^2 k^2} [\omega - c(k)k]^2. \quad (4.1.10)$$

La función $z(k)$ tiene un polo en $k = 0$, utilizando el teorema de Cauchy obtenemos

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = \frac{4\pi\omega a c_s}{u_0^2}. \quad (4.1.11)$$

La relación de dispersión en $z = z_m$ queda como

$$\omega = c(k_0)k_0, \quad (4.1.12)$$

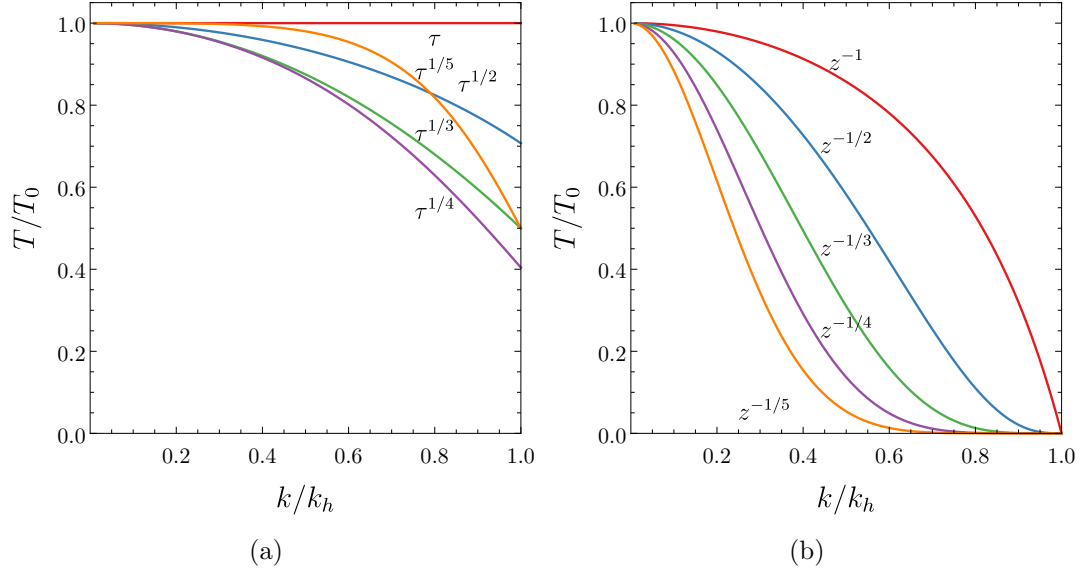


Figura 4.1: Temperatura como función del vector de onda correspondiente a los perfiles de velocidad $u(z) = \sqrt[n]{z}$ (a) y $u(z) = -\sqrt[n]{z}$ (b). Para distintos valores de n : $n = 1$ (rojo), $n = 2$ (azul), $n = 3$ (verde), $n = 4$ (morado) y $n = 5$ (naranja).

donde k_0 es la magnitud del vector de onda de los modos que se mueven a la derecha observados en el marco comóvil k_{ur} .

Deseamos expresar el resultado en función del gradiente evaluado en el horizonte de fase. La posición en la que ocurre el horizonte de fase la llamaremos z_0 , que es cuando la velocidad de fase de la onda es igual a la velocidad del fluido en magnitud,

$$|u(z_0)| = u_0 \sqrt{\frac{-(z_0 - z_m)}{a}} = c(k_0), \quad (4.1.13)$$

y el gradiente

$$\alpha = u'(z_0) = \frac{u_0}{2} \sqrt{\frac{1}{-a(z_0 - z_m)}}. \quad (4.1.14)$$

Las ecuaciones (4.1.13) y (4.1.14) las combinamos para obtener

$$a = \frac{u_0^2}{2\alpha c(k_0)} \quad (4.1.15)$$

Sustituimos en la ecuación (4.1.11), para obtener

$$T = T_0 \frac{c(k_0)}{c_s}, \quad (4.1.16)$$

donde $c_s = v_g(0)$ es la velocidad del sonido. En la figura 4.1 se muestra como el resultado obtenido se desvía de la predicción hecha sin considerar efectos dispersivos, si definimos k_h como el vector de onda que cumple $c(k_h) = v_g(k_h)$, en este valor la temperatura no decae a cero.

4.1.3. Perfil raíz cúbica

Consideramos un perfil de la forma

$$u(z) = -u_0 \sqrt[3]{\frac{-(z - z_m)}{a}}. \quad (4.1.17)$$

Resolvemos la relación de dispersión para z

$$z = z_m - \frac{a}{u_0^3 k^3} (c(k)k - \omega)^3. \quad (4.1.18)$$

Utilizando el teorema de Cauchy para la integral, obtenemos el resultado

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = \frac{a}{u_0^3} \pi 6\omega v_g^2(0) \left(1 + \frac{\omega v_g'(0)}{2v_g^2(0)} \right), \quad (4.1.19)$$

por la dispersión que estamos utilizando tenemos la condición

$$v_g'(0) = 0. \quad (4.1.20)$$

Deseamos expresar el resultado en función del gradiente del perfil, evaluado en el horizonte de fase.

$$c(k_0) = u_0 \sqrt[3]{\frac{-(z_0 - z_m)}{a}} \quad (4.1.21)$$

y

$$\alpha = \frac{u_0}{\sqrt[3]{a(z_0 - z_m)^2}}. \quad (4.1.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.1.12), (4.1.21) y (4.1.22) en la ecuación (4.1.19) obtenemos

$$T = T_0 \frac{c^2(k_0)}{c_s^2} = T_0 \sqrt{1 - \frac{k}{k_z}}. \quad (4.1.23)$$

En la figura 4.1 se muestra como el resultado obtenido se desvía aún más de la predicción hecha sin considerar efectos dispersivos, aunque conforme vamos aumentando el radical la temperatura cae más rápido.

4.1.4. Generalización de los perfiles raíz n -ésima

Consideramos un perfil de la forma

$$u(z) = -u_0 \sqrt[n]{\frac{-(z - z_m)}{a}}. \quad (4.1.24)$$

Resolvemos la relación de dispersión para z

$$z = z_m - \frac{a}{(u_0 k)^n} [c(k)k - \omega]^n. \quad (4.1.25)$$

Utilizando el teorema de Cauchy para la integral, obtenemos el resultado

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = 2\pi \frac{a}{u_0^n (n-1)!} \sum_{l=0}^n (-\omega)^l \frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}} (c(k)k)^{n-l} \Big|_{k=0}. \quad (4.1.26)$$

Deseamos expresar el resultado en términos del gradiente del perfil de velocidad evaluado en el horizonte de fase z_0 , donde se cumple

$$c(k_0) = u_0 \sqrt[n]{\frac{-(z_0 - z_m)}{a}}. \quad (4.1.27)$$

El gradiente es

$$\alpha = \frac{u_0}{\sqrt[n]{a}} \frac{[-(z_0 - z_m)]^{(1-n)/n}}{n}. \quad (4.1.28)$$

Combinando las ecuaciones (4.1.27) y (4.1.28), en la ecuación (4.1.26), obtenemos el resultado

$$T = T_0 n! k_0 c^n(k_0) \left(\sum_{l=0}^n (-\omega)^l \frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}} (c(k)k)^{n-l} \Big|_{k=0} \right)^{-1}. \quad (4.1.29)$$

Este resultado es una generalización de lo hecho en las secciones anteriores y se reduce a las ecuaciones (4.1.8), (4.1.16) y (4.1.23) para $n = 1, 2, 3$.

4.1.5. Perfil lineal inverso

Consideramos la situación donde u es inversamente proporcional a z . Claramente es un caso ideal, pero tiene la ventaja de que podemos resolverlo de manera analítica. Tenemos

$$u(z) = -u_0 \frac{a}{z}, \quad (4.1.30)$$

donde u_0 es la velocidad de las ondas en el medio y a es la escala espacial para que $u(z)$ tenga unidades de velocidad. Despejando z de la relación de dispersión, obtenemos

$$z = \frac{au_0}{c(k) - \omega/k}. \quad (4.1.31)$$

Ahora analizamos esta expresión tiene un polo en k que corresponde a las solución de la relación de dispersión en $z \rightarrow \infty$, cuando la velocidad del medio es cero, por tanto

$$\omega = c(k_\infty)k_\infty. \quad (4.1.32)$$

Como el contorno de integración encierra a k_{ur} de la onda saliente, inferimos que k_∞ corresponde a k_{ur} . Usando el teorema del residuo de Cauchy, para k cerca del polo k_∞

$$kc(k) - \omega \approx \frac{dc(k)k}{dk} \Big|_{k_\infty} (k - k_\infty) = v_g(k_\infty)(k - k_\infty), \quad (4.1.33)$$

donde v_g denota la velocidad de grupo y órdenes superiores de la serie no contribuyen a la integral. Despejando z

$$z = \frac{au_0k}{v_g(k_\infty)(k - k_\infty)}. \quad (4.1.34)$$

Calculamos la integral usando el teorema del residuo

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = 2\pi \frac{au_0k_\infty}{v_g(k_\infty)}, \quad (4.1.35)$$

haciendo uso de la relación de dispersión en el infinito (4.1.32), simplificamos la expresión a

$$T = \frac{\hbar v_g(k_\infty)c(k_\infty)}{2\pi k_B a u_0}, \quad (4.1.36)$$

que es el resultado previamente conocido para el perfil $1/z$ [43]. La dispersión afecta el espectro de la radiación y ya no es un espectro térmico o planckiano. Podemos escribir la ecuación (4.1.36) en una forma que se pueda observar que reproduce el resultado de Hawking para un medio con dispersión. Usando la definición de horizonte de fase para k_∞ :

$$|u(z_\infty)| = c(k_\infty). \quad (4.1.37)$$

Calculamos el gradiente del perfil de velocidad (4.1.30) y la evaluamos en el horizonte de fase

$$\alpha = u'(z_\infty) = \frac{u_0 a}{z_\infty^2} = \frac{c^2(k_\infty)}{a u_0}, \quad (4.1.38)$$

y sustituimos en la ecuación (4.1.36) para obtener el resultado

$$T = T_0 \frac{v_g(k_\infty)}{c(k_\infty)}. \quad (4.1.39)$$

Hay que notar que la velocidad de grupo y la velocidad de fase son iguales en ausencia de dispersión, lo cual reproduce el resultado de Hawking (4.1.8). En la figura 4.1 se muestra cómo la temperatura disminuye hasta cero conforme el valor del vector se acerca a k_h .

4.1.6. Perfil de Schwarzschild

En las coordenadas de Painlevé-Lemaître-Gullstrand la solución de Schwarzschild aparece como un medio móvil con un perfil de velocidad $u = -c\sqrt{a/r}$. Consideramos solo ondas que se propagan en la dirección r , identificando r con z suponemos que el perfil es

$$u(z) = -u_0 \sqrt{\frac{a}{z}}. \quad (4.1.40)$$

Resolviendo la ecuación para z

$$z = \frac{a u_0^2}{[\omega/k - c(k)]^2}. \quad (4.1.41)$$

Nuevamente desarrollamos en serie de Taylor el denominador de la expresión, pero ahora consideramos hasta el segundo término ya que en este caso sí contribuye a la integral

$$c(k)k - \omega \approx v_g(k_\infty)(k - k_\infty) + v'_g(k_\infty)(k - k_\infty)^2. \quad (4.1.42)$$

La función $z(k)$ tiene dos polos, k_∞ es la solución a la relación de dispersión en el infinito $z \rightarrow \infty$. Como en la sección anterior, suponemos que k_∞ corresponde a k_{ur} en el infinito. Sin embargo, debido al cuadrado que aparece en la expresión (4.1.41), $z(k)$ tiene dos polos

$$k = k_\infty, \quad k = k_\infty - \frac{v_g(k_\infty)}{v'_g(k_\infty)}, \quad (4.1.43)$$

Utilizando el teorema del residuo de Cauchy, encontramos que el único que contribuye es $k = k_\infty$

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = \frac{au_0^2}{v_g^3(k_\infty)} [2v_g(k_\infty)k_\infty - v'_g(k_\infty)k_\infty^2]. \quad (4.1.44)$$

Como en el caso $1/z$ calculamos el gradiente de velocidad α en el horizonte de fase (4.1.37)

$$\alpha \equiv u'(z_\infty) = \frac{c^3(k_\infty)}{2au_0^2}. \quad (4.1.45)$$

Expresando la temperatura en función de α y la relación de dispersión

$$T = T_0 \frac{v_g^2(k_\infty)}{c^2(k_\infty)} \left(1 - \frac{v'_g(k_\infty)k_\infty}{2v_g(k_\infty)}\right)^{-1}. \quad (4.1.46)$$

Esta fórmula describe cómo la radiación de Hawking de un agujero negro astrofísico es modificada si el espacio-tiempo es dispersivo. Sin la presencia de dispersión: $v_g(k_\infty) = c(k_\infty)$ y $v'_g(k_\infty) = 0$ por lo que recuperamos el resultado de Hawking $T = T_0$. En la figura 4.1 se muestra la temperatura efectiva.

4.1.7. Perfil raíz cúbica inverso

En la siguiente sección consideramos un perfil de velocidad proporcional a $1/\sqrt[3]{z}$, consideramos este perfil de velocidad, ya que tiene solución analítica como los anteriores, por lo que el perfil es

$$u(z) = -u_0 \sqrt[3]{\frac{a}{z}}. \quad (4.1.47)$$

Resolvemos de la relación de dispersión para z

$$z = \frac{au_0^3}{(c(k) - \omega/k)^3}. \quad (4.1.48)$$

Desarrollamos el denominador en serie hasta tercer orden, alrededor del k que satisface la relación de dispersión en el infinito $c(k_\infty)k_\infty = \omega$:

$$c(k)k - \omega = v_g(k_\infty)(k - k_\infty) + \frac{v'_g(k_\infty)}{2}(k - k_\infty)^2 + \frac{v''_g(k_\infty)}{6}(k - k_\infty)^3. \quad (4.1.49)$$

42 Capítulo 4. Temperatura de Hawking en distintos perfiles de velocidad

La función $z(k)$ tiene tres polos, debido a que la expresión está elevada al cubo, sin embargo, utilizando el teorema de Cauchy el único polo que contribuye es k_∞ . Obteniendo el resultado

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = 2\pi \frac{3au_0^3 k_\infty}{v_g^3(k_\infty)} \left[1 + \frac{v_g'^2(k_\infty)k_\infty^2}{2v_g s(k_\infty)} - \frac{k_\infty}{6v_g^2(k_\infty)} (9v_g'(k_\infty) + k_\infty v_g''(k_\infty)) \right] \quad (4.1.50)$$

Calculamos el gradiente del perfil de velocidad α en el horizonte de fase (4.1.37)

$$\alpha = u'(z) = \frac{c^4(k_\infty)}{3u_0^3 a} \quad (4.1.51)$$

Expresando el resultado en términos de α y la relación de dispersión

$$T = T_0 \frac{v_g^3(k_\infty)}{c^3(k_\infty)} \left[1 - \frac{3v_g'(k_\infty)k_\infty}{2v_g(k_\infty)} + \frac{k_\infty^2}{6} \left(\frac{3v_g'(k_\infty)^2}{v_g(k_\infty)^2} - \frac{v_g''(k_\infty)}{v_g(k_\infty)} \right) \right]^{-1}. \quad (4.1.52)$$

En la figura 4.1 (b) se muestra el espectro y observamos que conforme vamos aumentando el valor del radical la temperatura tiene una caída más rápida a cero.

4.1.8. Generalización de los perfiles raíz n -ésima inverso

Como hemos visto en los ejemplos anteriores la soluciones para perfiles de velocidad proporcionales a una raíz de la posición z tienen solución analítica, es natural que propongamos una dependencia de la forma

$$u(z) = -u_0 \sqrt[n]{\frac{a}{z}}. \quad (4.1.53)$$

Resolvemos la relación de dispersión para z

$$z = \frac{u_0^n a}{(c(k) - \omega/k)^n}. \quad (4.1.54)$$

Desarrollamos el denominador en serie alrededor de k_∞ , que es la solución a la relación de dispersión en $z \rightarrow \infty$ (4.1.32), consideramos solo los primeros n términos de la serie, que son los que contribuyen a la integral de contorno

$$c(k)k - \omega = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} v_g^{(j-1)}(k_\infty) (k - k_\infty)^j. \quad (4.1.55)$$

Considerando el desarrollo del denominador, es claro que la función $z(k)$ tiene n polos, pero solo uno de ellos contribuye a la integral, el polo simple k_∞ . Utilizando el teorema del residuo de Cauchy obtenemos

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = 2\pi \frac{u_0^n}{v_g^n(k_\infty)(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}} \left(k^n / \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \frac{v_g^{(j-1)}(k_\infty)}{v_g(k_\infty)} (k - k_\infty)^{j-1} \right)^n \Big|_{k=k_\infty}. \quad (4.1.56)$$

Calculamos el gradiente del perfil de velocidad y lo evaluamos en el horizonte de fase (4.1.37)

$$\alpha = u'(z) = \frac{c^{n+1}(k_\infty)}{nau_0^n}. \quad (4.1.57)$$

El resultado lo expresamos en función de α y la solución de la relación de dispersión en el infinito (4.1.32)

$$T = T_0 \frac{v_g^n(k_\infty)}{c^n(k_\infty)} n! k_\infty \left[\frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}} \left(k^n / \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \frac{v_g^{(j-1)}(k_\infty)}{v_g(k_\infty)} (k - k_\infty)^{j-1} \right)^n \Big|_{k=k_\infty} \right]^{-1}. \quad (4.1.58)$$

Este resultado es una generalización de lo hecho en las secciones anteriores y se reduce a las ecuaciones (4.1.39), (4.1.46) y (4.1.52) para $n = 1, 2, 3$.

