CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Distrito Federal
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Indicios de prueba matemática surgidos mediante el uso de Geogebra: Estudio con alumnos de educación media superior

Tesis que presenta:

Miguel Ángel Huerta Vázquez

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

Especialidad Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. José Guzmán Hernández

México, D F — Febrero de 2014

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero otorgado para cursar la Maestría en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa.

Becario No. 420256

A mis papás

Berna y Miguel Ángel

Agradezco y dedico esta tesis a las siguientes personas:

Al **Dr. José Guzmán Hernández** por el apoyo, el tiempo otorgado y sobre todo la paciencia para poder lograr este trabajo.

A mi familia, a mis hermanos **Eunice**, y **Juan**, a mi papá **Miguel Ángel**, pero sobre todo a **Berna**, mi mamá quien siempre ha sabido darme la palabra adecuada a su modo, para no flaquear en los momentos difíciles de la vida, sin ellos todo sería más difícil.

A **Dr. Luz Manuel Santos Trigo, Dra. Olimpia Figueras Mourut de Montpellierque, Dr. François Charles Bertrand Pluvinage, Dr. Gonzalo Zubieta Badillo, Dr. Ernesto A. Sánchez Sánchez, Dr. José Guzmán Hernández** y **al Dr. Antonio Rivera Figueroa** además de impartirme excelentes clases por haberme abierto un nuevo panorama de la educación matemática.

Al Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México plantel Azcapotzalco en especial a la **Lic. Sandra Guadalupe Aguilar Fonseca** Directora del Plantel por brindarme facilidades para poder cursar esta Maestría.

A todos los trabajadores del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV que sin su trabajo no sería posible la estancia de nosotros los estudiantes, en especial a **Adriana Parra Hernández** por su dedicación, orientación y eficiencia.

A los compañeros con quienes también aprendí y compartí momentos dentro del Departamento de Matemática Educativa en especial **Sandra Areli Martínez Pérez** y **María Eugenia Vega Flores** amigas con quien he compartido momentos gratos y no tanto desde hace buen tiempo.

RESUMEN

Esta investigación indagó cómo los estudiantes de nivel medio superior dan indicios de prueba matemática, mientras iban solucionando algunos problemas geométricos, usando software de geometría dinámica Geogebra: qué hicieron, cómo advirtieron posibles soluciones a estos problemas, y lo más importante, cómo los explicaron o validaron y al final cómo el software les ayudó poder alcanzar cierto grado de validación.

La prueba matemática ha sido motivo de diversas investigaciones en el interior de la matemática educativa, ya que su relevancia dentro del aprendizaje de las matemáticas es fundamental (Balacheff, 2010), quien afirma que no se puede aprender matemáticas si la prueba está ausente en este dominio de conocimiento. Por su parte, Hanna (2000) afirma que la prueba es clave para entender las matemáticas, en el sentido amplio del verbo *entender*.

Pero la prueba no puede ser vista como una actividad solitaria dentro del aprendizaje de las matemáticas, ésta se encuentra enmarcada dentro del proceso de validación necesaria para poder adquirir conocimiento matemático (Balacheff, 2010).

En el análisis de datos de esta investigación se observa como los estudiantes pueden alcanzar indicios de prueba matemática al hacer uso del Geogebra para solucionar problemas geométricos aunque se exhiben limitaciones de los estudiantes debido a la falta de conocimientos previos.

ABSTRACT

This research explored how students of senior high school give mathematical proof evidence, while some geometric problems were solved using dynamic geometry software Geogebra: what they did , how warned possible solutions to these problems , and most importantly, how explained or validated and finally how the software helped them to achieve a degree of validation.

The mathematical proof has been the subject of several investigations within mathematics education, as its relevance in the learning of mathematics is essential (Balacheff, 2010), who says you can't learn mathematics if the proof is absent in this domain of knowledge. Meanwhile, Hanna (2000) states that proof is key to understand mathematics, in the broad sense of the word understand.

But the proof can't be viewed as a solitary activity in the learning of mathematics, it is framed within the validation process needed to acquire mathematical knowledge (Balacheff, 2010).

In the data analysis of this research is seen how students can achieve evidence of mathematical proof by using Geogebra to solve geometric problems although the students exhibited limitations due to a lack of prior knowledge.

ÍNDICE

Capítulo 5

Conclusiones y reflexiones finales

PRESENTACIÓN

El presente trabajo de investigación busca dar una visión general de las investigaciones sobre la prueba matemática en educación y el uso del software de geometría dinámica (SGD) en ella. Este trabajo tiene, entre otros, el propósito de analizar los indicios de prueba matemática de los estudiantes de nivel medio superior al utilizar software de geometría dinámica (Geogebra).

Otro propósito de este trabajo es analizar cómo los estudiantes van solucionando problemas geométricos (algunos casos particulares del problema de Apolonio) usando Geogebra, mientras se les pide que vayan explicando las acciones que van haciendo para encontrar dichas soluciones. Las evidencias [datos] son analizadas tomando en cuenta el marco conceptual desarrollado por Balacheff (2010), el cual está sustentado en trabajos anteriores del mismo Balacheff (1987, 1998 y 2000) y la Teoría de situaciones didácticas (TSD) de Brousseau (1997). La TSD postula la trilogía: acción-formulación-validación, como partes fundamentales de las situaciones a-didácticas. Parte fundamental de la TSD es la cuarta fase llamada *institucionalización* del conocimiento, la cual, de acuerdo con esta teoría debe ser discutida (en sesión plenaria) entre el profesor y los estudiantes. Previo a esta fase, Brousseau sugiere que sea discutida (en grupo) la validación de las conjeturas elaboradas por los estudiantes, y producidas después de la fase a-didáctica de acción.

En el Capítulo 1 de esta tesis, se hace una revisión de la de la literatura de investigación relevante sobre la importancia de la prueba matemática en el aprendizaje de ésta, y son discutidas las aportaciones teóricas sobre los diversos tipos de prueba reconocidos en la literatura; se describe el problema de investigación, los objetivos y las preguntas de investigación; además, se dan las razones del porqué es importante esta investigación.

En el Capítulo 2, son discutidos los conceptos e ideas sobresalientes, las cuales son la base teórica de esta investigación. En primera instancia, se puntualiza la importancia de la prueba matemática en la educación matemática, además de definiciones de indicios, explicaciones y demostraciones de prueba; clasificación de ésta, y se enlista sus funciones. Se lleva a cabo, también, una revisión de la Teoría de situaciones didácticas y a-didácticas propuestas por de Brousseau (1997) en su Teoría de Situaciones Didáctica (TSD), la cual es base para el marco conceptual y el modelo desarrollado por Balacheff (2010) con el que se busca analizar cómo los estudiantes configuran concepciones cuando se enfrentan al hecho de que tienen que solucionar problemas matemáticos en un medio ambiente (*milieu*) donde deben realizar acciones, formular propuestas de solución y validar dichas acciones; es este modelo, el que se usa para hacer el análisis de este trabajo de investigación.

En el Capítulo 3, se desglosa la metodología empleada en esta investigación; se describen: la población, los cinco problemas para analizar, las respuestas esperadas de los problemas, el software que se usa (Geogebra) y cómo se recabaron los datos para realizar el análisis.

En el Capítulo 4, se hace el análisis, con el marco conceptual de esta investigación, de los datos recabados de las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados. Se busca analizar las acciones que hicieron para encontrar soluciones, cómo las formularon y las validaron; además, cómo ejercieron control sobre todo lo que iban haciendo.

En el Capítulo 5, se dan las conclusiones de esta investigación, tomando en cuenta los objetivos y preguntas de investigación; además se discuten qué tipos de investigaciones futuras pueden ser desarrolladas a partir de los resultados obtenidos de este trabajo.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

Una de las *piezas* más importantes que influye en el aprendizaje de las matemáticas es la prueba de las diversas preposiciones inherentes en esta disciplina, ya que sin el conocimiento de cómo se construye y qué es la prueba, no se puede aprender matemáticas (Balacheff, 2010). En el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, la prueba constituye una herramienta poderosa para que el alumno pueda sustentar de manera más adecuada el conocimiento que adquiere y logra aprender bases matemáticas cada vez más complejas. En educación matemática, se entiende como prueba de una proposición (afirmación o teorema) al encadenamiento de afirmaciones (parciales, tomadas como verdaderas) que validan la afirmación (o negación de algo), sin embargo, hay distintos tipos de pruebas matemáticas; cada una de ellas tiene características especiales. En seguida, se trata de precisar el concepto de prueba matemática.

En primera instancia, se debe precisar cuál es la defínción más adecuada de prueba. La Real Academia Española de la Lengua en su diccionario en su 22ª edición (2001) define la prueba como: “razón, argumento, instrumento u otro medio con que se pretende mostrar y hacer patente la verdad o falsedad de algo” (p. 1853). Dicha definición es correcta, pero no es lo suficientemente adecuada para los especialistas en educación matemática.

Balacheff (1987) sostiene que se debe diferenciar entre explicar, probar y demostrar en matemáticas; ya que estas tres acciones generan confusiones en los usuarios de la herramienta matemática en el momento de hacer investigación o de resolver problemas en los que la prueba sea factor importante para llegar a la solución de estos; por lo que este investigador afirma que explicar implica dar a conocer la verdad a partir de una propuesta o un resultado; probar es exponer una verdad a partir de una evidencia aceptada por la comunidad, la cual puede ser refutada. Para el término demostrar o demostración, Balacheff (2000) dice que éste tiene reglas formales y definidas a la hora de presentar pruebas, las cuales están sustentadas en criterios lógicos rigurosos igualmente aceptados por la comunidad matemática; donde el rigor es mucho mayor que en una prueba.

Otra definición de prueba es la asociada con el razonamiento matemático. En esta línea de razonamiento, para Balacheff (2000) está tiene relación con la actividad que no se explicita, y en ésta se manipula la información, y que con ella [la manipulación] se logra producir nueva información. Sin embargo, cuando dicha actividad busca como fin asegurarse de la validez de una proposición, y ayude a producir una explicación; a estas acciones se les asocia el proceso de validación de esa aseveración.

En la parte de la validación, Brousseau (1997) puntualiza que ésta debe verse como un escenario en donde se trata de convencer a uno o a varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que hacen; por ejemplo, respecto de los alumnos, estos deben elaborar pruebas para justificar sus afirmaciones, no basta la comprobación empírica; aunque Brousseau haya enunciado esta forma de validación en una situación de juego entre los alumnos.

Las anteriores definiciones de explicación, prueba y demostración de Balacheff (2000) son las usadas en este trabajo, el cual busca investigar la prueba o sus evidencias utilizando un software de geometría dinámica (Geogebra). A continuación se hace una revisión [no tan exhaustiva, pero sí suficiente para los fines de esta investigación] del trabajo de otros autores referente a la prueba matemática en educación matemática.

1.2. Investigaciones sobre la prueba matemática en educación matemática

En el tema de la prueba matemática han contribuido los expertos en diversos campos como la filosofía, la historia y la educación; todas ellas referidas al dominio de las matemáticas, y de ese intercambio han surgido nuevas maneras de hacer y visualizar la prueba matemática, aunado al hecho de que en las últimas décadas han habido avances notables de las herramientas tecnológicas al servicio de la prueba como la computadora, usada como herramienta de verificación o de elaboración de heurísticas como bien se puntualiza en Hanna (2010). El tema de la prueba ha motivado diversos acercamientos en la investigación de: filósofos, historiadores y educadores matemáticos. Algunos ejemplos de trabajos en las líneas de investigación de estos científicos son los que se citan a continuación.

De las más importantes investigaciones de la prueba está la de Lakatos (1976) quien da un tratamiento epistemológico de la prueba mediante el uso de nociones fundamentales de que las pruebas y las refutaciones están relacionadas con las ideas de los objetos matemáticos.

Otra investigación importante que tiene un gran aporte a la prueba matemática es el trabajo de Brousseau (1997), quien propone el diseño por parte del profesor de situaciones didácticas como medios de enseñanza y de aprendizaje de conceptos matemáticos. En su Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), Brousseau (1997) menciona las situaciones a-didácticas; las cuales están asociadas al trabajo de los alumnos cuando abordan las situaciones didácticas que les son propuestas por el profesor. Dentro de estas situaciones a-didácticas está la validación de aquellos conceptos matemáticos que el profesor desea que aprendan sus alumnos, tal como es ejemplificado por su famosa situación didáctica "carrera a 20" (Brousseau, 1997). Atendiendo a la TSD, y dado que se pretende que los alumnos aprendan el concepto de prueba, se debe pensar en un buen diseño de situaciones didácticas que conduzcan a los alumnos al concepto de prueba en el salón de clases.

El trabajo de Brousseau sirve también, como contexto para el desarrollo de otras investigaciones, como Balacheff (1997, 2000) quien precisa (en sus diversos trabajos de investigación) qué es una explicación, prueba y demostración. Este investigador clasifica distintos tipos de prueba, como: pruebas pragmáticas, pruebas basadas en el empirismo que suelen carecer de índices de procesos de validación y pruebas intelectuales, en las que existe una explicación de las razones que fundamenta la validez de las preposiciones demostradas.

Marrades y Gutiérrez (2000) analizan y describen las soluciones a problemas de prueba elaboradas por estudiantes de secundaria, las cuales fueron elaboradas, usando software de geometría dinámica. Estos autores emplean un marco teórico con el cual investigan las maneras en que los estudiantes pueden usar el software de geometría dinámica para que los estudiantes entiendan la naturaleza de la prueba matemática y mejoren sus habilidades de prueba.

También, Balacheff (2010) retoma sus investigaciones anteriores, y propone un marco conceptual para analizar la prueba. Este investigador argumenta que la explicación está contenida en la prueba, y ésta a su vez está contenida en la demostración. Balacheff llega a la conclusión de que existen tres componentes alrededor del concepto de prueba: la acción, la formulación y la validación, por lo que no hay validación posible si no está bien expresada y compartida. Esta trilogía figura situaciones didácticas dentro del contexto del trabajo de Brousseau (1997), ya que se puede enmarcar dentro de las situaciones a-didácticas de: acción, formulación, validación e institucionalización del conocimiento matemático.

Mariotti (2010) es otra investigadora, cuyos trabajos de investigación están relacionados con el concepto de prueba. Esta autora examina el uso de herramientas tecnológicas, como el software de geometría dinámica (e.g., Cabri-Geometry) y el programa de manipulación simbólica L'Algebrista para detectar cómo les ayudan [tanto a los estudiantes como a los profesores] estas herramientas tecnológicas en la validación y la enseñanza de la demostración de preposiciones matemáticas.

1.3. Problema de investigación

Diversas investigaciones en educación matemática muestran que existen dificultades de aprendizaje en la prueba de proposiciones geométricas, como bien lo demuestran Battista y Clements (1995) comparando la teoría de Piaget y la de Van Hiele, la primera estratifica el pensamiento en niveles que van del no reflexivo y no sistemático al lógico deductivo, mientras que la de Van Hiele estratifica niveles dentro del pensamiento geométrico y cómo van desarrollándose bajo la influencia de un currículo escolar.

Apoyándose en estas teorías, Battista y Clements (1995) concluyen que ambas teorías sugieren que los estudiantes deben pasar forzosamente por los niveles iniciales para poder alcanzar niveles superiores de razonamiento lo que requiere un considerable tiempo. La teoría de los Van Hiele sugiere que la enseñanza escolar debería ayudar a los estudiantes a alcanzar niveles más altos de entendimiento geométrico, pero en el caso de intentar prematuramente pasar a niveles superiores, los estudiantes terminan memorizando y confundidos. Más aún, ambas teorías [la de Piaget y la de los Van Hiele] marcan que los estudiantes pueden alcanzar a entender trabajos explícitos con sistemas axiomáticos siempre y cuando alcancen niveles superiores de razonamiento [o de entendimiento] en ambas teorías.

En las últimas tres décadas, la llegada de las computadoras al entorno cotidiano; en particular, a la educación ha propiciado que la enseñanza de temas geométricos con el uso de software de geometría dinámica sea un poco más amigable que sólo usar lápiz-y-papel como medio para enseñar conceptos de geometría euclidiana. Por ejemplo, el uso de software, como herramienta de enseñanza, propicia el uso de representaciones dinámicas de objetos matemáticos, mientras que el uso de lápiz-y-papel en la enseñanza propicia el tratamiento de objetos matemáticos estáticos.

El software de geometría dinámica (SGD) tuvo su origen en la década de los 80, el cual servía en aquel tiempo como análogo al lápiz-y-papel, ya que permitía replicar los problemas de manera similar de como se hacen con regla y compás, siendo las construcciones rígidas; con el paso de tiempo, diversos software, como: Geometer's Sketchpad y Cabri-Geometry evolucionaron de tal manera que las construcciones geométricas podían ser dinámicas. Esto es, permitían mover las construcciones arrastrando puntos, líneas u otros elementos geométricos, preservando relaciones, tal como es enfatizado en diversos trabajos de Ruthven et al. (2008). Desde hace varios años, el software de geometría dinámica ha sido usada como herramienta con propósitos educativos matemáticos.

Al usar el software de geometría dinámica, el alumno puede *dinamizar* las contrucciones en lápiz-y-papel. Esta forma dinámica de objetos matemáticos producidos por los distintos tipos de software disponibles en la actualidad (e.g., Geogebra, Geometer's Sketchpad y Cabri-Geometry, entre otros) da una visión diferente de los distintos objetos matemáticos, a través de sus representaciones, al permitir "ver" cómo se preservan las relaciones entre esos objetos, y así poder explicar y probar aseveraciones de enunciados geométricos.

En la actualidad, el desarrollo del software con fines educativos es cada vez mejor, e incluso muchos de ellos están disponibles gratuitamente en internet (e.g., Geogebra). Más aún, en el entorno de educación matemática, hay distintos tipos de software; de geometría dinámica y los llamados CAS (Computers Algebra Systems) en el entorno educativo, como menciona Ruthven (2008). En la actualidad, los CAS y los software de geometría dinámica tienen la ventaja de ser cada vez más usados en educación, por su buen funcionamiento en el tratamiento sintáctico de los objetos simbólicos y el manejo de representaciones geométricas dinámicas, de manera que en la actualidad se puede mencionar, por ejemplo a: geogebra

International GeoGebra Institute (2013), que es similar al software como el Cabri-Geometry, pero con la ventaja de ser libre y gratuito.

1.4. Objetivos

Este trabajo de investigación tiene el interés de analizar cómo los estudiantes justifican sus acciones al solucionar versiones sencillas del problema clásico de Apolonio, usando el software de geometría dinámica (SGD) Geogebra. No sólo se busca analizar el registro de lo hecho por los estudiantes en el Geogebra, sino también sus respuestas y justificaciones de manera oral mientras van solucionando el problema.

1.5. Preguntas de investigación

A. ¿Qué indicios de demostración (prueba matemática) muestran los estudiantes al usar Geogebra en la solución de problemas geométricos?

B. ¿Qué tipo de acciones hacen los estudiantes al tratar de solucionar problemas geométricos usando Geogebra?

C. ¿Cómo validan los estudiantes las soluciones de problemas geométricos al usar software de geometría dinámica, como Geogebra?

Para responder dichas preguntas se registró en video a los estudiantes mientras respondían algunas preguntas al solucionar los problemas en la computadora, usando Geogebra. El video y los archivos de las actividades son analizados, y en ese análisis de buscan indicios de demostración, junto con las acciones de los estudiantes al tratar de solucionar los problemas propuestos en esta investigación.

1.6. Importancia de la investigación

La prueba es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, ya que, como lo puntualiza Balacheff (2010), el aprendizaje y el entendimiento de las matemáticas están unidos a la validación de ellas. Es por eso que se han intentado muchas maneras de hacer que los alumnos aprendan la prueba; algunos de esos intentos han sido enseñar la prueba formal desde nivel secundaria, como lo documenta Hanna y Barbeau (2010). Otra manera es dar un acercamiento diferente de las pruebas; en particular, en geometría euclidiana el uso de SGD ha permitido visualizar las construcciones geométricas de manera dinámica, además de que los alumnos puedan experimentar, y en algunos de ellos logren conjeturar, y validar construcciones geométricas, como lo indica Battista y Clements (1995).

Lo anterior ha motivado a los investigadores a analizar cómo el uso del software, en particular los SGD, ayuda a que los estudiantes puedan tener un mejor aprendizaje. Ruthven et al. (2007) relatan algunas de las investigaciones que se han hecho con SGD como, por ejemplo, con el Supposer. Estos investigadores reportan que "las actividades diseñadas permitían a los estudiantes descubrir teoremas matemáticos empíricamente" (Lamper, 1993, p. 150, citado en Ruthven et al., 2007) o con Cabri-Geometry (Laborde, 2001, citado en Ruthven et al., 2007) en donde se reporta que los profesores "pueden perder parte del control sobre lo que los estudiantes hacen con algún software; además, que el aprendizaje puede tomar parte en situaciones basadas en la computadora, sin la referencia del lápiz-y-papel" (Laborde, 2001, p. 311, citado en Ruthven et al., 2007).

Otra investigación que hace uso de un SGD es la que llevaron a cabo Marrades y Gutiérrez (2000), quienes diseñaron actividades geométricas relacionadas con la prueba para ser solucionadas usando Cabri-Geometry por estudiantes. Una vez concluida la toma de datos, estos investigadores analizaron y clasificaron las soluciones de los estudiantes, usando un marco referencial elaborado por ellos para ese fin. Dicho trabajo hace uso de investigaciones como las de Balacheff (1988), Bell (1976) y Snowder y Harel (1988).

Marrades y Gutiérrez (2000) concluyeron que el uso del SGD puede ayudar a los estudiantes a progresar en la habilidad de producir justificaciones o pruebas siempre y cuando dichas pruebas se enmarquen dentro de conceptos y propiedades geométricas discutidas en el aula. Por su parte, Mariotti (2010) también desarrolla una investigación con Cabri-Geometry donde los alumnos producen figuras geométricas, describen el procedimiento de lo que obtienen con el software e intentan hacer una justificación de qué tan correcta es la construcción. Esta investigadora analiza los datos, usando un marco referencial basado en las ideas de la teoría de Vygotsky.

El presente trabajo de investigación hace uso también de SGD para examinar cómo los estudiantes lo usan para solucionar problemas geométricos y cómo pueden usar el software para justificar las actividades hechas. El SGD que se usa es el Geogebra, el cual es una aplicación libre. Esto es, no tiene costo alguno y además tiene actualizaciones constantes, lo cual lo hace accesible a cualquier estudiante que tenga acceso a una computadora.

Haciendo uso del marco referencial desarrollado por Balachef (2010), se analizan los datos [soluciones] de los estudiantes usando Geogebra (los archivos) para resolver los problemas propuestos; además de como lo hicieron (registrado en video el proceso de solución) para detectar y analizar las argumentaciones y acciones de los estudiantes. Así, de esta manera este trabajo busca extender los trabajos antes mencionados de la prueba matemática haciendo uso del SGD.

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1. Introducción

En este capítulo se hace una revisión de la investigación relevante que aborda el tema de investigación de este trabajo. En particular, este capítulo está centrado en los trabajos de investigación de Guy Brousseau, Gila Hanna y principalmente Nicolas Balacheff, además de trabajos de investigación con el uso de SGD y su relación con la prueba matemática.

2.2. Acerca de la prueba en educación matemática

La prueba matemática es fundamental en el proceso del aprendizaje, ya que sin ella no se puede aprender matemáticas (Balacheff, 2010, p. 115). En el mismo sentido, Hanna (2000) señala que la prueba es importante en las matemáticas, ya que en el salón de clases es clave en la promoción de la comprensión de las matemáticas; además, la prueba es de interés matemático porque en ella se encarnan los mismos métodos, herramientas y conceptos, por lo tanto, es portadora de conocimientos.

Dada la importancia de la prueba, está presente en los planes y programas de estudio de varios países, como en EEUU (estándares de la NCTM) o en Francia (programas nacionales) (Balacheff, 2010, p. 115).

A pesar de ello, la prueba conlleva dificultades de aprendizaje (también en su enseñanza, pero este trabajo no pone énfasis en esa problemática). Por ejemplo, el hecho de que existe una doble brecha didáctica en las matemáticas: la prueba crea una ruptura entre las matemáticas y otras disciplinas, y existe una división en los cursos de matemáticas antes y después de los 12 años de instrucción, ya que es hasta ese momento en el que se da la enseñanza de la prueba matemática, motivado por la teoría de las etapas de desarrollo de Jean Piaget (Balacheff, 2010).

Otro ejemplo de dicha problemática es el hecho de que los estudiantes reciben una instrucción matemática basada en argumentos[1] por parte del profesor. Sin embargo, tarde o temprano los estudiantes se enfrentan al hecho de que en matemáticas se prueba; no sólo se argumenta, y eso representa una dificultad para el aprendizaje de la prueba. Desafortunadamente, los dos ejemplos anteriores han mostrado que las ideas de Piaget podrían estar erradas (Balacheff, 2010).

