CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Departamento de Matemática Educativa

Unidad Zacatenco

EL TALLER SOBRE FRACCIONES COMO HERRAMIENTA PARA DETECTAR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN SU PRÁCTICA DOCENTE

Tesis que presenta

Ma. Eugenia López Hernández

Para obtener el grado de
Maestra en Ciencias en la especialidad de
Matemática Educativa

Director de la Tesis: Dr. José Guzmán Hernández

México, Distrito Federal   Marzo de 2014

RESUMEN

El trabajo del docente necesita de conocimientos y habilidades particulares, para poder llevar a cabo su tarea [que es enseñar] en los salones de clase, independientemente, de la materia o asignatura que imparta. En nuestro sistema educativo, es común que al profesor de educación primaria se le encomiende la tarea de enseñar diferentes asignaturas, por lo que sus campos de conocimientos y habilidades[1] deben cubrir distintas áreas del conocimiento; sin embargo, esto no es necesariamente cierto en la práctica cotidiana de todo profesor de los niveles básicos.

En este trabajo de investigación, se exploran de manera particular los conocimientos de los profesores de educación primaria, en el tema matemático específico de las fracciones. Conocimientos básicos de esta área de conocimiento, como: modelos que se utilizan para representarlas, las diferentes interpretaciones que se hacen de ellas, conceptos erróneos de los alumnos y de los propios profesores. Además, se exploran también las inquietudes y necesidades educativas de los profesores, expresadas por ellos mismos.

El desarrollo de la investigación fue mediante el diseño y aplicación de cuestionarios, sobre la temática antes señalada; de igual modo, fueron diseñadas Actividades, las cuales fueron implementadas en un Taller; donde se abordaron conceptos específicos de las fracciones, como: partición, unidad, parte-todo, equivalencia y medida. Sin embargo, en este trabajo en particular sólo se reportan los resultados concernientes a: unidad y medida; ello debido a lo gran cantidad de datos disponibles; todos ellos interesantes, desde el punto de vista de la investigación sobre los conocimientos de los profesores.

Existe una enorme cantidad y variedad de investigaciones enfocadas en el tema de las fracciones, no obstante aquí se retoman sólo aquellas que están relacionadas con los conocimientos de los profesores, porque se parte del supuesto de que al ampliar y

[1] De acuerdo con el Diccionario de la Lengua Española (2001), conocimiento es la acción y efecto de conocer, es el entendimiento, inteligencia o razón natural, en su función de verbo es enterarse de algo. Mientras que habilidad es la capacidad y disposición para algo, es cada una de las cosas que una persona ejecuta con gracia y destreza.

profundizar los conocimientos de los profesores, mejora el aprendizaje de los alumnos a quienes enseña día con día.

El marco conceptual que sirve de soporte, a la presente investigación, tiene fuertes vínculos con el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza implementado por Ball y colaboradores. Usando este modelo teórico, se pretende detectar fortalezas y debilidades de los conocimientos matemáticos de los profesores, a través de situaciones problema, y que hagan evidentes sus conocimientos y habilidades para la enseñanza en situaciones de clase.

Los resultados obtenidos en esta investigación dan fuertes indicios de falta de conocimiento por parte del profesor de educación primaria, sobre los contenidos matemáticos explorados. A partir de tales resultados, se nota una imperiosa necesidad de elaborar propuestas de capacitación [como los Talleres educativos], dirigidas a los profesores de este nivel educativo, encaminadas a la actualización y profundización de los conocimientos matemáticos que manejan cotidianamente en su labor docente, de modo que ellos mejoren sustancialmente su Conocimiento Matemático para la Enseñanza y, por supuesto, tal mejora debe ser reflejada en el aprendizaje de sus estudiantes.

ABSTRACT

Teaching requires special knowledge and skills to perform it job [teaching is] in the classroom, regardless of subject matter or for giving. In our educational system, it is common to the primary school teacher is bing the task of teaching different subjects, so that, its field of knowledge and skills[1] should cover different areas of knowledge, but this is not necessarily true in everyday practice professor all levels.

In this research, we explore particulary knowledge of primary teachers in the specificly mathematical topic of fractions. Basic knowledge of this area of knowledge, as models used to represent the different interpretations made of them, misconceptions of students and teachers themselves. Furthermore, it also explores the concerns and educational needs of teachers expressed themselves.

The development of the research was make through the design and implementation of questionnaires on the thematic aforementioned, similarly, was designed activities, which were implemented in a workshop, where specific concepts of fractions were addressed, such as: partition, unit, part-whole, equivalence and measurement. However, in this particular research only reflects the results concerning: unit and measure, due to this large amount of data available, all of them interesting, from the point of view of research on teachers' knowledge.

There is a huge amount and variety of research focused on the subject of fractions, however, here are taken up only those that are related to the knowledge of the teachers, because it is assumed that the broadening and deepening of the knowledge of teachers, improves student learning to teach every day.

[1] According to the Dictionary of the Spanish Language (2001), knowledge is the action and effect of knowing, is the understanding, intelligence or natural reason, in its role of verb is learning something. While skill is the ability and willingness to something, it becomes one of the things that a person running with grace and skill.

The conceptual framework that supports, this research, has strong links with the model of Mathematical Knowledge for Teaching implemented by Ball et al. Using this theoretical model to identify strengths and weaknesses of teachers mathematical knowledge through problem situations, and to make evident their knowledge and teaching skills in classroom situations.

The results obtained in this study strongly indicate lack of knowledge by the teacher of primary education, about the mathematical content explored. From they results, are shows an urgent need to develop proposals training [as educational workshops] aimed updating and deepening mathematical knowledge in handling their daily teaching at teachers at this level, so that, they substantially improve their Mathematical Knowledge for Teaching and, of course, this should be reflected in a better performance of students learning.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO 3

MÉTODO

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

PRESENTACIÓN

La forma de enseñar del profesor y los conocimientos matemáticos que posee son fundamentales para lograr un buen desempeño académico de sus alumnos. Esta idea general se tomó como guía del presente trabajo; enfocado en explorar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de profesores de educación primaria, sobre el tema específico de las fracciones. Con base en lo anterior, y en investigaciones enfocadas en profesores (v.g., Ball, 2000; Ball & Bass, 2000; Ball 2009, y Mochón, 2010, entre otros).

Investigadores como: Noelting, 1980; Kieren, 1985; Streefland, 1987; Llinares, 1988; Mochón, 1992; Dávila, 1992; Armstrong, 1995; De León, 1996; Lamon, 1996, y 1999, entre otros, llevaron a cabo investigaciones acerca del aprendizaje del concepto de fracción por parte de los alumnos. En esas investigaciones son reportadas dificultades de los alumnos en la adquisición y comprensión de diferentes conceptos del tema, como: partición, equivalencia, reconocimiento de la unidad, parte-todo, entre otros.

En este mismo sentido, también se han llevado a cabo investigaciones con profesores en formación y en activo; las cuales manifiestan haber encontrando deficiencias y conceptos erróneos en sus conocimientos [de los profesores] en los mismos conceptos en torno a las fracciones (c.f., Baturo, 2004; Morcote & Flores, 2004; Amato, 2006; Izsak, 2006; Alatorre & Saiz, 2008; Llinares & Sánchez, 2008; Park, Gucler & Mc Crory, 2009; Castro & Li, 2010, y Riley, 2010, entre otros). Autores como: Baturo, 2004; Llinares, 2004, y Amato, 2006, se enfocaron en la exploración del nivel de profundidad del conocimiento de las fracciones, por parte de los profesores, porque pensaron que ahí podría encontrarse la causa que originaba las dificultades en la comprensión del tema para los alumnos y poder explicar de esta manera las deficiencias de los docentes, en los conceptos antes mencionados.

Tomando como apoyo la literatura revisada, en esta investigación, se parte del supuesto de que ampliando y profundizando el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de los profesores, se debe mejorar sustancialmente su práctica docente y, por consiguiente, el desempeño de sus alumnos. Para dar evidencias de este supuesto, fue implementado un Taller Educativo con profesores de educación primaria. Mediante este

Taller, se pudo conocer, ampliar y profundizar el conocimiento específico de las fracciones, por parte de los profesores participantes en éste.

Este trabajo de investigación tiene, básicamente dos objetivos: 1) Indagar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de las fracciones que poseen los profesores de educación primaria y 2) Implementar un Taller Educativo con el tema de las fracciones como eje rector, para descubrir las implicaciones que éste pueda tener en el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de los profesores participantes en dicho Taller. Partiendo del modelo propuesto por Ball y sus colegas, acerca del conocimiento necesario que debe poseer todo profesor de matemáticas, surgen básicamente tres preguntas de investigación enfocadas principalmente en el Conocimiento, sujeto de la materia a enseñar.