4.2. Sistema óptico

El caso del análogo óptico difiere del sónico, ya que el perfil de velocidad no existe, dado que el medio no está fluyendo, lo que se modifica son las propiedades dieléctricas del medio. Un pulso propagándose en la fibra modifica el índice de refracción n por el efecto Kerr.

La relación de dispersión en el marco comóvil es

$$\omega' = \omega - v_{gh} \frac{\omega}{c} [n(\omega) + \delta n(\tau)], \quad (4.2.1)$$

donde $n(\omega)$ es el índice de refracción del medio, v_{gh} es la velocidad de grupo con la que se propaga el pulso de bombeo y $\delta n(\tau)$ es el cambio de índice de refracción causado por el pulso de bombeo. En esta sección consideraremos que la función a modificar es la perturbación δn .

Los problemas a resolver son parecidos al caso sónico, por lo que solo resolveremos los casos lineal, de segundo orden y los casos generales $1/\sqrt[n]{\tau}$ y $\sqrt[n]{\tau}$.

4.2.1. Perfil lineal

Si suponemos el caso ideal, donde la perturbación es lineal

$$\delta n(\tau) = \alpha \tau \quad (4.2.2)$$

Debemos despejar τ de la relación de dispersión

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \left(n_{gh} - n(\omega) - n_{gh} \frac{\omega'}{\omega} \right), \quad (4.2.3)$$

donde $n_{gh} = c/v_{gh}$. La función $\tau(\omega)$ tiene un polo en $\omega = 0$. Suponemos que la función $n(\omega)$ es analítica, haciendo uso del teorema de la integral de Cauchy obtenemos el resultado

$$T = \frac{\hbar \alpha}{2\pi k_B} \equiv T_0. \quad (4.2.4)$$

Este es el resultado esperado para la aproximación lineal y que no considera los efectos de la dispersión en el espectro térmico [28], con

$$\alpha = \left. \frac{d\delta n(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_h}, \quad (4.2.5)$$

τ_h es la posición del horizonte de eventos, que al haber dispersión es variable y depende de la frecuencia ω .

4.2.2. Perfil raíz n -ésima inverso

Consideramos una perturbación de la forma

$$\delta n(\tau) = \delta n_0 \sqrt[n]{\frac{a}{\tau}}. \quad (4.2.6)$$

Resolvemos la relación de dispersión (4.2.1) para τ

$$\tau = a(\delta n_0)^n \frac{\omega^n}{[(n_{gh} - n(\omega))\omega - n_{gh}\omega']^n}, \quad (4.2.7)$$

Analizando la relación de dispersión (4.2.1) y considerando la forma de la perturbación, en $\tau \rightarrow \infty$, la perturbación no modificará las propiedades del medio $\delta n(\tau) \rightarrow 0$, la solución a la relación de dispersión la llamaremos $\omega_\infty \rightarrow \omega_{ur}$, que cumple

$$\omega' = \omega_\infty \left(1 - \frac{n(\omega_\infty)}{n_{gh}} \right). \quad (4.2.8)$$

Desarrollamos el denominador de la ecuación (4.2.7) alrededor de $\omega = \omega_\infty$

$$(n_{gh} - n(\omega))\omega - n_{gh}\omega' = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \frac{v_{gr}^{(j-1)}(\omega_\infty)}{c} (\omega - \omega_\infty)^j, \quad (4.2.9)$$

donde hemos definido la velocidad de fase relativa a la perturbación

$$\frac{v_{pr}(\omega)}{c} = n_{gh} - n(\omega), \quad (4.2.10)$$

y la velocidad de grupo relativa a la perturbación como

$$\frac{v_{gr}(\omega)}{c} = \frac{d}{d\omega} [(n_{gh} - n(\omega))\omega]. \quad (4.2.11)$$

Considerando las suposiciones anteriores, la función $\tau(\omega)$ tiene n polos, pero solo contribuye el polo $\omega = \omega_\infty$. Utilizando el teorema del residuo de Cauchy obtenemos

$$\frac{\hbar\omega'}{k_B T} = 2\pi \frac{a(\delta n_0)^n}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left[\frac{\omega}{\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \frac{v_{gr}^{(j-1)}(\omega_\infty)}{c} (\omega - \omega_\infty)^{j-1} \right)} \right] \Bigg|_{\omega=\omega_\infty}. \quad (4.2.12)$$

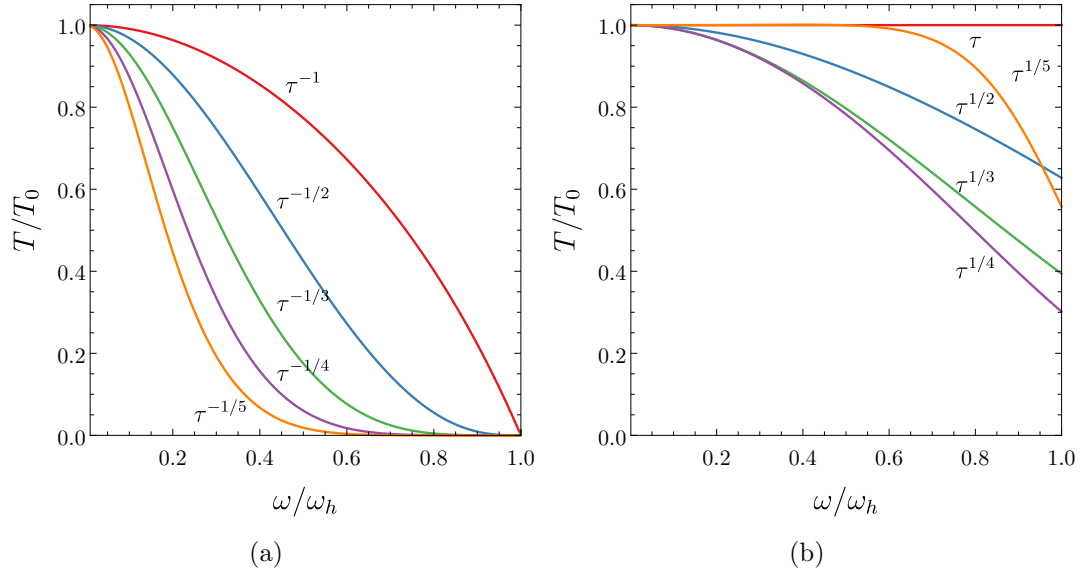


Figura 4.2: Temperatura como función de la frecuencia correspondiente a los perfiles de velocidad $\delta n(\tau) = \sqrt[n]{\tau}$ (a) y $\delta n(\tau) = -\sqrt[n]{\tau}$ (b). Para distintos valores de n (1-roja, 2-azul, 3-verde, 4-morada y 5-naranja).

Definimos el horizonte de fase como la posición donde se cumple la relación

$$\delta n(\tau_\infty) = [n_{gh} - n(\omega_\infty)]. \quad (4.2.13)$$

Calculamos el gradiente de la perturbación y lo evaluamos en el horizonte de fase

$$\alpha = \delta n'(\tau_\infty) = \frac{[n_{gh} - n(\omega_\infty)]^{n+1}}{na\delta n^n}. \quad (4.2.14)$$

Expresamos la temperatura en términos del gradiente en el horizonte de fase (4.2.14) y la relación de dispersión en el infinito (4.2.8)

$$T = T_0 \frac{n!\omega_\infty}{v_{pr}^n(\omega_\infty)} \left[\frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left(\frac{\omega^n}{\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} v_{gr}^{(j-1)}(\omega_\infty) (\omega - \omega_\infty)^{j-1} \right)} \right) \Big|_{\omega=\omega_\infty} \right]^{-1}. \quad (4.2.15)$$

Expresamos los resultados por simplicidad como función de ω . Para $n = 1$ tenemos el resultado

$$T = T_0 \frac{v_{gr}(\omega)}{v_{pr}(\omega)}. \quad (4.2.16)$$

Para $n = 2$

$$T = T_0 \left(\frac{v_{gr}(\omega)}{v_{pr}(\omega)} \right)^2 \left(1 - \frac{v'_{gr}(\omega)\omega}{2v_{gr}(\omega)} \right)^{-1}. \quad (4.2.17)$$

Para $n = 3$

$$T = T_0 \left(\frac{v_{gr}(\omega)}{v_{pr}(\omega)} \right)^3 \left[1 - \frac{3v'_{gr}(\omega)\omega}{2v_{gr}(\omega)} + \frac{\omega^2}{6} \left(\frac{3v'_{gr}(\omega)^2}{v_{gr}(\omega^2)} - \frac{v''_{gr}(\omega)}{v_{gr}(\omega)} \right) \right]^{-1}. \quad (4.2.18)$$

En la figura 4.2 (a) graficamos los resultados para los primeros cinco valores de n para el caso inverso.

4.2.3. Perfil raíz n -ésima

Consideramos una perturbación de la forma

$$\delta n(\tau) = \delta n_0 \sqrt[n]{\frac{-(\tau - \tau_m)}{a}}. \quad (4.2.19)$$

Resolvemos la relación de dispersión (4.2.1) para τ

$$\tau = \tau_m - \frac{a}{\delta n_0^n} \frac{\left(\frac{v_{pr}(\omega)}{c}\omega - n_{gh}\omega'\right)^n}{\omega^n}. \quad (4.2.20)$$

Analizando la relación de dispersión (4.2.1) y considerando la forma de la perturbación, en $\tau = \tau_m$, la perturbación no modificará las propiedades del medio $\delta n(0) = 0$, la solución a la relación de dispersión la llamaremos ω_0 , que cumple

$$\omega' = \omega_0 \left(1 - \frac{n(\omega_0)}{n_{gh}}\right). \quad (4.2.21)$$

Considerando las suposiciones anteriores, la función $\tau(\omega)$ tiene un polo simple $\omega = 0$ y utilizando el teorema del residuo de Cauchy, obtenemos

$$\frac{\hbar\omega'}{k_B T} = -2\pi \frac{a}{(n-1)!(\delta n_0)^n} \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left(\frac{v_{pr}(\omega)}{c}\omega - n_{gh}\omega'\right)^n \Big|_{\omega=0}. \quad (4.2.22)$$

Definimos el horizonte de fase como la posición donde se cumple la relación

$$\delta n(\tau_0) = [n_{gh} - n(\omega_0)]. \quad (4.2.23)$$

Calculamos el gradiente de la perturbación y lo evaluamos en el horizonte de fase

$$\alpha = \delta n'(\tau_0) = \frac{\delta n_0^n}{a} [n_{gh} - n(\omega_0)]^{1-n}. \quad (4.2.24)$$

Expresamos la temperatura en términos del gradiente en el horizonte de fase (4.2.24) y la relación de dispersión en $\omega = 0$ (4.2.21)

$$T = T_0 n! \omega_0 (n_{gh} - n(\omega_0))^n \left[\frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left((n_{gh} - n(\omega))\omega - n_{gh}\omega' \right)^n \Big|_{\omega=0} \right]^{-1}. \quad (4.2.25)$$

Para $n = 1$

$$T = T_0. \quad (4.2.26)$$

Para $n = 2$

$$T = T_0 \frac{v_{pr}(\omega)}{v_{gr}(0)}. \quad (4.2.27)$$

Para $n = 3$

$$T = T_0 \left(\frac{v_{pr}(\omega)}{v_{gr}(0)} \right)^2. \quad (4.2.28)$$

4.3. Aproximación a segundo orden

Consideremos un perfil de velocidad primero para el caso acústico

$$u(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2. \quad (4.3.1)$$

La relación de dispersión (4.1.1) junto con el teorema del binomio nos lleva a la expresión

$$z(k) = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \pm 2 \sum_{m=0}^{\infty} a(m) \left(\frac{\omega}{k} - c(k) \right)^m, \quad (4.3.2)$$

donde

$$a(m) = \frac{(-1)^{m-1} (2m-3)!! (4\alpha_2)^{m-1}}{2^m m!(m-1)! \alpha_1^{2m-1}}. \quad (4.3.3)$$

En este caso, la integral de la ecuación (3.1.25) solo tiene solución como una serie infinita y la temperatura de Hawking se expresa como

$$T = \frac{\hbar\omega}{4\pi k_B} \left[\sum_{m=1}^{\infty} a(m) \partial_k^{m-1} (\omega - kc(k))^m \Big|_{k=0} \right]^{-1}. \quad (4.3.4)$$

La condición necesaria para que la serie (4.3.4) sea convergente

$$\epsilon = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{4\alpha_2(2m-1) \partial_k^m [\omega - kc(k)]^{m+1}}{\alpha_1^2(m^2+m) \partial_k^{m-1} [\omega - kc(k)]^m} \right| < 1. \quad (4.3.5)$$

Para el caso óptico la fórmula es similar con los cambios de variables usados hasta el momento

$$T = \frac{\hbar\omega'}{4\pi k_B} \left[\sum_{m=1}^{\infty} a(m) \partial_{\omega'}^{j-1} \left(\omega' - \frac{\omega v_{pr}(\omega)}{c} \right)^j \Big|_{\omega=0} \right]^{-1}. \quad (4.3.6)$$

El resultado solo es válido cuando se cumple la condición

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{4\alpha_2(2m-1) \partial_{\omega'}^m (\omega' - \omega v_{pr}(\omega)/c)^{m+1}}{\alpha_1^2(m^2+m) \partial_{\omega'}^{m-1} (\omega' - \omega v_{pr}(\omega)/c)^m} \right| < 1. \quad (4.3.7)$$

La serie se calcula analíticamente con software de cálculo simbólico, logramos hasta 60 términos de la serie. En la figura 4.3 (a), un estudio de la convergencia es ilustrado en la vecindad del horizonte de la velocidad de grupo, el área que más problemas muestra. Si el valor de ϵ en la ecuación (4.3.5) es mucho más pequeño que 1, la convergencia es rápida, sin embargo, si es más cercano a 1, la serie (puntos) converge a un valor diferente que la solución numérica (línea). Hay que notar que el primer término de todas las series es 1 como se espera que empate con la aproximación lineal y $T = T_0$. En la figura 4.3 (derecha) estudiamos el espectro completo para distintos valores de α_1, α_2 , como vemos la serie converge al valor analítico esperado excepto para α_2 muy grande, cerca del horizonte de la velocidad de grupo v_{gh} . Para el límite lineal $\alpha_2 \rightarrow 0$ el espectro se convierte en espectro térmico como se espera, pero si α_2 incrementa, la termalidad se conserva para valores pequeños $\alpha_2 < 0.1$ (constante T/T_0), aunque la temperatura decrece ($T/T_0 < 1$). Para valores más grandes de $\alpha_2 > 0.1$, la termalidad se pierde y el vector de onda k_h domina el espectro.

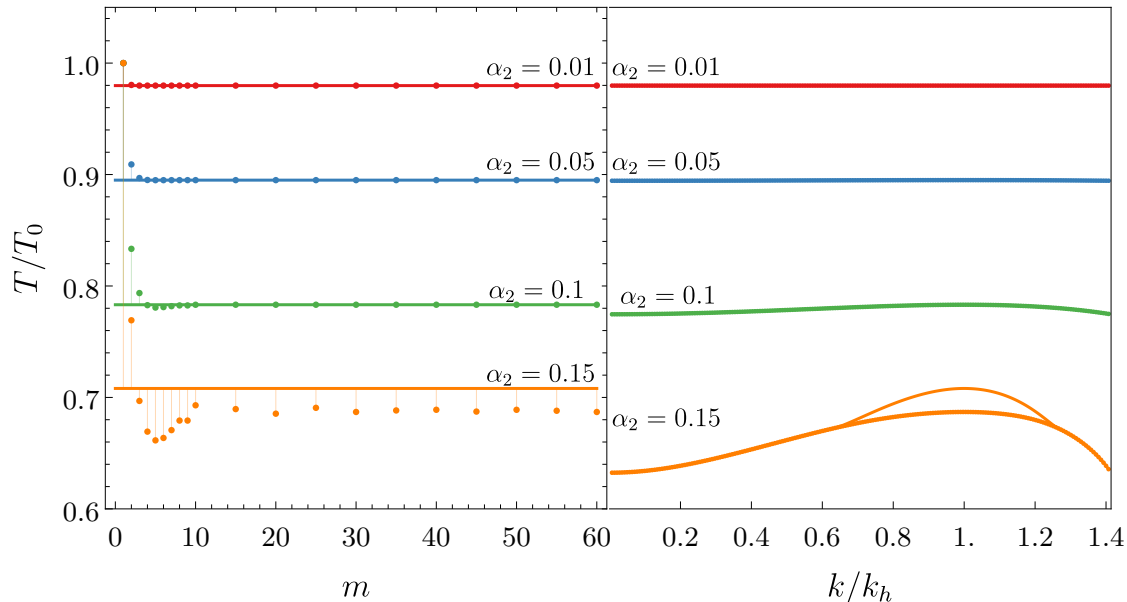


Figura 4.3: Temperatura de Hawking para el perfil de segundo orden $\alpha_1 z + \alpha_2 z^2$ con $\alpha_1 = 1$, varios valores de α_2 , evaluados en el horizonte de la velocidad de grupo k_h , y con m términos de la serie (izquierda). Espectro de Hawking para el perfil de velocidad de segundo orden con 60 términos (derecha). Las líneas indican la solución numérica.