Se han intentado usar diversas estrategias, por parte de algunos educadores matemáticos, a fin de que tanto la enseñanza como el aprendizaje de la prueba matemática sean menos conflictivas en el ámbito educativo. Por ejemplo, se ha puesto atención a la psicología del discurso y la psicopedagogía; ello con el argumento de que los seguidores de Piaget no han puesto suficiente atención al lenguaje y a la interacción social. Los argumentos precedentes han llevado a la sugerencia de aportar soluciones a la problemática del aprendizaje de la prueba, tomando en cuenta las ideas de Vygotsky y de los socio-constructivistas; pero al final esta línea de pensamiento no pareció ser la panacea.

Todas estas fallas, referentes a la enseñanza y al aprendizaje de la prueba matemática, no son debidas a la influencia de las teorías tomadas como sustento en los diseños educativos, sino de simplificaciones que han asumido que los modelos de la psicología se pueden pasar libremente a la educación y, en particular, rara vez toman en cuenta la naturaleza de las matemáticas mismas (Balacheff, 2010). Este autor concluye que el aprendizaje y el entendimiento de las matemáticas no pueden ser separados del entendimiento intrínseco del significado de la validación de la prueba matemática.

2.3. Explicación, prueba, demostración y razonamiento matemático

En el capítulo precedente fue discutida la problemática referente a la prueba, como concepto que debe ser entendido en el mayor sentido posible. En sus primeros trabajos de investigación sobre la prueba matemática, Balacheff (1987) discutió la diferencia entre distintos conceptos que pueden ser confundidos con prueba. En seguida son parafraseadas las ideas de Balacheff (2000) sobre estos conceptos.

[1] Argumentación aquí significa "actividad verbal, racional y social dirigida a convencer a un crítico de la aceptabilidad de un punto de vista razonable por presentar una constelación de una o varias proposiciones para justificar este punto de vista" (van Eemeren et al., 2002, citado en Balacheff., 2010).

- *Explicación*: implica dar a conocer la verdad a partir de una propuesta o de un resultado.
- *Probar*: es exponer una verdad a partir de una evidencia aceptada por la comunidad, la cual puede ser refutada.
- *Demostrar o demostración*: tiene reglas formales y definidas a la hora de presentar pruebas, las cuales están sustentadas en criterios lógicos rigurosos igualmente aceptados por la comunidad matemática, donde el rigor es mucho mayor que en una prueba.
- *Razonamiento matemático*: es la actividad, que no se explicita, y que sirve para manipular la información para producir nueva información, pero cuando dicha actividad busque como fin asegurarse de la validez de una proposición, y ayude a producir una explicación; a estas acciones se les asocia el proceso de validación de esa aseveración.

2.4. Tipos de prueba

Hay diferentes clasificaciones de la prueba propuestas por varios investigadores, en particular Balacheff (2000) clasifica las pruebas en dos tipos:

- *Pruebas pragmáticas*: son las que recurren a la acción o la exhibición.
- *Pruebas intelectuales*: son aquellas que se separan de la acción y se apoyan en las formulaciones de las propiedades en juego y sus relaciones.

A su vez las pruebas intelectuales pueden ser distinguidas en cuatro tipos de pruebas:

- *El empirismo ingenuo*: consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos;
- *La experiencia crucial*: se basa en seleccionar con cuidado un ejemplo, convencidos de que si la conjetura es cierta para ese caso, entonces lo será siempre para todos los casos;
- *El ejemplo genérico*: se basa en seleccionar un ejemplo que actúe como representante de representante característico de determinada clase; de tal manera que aunque la prueba se refiera a ese caso particular pueda generalizarse a toda esa clase;

- *La experiencia mental*: se basa en las acciones realizadas previamente por el estudiante que después interioriza (por lo general son observaciones de ejemplos) y que entonces separa de las particulares para convertirlas en argumentos abstractos deductivos.

Los dos primeros tipos de prueba no permiten establecer la verdad de una aseveración, sólo puede ser considerada como prueba únicamente por aquellos que las consideran como tal.

2.5. Funciones de la prueba

La prueba tiene muchas funciones más allá de la justificación; es importante el saber por qué una sentencia en matemáticas es verdadera. Hanna (2000 p. 8) hace una lista de funciones de la prueba, retomando los resultados de diversos investigadores matemáticos educativos:

- Verificación (concerniente a la verdad de un enunciado).
- Explicación (proveyendo de información sobre por qué es cierto).
- Sistematización (la organización de diversos resultados en un sistema deductivo de axiomas, principales conceptos y teoremas).
- Descubrimiento (el descubrimiento o la invención de nuevos resultados)
- Comunicación (la transmisión del conocimiento matemático)
- Construcción de una teoría empírica
- Exploración del significado de una definición o las consecuencias de un supuesto.
- Incorporación de un hecho bien conocido en un nuevo marco y así verlo desde una nueva perspectiva.

2.5. Teoría de situaciones didácticas

Una teoría importante para el desarrollo de esta investigación es la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997) la cual sirve de fundamento para los trabajos de Balacheff; trabajos claves para el análisis de los datos recabados en esta investigación.

Para Brousseau el alumno aprende adaptándose al medio que es factor de contradicciones, de dificultades, y sobre todo desequilibrios, casi de la misma manera que lo hace la sociedad humana. Esta adaptación del alumno se manifiesta mediante respuestas nuevas, las cuales son la prueba del aprendizaje; dicho acercamiento está claramente influenciado por las ideas de Jean Piaget.

El rol principal que esta teoría otorga a la "situación" en la construcción del conocimiento; el cual se ve reflejado en la descripción de Brousseau quien llama "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con un medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable.

Las situaciones son clasificadas por Brousseau en dos tipos:

- *Situaciones didácticas*: es el conjunto de relaciones que se establecen de manera implícita o explícita entre un grupo de alumnos, un entorno o medio (que puede incluir materiales o instrumentos) y el profesor, con el fin de que los alumnos aprendan, es decir, que reconstruyan un conocimiento.
- *Situaciones a-didácticas*: Es el momento en el que el profesor se despoja de la situación y logra que el alumno asuma el problema como propio, e intenta resolverlo generando un proceso de búsqueda autónomo con el cual logra su aprendizaje.

La situación didáctica contiene básicamente la intención de que alguien aprenda algo. Esta intención no desaparece en la situación a-didáctica: la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el problema respondiendo al mismo con base en sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del profesor, y sin que el profesor intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución

Por otra parte, las situaciones a-didácticas se clasifican en cuatro:

- Las situaciones de *acción*: en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.
- Las situaciones de *formulación*: cuyo objetivo es la comunicación en informaciones entre alumnos. Para eso, deben modificar el lenguaje que

utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

- Las situaciones de *validación:* en las que se trata de convencer a uno o a varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que necesariamente debe ser así.
- Las situaciones de *institucionalización*: destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

2.6. Un modelo para relacionar el saber con el probar

Utilizando las ideas de Brousseau (1997) de la teoría de situaciones didácticas, Balacheff (2010) postula que las concepciones son el resultado de interacciones del alumno con el medio ambiente (*milieu*), y que el aprendizaje es tanto un proceso como un resultado de la adaptación del alumno a este entorno. Por "medio ambiente", se refiere a un entorno físico, un contexto social o incluso un sistema simbólico (sobre todo ahora que este último puede ser representado por una tecnología que se materializa dinámicamente).

Sin embargo, sólo algunas de las características del entorno son relevantes desde el punto de vista del aprendizaje. El mismo principio se aplica para el medio ambiente, que se restringe al medio definido como sistema del sujeto antagonista en el proceso de aprendizaje (Brousseau, 1997, p 57), es decir, sólo es tomado en cuenta las características del medio ambiente que son relevantes desde la perspectiva epistémica. Esto significa que las caracterizaciones del sujeto (epistémico) y del entorno son interdependientes sistémicamente (y dinámicamente, ya que ambos se desarrollan durante el proceso de aprendizaje).

Una concepción, define Balacheff (2010), es un saber situado, en otras palabras, es la creación de instancias de un saber en una situación específica que se detalla por las propiedades del medio y de las restricciones en las relaciones (acción / feedback[2]) entre este medio y el sujeto [S ↔ M] (véase Figura 2.6).

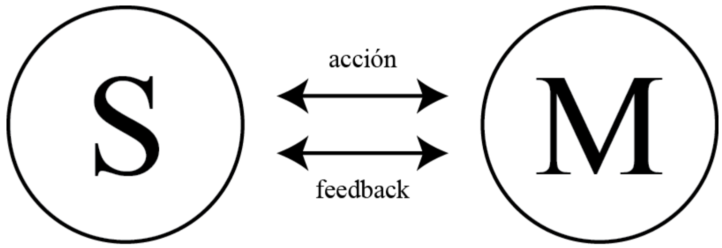

Figura 2.6. Relación entre el sujeto y el medio.

Con esa definición de concepción Balacheff define el modelo ck¢ para el análisis del conjunto de datos obtenidos de la observación de las actividades de los estudiantes; el cual tiene como objetivo establecer un *puente* necesario entre el saber y probar al proporcionar un papel equilibrado para controlar las estructuras respecto a la función asignada generalmente a las acciones y representaciones.

2.6.1. El modelo ck¢

Balacheff (2010) afirma que la prueba es la actividad más visible dentro del proceso de la validación. Hasta cierto punto, "probar" puede ser visto como un logro fundamental de control y validación el cual es fundamental, ya que nadie puede pretender saber sin comprometerse en la validez de un conocimiento que se adquiere.

A cambio, este conocimiento funciona como un medio para establecer la validez de una decisión en el curso de la realización de una tarea e incluso en el proceso de construcción de nuevos conocimientos, especialmente en el proceso de aprendizaje. En este sentido, conocer y probar están estrechamente relacionados. Por lo tanto, una concepción es la validación dependiente; en otras palabras, es posible diagnosticar la existencia de una concepción porque hay un dominio observable en el que "funciona", en el que hay medios para validarlo y para impugnar las posibles falsificaciones.

Esta es la esencia de la declaración de Vergnaud (Vergnaud, 1981, p. 220, citado en Balacheff 2010) al aseverar que los problemas son las fuentes y los criterios del aprendizaje

[2] En esta investigación se optó por dejar el término *feedback* en vez de realimentación o retroalimentación ya que es usado en electricidad y electrónica como "el retorno de parte de la salida de un circuito o sistema a su propia entrada" (Diccionario de la Real Academia Española, 2001)

de conceptos. Vergnaud demostró que es posible caracterizar las concepciones de los alumnos en tres componentes: los problemas, los sistemas de representación y los operadores invariantes (esquemas).

Con lo anterior, Balacheff postula un modelo similar al de Verganud, pero le agrega la estructura de control, quedando una caracterización de la concepción en cuatro componentes (P, R, L, ∑), donde:

- P es un conjunto de problemas: este conjunto corresponde a la clase de los desequilibrios del sistema considerado sujeto / medio ambiente [S ↔ M] puede reconocer, en términos matemáticos. Dichos problemas pueden ser resueltos en términos pragmáticos, P es la esfera de la concepción de la práctica.
- R es un conjunto de operadores.
- L es un sistema de representación: R y L describen el ciclo de retroalimentación en relación al sujeto y el medio, es decir, las acciones, las evaluaciones y los resultados.
- ∑ es una estructura de control: En la estructura de control se describen los componentes que apoyan el seguimiento del equilibrio del sistema de [S ↔ M], esta estructura garantiza la coherencia de la concepción, además, incluye las herramientas necesarias para tomar decisiones, y expresar un juicio sobre el uso de un operador o sobre el estado de un problema (es decir, resuelto o no)[3].

2.7. Saber y probar en la génesis de la enseñanza de la prueba

Balacheff (2010) afirma que el aprendizaje de las matemáticas empieza desde los primeros años de la escuela; en este nivel dependen de su experiencia y del profesor para poder distinguir entre sus opiniones y su conocimiento real. Para poder diferenciar entre aquello que se opina con el conocimiento que poseen los estudiantes, ellos [los estudiantes] deben

[3] Sobre el control (Schoenfeld, 1985) afirma que: "Esta categoría de comportamiento se ocupa de la forma en que las personas utilizan la información potencialmente a su disposición. Se centra en las principales decisiones sobre qué hacer en caso de un problema, las decisiones que en sí mismos pueden "hacer o deshacer" un intento de resolver el problema. Comportamientos de interés como la elaboración de planes, la selección de objetivos y sub-objetivos , el seguimiento y la evaluación de las soluciones a medida que evolucionan, y revisar o abandonar planes cuando las evaluaciones indican la adopción de tales medidas". (p. 27)

basarse en la eficacia tangible del conocimiento y de la validación del profesor, respecto de la prueba de algo. Pero, el profesor tiene que a su vez confiar en el conocimiento [utilizado por él o por sus estudiantes, cuando es movilizado con fines de prueba de una cierta proposición], lo que demuestra que no es la última referencia. Por lo tanto, la eficiencia y la evidencia tangible [de la utilización del conocimiento con fines de prueba matemática] son los soportes para la validez de una declaración; Balacheff (2000) afirma que es cierto, porque funciona, además declara que los estudiantes matemáticos, antes que nada son prácticos, pero para poder entrar a las matemáticas tienen que cambiar dicha postura para poder convertirse en teóricos.

El cambio de postura se ve cuando se pasa de la geometría práctica (dibujos y formas) a la geometría teórica (deductiva o axiomática), de la aritmética simbólica (cálculo de cantidades usando letras) al álgebra. Un estudiante al hacer la transición de lo práctico a lo teórico se enfrenta a la dificultad epistemológica de una transición del saber en acción al saber en discurso: El origen del saber está en la acción del sujeto sobre el objeto [conocimiento], pero el logro de la prueba matemática está en el lenguaje (véase Figura 2.7.2).

Balacheff (2010) indica que la estrecha relación entre la acción, la formulación (sistema semiótico) y validación (estructura de control) se impone ampliando las ideas de Brousseau (1997). Esta trilogía que define una concepción (véase Figura 2.7.1), también da forma a una situación didáctica, no hay validación posible si un reclamo que no se ha expresado de manera explícita y compartida, y no hay ninguna representación sin una semántica que emerge de la actividad (es decir, de la interacción del alumno con el medio matemático).

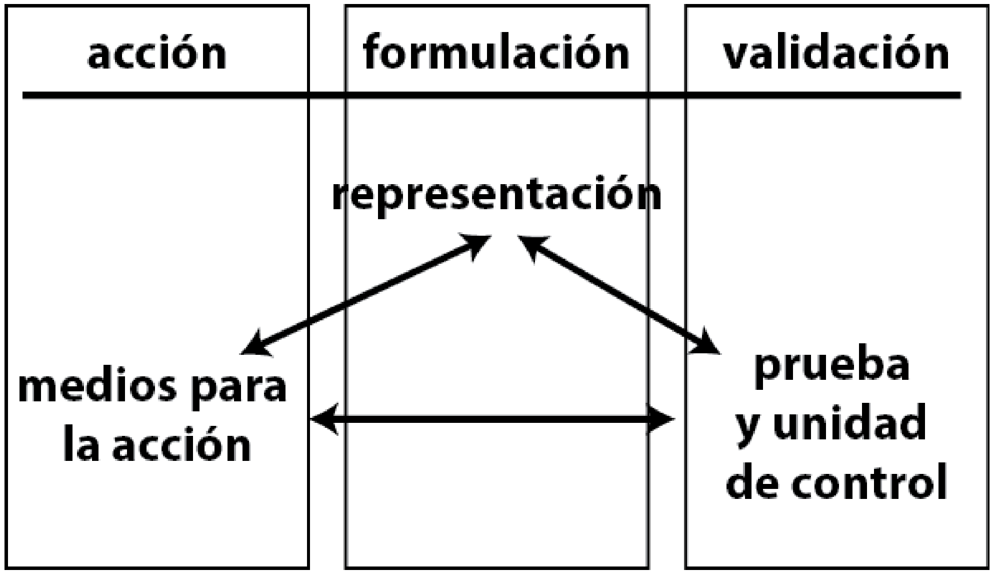

Figura 2.7.1. Las tres dimensiones interrelacionadas y de interacción del conocimiento matemático.

El lenguaje permite a los estudiantes entender y apropiarse del valor de la prueba matemática en comparación con la prueba pragmática a la que están acostumbrados. Ahora, este lenguaje podría ser de los niveles más bajos que el formalismo ingenuo matemático que utilizan, el nivel de lenguaje se une al nivel de la prueba que los alumnos pueden producir o entender.

Sin embargo, hay espacio para una verdadera actividad matemática en todos estos niveles, siempre que los alumnos hayan ido más allá del empirismo y hayan visto el valor añadido de la postura teórica (véase Figura 2.7.1).

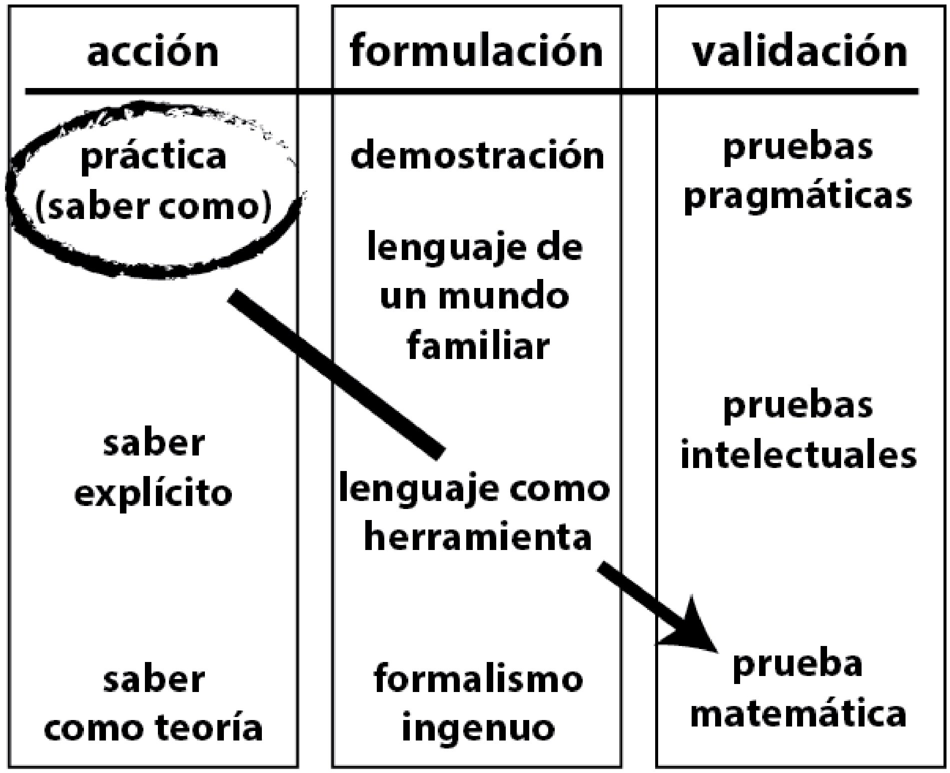

Figura 2.7.2. La correlación aproximada entre las categorías críticas en cada una de las tres dimensiones (acción, formulación y validación). Se requiere que los maestros proporcionen a los estudiantes los medios para cambiar de un enfoque práctico de la verdad a un enfoque teórico de validez basada en la prueba matemática. Donde el lenguaje como herramienta es fundamental ya que permite el cambio de la acción a la validación.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo se describen: la población participante en esta investigación; las actividades diseñadas para este trabajo; la herramienta (Geogebra) a usar por los estudiantes para que solucionen las actividades y el proceso de obtención de las respuestas de los estudiantes.

3.2. Descripción de la población

La investigación es de corte cualitativo. Tomando en cuenta la información respecto de este tipo de estudios, respecto de cómo fueron seleccionados los participantes en esta investigación. Se debe mencionar que al inicio de ésta, se preseleccionaron diez estudiantes, cuyas edades fluctuaban entre los 15 y 16 años quienes, en el momento de la experimentación, se encontraban cursando el tercer semestre en una institución de educación media superior. Se les pidió que resolvieran los primeros dos problemas [construcciones geométricas relacionadas con el problema de Apolonio, que más adelante, en este mismo capítulo se enuncia] seleccionados. Con base en su desempeño en el uso del Geogebra se seleccionaron cinco estudiantes para que solucionaran los problemas restantes.

En esta tesis son reportados sólo los resultados obtenidos de dos de esos cinco estudiantes, pues fueron ellos [esos dos estudiantes] quienes tuvieron un mejor desempeño en las construcciones geométricas solicitadas; así como en la justificación de tales construcciones. Su desempeño, a lo largo de todo el proceso de la toma de datos no fue el esperado en esta investigación; sin embargo, hay "rastros" de primeros indicios de aquello que es reconocido en el medio [investigación matemática] como prueba.

Todos los participantes en esta investigación tuvieron instrucción acerca del uso de Geogebra [conocimientos básicos de las herramientas de este software, como para: localizar puntos en el plano, trazar de segmentos, rectas y circunferencias] a partir de una cierta información básica dada.

3.3. Conocimientos previos de los estudiantes respecto de los conocimientos geométricos

En el momento en que a los estudiantes se les aplicaron las actividades seleccionadas, ellos ya habían cursado dos unidades de geometría euclidiana (unidades dos y tres) en el curso de Matemáticas 2; en el cual se debieron cubrir los siguientes temas (véase Anexo: Programa de Estudios de Matemáticas):

- Construcciones con regla y compás
    - Mediatriz y determinación del punto medio de un segmento.
    - Bisectriz de un ángulo dado.
    - Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto:
        - que pertenece a la recta.
        - fuera de ella.
- Rectas notables en el triángulo: mediatriz, bisectriz, mediana y altura.
- Puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro.
- Circunferencia
    - Rectas y segmentos notables de la circunferencia
    - Rectas tangentes a una circunferencia:
        - desde un punto sobre ella
        - desde un punto fuera de ella.
    - Localización del centro de una circunferencia dada.
- Justificación de las construcciones de:
    - bisectriz de un ángulo
    - mediatriz de un segmento
    - perpendicular a una recta.

Además, dentro de dicho plan de estudios son propuestas estrategias didácticas, como: hacer uso de algún software de geometría dinámica; por ejemplo, Geometer's Sketchpad y Cabri-Geometry, entre otros. A pesar de esta sugerencia, contemplada en el Plan y Programa de Estudios, respecto del uso de algún software para cubrir los contenidos de geometría euclidiana, pocos profesores trabajan con herramientas tecnológicas en sus prácticas docentes; razón por la cual fue necesario, en esta investigación, dar instrucción básica a los estudiantes, participantes en esta investigación, antes del acopio de datos. La afirmación precedente, respecto al poco o nulo uso de herramientas tecnológicas, por parte de los profesores, en sus aulas de clase, fue corroborada por los estudiantes participantes en esta investigación.

3.4. Selección de los problemas

Tomando en cuenta la literatura de investigación, referente a los problemas de construcción, usando regla y compás, en este trabajo se decidió tomar en cuenta cinco problemas, los cuales pertenecen a casos particulares del problema de Apolonio de Praga (262-190 a.C.). La selección de estos cinco problemas fue tomando en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes seleccionados, pues se debía tener certeza de que sus conocimientos [de los estudiantes] debían estar "cerca" de aquellos tanto en la construcción geométrica solicitada como en su justificación de porqué ella es válida. De forma general, el problema de Apolonio puede ser enunciado de la siguiente manera: “Dadas tres circunferencias arbitrarias en el plano, construir otra circunferencia que sea tangente a ellas" (Courant & Robins, 2002, p. 147).

En el problema de Apolonio, antes citado, se acepta que las circunferencias dadas sean impropias; es decir, por ejemplo, las circunferencias dadas pueden ser: puntos y rectas. De este modo, por ejemplo, si las tres circunferencias dadas son puntos, entonces el problema de Apolonio consiste en trazar una circunferencia que pase por esos tres puntos. Por el contrario, si las tres circunferencias dadas son tres rectas, entonces el problema de Apolonio consiste en trazar una circunferencia tangente a esas tres rectas. Es evidente que este problema de construcción tiene sentido si las tres rectas dadas no son paralelas entre sí.