> ¿Qué elementos de conocimiento matemático (especializado) necesita un profesor de educación primaria para mejorar su práctica docente en la enseñanza de las fracciones?
>
> ¿Cuántos de estos elementos y en qué nivel los posee el profesor de educación primaria, actualmente?
>
> ¿Cómo influye la implementación de un Taller Educativo en el desarrollo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de un profesor de educación primaria?

MÉTODO

Esta investigación es de tipo cualitativo, ya que se enfoca en comprender y profundizar una problemática particular, sobre el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*. Esta problemática es explorada desde la perspectiva de los participantes, a través de sus experiencias, opiniones y significados de los conceptos en discusión durante el Taller Educativo; más precisamente, se pretendió explorar la forma en que los participantes perciben su realidad en torno a la temática discutida con ellos (Hernández, 2010). En esta investigación, se utilizó como estrategia la implementación de un Taller Educativo, entendiendo éste como "un lugar donde se trabaja y se elabora [...] una forma de enseñar y aprender mediante la realización de algo. Se aprende desde lo vivencial y no desde la transmisión […] Es una metodología participativa en la que se enseña y se aprende a través de una tarea conjunta. Promueve el desarrollo de saberes: cognitivo, operativo y relacional, por lo cual se transforma en un método para el desarrollo de competencias profesionales"

(Careaga et al., 2006, p.5). Para estos autores desde lo vivencial significa “aprender haciendo”, es decir, los conocimientos se adquieren a través de una práctica concreta y no necesariamente desde la transmisión de la información en forma directa del profesor.

El Taller Educativo tuvo una duración de cinco sesiones sabatinas de cinco horas cada una, en las que se trataron diferentes temáticas; que giraron en torno a los conceptos básicos de las fracciones. Previo al inicio del Taller, se les entregó un cuestionario exploratorio a los participantes, y lo mismo para cada temática nueva a abordar, durante la sesión de trabajo. Todo ello dio un total de seis cuestionarios para cada profesor participante en el Taller. Durante la experimentación, participó un grupo de 12 Profesores de Educación Primaria, de diferentes escuelas públicas, pertenecientes todos a una misma zona escolar, todos ellos fueron voluntarios.

INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

1. Se elaboraron seis diferentes cuestionarios abiertos acerca de contenidos específicos de fracciones, conjuntamente con preguntas relacionadas con la pedagogía asociada a ellos; uno para cada temática de trabajo y uno inicial.

2. Audio grabaciones de cada una de las sesiones del Taller Educativo.

3. Se elaboraron hojas de trabajo con Actividades generadoras; encaminadas a desarrollar la temática de cada sesión.

ANÁLISIS DE DATOS

Estuvo basado en lo sucedido durante la implementación del Taller; por ejemplo: respuestas de los profesores a cada una de las interrogantes planteadas en los cuestionarios y en las Actividades; sus opiniones, etc., se estableció una relación entre los resultados con la teoría que da soporte a la presente investigación. De manera puntual, se llevó a cabo el análisis de las respuestas de cada una de las preguntas de los cuestionarios aplicados. Para que tal análisis fuera posible, se estableció una categorización de las respuestas, tomando como base la literatura revisada.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

INTRODUCCIÓN

La forma de enseñar del profesor y los conocimientos matemáticos que posee son fundamentales para lograr un buen desempeño académico de sus alumnos (c.f., Askew, 2000; Ball, 2000; Carpenter, 2000; Baruch, 2006, y Cooper, 2006; entre otros) así lo afirman quienes han investigado a profundidad el papel que juega el conocimiento matemático para la enseñanza que poseen los profesores en el desempeño de sus estudiantes. Mediante observaciones de clase, cuestionarios, entrevistas [tanto a maestros como a estudiantes], videograbaciones, etc., estos investigadores obtuvieron información reveladora acerca de las características necesarias que debe tener un profesor para que se considere suficientemente competente[1].

La investigación que da origen al presente trabajo tiene, como enfoque principal, indagar el conocimiento matemático que los profesores de primaria tienen acerca de las fracciones [tanto del concepto como de las operaciones que estos objetos matemáticos tienen asociadas] y determinar si es adecuado y suficiente para la enseñanza de estos conceptos. Las fracciones son consideradas para autores como Streefland (1978); Freudenthal (1983); Behr (1983); Kieren (1988); Llinares y Sánchez (1988) y Lamon (1999), entre otros, como un concepto amplio y complejo que se encuentra inmerso en una enorme variedad de situaciones cotidianas (por ejemplo: al medir o pesar objetos que requieren medidas menores que la unidad de medida, al cuantificar lapsos de tiempo, etc.), por lo que a veces es difícil reconocer el significado que adquieren en un determinado contexto en el que estén inmersas. Estos autores consideran que son necesarias bases sólidas de conocimiento, para poder entenderlas y manejarlas en la práctica escolar.

Si se considera de manera conjunta: el conocimiento matemático de las fracciones que tienen los profesores y la complejidad [de comprensión] que encierran los distintos

[1] El término competente se utiliza aquí para definir al profesor que reúne varias características que hacen que su práctica profesional sea efectiva, y tenga consecuencias positivas en el aprovechamiento de sus estudiantes. Tales características se han identificado a lo largo de las investigaciones de los autores mencionados.

significados de ellas, es posible advertir que el profesor de educación primaria necesita ir más allá del dominio de los conocimientos de la materia en sí misma y, en este sentido, se hace alusión a las habilidades [que debe poseer un profesor] como las reportadas por Ball y Bass (2000), quienes afirman que un profesor de matemáticas debe llevar a cabo cuatro actividades centrales en su tarea de enseñar: 1) desglosar ideas y procedimientos matemáticos, 2) escoger representaciones para mostrar ideas matemáticas, 3) analizar métodos y soluciones diferentes de las propias y 4) deducir lo que entienden sus alumnos (citado en Mochón & Morales, 2010, p.89).

1.1 PLANTEAMIENTO DE LA PROBLEMÁTICA

Cortina (2006) reporta un análisis de los resultados de la Prueba PISA[2] aplicada en nuestro país en el año 2003. Esta prueba tiene como objetivo explícito “ser una herramienta que permita a los gobiernos de los Estados participantes evaluar comparativamente la calidad de sus sistemas educativos” (p. 163). Particularmente, en ese año de su aplicación el énfasis de dicha Prueba fue en matemáticas, y se evaluaron cuatro campos específicos: espacio y forma (análogo a geometría euclidiana), cambio y relaciones (análogo a álgebra), cantidad (análogo a aritmética) e incertidumbre (análogo a probabilidad).

> El puntaje promedio del estudiantado en matemáticas fue de 385, lo que de acuerdo con los criterios psicométricos de la prueba equivale a una calificación de Nivel 1 (insuficiente) de desempeño. Este puntaje ubicó a México en el lugar 37 de los 40 participantes y en el último lugar de los países miembros de la OCDE. (p. 166)

Respecto a la problemática antes comentada, Sánchez (2009) retoma los análisis elaborados por Backhoff y colaboradores (2007), de los resultados obtenidos en la prueba Excale[3] (2006), donde se reporta que los niños de tercer grado de educación primaria no logran “repartos equitativos con ayuda gráfica, utilizando modelos continuos y discretos” (p. 197). Y respecto a los niños de sexto grado de educación primaria, la misma prueba

[2] Prueba de medición periódica de la calidad de la educación, implementada por la OCDE para los países pertenecientes a esta organización; cuyo significado es Programa Internacional para la Evaluación del Alumnado (PISA por sus siglas en inglés).

[3] Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo, implementados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México.

develó que no "leen, comparan ni ordenan números decimales, ni fraccionarios, ni resuelven con ellos problemas sencillos de suma o resta" (p. 198).

Como conclusión de la investigación acerca de las pruebas Excale, este autor (Sánchez, 2009, p. 203) afirma que "la mayor parte de los estudiantes en el país no alcanzan, al finalizar los grados escolares evaluados, un dominio adecuado de los contenidos del currículo nacional"; afirmación que incluye los contenidos matemáticos y por ende las fracciones.

El panorama del estado de los conocimientos de los estudiantes de nivel primaria respecto a las matemáticas que muestran los reportes anteriores es preocupante, ya que señalan dificultades de aprendizaje y de enseñanza en los elementos principales del proceso educativo: alumnos y profesores. Es por esta razón principalmente, por la que el presente trabajo se enfoca en uno de estos elementos: el profesor de primaria y, particularmente, en el conocimiento matemático que utiliza para la enseñanza.

1.1.1 *Las fracciones*

El estudio de las fracciones en la educación primaria genera dificultades tanto para el aprendizaje por parte de los alumnos como dificultades de comprensión y enseñanza de parte de los profesores (e.g., Kieren, 1976; Berhr, Lesh, Post & Silver 1983; Streefland, 1991; Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993; citados en Clarke & Sukenik, 2006).