4.3.1. Aproximación de segundo orden para perfiles físicos

En estudios analíticos de la radiación de Hawking una aproximación lineal es usualmente usada, el espectro es calculado considerando que el perfil de velocidad es lineal $\propto z$ [44, 45, 46] o $\propto \tau$ [28, 47] y de esto se obtienen las famosas fórmulas para la temperatura de Hawking en sistemas análogos:

$$T = \frac{\hbar}{2\pi k_B} \left. \frac{du}{dz} \right|_h, \quad T = \frac{\hbar}{2\pi k_B} \left. \frac{1}{\delta n} \frac{d\delta n}{d\tau} \right|_h. \quad (4.3.8)$$

En este trabajo, obtuvimos la temperatura de Hawking usando la aproximación de segundo orden dada por las ecuaciones (4.3.4) y (4.3.6). Aplicamos estas fórmulas en la región de convergencia para los perfiles más usados \tanh y sech^2 en la ecuación (2.4.1) y obtenemos la diferencia respecto al perfil lineal. Estos perfiles de velocidad junto con la aproximación forman el modelo base para la radiación análoga de Hawking.

Finalmente, comparamos los resultados con las soluciones numéricas y obtenemos un buen resultado mientras que la serie sea convergente, estos resultados se muestran en la figura 4.4. Como se esperaba, el espectro es térmico para vectores de onda pequeños.

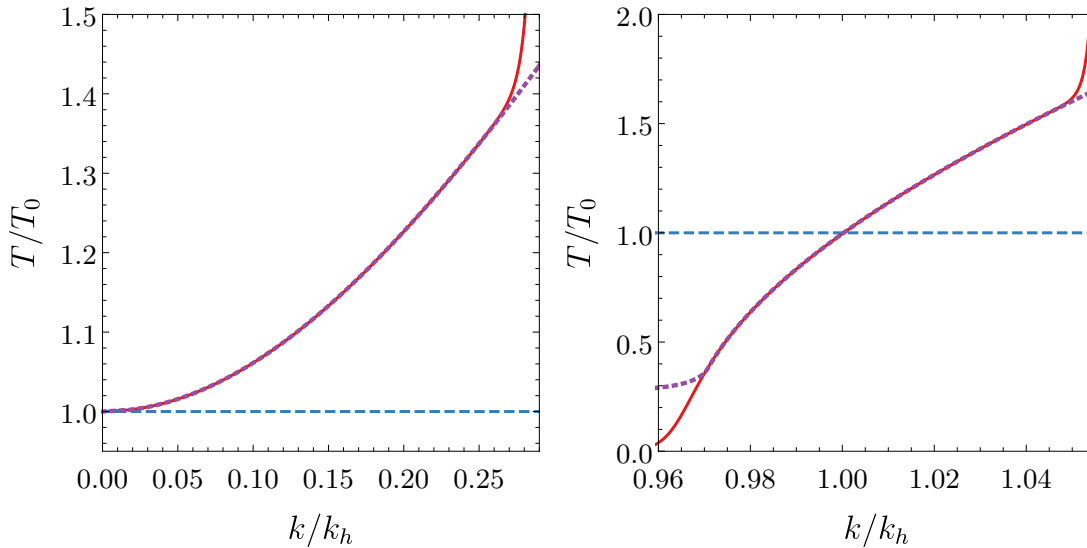


Figura 4.4: Temperatura de Hawking para el perfil tanh alrededor de $z = 0$ (izquierda) y para sech^2 alrededor del punto cero de curvatura $k = k_h$ (derecha). Graficamos el resultado analítico para las aproximaciones a primer (azul discontinuo) y segundo (rojo sólido) orden y el resultado numérico (morado punteado).

4.4. Solución numérica

Resolvemos la integral numérica para comprobar los resultados analíticos para los diferentes perfiles. Para todos los perfiles calculamos la integral numérica. La integración se hace en el plano Cartesiano, como trayectoria se toma una elipse o rectángulo que encierre el origen y que no pase por ninguna de las ramas de corte en el plano complejo, parecido al contorno verde en las figuras [3.5](#) y [3.9](#). Para verificar la validez del contorno usamos el hecho de que la parte real de la integral debe ser cero y en general en las soluciones numéricas es del orden $\sim 10^{-8}$ en el sistema acústico y $\sim 10^{-10}$ en el sistema óptico. En la figura [4.5](#) mostramos el comportamiento de la parte real de la integral para los perfiles crecientes para ambos sistemas. Del comportamiento del error en ambas gráficas podemos deducir que es numérico porque no tiene estructura y oscila alrededor de cero. Los resultados son los mismos que se muestran en las figuras [4.1](#) y [4.2](#).

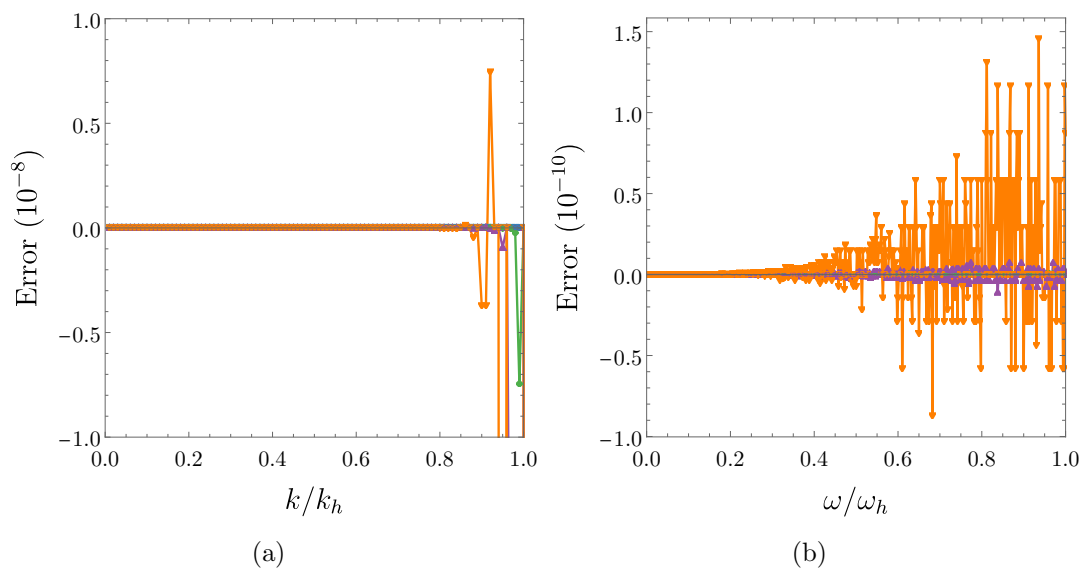


Figura 4.5: Error numérico de la integral compleja (parte real) para los perfiles crecientes del sistema sónico (a) y óptico (b). Para distintos valores de n (1-roja, 2-azul, 3-verde, 4-morada y 5-naranja).

Análogo óptico de la métrica de Schwarzschild-Planck

En 1975, Stephen Fulling y Paul Davis propusieron estudiar un modelo de un campo escalar sin masa influenciado por el movimiento de un espejo perfecto, i.e., que refleja todas las frecuencias sin pérdidas. Considerando la ecuación de onda y la condición de frontera en la trayectoria del espejo demostraron que estos sistemas emitían partículas en forma de radiación [33, 34]. Esto es ahora conocido como el efecto Fulling-Davis.

Posteriormente Michael Good *et al*, propusieron varias trayectorias distintas para estudiar a fondo la creación de partículas [48, 49, 50]. Una de las principales ventajas de los espejos es que los coeficientes de Bogoliubov pueden ser calculados con relativa facilidad. Dado que este efecto es puramente cinemático (como el efecto Unruh) se puede conectar con otros fenómenos que crean partículas a través de métricas astrofísica [51] o análogas [52], como veremos en este capítulo.

Cuando se consideran los efectos de un campo escalar cuántico en el fondo clásico, la solución de Schwarzschild ya no es una solución estable de las ecuaciones de Einstein, i.e., no describe el espacio-tiempo de un agujero negro que emite radiación de Hawking ya que la solución de Schwarzschild es para un sistema estacionario [51].

A través de una regularización de la trayectoria del espejo negro se obtuvo una nueva trayectoria del llamado espejo negro cuánticamente puro propuesta por M Good *et al*. [49, 51]. Luego, obtuvieron un espacio-tiempo que describe al agujero negro regularizado correspondiente y su emisión de radiación. La nueva métrica soluciona las divergencias de la métrica de Schwarzschild, dado que no hay divergencias en el infrarrojo y la energía emitida es finita .

En este capítulo estudiaremos la producción de partículas debida a espejos, esto es el efecto Fulling y Davis. Posteriormente, aplicaremos los resultados obtenidos para dos trayectorias específicas y estudiaremos la producción de partículas. Posteriormente vamos a obtener la métrica de Schwarzschild-Planck partiendo de la trayectoria del espejo negro cuánticamente puro. Luego obtenemos la métrica del espacio-tiempo de Schwarzschild-Planck en el análogo óptico. En la figura [5.1] mostramos de forma simplificada los pasos que se van a seguir para obtener la nueva métrica. Logramos obtener un sistema que reproduce las características de la métrica de Schwarzschild-Planck.

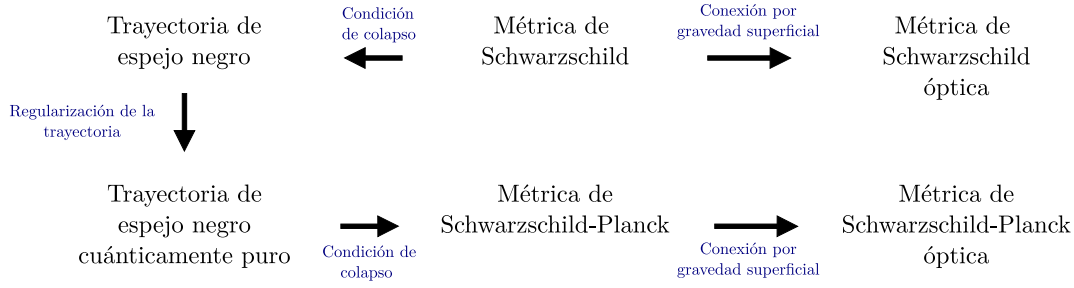


Figura 5.1: Diagrama que simplifica como se obtiene la métrica de Schwarzschild-Planck

5.1. Coeficientes de Bogoliubov

Por simplicidad consideramos el espacio-tiempo plano

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = -dudv. \quad (5.1.1)$$

donde $u = t - x$, $v = t + x$ son las coordenadas de cono de luz; t es el tiempo y x la posición medidos en el marco de laboratorio y denotamos la posición del espejo como $z = z(t)$. Partiendo de la ecuación de onda para campo escalar sin masa

$$\square\phi = 0, \quad (5.1.2)$$

que se puede representar en las coordenadas de cono de luz

$$\partial_u \partial_v \phi = 0. \quad (5.1.3)$$

La solución general a la ecuación de onda (5.1.3) es

$$\phi = a(u) + b(v), \quad (5.1.4)$$

donde a y b son funciones arbitrarias.

Los modos se normalizan usando el producto escalar [53]

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} d\sigma \sqrt{|g_{\sigma}|} n^a [\phi_1 \partial_a \phi_2^* - (\partial_a \phi_1) \phi_2^*], \quad (5.1.5)$$

con Σ una superficie de Cauchy y n^a el vector unitario normal a esta superficie. Una superficie que se usa es \mathcal{J}_R^- y se muestra en el diagrama de Penrose de la figura 5.2. En estas condiciones el producto escalar se reduce a

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dv [\phi_1 \partial_v \phi_2^* - (\partial_v \phi_1) \phi_2^*]. \quad (5.1.6)$$

Otra superficie consiste de la unión de \mathcal{J}_R^+ con $\mathcal{J}_{L,>}^+$, que es la parte de \mathcal{J}_L^+ que está a la derecha del espejo. Entonces, el producto escalar es

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{-\infty}^{\infty} du [\phi_1 \partial_u \phi_2^* - (\partial_u \phi_1) \phi_2^*] - i \int_{v_H}^{\infty} dv [\phi_1 \partial_v \phi_2^* - (\partial_v \phi_1) \phi_2^*], \quad (5.1.7)$$

5.1.1. Modos *in*, *out* y *left*.

Los modos *in* están normalizados, se encuentran en la región \mathcal{J}_R^- y forman un conjunto completo para la región de la derecha del espejo. Los modos *out* son aquellos que también están normalizados en la región \mathcal{J}_R^+ y se desvanecen en la región $\mathcal{J}_{L,>}^+$. Otro conjunto de modos, llamados *left* son aquellos que terminan en $\mathcal{J}_{L,>}^*$. Tomando como conjunto completo los modos *out* y *left*. Todos los modos que inciden sobre el espejo deben desvanecerse en su superficie. Los modos *in* y *out* tienen la forma

$$f_\omega^{in} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} (e^{-i\omega v} - e^{-i\omega p(u)}), \quad (5.1.8)$$

$$f_\omega^{out} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} (e^{-i\omega h(v)} \Theta(v_H - v) - e^{-i\omega u}), \quad (5.1.9)$$

donde las funciones $p(u) = v$ y $h(v) = u$ están definidas por la localización del espejo [48].

5.1.2. Número de partículas

Expandimos el campo en el conjunto de modos normales *in*:

$$\hat{\phi} = \int_0^\infty d\omega (\hat{a}_\omega^{in} f_\omega^{in} + \hat{a}_\omega^{in\dagger} f_\omega^{in*}), \quad (5.1.10)$$

y también lo expandimos en la segunda base de modos *out* y *left*

$$\hat{\phi} = \int_0^\infty d\omega (\hat{a}_\omega^{out} f_\omega^{out} + \hat{a}_\omega^{out\dagger} f_\omega^{out*} + \hat{a}_\omega^{left} f_\omega^{left} + \hat{a}_\omega^{left\dagger} f_\omega^{left*}), \quad (5.1.11)$$

donde \hat{a}_ω^{in} , \hat{a}_ω^{out} y \hat{a}_ω^{left} son los operadores de creación en su respectiva base y su correspondiente operador de aniquilación. Se propone escribir las funciones f_ω^{out} como una combinación lineal de las funciones f_ω^{in} con ayuda de los coeficientes de Bogoliubov:

$$f_\omega^{out} = \int_0^\infty d\omega' (\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'}^{in} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^{in*}). \quad (5.1.12)$$

Aprovechando el hecho de que los modos son ortonormales, se encuentran las relaciones para los coeficientes de Bogoliubov

$$\alpha_{\omega\omega'} = (f_\omega^{out}, f_{\omega'}^{in}), \quad \beta_{\omega\omega'} = - (f_\omega^{out}, f_{\omega'}^{in*}), \quad (5.1.13)$$

podemos obtener de forma explícita el coeficiente β en función de la trayectoria, sustituyendo la función *out* (5.1.9) y haciendo un poco de álgebra se obtiene

$$\beta_{\omega\omega'} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int_{-\infty}^{v_H} dv e^{-i(\omega'v + \omega h(v))} (h'(v)\omega - \omega'), \quad (5.1.14)$$

el horizonte se puede establecer en $v_H = 0$, aunque en general no afecta al espectro ya que el módulo de β elimina la dependencia de v_h [50].