Al ser tomadas en cuenta, tanto circunferencias propias [aquellas cuyo radio tiene longitud finita], como impropias [circunferencias de radio cero, y rectas cuyo radio es infinito] es posible identificar diez casos posibles del problema de Apolonio. En esta investigación fueron tomados en cuenta algunos casos particulares del problema de Apolonio; más precisamente, aquellos que estuvieran al "alcance" de los estudiantes de bachillerato, quienes participaron en este estudio. Así, los problemas de construcción propuestos a los estudiantes, con fines de construcción y de la validación de ésta son:

1. Dados tres puntos no co-lineales, trazar una circunferencia que pase por esos puntos.

2. Dadas tres rectas, trazar una circunferencia tangente a éstas.

3. Dos puntos y una recta: a) la recta que contiene a los puntos dados, es paralela a la recta dada; b) uno de los puntos dados pertencece a la recta dada y el otro es exterior a ella.

4. Dos rectas y un punto: las rectas son concurrentes y el punto pertenece a una de esas rectas (propuesto por Schoenfeld, 1985, p. 36).

Para la solución de estos problemas se requiere conocimientos previos del trazo y conceptos de: punto medio, mediatriz, bisectriz, perpendicularidad y distancia de un punto a una recta, los cuales están dentro de los planes de estudio de cursos previos de la institución de los alumnos participantes en esta investigación. Por lo que es natural esperar que los problemas propuestos fueran solucionados por algunos alumnos. En seguida, son enunciados los problemas propuestos a los estudiantes así como las construcciones y justificaciones esperadas.

3.5. Soluciones esperadas y su análisis

3.5.1. Problema 1

Dados tres puntos no co-lineales, trazar una circunferencia que pase por esos puntos.

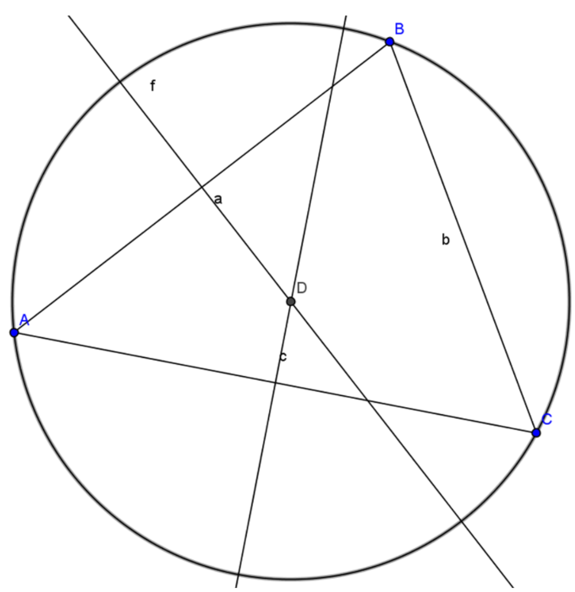

Figura 3.5.1. Circunferencia que pasa por tres puntos dados.

Construcción esperada: Dados los puntos *A*, *B*, *C*, es posible trazar el triángulo *ABC*, y las mediatrices de sus lados se cortan en el circuncentro *D*, el cual es el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Basta con trazar las mediatrices de dos de los lados; por ejemplo, *AB* y AC, las cuales se cortan en el punto *D*; este punto es tomado como centro de la circunferencia de radio *DB* (véase Figura 3.5.1).

Justificación de la construcción: Por definición, la mediatriz es la recta cuyos puntos equidistan de los extremos de un segmento. Al situar el punto *D* en la intersección de las mediatrices de los segmentos *AB* y *AC*, se sabe que *D* se encuentra a la misma distancia de los puntos *A*, *B* y *C*, entonces al trazar la circunferencia con radio *DB* y centro *D*, ésta debe pasar por tres puntos.

3.5.1.1. Propósito del Problema 1

En este problema se pretende que el estudiante haga uso del concepto de mediatriz, como la recta cuyos puntos equidistan de los extremos de un segmento, ya que con esta información es posible garantizar que al encontrar el punto de intersección de dos mediatrices, éste [el punto] se encuentre a la misma distancia de los tres puntos dados. Superada esta etapa de solución del problema, los estudiantes pueden lograr, sin mayor dificultad, hallar la circunferencia que pasa por los tres puntos dados.

3.5.2. Problema 2

2. Dadas tres rectas, trazar una circunferencia tangente a éstas.

3.5.2.1. Caso particular 1: las tres rectas son concurrentes

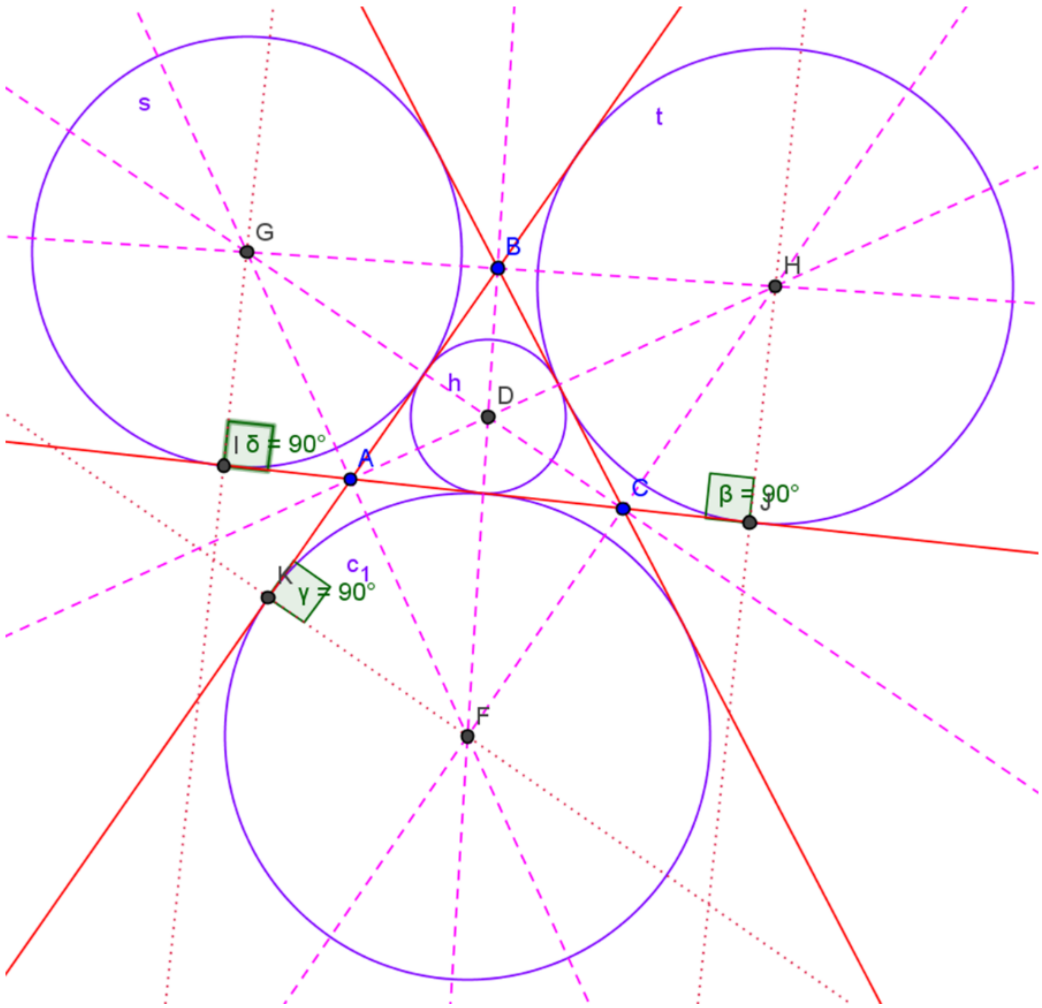

Figura 3.5.2.1. Circunferencias tangentes a tres rectas concurrentes.

Construcción esperada del caso particular (las tres rectas son concurrentes): Las tres rectas dadas forman un triángulo *ABC*. Como es sabido, las tres bisectrices de los ángulos interiores de cualquier triángulo se cortan en un único punto, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, y, por tanto, sólo hay que dibujar las tres bisectrices para determinar el centro, *D* (véase Figura 3.5.2.1). El radio se determina con los puntos de tangencia, y estos se hallan trazando las perpendiculares por *D* a cada uno de los lados. En la Figura 3.5.2.1. se ha determinado *E* trazando la perpendicular a *AE* por *D*. También, es conocido que las bisectrices exteriores de dos ángulos y la interior del otro determinan los centros *G*, *H* y *F* de tres circunferencias externas. Como en el caso anterior, los radios *GI*, *HJ* y *FK* se determinan trazando perpendiculares a las rectas tangentes desde estos centros (véase Figura 3.5.2.1).

Justificación de la construcción: Dos definiciones deben ser tomadas en cuenta:

- La bisectriz de un ángulo es la recta donde todos sus puntos equidistan de las semirrectas del ángulo.
- La distancia de un punto *P* a un recta *m* es la menor distancia del punto *P* a un punto *Q* de la recta *m*; además, *P* y *Q* pertenecen a la recta perpendicular a *m*.

Estas definiciones geométricas permiten afirmar que dadas las tres rectas, la intersección de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas, equidistan de las tres rectas (véase Figura 3.5.2.1), estas intersecciones son los puntos *D,G,H* y *F*. Así, basta con trazar la recta perpendicular que pasa por alguno de los puntos anteriores de las rectas dadas y, de este modo, es posible determinar los puntos de tangencia de las circunferencias tangentes a las tres rectas con centros en *D,G,H* y *F* respectivamente (véase Figura 3.5.2.1).

3.5.2.2. Caso particular 2: dos rectas son paralelas y la otra es transversal a ellas

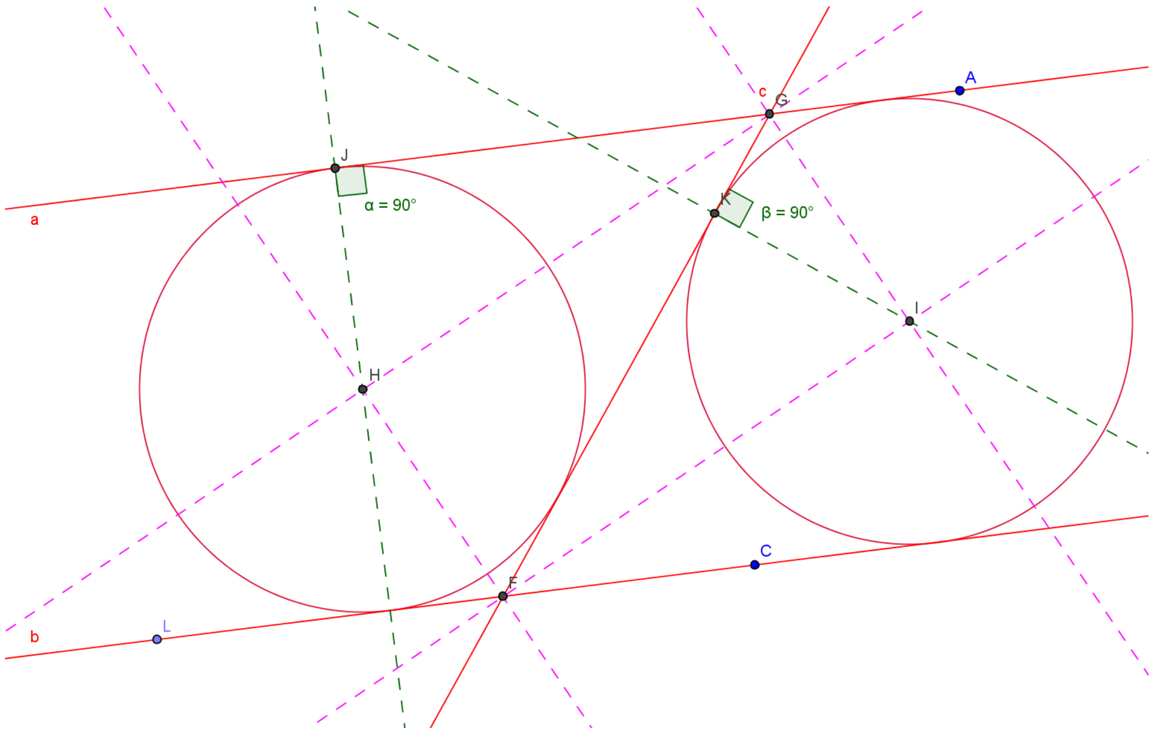

Figura 3.5.2.2. Circunferencias tangentes a dos rectas paralelas y una transversal a ellas.

Solución: Dadas las rectas *a*, *b* paralelas entre ellas y *c* una que las corta, se trazan las bisectrices de los ángulos *LEG*, *EGJ*, *CEG* y *EGA*. Se identifican los puntos donde las bisectrices se cortan; en este caso, son los puntos *I* y *H*; se trazan las rectas perpendiculares a dichos puntos en cualquiera de las rectas dadas. En estos casos son las que pasan por los puntos *K* y *J*, respectivamente; se trazan las circunferencias con centro en *I* y radio *IK*, y centro en *H* y radio *HJ*, las cuales son tangentes a las tres rectas (véase Figura 3.4.2.2).

Justificación de la construcción: Al igual que el caso 1 del Problema 2, la intersección de las bisectrices *H* e *I* (véase Figura 3.5.2.2) equidistan de las tres rectas y la perpendicular de *H* e *I* sirven para encontrar los puntos de tangencia de las circunferencias tangentes a las tres rectas dadas.

Nota aclaratoria: No se seleccionó este caso particular del Problema 2, porque se consideró un poco complicado de construir y de justificar por parte de los estudiantes, ya que se usan los mismos conocimientos de bisectriz y perpendicularidad como en el Problema 2 propuesto, pero el hecho de tener dos rectas paralelas podría causar dificultad de interpretación para los estudiantes.

3.5.2.3. Propósito del caso particular 1, del Problema 2

En este problema, se busca que el estudiante use dos hechos: que los puntos de la bisectriz de un ángulo cualquiera siempre se encuentran a la misma distancia de los dos lados del ángulo, y que la distancia más corta de un punto a una recta es la perpendicular a esa recta, y que contiene al punto en cuestión. Con lo anterior, sólo se necesita trazar dos bisectrices de los ángulos del triángulo *ABC*. Con el trazo de esas dos bisectrices se encuentra el incentro o (excentro, si se consideran los ángulos externos del triángulo *ABC*). Una vez encontrado ese punto, se traza la perpendicular a los lados del ángulo y la intersección se usa para trazar el radio de la circunferencia inscrita (o externa en caso de usar el excentro) (véase Figura 3.4.2.1).

3.5.3. Problema 3

Este caso particular del problema de Apolonio se enuncia de la siguiente manera:

Dados dos puntos en el plano y una recta, trazar una circunferencia que contenga a esos dos puntos y que sea tangente a la recta.

3.5.3.1. Caso particular 1: la recta que pasa por los dos puntos dados en el plano es paralela a la recta dada.

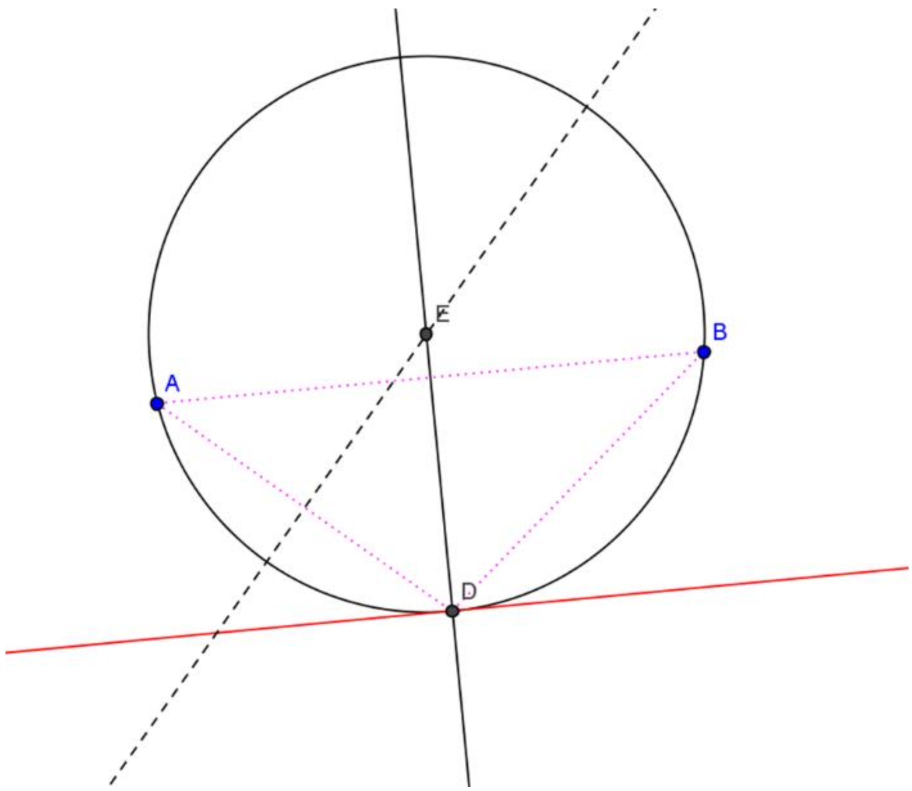

Figura 3.5.3.1. Circunferencia tangente a la recta dada y que contiene a los dos puntos.

Solución esperada: Dados los puntos *A* y *B* y la recta *l* en el plano, se traza la mediatriz de *AB* y corta a *l* en el punto *D*, después se traza la mediatriz de *AD* la cual corta a la mediatriz de *AB* en el punto *E*. Se traza la circunferencia con centro en *E* y radio *EB*, la cual es tangente a la recta *l* y pasa por los puntos *A* y *B* (véase Figura 3.5.3.1).

Justificación de la construcción: La mediatriz del segmento *AB*, también es perpendicular a la recta *l* al estar *A* y *B* en la recta paralela a *l*; por otro lado, la intersección *E* de la bisectriz al segmento *AD* y la bisectriz *AB* es el centro del circunferencia que pasa por los puntos *A*,*B* y *D* análogo al Problema 1. El punto *D* es el punto de tangencia de la circunferencia construida a la recta *l* al pasar por la perpendicular, lo que garantiza que la circunferencia también es tangente a *l*.

3.5.3.2. Caso particular 2: la recta que pasa por los dos puntos dados no es paralela a la recta dada.

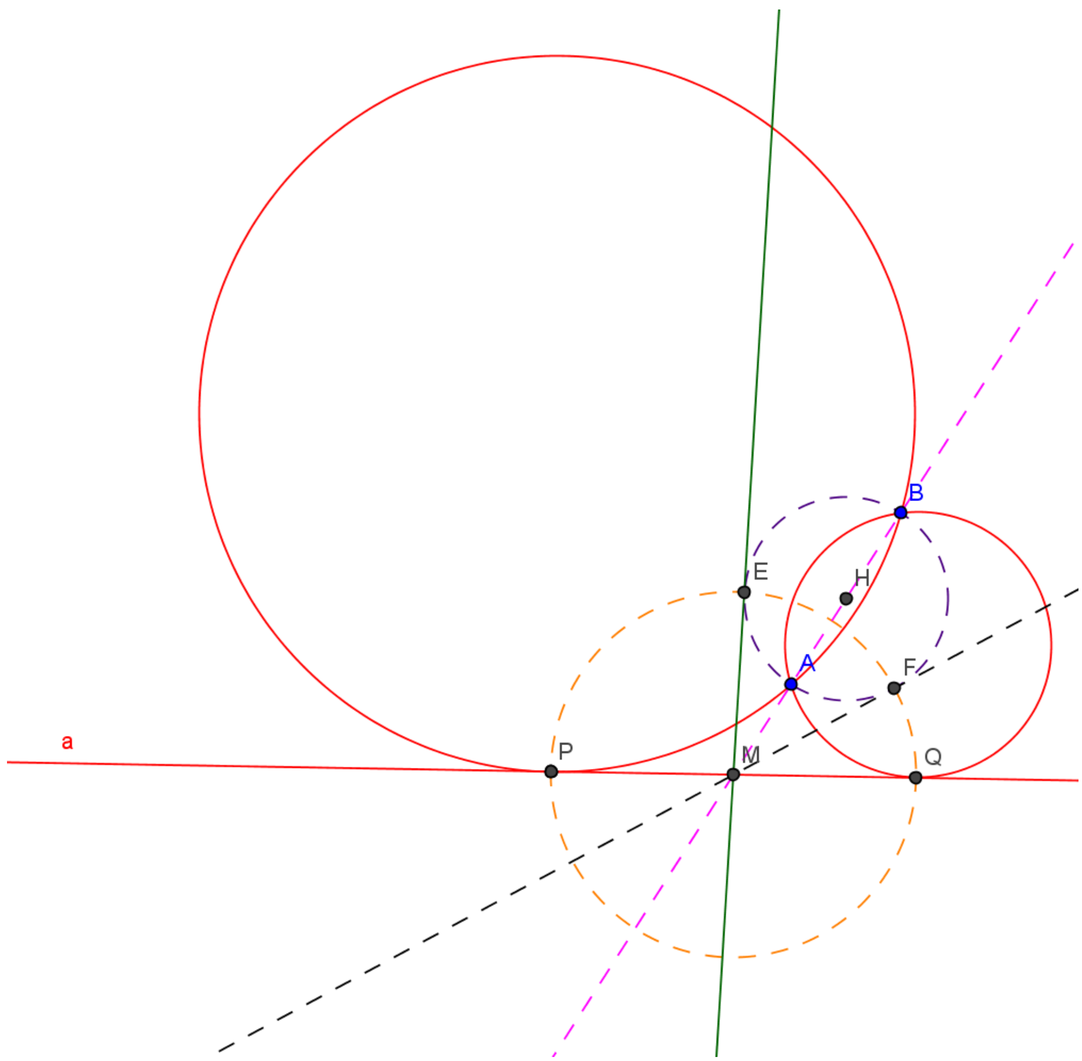

Figura 3.5.3.2. Circunferencia tangente a la recta y que pasa por los dos puntos dados.

Solución: Dados los puntos *A* y *B* y la recta *a*, se traza la recta que pasa por dichos puntos, y se coloca el punto *M* en la intersección con la recta *a*. En seguida, se traza el punto medio *H* del segmento *AB* y con centro en *H* se traza una circunferencia con radio AH. Se trazan las rectas tangentes a la circunferencia previamente trazada al punto *M* y se localizan los puntos de tangencia los cuales son *E* y *F*. Se traza la circunferencia con centro en *M* y radio *ME*, se localizan las intersecciones con la recta *a* siendo *P* y *Q* los puntos. Teniendo los puntos *P*, *A* y *B* se traza la circunferencia que pasa por estos tres puntos, como en el Problema 1 y, de manera análoga, se hace lo mismo con los puntos *Q*, *A* y *B* (véase Figura 3.5.3.2).

Justificación de la construcción: Usando el resultado de potencia de un punto Coxeter (1989, p. 81) se tiene que $MF^2=MA \bullet MB$ entonces la circunferencia con centro en *M* y radio *MF* garantiza que $MP^2= MQ^2=MA \bullet MB$. Esta relación garantiza que con los puntos *P*, *A* y *B* se puede construir una circunferencia que pase por dichos puntos y que se preserve la tangencia de dicha circunferencia en la recta *a* (que pasa por el punto *P*), análogamente eso ocurre en los puntos *Q*, *A* y *B*.

Nota aclaratoria: Este caso particular del Problema 3 no propuesto a los estudiantes, debido a que es necesario hacer uso de la definición de potencia de un punto para justificar su construcción, por lo que se conjeturó que la dificultad de dicho problema era alto para los estudiantes, quienes participaron en este estudio.

3.5.3.3. Propósito del caso particular 1 del Problema 3

Para este problema, como en el primero que fue planteado a los estudiantes, se necesita tener clara la definición de mediatriz, ya que al trazarla sobre el segmento *AB* (véase Figura 3.5.3.1) se logra encontrar, en la intersección *D*, una reducción al Problema 1, discutido al inicio de este capítulo.

3.5.3.4. Caso particular 3 propuesto a los estudiantes: uno de los dos puntos dados está contenido en la recta dada y el otro punto es exterior a ella.