Durante décadas se han llevado a cabo una gran cantidad de investigaciones encaminadas al análisis de estos dos contextos [e.g., Fandiño, 2007; en su proyecto de investigación bibliográfica longitudinal concerniente a las fracciones, destaca los aspectos didácticos y conceptuales de las fracciones que se han abordado en las diferentes investigaciones revisadas, partiendo de la década de 1960][4]; destacan las elaboradas a partir de la década de 1960 y hasta 1980 por considerarse pioneras en este campo particular del conocimiento y por definir líneas de investigación que más adelante continuaron

[4] El estudio elaborado por esta investigadora, no es exhaustivo; sin embargo, organiza los trabajos de investigación enfocados en las fracciones, por décadas y áreas de conocimiento abordadas en ellas, como: conceptualización de las fracciones, operaciones con fracciones y sus dificultades, las diferentes interpretaciones de la fracción y problemas de aprendizaje de las fracciones, lo que permite ver un amplio panorama de la investigación acerca de este concepto matemático.

enriqueciéndose. Estas investigaciones se concentraron principalmente en: cuestiones generales sobre el concepto de fracción, dificultades relativas a las operaciones entre fracciones y las diferentes interpretaciones de la idea de fracción; de tal manera se destacan autores como: Bergen (1966), Wilson (1967), Steffe y Parr (1968), Kieren (1975), Novillis (1976), Ellerbruck y Payne (1978) y Streefland (1978), entre otros, quienes más tarde continuaron investigando, y además dieron la pauta para ampliar las investigaciones relacionadas con las fracciones.

En la década de los 80 se enriquecieron considerablemente las investigaciones, y se agregaron otras líneas de investigación como: comparación entre los valores de la fracción y los números decimales, problemas conectados con las diferentes interpretaciones de la fracción y el lenguaje conectado con las fracciones; aquí se destacan las aportaciones de: Behr, Post, Silver y Mierkiewicz (1980), Swada (1983), Streefland (1983), Hunting (1984a), Kerslake (1986), Behr y Post (1988), Brousseau (1980, 1981), Hart (1980, 1981, 1985, 1988 y 1989), Kieren (1980, 1983, con Nelson & Smith 1985, y 1988), Llinares, Ciscar y Sánchez (1988) y finalmente Chevallard (1989), entre otros.

En la década de los 90 aumentó considerablemente la cantidad de investigaciones, ya que además de las líneas de investigación anteriormente referidas, se agregaron los números racionales y el conocimiento informal de las fracciones, así como investigaciones basadas en las experiencias del salón de clases. Aquí también, se puede mencionar a investigadores como: Hunting (1990), Mack (1990, 1993), Streefland (1990, 1991, 1993), Kieren (1992,1993a, b, c), Behr, Lesh, Post y Silver (1992, 1993), Ball (1993), Brown (1993), Lamon (1993) y Zazkis (1998), entre otros.

Los trabajos posteriores al año 2000 a la fecha, aún cuando han continuado con las líneas de investigación propuestas desde décadas atrás, también han hecho aportaciones importantes, y la profundización y análisis de la información es cada vez más detallada. En este sentido, destacan los trabajos de Llinares (2003, en Chamorro ed., 2003, capítulo 7), entre otros. Autor que examina las matemáticas que se imparten en la educación primaria y presenta sugerencias para su enseñanza. Además este investigador se ha caracterizado por llevar a cabo durante varios años el estudio de la didáctica de las fracciones en España y otras partes del mundo. Por lo tanto, el capítulo referido está dedicado ampliamente a las fracciones.

De manera particular, en esta investigación, se tomaron como referentes diversos trabajos de investigación, que por su importancia y cercanía con el tema del presente, se mencionan en seguida con más detalle.

En 1978, Streefland hizo un análisis de cómo adquieren los niños el concepto de fracción, basándose principalmente en observaciones que llevó a cabo durante 15 meses, de la conducta y reflexiones de sus propios hijos hacia la comprensión de las fracciones a partir de situaciones cotidianas planteadas por él mismo. Situaciones ubicadas en diferentes interpretaciones, como: parte-todo, medida, razón y proporción [no en sus aspectos formales, sino más bien de una manera intuitiva]. Enfocó sus observaciones desde la fenomenología de Freudenthal[5], cuidando en todo momento no interferir en las reflexiones y deducciones que daban los niños, aún cuando fueran equivocadas o erróneas. Llegó a la conclusión de que "la constitución mental de un concepto se determina por la riqueza de fenómenos en los que se desempeña este concepto o por la riqueza de la educación utilizada" (p. 72). Y con esto último se refiere principalmente a que el uso de situaciones, actividades y materiales [encaminados adecuadamente] para fomentar en los niños la reflexión que los lleve a adquirir el conocimiento necesario para formar los conceptos [en este caso de las fracciones] resulta favorecedor y necesario.

Behr, Lesh, Post y Silver (1983) llevaron a cabo una investigación que consistió en evaluar los niveles de logro de niños en tres áreas: conceptos del número racional, relaciones y sus operaciones. Para complementar la información proporcionada por la evaluación inicial, llevaron a cabo observaciones de clase y entrevistas individuales. Posteriormente, implementaron un proyecto de experimentos de enseñanza a un pequeño grupo de estudiantes, que tuvo una duración de 20 semanas. Al terminar con los experimentos de enseñanza, aplicaron una nueva evaluación al grupo de experimentación y confrontaron los datos. Los resultados obtenidos de su investigación muestran que existen

[5] En ese año Freudenthal aún no publicaba su obra *The didactical phenomenology of fundamental mathematical ideas*, donde él mismo consideró como fenómenos a todas las situaciones cotidianas, de donde pueden surgir aprendizajes matemáticos, y más tarde por medio de estos aprendizajes, se constituyen objetos mentales (similares a los conceptos). Sin embargo, ya había tenido discusiones al respecto con Streefland.

distractores perceptuales en la enseñanza de las fracciones que dificultan y confunden el aprendizaje de los niños, pero con una adecuada instrucción pueden salvarse. Además de que el manejo adecuado de las relaciones del número racional, les permite [a los niños] expandir sus estructuras mentales necesarias y por consiguiente su desarrollo intelectual.

Newstead y Murray (1998) estudiaron el entendimiento y las ideas erróneas acerca del concepto de fracción que se forman los niños de educación primaria. A través de evaluaciones escritas determinaron el nivel de éxito de estudiantes de cuarto y sexto grados de educación primaria. En los resultados, encontraron que los estudiantes de ambos grados tienen un limitado conocimiento para representar fracciones, ya que la mayoría utilizó sólo figuras geométricas para ello. Otro hallazgo importante fue la aplicación inapropiada de esquemas [representaciones] del número entero, al considerar a cada miembro de la fracción [numerador y denominador] como número entero independiente y no a la fracción como una relación de ambos números, en una tarea de orden de fracciones.

Martínez y Lascano (2001) aportan evidencias acerca de las dificultades que se presentan durante la enseñanza de las fracciones para el reconocimiento y la apropiación de algunos atributos presentes en la interpretación de la fracción como relación parte-todo en modelos continuos, como: ver una región como divisible, darse cuenta de que el número de cortes (o dobleces) no coincide con el número de partes, ver la necesidad de mantener fija la unidad (conservar el todo), conservar la congruencia entre las partes.

A través de una evaluación escrita, estas autoras identificaron dificultades [en los alumnos] para considerar las partes como una totalidad y dificultad para reconocer subdivisiones equivalentes, entre otras. Los resultados mostrados indicaron la necesidad de elaborar propuestas didácticas que permitieran a los estudiantes apropiarse de los conceptos, por lo que a través de diferentes ejercicios gráficos y de manipulación, lograron mejorar el entendimiento de los mismos.

Cid, Godino y Batanero (2003) elaboraron un manual [Actividades] dirigido a profesores, como parte de un proyecto implementado en España para abordar aspectos didácticos de las fracciones en situaciones de reparto, situaciones de medida, situaciones de transformación (de fracción a decimal o porcentaje) y situaciones de división no entera, entre otros conceptos; cuya finalidad fue dotar a los profesores del conocimiento mínimo necesario para llevar a cabo su práctica docente y con ello tratar de superar las dificultades referentes del tema.

Diversas investigaciones (c.f., Kerslake, 1986; Domoney, 2002, y Hannula, 2003, citados en Amato, 2005) muestran que muchos de los estudiantes de entre 12 y 14 años de edad, no tienen completamente desarrollado el entendimiento de las fracciones como números, por lo que investigó los efectos de una secuencia de enseñanza de fracciones en niños de 11 años de edad, poniendo énfasis en involucrar números mixtos, debido a la familiaridad previa con los números enteros. Los resultados obtenidos mostraron notable mejoría en el orden de fracciones, así como en los procesos de suma con fracciones y números mixtos, esto con relación a la evaluación inicial que se les hizo, por lo que la autora señala que los números mixtos son un enlace adecuado entre las fracciones y los números enteros.