Y los operadores de creación y aniquilación de la base *out*.

$$\hat{a}_\omega^{out} = \left(\hat{\phi}, f_\omega^{out} \right) = \int_0^\infty d\omega' \left(\hat{a}_{\omega'}^{in} \alpha_{\omega\omega'}^* - \hat{a}_{\omega'}^{in\dagger} \beta_{\omega\omega'} \right), \quad (5.1.15)$$

$$\hat{a}_\omega^{out\dagger} = \left(\hat{\phi}, f_\omega^{out*} \right) = \int_0^\infty d\omega' \left(\hat{a}_{\omega'}^{in\dagger} \alpha_{\omega\omega'} - \hat{a}_{\omega'}^{in} \beta_{\omega\omega'}^* \right). \quad (5.1.16)$$

Si consideramos que el campo está en el estado vacío $|0\rangle$ en la base *in*, el número promedio de partículas que se detectan en \mathcal{I}^+ con frecuencia ω es

$$\langle 0 | \hat{N}_\omega^{out} | 0 \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2. \quad (5.1.17)$$

Donde $\hat{N}_\omega^{out} = \hat{a}_\omega^{out\dagger} \hat{a}_\omega^{out}$ se obtiene combinando las ecuaciones (5.1.15) y (5.1.16). En el siguiente capítulo usaremos los resultados obtenidos para dos trayectorias específicas.

5.2. Trayectoria del espejo negro

Good y su equipo propusieron la trayectoria del espejo negro [49, 53], la cual imita la creación de partículas a tiempos del colapso de una masa esférica

$$z(t) = \frac{v_H - ct - W(e^{2ax})}{2a}, \quad (5.2.1)$$

donde a es la aceleración del espejo, v_H es la asíntota de la trayectoria en el futuro y W es la función de Lambert que se define como el inverso de la función $z = W(z)e^{W(z)}$. Definimos la trayectoria del espejo en las coordenadas de cono de luz

$$v_m(t) = ct + z(t), \quad (5.2.2)$$

v_m es evaluada en la posición del espejo al tiempo t , sustituimos la expresión de $z(t)$ y ahora tomamos como parámetro la coordenada v para determinar el tiempo en el que el espejo cruza la coordenada v

$$\tilde{t}_m(v) = v - \frac{c}{2a} \log [a(v_H - v)]. \quad (5.2.3)$$

Dado que lo que nos interesa son los modos en el futuro debemos encontrar la coordenada u como función de v

$$h(v) = u = c\tilde{t}_m(v) - z\tilde{t}_m(v) = v - \frac{c}{a} \log [a(v_H - v)], \quad (5.2.4)$$

esta ecuación representa la trayectoria del espejo en las coordenadas de luz. Esta función es idéntica a la condición de colapso gravitacional para un cascaron esférico de masa M en coordenadas de Regge-Wheler

$$u(U) = U - \frac{c}{\kappa} \ln \left| \frac{\kappa U}{c} \right|, \quad (5.2.5)$$

hasta la constante v_h . En la figura 5.2 (a) se muestra el comportamiento de la trayectoria: en tiempos tardíos alcanza el estado v_h y aceleraciones grandes a hacen que la trayectoria sea menos suave.

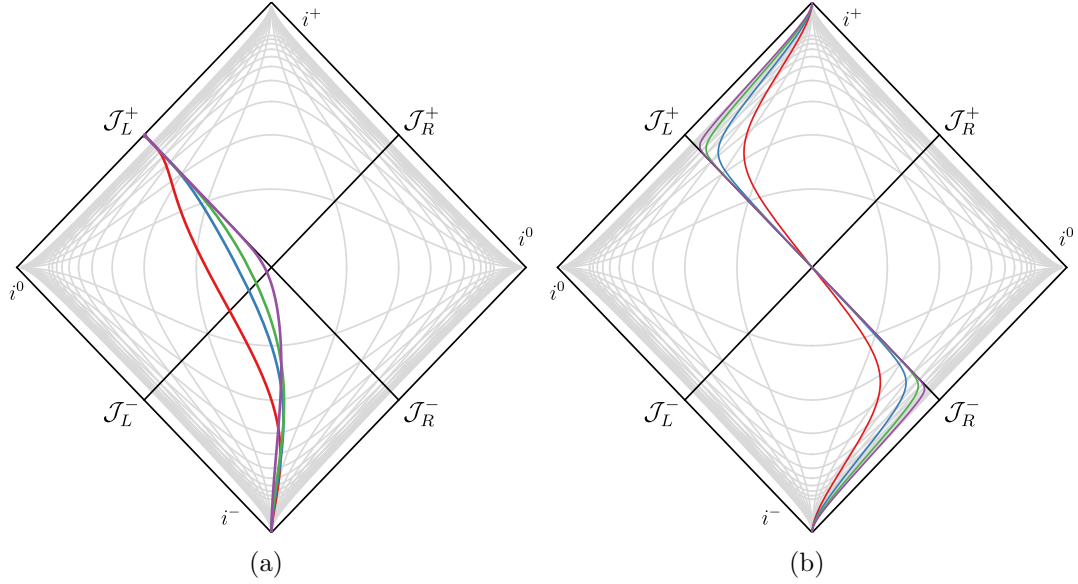


Figura 5.2: Trayectoria del espejo negro (a) variando el parámetro $a = 1, 5, 10, 15$ (rojo, azul, verde y morado) y $v_H = 0$ y del espejo negro cuánticamente puro (b) variando $g = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ (rojo, azul, verde y morado) y $a = 1$.

5.2.1. Coeficiente β

Para obtener los coeficiente β de Bogoliubov, debemos sustituir la ecuación (5.2.4) en (5.1.14) y con la condición que $u \rightarrow -\infty$ en \mathcal{I}_R^- obtenemos la expresión analítica

$$\beta_{\omega\omega'} = -\frac{e^{-i(\omega+\omega')}}{2\pi a} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{\omega+\omega'} \left[-\frac{i}{a}(\omega+\omega') \right]^{-i\omega/a} \Gamma\left(\frac{i\omega}{a}\right). \quad (5.2.6)$$

Como se mencionó al inicio del capítulo, la principal ventaja de las trayectorias de espejos negros es la simplicidad para obtener de forma analítica de la función $\beta_{\omega\omega'}$. Esto es importante porque simplifica los cálculos para obtener el espectro de radiación, la energía por modo y la energía total del sistema.

5.2.2. Espectro térmico

Podemos calcular el espectro térmico usando la ecuación para el número promedio de partículas (5.1.17) y el coeficiente β (5.2.6) de Bogoliubov que acabamos de obtener

$$\langle 0 | \hat{N}_\omega^{out} | 0 \rangle = \int_0^\infty d\omega' \frac{1}{4\pi^2 a^2} \frac{\omega\omega'}{(\omega+\omega')^2} \left| \Gamma\left(\frac{i\omega}{a}\right) \right|^2. \quad (5.2.7)$$

Usando la propiedad $|\Gamma(ib)|^2 = \pi/[b \sinh(\pi b)]$ y simplificando, obtenemos

$$\langle 0 | \hat{N}_\omega^{out} | 0 \rangle = \int_0^\infty d\omega' \frac{\omega'}{2\pi a} \frac{1}{(\omega+\omega')^2} \frac{1}{e^{\pi\omega/a} - 1}, \quad (5.2.8)$$

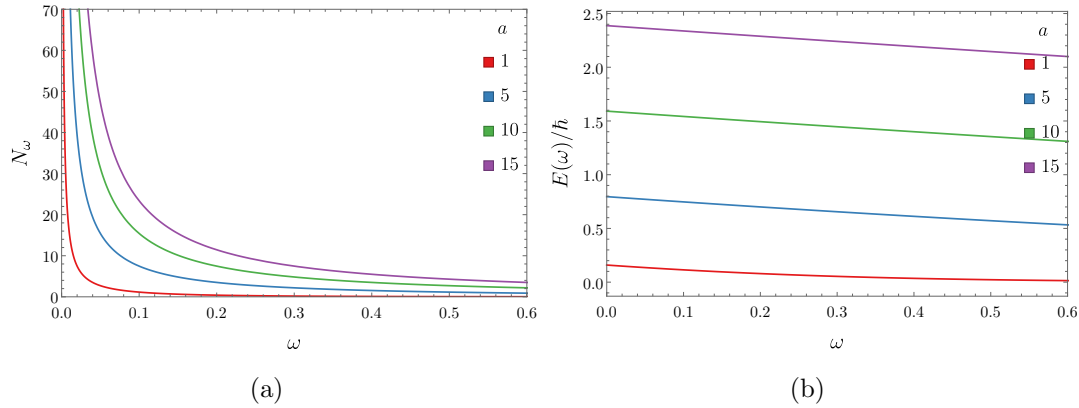


Figura 5.3: Espectro térmico (a) y energía (b) para las partículas emitidas por el espejo negro. El espectro térmico sigue el mismo comportamiento que el espectro térmico de un agujero negro.

Debido a que nos interesa la producción de partículas en tiempos tardíos, tenemos $\omega' \gg \omega$, por lo que se reduce a

$$\langle 0 | \hat{N}_\omega^{out} | 0 \rangle = \int_0^\infty d\omega' \frac{1}{2\pi a \omega'} \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}, \quad (5.2.9)$$

el factor $1/(2\pi a \omega')$ es el responsable de la producción infinita de partículas en los modos ω , en otras palabras es el responsable de una divergencia en la producción de partículas en $\omega \rightarrow 0$. Además vemos que existe una distribución térmica con temperatura $T = a/(2\pi)$ [49].

En la figura 5.3 mostramos la producción de partículas (a) y energía (b) producidas por el espejo negro. Es un análogo casi exacto del espacio-tiempo de Schwarzschild, incluso replica los mismos problemas: la producción de partículas en tiempos tardíos está en eterno equilibrio ya que en el análisis encontramos que los paquetes de onda no dependen del tiempo u en consecuencia el número de partículas y la energía son infinitos, como si el agujero negro radiará eternamente [51]. Sin embargo, esta conexión entre la trayectoria y el espacio-tiempo permitió proponer una nueva trayectoria que resuelve estas divergencias, que veremos en la siguiente sección.

5.3. Trayectoria del espejo negro cuánticamente puro

Para resolver las divergencias que se presentaron en la sección anterior, Good *et al.* [50, 54] propusieron una nueva trayectoria que se asemeja a la de un espejo negro cuyo número de partículas y energía producida son cantidades finitas. Además, resulta que la radiación producida tiene un espectro cuasi-térmico y el estado final del campo producido por el espejo es un estado cuántico puro [51].

Por simplicidad la trayectoria es propuesta en el tiempo de retardo para el espejo

$$u_p(v) = v - \frac{c}{a} \sinh^{-1} \left| \frac{gv}{c} \right|, \quad (5.3.1)$$

el subíndice p se refiere al estado puro. Esto debe compararse con la ecuación (5.2.4) de la trayectoria del espejo negro usual, donde hay una correspondencia entre la función \log y \sinh^{-1} ya que en la trayectoria en coordenadas de laboratorio se propone completar la exponencial para hacer simétrica la ecuación (5.2.1). Notar que ahora hay dos parámetros distintos g y a . En la figura 5.2 (b) vemos el comportamiento de esta nueva trayectoria, ya que su estado final es uno que puede ser descrito por ondas planas, la trayectoria recibe el nombre de cuánticamente puro.

5.3.1. Coeficiente β

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, una ventaja de estudiar la producción de partículas a través de la trayectorias de espejos es que los coeficientes de Bogoliubov se obtienen de forma analítica con relativa facilidad. En particular, calcularemos el coeficiente β responsable de la creación de partículas, introducimos la ecuación de la trayectoria del espejo (5.3.1) en la ecuación (5.1.14) y haciendo un poco de álgebra y usando la representación integral de las funciones modificadas de Bessel obtenemos la expresión analítica de β

$$\beta_{\omega\omega'} = -\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{\pi a(\omega + \omega')} e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} K_{\frac{i\omega}{a}} \left(\frac{\omega + \omega'}{g} \right), \quad (5.3.2)$$

donde K_ν es la función modificada de Bessel, que su expresión integral es

$$K_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \cosh \alpha t dt. \quad (5.3.3)$$

A diferencia de la ecuación (5.2.6) no presenta divergencias al ser integrada en ω' .

5.3.2. Espectro cuasi-térmico

Como en la sección anterior usamos la ecuación (5.1.17) para calcular el número promedio de partículas del estado vacío en la base in y el coeficiente β (5.3.2) que acabamos de obtener

$$\langle 0 | \hat{N}_\omega^{out} | 0 \rangle = \int_0^\infty d\omega' \frac{\omega\omega'}{\pi^2 a^2 (\omega + \omega')^2} e^{-\frac{\pi\omega}{a}} K_{\frac{i\omega}{a}}^2 \left(\frac{\omega + \omega'}{g} \right). \quad (5.3.4)$$

Nos interesa el espectro en el límite $g > a$, ya que g nos ayuda a frenar más rápido el espejo y al final lo que queremos es una emisión en un tiempo finito, en este régimen podemos expandir la función modificada de Bessel en términos de la función hipergeométrica ${}_0F_1$ en el límite $g > a$ se puede expresar en términos de una serie infinita de la cual sólo tomamos los primeros dos términos ya que los restantes no contribuyen a la integral en las frecuencias

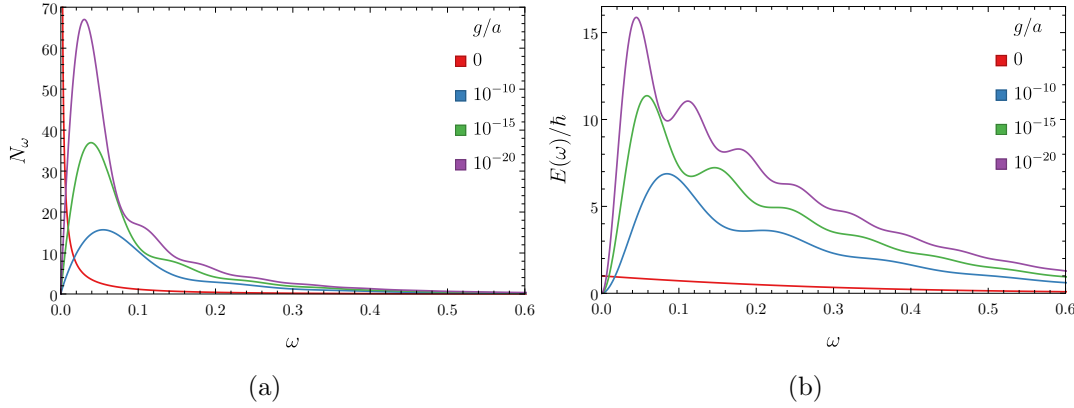


Figura 5.4: Espectro (a) y energía (b) para las partículas emitidas por el espejo negro cuánticamente puro. La presencia del nuevo parámetro g causa desviaciones en el comportamiento y evita la divergencia en el infrarrojo para el número de partículas producidas.

$$\langle 0 | \hat{N}_\omega^{out} | 0 \rangle = \frac{\Gamma_\omega}{e^{\omega/T} - 1}, \quad (5.3.5)$$

con

$$\Gamma_\omega = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1}{\omega \tau_\ell} \right) + \frac{1}{\pi} \text{Re}(H_{i\omega}) - \frac{\gamma + 1}{\pi} + \text{Re} \left(\frac{(\omega \tau_\ell)^{2i\omega} \text{csch}(\pi\omega)}{4(2\omega + i)\Gamma(1 + i\omega)^2} \right) \quad (5.3.6)$$

donde $T = a/2\pi$, $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ es el número armónico, $\gamma \simeq 0.577$ es la constante de Euler y Γ es la función gamma. El espectro resultante es cuasi-térmico [54], es decir es parecido al espectro térmico y se hace térmico en el caso $g \rightarrow \infty$. En la figura 5.4 (b) se muestra como el parámetro g convierte al espectro térmico en cuasi-térmico y a la vez evita la divergencia en el infrarrojo, es decir a frecuencias bajas como se ve en la figura 5.4 (a), se observa cómo se soluciona la divergencia.