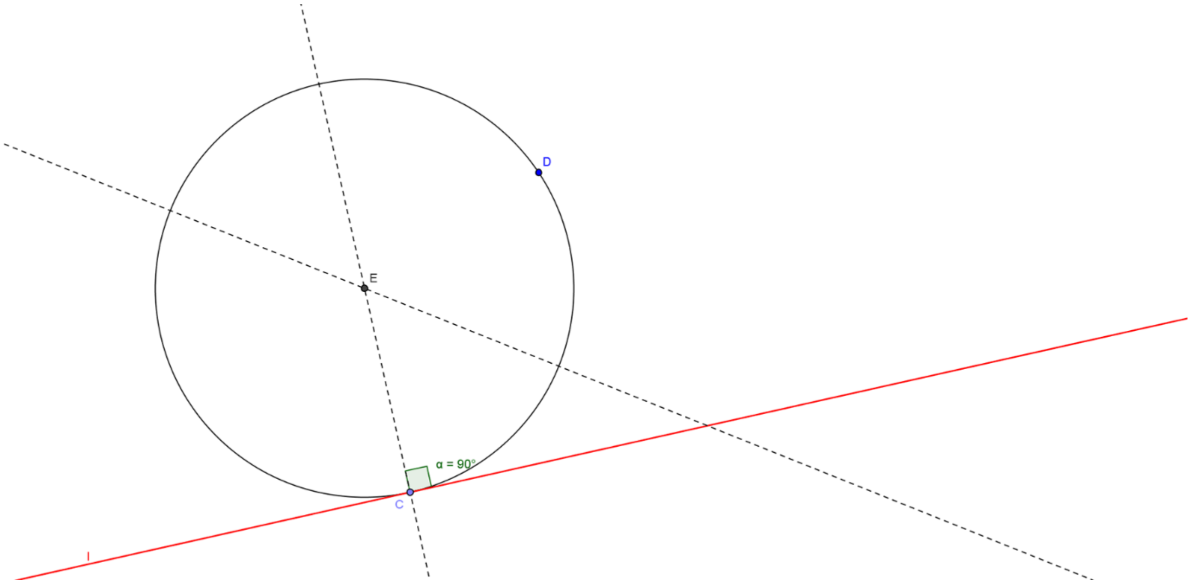

Figura 3.5.3.4. Circunferencia tangente a dos puntos donde uno de ellos se encuentra en una recta.

Construcción esperada: Dados los puntos *B* y la recta *l* se coloca un punto *C* sobre la recta *l*. Se traza la mediatriz de *DC*; después se traza la recta perpendicular de *C* a la recta *l*, y se nombra *E* al punto donde la mediatriz y la recta perpendicular se cruzan. Se traza la circunferencia con radio *ED* y con centro en *E*. Dicha circunferencia es tangente a la recta *l* exactamente en el punto *C* y pasa por *D* (véase Figura 3.5.3.4).

Justificación de la construcción: El punto *E* se encuentra a la misma distancia de *C* y *E*; además, se encuentra a la distancia menor de la recta *a*, ya que pasa por la perpendicular a dicha recta. Por lo que *E* es el centro de la circunferencia que pasa por *C* y *D* y es tangente a *l*.

3.5.3.5. Propósito del caso particular 3 del Problema 3

En este problema se busca que el estudiante haga uso del concepto de mediatriz de un segmento de recta al trazar una en el segmento *DE* y después haga uso de la perpendicular a una recta que pasa por *C*, y así encontrar el centro de la circunferencia buscada.(véase Figura 3.5.3.4).

3.5.4. Problema 4

Dadas dos rectas y un punto, trazar una circunferencia tangente a esas dos rectas y que contenga al punto dado.

3.5.4.1 Caso particular 1: las dos rectas se intersecan en un punto, formando un ángulo y el punto dado pertenece a una de esas rectas (lado del ángulo).

Nota aclaratoria: este caso particular del Problema 4 fue propuestos por Schoenfeld (1985 p. 36). Para el lector interesado en los resultados de este problema, puede consultar el libro: *Mathematical Problem Solving* (Schoenfeld, 1985).

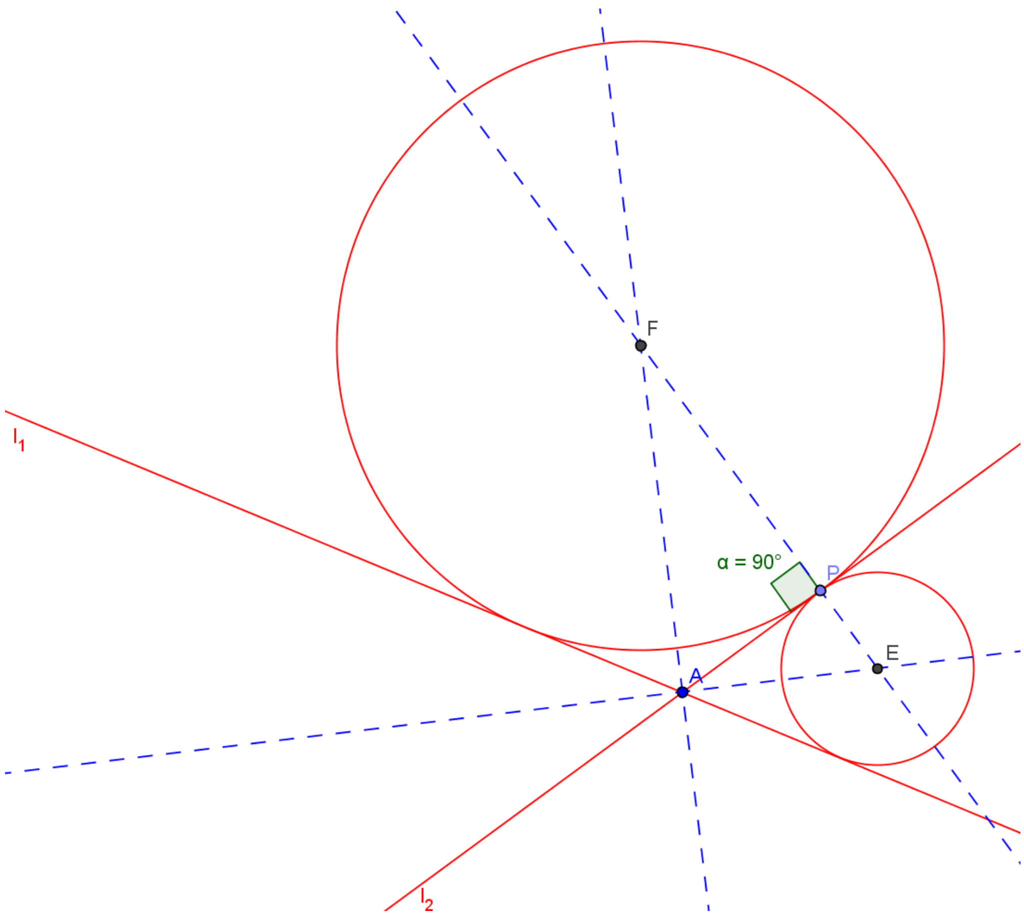

Figura 3.5.4.1. Circunferencias tangentes a dos rectas que forma un ángulo y pasan en un punto *P* sobre una de las rectas.

Construcción esperada: Dadas las rectas l_1 y l_2 y un punto *P* sobre la recta l_2, se traza la recta perpendicular a l_2 en *P*; también se trazan las bisectrices entre las dos rectas, y los puntos de las intersecciones entre la recta perpendicular y las bisectrices. En la Figura 3.4.4.1 a estos puntos de les nombra como *E* y *F*. Se trazan las circunferencias con centro en *E* y de radio *EP* y centro en *F* y radio *FP*, respectivamente, las cuales son tangentes a las rectas l_1 y l_2 y pasa por el punto *P* (véase Figura 3.5.4.1).

Justificación de la construcción: Los puntos *E* y *F* equidistan de l_1 y l_2, respectivamente, por estar sobre las bisectrices que forman ambas rectas. Además, esos puntos [*E* y *F*] son el resultado de la intersección de la recta perpendicular en *P* con ambas bisectrices. Por lo tanto, la circunferencia con centro en *F* es tangente a l_1 y l_2 y pasa por el punto *P*; análogamente, ello ocurre con la circunferencia con centro *E* que es tangente a l_1 y l_2 y pasa por el punto *P* (véase Figura 3.5.4.1).

3.5.4.2. Caso particular 2: las dos rectas se intersecan en un punto, formando un ángulo y el punto dado está en el interior del ángulo formado por las dos rectas.

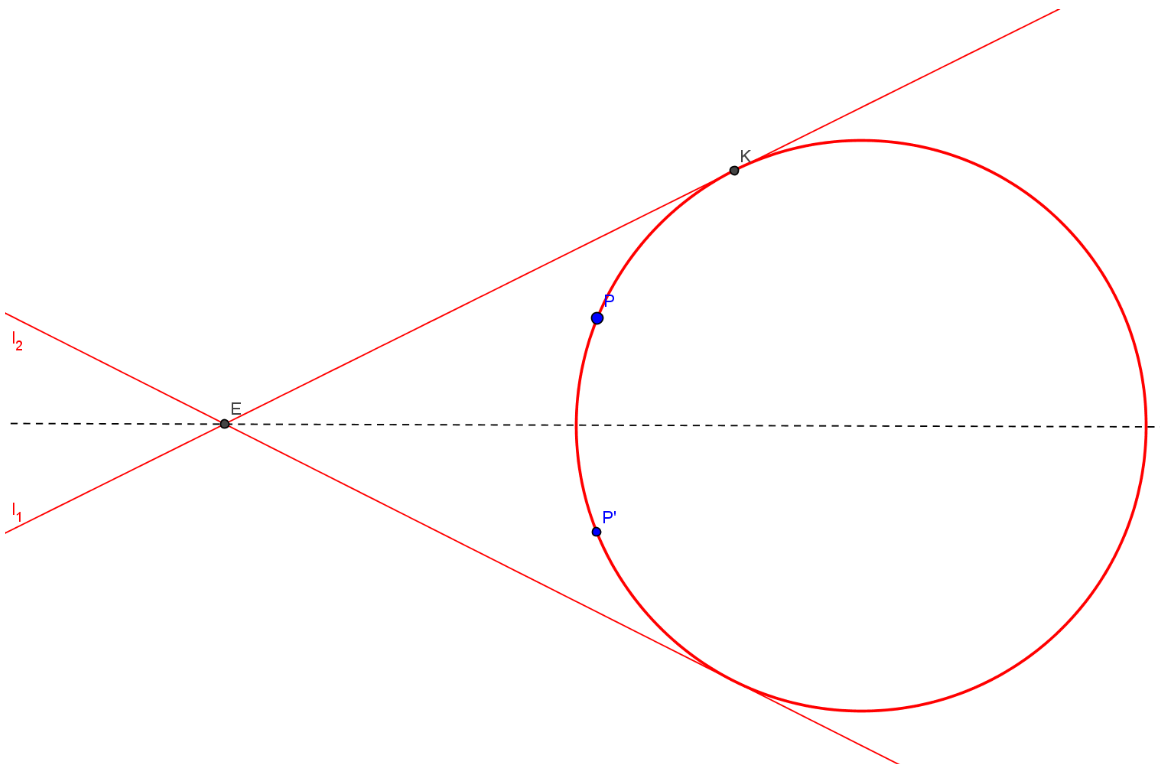

Figura 3.5.4.2. Circunferencia tangente a dos rectas que forma un ángulo y que pasa por un punto *P* dado en el interior del ángulo formado por las dos rectas.

Construcción esperada: Dadas las rectas l_1 y l_2 y un punto *P* dentro de uno de los ángulos formado por esas rectas, se traza la bisectriz de ese ángulo. Se halla el simétrico del punto *P* respecto a la bisectriz del ángulo considerado, el cual es denotado como *P*’. Con *P*, *P*’ y l_2

se procede como el caso particular 2 del Problema 3 para trazar la circunferencia que es tangente a *P, P'* y l_2 la cual también es tangente a l_1 (véase Figura 3.5.5.2).

Justificación de la construcción: Al trazar el punto *P'*, simétrico de *P*, por la propiedad de la bisectriz se garantiza que tanto *P'* como *P* siempre estarán a la misma distancia de l_2 y l_1, respectivamente; por lo que la bisectriz del ángulo formado por l_2 y l_1 es también mediatriz del segmento *PP'*. Por lo tanto, al construir la circunferencia que pase por *P, P'* y l_1 como en el caso particular 2 del Problema 3 también es tangente a l_2.

Nota aclaratoria: No se seleccionó el caso 2 del Problema 4, para ser propuesto a los estudiantes debido a que los conocimientos necesarios para encontrar su solución [trazo de la circunferencia solicitada] estaban por encima de los conocimientos previos de los estudiantes [participantes en este estudio]. Por ejemplo, los estudiantes desconocían conceptos como: el simétrico de un punto respecto de una recta y potencia de un punto. Este caso particular [Problema 4] del problema de Apolonio resulta complejo (de resolver y de justificar la construcción) para los estudiantes de bachillerato.

3.5.4.3. Propósitos del caso particular 1 del Problema 4

Al igual que el Problema 2, es necesario que el alumno maneje [en el sentido de saber cómo y cuándo utilizar] los conceptos de bisectriz y distancia de un punto a una recta, ya que son suficientes para poder trazar la circunferencia que cumple con lo solicitado en este caso particular del problema de Apolonio. El estudiante debe ser consciente de que primero debe trazar la bisectriz al ángulo y después la perpendicular a ésta.

3.6. Pertinencia del uso del Geogebra

El uso del software en educación matemática y su investigación ha sido importante desde la década de los noventa, como previamente ha sido expuesto en el capítulo anterior. Sin embargo, no fue sino hasta mediados de la primera década del siglo XXI que dejó de ser marginal en los salones de clase, debido a que las tecnologías de cómputo han sido más económicas (Hohenwarter & Lavicza, 2011). Desde hace más de una década, ya existían varias opciones de SGD, como el Cabri-Geometry o el Geometer's Sketchpad, pero al ser software propietario su costo, no pudo expandirse su uso de manera generalizada. Como respuesta a esa problemática de carácter económico, surgió el proyecto Geogebra a partir de la tesis de maestría de Markus Hohenwarter de la Universidad de Salzburgo en 2002 el cual consistía en hacer un software que combinara las características de SGD como los antes citados con algunas características de software CAS, pero desarrollado bajo la filosofía de código abierto [sin costo alguno: gratis para los usuarios potenciales de éste].

La cristalización de este proyecto permitió que mucha más gente pudiera desarrollar este proyecto haciéndolo cada vez más rico en características, multiplataforma (existen versiones para PC y tabletas) y mucho más accesible para cualquiera que desee usarlo.

3.7. Recolección de datos

Para este propósito, se trabajó en dos sesiones (de una hora cada una) con los estudiantes de bachillerato. El objetivo era que solucionaran los problemas en el ambiente de Geogebra, mientras eran interrogados [por el investigador] acerca de sus acciones para llevar a cabo la construcción geométrica solicitada.

Se recolectaron dos tipos de evidencias: los archivos de su trabajo para solucionar los problemas, y la grabación de sus acciones [justificaciones] mientras los solucionaban. Para los primeros, se les pidió que terminando de solucionar los problemas, guardaran su trabajo al usar Geogebra como herramienta de solución de los problemas. Para lo segundo, se usó software de "screencasting" (grabación digital de la salida por pantalla de la computadora) donde se grabó en video lo que hacían con el Geogebra y en audio lo que decían mientras eran interrogados acerca de sus acciones [justificación de por qué hacían algún trazo en particular] mientras solucionaban los problemas.

El objetivo al capturar estos dos tipos de evidencias era ver cómo los estudiantes exhibían: sus conocimientos previos al tener que solucionar problemas, además cómo relacionaban el uso del software con su lenguaje común y matemático en las soluciones que daban y cómo argumentaban qué tan correcta era o no la solución del problema en cuestión por ellos resuelto. En el siguiente capítulo se analizan los datos recabados.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se analizan y discuten los datos obtenidos con las actividades propuestas, al ser resueltas por los estudiantes participantes en este estudio. Los datos son analizados tomando en cuenta el marco conceptual propuesto en el Capítulo 2 de esta tesis. Se describen y analizan los intentos de soluciones de los estudiantes [en torno a los problemas propuestos], poniendo atención en su actividad al usar Geogebra para solucionarlos y en sus explicaciones [de los estudiantes] en el momento que van construyendo la solución.

Un aspecto fundamental para considerar que las soluciones de los problemas propuestos sean adecuadas, es que soporten la *prueba del arrastre*; esto es, que dada la solución se puedan mover los objetos geométricos [figuras geométricas construidas usando Geogebra] y se preserven las relaciones entre ellos como, por ejemplo, perpendicularidad de dos rectas, tangente a una circunferencia en un punto dado, distancia entre dos puntos o entre dos rectas, distancia de un punto a una recta, entre otros.

El discurso de los estudiantes [al momento de estar solucionando los problemas de construcción geométrica] también es importante para los fines de esta investigación; de hecho, éste es analizado junto con sus soluciones en Geogebra con el modelo de Balacheff descrito en el Capítulo 2 de esta tesis.

4.2. Análisis de datos: episodios sobresalientes en las distintas fases de solución de los problemas de construcción

La participación del entrevistador y de los estudiantes, en el momento de solucionar los problemas, usando Geogebra, es caracterizada por líneas (e.g., L1, L2, ...). Cada una de las cuales indica la ocasión en la que una sola persona habló, además, se hace referencia a si la persona que habló es el entrevistador (E) o el alumno (e.g., A1, A2).

En cada línea se escribe, en letra tipo *cursiva* y entre corchetes ([…]), para resaltar si lo dicho por el estudiante es acompañado por alguna acción en Geogebra y se anexa una imagen capturada de lo hecho en ese momento por el estudiante. Se usa también ese tipo de letra para aclarar alguna situación del entrevistador o del estudiante durante la actividad.

Los puntos suspensivos (…) son utilizados para indicar breves pausas hechas por el estudiante o el entrevistador. Cuando los puntos suspensivos se encuentran entre corchetes ([…]) estos indican que se ha omitido una parte del discurso, el cual no es relevante para los propósitos de esta investigación.

Se divide el análisis en cada uno de los problemas propuestos y en éste [el análisis] se hace una comparación entre dos estudiantes al intentar solucionar las actividades propuestas, poniendo énfasis en sus modos de argumentación sobre porqué sus estrategias de construcción funcionan para ellos. En esta parte del análisis se toma en cuenta el modelo teórico, para este fin, propuesto por Balacheff (2010).

4.2.1. Problema 1

Dados tres puntos no colineales, trazar una circunferencia que pase por cada uno de ellos.

Para los dos estudiantes A1 y A2 es claro que para solucionar el problema de construcción lo primero que tienen que formar es un triángulo, uniendo los puntos dados con segmentos de recta.

[L1] A1: […] yo creo que (…), bueno una manera más fácil para mí sería con esos tres puntos formar un triángulo.

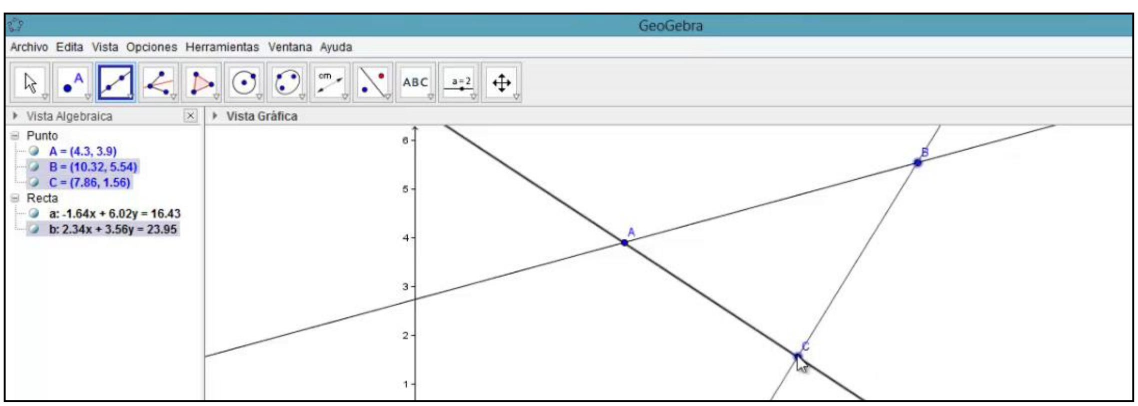

Figura 4.2.1.1. Construcción de un triángulo por parte de la estudiante A1.

[L2] A2: Primero hacemos un triángulo.

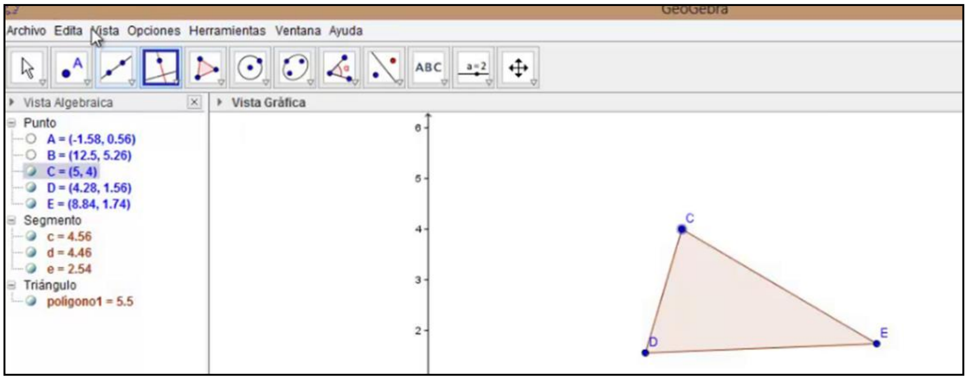

Figura 4.2.1.2. Construcción de un triángulo por parte del estudiante A2.

Los dos estudiantes lograron solucionar el problema, sin dificultad aparente, que se les había planteado y ambos tuvieron clara la necesidad de trazar segmentos de recta para poder determinar la mediatriz de ese segmento.

[L3] A1: [*Durante la construcción de su triángulo, la estudiante A1 explica*] (…) después de aquí sacar las mediatrices de cada lado (…) [*mientras señala un segmento del triángulo que había construido*]

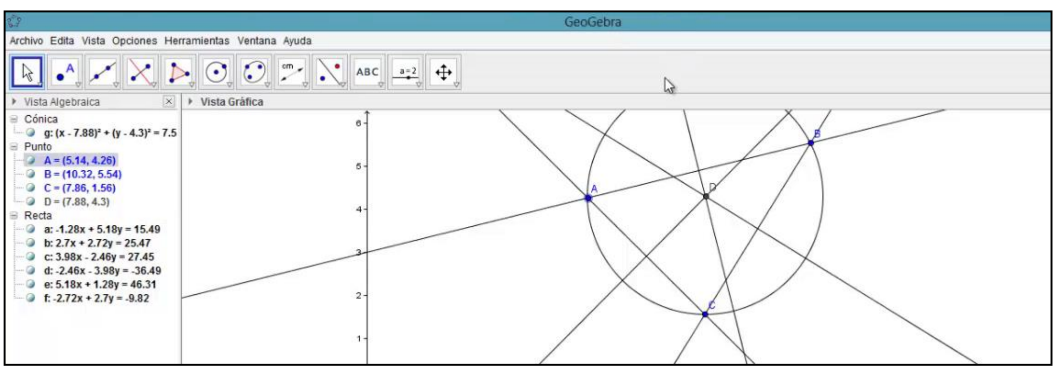

Figura 4.2.1.3. Construcción solicitada del Problema 1, bosquejada por la estudiante A1.

[L4] E: ¿Por qué trazaste el triángulo?

[L5] A2: Para poder tener segmentos, para poder hacer [trazar] la mediatriz para poder encontrar el punto medio entre los tres puntos. [*Sic. En realidad, se trata de encontrar el punto medio de dos de los puntos dados.*]

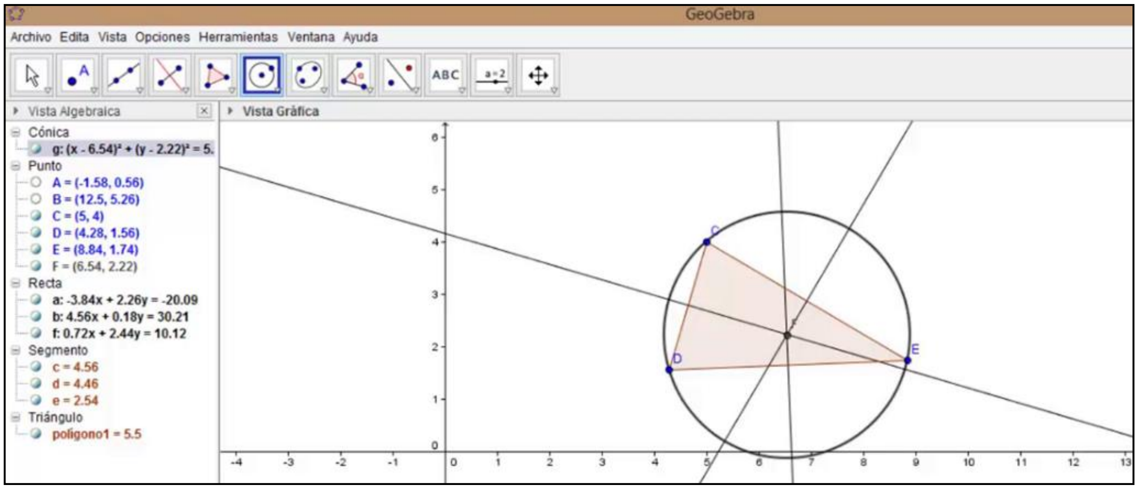

Figura 4.2.1.4. Construcción solicitada del Problema 1, bosquejada por el estudiante A2.