Pruzzo (2012) hace un análisis del desempeño escolar de alumnos de primer grado de educación secundaria, acerca de conceptos básicos de las fracciones, como por ejemplo: las relaciones parte-todo y la comparación de fracciones; a través de la aplicación de un cuestionario, encontró que aun cuando se ha trabajado el concepto de fracción por parte de los docentes [tanto en el nivel primaria, como en secundaria], ese concepto no fue aprendido por más de la mitad de los estudiantes evaluados [muestra de 433 estudiantes] y que la enseñanza no ha tenido una evaluación permanente, ni cuidadosa para evitar los errores propiciados a partir de la misma.

1.1.1.1 *Diferentes representaciones de las fracciones*

En el lenguaje cotidiano, las fracciones se utilizan con términos como: mitad, doble, triple, dos veces de, etc., agregados a cantidades y valores de magnitudes; mientras que los términos mitad, tercios, cuartos, se utilizan con menor frecuencia en el entorno cotidiano. Esta diferencia de uso de los términos asociados a las fracciones lo advirtió Freudenthal (1983), quien utilizó los términos *fracturador* y *comparador* para referirse a dos grandes formas en las que la fracción se hace presente. Freudenthal (op.cit.), no se quedó con estas dos explicaciones acerca de las fracciones, por el contrario, ofreció diferentes ejemplos donde las fracciones se encuentran inmersas en una gran cantidad de situaciones [fenómenos les llama él) que se diferencian entre sí por la interpretación que se hace de ellas según el contexto donde estén; de entre ellos destacan: todo y parte, fracción y magnitud, operador y razón.

Para Freudenthal, el término fracción es una palabra relacionada con romper o fracturar.

> la fracción como resultado de fracturar está presente en el nombre tradicional castellano para las fracciones: quebrados […] en el papel de fracturador, las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado en partes iguales, o si se experimenta, imagina, piensa como si lo fuera. (pp. 8-9)

En tanto, la comparación se lleva acabo de acuerdo con criterios como: colocar juntos los objetos [directamente], utilizando un tercer objeto que medie entre los otros dos [indirectamente], "siendo transferido [el tercero] de uno a otro, o considerando como si se transfiriera" para hacer la comparación entre ellos (p.15).

Inquietudes parecidas tuvieron Behr, Lesh, Post y Silver (1983), quienes basándose en el trabajo previo de Kieren (1981), definen seis caminos viables para la interpretación del número racional (en su representación de fracción): parte-todo, decimal, razón, división indicada (cociente), operador y medida. Mientras que en el trabajo anteriormente mencionado de Kieren (Op. cit.), este autor había definido cuatro subconstructos de los números racionales: medida, cociente, razón y operador. Este autor agregó también dos mecanismos clave para la construcción del concepto de fracción: equivalencia y partición. Ya que la interpretación parte-todo y medida, dependen directamente de la habilidad de partición, que se refiere a la división de un área o grupo en partes equivalentes; aquí se entiende a la equivalencia como la habilidad de reconocer igualdad en las partes.

En este mismo sentido, Llinares (1988) señala que al referirse a las fracciones como un mismo ente matemático, aún cuando puedan tener diferentes interpretaciones y representaciones, significa que tienen algo en común, y es la forma de expresarlas, generalmente como *a/b*, que indica un par ordenado de números naturales.

Llinares (Op. cit.), tomando en cuenta los trabajos de Kieren (1976), Behr, et.al. (1983) y Dickson, et.al. (1984) elaboró sus propias interpretaciones de la fracción, quedando de la siguiente manera: a) La relación parte-todo y la medida, donde quedan incluidas: representaciones en contextos continuos y discretos [números] decimales y [como puntos en] recta numérica; b) Las fracciones como cociente, donde también se incluyen: división indicada y [la fracción] como elemento de un cuerpo cociente; c) La fracción como razón, donde se incluyen probabilidades y porcentajes y d) La fracción como operador.

Al igual que sus antecesores (Kieren; Behr, Lesh, Post & Silver; Freudenthal, entre otros), Llinares (1988) advierte la complejidad implicada en la formación del concepto de fracción y en ese sentido recomienda que:

> para que el niño pueda conseguir una comprensión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con el concepto de fracción, se deben plantear las secuencias de enseñanza de tal forma que proporcionen a los niños la adecuada experiencia con la mayoría de sus interpretaciones. (Kieren, 1976; Dienes 1972, citados en Llinares, 1988, p.53)

1.1.1.2 *Constructos básicos de las fracciones: unidad y medida.*

Clarke y Sukenik (2006) evaluaron el entendimiento de 323 alumnos de sexto grado de educación primaria, sobre unidad y partición. La comprensión de estos dos conceptos [unidad y partición] es considerada como una de las grandes ideas que dan soporte a los subconstructos: parte-todo, medida, división y operador. Estos investigadores diseñaron aproximadamente 50 diferentes tareas para evaluar el conocimiento de unidad y medida, por parte de los estudiantes de ese nivel educativo. Estos autores encontraron que poco menos de la mitad de los alumnos evaluados dieron respuestas correctas para parte-todo, partiendo de la identificación de la unidad y la partición adecuada del entero, lo que significa que debe reforzarse este concepto. Por otra parte y con relación a medida, utilizando la recta numérica, cerca de las dos terceras partes de los estudiantes dieron respuestas incorrectas. Lo que también indica que se requiere diseñar y usar actividades con énfasis en este concepto para que los estudiantes puedan superar estas dificultades.

En otro estudio, Malet (2010) analiza los diferentes significados de las fracciones a partir de la fenomenología didáctica de Freudenthal. Este autor pone énfasis en la fuerte interrelación entre algunos significados, como: la parte-todo y medida, así como la parte-todo y unidad, para determinar una fracción. Sin embargo, concluye que:

> el carácter monocorde, con que curso tras curso volvemos sobre las fracciones, enfatizando sólo uno de sus significados posibles: el de partes de un todo…[crea el riesgo de que]

> nuestros alumnos puedan desarrollar una visión sesgada, incompleta y parcial del megaconcepto de fracción, que tal vez esté en la raíz de las dificultades con las que repetidamente tropiezan. (p. 16)

En otra investigación, Yanik, Helding y Flores (2008) investigaron las dificultades de entendimiento de alumnos de educación secundaria del constructo unidad, asociado con la interpretación de medida de la fracción, utilizando como herramienta la recta numérica. Estos autores llevaron a cabo una evaluación previa, cuyo objetivo fue determinar el estado de sus conocimientos, posteriormente aplicaron experiencias de enseñanza por un periodo de tres semanas y nuevamente aplicaron una evaluación para confrontar los resultados. Las conclusiones de estos autores indican serias dificultades iniciales de los estudiantes respecto al concepto de unidad; sin embargo, con la ayuda del material concreto y las diferentes actividades aplicadas, hubo una mejora notable de sus conocimientos al relacionar la ubicación de fracciones en la recta numérica con la interpretación de medida.

Por otra parte, Cortina y Cardoso (2009) llevaron a cabo un estudio con niños mexicanos en el último grado de educación primaria, para conocer el entendimiento que tienen acerca de conceptos básicos de las fracciones como: representación en modelo continuo y recta numérica, parte-todo, partición y medida, y determinar si estos alumnos se encontraban listos para abordar los contenidos que se manejan en la educación secundaria [en México es el siguiente nivel educativo], encontraron que sólo 40% de los estudiantes evaluados tenían la posibilidad de acceder al siguiente nivel educativo, sin dificultades; mientras que otro 60% necesitaría una gran cantidad y variedad de ejercicios para lograr fuertes ideas que faciliten el entendimiento de los conceptos básicos de las fracciones en el siguiente nivel educativo.

1.2 DELIMITACIÓN DEL TEMA DE INVESTIGACIÓN

Las fracciones como concepto específico de la asignatura de matemáticas en la educación primaria, forman parte del currículo oficial[6] de nuestro país. Los contenidos relacionados con ellas se abordan formalmente a partir del tercer grado; de manera subsecuente en cada grado los contenidos de las fracciones varían tanto en su tipo como en su profundidad de

[6] De acuerdo con la Ley General de Educación vigente, el Plan de estudios 2011 de la Secretaría de Educación Pública, que conforma el currículum oficial, es aplicable y obligatorio a todo tipo de escuela primaria del país.

tratamiento. En este sentido, se advierte que en los Programas de estudio de los cuatro últimos grados de la educación primaria se abordan los constructos referentes al concepto de fracción (identificados por Kieren, 1985) de: partición, equivalencia, unidad, parte-todo, medida, y cociente (véase tabla de contenidos, Anexo 1).

Tomando en consideración la problemática antes descrita, en torno a las fracciones, se infiere que los profesores de educación primaria están obligados a conocer, manejar y enseñar los conocimientos implicados en cada uno de los constructos mencionados anteriormente y que implícitamente se encuentran en los Programas de estudio de cada grado a partir del tercero. Sin embargo, es precisamente en este rubro en el que surgen varias interrogantes; por ejemplo, ¿qué saben de las fracciones los profesores de primaria? ¿Conocen e identifican los constructos que dan origen a los diferentes significados que adquieren las fracciones? ¿En qué se fundamenta el conocimiento que poseen los profesores para enseñar fracciones? ¿Por qué a profesores y alumnos les resulta difícil comprender este concepto, en cuanto a su enseñanza y aprendizaje respectivamente?