5.4. Espacio-tiempo de Schwarzschild-Planck

Good *et al.* partieron de la condición de colapso gravitacional para obtener la trayectoria [49, 53]. Ahora, en sentido inverso podemos obtener el espacio-tiempo correspondiente a la trayectoria del espejo negro cuánticamente puro, si proponemos que sea

$$u(U) = U - \frac{c}{\kappa} \sinh^{-1} \left| \frac{U}{2c\ell} \right|. \quad (5.4.1)$$

la gravedad superficial es $\kappa = c^2/(2r_s)$ y hemos definido g tal que haya una correspondencia con la gravedad superficial para la analogía del agujero negro

$$g = \frac{c^2}{2\ell}, \quad (5.4.2)$$

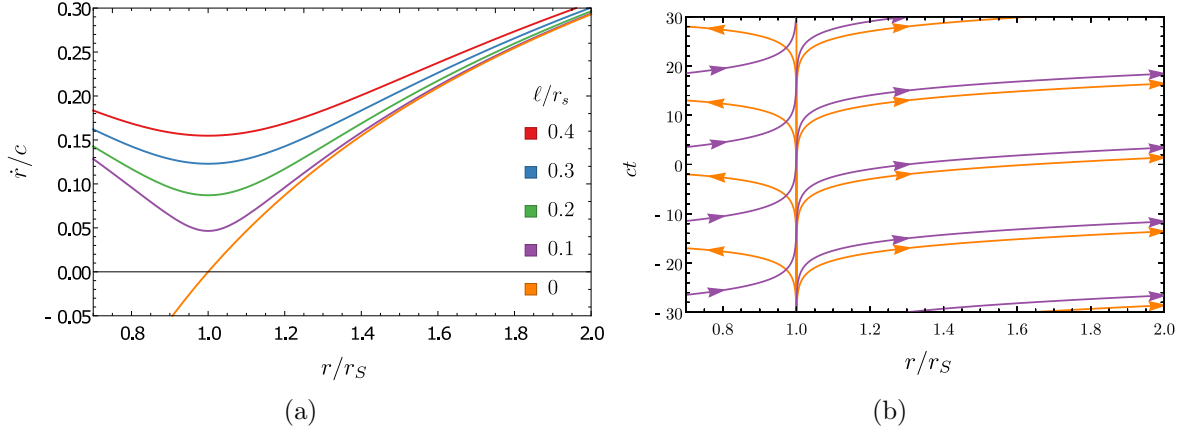


Figura 5.5: (a) Velocidad dr/dt para diferentes valores de ℓ/r_s . (b) geodésicas nulas para rayos de luz de la métrica de Schwarzschild (naranja) y de Schwarzschild-Planck (morado), con $\ell/r_s = 10^{-3}$.

en esta sección veremos que la distancia ℓ se asocia con la estructura de los diferentes sistemas.

De la condición de colapso se define una nueva coordenada tortuga

$$\bar{r}^* = r + r_s \sinh^{-1} \left| \frac{r - r_s}{\ell} \right|. \quad (5.4.3)$$

Y de la condición $d\bar{r}^*/dr \equiv \bar{f}^{-1}$ [51] se define una nueva métrica regularizada con la nueva escala ℓ la cual llamaron métrica de Schwarzschild-Planck

$$ds^2 = \bar{f}c^2dt^2 - \bar{f}^{-1}dr^2, \quad \bar{f} = 1 - \frac{r_s}{r_s + \sqrt{(r - r_s)^2 + \ell^2}}. \quad (5.4.4)$$

La aparición del nuevo factor de escala ℓ regulariza la métrica convencional de Schwarzschild. Como se espera, la métrica de Schwarzschild se obtiene en el límite $\ell \rightarrow 0$.

En las coordenadas PLG la métrica tiene la forma

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr + v(r)dt)^2, \quad v(r) = c \sqrt{\frac{r_s}{r_s + \sqrt{(r - r_s)^2 + \ell^2}}}. \quad (5.4.5)$$

Se muestran las geodésicas nulas de las métricas de Schwarzschild y Schwarzschild-Planck en la figura 5.5. Gracias a la gráfica es posible ver cómo el parámetro ℓ normaliza el espacio-tiempo, porque los modos comienzan dentro del horizonte a un tiempo finito y no vienen del pasado asintótico, aunque en nuestra escala de tiempo podría parecer que los fotones hacen lo contrario. Veremos que aún hay problemas para conectar ambas regiones separadas por el horizonte de eventos.

5.5. Análogo óptico de la métrica de Schwarzschild-Planck

Partiendo de la métrica obtenida por T. Philbin *et al.* [28] y que mostramos en la sección 2.4

$$g_{\mu\nu} = \frac{c^4}{u^2 n^2} \begin{pmatrix} u^2 n^2 / c^2 - 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.5.1)$$

donde hemos agregado el término c^2 con el fin de que el elemento de línea ds recupere unidades de distancia

$$ds^2 = u^2 n(\tau)^2 d\zeta^2 - c^2 (d\tau + d\zeta)^2. \quad (5.5.2)$$

Además, el factor conforme es despreciado dado que la propagación de las ondas es aproximada por las geodésicas nulas en el límite eikonal [55]. Esta es la métrica óptica análoga. Como se ha dicho, $n(\tau)$ puede ser controlado a través del efecto Kerr para obtener una métrica específica. Para poder compararla con cualquier métrica hacemos el cambio de coordenadas [23]:

$$d\zeta = d\zeta_S - \alpha d\tau, \quad \alpha = \frac{g_{01}}{g_{00}}, \quad (5.5.3)$$

y definimos una nueva coordenada espacial $d\bar{\tau} = (un/c)d\tau$, la forma final de la métrica es

$$ds^2 = \left(\frac{u^2 n(\tau)^2}{c^2} - 1 \right) c^2 d\zeta_S^2 - \left(\frac{u^2 n(\tau)^2}{c^2} - 1 \right)^{-1} c^2 d\bar{\tau}^2. \quad (5.5.4)$$

Calculamos la gravedad superficial de manera sencilla

$$\kappa(\tau) = \left| \frac{c}{2} \frac{d}{d\bar{\tau}} \left[\frac{u^2 n(\tau)^2}{c^2} - 1 \right] \right|. \quad (5.5.5)$$

Como los sistemas análogos recrean las trayectorias de la luz a tiempos tardíos, calculamos las geodésicas nulas

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \left[1 \pm \frac{un(\tau)}{c} \right]^{-1}, \quad (5.5.6)$$

para conectar con el sistema astrofísico. Particularmente nos fijamos en las trayectorias con signo $(-)$ que corresponden a los modos contrapropagantes y que contribuyen a la radiación de Hawking, que es el principal objetivo de los sistemas análogos ópticos [28, 55].

En óptica, es posible controlar la forma del índice de refracción $n(\tau)$ mediante el campo de bombeo adecuado, con lo que se pueden obtener diferentes métricas efectivas. Como hemos dicho, una de las metas es establecer una conexión entre la métrica de Schwarzschild-Planck y la métrica óptica. Lo que recrean los análogos son las geodésicas nulas para cada sistema, por lo que igualamos las ecuaciones de geodésicas nulas (2.2.3) y (5.5.6), obtenemos la siguiente relación

$$v(\tau) \pm c = -c \mp un(\tau), \quad (5.5.7)$$

resolviendo la ecuación para encontrar $n(\tau)$ y tomando el signo menos para las geodésicas nulas que escapan se tiene

$$n(\tau) = \frac{v(\tau)}{u}, \quad (5.5.8)$$

sustituyendo v de la ecuación (5.4.5), obtenemos la forma que debe tener el pulso para recrear un espacio-tiempo de Schwarzschild-Planck

$$n(\tau) = \frac{c}{u} \sqrt{\frac{\tau_S}{\tau_S + \sqrt{(\tau - \tau_S)^2 + \tau_\ell^2}}}, \quad (5.5.9)$$

donde τ_S y τ_ℓ son parámetros introducidos en la métrica óptica que toman el lugar de r_S y ℓ de la métrica astrofísica de Schwarzschild-Planck.

Podemos controlar el índice de refracción $n(\tau) = n_0 + \delta n(\tau)$ con la intensidad del campo de bombeo $I(\tau)$ por el efecto Kerr como $\delta n(\tau) \propto I(\tau)$. La forma del campo de bombeo lleva a recrear un espacio-tiempo de Schwarzschild como se muestra en la figura 5.6 (línea naranja). El nuevo parámetro suaviza el campo de bombeo en la métrica de Schwarzschild-Planck como es claro el comportamiento de $n(\tau)$ como la relación τ_ℓ/τ_S crece, también se muestra en la figura 5.6 uno de estos perfiles es usado en la figura 5.9. Si se considera el límite $\tau_\ell \rightarrow 0$ también regresamos a la métrica de Schwarzschild.

El máximo valor de δn necesario para crear un espacio-tiempo análogo es alcanzado y dado por

$$\delta n_h(\tau_\ell) = n_{g0} \sqrt{\frac{\tau_S}{\tau_S + \tau_\ell}} - n_0. \quad (5.5.10)$$

El valor más grande entre ellos corresponde al límite del caso de Schwarzschild $\delta n_{\max}(\tau_\ell \rightarrow 0) = n_{g0} - n_0$ como se muestra en la figura 5.6. Este valor es grande pero no está fuera de las posibilidades experimentales y hay que recordar que este es el valor más grande de cualquier espacio-tiempo análogo posible.

5.5.1. Tensor de energía momento y energía total

El tensor de energía-momento cuántico $T_{\mu\nu}$ se obtiene al considerar un campo escalar sin masa en el espacio-tiempo curvo. En coordenadas de cono de luz la única componente diferente de cero es $\langle T_{uu}(U) \rangle$, esto porque estamos estudiando la energía emitida en tiempos tardíos, dada por

$$\langle T_{uu}(U) \rangle = \langle \text{in} | : T_{uu}(U) : | \text{in} \rangle = -\frac{\hbar}{24\pi} \{u(U), U\} \left(\frac{du(U)}{dU} \right)^{-2}, \quad (5.5.11)$$

donde los dos puntos indican orden normal, $\{\cdot, \cdot\}$ es la derivada Schwarziana y el ket $|\text{in}\rangle$ denota el estado del vacío *in*, i.e., el estado que cumple $a_\omega^{\text{in}}|\text{in}\rangle = 0$ [33, 50, 51].

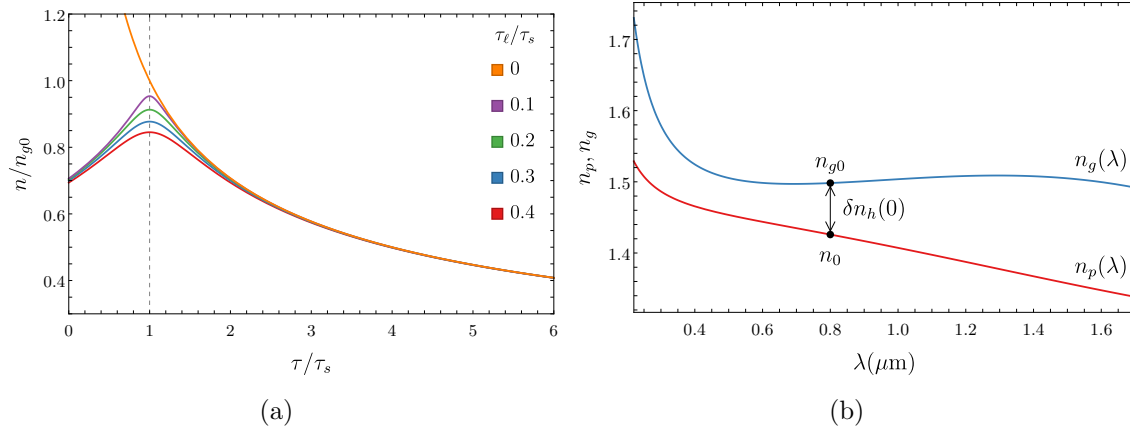


Figura 5.6: (a) Índice de refracción que recrea las métricas de Schwarzschild (naranja) y Schwarzschild-Planck con distintos valores de τ_ℓ/τ_S , la distancia es normalizada en unidades del horizonte τ_S . (b) Índice de refracción de fase (rojo) y de grupo (azul) como función de la longitud de onda (λ) para una fibra usada en recientes experimentos. Los puntos negros señalan los valores para el campo de prueba a $0.8\mu\text{m}$ y $\delta n_{\text{max}}(0)$ es el máximo cambio en el índice de refracción.

Sustituyendo $u_p(U)$ con $f_p(U)$ en (5.4.1), obtenemos

$$\langle T_{uu}(U) \rangle = \frac{\hbar\tau_S}{12\pi} \frac{\tau_S(U^2 - 8\tau_\ell^2) + (2U^2 - 4\tau_\ell^2)\sqrt{4\tau_\ell^2 + U^2}}{(4\tau_\ell^2 + U^2)(2\tau_S - \sqrt{4\tau_\ell^2 + U^2})^4} \quad (5.5.12)$$

$$\approx \frac{\hbar\tau_S}{12\pi} \frac{\tau_S + 2U}{(2\tau_S - U)^4} + O(\tau_\ell^2). \quad (5.5.13)$$

$$\lim_{U \rightarrow 0} \langle T_{uu}(U) \rangle \approx \frac{\hbar}{192\pi\tau_S^2} + O(\tau_\ell^2). \quad (5.5.14)$$

El término de mayor importancia en el límite $\tau_S \gg \tau_\ell$ se muestra en (5.5.13), este resultado es el mismo para el caso canónico [56]. El valor cercano al horizonte en (5.5.14) y presenta una distribución planckiana para las partículas de Hawking. El flujo de energía solo dura un tiempo finito para Schwarzschild-Planck debido a su regularización [51]. Esto se muestra en la figura 5.7, donde la emisión planckiana del caso de Schwarzschild es eterna, mientras que en el caso regularizado toma un tiempo finito.

El valor esperado del vacío describe la energía y el momento radiados por el agujero negro hacia un espacio-tiempo inicialmente vacío y en general es distinto de cero. La energía total radiada al infinito es obtenida por la simetría conforme integrando la

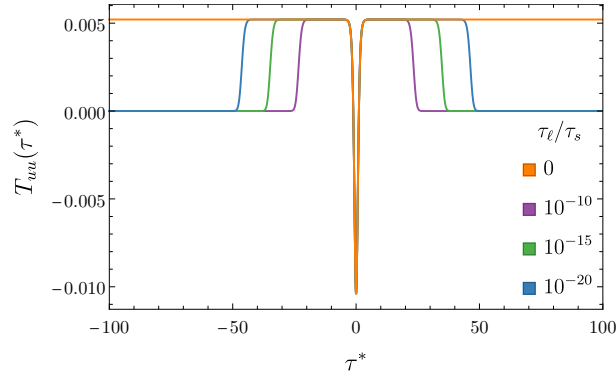


Figura 5.7: El flujo de energía T_{uu} en la coordenada tortuga τ^* . La línea naranja corresponde a la métrica de Schwarzschild ($\tau_\ell/\tau_S = 0$), y las líneas morada ($\tau_\ell/\tau_S = 10^{-10}$), verde ($\tau_\ell/\tau_S = 10^{-15}$) y azul ($\tau_\ell/\tau_S = 10^{-20}$) a la métrica de Schwarzschild-Planck. La emisión de Schwarzschild es infinita, mientras la de Schwarzschild-Planck emite para tiempos finitos.

ecuación (5.5.12) en coordenadas tortuga [51, 57]:

$$E = \frac{\hbar}{96\pi\tau_S^2(\tau_S^2 - \tau_\ell^2)^{3/2}} \left[2(6\tau_\ell^4 - 9\tau_\ell^2\tau_S^2 + 2\tau_S^4) \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\tau_S - \tau_\ell}{\tau_S + \tau_\ell}} \right) - (3\pi\tau_\ell^3 - 6\tau_\ell^2\tau_S - 3\pi\tau_\ell\tau_S^2 + 5\tau_S^3) \sqrt{\tau_S^2 - \tau_\ell^2} \right]. \quad (5.5.15)$$

$$\approx \frac{\hbar}{48\pi\tau_S} \ln \frac{2\tau_S}{\tau_\ell} + O(\tau_\ell^2). \quad (5.5.16)$$

De este resultado podemos ver que la energía emitida es finita, lo que apunala la conclusión que el proceso de evaporación se detiene a un tiempo finito: como τ_S va decreciendo conforme se pierde energía y cuando $\tau_S = \tau_\ell$ ya se ha emitido toda la energía. Para comprender si aún queda un remanente de materia, no es suficiente con que la energía emitida sea finita; un constante corrimiento al rojo en los modos asintóticos será una señal de su presencia [51]. Como vimos en la sección 5.3.2 los modos emitidos ya no presentan divergencia en el infrarrojo, por lo que se concluye que la evaporación se detuvo.

5.5.2. Cantidades geométricas

En esta subsección vamos a estudiar las cantidades geométricas de la métrica de Schwarzschild-Planck $g_{\mu\nu}$ dada por la ecuación (5.5.4).

Los símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{(\tau - \tau_S)\tau_S}{2[\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2](\tau_S + \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2})} \approx \frac{\tau_S}{2\tau(\tau - \tau_S)} + O(\tau_\ell^2), \quad (5.5.17)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{(\tau - \tau_S)\tau}{2\left(\tau_S + \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2}\right)^3} \approx \frac{(\tau - \tau_S)\tau_S}{2\tau^3} + O(\tau_\ell^2), \quad (5.5.18)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{(\tau - \tau_S)\tau_S}{2[\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2](\tau_S + \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2})} \approx -\frac{\tau_S}{2\tau(\tau - \tau_S)} + O(\tau_\ell^2). \quad (5.5.19)$$

Los valores obtenidos se reducen a los de la métrica (1+1) de Schwarzschild cuando el parámetro $\tau_\ell = 0$, como se muestra en los primeros términos de la expansión para pequeños valores de τ_ℓ .