De acuerdo con las afirmaciones precedentes [L3 y L5] es evidente que los estudiantes tenían una definición deficiente del concepto de mediatriz, además de que no recordaban la definición de *circuncentro* [punto de intersección de las tres mediatrices de los lados de un triángulo], sin embargo, el estudiante A2, llama al centro de la circunferencia, *incentro*, la estudiante A1 le llama *punto medio* [L12 y L20].

Ambos estudiantes trazan las tres mediatrices, pero cuando se les cuestiona el porqué las necesitan, se dan cuenta de que sólo necesitan dos de ellas.

[L6] E: Para ti ¿qué es la mediatriz?

[L7] A1: La mediatriz es este pues (…) la recta que pasa el medio de dos puntos.

[L8] E: ¿Por qué trazaste tres?

[L9] A1: Pues para saber (…) [*A1 observa la pantalla de la computadora para ver su construcción*] este (…) el punto medio, aunque ahí pudieron haber sido solamente dos.

[L11] E: Al punto medio ¿a qué te refieres?

[L12] A1: El punto medio (…) bueno se este (…) el punto donde tocan [*se intersecan*] las tres mediatrices y ese mismo punto es el centro del círculo [*circunferencia*].

[L13] E: ¿Qué es la mediatriz?

[L14] A1: La recta que pasa por el punto medio de un (…) segmento.

[L15] E: Para ti ¿qué es el centro del triángulo? [*Esta pregunta no fue del todo afortunada, pues se debió preguntar por la relación que hay entre el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo con el centro de la circunferencia circunscrita a ese triángulo*.]

[L16] A2: Es un punto donde puedes trazar una circunferencia que pase por los tres puntos exactos.

[L17] E: ¿Por qué trazaste tres mediatrices [*interrumpe A2*]?

[L18] A2: ¿Y no dos?

[L9] E: ¿O una?

[L20] A2: Una de plano no tienen mucho chiste, porque nada más sería una mediatriz y no puedo no encontrar yo así. Tracé las tres porque es una forma más certera de encontrar el punto (…) *incentro*, pero se puede hacer con dos mediatrices [*moviendo la construcción*] ya sea la del lado C con la del lado D o igual con la otra.

En este problema, ambos estudiantes encuentran la solución de manera rápida usando Geogebra, pero hay varios aspectos que se deben analizar. El primero de ellos es la relación de los estudiantes con el software Geogebra, pues el problema propuesto y el entrevistador configuran una situación didáctica, como plantea Balacheff (2010).

La acción es desarrollada dentro del software para solucionar el problema, la formulación en las explicaciones de los estudiantes mientras explican lo que van haciendo y la validación en la manera como ambos deben sustentar las acciones hechas en Geogebra.

En el estudiante A2, existe al menos un indicio de que tiene un conocimiento previo que le ayuda a resolver el problema. Aunque este estudiante confunde el concepto de circuncentro con el incentro, se infiere que necesita encontrar un punto donde algunas rectas notables del triángulo se intersecan, y así poder determinar el centro de la circunferencia buscada.

Por el contrario, en la estudiante A1 no se notan o perciben indicios de una sustentación sólida al llevar a cabo cada una de sus acciones. En esta estudiante se puede inferir que, al referirse al circuncentro como *el punto medio del triángulo* a pesar de no tener clara la definición de circuncentro, se deba a que la mediatriz la conoce *como el punto medio donde pasa la recta equidistante entre dos puntos*.

Se sabe, por métodos institucionales, que para encontrar el circuncentro [centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo] se debe localizar la intersección de –al menos– dos mediatrices de los lados de un triángulo. Ambos estudiantes trazaron las tres mediatrices de los lados del triángulo, por ellos formados a partir de los tres puntos dados, pero al ser cuestionados por el entrevistador, acerca de este procedimiento, se dieron cuenta de que sólo necesitaban el trazo de dos de ellas. El estudiante A2 tuvo que mover la construcción que había bosquejado con Geogebra para darse cuenta de ese hecho; sin embargo, la estudiante A1 no necesitó mover su construcción para darse cuenta de ese hecho, sólo fue necesario, para ella, observar su solución.

En general, ambos estudiantes no lograron avanzar más allá de dar una explicación de sus acciones, y no fueron capaces de bosquejar, al menos, ciertos indicios de una prueba como tal; a lo más, ambos estudiantes pueden ser ubicados (de acuerdo con el modelo de Balacheff, 2010) en un empirismo ingenuo al hacer uso de las propiedades del software Geogebra al mover la construcción, al tratar de explicarse por qué su construcción funcionaba.

4.2.2. Problema 2 caso particular 1

Dadas tres rectas, trazar una circunferencia tangente a éstas (Tres rectas concurrentes).

Las tres restas se intersecan mutuamente: los dos estudiantes procedieron trazando un triángulo con las tres rectas.

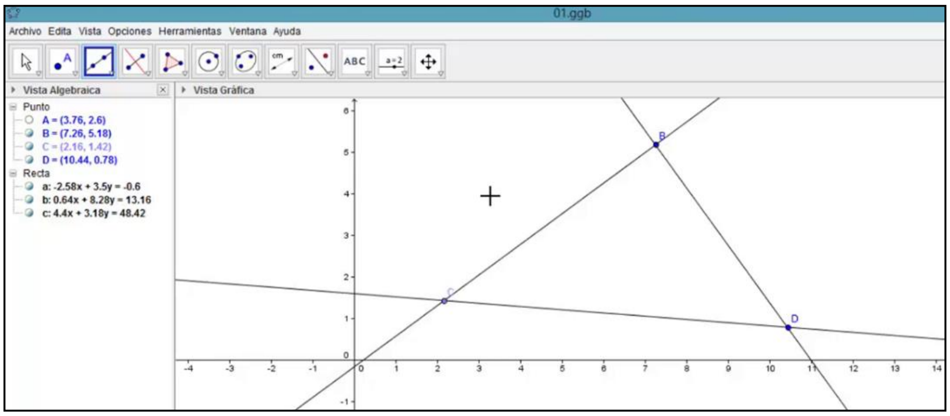

Figura 4.2.2.1. Triángulo trazado por la alumna A1, usando las rectas del Problema 2.

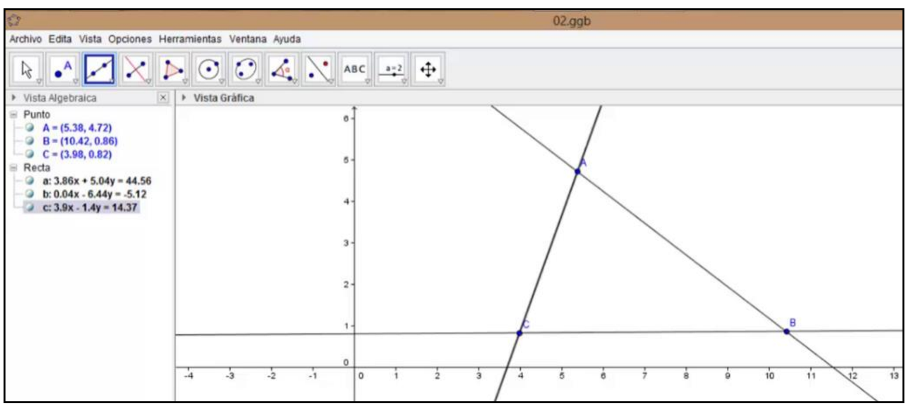

Figura 4.2.2.2. Triángulo trazado por el alumno A2, usando las rectas del Problema 2.

Los dos estudiantes procedieron a trazar bisectrices de los ángulos interiores del triángulo formado al intersecarse las tres rectas dadas de este caso particular.

[L21] A1: […] Sacaríamos las bisectrices ¿no? Ya que son la mitad del ángulo […] [*La alumna A1 traza las tres bisectrices y coloca el punto E en el incentro y el F cerca de la inserción de la bisectriz del ∠CBD al segmento CD (véase Figura 4.2.2.3)*].

[L22] A1: No funciona… […]

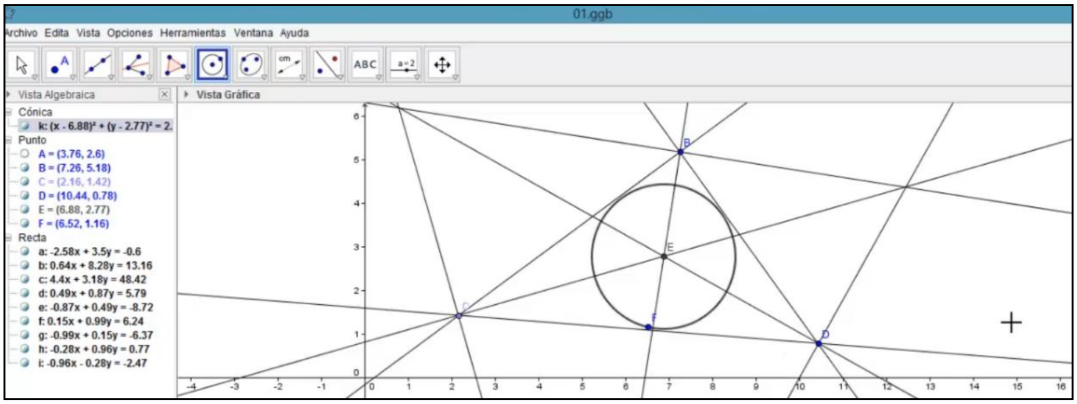

Figura 4.2.2.3. Circunferencia trazada por la alumna A1 con centro *E* y radio *EF* que no es solución del problema.

[L23] A2: […] vamos a usar una bisectriz de la recta [*sic. del ángulo*] en la recta *AC* con la recta *AB* [*se trata del ángulo formado por las restas AC y AB*], *B* con *C* y *AC* con *AB* [A2 *va señalando las rectas que componen los ángulos*] […] [*señala donde se cruzan las tres bisectrices que traza*].

[L24] A2: Ese es el *incentro* [*coloca el punto E en la intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo*][…][*coloca el punto D en la intersección de las intersección de bisectriz de* $\angle BCA$ *con el segmento AD*]

[L25] A2: Vamos a tomar el centro en E y lo vamos a poner aquí [*traza una circunferencia con centro en E y radio ED*] mmm, no es tangente. (Véase Figura 4.2.2.4.)

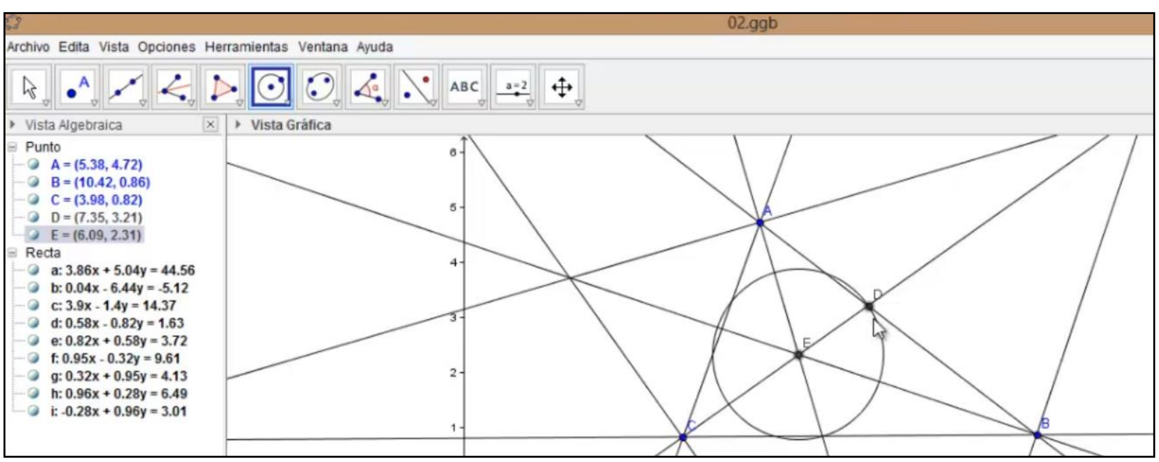

Figura 4.2.2.4. Construcción de una circunferencia que no es tangente, por parte del alumno A2.

Ambos estudiantes fallaron en su primer intento en dar una solución de este caso particular del problema de Apolonio, ya que consideraron que la intersección [entre la circunferencia] con una bisectriz les ayudaba como punto tangente entre la circunferencia con una de las rectas dadas, pero al mover la construcción falló, entonces buscaron encontrar la manera de corregir su error.

[L26] A1: (…) No veo por dónde esté el punto de tangencia.

[L27] E: ¿Cómo debería ser la distancia del punto *E* a los supuestos puntos de tangencia?

[L28] A1: ¿La menor?

[L29] E: ¿Y por dónde pasa?

[L30] A1: ¿Por la recta tangente …?

[L31] E: ¿Tangente a qué punto y adónde?

[L32] A1: Al punto *E* y a los lados del triángulo.

[L33] E: ¡Trázala! [*A1 traza las tres rectas perpendiculares a cada lado del triángulo, que pasan por el incentro, coloca el punto G el cual es la intersección entre la perpendicular y el lado BD y traza la circunferencia con centro en E y radio GE (véase Figura 4.2.2.5)*].

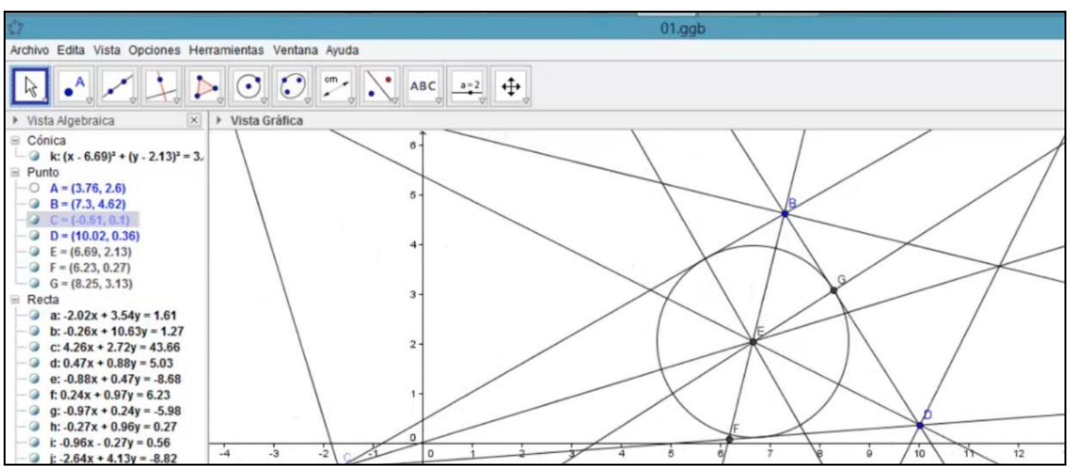

Figura 4.2.2.5. Circunferencia tangente a tres rectas dadas construida por la alumna A1.

[L34] E: ¿No crees necesitar un objeto auxiliar para encontrar el punto de tangencia?

[L35] A2: [*El alumno A2 borra la circunferencia y traza otra de manera provisional, la cual visualmente sí es tangente a las rectas y pregunta*] ¿Dónde está la herramienta para medir? Sólo necesito esa herramienta, necesito encontrar un punto donde todos los puntos midan lo mismo del centro (…) del triángulo.

[L36] A2: Necesito colocar tres puntos para poder medirlos. [*Coloca tres puntos que se mueven sobre los lados del triángulo y usando la herramienta de medida va moviéndolos de tal manera que se encuentren a la misma distancia*] (véase Figura 4.2.2.6).

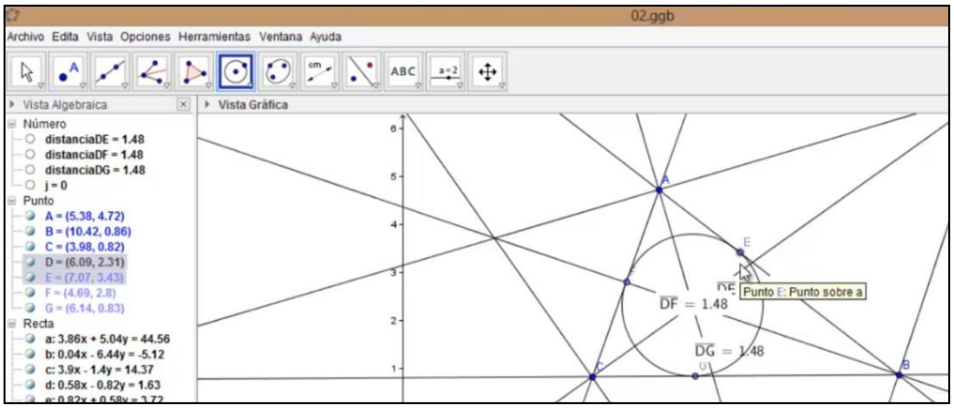

Figura 4.2.2.6. Construcción de una circunferencia con centro en *D* y radio *DE* por parte del alumno A2 y comparando la distancia *DG,* y *DF*.

[L37] A2: [*El alumno A2 mueve los puntos D, F y E y observa la circunferencia*] Mmm, sólo queda tangente cuando el valor de la distancia es menor […]

[L38] E: ¿Hay algún objeto geométrico que te ayude a asegurar la distancia más corta entre el centro y un lado?

[L39] A2: Mmm, claro la recta perpendicular.

[L40] E: ¡Trázala! [*El Alumno A2 traza las tres rectas perpendiculares a cada lado del triángulo que pasan por el incentro y coloca las intersecciones y traza la circunferencia con centro en D y radio DE (véase Figura 4.2.2.7)*].

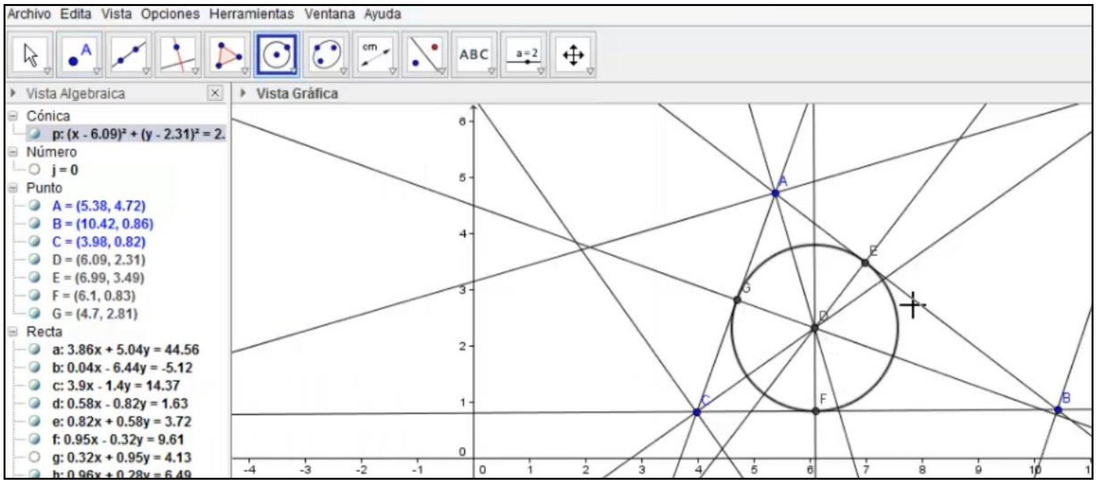

Figura 4.2.2.7. Circunferencia tangente a tres rectas construida por el alumno A2.

Los dos estudiantes lograron trazar una solución, la de la circunferencia inscrita en el triángulo que forman las tres rectas (véanse figuras 4.2.2.5 y 4.2.2.7), pero no lograron trazar las circunferencias externas [al tomar en consideración los tres ángulos externos del triángulo] que también son tangentes a las tres rectas.

Al final, la manera en que lograron encontrar dicha solución del Problema difirió en ambos estudiantes en cuanto a la forma de cómo solucionarlo. La alumna A1 llegó a un momento en que no supo qué hacer, y el entrevistador le hizo una pregunta [L27] que la dirigió hacía la solución, al preguntarle cómo debía ser la distancia del punto de tangencia al incentro prácticamente acertó a decir que era la menor y que la recta perpendicular le servía para dicho propósito. Para A2 fue diferente, cuando se dio cuenta de que la intersección de la bisectriz con el lado del triángulo no le funcionaba, se dispuso a explorar posibilidades, el usar puntos libres sobre los lados del triángulo y medir la distancia. El software Geogebra le ayudó a darse cuenta de que la distancia menor es donde se da el punto de tangencia y es ahí donde se dio cuenta de que la recta tangente le servía para dicho propósito.

La estudiante A1 no mostró control en lo que hizo, mientras que A2 si bien no recordaba el uso de la tangente al momento de llevar a cabo su construcción, si logró darse cuenta que la necesitaba e hizo uso de ella; se observó que tenía conciencia de lo que sabe y usó el software para explorar posibilidades que le dieron la solución.

En este problema, los estudiantes explicaron sus acciones pero no la validez de sus construcciones, no lograron llegar a una prueba como tal; a lo más, se puede inferir que se quedaron en un empirismo ingenuo, pues entendían lo que hacían, y podían verificar que sus procedimientos de construcción eran válidos apoyados en la prueba del arrastre, pero no fueron más allá en sus argumentos de validación de sus construcciones geométricas al usar Geogebra.

A manera de aclaración, no fueron abordados en esta investigación los demás casos posibles cuando se tienen tres rectas; por ejemplo, cuando dos de ellas son paralelas y la otra es transversal a éstas. La justificación de esta afirmación fue dada en el Capítulo 3 de esta tesis.

4.2.3. Problema 3: caso particular 1

Dados dos puntos en el plano y una recta, trazar una circunferencia que contenga a esos dos puntos y que sea tangente a la recta, la recta que pasa por los dos puntos dados en el plano es paralela a la recta dada.

Este problema se dividió en dos partes: primero se propuso y discutió una versión más simple de éste, para que los estudiantes pudieran explorar más propiedades acerca de la mediatriz: Dados dos puntos, trazar la circunferencia que pase por ellos.

[L41] A1: Colocamos dos puntos así [*coloca dos puntos sobre una recta*] […], pues yo creo que (…) pondríamos primero la (…) mediatriz de *A* y *B*, y este sería el punto medio de nuestro círculo [*circunferencia*] […] (véase Figura 4.2.3.1).

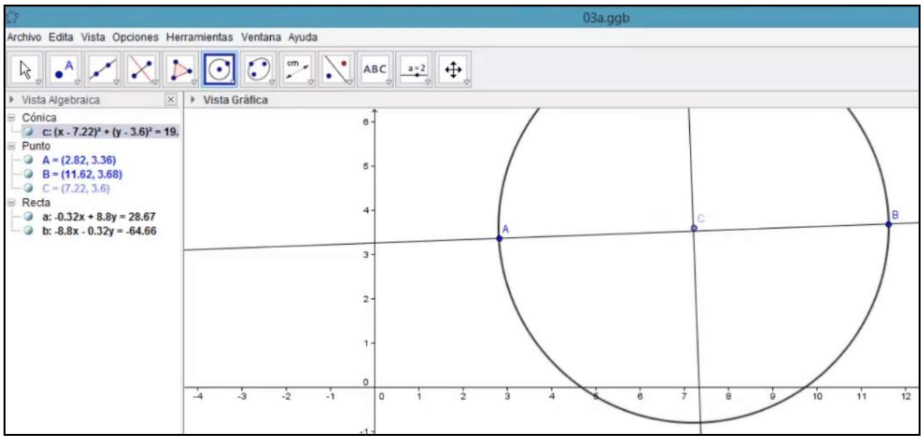

Figura 4.2.3.1. Circunferencia que pasa por los puntos *A* y *B* trazada por la alumna A1.

[L42] E: ¿Puedes trazar otra circunferencia que también pase por *A* y *B*, pero que no tenga centro C?

[L43] A1: Podría ser el centro en todo lo que es (…) la mediatriz. [*traza la mediatriz del segmento AB y coloca el punto D en la mediatriz y traza la circunferencia con centro en D y radio DA*] (véase Figura 4.2.3.2).