Diversas investigaciones sobre las fracciones (e.g., Noelting, 1980; Kieren, 1985; Streefland, 1987; Armstrong, 1995, y Lamon, 1996, entre otros) reportan dificultades en la adquisición y comprensión de éstas por parte de los estudiantes. Razón por la que investigadores como Baturo (2004) y Amato (2006), entre otros, decidieron irse a la contraparte del aprendizaje; es decir, la enseñanza que imparten los profesores de esos contenidos curriculares. Con la inquietud de poder encontrar la causa que originaba las dificultades en la comprensión y adquisición de los conocimientos a los alumnos, sus trabajos se enfocaron en profundizar el conocimiento de los profesores sobre las fracciones; con mediciones posteriores a la aplicación de sus estrategias los resultados constataron la mejora en el aprendizaje de los alumnos.

Sabiendo de antemano que en los procesos de enseñanza y de aprendizaje influyen diversos factores [sociales, económicos, culturales, etc.] a los cuales se les pueden atribuir las causas de éxito o fracaso de la educación, es necesario resaltar que el solo hecho de indagar en el conocimiento de los profesores implica en sí mismo un ejercicio de introspección del que pueden surgir ideas y conceptos de los cuales no se tiene conciencia plena, lo que puede favorecer la reflexión crítica acerca de un tema específico.

1.3 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Con base en la revisión de investigaciones enfocadas en la detección de deficiencias en el conocimiento e ideas erróneas de los profesores reportadas por Baturo (2004); Llinares (2004); Morcote y Flores (2004); Amato (2006); Izsak (2006); Alatorre y Saiz (2008), Llinares y Sáchez (2008); Park, Gucler y Mc Crory (2010); Castro y Li (2010) y Riley (2010), entre otros; además de las investigaciones enfocadas en profesores que resaltan la importancia del trabajo de estos en el desempeño de sus alumnos (e.g., Askew, 2000; Ball, 2000; Carpenter, 2000; Baruch, 2006 y Cooper, 2006,entre otros), surgen básicamente tres preguntas de investigación que dan cuerpo a este trabajo.

a) ¿Qué conocimiento matemático necesitan profesores de educación primaria para mejorar su práctica docente en la enseñanza de las fracciones?
b) ¿Qué conocimientos referentes a las fracciones poseen profesores de educación primaria, y cómo lo sustentan?
c) ¿Cómo influye un Taller sobre fracciones en la mejora del conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza de fracciones en educación primaria?

1.4 HIPÓTESIS

Considerando únicamente la tercera pregunta planteada para esta investigación, surge la idea de que el diseño y la implementación de un Taller para profesores de educación primaria, sobre el tema específico de fracciones; favorece en ellos [los profesores] la construcción de nuevo conocimiento, a partir de la reflexión y el descubrimiento de sus ideas erróneas.

1.5 OBJETIVOS

Con apoyo en la literatura revisada, se parte del supuesto de que ampliando y profundizando el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores, se mejora su práctica docente y, por consiguiente, el desempeño de sus alumnos. Por lo que este trabajo de investigación tiene básicamente dos objetivos generales.

1) Indagar el conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones que poseen los profesores de educación primaria.

2) Implementar un Taller sobre el tema de las fracciones como eje rector [herramienta], para descubrir las implicaciones que éste pueda tener en la mejora del conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores de educación primaria.

De los objetivos planteados anteriormente se desprenden los siguientes objetivos particulares o específicos que complementan la investigación.

a) Identificar qué saben los profesores de educación primaria acerca de los constructos: unidad y medida.
b) Que a través de la socialización, los profesores expresen sus ideas, inquietudes y conocimientos referentes a las fracciones, mediante la confrontación de ideas.

c) Que la implementación del Taller con los profesores de educación primaria coadyuve en la comprensión, entendimiento y profundización del conocimiento de las fracciones de ellos.

1.6 JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

En la comunidad educativa existe preocupación constante por mejorar la calidad de la enseñanza que reciben los alumnos de educación primaria, dados los alarmantes resultados mostrados en algunas evaluaciones internacionales y nacionales efectuadas a los alumnos de nuestro país (e.g., PISA, EXCALE, ENLACE). Estas evaluaciones han medido básicamente tres áreas de conocimiento: español, matemáticas y ciencias. Los resultados de estas evaluaciones muestran como factor común un bajo desempeño de los alumnos; sobre todo, en matemáticas (Cortina, 2006). Por esta razón, fue necesario implementar acciones que se vieran encaminadas a resolver esta problemática.

En este sentido, Hitt (1998) reportó que desde hace ya algún tiempo se han tomado medidas al respecto, como: cambio del esquema curricular, cambio de libros de texto, capacitación de maestros, etc., sin embargo, el problema persiste.

Por las razones mencionadas antes, en esta investigación se considera necesario: en primer lugar, determinar los conocimientos matemáticos de las fracciones que tienen los profesores de educación primaria. Tomando como punto de partida estos conocimientos, detectar las necesidades de ellos [en cuanto al conocimiento débil o ausencia de éste] y a través de capacitación cubrirlas. Esta capacitación consiste en la actualización y profundización del conocimiento matemático que el maestro pone en juego durante su práctica docente. Razón por la cual se eligió como estrategia básica la implementación de un Taller, para que de esta manera se dé la oportunidad de ampliación y profundización de los conocimientos de los profesores a través de la socialización del conocimiento entre pares y se propicie una búsqueda conjunta de soluciones.

Esta idea surgió con base en investigaciones realizadas con profesores por Ball (2000); Ball y Bass (2000); Ball (2009) y Mochón[7] (2010), entre otros, quienes implementaron Talleres con fines educativos a profesores de educación primaria. Estos Talleres, de acuerdo con estos investigadores, potenciaron, entre otras estrategias: conocer, ampliar y profundizar los conocimientos de las fracciones, tanto en constructos específicos como los mencionados anteriormente, como en su conocimiento matemático de otros objetos matemáticos ligados con las fracciones (c.f., Ramírez, M.T., 2008; Andrade, S., 2009; Hernández, M., 2010; Pérez, E.L., 2010 y Morales, M., 2013).

Las necesidades específicas de los docentes en la asignatura de matemáticas han sido focalizadas especialmente en las fracciones, que recurrentemente se mencionan entre los temas más difíciles para su enseñanza y para el aprendizaje por parte de los alumnos, una razón más para que se brinde atención a este concepto. Así lo demuestran investigaciones como la de Hernández (2009) quien a partir de cuestionarios exploratorios aplicados a 30 estudiantes de educación primaria evidenciaron dificultades en los alumnos para identificar la unidad de medida en problemas que implicaban el uso de las fracciones en situaciones de medida y dificultades para la identificación de la parte-todo. Este mismo investigador elaboró secuencias didácticas que permitieron a los estudiantes, darle significado a las fracciones y las utilizaron como herramientas para solucionar problemas.

Por otro lado, Lamadrid (2011) centró su atención en el análisis de la enseñanza de las fracciones por parte de los profesores de educación primaria; poniendo énfasis en los conocimientos que tienen acerca de la semántica de las fracciones [sus significados] y su

[7] Investigador del Centro de Investigaciones Avanzadas del IPN, ha dirigido diversas investigaciones centradas en el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de profesores de educación primaria, utilizando como principal estrategia la implementación de Talleres.

carácter sintáctico [cómo operar con estos objetos matemáticos]. Esta autora concluye que los profesores promueven aprendizajes mecanizados, sin considerar los conocimientos previos de los alumnos; además considera importante:

> Que los docentes reflexionen acerca de la actividad realizada, sobre sus procesos de resolución y las tareas planteadas como estrategias de enseñanza […] los docentes tienen saberes empíricos acerca de la fracciones en relación al [con el] conocimiento de contenido pedagógico. (p. 204)

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

INTRODUCCIÓN

Los conocimientos y habilidades que ponen en práctica los docentes de matemáticas durante el desarrollo de su trabajo cotidiano han sido objeto de estudio desde hace algunas décadas, debido a la repercusión que estos [los conocimientos] tienen sobre el aprendizaje de los estudiantes que atienden (e.g., Shulman, 1986). En nuestro país, los docentes de educación primaria son los encargados de conducir la enseñanza del conocimiento matemático, aún cuando en muchos casos no tienen una preparación especializada en esta área; sin embargo, debido a la naturaleza de la organización escolar, son ellos quienes llevan a cabo esta tarea.