El escalar de Ricci es

$$R = \frac{\tau_S \left[\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2 (\tau_\ell^2 - 2(\tau - \tau_S)^2) + \tau_\ell^2 \tau_S^2 \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \right]}{[\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2]^2 \left[\tau_S + \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \right]^3}, \quad (5.5.20)$$

y los límites correspondientes a un observador en el infinito $\tau \rightarrow \infty$, en el horizonte $\tau \rightarrow \tau_S$ y en la singularidad $\tau_\ell \rightarrow 0$ son

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_S} R = \frac{\tau_S (\tau_\ell^2 + \tau_\ell \tau_S)}{\tau_\ell^2 (\tau_\ell + \tau_S)^3}, \quad \lim_{\tau_\ell \rightarrow 0} R = \frac{2\tau_S}{\tau^3}. \quad (5.5.21)$$

El escalar de Kretschmann es

$$K = \frac{\tau_S^2 \left[\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2 (\tau_\ell^2 - 2(\tau - \tau_S)^2) + \tau_\ell^2 \tau_S^2 \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \right]^2}{[\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2]^4 \left[\tau_S + \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \right]^6}, \quad (5.5.22)$$

y sus correspondientes límites son

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_S} K = \frac{\tau_S^2 (\tau_\ell^2 + \tau_\ell \tau_S)^2}{\tau_\ell^4 (\tau_\ell + \tau_S)^6}, \quad \lim_{\tau_\ell \rightarrow 0} K = \frac{4\tau_S^2}{\tau^6}. \quad (5.5.23)$$

Ambos escalares parecen tener formas complejas pero al tomar los límites se muestra que son los escalares de la métrica (1+1)D de Schwarzschild con correcciones por parte del parámetro τ_ℓ . Se muestran ambos escalares en la figura [5.8](#) alrededor del horizonte τ_S , consideramos el caso límite $\tau_\ell = 0$ (línea naranja). Los escalares son continuos para el caso de Schwarzschild, pero discontinuos en el horizonte para la métrica regularizada. Los valores tienden al caso de Schwarzschild lejos del horizonte $\tau \gg \tau_S$.

A diferencia de los resultados obtenidos por Good y su equipo [\[51\]](#), en el sistema análogo óptico el tensor de Einstein es $G = 0$. Esto debido a que en sistemas (1+1)D la gravedad no restringe al tensor métrico, se pueden concluir: 1) solo existen soluciones

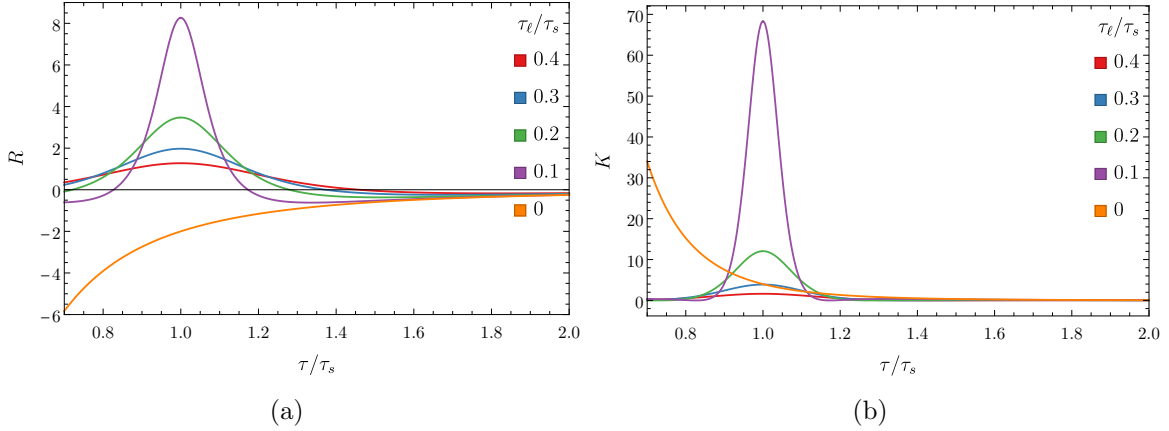


Figura 5.8: Escalares de Ricci (a) y Kretschmann (b) en los alrededores del horizonte τ_S . La línea naranja es la gráfica para la métrica óptica de Schwarzschild, mientras que el resto corresponde a diferentes casos de la métrica análoga de Schwarzschild-Planck.

de vacío, el espacio-tiempo solo tiene curvatura, no materia y 2) cualquier métrica es solución de la ecuaciones de Einstein en sistemas (1+1)D [18, 19].

Las componentes diferentes de cero del tensor de Ricci son

$$R_{00} = \frac{\tau_S \left[\tau_\ell^4 - 2(\tau - \tau_S)^4 - \tau_\ell^2 \left(\tau^2 - 2\tau\tau_S - \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \tau_S + \tau_S^2 \right) \right]}{2 [\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2]^{3/2} \left[\tau_S + \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \right]^4}, \quad (5.5.24)$$

$$R_{11} = -\frac{\tau_S \left[\tau_\ell^4 - 2(\tau - \tau_S)^4 - \tau_\ell^2 \left(\tau^2 - 2\tau\tau_S - \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \tau_S + \tau_S^2 \right) \right]}{2 [\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2]^{5/2} \left[\tau_S + \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \right]^2}. \quad (5.5.25)$$

Las componentes diferentes de cero del tensor de Riemann son

$$R_{110}^0 = \frac{\tau_S \left[\tau_\ell^4 - 2(\tau - \tau_S)^4 - \tau_\ell^2 \left(\tau^2 - 2\tau\tau_S - \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \tau_S + \tau_S^2 \right) \right]}{2 [\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2]^{5/2} \left[\tau_S + \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \right]^2}, \quad (5.5.26)$$

$$R_{010}^1 = \frac{\tau_S \left[\tau_\ell^4 - 2(\tau - \tau_S)^4 - \tau_\ell^2 \left(\tau^2 - 2\tau\tau_S - \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \tau_S + \tau_S^2 \right) \right]}{2 [\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2]^{3/2} \left[\tau_S + \sqrt{\tau_\ell^2 + (\tau - \tau_S)^2} \right]^4}, \quad (5.5.27)$$

mientras que las otras dos componentes se obtienen de la simetría $R_{\nu\beta\gamma}^\mu = R_{\nu\gamma\beta}^\mu$.

Nosotros proponemos un experimento como se muestra en la figura 5.9. Obtuvimos la forma general en la que se relacionan las métricas espacio-temporales con la forma del pulso de bombeo para el análogo óptico. Esto regulariza el espacio-tiempo en el interior del agujero negro y hace más accesible el experimento, ya que se necesita una cantidad de energía finita para generar el pulso de bombeo mientras que para la métrica de Schwarzschild es necesaria una cantidad de energía infinita. Relacionamos las constantes de la métrica (3 + 1)D astrofísica con la estructura de la fibra óptica en la que se lleva a cabo el experimento.

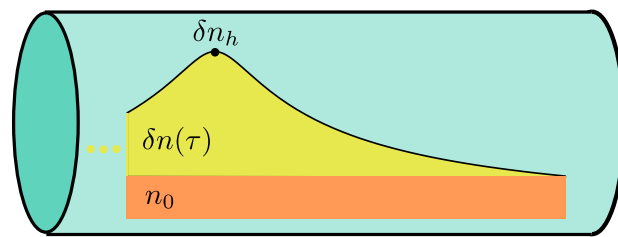


Figura 5.9: Campo de bombeo viajando por una fibra óptica y modificando el índice de refracción original n_0 debido al efecto Kerr $\delta n(\tau)$. La forma del pulso corresponde a la métrica de Schwarzschild-Planck.

Soluciones a la ecuación Korteweg-de Vries

En el capítulo 2 se demostró que pequeñas perturbaciones en la superficie de un líquido que fluye experimentan un análogo del horizonte de eventos bajo las condiciones adecuadas. En general, en el desarrollo teórico se obtiene que es posible tener tanto el análogo de un horizonte de eventos de un agujero negro y de un agujero blanco. En este capítulo estudiaremos el caso de perturbaciones viajando contra flujo y que experimentan un horizonte de eventos de agujero blanco.

El análogo acústico de la radiación de Hawking de un agujero blanco en un flujo de agua se estudió por el grupo de Germain Rousseaux [58, 59] en el experimento del Instituto Pprime de la Universidad de Poitiers, Francia, como se muestra en la figura 6.1. Se usa un canal artificial de 7 m de largo y 39 cm de ancho, en el fondo del canal se coloca un obstáculo cuya altura está descrita como una función de la distancia z y que se diseña de acuerdo con principios hidráulicos. Estos experimentos generalmente tienen ondulaciones lejos de la región del horizonte y dispersan ondas lineales.

En este capítulo se propone una solución numérica para obtener la evolución del sistema y describir el ruido que introduce el motor en el sistema.

6.1. Ecuación Korteweg-de Vries (KdV)

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) fue originalmente derivada por Diederik Korteweg [60] para describir ondas superficiales en agua que tienen longitudes de onda grandes y amplitudes pequeñas. En la derivación se supone que todo el movimiento es a lo largo de un solo eje (x), así la amplitud de la onda propagándose es función de la distancia x y el tiempo t [61].

La ecuación KdV es

$$\partial_t \eta + \mu(x) \partial_x \eta + \partial_x^3 \eta + 6\eta \partial_x \eta = 0 \quad (6.1.1)$$

donde $\eta(x, t)$ representa la altura respecto al fondo del tanque de agua en el eje x y $\mu(x) > 0$ es la velocidad del flujo. Para nuestros propósitos $\mu = \mu(x)$, es decir,

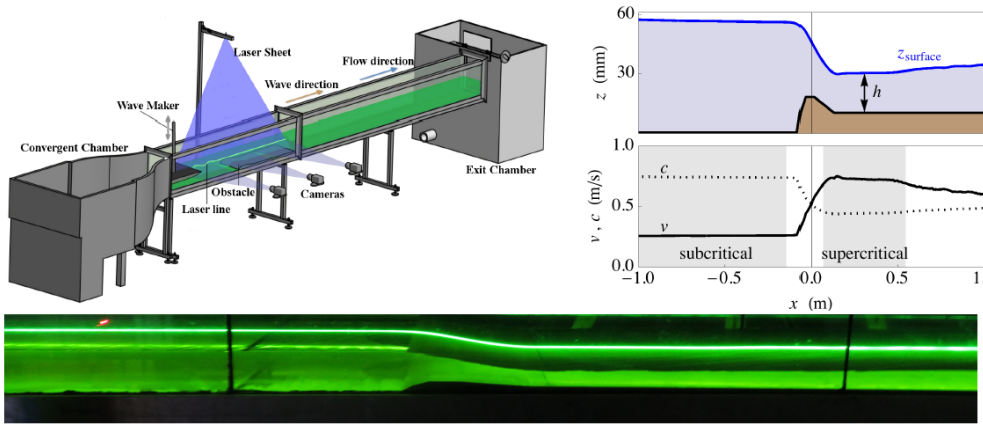


Figura 6.1: Arreglo experimental para estudiar la radiación de Hawking en ondas superficiales. Tomada de la referencia [59].

permitimos variación de la velocidad del flujo en el espacio. En general usaremos una forma de tangente hiperbólica para describir los saltos de una forma suave entre regiones donde la velocidad de las ondas en el marco comóvil es subsónica o supersónica [62].

6.1.1. Energía

La energía se asocia con el hamiltoniano del sistema [62], el cual está dado por la integral de la densidad hamiltoniana que es la suma de las energías cinética y potencial

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu(x)|\partial_x\eta(x,t)|^2 - |\partial_x^2\eta(x,t)|^2) dx, \quad (6.1.2)$$

donde el primer término es la contribución de la energía cinética y el segundo es el potencial para el campo. La energía tiene esta forma porque es obtenida de la densidad lagrangiana para la ecuación forzada de KdV [62]. Lo que también nos permite definir el producto interno

$$(\eta_1, \eta_2) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\eta_2(x,t)\partial_x\eta_1^*(x,t) - \eta_1^*(x,t)\partial_x\eta_2(x,t)] dx, \quad (6.1.3)$$

donde η_1 y η_2 son soluciones de la ecuación de KdV. Del producto interno se define la norma

$$\|\eta\| = (\eta, \eta)^{1/2} \quad (6.1.4)$$

6.1.2. Pequeñas perturbaciones

Proponemos una solución de la forma

$$\eta = \eta^{(0)} + \delta\eta, \quad (6.1.5)$$

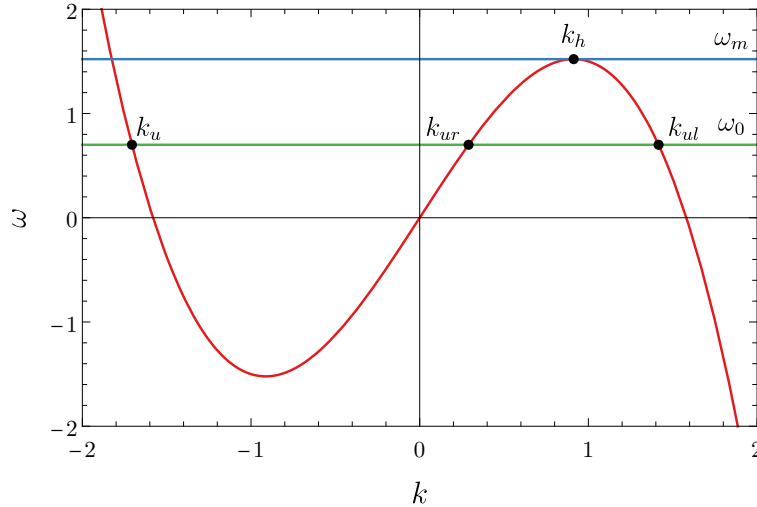


Figura 6.2: Relación de dispersión para las perturbaciones de la ecuación KdV, con $\mu_0=2.5$. La línea azul recta representa la frecuencia o energía máxima ω_m y los puntos representan las soluciones para una frecuencia o energía dada ω_0 .

donde $\eta^{(0)}$ es solución estacionaria de la ecuación KdV (6.1.1) y δn es una pequeña perturbación. Al sustituir en la ecuación KdV y linealizar obtenemos

$$\partial_t \delta \eta + \partial_x [(\mu + 6\eta^{(0)}) \delta \eta] + \partial^3 \delta \eta = 0. \quad (6.1.6)$$

Al hacer un análisis para pequeñas perturbaciones y considerar ondas planas se obtiene la relación de dispersión

$$\omega = \mu_0 k - k^3, \quad (6.1.7)$$

donde μ_0 se escoge de tal forma que sea positiva y es igual a $c_0 + v_0$ donde c_0 es la velocidad de grupo de las ondas en el fluido y $v_0 < 0$ es la velocidad del fluido. En la figura 6.2, la línea azul representa el valor máximo para la frecuencia o energía $\omega_m = 2(\mu_0/3)^{3/2}$, mientras que para una energía dada ω_0 se muestran los vectores de onda que conservan la energía: k_u es una onda con norma negativa bajo el producto definido por (6.1.3) que se mueve a la izquierda, k_{ur} es una onda que se mueve a la derecha con norma positiva y k_{ul} es una onda que se mueve a la izquierda con norma negativa.

6.2. Solución numérica

La ecuación de KdV tiene una solución analítica bastante conocida pero nos interesa la evolución temporal de una superficie en un estado inicial estático para obtener un estado final estacionario, así que obtenemos numéricamente la evolución del sistema variando las condiciones iniciales.

El método numérico que usamos para obtener la solución a la ecuación KdV es el espectral, que consiste en evolucionar la ecuación en el espacio de momentos con ayuda de la transformación de Fourier.

Primero se obtiene la solución para la parte lineal de la ecuación KdV (6.1.1)

$$\partial_t \eta + \partial_x^3 \eta = 0, \quad (6.2.1)$$

que en el espacio de momentos k se ve como

$$\partial_t \tilde{\eta} - ik^3 \tilde{\eta} = 0, \quad (6.2.2)$$

donde $\tilde{\eta}(k, t)$ es la transformada de Fourier de $\eta(x, t)$ y que tiene como solución:

$$\tilde{\eta}(k, t) = \tilde{f}(k) \exp(ik^3 t). \quad (6.2.3)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier obtenemos

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \exp(ik^3 t) \exp(ikx) dk. \quad (6.2.4)$$

Ahora consideramos la ecuación no lineal

$$\partial_t \eta + \mu \partial_x \eta + 3\partial_x \eta^2 = 0, \quad (6.2.5)$$

que en el espacio de Fourier es

$$\partial_t \tilde{\eta} = -\widetilde{\mu \partial_x \eta} - 3ik \widetilde{(\eta^2)}. \quad (6.2.6)$$

Para resolver la ecuación KdV utilizamos el método *split-step* que consiste en obtener la solución para la ecuación lineal que ya obtuvimos (6.2.3) y dando pasos temporales Δt pequeños sustituimos en la ecuación no lineal

$$\tilde{\eta}_1(k, t + \Delta t) = \tilde{\eta}(k, t) \exp(ik^3 \Delta t), \quad (6.2.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(k, t + \Delta t) = & \tilde{\eta}_1(k, t + \Delta t) - \Delta t F(\mu F^{-1}\{ikF[\eta(x, t + \Delta t)]\}) \\ & + 3ik \Delta t F[\eta(x, t + \Delta t)^2], \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

donde F y F^{-1} representan la transformada de Fourier y su inversa, respectivamente. Los dos términos funcionan como generadores para cada paso de la solución.