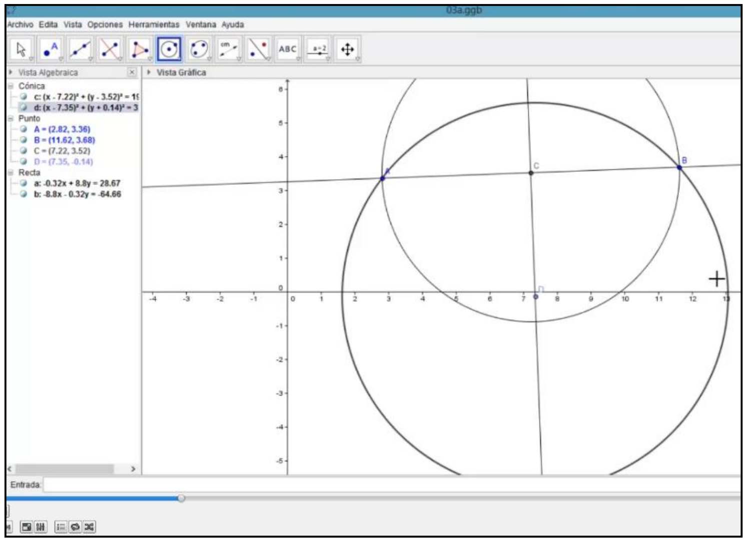

Figura 4.2.3.2. Circunferencias trazadas por la alumna A1 con centro en la mediatriz de *AB.*

[L44] A2: Voy a utilizar la mediatriz para encontrar el centro de *A* y *B* y ese es el centro de mi círculo [*circunferencia*], y el radio es del punto *A* al punto *C*. (Véase Figura 4.2.3.3.)

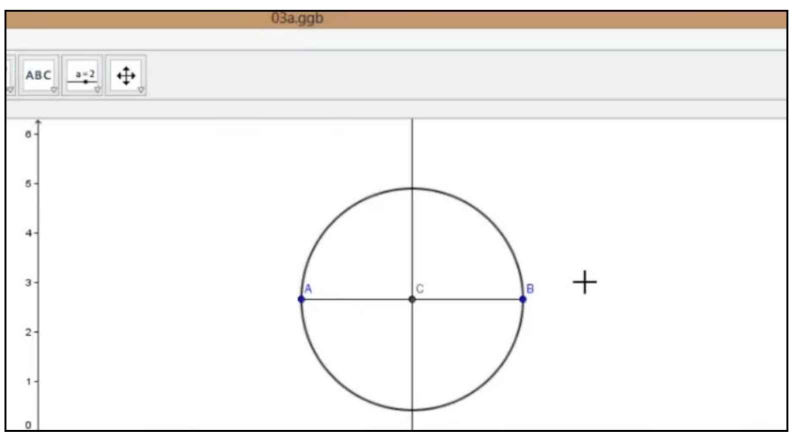

Figura 4.2.3.3. Circunferencia que pasa por los puntos *A* y *B* trazada por el alumno A2.

[L45] E: ¿Puedes trazar otra circunferencia que también pase por *A* y *B*, pero que no tenga centro *C*?

[L46] A2: Sí [*traza una circunferencia con centro en la intersección de la circunferencia y la mediatriz la cual llama D y radio DA*].

[L47] E: ¿Puedes trazar otra circunferencia que también pase por *A* y *B*, pero que no tenga centro en *C* ni ninguna intersección de las circunferencias anteriores con la mediatriz?

[L48] A2: Sí [*traza una circunferencia con centro un punto diferente de cualquier intersección, pero que pasa por la mediatriz de A y B el cual es llamado E y de radio EA*] (véase Figura 4.2.3.4).

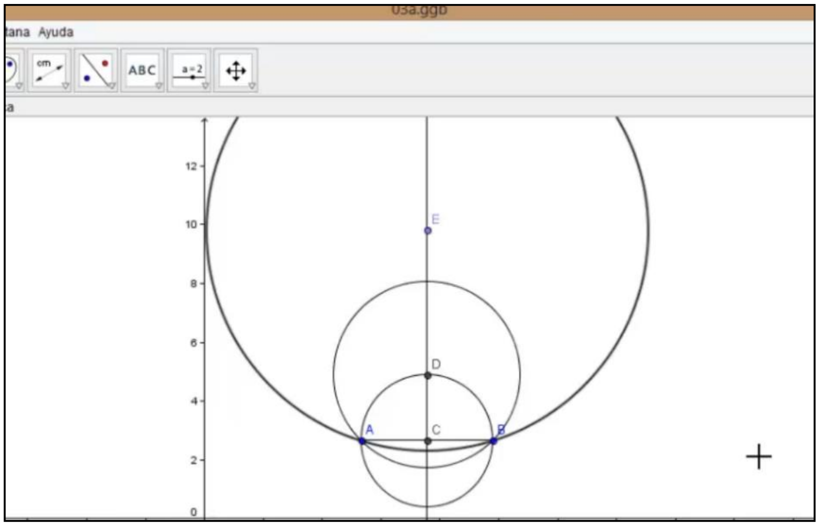

Figura 4.2.3.4. Circunferencias trazadas por el alumno A2 que pasan por los puntos *A* y *B* y tienen como centro la mediatriz de *AB*.

La alumna A1 se dio cuenta rápidamente de que podía colocar el centro en cualquier punto sobre la mediatriz de *AB* [L43], lo cual no sucedió con el alumno A2 quien tardó en darse cuenta de ese hecho por lo que trazó más circunferencias (véase Figura 4.2.3.4) hasta que se le pidió que trazara una donde el centro de la circunferencia no se encontrara en las intersecciones de la mediatriz con las circunferencias por él trazadas [L47].

Para el Problema 3 ya completo, estas fueron las dos soluciones:

[L49] A1: Podríamos sacar la mediatriz de *A* a *B* y luego (…) [*traza la mediatriz de AB y coloca la intersección de dicha mediatriz a la recta dada siendo el punto C*] mmm.

[L50] E: ¿Y luego?

[L51] A1: Podríamos sacar otra mediatriz que sería del punto *C* al punto *B* y otra que sería de *A* al *C* [*traza las dos mediatrices de CB y de AC; y coloca el punto donde las tres mediatrices de AB, CB y AC se cruzan, siendo el punto J y traza una circunferencia con centro en J y radio JC*] (véase Figura 4.2.3.5).

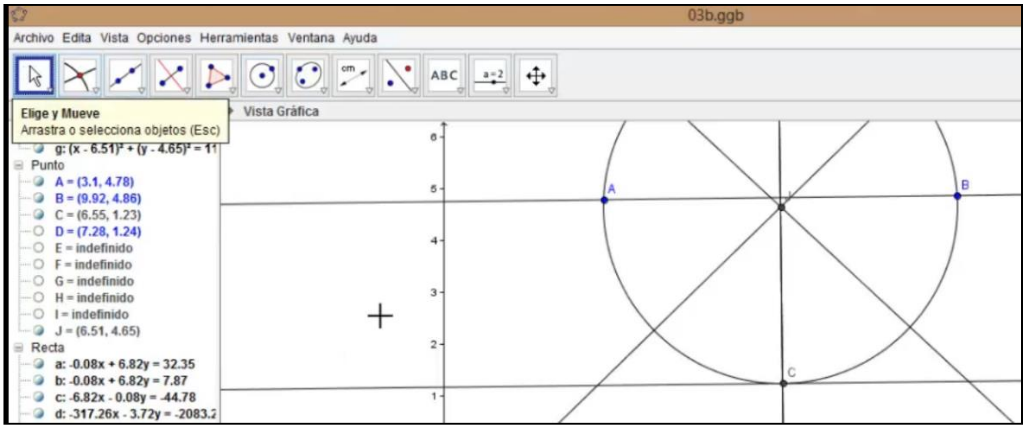

Figura 4.2.3.5. Construcción de una circunferencia que pasa por dos puntos dados y una recta tangente a la recta que pasa por dichos puntos propuesta por la alumna A1.

[L52] E: ¿Se parece a algún problema de los que has hecho?

[L53] A1: Sí, al primero, ya que quedan tres puntos con el primero.

[L54] E: ¿Por qué trazar la mediatriz de *AB*?

[L55] A1: Porque, pues también es el punto medio de *AB*, todos los puntos chocarían (…) en la mediatriz serían punto medio y así estaríamos asegurando que tocarán a *A* y a *B*.

[L56] E: ¿Por qué trazar las mediatrices de *BC* y de *CB*?

[L57] A1: Porque son los puntos medios de cada uno y al tocarse las mediatrices tendríamos un punto medio general de los tres puntos […] ese punto medio general es el centro del círculo [*circunferencia*].

[L58] A2: [*Después de varios intentos de resolver el problema, el alumno A2 traza la mediatriz del segmento AB colocando la intersección de la mediatriz con la recta dada y el punto en cuestión es llamado D, y con ese punto forma el triángulo ABD*] (véase Figura 4.2.3.6).

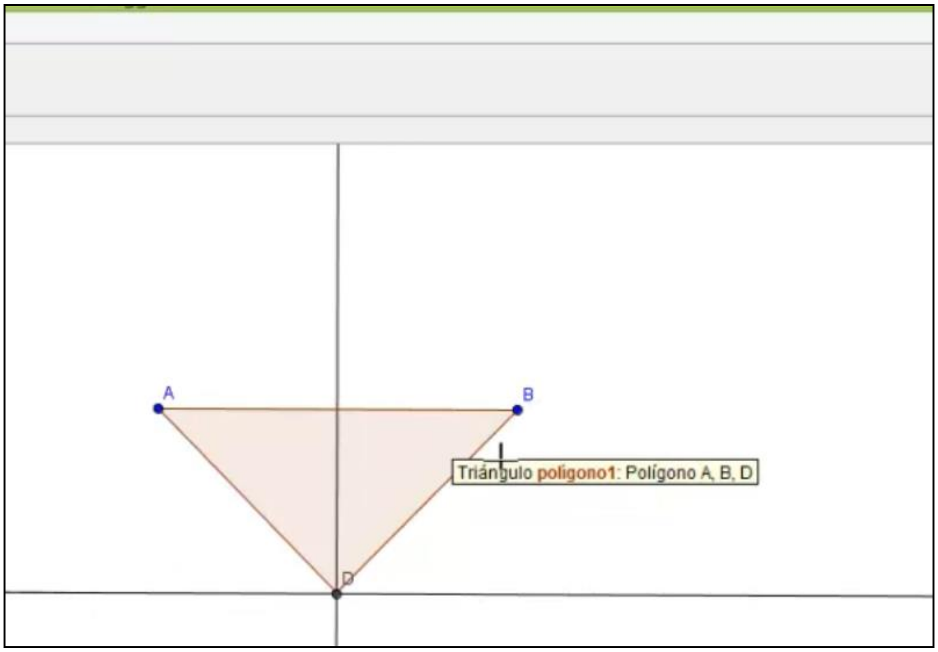

Figura 4.2.3.6. Triángulo construido por el alumno A2 para poder solucionar el Problema 3.

[L59] A2: […] ¿sirve que trace la mediatriz de *DB*?

[L60] E: Mmmmm, Inténtalo […] [*El alumno A2 traza las mediatrices de DB y de AD y coloca el punto E en donde se intersectan todas las mediatrices de triángulo ABD y traza la circunferencia con centro en E y radio ED*] (véase Figura 4.2.3.7).

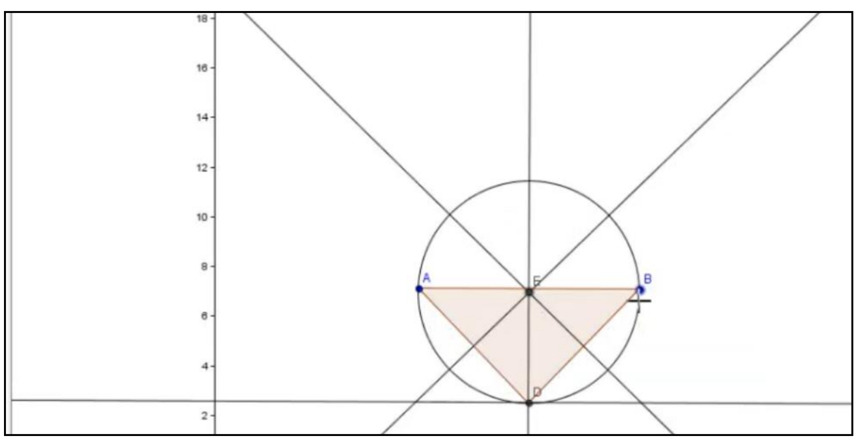

Figura 4.2.3.7. Solución del Problema 3, bosquejada por el alumno A2.

En este problema, la estudiante A1 entendió que la mediatriz de un segmento le permitía poder trazar todas los centros de las circunferencias que deseara, y que pasaran por los extremos de un segmento [L53], con esa información logró solucionar el problema general; inclusive, teniendo deficiencias en conocimientos previos. Ella explicó, a pesar de dichas carencias, que: la intersección de las mediatrices, era el centro de la circunferencia que deseaba construir. Esta estudiante tuvo control en la solución de este problema, y el Geogebra le ayudó a tenerlo, incluso en contra de sus deficiencias.

Respecto del estudiante A2, éste no logró comprender que este problema requería del manejo del concepto de mediatriz; el cual debió utilizar y darse cuenta de que era la recta que le ayudaba a solucionarlo. Aun sin darse cuenta, este estudiante usó el concepto de mediatriz de manera fortuita, pero no tuvo conciencia de lo que hacía al momento de estarlo utilizando.

En este problema, la alumna A1 logró explicar lo que hacía y por qué funcionaban sus acciones. Aunque no llegó a una prueba intelectual del tipo de experiencia mental, sí hay indicios en esta estudiante de que logró entender sus acciones y cómo formular maneras de solucionar el problema en cuestión.

4.2.4. Problema 3: caso particular 3

Dados dos puntos en el plano y una recta, trazar una circunferencia que contenga a esos dos puntos y que sea tangente a la recta, uno de los dos puntos dados está contenido en la recta dada y el otro punto es exterior a ella.

[L61] A1: Podíamos empezar por la mediatriz de *AB* […]

[L62] A1: Y si trazo una perpendicular ¿funcionaría?

[L63] E: Probablemente.

[L64] A1: Del punto *B* a la recta […] y ya después usamos la intersección entre la mediatriz y la perpendicular. (Véase Figura 4.2.4.1.)

[L65] E: ¿Por qué trazaste la mediatriz de *AB*?

[L66] A1: Porque es la línea que parte en medio entre dos puntos.

[L67] E: ¿Por qué trazaste la perpendicular?

[L68] A1: Mmm, porque es por donde pasa la distancia más corta a E.

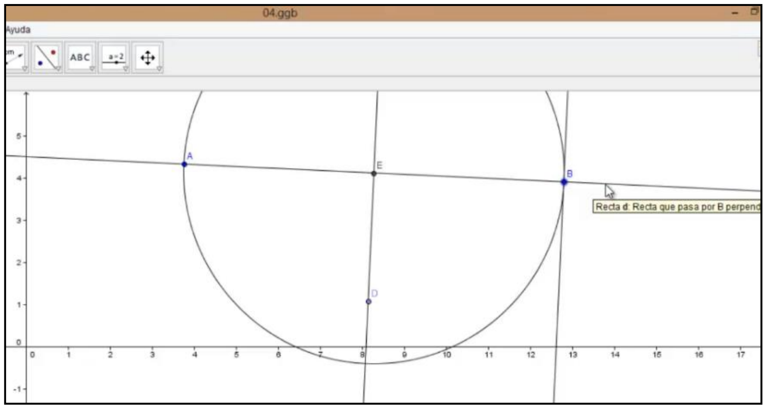

Figura 4.2.4.1. Circunferencia tangente a una recta dada que pasa por dos puntos dados construida por la alumna A1.

[L69] A2: Trazamos una perpendicular al punto *A* con la rectas […]

[L70] A2: Ahora voy a trazar la mediatriz a *AB*. [*En el punto D que es la intersección de la recta perpendicular que pasa por el punto A y la mediatriz de AB coloca el centro de una circunferencia con radio DB*]

[L71] E: ¿Por qué funciona la construcción?

[L72] A2: Funciona porque tiene el mismo valor (…) porque la distancia de *A* y *D* es la misma de *D* y *B* (…)

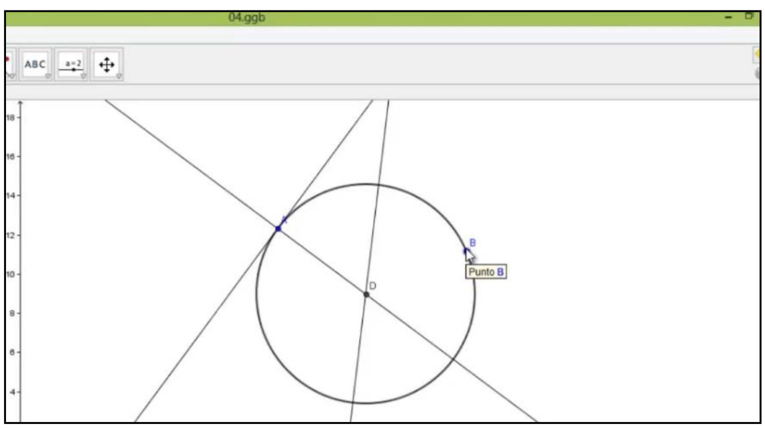

Figura 4.2.4.2. Circunferencia tangente a una recta dada que pasa por dos puntos dados construida por el alumno A2.

Ambos estudiantes solucionaron el problema, pero hay diferencias en el control que ambos manejaron. Por ejemplo, la alumna A1 sí entendió el concepto de mediatriz e incluso le dio una definición propia *porque es la línea que parte en medio entre dos puntos* [L66].

Sus acciones respaldaron su formulación [afirmación], la cual al parecer carece de rigor; probablemente, por la falta de conocimientos previos adecuados al respecto. Este tipo de comportamiento (de esta estudiante) fue evidenciado en la argumentación en cuanto a la solución de los problemas anteriores; sin embargo, en ella sí hubo coherencia en el ciclo acción-formulación-validación postulado por Balacheff (2010).

No sucedió así con el alumno A2 quien solucionó el problema, pero sus razonamientos fueron endebles [L72]. No hubo evidencia de que conociera la razón de porqué la construcción funcionó, ni porqué necesitaba usar la perpendicular.

AL igual que en el problema anterior, en la estudiante A1, sí hay inicios de prueba intelectual, pero solo eso.

4.2.5. Problema 4: caso particular 1

Dadas dos rectas y un punto, trazar una circunferencia tangente a esas dos rectas y que contenga al punto dado, las dos rectas se intersecan en un punto, formando un ángulo y el punto dado pertenece a una de esas rectas (lado del ángulo).

La alumna A1 solucionó con facilidad el problema, incluso encontró todas las soluciones posibles:

[L73] A1: […] Tomo las bisectrices y ya, después (…) bueno tomo una perpendicular de *E* a la recta y ya después de aquí podemos hacer esto [*traza las bisectrices de las rectas dadas, después traza la recta perpendicular del punto E a una de las rectas, y coloca el punto F en la intersección de la recta perpendicular a la bisectriz, traza una circunferencia de radio FE con centro en F*].

[L74] E: Funciona la construcción (…) primero ¿por qué trazar las bisectrices?

[L75] A1: Porque la bisectriz parte al ángulo en dos partes iguales y esto (…) y sería otra vez esa línea (…) todos los puntos que hay en la bisectriz este (…) sería todos los puntos medios que parte al ángulo en dos partes iguales.

[L76] E: ¿Por qué la perpendicular?

[L77] A1: Porque con esto sacaríamos la distancia menor de (…) la recta, la bisectriz, en este caso el centro del círculo [*circunferencia*].

[L78] E: ¿Podrías trazar otra circunferencia que sea tangente? [*A esas dos mismas rectas y que pase por el punto dado*.]

[L79] A1: Qué sería [*traza la otra circunferencia tangente a las dos rectas y que pasa por el punto E, colocando el centro en la intersección de la recta perpendicular y la otra bisectriz de radio GE*] (véase Figura 4.2.5.1).

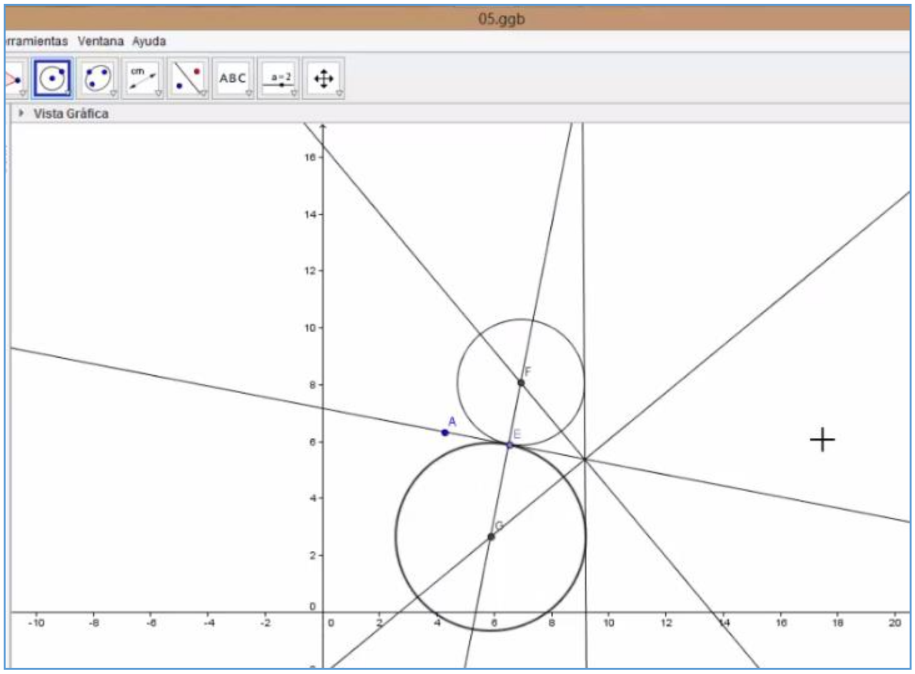

Figura 4.2.5.1. Circunferencias tangentes a dos rectas dadas y el punto *E* construidas por la alumna A1.

El estudiante A2 no logró encontrar la solución de este problema:

[L80] A2: [*El estudiante A2 rápidamente traza dos puntos E y D sobre cada lado del ángulo mide la distancia de dichos puntos a la bisectriz del ángulo y cuando es igual los deja, traza el segmento ED y en el punto medio traza la circunferencia de radio FD*] (véase Figura 4.2.5.2).

[L81] A2: Mmm, no es tangente.

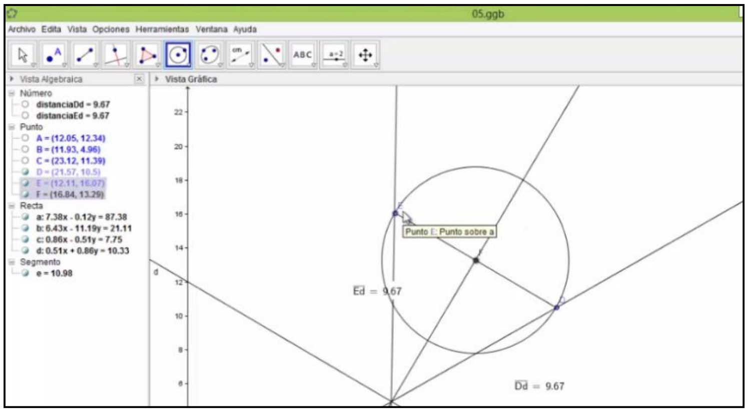

Figura 4.2.5.2. Intento del estudiante A2 por trazar una circunferencia tangente a dos rectas que pasan por un punto dado en un lado de un ángulo.

[L82] A2: [*El estudiante A2 no logró solucionar el problema después de 15 minutos, sólo hasta que se le mencionó que debía trazar una recta perpendicular; lo hizo, pero sin entender el porqué*].

En este problema, la alumna A1 encontró las dos soluciones [L77] y siguiendo con su razonamiento personal de *puntos medios* [L73] lo usó para trazar la bisectriz; lo que le permitió, junto con el trazo de la recta perpendicular, encontrar las dos soluciones posibles. Esta estudiante supo qué hacer con el Geogebra, formuló con su lenguaje caminos para encontrar la solución, y validó lo que iba haciendo. Es claro que se configuró una concepción, como lo plantea Balacheff (2010), desarrolló su propia definición de mediatriz aunque no la explicó de manera precisa, pero le funcionó. Además, logró manejar la definición de recta perpendicular que le sirvió para resolver los problemas, aunque es evidente que acarrea carencias de conocimientos matemáticos previos que le impidieron tener un lenguaje matemático más preciso. Las argumentaciones de la estudiante A1 indican que sí fue capaz de explicar e incluso mostrar el por qué funcionaba su construcción. Al igual que en los problemas anteriores, en esta estudiante claramente hay indicios de prueba intelectual, aunque no fue capaz de dar una prueba matemática, como tal, muy probablemente por su falta de conocimientos previos sólidos, desde el punto de vista matemático.