Investigar los conocimientos matemáticos que posee un profesor puede resultar una tarea complicada si se considera que tales conocimientos deben ser los necesarios y adecuados para la enseñanza, además de que se encuentran estrechamente vinculados con las habilidades pedagógicas que posee el profesor y las herramientas didácticas que utiliza. Sosa y Carrillo (2010) advierten que debido a la complejidad que subyace a la práctica docente y la preocupación de diversos investigadores en torno a este tema [el conocimiento matemático para la enseñanza], surgieron básicamente tres perspectivas de investigación, entre otras, denominadas: “Matemáticas para la enseñanza” (Davis & Smmit, 2006), “El cuarteto del conocimiento” (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005), y “Conocimiento matemático para la enseñanza” (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Cada una de las perspectivas mencionadas anteriormente, confluyen en que parten de las mismas bases, que las asentadas por Shulman y su equipo de investigación (Op. cit.); sin embargo, cada una de éstas [las perspectivas] explora el conocimiento de los profesores con diferentes enfoques. Por ejemplo, al equipo de Davis le interesó saber cómo aprenden los profesores a través del estudio de conceptos. Por su parte, el equipo de Rowland elaboró un marco conceptual propio, en el que estableció cuatro categorías del conocimiento de un profesor: fundamentos, transformaciones, conexiones y contingencias. Finalmente, la perspectiva de Ball y sus colegas refinó el modelo propuesto por Shulman, enfocándose en el contenido del conocimiento matemático que utilizan los profesores para enseñar.

2.1 EL CONOCIMIENTO DE CONTENIDO Y PEDAGÓGICO

En 1986, Shulman, Wilson, Grossman y Richert introdujeron en el léxico de las investigaciones sobre enseñanza y educación de profesores el término “Conocimiento de Contenido Pedagógico” (PCK, por sus siglas en inglés). El término llamó la atención a un tipo especial de conocimiento del profesor que vinculaba contenido y pedagogía. En adición al Conocimiento Pedagógico y Conocimiento del Contenido, Shulman y sus colegas argumentaron que los profesores necesitan conocer cosas del tipo: ¿Qué tópicos los niños encuentran interesantes o difíciles? O las representaciones más usuales para la enseñanza de un contenido o idea específica, las ideas erróneas más comunes que tienen los estudiantes, etc. Shulman afirma que:

> en la literatura de investigación en enseñanza, se hace [pone] énfasis en cómo los maestros manejan su salón de clases [es decir] cómo organizan actividades, asignan tiempos y turnos, estructuran asignaturas, atribuyen alabanzas y culpas, formulan preguntas en diferentes niveles, planean lecciones y generalmente juzgan la comprensión de los estudiantes…[sin embargo] están ausentes preguntas acerca del contenido de las lecciones que enseñan, las preguntas que hacen [respecto de los contenidos] y las explicaciones que ofrecen [de los conocimientos que enseñan]. (p. 8)

Shulman (1986) reconoce que la idea de evaluar las competencias de un profesor en cuanto a la materia sujeto de conocimiento y sus habilidades pedagógicas no es nueva; ésta tiene sus raíces en 1875, cuando se les aplicaba una evaluación a los profesores para determinar sus conocimientos en diversas áreas, y se incluían también preguntas referentes a teoría y práctica de enseñanza. Desde entonces se consideraba que “la persona que se atreve a enseñar las materias a los niños debe demostrar [mostrar] el conocimiento de la materia como requisito previo para la enseñanza” (p. 5).

Este énfasis en la evaluación de la materia, sujeto de conocimiento, resurge en la década de 1980. En algunos estados [de Estados Unidos] se enfatizó en la evaluación de los profesores en cuanto a la capacidad para enseñar, la cual fungió como base para la concepción de los maestros efectivos; idea que se acuñó en investigaciones llevadas a cabo en el Reino Unido (e.g., Askew, Brown, Rhodes, Jhonson & Wiliam, 1997; Brown, Askew, Baker & Millett, 1998; Brown, 1999, y Askew, Brown, Denvir & Rhodes, 2000) donde a través de observaciones de clase principalmente, aplicación de cuestionarios y entrevistas, se investigó por qué las clases de algunos profesores obtenían mejores resultados que otros, y finalmente los investigadores constataron que la naturaleza de la relación entre el maestro y los alumnos es crucial en el aprendizaje.

Un ejemplo claro acerca de la estrecha relación que guarda la mejora de conocimientos y el cambio de creencias de los profesores, con la mejora en los logros de los estudiantes es la investigación llevada a cabo por Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (2000), quienes a través de un estudio longitudinal, de manera conjunta con su investigación desarrollaron un programa de desarrollo profesional llamado "Instrucción Cognitivamente Guiada" (CGI, por sus siglas en inglés). Estos investigadores encontraron que aprender a entender el desarrollo del pensamiento matemático de los niños puede llevar a cambios fundamentales en las creencias y prácticas de los profesores y que estos cambios se reflejan en el aprendizaje de los estudiantes de manera positiva. Además, pudieron determinar cuatro niveles de creencias y prácticas de los profesores; que a medida que se incrementan muestran mayor efectividad sobre el logro de sus estudiantes:

Nivel 1. Son profesores que creen que necesitan enseñar explícitamente los pasos de un procedimiento. Los profesores demuestran y los niños practican aplicando lo mostrado por el maestro. En sus clases hay poca o ninguna discusión acerca de la solución a un problema.

Nivel 2. Los profesores comienzan a cuestionarse si los alumnos necesitan instrucción explícita para resolver problemas y alternadamente proveen oportunidades para que los alumnos resuelvan utilizando sus propias estrategias; sin embargo, continúan dando ellos mismos la clase.

Nivel 3. Son profesores que piensan que los alumnos pueden resolver problemas utilizando sus propias estrategias y proveen a los niños de oportunidades para ejercitarlas, además motivan, entiende y logran percibir la variedad de soluciones que presentan sus alumnos.

Nivel 4. Son profesores que escuchan, entienden y toman el razonamiento de sus alumnos como marco para planear la instrucción. Continuamente reflexionan, modifican y adaptan sus modelos de enseñanza de acuerdo con el razonamiento de sus estudiantes.

Como resultado de estas y otras investigaciones se logró una descripción detallada de las características de comportamiento y conocimientos que poseen los maestros efectivos (e.g., Clarke, 2001; Clarke, McDonough & Sullivan, 2002, y McDonough & Clarke, 2003), y se elaboraron programas que encaminaran a los profesores para desarrollar las características de los maestros efectivos. En esta última investigación, McDonough y Clarke, 2003 obtuvieron un refinamiento de las características que distinguen a los maestros efectivos. A continuación se enlistan las 25 prácticas identificadas de profesores efectivos, divididas en 10 categorías:

Tabla 1

Caracterización de los maestros efectivos, tomada de McDonough y Clarke, 2003

CATEGORIA	PRACTICAS
1.Foco Matemático	➢ Se enfoca en ideas matemáticas importantes. ➢ Hace este foco matemático claro a los alumnos.
2. Características de las tareas.	➢ Tareas estructuradas con propósito que posibiliten emerger diferentes posibilidades, estrategias y productos. ➢ Escogen tareas que atraen a los niños y los mantienen involucrados.
3. Materiales y representaciones.	➢ Usan un rango de materiales, representaciones o contextos para el mismo concepto.
4. Adaptaciones y	➢ Utilizan momentos con posibilidades de enseñar cuando

conexiones.	ocurren. ➢ Hacen conexiones con ideas matemáticas de lecciones o experiencias previas.
5. Estilos de organización y aproximaciones de enseñanza.	➢ Atraen y centran el pensamiento matemático de los niños a través de una actividad introductoria grupal. ➢ Eligen de una variedad de estructuras individuales o de grupo y roles del maestro dentro de mayor parte de la lección.
6. Comunidad de aprendizaje e interacción en el salón	➢ Usan un rango de tipos de preguntas para sondear y retar el pensamiento y el razonamiento de los niños. ➢ Se contienen de decir todo a los estudiantes. ➢ Motivan a los niños para explicar sus pensamientos o ideas matemáticas. ➢ Comprometen a los niños a escuchar y evaluar otras ideas o pensamientos matemáticos, y ayudar con métodos y entendimiento. ➢ Escuchan atentamente a cada alumno. ➢ Construyen a partir de las ideas y estrategias matemáticas de los niños.
7. Expectativas	➢ Tienen expectativas matemáticas altas pero realistas de todos los niños. ➢ Promueven y valoran el esfuerzo, la persistencia y la concentración.
8. Reflexión	➢ Extraen ideas matemáticas claves durante y al finalizar la lección. ➢ Después de la lección, reflexionan las respuestas de los niños y su aprendizaje, junto con las actividades y el contenido de las lecciones.
9. Métodos de evaluación	➢ Recogen datos de sus observaciones y de escuchar a los niños, tomando notas cuando sea apropiado. ➢ Utilizan una variedad de métodos de evaluación.

	➢ Modifican su planeación como resultado de su evaluación.
10. Atributos personales del profesor	➢ Creen que el aprender matemáticas puede y debe ser ameno. ➢ Tienen confianza en su propio conocimiento matemático al nivel que enseñan. ➢ Muestran orgullo y placer por el éxito de cada individuo.