6.2.1. Solitones

Las soluciones estacionarias a la ecuación KdV tienen la forma

$$\eta(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right], \quad (6.2.9)$$

que es un solitón moviéndose a la izquierda con velocidad c y con posición inicial x_0 . Estos representan una buena forma de comprobar que nuestros cálculos son correctos. A continuación, mostramos tres casos para analizar nuestra solución.

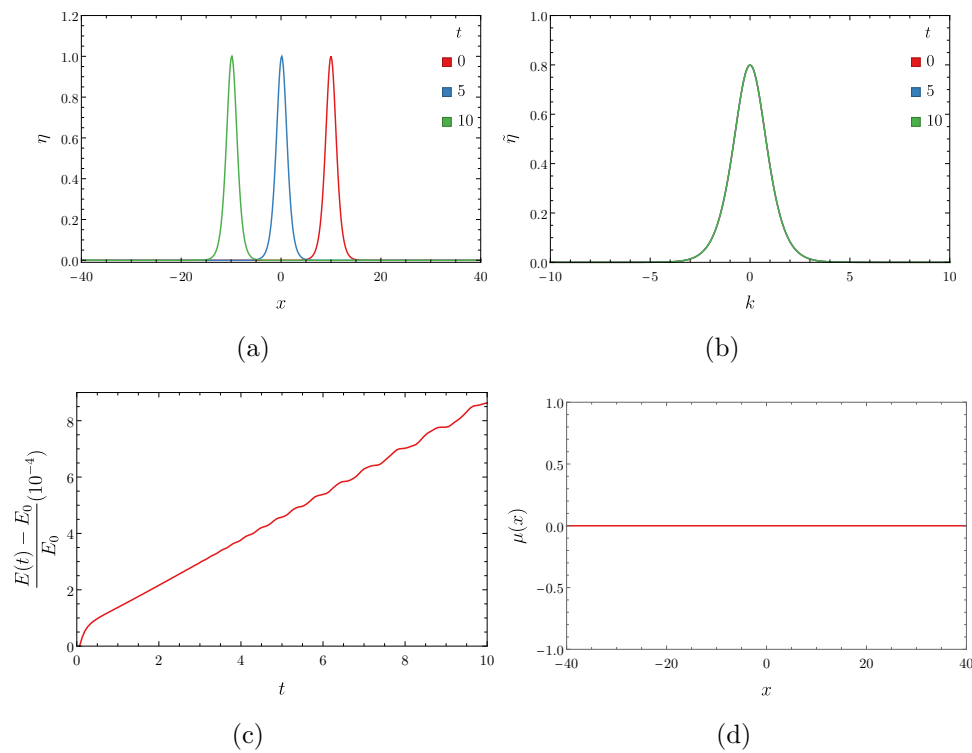


Figura 6.3: Evolución de un solitón en el espacio de posiciones (a), de momentos (b), la energía relativa (c) y la velocidad del fluido (d). El solitón se mueve hacia la izquierda con velocidad constante $c = 2$ usamos la energía relativa para considerar expresar el error de nuestra solución.

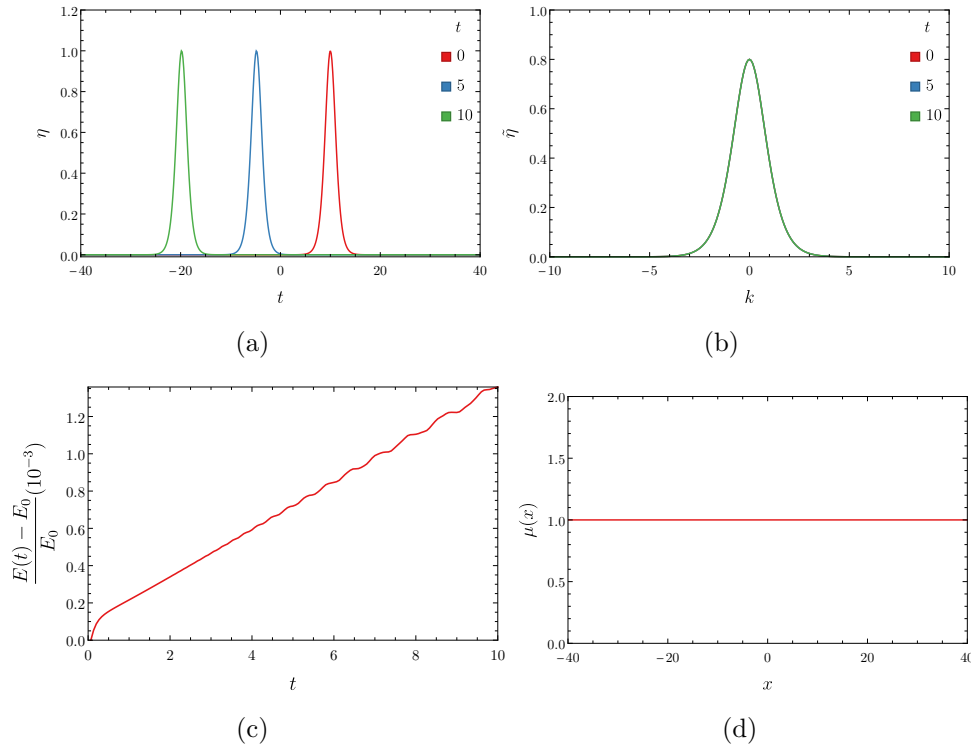


Figura 6.4: Evolución de un solitón en el espacio de posiciones (a), de momentos (b) la energía relativa (c) y la velocidad del fluido (d). El solitón se mueve hacia la izquierda con velocidad constante $c = 2$ y la energía relativa varía en órdenes de 10^{-3} .

Caso velocidad nula $\mu = 0$

Los parámetros del solitón a $t = 0$ son $c = 2$ y $x_0 = 10$. En la figura 6.3 (a) vemos como el solitón se mueve hacia la izquierda conservando su forma y (b) vemos que también se conserva el número de onda. Usamos la energía relativa que se debe conservar para monitorear el error numérico en (c), donde vemos que sus variaciones son del orden 10^{-4} por lo que nuestro algoritmo es bastante bueno para reproducir el caso común.

Caso velocidad constante $\mu = 1$

Las parámetros del solitón a $t = 0$ son $c = 2$ y $x_0 = 10$, en la figura 6.4 (a) vemos como el solitón se mueve hacia la izquierda más rápido que el caso anterior y continúa conservando su forma (b) vemos que también se conserva el momento del solitón. Usamos la energía relativa que se debe conservar para monitorear el error numérico en (c), donde vemos que sus variaciones son del orden 10^{-3} , el error aumenta un orden de magnitud por la presencia de $\mu(x) = 1$ (d).

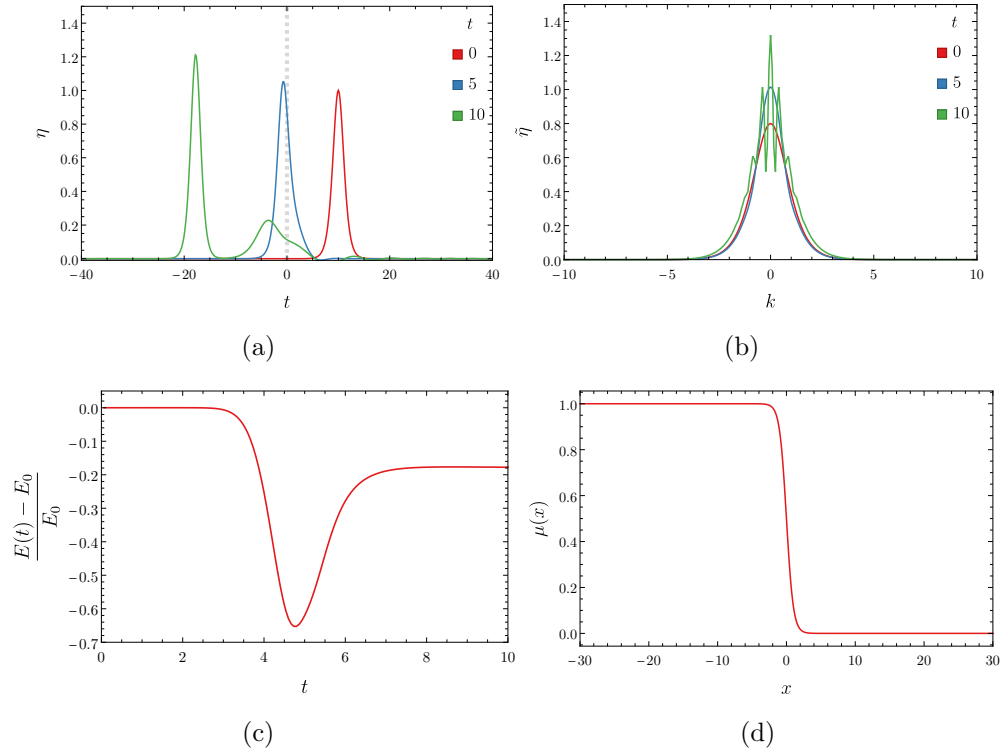


Figura 6.5: Evolución de un solitón en el espacio de posiciones(a), de momentos (b), la energía relativa (c) y $\mu(x)$ (d). El solitón se mueve hacia la izquierda con velocidad constante $c = 2$ hasta que cruza de una región a otra y la energía deja de conservarse.

Velocidad variable $\mu \propto \tanh$

Consideramos la función $\mu(x)$ tal que tenga dos valores asintóticos distintos y el cambio de una región a otra sea de manera suave, consideramos la función de la forma

$$\mu(x) = \frac{\mu_{max}}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{x+b}{a} \right) \right], \quad (6.2.10)$$

donde μ_{max} es el valor máximo, a y b los parámetros para suavizarla y desplazarla. En la figura 6.5 (d) mostramos la gráfica de la función que usamos para este caso con $\mu_{max} = 1$, $a = 1$, $b = 0$.

Las parámetros del solitón a $t = 0$ son $c = 2$ y $x_0 = 10$, en la figura 6.5 (a) vemos como el solitón se mueve hacia la izquierda y conforme cruza de una región a otra ($x = 0$) pierde su forma y ya no es una solución estacionaria de la ecuación KdV (b) la distribución en el número de onda del solitón deja de conservarse, se distorsiona. Mientras que la energía ya no se conserva en el cambio de región (c), lo cual es esperado por el cambio de $\mu(x)$ (d).

6.2.2. Ruido como estado inicial

Con la función ruido se intenta modelar la perturbación que el motor que genera las ondas con una frecuencia definida, para esto agregamos un término estocástico en

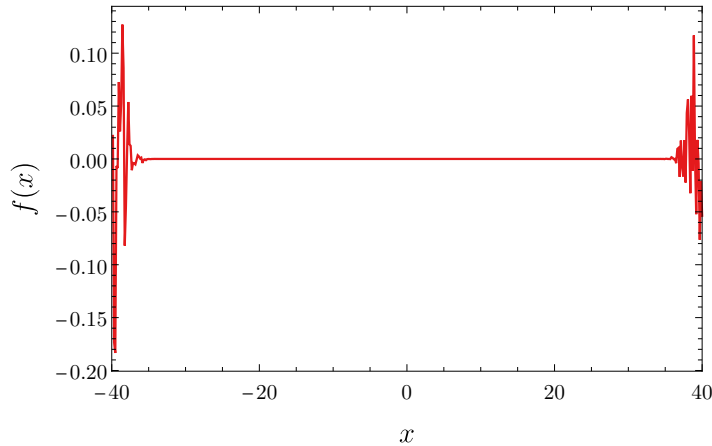


Figura 6.6: Término estocástico introducido en la ecuación KdV para simular el ruido que viene del motor del experimento.

la ecuación de KdV. En particular, nos interesa ver cómo evoluciona el sistema con perturbaciones en los extremos del canal de agua. Esto se modela como de un vector de números aleatorios multiplicado por una función de peso dada por

$$f(x) = A \left(\exp \left[-(x-d)^2/b \right] + \exp \left[-(x+d)^2/b \right] \right) \mathbf{r}(x), \quad (6.2.11)$$

donde A es la amplitud b nos permite modelar qué tan grande es la región donde se genera el ruido y d son los extremos del canal, además $\mathbf{r}(x)$ es un número aleatorio seleccionado de una distribución normal con media 0 y varianza 1. En la figura 6.6 se observa el comportamiento del ruido, lo introducimos de tal forma que genere en los extremos del canal. Lo agregamos a la ecuación de KdV (6.1.1) de forma análoga a la ecuación de Langevin

$$\partial_t \eta + \mu(x) \partial_x \eta + \partial_x^3 \eta + 6\eta \partial_x \eta = f(x). \quad (6.2.12)$$

En la solución numérica se agrega al paso no lineal (6.2.8). Queda como

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(k, t + \Delta t) = & \tilde{\eta}_1(k, t + \Delta t) - \Delta t F \left(\mu F^{-1} \{ ik F [\eta(x, t + \Delta t)] \} \right) \\ & + 3ik \Delta t F [\eta(x, t + \Delta t)^2] + \Delta t F [f(x)]. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

En la figura 6.7 (a) vemos la evolución del sistema en el espacio, donde se observa como el ruido se comienza a acumular en el campo $\eta(x, t)$ de igual forma en el vector de onda k (b). La energía (c) varía y no se conserva lo que es algo esperado ya que el ruido le suministra energía al sistema.

Aunque no se pudo obtener la evolución del sistema tal que se encuentre en un estado estacionario la función η , sí observamos fenómenos interesantes: principalmente que el ruido del motor le entrega energía al sistema. Con una mejor potencia de cómputo sería posible evolucionar el sistema a cantidades de tiempo considerables para encontrar el estado estacionario.

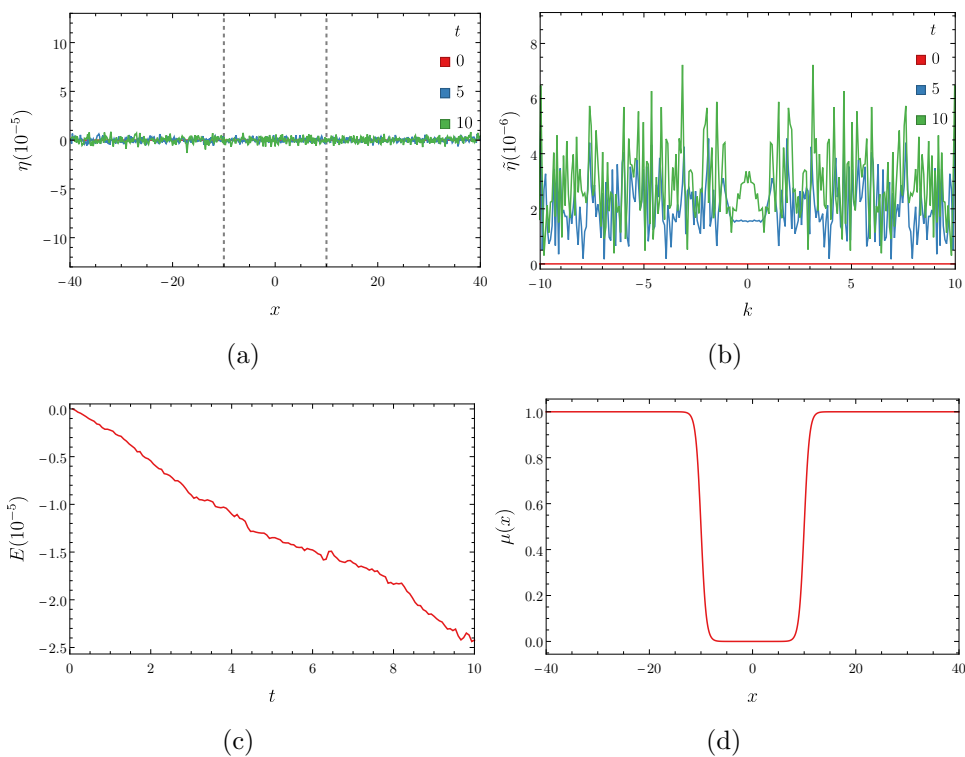


Figura 6.7: Evolución del sistema considerando un término estocástico en la posición (a) y momento (b), la energía (b) y $\mu(x)$ con los parámetros $a = 1$ y $b = 10$.