Por el contrario, el estudiante A2 no logró encontrar solución alguna de este problema. Si bien es cierto que conoce el software Geogebra no logró formular maneras claras para encontrar soluciones posibles de los problemas de construcción propuestos. Al igual que la estudiante A1, este alumno posee carencias de conocimiento matemático. Sin embargo, a diferencia de ella, él no alcanzó a formular [o bien utilizar] un lenguaje matemático pertinente de modo que pudiera solucionar este problema (en los problemas previos también tuvo los mismos obstáculos).

4.3. Discusión de resultados: recapitulación de los procesos de solución de los estudiantes desde el punto de vista de la teoría de Balacheff (2010)

4.3.1. Desde el punto de vista del uso de los conocimientos previos

4.3.1.1 Problema 1

En este problema es necesario el uso del concepto de mediatriz y como se ve en [L3 y L5] es claro que los estudiantes tuvieron un manejo deficiente de tal definición. Sin embargo, este problema en particular les fue familiar, ya que lo habían resuelto previamente en su curso de matemáticas II (véase Anexo), aunque sin el uso de la tecnología. Por ello, se puede inferir que más que solucionar el problema, ambos estudiantes reprodujeron lo que habían hecho previamente en clases (véase Capítulo 3, Sección 3).

4.3.1.2 Problema 2: caso particular 1

Al igual que el problema anterior, los dos estudiantes no tuvieron un manejo eficiente de la definición de bisectriz de un cierto ángulo, así como de las condiciones impuestas para que dos rectas sean perpendiculares. El uso deficiente de estos conceptos [de la bisectriz y de perpendicularidad] les impuso dificultades para poder solucionar el problema; sin embargo, también fue uno que solucionaron en su curso de matemáticas II en ambiente de lápiz-y-papel. El hecho de que este problema les haya causado más dificultades que el primero puede deberse al hecho de que la construcción geométrica solicitada necesita del uso de dos definiciones; sobre todo, de saber explicar el porqué funcionan la construyen solicitada, en caso de que la hubieran logrado satisfactoriamente.

4.3.1.3 Problema 3: caso particular 1

En este problema los estudiantes volvieron a retomar la definición de mediatriz, pero debido a la manera en que éste fue propuesto [por parte del investigador] al subdividirlo en dos problemas, la alumna A1 logró construir una definición que le permitió usar el concepto de mediatriz [L55], tanto en su construcción como en su justificación. Más allá de ser una recta que pasa por el punto medio de un segmento [tal como fue usada por la estudiante A1; definición no rigurosa desde el punto de vista matemático], es evidente que al ver como esta estudiante usó el Geogebra, ella se acercaba paulatinamente a una definición un poco más sólida del concepto de mediatriz.

Por el contrario, el alumno A2 no fue capaz de acercarse a una definición de mediatriz, lo que ocasionó que no pudiera lograr la construcción solicitada. El desempeño de estos dos estudiantes, en cuanto al éxito en la solución de este problema, evidencia el papel fundamental que tienen los conocimientos previos de estos, aun si tales conocimientos fueron aprendidos en un ambiente distinto del tecnológico. Ello no significa que para poder avanzar, en cuanto construcciones geométricas solicitadas con un software de geometría dinámica, el estudiante deba tener conocimientos previos sólidos, sino más bien, sí es necesario tener una base mínima de conocimientos que le permitan al estudiante poder darse cuenta de por qué sus procedimientos usados para tal o cual construcción funcionan.

4.3.1.4 Problema 3: caso particular 3

Ocurre lo mismo que el problema anterior, la estudiante A1 usó una definición deficiente de mediatriz: "*es la línea que parte en medio entre dos puntos*" [L66]. Sin embargo, sus acciones, para lograr la construcción solicitada, usando Geogebra, fueron eficientes y coherentes para explicar la solución que construyó para este problema.

4.3.1.5 Problema 4: caso particular 1

En este problema, la estudiante A1 logró hacer las dos construcciones posibles debido al uso de una definición de bisectriz, siguiendo con su razonamiento personal de *puntos medios* [L73]. Además, ella mostró también [durante la justificación de procedimiento de construcción solicitada] un conocimiento, aunque no tan sólido, sobre las condiciones de perpendicularidad. De sus tipos de razonamientos, se infiere que esta estudiante sí logró *construir* definiciones de conceptos geométricos, mientras solucionaba los problemas propuestos en esta investigación. El avance logrado por este estudiante se ve plasmado en el último problema, ya que lo resolvió con solvencia.

En cambio, el estudiante A2 se quedó con sus definiciones iniciales, un tanto *lejos* de las definiciones conceptuales formales reconocidas institucionalmente. Así, cuando él intentaba construir las figuras geométricas solicitadas en las actividades no tuvo éxito.

4.3.2. Desde el punto de vista del uso del software Geogebra

El uso del software Geogebra para solucionar estos problemas buscaba –junto con los demás elementos, como: el estudiante, el entrevistador y los problemas– configurar una situación a-didáctica para ambos estudiantes. Para la estudiante A1, con frecuencia, se dio esta situación; sobre todo, a partir del Problema 3 caso 1 [L53] cuando movió y observó las construcciones en el Geogebra. En su proceso de construcción y de justificación de ésta, se nota una toma conciencia de su parte en cuanto al buen uso de una definición de mediatriz. La definición de mediatriz que ella adoptó surgió como producto de la interacción entre ella, el software y el problema planteado. Tal definición, aun sin ser del todo rigurosa, si le ayudó a solucionar el problema y, posteriormente, ocurrió lo mismo para los demás problemas a tal grado de poder encontrar las soluciones posibles del Problema 4, caso particular 1.

Para el estudiante A2 no ocurrió lo mismo que en la estudiante A1. Si bien este estudiante sí logró solucionar todos los problemas excepto el último, el uso del software Geogebra no le ayudó a lograr mejores definiciones de mediatriz, bisectriz que le permitieran, no sólo lograr con éxito las construcciones solicitadas, sino de poder dar justificaciones de porqué ellas funcionaban. En este estudiante, el software de Geogebra no sirvió de catalizador [en el sentido positivo] que le permitiera empezar a construir conceptos cercanos de las construcciones solicitadas. Conceptos como el de: bisectriz de un ángulo, la mediatriz de un segmento, así como el de perpendicularidad, fueron difíciles de lograr para este estudiante. Al final todo el proceso de toma de datos, este estudiante no tuvo conciencia de lo que iba haciendo en el software, cuando intentaba construir la figura geométrica solicitada.

4.3.3. Inferencias respecto de los resultados

De los resultados obtenidos, es posible inferir que los estudiantes no poseían definiciones, aunque no fueran rigurosas, desde el punto de vista institucional, de los conceptos involucrados en los problemas. Para poder solucionar los problemas era necesario que ellos tuvieran los conocimientos mínimos necesarios que les hubieran permitido llevar a cabo las acciones para llegar a solución. Existe evidencia de que tanto el software como las Actividades [problemas] pueden ayudar a que los estudiantes construyan definiciones geométricas que les permitan construir soluciones para estos problemas, como se ve en el caso de la estudiante A1.

Para posteriores trabajos de investigación sería recomendable diseñar Actividades previas que ayuden a los estudiantes expresamente a lograr definiciones, aunque no del todo rigurosas de: mediatriz, bisectriz, condiciones de perpendicularidad, ya sea en ambiente de lápiz-y-papel, o bien con el uso del software Geogebra. Es probable que, de este modo, se evitarían los obstáculos que conllevan el uso de conocimientos previos, y poder solucionar problemas de igual o mayor complejidad como los que esta tesis expuso.

La afirmación precedente lleva a varias preguntas; que podrían ser abordadas en futuras investigaciones como la aquí abordada; por ejemplo, ¿cómo lograr que los estudiantes den sentido a las construcciones geométricas logradas en ambiente dinámico, si no poseen definiciones mínimas de los conceptos involucrados en ellas? Partiendo del hecho de que los estudiantes poseen conocimientos mínimos de conceptos, involucrados en las construcciones geométricas, estos [los conceptos], ¿adquieren solidez en ambientes dinámicos? Estas y otras preguntas quedan como reflexión para quien trabaje o esté interesado en responder las preguntas que surgen cuando se trabaja en ambientes dinámicos.

En el siguiente capítulo de esta tesis son discutidas las conclusiones de este trabajo, tomando en cuenta los objetivos de éste, así como las preguntas de investigación.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

5.1. Introducción

En este capítulo se bosquejadas y comentadas las conclusiones de este trabajo de investigación, y se dan las respuestas a las preguntas que sirvieron de guía durante todo el proceso, desde la planificación del trabajo hasta la conclusión de éste; así como a los objetivos que se plantearon. Además, aquí mismo, se bosquejan algunas reflexiones que pudieran ser utilizadas en investigaciones futuras sobre la temática discutida en este trabajo, y que serían de utilidad para todos aquellos que estén interesados en continuar con este tipo de investigaciones.

5.2. Acerca del objetivo de investigación

El objetivo de esta investigación pensado desde el inicio fue analizar cómo los estudiantes justifican sus acciones al solucionar casos particulares del problema clásico de Apolonio, usando el software de geometría dinámica (SGD) Geogebra.

En este trabajo se observó que los estudiantes, al intentar solucionar los problemas con el software Geogebra lograron explicar las acciones que hacían –mucho más coherentes en la estudiante A1, comparadas con aquellas llevadas a cabo por el estudiante A2, aquí analizado–. El hecho de que ambos estudiantes podían ver dinámicamente, en la pantalla de la computadora, al hacer uso del software, durante las construcciones geométricas solicitadas, ayudó a que ellos tuvieran ciertos indicios sobre la construcción de conceptos, al momento de tratar de explicar el porqué sus construcciones funcionaban. El software mismo, además de que les permitía verificar que las construcciones eran correctas (con la prueba del arrastre) les permitió llegar a la solución; aunque no siempre de manera inmediata; sobre todo, el estudiante A2.

Para los dos estudiantes, participantes en este estudio, no fue sencillo poder explicar el proceso usado por ellos acerca de cómo lograban llegar a las construcciones geométricas solicitadas [problemas propuestos], sorteando incluso el hecho de que sus conocimientos previos eran deficientes o débiles, desde el punto de vista matemático, al momento de abordar los problemas; lo que impidió que ellos pudieran llegar a soluciones correctas. De hecho, *adoptando o adaptando* nuevas definiciones, concernientes a los conceptos geométricos surgidos en los trazos logrados, –como sucedió con la estudiante A1–, fueron capaces [aunque no siempre sucedió así en ambos estudiantes] de superar sus definiciones iniciales; por ejemplo, de mediatriz y de bisectriz, un tanto deficientes o confusas para ellos, y que les permitía solucionar los últimos tres problemas propuestos a los estudiantes en este trabajo de investigación.

Tal como fue discutido en el capítulo precedente de esta tesis, el software Geogebra fue una herramienta más útil para la alumna A1 que para el alumno A2, en el sentido de que no sólo, con la ayuda de esta herramienta, fue capaz de encontrar las dos soluciones posibles del último problema propuesto y discutido por Schoenfeld (1985) en su libro *Mathematical Problem Solving*, sino que ésta [la tecnología] le ayudó a generar explicaciones plausibles, y que justificaban los trazos por ella llevados a cabo. Y que, finalmente, la llevaron a dar las soluciones correctas de ese problema. En esta estudiante [A1] es evidente que el software Geogebra le sirvió como *catalizador* positivo para poder entender [dar sentido de] los conceptos subyacentes en las justificaciones de sus trazos.

Atendiendo al marco conceptual de Balacheff (2010), adoptado en esta investigación, es posible darse cuenta de que al hacer uso de herramientas tecnológicas como medios de trabajo en la resolución de problemas, quien las use con este fin, debe ser capaz de llevar a cabo acciones reflexivas con esa herramienta, de modo que éstas [las acciones] logren darle sentido a las soluciones encontradas de los problemas. Así, el uso de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas debe ser *mediador* en la adquisición del conocimiento matemático, en el sentido de que las acciones llevadas con ella deben conducir al sentido [significado] de aquello que se busca.

La reflexión precedente conduce al hecho de que el software, como el Geogebra u otros similares, por él mismo no logra hacer que todos los estudiantes solucionen los problemas propuestos; se requiere un dominio, aunque no tan eficiente, de conocimientos previos relacionados con los problemas que se desean solucionar con las herramientas tecnológicas. Los resultados obtenidos en esta investigación confirman la afirmación precedente. Las reflexiones producidas por los resultados logrados en el presente trabajo de investigación, no terminan aquí; éstas son retomadas en las respuestas dadas a las preguntas de que guiaron el presente trabajo.

5.3. Respuestas a las preguntas de investigación

A) ¿Qué indicios de demostración (prueba matemática) muestran los estudiantes al usar Geogebra en la solución de problemas geométricos?

La primera prueba matemática que los estudiantes lograron al hacer uso del software Geogebra es del tipo *pragmática* (Balacheff, 2010). En este tipo de prueba, los estudiantes exhibieron lo que hicieron como, por ejemplo, en el Problema 1 donde, tanto A1 como A2, pudieron mostrar que el uso de la mediatriz les permitió solucionar el problema, y que con la *prueba del arrastre* fueron capaces de verificar que la solución encontrada por ellos era la correcta.

Sin embargo, los resultados de la presente investigación muestran indicios respecto a que la estudiante A1 estuvo cerca de *pruebas intelectuales* más sólidas del tipo de *experiencia mental* (Balacheff, 2010). Esta estudiante logró *interiorizar* el conocimiento suficiente; que le permitió dar sentido a sus construcciones logradas con el uso de Geogebra. En este sentido, la estudiante A1 pudo *adoptar* o *adaptar* nuevas definiciones de bisectriz, mediatriz y perpendicularidad que le permiten solucionar los problemas. El uso de los verbos: *adoptar* o *adaptar* se refiere a que aún el conocimiento de esos conceptos, para la estudiante A1, no era lo suficientemente sólido, desde el punto de vista institucional; sin embargo, la interpretación y uso que ella dio a esos conceptos fueron los correctos.

B) ¿Qué tipo de acciones hacen los estudiantes al tratar de solucionar problemas geométricos usando Geogebra?

Las acciones más comunes que hicieron fue explorar, como: medir distancias o ver relaciones entre los objetos geométricos; ese tipo de exploraciones permitió a ambos estudiantes observar, de manera directa, posibles soluciones de los problemas propuestos. Un ejemplo de estas exploraciones fue lo mostrado por el estudiante A2 en el Problema 2, caso particular 1 (véase Figura 4.2.2.6). En ella, este estudiante usó la herramienta de medida de distancia para tratar de visualizar cómo podría encontrar un punto de tangencia entre las rectas dadas con la circunferencia buscada. Este mismo estudiante también llevó a cabo exploraciones similares al Problema 2, cuando trató de resolver el Problema 4, caso particular 1 (véase Figura 4.2.5.2). En sus intentos por solucionar este problema, el estudiante A2 usó herramienta [software Geogebra] para medir la distancia entre dos puntos, así como la distancia entre un punto y una recta (A2 trató de verificar propiedades de la bisectriz de un ángulo).

El comportamiento de la estudiante A1, en términos de sus acciones con el software, fue un tanto diferente del estudiante A2, pues cuando ella tuvo claro lo que tenía que hacer (control del entorno, Balacheff, 2010), en casi todos los problemas propuestos, trató de usar herramientas específicas del software, como el trazo de mediatrices de segmentos de recta, bisectrices de ángulos, rectas perpendiculares, entre otros, y vaciló lo menos posible para encontrar la solución de los problemas propuestos por el investigador.

C) ¿Cómo validan los estudiantes las soluciones de problemas geométricos al usar software de geometría dinámica, como Geogebra?

La validación más común que produjeron los estudiantes fue la prueba del arrastre, la cual les permitió saber que si las relaciones entre los objetos geométricos eran correctas; este tipo de prueba se quedó, en ambos estudiantes, en prueba pragmática (Balacheff, 2010). Sin embargo, la estudiante A1 logró más avances, respecto de la prueba, que el estudiante A2, pues ella fue capaz de dar validaciones de sus construcciones mucho más ricas y abundante, comparadas con las del estudiante A2. La estudiante A1 logró explicar sus acciones a partir de la *adopción* o *adaptación* de definiciones nuevas de los conceptos involucrados en las construcciones geométricas por ellas logradas –como anteriormente fue discutido en este mismo capítulo–. Esta forma de uso del software le dio control, en el sentido de Schoelfeld (1985) sobre sus acciones llevadas a cabo con el software, cuyo propósito era resolver los problemas geométricos planteados.

5.3. Reflexiones finales

Es claro que uno de los principales obstáculos que los estudiantes tuvieron para lograr soluciones correctas, en todos los problemas aquí propuestos, está en el hecho de que no tenían los conocimientos previos necesarios, aunque sus cursos precedentes a la presente investigación indicaban lo contrario (véase Anexo).

Por otro lado, también es claro que los estudiantes no estaban acostumbrados a actividades que involucren la prueba matemática, como tal. El primer curso donde los estudiantes se enfrentan a la prueba matemática es en el segundo semestre de la institución. De manera informal, se sabe que en actividades previas al presente trabajo, habían estado involucrados en una formación académica relacionada con la prueba matemática. El hecho de que en cursos de matemáticas de bachillerato no se contemple la discusión sobre los primeros indicios de una prueba matemática, contribuye a generar obstáculos conceptuales en los estudiantes, o tal vez, tales obstáculos son generados por una mala didáctica de los profesores responsables de los cursos de matemáticas de ese nivel educativo.

Como consecuencia de esta falta de atención, por parte de las autoridades educativas responsables del buen aprendizaje de las matemáticas de bachillerato al no contemplar discusiones con los estudiantes tendientes a que ellos empiecen a entender el sentido de una prueba matemática, la mayoría de los estudiantes de bachillerato estarán bastante lejos de poder resolver problemas como los propuestos en este trabajo de investigación.

De las reflexiones precedentes, se infiere que para trabajos futuros sería conveniente diseñar y proponer actividades encaminadas a provocar básicamente en los estudiantes dos habilidades: a) poder explicar a ellos mismos o bien a otro de sus compañeros de clase, y b) mediante el uso de herramientas tecnológicas, ser capaces *adoptar* o *adaptar* definiciones de conceptos involucrados en los problemas propuestos; de modo que después, al abordar ciertas tareas matemáticas, ellos entiendan y reflejen [en sus procesos de solución] el uso de la prueba matemática en problemas cada vez más complejos.

5.4. Investigaciones futuras

Este trabajo de investigación estuvo centrado en el uso del software Geogebra, como herramienta de uso y de reflexión que le diera sentido a la prueba matemática. El presente trabajo puede ser considerado como de exploración en cuanto a cómo generar justificaciones plausibles que le den sentido a las construcciones geométricas logradas con este tipo de software. A la luz de los resultados logrados en este trabajo de investigación, se puede afirmar que estos son pobres, y lo son, dado que la población elegida no contaba con los conocimientos previos mínimos que dieran pie a la adopción o adaptación de conceptos relacionados con los problemas propuestos.

A pesar de estos resultados pobres, se puede pronosticar que aún mucho camino por recorrer en este tipo de investigaciones. Primero, dentro del marco conceptual de Balacheff (2010) sería pertinente diseñar tareas que involucren la prueba matemática con diferentes tipos de problemas de nivel medio superior, y de ese modo, para poder entender cómo creando situaciones didácticas es posible observar cómo los estudiantes empiezan a dar sentido a la prueba matemática.

Hay varias preguntas que surgen, cuando es usado un cierto tipo de software como herramienta de enseñanza. Por ejemplo, ¿es posible enseñar la prueba matemática con algún tipo de software? ¿Qué papel juegan los conocimientos previos, de los estudiantes, en la comprensión y justificación de las soluciones dadas a los problemas cuando se hace uso de herramientas tecnológicas? ¿Qué tipos de ambientes favorecen el buen aprendizaje de las matemáticas? ¿Hay, en nuestro medio, marcos teóricos que expliquen cómo se aprende matemáticas en ambientes tecnológicos? ¿Debe ser entendida del mismo modo la prueba matemática en ambiente de papel-y-lápiz que en el tecnológico? Etc.

Estas y otras preguntas pueden servir de guía para quienes estén interesados en continuar con esta línea de investigación. Lo cierto es que aún hay muchas interrogantes en educación matemática y, en particular, en ambientes dinámicos que no pueden ser respondidas de manera inmediata, a menos que sean llevadas a cabo investigaciones conducentes a responderlas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. (K. A. Publishers, Ed.) *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school. (D. Pimm, Ed.) *Hodder and Stoughton*, 216-235.

Balacheff, N. (2000). *Proceso de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. En G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Edits.), *Explanation and Proof in Mathematics* (págs. 115-134). Springer.

Battista, M., & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher, 88*(1), 48-54.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques.* Kluwer Academic Publishers.

Courant, R., & Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas?* Fondo de Cultura Económica.

Coxeter, H. S. (1989). *Introduction to Geometry.* Wiley.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 5-23. doi:10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Edits.), *Explanation and Proof in Mathematics* (págs. 85-100). Springer.

Hohenwarter , M., & Lavicza , Z. (2011). The Strength of the Community. En *Model-Centered Learning* (págs. 7-12). SensePublishers.

Mariotti, M. A. (2010). Proofs, Semiotics and Artefacts of Information Technologies. En G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Edits.), *Explanation and Proof in Mathematics* (págs. 169-188). Springer.

Marrades, R., & Gutierrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 87-125.

Real Academia Española de la Lengua. (2001). *Diccionario de la Lengua Española - Vigésima segunda edición*.

Ruthven , K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computer & Education*, *51*(1), 297-317.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press, Inc.

ANEXO

PLAN DE ESTUDIOS

MATEMÁTICAS II

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

UNIVERSIDAD NACIONAL

AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DEL SEGUNDO SEMESTRE DE MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

UBICACIÓN DEL CURSO

Las unidades que se trabajan en este curso, corresponden a ***los ejes de Funciones, Geometría Euclidiana y Trigonometría***; sin embargo, el Álgebra se sigue manejando a través de los contenidos de estas cinco unidades, y por otra parte se sientan los cimientos para abordar la temática correspondiente a la Geometría Analítica que se estudiará en el semestre siguiente.

El segundo semestre de matemáticas se inicia con el estudio de la función cuadrática, lo que permite, por un lado, avanzar en el concepto de función al introducir ahora un nuevo tipo de variación que conlleva conceptos como concavidad y simetría, y, por otro, vincular estas funciones con las ecuaciones cuadráticas que recién ha trabajado el alumno, aspecto que enriquece ambas temáticas y contribuye a la formación de significados sobre la resolución de ecuaciones.

El núcleo central del curso lo constituye el estudio de la geometría euclidiana que ayuda al alumno a describir los objetos y sus partes de acuerdo a sus formas, dimensiones y propiedades; contribuye de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando el estudiante en un primer momento, identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, establece relaciones lógicas entre ellas, aun sin llegar necesariamente a un rigor axiomático propio de estudios más especializados.

Así, las unidades correspondientes al eje de geometría euclidiana, contemplan las etapas de exploración, deducción y aplicación, mismas que permiten establecer un equilibrio entre dos tendencias[1] de la enseñanza de la geometría a nivel bachillerato. En consecuencia, en la unidad sobre "Construcciones y Elementos Geométricos Básicos", se pretende que el alumno explore, observe patrones de comportamiento, conjeture y comience a argumentar; mientras que en la unidad de "Congruencia y

[1] Una tendencia propone un formalismo axiomático, mientras que la otra no trasciende la presentación mecanicista de hechos geométricos.

Semejanza”, a partir del conocimiento básico de estos conceptos, se introduce al alumno al aspecto deductivo y a la comprensión del por qué de las demostraciones; finalmente, en la unidad cuatro, “Perímetros, Áreas y Volúmenes”, se da paso a combinar diversos conceptos y resultados geométricos en aplicaciones teóricas y prácticas de la geometría.

Por último, la unidad cinco, está destinada a estudiar los “Elementos de la Trigonometría”, y representa un primer momento de síntesis de los conocimientos que el alumno ha adquirido sobre Aritmética, Álgebra y Geometría Euclidiana. A través de las razones trigonométricas, la resolución de triángulos y sus aplicaciones, el estudiante adquirirá nuevas herramientas que potencian, al combinarse, algunas propiedades y conceptos geométricos, como el de semejanza.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el segundo curso de matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- ✍ Incrementa su capacidad de resolver problemas, al incorporar estrategias y procedimientos para realizar construcciones geométricas y para comprender o proporcionar argumentos que justifican un enunciado.
- ✍ Percibe que existe una estructura en los conocimientos de la Geometría Euclidiana y que ésta estudia figuras y cuerpos presentes en su entorno.
- ✍ Identifica relaciones y patrones de comportamiento en diversas situaciones o problemas geométricos, y a partir de esto establece conjeturas o infiere algunas conexiones entre resultados.
- ✍ Valora la importancia de proporcionar una argumentación como la vía que otorga validez al conocimiento geométrico.
- ✍ Percibe a la Trigonometría como una herramienta de gran utilidad que combina aspectos del Álgebra, la Aritmética y la Geometría.
- ✍ Aplica conceptos, procedimientos y resultados de la Geometría Euclidiana y de la Trigonometría, para resolver problemas.
- ✍ Avanza en la comprensión del concepto de función, distingue las diferencias y similitudes entre las funciones lineales y cuadráticas. Modela con estas últimas algunas situaciones de variación cuadrática y de optimización.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

No	Nombre de la Unidad	Horas
I	Funciones Cuadráticas.	15
II	Construcciones y Elementos Geométricos Básicos.	15
III	Congruencia y Semejanza.	15
IV	Perímetros, Áreas y Volúmenes	15
V	Elementos de Trigonometría.	20

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Fleming, Walter y Varberg, Dale. *Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica.* Prentice Hall, México, 1991.