No obstante, desde la década de 1980 en que Shulman y su equipo de trabajo detectaron que hasta ese momento había ausencia de investigaciones en el sentido estricto del conocimiento en sí mismo, y se dieron a la tarea de elaborar un programa al que ellos denominaron "Crecimiento del conocimiento en la enseñanza", donde pusieron especial atención en los aspectos de contenido que se manejan en la enseñanza y las capacidades que se requieren de un profesor para hacer comprensible el conocimiento a sus estudiantes. Por ello, estos investigadores sugirieron distinguir tres categorías de conocimiento de contenido: a) Conocimiento de contenido de la materia sujeto de conocimiento, b) Conocimiento de contenido pedagógico y c) Conocimiento curricular, aspectos que de alguna manera engloban todas las características antes mencionadas de los maestros efectivos, razón por la que hasta la actualidad continúan investigándose.

2.1.1 ***Conocimiento de contenido de la asignatura***

Originalmente, Shulman (1986) denominó a este tipo de conocimiento como *Subject matter content knowledge*; sin embargo, por cuestiones prácticas, en este trabajo se denomina conocimiento de contenido de la asignatura. Al describir Shulman este tipo de conocimiento, "se refiere a la cantidad y organización del conocimiento en la mente del profesor" y más adelante agrega que "pensar adecuadamente sobre el conocimiento del contenido requiere ir más allá del conocimiento de los hechos o conceptos de un dominio" (p. 9). El profesor no sólo necesita entender que algo es así, también tiene que entender "porqué" es así y explicarlo.

2.1.2 *Conocimiento de contenido pedagógico*

Shulman (Op. cit.) afirmó que este tipo de conocimiento va más allá del conocimiento de la materia en sí misma, ya que se convierte en un conocimiento para la enseñanza. En este mismo sentido, Mochón (2010) redefine este tipo de conocimiento y lo expresa en los siguientes términos: “el conocimiento de contenido pedagógico es una mezcla compleja de conocimientos y capacidades pedagógicas del profesor relacionados con los contenidos que enseña” (p. 89). Este tipo de conocimiento también incluye las formas más poderosas de representación de las ideas, las más poderosas analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. En una palabra, caminos de representación y formulación que el profesor hace comprensible para otros. También, incluye entendimiento de lo que hace que el aprendizaje de temas específicos sea fácil o difícil (ibídem).

Aunado a lo anterior, el conocimiento de contenido pedagógico incluye un entendimiento [por parte del profesor] de las concepciones, preconcepciones y concepciones erróneas que tienen los estudiantes de diferentes edades acerca de temas referentes a la materia de enseñanza. Por ello, necesitan saber distinguirlas cuando se presenten y conocer las estrategias más adecuadas para salvar dificultades inmersas en ellas. Todo esto se encuentra en un amplio conocimiento de cómo aprenden los estudiantes, los errores que comenten y sus procesos de aprendizaje.

2.1.3 *Conocimiento curricular*

Este tipo de conocimiento se refiere al conocimiento [total, parcial o desconocimiento] del currículo, el cual de acuerdo con Shulman es:

> todo el rango de programas diseñados para la enseñanza de una asignatura en particular y temas de un nivel determinado, la variedad de materiales de instrucción disponibles, en relación con estos programas, y el grupo de características que sirven como indicadores para el uso del currículo. (p. 10)

El conocimiento y entendimiento de esta herramienta pedagógica permite al profesor saber de antemano las alternativas que tiene disponibles para la instrucción. Además, el dominio de este conocimiento fomenta [de acuerdo con las habilidades del profesor] la correlación de diferentes temas en una misma clase, y propicia el conocimiento profundo de un tema específico asociado con la asignatura de enseñanza, al darse cuenta el profesor de que no lo domina completamente; lo cual puede servir también para la evaluación de las capacidades del profesor.

2.2 EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA (TMK)

En 1995, Ball afirmó que “el conocimiento de contenido es crucial para la creatividad e inventiva de oportunidades valiosas de aprendizaje para los alumnos, brindándoles experiencias de acuerdo con sus intereses y necesidades” (citado en Ball, 2000, p. 242). Advirtió que el aula ofrece retos que requieren cierta responsabilidad de conocimiento de la materia que se enseña, por lo que es necesario hacer esfuerzos para brindar a los estudiantes oportunidades para aprender mediante experiencias y el uso eficaz de los recursos que desafíen las capacidades de los alumnos.

Los profesores deben hacerse preguntas del tipo ¿esta puede ser una buena tarea para mis estudiantes?, ¿vale la pena esta actividad en términos de lo que puedan aprender mis estudiantes?, ¿cuál es el potencial matemático de esta tarea? Éstas entre otras preguntas pueden hacerse con el planteamiento de un solo problema matemático. Sin embargo, algunos profesores presentan dificultades incluso para plantear un problema adicional a los contenidos en los libros de texto, o bien de hacer modificaciones en algunos [problemas matemáticos] de acuerdo con las necesidades de sus alumnos, lo cual indica un pobre entendimiento [dominio] de la asignatura que se enseña (Ball, 2000).

Ball y Bass (2000) concordaron con Shulman en que un profesor, para tener altos niveles de instrucción e interacción con sus alumnos, necesita un conocimiento sólido de la materia que enseña y de técnicas pedagógicas. Sin embargo, advierten que esto no es suficiente en un profesor que enseña matemáticas, ya que éste además debe llevar a cabo cuatro actividades centrales: a) Desglosar ideas y procedimientos matemáticos, b) Escoger representaciones para mostrar ideas matemáticas, c) Analizar métodos y soluciones diferentes de las propias y d) Deducir lo que entienden sus alumnos (citado en Mochón, 2010, p. 89).

Ball y Bass (ibídem) elaboraron un modelo propio, ampliando el propuesto por Shulman, y al que le dieron un predominio matemático, y que denominaron: “Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (MKT, por sus siglas en inglés). Estas investigadoras agregaron tres componentes más a los establecidos por Shulman, y se enfocaron principalmente en la materia sujeto del conocimiento; diferenciando los tres componentes en: a) Conocimiento Común del Contenido, b) Conocimiento Especializado del Contenido y c) Conocimiento del Horizonte Matemático.

Figura 2.1. Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, Ball, 2009).

2.2.1 ***Conocimiento Común***

Este tipo de conocimiento se refiere al que, conjuntamente con otras habilidades, se utiliza en diferentes situaciones que no son de enseñanza. Es el de una persona adulta bien preparada. El cálculo que se lleva a cabo para buscar la correcta solución de problemas. Es decir, el conocimiento matemático general que se utiliza en actividades cotidianas, no relacionadas con la enseñanza. Es un conocimiento que no es único de los profesores y tampoco corresponde al conocimiento de un experto en matemáticas. Por ejemplo, efectuar operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números naturales o con cualquier otro tipo de números, o bien calcular el área de una figura geométrica, entre otro tipo de actividades matemáticas.

Los profesores, en cambio, necesitan conocer el material que ellos enseñan, pero conocerlo de una manera profunda [procedimental y conceptualmente, para poder dar ejemplos claros] y no sólo el que corresponda al currículo del nivel educativo donde se trabaje, sino además conocer el del nivel anterior y tener noción del siguiente nivel educativo que estudiará el alumno. Cuando los profesores escriben un ejemplo o ejercicio en el pizarrón, ellos necesitan usar términos y anotaciones correctamente para que sus alumnos los entiendan, y que no se queden sólo con los conocimientos comunes que ya tenían previamente. Ellos [los profesores] tienen que ser capaces de trabajar la asignatura con sus estudiantes, para enriquecer su conocimiento común, sin llegar al conocimiento especializado.

En 1976, Skemp ya hacía precisiones acerca del "entendimiento o comprensión instrumental y el entendimiento o comprensión relacional", ya que decía que la palabra entendimiento o comprensión por sí misma podía tener ambos significados que resultan completamente diferentes. El primero [instruccional] se refiere únicamente al entendimiento mecanizado [aplicar reglas sin entenderlas] mientras que el segundo [relacional] implica una comprensión conceptual, donde se tienen claras las relaciones entre diferentes conceptos y se entienden los por qué de ciertos procedimientos. Este autor ya proponía desde entonces la necesidad de que un profesor debía poseer ambos tipos de comprensión.

*2.2.2 **Conocimiento Especializado***

Es el conocimiento matemático, e incluye las habilidades propio y único de los profesores, pues incluye su capacidad para distinguir, averiguar, valorar e interpretar la validez de diversas e inesperadas respuestas de los alumnos. Es un conocimiento que va más allá de lo que se espera de una persona adulta bien preparada y de lo que se enseña a los estudiantes. Es un conocimiento que implica un misterioso desembalaje de las matemáticas. Este tipo de conocimiento requiere dominar los procedimientos necesarios para resolver operaciones como suma, resta, multiplicación o división de fracciones, pero además requiere el comprender "porqué" se utilizan y porqué son así; es decir, requiere un dominio conceptual de los mismos.