Conclusiones

Uno de los principales problemas que aún quedan por resolver en la Física es la cuantización del campo gravitacional. Esto ha sido imposible a pesar de un gran número de propuestas teóricas durante las últimas décadas. Ante esto, los sistemas análogos son una forma de estudiar los efectos cinemáticos de la gravedad sobre campos cuánticos y dar pistas sobre cómo cuantizar la gravedad. Un resultado interesante es que la radiación de Hawking ha sido extendida a más sistemas y en condiciones variadas.

Se ha avanzado en el desarrollo de modelos que pueden presentar radiación de Hawking, en nuestro caso nos encargamos de estudiar dos sistemas: el acústico y óptico. Además de relacionarlo con el efecto Fulling-Davis en espejos acelerados.

Extendimos el trabajo hecho por Leonhardt y Robertson [37] en el caso sónico y además generalizamos para sistemas ópticos haciendo una descripción del efecto Hawking como dispersión de modos y conectando los modos salientes y entrantes en el plano complejo. Resolvimos numéricamente la integral compleja para ambos sistemas análogos considerando distintos perfiles de velocidad del fluido en el caso sónico y formas del pulso de bombeo en el caso óptico, y así fue posible encontrar la condición de termalidad para cada sistema. Como se esperaba, la termalidad solo se presenta para números de onda pequeños en el caso sónico y frecuencias cortas para el caso óptico.

Las soluciones de la relación de dispersión en el plano complejo son topológicamente equivalentes en los sistemas óptico y sónico. Esto conduce a ecuaciones similares con una elección conveniente de parámetros y funciones para describir el sistema óptico. Resolvimos la integral para perturbaciones crecientes y decrecientes analítica y numéricamente con excelente concordancia. También obtuvimos una fórmula analítica para el perfil de velocidad de segundo orden, aunque en este caso el resultado se da como una serie infinita. Calculamos los primeros 60 términos de la serie y estudiamos sus propiedades de convergencia: la serie converge cuando cumple ciertas condiciones y su resultado coincide con la solución numérica. Estas fórmulas analíticas son complicadas, pero no utilizan la omnipresente aproximación lineal para perfiles de velocidad en sistemas dispersivos. De esta manera, podemos usar estas fórmulas para probar esta aproximación y ver dónde falla. Para el perfil sech comúnmente utilizado en óptica, los perfiles coinciden cualitativamente pero no cuantitativamente.

En los sistemas análogos, las cantidades que definen la escala de la dispersión son

las constantes k_0 para el caso sónico y Ω_0 para el caso óptico. Estas constantes están relacionadas con la estructura microscópica del sistema dispersivo que se percibe como una dispersión para grandes energías. Algo similar podría suceder en el espacio-tiempo astrofísico: si el espacio-tiempo es dispersivo, su estructura microscópica sería del orden de la longitud de Planck y los efectos dispersivos podrían sentirse para modos de longitudes de onda comparables o más pequeños. Esto significaría que incluso para el espacio-tiempo de Schwarzschild, la radiación de Hawking no sería térmica para todas las longitudes de onda, solo para longitudes de onda más largas que la longitud de Planck. Para el perfil de Schwarzschild ($z^{-1/2}$) con la dispersión, la temperatura de Hawking comienza como la esperada temperatura de Hawking T_0 , pero no es la misma para todas las longitudes de onda, en realidad llega a cero en la vector de onda y la frecuencia de horizonte [30].

En la segunda mitad de la tesis revisamos la teoría que conecta las trayectorias de espejos acelerados que producen partículas por el efecto Fulling-Davies con métricas del espacio-tiempo que producen partículas por el efecto Hawking. Relacionamos la métrica del espacio-tiempo del espejo acelerado con su correspondiente métrica análoga y obtuvimos la métrica general para un sistema óptico análogo del horizonte de eventos. En particular, construimos de dos maneras diferentes el análogo óptico de las métricas de Schwarzschild y de Schwarzschild-Planck. Ambas pueden ser implementadas en un laboratorio enviando pulsos de luz con la forma correspondiente para cada métrica.

Las cantidades geométricas obtenidas para la métrica Schwarzschild-Planck en (1+1) D se comportan de forma similar que las obtenidas por Good y Linder [51] para el caso (3+1) D, la única diferencia es en el tensor de Einstein, sin embargo esto es esperado en la teoría para (1+1) D [18, 19], ya que el tensor de Einstein no restringe a la métrica. Las consecuencias de esta diferencia deben ser investigadas a fondo, sin embargo, esto nos da más evidencia de la solidez del efecto Hawking, ya que sobrevive aún en un mayor número de condiciones diferentes.

Al considerar el proceso físico mediante el cual un agujero negro se forma y se evapora completamente en forma de radiación de Hawking aparece la paradoja de la información. Los cálculos muestran que el estado final de la radiación mantiene información sobre la masa, carga y momento angular del estado inicial del agujero negro y dado que muchos estados pueden tener la misma masa, carga y momento angular esto sugiere que varios estados iniciales pueden evolucionar en el mismo estado final. Por lo tanto, los detalles del estado inicial se pierden. La métrica de Schwarzschild-Planck es definida con el fin de tener modos cuánticos planos en el pasado y en el futuro, esto se ve gráficamente en los diagramas de Penrose [5.2]. Mostramos que la radiación emitida en la métrica modificada es cuasi-térmica y emitida en un tiempo finito. Es claro que no hay pérdida de la información, ya con estos cambios la radiación lleva consigo la información. De esta forma, la paradoja de la pérdida de información se resuelve en sistemas de este tipo [50, 51].

Para el desarrollo de la métrica de Schwarzschild-Planck, ignoramos deliberadamente la dispersión de la fibra, dado que fijamos la frecuencia de la onda de bombeo. Esto requiere un estudio más detallado, ya que como vimos en esta tesis, la dispersión modifica la termalidad del espectro de Hawking [22, 37, 41]. Hay que resaltar que la presencia de la dispersión presenta un nuevo reto, ya que a la nueva escala fundamental (τ_ℓ) y

la dispersión $\omega(k)$ modifican el espectro emitido, y a primera vista parece complicado separarlos. Sin embargo, dado que la escala fundamental también modifica la emisión en el tiempo, sería posible distinguir uno de otro.

Hasta ahora, los experimentos más notables de análogos ópticos [27, 28, 47] han sido realizados usando pulsos ultra cortos propagándose en fibras de cristal fotónico fabricadas de sílice. Estos pulsos ultracortos tienen duración de 10 – 100 fs. Si nuestra hipótesis es correcta y la escala temporal microscópica de la métrica óptica es 1 ps, significa que los experimentos están en el régimen de agujeros negros microscópicos análogos. Esto explicaría sus altas temperaturas de emisión que hacen posible detectar la emisión de Hawking análoga aún a temperatura ambiente.

La perspectiva a futuro es usar la teoría que se desarrolló para los espejos y la métrica para invertir el proceso y encontrar trayectorias que recreen las formas de los pulsos usados comúnmente como el solitón o la tanh también usada en los análogos sónicos. Este es un paso necesario para distinguir los efectos de la escala fundamental en experimentos que ya existen.

La solución numérica a la ecuación de Korteweg-de Vries presentó un reto debido a que esperábamos que en determinado tiempo transcurrido las ondas se estabilizaran, pero como muestran los resultados numéricos no importa las condiciones que se le impongan, parece que con este método y con las limitaciones del software utilizado es difícil alcanzar un estado estacionario. El trabajo a futuro es buscar un método numérico que sea más eficiente y no presente el problema de que las ondas traspasan de un extremo a otro del canal.

Bibliografía

- [1] U. Leonhardt, *Essential quantum optics. From measurements to black holes*. UK: Cambridge University Press, 2010.
- [2] A. Einstein, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,” *Ann. Phys.*, vol. 354, pp. 769–822, 1916.
- [3] K. Schwarzschild, “On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, vol. 1916, pp. 189–196, 1916.
- [4] S. W. Hawking, “Black hole explosions?,” *Nature*, vol. 248, p. 30, 1974.
- [5] S. W. Hawking, “Particle creation by black holes,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 43, pp. 199–220, 1975.
- [6] S. Chandrasekhar and E. A. Milne, “The highly collapsed configurations of a stellar mass,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 91, no. 5, pp. 456–466, 1931.
- [7] P. Noterdaeme, P. Petetjean, R. Srianand, C. Ledoux, and S. Lopez, “The evolution of the cosmic microwave background temperature,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 526, p. L7, 2011.
- [8] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: Princeton University Press, 1973.
- [9] V. F. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction to quantum effects in gravity*. UK: Cambridge University Press, 1st ed., 2007.
- [10] A. Fabbri and J. Navarro-Salas, *Modeling black hole evaporation*. London: World Scientific, 1st ed., 2005.
- [11] C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser, “Analogue gravity,” *Liv. Rel. Rev.*, vol. 14, p. 3, 2011.

- [12] A. D. Helfer, “Do black holes radiate?,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 66, p. 943, 2003.
- [13] W. G. Unruh, “Experimental black hole evaporation?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 46, pp. 1351–1353, 1981.
- [14] S. J. Robertson, “The theory of Hawking radiation in laboratory analogues,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 45, p. 163001, 2012.
- [15] P. Painlevé, “La mécanique classique et la théorie de la relativité,” *C. R. Acad. Sci.*, vol. 173, pp. 677–680, 1921.
- [16] G. Lemaitre, “L’Univers en expansion,” *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, vol. A53, pp. 51–85, 1933.
- [17] A. Gullstrand, “Allgemeine Lösung des Statischen Einkörperproblems in der Einsteinschen Gravitationstheorie,” *Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, vol. 16, pp. 1–15, 1922.
- [18] R. B. Mann, “The simplest black holes,” *Foundations of Physics Letters*, vol. 4, no. 5, pp. 425–449, 1991.
- [19] A. D. Boozer, “General relativity in $(1 + 1)$ dimensions,” *Eur. J. Phys.*, vol. 29, pp. 319–333, feb 2008.
- [20] T. Jacobson, “Introduction to quantum fields in curved spacetime and the Hawking effect,” in *Lectures on Quantum Gravity*, pp. 39–89, New York: Springer-Verlag, 2006.
- [21] A. J. S. Hamilton and J. P. Lisle, “The river model of black holes,” *Am. J. Phys.*, vol. 76, pp. 519–532, nov 2004.
- [22] D. Bermudez and U. Leonhardt, “Hawking spectrum for a fiber-optical analog of the event horizon,” *Phys. Rev. A*, vol. 93, p. 53820, 2016.
- [23] F. Belgiorno, S. L. Cacciatori, G. Ortenzi, L. Rizzi, V. Gorini, and D. Faccio, “Dielectric black holes induced by a refractive index perturbation and the Hawking effect,” *Phys. Rev. D*, vol. 83, p. 24015, 2011.
- [24] R. M. Wald, *General relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [25] R. Schützhold and W. G. Unruh, “Gravity wave analogues of black holes,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, no. 4, p. 44019, 2002.
- [26] U. Leonhardt, “A laboratory analogue of the event horizon using slow light in an atomic medium,” *Nature*, vol. 415, pp. 406–409, 2002.
- [27] E. Rubino, J. McLenaghan, S. C. Kehr, F. Belgiorno, D. Townsend, S. Rohr, C. Kukulicz, U. Leonhardt, F. König, and D. Faccio, “Negative-Frequency Resonant Radiation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 253901, 2012.

- [28] T. G. Philbin, C. Kuklewicz, S. Robertson, S. Hill, F. König, and U. Leonhardt, “Fiber-optical analog of the event horizon,” *Science*, vol. 319, pp. 1367–1370, 2008.
- [29] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*. New York: Academic Press, 5th ed., 2013.
- [30] T. Jacobson, “Black hole evaporation and ultrashort distances,” vol. 44, pp. 1731–1739, 1991.
- [31] W. G. Unruh, “Notes on black hole evaporation,” *Phys. Rev. D*, vol. 14, pp. 870–892, 1976.
- [32] H. B. G. Casimir and D. Polder, “The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces,” *Phys. Rev.*, vol. 73, pp. 360–372, 1948.
- [33] S. A. Fulling and P. C. W. Davies, “Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: conformal anomaly,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 348, pp. 393–414, 1976.
- [34] P. C. W. Davies, S. A. Fulling, and R. Penrose, “Radiation from moving mirrors and from black holes,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 356, pp. 237–257, 1977.
- [35] J. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” *Phys. Rev.*, vol. 82, pp. 664–679, 1951.
- [36] T. Jacobson, “On the origin of the outgoing black hole modes,” *Phys. Rev. D*, vol. 53, pp. 7082–7088, 1996.
- [37] U. Leonhardt and S. Robertson, “Analytical theory of Hawking radiation in dispersive media,” *New J. Phys.*, vol. 14, p. 53003, 2012.
- [38] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and P. Spindel, “Hawking radiation without trans-Planckian frequencies,” *Phys. Rev. D*, vol. 52, pp. 4559–4568, 1995.
- [39] S. Corley, “Computing the spectrum of black hole radiation in the presence of high frequency dispersion: An analytical approach,” *Phys. Rev. D*, vol. 57, pp. 6280–6291, may 1998.
- [40] J. L. Gaona-Reyes and D. Bermudez, “The theory of optical black hole lasers,” *Ann. Phys.*, vol. 380, pp. 41–58, 2017.
- [41] A. Moreno-Ruiz and D. Bermudez, “Hawking temperature in dispersive media: Analytics and numerics,” *Ann. Phys.*, vol. 420, p. 168268, 2020.
- [42] G. Rousseaux, C. Mathis, P. Maïssa, T. G. Philbin, and U. Leonhardt, “Observation of negative-frequency waves in a water tank: a classical analogue to the Hawking effect?,” *New J. Phys.*, vol. 10, p. 53015, 2008.
- [43] R. Schützhold and W. G. Unruh, “Origin of the particles in black hole evaporation,” *Physical Review D*, vol. 78, p. 041504, aug 2008.

- [44] W. G. Unruh, “Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation,” *Phys. Rev. D*, vol. 51, pp. 2827–2838, 1995.
- [45] S. Corley and T. Jacobson, “Black hole lasers,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 124011, 1999.
- [46] U. Leonhardt and T. G. Philbin, “Black hole lasers revisited,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 718, pp. 229–245, 2007.
- [47] J. Drori, Y. Rosenberg, D. Bermudez, Y. Silberberg, and U. Leonhardt, “Observation of stimulated Hawking radiation in an optical analogue,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 122, p. 10404, 2019.
- [48] M. R. R. Good, P. R. Anderson, and C. R. Evans, “Time dependence of particle creation from accelerating mirrors,” *Phys. Rev. D*, vol. 88, p. 25023, 2013.
- [49] M. R. R. Good, “Reflections on a black mirror,” in *Everything about Gravity*, pp. 560–565, Singapore: World Scientific, 1st ed., 2016.
- [50] M. R. R. Good, “Extremal Hawking radiation,” *Phys. Rev. D*, vol. 101, p. 104050, 2020.
- [51] M. Good and E. V. Linder, “Modified Schwarzschild metric from a unitary accelerating mirror analog,” *New J. Phys.*, vol. 23, p. 043007, 2021.
- [52] A. Moreno-Ruiz and D. Bermudez, “Optical analogue of the Schwarzschild–Planck metric,” *Classical Quant. Grav.*, vol. 39, p. 145001, 2022.
- [53] M. R. R. Good, P. R. Anderson, and C. R. Evans, “Mirror reflections of a black hole,” *Phys. Rev. D*, vol. 94, p. 65010, 2016.
- [54] M. R. R. Good, E. V. Linder, and F. Wilczek, “Finite thermal particle creation of Casimir light,” *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 35, p. 2040006, 2020.
- [55] C. C. de Oliveira, R. A. Mosna, J. P. M. Pitelli, and M. Richartz, “Analogue models for Schwarzschild and Reissner-Nordström spacetimes,” *Phys. Rev. D*, vol. 104, p. 24036, 2021.
- [56] W. A. Hiscock, “Models of evaporating black holes. I,” *Phys. Rev. D*, vol. 23, pp. 2813–2822, 1981.
- [57] M. R. R. Good, E. V. Linder, and F. Wilczek, “Moving mirror model for quasithermal radiation fields,” *Phys. Rev. D*, vol. 101, p. 25012, 2020.
- [58] G. Rousseaux and H. Kellay, “Classical hydrodynamics for analogue space-times: open channel flows and thin films,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 378, no. 2177, p. 20190233, 2020.

-
- [59] L.-P. Euvé, S. Robertson, N. James, A. Fabbri, and G. Rousseaux, “Scattering of co-current surface waves on an analogue black hole,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 124, no. 14, p. 141101, 2020.
- [60] D. D. J. Korteweg and D. G. de Vries, “XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 39, no. 240, pp. 422–443, 1895.
- [61] S. S. Shen, *Forced KdV Equation*, pp. 147–187. Netherlands: Springer, 1993.
- [62] F. Michel, R. Parentani, and S. Robertson, “Gravity waves on modulated flows downstream from an obstacle: The transcritical case,” *Phys. Rev. D*, vol. 97, p. 65018, 2018.