Gobran, Alfonse. *Álgebra elemental*. Iberoamérica, México, 1990.

Larson, Ronald y Hostetler, Robert . *Álgebra*. Cultural, México, 1996.

Miller, Charles *et al*. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. Addison Wesley Longman, México, 1999.

Smith, Stanley A., *et. al., Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. Addison-Wesley Longman, México, 1998.

GEOMETRÍA

Clemens, Stanley *et al*, *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*, Addison Wesley, México, 1989.

Filloy, Eugenio y Zubieta, Gonzalo, *Geometría*, Grupo Editorial Íberoamérica, México, 2001.

Fleming, Walter y Varberg, Dale. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica,* Prentice Hall, México, 1991.

Garcia, Jesús y Bertrán, Celeste, *Geometría y Experiencias*, *Recursos Didácticos,* Alhambra, Addison-Wesley Longman, México, 1998.

Miller, Charles et al. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*, Addison Wesley Longman, México, 1999.

TRIGONOMETRÍA

Fleming, Walter y Varberg, Dale. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica,* Prentice Hall, México, 1991.

Flores, Homero y Victoria, Susana, *Introducción a la Geometría con el Geométra,* Iberoaméricana, México, 2001 Miller, Charles *et al. Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*, Addison Wesley Longman, México, 1999.

Rivaud, Juan José. *Trigonometría*, Limusa. México, 1992.

Smith, Stanley A., *et. al., Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, Addison-Wesley Longman, México, 1998.

MATEMÁTICAS II
UNIDAD I. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Propósitos:

✍ Continuar con el estudio de funciones a partir del estudio de situaciones que varían en forma cuadrática; contrastar este tipo de variación con la lineal. Analizar el comportamiento de las gráficas de funciones cuadráticas en términos de sus parámetros e iniciar la resolución de problemas de optimización con métodos algebraicos .

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Explora, en una situación o problema que dé lugar a una función cuadrática, valores, condiciones, relaciones y comportamientos, a través de tablas, diagramas, etcétera que le permitan obtener información del problema, como un paso previo a establecer la representación algebraica. ? Diferencia dos tipos de variación fundamentales (lineal y cuadrática). ? Reconoce en una tabla si existe variación cuadrática por medio de diferencias finitas. ? Obtiene el modelo de la función cuadrática de una situación dada.	? Se sugiere iniciar con problemas de movimiento o geométricos. ? Se pueden modelar funciones cuadráticas a partir de tablas sobre este tipo de comportamiento, como arreglos de números triangulares, rectangulares, pentagonales o el patrón de comportamiento del número de diagonales en un polígono. ? También ayuda la elaboración de gráficas en clase, localizando puntos con ayuda de la calculadora. Después de una práctica formativa, se sugiere el trazado de gráficas con el apoyo de la computadora; se recomienda también el uso de Excel para tareas fuera del aula.	Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas. Comparación de la función cuadrática con la función lineal. Intersecciones de la gráfica de una función cuadrática con el eje x. Estudio gráfico y analítico de la función: $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, casos particulares: $\mathbf{y = ax^2}$, $\mathbf{y = ax^2 + c}$, $\mathbf{y = a(x - h)^2}$, $\mathbf{y = a(x - h)^2 + k}$.

? Diferencia entre una ecuación cuadrática y una función cuadrática. ? Relaciona el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje **x**, con la naturaleza de las raíces. En particular identificará su ausencia con la existencia de raíces complejas. ? Transita por los diferentes tipos de registro de la función cuadrática (tabular, algebraico y gráfico). ? Encuentra el significado del papel que juegan los parámetros en el comportamiento de una gráfica. - En el modelo $\mathbf{y = ax^2}$, analiza el impacto de la constante **a**, y deducirá la orientación de la parábola, según la constante **a** sea mayor o menor que cero. - En el modelo $\mathbf{y = ax^2 + c}$ comprende el papel del parámetro **c**, en la traslación de la gráfica $\mathbf{y = ax^2}$ hacia arriba o hacia abajo del eje **x**, según se le asignan valores positivos o negativos a **c**. - En el modelo $\mathbf{y = a(x - h)^2}$, interpreta el papel del parámetro h, como la forma para desplazar la parábola $\mathbf{y = ax^2}$ a la derecha o la izquierda, según el valor de h sea positivo o negativo.	? Se puede sugerir a los alumnos después de algunos ejemplos, cómo aprovechar la propiedad de simetría de las funciones cuadráticas para graficar de manera más rápida. ? Mediante el análisis de distintos ejemplos tanto del comportamiento del registro tabular como de las gráficas correspondientes, se pueden revisar los conceptos de máximo y mínimo. ? En la expresión $\mathbf{y = ax^2}$, se analizarán las posibilidades del parámetro a: **a ? 0, a ? 0, ?a? ? 1 , ?a? ? 1** y su relación con la orientación y abertura de la gráfica correspondiente. ? Es conveniente resaltar la importancia de los métodos algebraicos en la resolución de problemas de optimización, de diversos contextos, por ejemplo, numéricos, de áreas, costos, y ganancias.	Concavidad, máximo o mínimo. Problemas de máximos y mínimos. Resolución algebraica.

- En el modelo **$y = a(x - h)^2 + k$**, deduce que el impacto de los parámetros h y k es el de trasladar y desplazar la parábola **$y = ax^2$**. ? Integra a su lenguaje términos como concavidad, vértice, máximo, mínimo, traslación y simetría. ? Expresa una función cuadrática escrita en la forma general **$y = ax^2 + bx + c$**, a la forma estándar **$y = a(x - h)^2 + k$**; y puede describirla a partir del análisis de sus parámetros. ? Otorga significado a las coordenadas del vértice en términos del valor máximo o mínimo de la función. ? Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática. ? Interpreta el comportamiento de la gráfica dentro del contexto de una situación dada.		

UNIDAD II. CONSTRUCCIONES Y ELEMENTOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

Propósitos

- ✍ A través de construcciones con regla y compás, explorar las propiedades de las figuras elementales y algunos conceptos básicos de la Geometría Euclidiana. Reconocer patrones de comportamiento geométrico que permitan plantear conjeturas para proceder a su validación empírica.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Reconoce los elementos de una figura (punto, punto de Inter.sección, líneas rectas, segmentos, semirrectas, etcétera). ? Obtiene de las construcciones, las nociones de: recta, segmento de recta, punto medio, mediatriz, ángulo, bisectriz, circunferencia, perpendicularidad y distancia de un punto a una recta. Los expresa en forma oral y escrita. ? Identifica los elementos mínimos que se requieren para trazar un segmento de recta. ? Establece los elementos mínimos que se requieren para trazar una circunferencia.	? Es importante iniciar con una revisión de los antecedentes históricos de la geometría y la forma como se sistematiza este conocimiento. ? Para incrementar la destreza manual en el manejo de instrumentos geométricos, se sugiere dejar a los alumnos como tarea, la elaboración de dibujos libres, por ejemplo, los que se realizan en dibujo técnico, mosaicos de Escher, etcétera. ? Con las construcciones se puede inducir al alumno a que establezca propiedades y características de las figuras obtenidas, comparando medidas de ángulos y segmentos, considerando lados y vértices, etcétera. ? A través de preguntas, el profesor puede encauzar la reflexión sobre los trazos realizados en cada una de las	Construcciones con regla y compás Segmentos congruentes. Ángulos congruentes. Mediatriz y determinación del punto medio de un segmento. Bisectriz de un ángulo dado. Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto: a) que pertenece a la recta. b) fuera de ella Triángulos Reproducción de un triángulo a partir de condiciones dadas (LAL, LLL, ALA)

? Recuerda la clasificación de ángulos por su abertura (agudo, recto, obtuso, llano) y posición (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice). ? Reconoce ángulos rectos en cualquier figura geométrica que los contenga. ? Explica en forma verbal y escrita, los trazos que siguió para realizar una construcción geométrica dada. ? Identifica y construye segmentos y ángulos congruentes. ? Recuerda clasificación de triángulos según sus lados y ángulos. ? Explica en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados cualesquiera. ? Construye un triángulo congruente a partir de otro dado. ? Verifica triángulos congruentes haciéndolos coincidir.	construcciones, con la finalidad de identificar los elementos mínimos que se requieren para localizar un punto (intersección de rectas y/o circunferencias), trazar un segmento de recta y trazar una circunferencia. ? Se recomienda hacer énfasis en la noción de perpendicularidad y en su uso para "medir" la distancia de un punto a una recta. ? Con la orientación del profesor, los alumnos formularán las características que determinan los elementos estudiados, apoyándose, cuando corresponda, en patrones de comportamiento reconocidos en las diversas construcciones. ? Cuando en las construcciones se presente congruencia de algunos elementos se sugiere hacer coincidir las figuras como una forma de verificación. ? La construcción de triángulos tiene el propósito de establecer los datos mínimos requeridos para la construcción de triángulos congruentes. Para ello se propone trabajar de la siguiente forma: Pedir al alumno que construya un triángulo, si se le dan: a) Un dato: Lado o ángulo b) Dos datos: Dos lados, un lado y un ángulo, dos ángulos. c) Tres datos: Tres lados, dos lados y un ángulo, un ángulo y dos lados.	Desigualdad del triángulo. Rectas notables en el triángulo: mediatriz, bisectriz, mediana y altura. Puntos notables de un triángulo: Circuncentro, Incentro, Baricentro y Ortocentro. Reproducción de polígonos por triangulación. Circunferencia Rectas y segmentos. Rectas tangentes a una circunferencia a) Desde un punto sobre ella. b) Desde un punto fuera de ella. Localización del centro de una circunferencia dada.

? Identifica las alturas de un triángulo sin importar la posición que éstas tengan. ? Distingue las características que determinan a cada una de las rectas notables de un triángulo. Reconoce las diferencias entre unas y otras. ? Traza las rectas notables del triángulo. ? Identifica los puntos notables de un triángulo y puede explicar cuáles son sus características. ? Observa que los puntos notables de un triángulo, están alineados. ? Identifica cuerdas, radios, secantes y tangentes de una circunferencia. ? Construye rectas tangentes a una circunferencia. ? Describe correctamente el procedimiento requerido para realizar una construcción dada ? Argumenta, empíricamente, sobre la validez de las construcciones realizadas y lo explica de forma oral y escrita.	? Llevarlos a que analicen en qué casos se construye un único triángulo y por qué. Esto además sienta las bases para obtener los criterios de congruencia que se trabajarán en la siguiente unidad. ? En el caso de la construcción de un triángulo cuando se proporcionan tres lados, la actividad también se presta para que el alumno obtenga lo que establece la desigualdad del triángulo. ? Se recomienda trabajar problemas que involucren las construcciones en diferentes contextos. ? Se sugiere trabajar algunas construcciones con software *como Cabri, Geometer Sketcéterah Pad* u otros.	

UNIDAD III. CONGRUENCIA Y SEMEJANZA

Propósitos:

✍ Ilustrar el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al alumno en el método deductivo. Trabajar la congruencia y semejanza de triángulos, así como el teorema de Pitágoras.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Reconoce la importancia de la demostración para aceptar o rechazar conjeturas. ? Utiliza correctamente la nomenclatura empleada por el profesor . ? Explica la diferencia entre igualdad y congruencia. ? Conoce los tipos de ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal. ? Identificará aquellos que son congruentes. ? Justifica la suma de los ángulos interiores y exteriores de cualquier triángulo.	? En la unidad no se pretende estructurar una teoría, sin embargo las demostraciones deben tener el formalismo mínimo requerido para el nivel bachillerato. ? En cada uno de los teoremas establecidos en la temática, es conveniente apoyarse de una construcción cuidadosa de la figura que relacione lo estipulado en ese teorema. Esto con la finalidad de establecer vínculos adecuados que favorezcan obtener una argumentación válida. ? Conviene resaltar la diferencia entre mostrar y demostrar, la necesidad de la deducción, la identificación de los elementos de una demostración así como las partes de un teorema y la forma de su recíproco.	Congruencia Congruencia de complementos y suplementos de ángulos congruentes. Congruencia de ángulos opuestos por el vértice. Justificación. Construcción de la recta paralela a otra por un punto dado. ? Postulado de las rectas paralelas. Congruencia de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.

? Justifica la expresión para encontrar el ángulo exterior de un triángulo como suma de los ángulos interiores no adyacentes. ? Aplica los criterios de congruencia de triángulos para justificar congruencia entre segmentos, ángulos y triángulos. ? Aplica los criterios de semejanza para justificar la semejanza entre triángulos y la proporcionalidad entre sus lados respectivos. ? Identifica el ángulo central correspondiente a un ángulo inscrito en una circunferencia. ? Justifica la relación entre los ángulos central e inscrito en una circunferencia. ? Utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad, en la resolución de algunos problemas.	? Hay que poner énfasis en la nomenclatura que se está utilizando y fomentar su uso por parte del alumno. ? Con el fin de refutar enunciados falsos, se recomienda utilizar contraejemplos. ? Es conveniente poner énfasis en el método deductivo y no en la memorización de las demostraciones por parte del alumno, así como propiciar que el alumno argumente en forma oral y escrita la validez de los resultados obtenidos. ? Se sugiere analizar la importancia del postulado de las paralelas en el desarrollo de la geometría, así como dejar a los alumnos un trabajo de investigación relativo a las geometrías no euclidianas. ? Al justificar la congruencia o semejanza de triángulos es importante cuidar la identificación de ángulos y lados homólogos ? Al trabajar la suma de los ángulos interiores de un triángulo, se propiciará que el alumno encuentre la expresión general para la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n*-lados.	Ángulos internos y el ángulo externo de un triángulo. a) Relación entre el ángulo externo y el ángulo interno. Justificación b) Suma de ángulos interiores de un triángulo. Justificación. c) Suma de ángulos interiores y exteriores de un polígono regular. Congruencia de triángulos ?Criterios de congruencia de triángulos. Justificación de las construcciones de: a) Bisectriz de un ángulo. b) Mediatriz de un segmento. c) Perpendicular a una recta. Teorema del triángulo isósceles y su recíproco. Justificación. Relación entre el ángulo central e inscrito en una circunferencia. Justificación.

	? Como parte de la introducción al concepto de semejanza, se puede recurrir a los modelos a escala, por ejemplo: mapas, maquetas, fotos, tangram, etcétera. ? También para motivar el tema de semejanza se puede pedir al alumno que investigue sobre la sección áurea y la importancia que le daban los griegos. ? Es importante remarcar la diferencia entre igualdad y congruencia. ? Es conveniente presentar algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras, incluyendo la que se basa en la semejanza de triángulos.	Semejanza y teorema de Pitágoras División de un segmento en n partes iguales. Construcciones. Teorema de Thales y su recíproco. Criterios de semejanza de triángulos. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo. Justificación. Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.

UNIDAD IV. PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES

Propósitos:

? Aplicar conocimientos algebraicos y geométricos adquiridos en unidades anteriores en la resolución de problemas sobre figuras y cuerpos que involucren exploraciones geométricas, deducciones y cálculos numéricos. Propiciar el desarrollo de la imaginación espacial.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Comprende que la actividad de "medir" en geometría, una longitud, área o volumen, involucra contar cuántas veces cabe una unidad de medida en el objeto que se quiere medir. ? Distingue la diferencia entre unidades de longitud, superficie y volumen ? Calculará el perímetro de triángulos, cuadriláteros y otros tipos de polígonos regulares. ? Obtiene alguna de las fórmulas para calcular el área y el volumen de figuras y cuerpos por el método de descomposición y recomposición.	? En está unidad, además de obtener resultados sobre áreas de polígonos regulares, se aplicarán los conocimientos adquiridos en las unidades anteriores a la resolución de problemas de aplicación en distintos contextos y de un nivel de dificultad un poco mayor que los ya trabajados en las unidades mencionadas. ? Es conveniente resolver problemas donde se utilicen las propiedades de rectas paralelas, congruencia, semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras; por ejemplo: cálculos de distancias inaccesibles, trazos de trayectorias de rayos de luz, el problema de Eratóstenes, etcétera.	Medida en geometría. a) ¿Qué es medir longitudes, áreas y volúmenes? b) Perímetro de un polígono regular. c) Medida aproximada de la longitud de la circunferencia. Obtención empírica de la fórmula. d) Área del rectángulo. e) Volumen de un prisma recto. Cálculo de áreas por descomposición y recomposición de figuras. Obtención de la fórmula del área del: triángulo, trapecio, rombo y paralelogramo.

? Utiliza las fórmulas obtenidas en la resolución de diversos problemas. ? Establece la razón que existe entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de un círculo. ? Encuentra las dimensiones de algunas figuras geométricas, cuando se conoce su perímetro y su área. ? Reconoce y aplica la razón que existe entre los perímetros de triángulos semejantes. ? Reconoce la razón que existe entre las áreas de triángulos semejantes. ? Aplica las propiedades de semejanza en la resolución de problemas sobre distancias inaccesibles, ? Deduce empíricamente las fórmulas para obtener la longitud de la circunferencia y el área de un círculo.	? En la obtención de la razón aproximada entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, se recomienda que los alumnos midan la circunferencia y el diámetro de varios objetos distintos: botellas, botes, vasos cilíndricos, y obtenga sus razones y el promedio de éstas. ? La idea de introducir el tema de cálculo de áreas, pretende que el alumno perciba la secuencia de razonamientos en la deducción de sus fórmulas. ? Después de resolver algunos problemas que involucren áreas de polígonos, plantear problemas de cálculo de áreas donde se involucre la razón entre perímetros o áreas de triángulos y rectángulos semejantes. ? En la obtención del área del círculo se puede utilizar un polígono inscrito de ***n*** lados, recomponiendo sus ***n*** triángulos en un paralelogramo. ? Los alumnos deberán construir un cilindro y un cono de igual radio y altura para comparar sus volúmenes de manera física.	Obtención de la fórmula del área de un polígono regular dado el apotema. Cálculo aproximado del área del círculo. Obtención empírica de la fórmula. Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes. Problemas de longitudes y áreas que involucren semejanza, congruencia y teorema de Pitágoras. Problemas que involucren áreas y volúmenes de prismas, cilindros rectos y conos rectos, donde sea necesario aplicar conocimientos de congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.

? Obtiene algunas fórmulas para calcular la superficie lateral y el volumen de prismas rectos. ? Generaliza la fórmula del volumen de un prisma para obtener la que proporciona el volumen de un cilindro. ? Deduce empíricamente que el volumen del cono recto, es la tercera parte del volumen del cilindro que tiene mismos radio y altura. ? Resuelve algunos problemas que involucren algunos de los siguientes elementos: Teorema de Pitágoras, semejanza, congruencia, fórmulas sobre perímetros, áreas, superficies laterales y volúmenes.	? Para trabajar el tema de áreas y volúmenes de un prisma, se recomienda que el alumno haga un manejo intuitivo para la obtención de las fórmulas; para ello, se puede pedir que manipule una caja rectangular y realice los cálculos que crea pertinentes para obtener los valores requeridos. ? Se puede llegar a una generalización de las propiedades de los prismas, si se le hace ver al alumno que un cilindro se puede manejar como un prisma de una “cantidad infinita” de lados. ? Para comparar volúmenes de cilindros y conos, se puede recomendar que los alumnos construyan un cono y un cilindro del mismo radio e igual altura. ? La construcción del rectángulo áureo permitirá consolidar las relaciones entre área y semejanza.	

UNIDAD V. ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

Propósitos:

✍ Mostrar a las razones trigonométricas como una herramienta y un modelo en la solución de problemas de diversos campos del conocimiento. Iniciar, asimismo, un nuevo saber matemático que culminará posteriormente con el estudio de las funciones trigonométricas.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Conoce que las razones trígonométricas se derivan de una propiedad fundamental de los triángulos rectángulos semejantes, y sabe que existen seis de ellas. ? Aprecia la importancia de las tablas trigonométricas en la solución de problemas que involucren triángulos rectángulos. ? Construye una tabla de seno, coseno y tangente para los ángulos de 30, 45, y 60 grados. ? Usa tablas trigonométricas y calculadora para obtener los valores del seno, el coseno y la tangente, así como de sus recíprocos. ? Estima el valor del resultado en la resolución de triángulos y	? Conviene realizar un breve esbozo histórico de la trigonometría, así como comentar el significado etimológico de los términos: grado, minuto, seno, tangente. ? También para introducir el tema y favorecer la motivación del alumno, se puede plantear un problema donde surja la necesidad de relacionar los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. ? Partiendo de que dos triángulos rectángulos semejantes tienen sus lados proporcionales, se puede hacer ver que las razones respectivas entre dos cualesquiera de sus lados serán las mismas para ambos triángulos, Se le puede pedir al alumno que analice las diversas posibilidades de combinar los lados. De ahí, llevarlos a establecer las razones trigonométricas seno, coseno y tangente y después, sus recíprocas.	Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para ángulos agudos. Valores recíprocos de las razones seno, coseno y tangente. Solución de triángulos rectángulos: a) Conociendo un ángulo y un lado. b) Conociendo dos lados. Razones seno, coseno y tangente de los ángulos de 15°, 30°, 45°, 60° y 75°. Las razones recíprocas del seno, coseno y tangente. Resolución de problemas. a) Ángulo de elevación, b) Ángulo de depresión

problemas, los contrasta con los resultados obtenidos, y analiza la validez de los mismos en el contexto del problema. ? Adquiere habilidad en el manejo de la calculadora al resolver ejercicios y problemas de corte trígonométrico. ? Maneja algebraicamente algunas identidades trigonométricas. ? Comprende la deducción de las fórmulas de las leyes de senos y cosenos. ? Resuelve problemas donde se involucren cualquier tipo de triángulos. ? Aplica, junto con los conocimientos de esta unidad, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el teorema de Pitágoras y los criterios de semejanza, en la resolución de problemas. ? Valora a la trigonometría como una herramienta de gran utilidad en la solución de una diversidad de problemas.	? Es importante recalcar que las razones de un triángulo rectángulo son funciones de los ángulos agudos del triángulo. Esto es, los cocientes o razones a/b. a/c, b/c permanecen invariantes para el mismo ángulo en un triángulo rectángulo cualquiera que sea su tamaño. (Mostrar el ejemplo: en el triángulo de 30-60 la razón seno siempre es igual a 0.5) ? A través de un problema de semejanza ya trabajado, se puede mostrar la importancia de las razones trigonométricas si se resuelve el problema por semejanza y por trigonometría y se analiza la ventaja de este último método. ? Plantear problemas donde se dan las medidas de los lados de un triángulo, por ejemplo, 7, 24 y 25 cm. y se requiere obtener las medidas de los ángulos, verificando previamente que el triángulo sea rectángulo. ? Es útil resolver problemas en los que los triángulos rectángulos se encuentran en diferentes planos, cuando forman parte de polígonos o cuando permiten el cálculo de parámetros de sólidos regulares.	c) Problemas de aplicación. Identidades trigonométricas fundamentales: a) Las recíprocas. b) Las de división. c) Las pitagóricas. Resolución de triángulos oblicuángulos. a) Ley de los senos y cosenos. b) Problemas donde intervienen triángulos oblicuángulos.

	? En aplicaciones se puede plantear, además de los problemas ya conocidos de distancias y velocidades, algunos problemas de trayectoria, haces de luz, astronomía, como son el diámetro de la Tierra, distancia de la Tierra al Sol, cálculo del diámetro del Sol, etcétera. ? Conviene proponer un problema donde se manifieste la necesidad de trabajar con triángulos oblicuángulos, por ejemplo, calcular la altura de una peña donde existe un obstáculo natural que impide arribar a ella. ? Analizar el comportamiento del seno, el coseno y la tangente cuando el ángulo agudo toma valores entre 0° y 90° en un triángulo rectángulo. Destacar los casos extremos en 0° y 90°. ? Se sugiere deducir una de las leyes de senos o cosenos.	