Ball (2009) formuló tres tareas fundamentales para desarrollar este tipo de conocimiento: 1) Escribir problemas o historias a partir de una operación que las represente, 2) Analizar el razonamiento que produce cada una de las respuestas o soluciones a una operación o problema planteado y 3) Analizar los errores; es decir, identificar los pasos o procedimientos que producen una solución incorrecta, o que tal vez se haya utilizado el procedimiento incorrecto para la solucionar el problema, o bien llevar a cabo, de forma correcta, la operación planteada.

Ball (Op. cit.) se convenció de que este tipo de conocimiento se puede desarrollar a partir de estas tareas que están encaminadas a desafiar los conocimientos previos de los profesores, donde además se ponen en juego sus conocimientos y habilidades cognitivas conjuntamente con su creatividad y originalidad para elaborar situaciones didácticas que impliquen escoger, hacer y usar representaciones matemáticas efectivas de "objetos matemáticos" utilizados en la enseñanza; además de que estas tareas les permiten explicar y justificar ideas matemáticas. Es decir, estar consciente de lo que realmente sirve para enseñar un tema matemático en específico. Por ejemplo, saber qué tipo de representación gráfica es la más adecuada para una suma de fracciones con diferentes denominadores, o plantear un problema verbal a partir de una operación dada (e.g., $\frac{2}{3}$ x 2 = 1 $\frac{1}{3}$). Mochón (2010) enuncia cuatro aspectos relacionados con este tipo de conocimiento:

> a) conocer con profundidad los conceptos fundamentales de cada uno de los tópicos, b) conocer no sólo el cómo sino los porqués de lo que se va a enseñar, c) desglosar ideas y procedimientos matemáticos para hacerlos más simples (en niveles comprensibles para sus estudiantes) y d) conocer las conexiones entre diferentes tópicos, entre diferentes conceptos e inclusive entre su materia y las demás del plan de estudios. (p. 94)

2.2.3 ***Conocimiento de contenido y estudiantes***

De acuerdo con Ball (2010) es un tipo de conocimiento que combina conocimiento de estudiantes y conocimiento de las matemáticas. El primero [conocimiento de estudiantes] está ligado a conocimientos de tipo psicológico y pedagógico; es decir, a conocimientos generales del desarrollo del pensamiento de los estudiantes [e.g., de nivel primaria] y la forma como aprenden, las diferentes etapas por las que atraviesan, los intereses que van cambiando con la madurez biológica natural de los niños y en el aspecto pedagógico implica el conocimiento de los diversos métodos y estrategias de enseñanza de los contenidos de acuerdo con el grado [nivel escolar] que cursa el alumno.

El segundo elemento, de este tipo de conocimiento, se refiere a los contenidos específicos de las matemáticas que se manejan en los diferentes niveles de enseñanza, por lo que su importancia radica en el hecho de saber “qué” se va a enseñar concretamente en un curso en particular –por ejemplo: qué contenidos específicos de las fracciones se enseñan en el tercer grado de educación primaria y la forma como se van graduando los mismos contenidos en los siguientes grados escolares– lo que permite al profesor establecer criterios de evaluación del contenido específico; otro ejemplo puede ser una misma pregunta planteada a estudiantes de dos diferentes grados escolares, permite conocer si el alumno posee el conocimiento adecuado a su ciclo y de alguna manera detectar si se están formando conceptos erróneos en él.

Con el dominio de este conocimiento [de contenido y estudiantes] los profesores pueden anticipadamente saber cómo piensan sus estudiantes, qué tipo de contenidos pueden causarles confusión, etc. Cuando los profesores escogen un ejemplo, necesitan predecir si resultará interesante o motivador para sus alumnos, o si alguna tarea les resultará fácil o difícil de llevar a cabo. Un elemento importante a considerar en este tipo de conocimiento, es el conocimiento común de los estudiantes; es decir, el conocimiento que ya poseen acerca del tema, ya que con base en éste [el conocimiento común de los estudiantes] emergen las concepciones, preconcepciones o concepciones erróneas acerca de un contenido matemático en particular. En este sentido, es tarea del profesor reconocer la naturaleza de sus concepciones así como del surgimiento de los errores y poner atención a patrones de respuestas incorrectas o erróneas que se presenten en varios de sus estudiantes, porque esto es señal de que algo está mal en el proceso de enseñanza. En este sentido, Chick & Baker (2005, citados en Ramírez, M.T., 2008) sugieren que un componente para identificar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza [de los profesores] es el conocimiento y manejo de los conceptos equivocados del estudiante (p. 12).

Así, el profesor debe tener un pensamiento flexible para entender los diferentes caminos de solución que pueden utilizar los estudiantes y valorarlo para poder aclarar sus dudas, de tal manera que pueda darles la pauta para que ellos mismos [los estudiantes] mediante el razonamiento y la confrontación puedan corregir sus errores.

2.2.4 ***Conocimiento de contenido y enseñanza***

Al igual que el anterior, este tipo de conocimiento combina dos elementos fundamentales en la tarea cotidiana del docente: conocimiento de la enseñanza y conocimiento de las matemáticas. Al respecto, Ball, Thames y Phelps (2008) señalan que "muchas de las tareas de enseñanza de las matemáticas requieren conocimiento de diseño de la instrucción" (p. 401), es decir, el profesor debe saber diseñar una clase [que implica diferentes actividades y tareas] para acercar los conocimientos matemáticos a sus alumnos. Para poder llevar a cabo la tarea de diseñar una clase, es necesario que el profesor tenga conocimientos de enseñanza [didácticos] que impliquen el conocimiento de estrategias efectivas y el uso de recursos [materiales] viables para la enseñanza.

Cooper, Baturo y Grant (2006) utilizaron el método de acción colaborativa y determinaron las características de interacciones didácticas que llevan a un alcance positivo en el aprendizaje de los alumnos; afirman que una "enseñanza exitosa" requiere de tres niveles de pedagogía; establecidas de la siguiente manera: 1) *Técnicas*, son consejos y sugerencias prácticas relacionados con los aspectos técnicos de una lección particular, una actividad o el uso de un material. 2) *De Dominio*, son estrategias de enseñanza apropiadas a un tópico en particular, y están conectadas con la conversación en el aula y las herramientas utilizadas, y 3) *Genéricas*, son métodos de enseñanza aplicables a todos los tópicos matemáticos, como los sugeridos por Kruteskii: flexibilidad, inversión, generalización y otro de Hershkowitz, acerca del uso de ejemplos no prototípicos.

Respecto al conocimiento en sí mismo, no basta con que el profesor tenga un conocimiento profundo de las matemáticas; es decir, que conozca varios procedimientos para efectuar las operaciones aritméticas propuestas, sino que sepa cuál de ellos [los procedimientos] resulta más efectivo para sus estudiantes, o que sepa escoger los ejemplos adecuados para un contenido particular. Esto hace necesario que el profesor sepa adecuar el conocimiento matemático para que pueda ser aprendido por sus estudiantes.

La interacción que se da entre la enseñanza de un contenido matemático específico y la forma como el estudiante entiende el contenido que se le está enseñando, afectan [positiva o negativamente] el aprendizaje del estudiante. Es decir, debe haber coordinación entre los contenidos matemáticos que se enseñan y las actividades instruccionales que se llevan a cabo durante la clase, para que su efecto en el aprendizaje del estudiante sea el esperado por el profesor. En este mismo sentido, Mochón, (2010) al delimitar el Conocimiento Matemático para la enseñanza, lo divide en tres apartados: a) conocimiento matemático especializado, b) conocimiento para la instrucción y c) conocimiento de estudiantes.

En este trabajo se retoma su definición del conocimiento para la instrucción, debido a que resume de manera precisa las ideas de Ball y sus colegas y lo adapta a las necesidades de su investigación acerca del conocimiento matemático para la enseñanza que requiere un profesor de educación primaria.

> Este conocimiento matemático-pedagógico se requiere en el diseño y planeación del trabajo en el aula para responder preguntas como: ¿cuál sería la secuencia más adecuada?, ¿qué ejemplo es el más apropiado para ilustrar esto?, ¿qué paradigma debo utilizar? Puntos conectados a este componente serían:
>
> a) Relevancia de los tópicos y de las ideas matemáticas.
>
> b) Diseño y secuenciación de clases, actividades y tareas.

c) Selección de representaciones e ilustraciones apropiadas que exhiban nociones matemáticas.

d) Preparar y dar explicaciones. (p. 94)

Esta investigación centra su atención en el conocimiento especializado de los profesores de educación primaria acerca de las fracciones. Por lo que se diseñaron cuestionarios y actividades que propiciaran en los profesores: 1) Escribir problemas o historias a partir de una operación que las represente, 2) Analizar el razonamiento que produce cada una de las respuestas o soluciones a una operación o problema planteado y 3) Analizar los errores de los estudiantes; es decir, identificar los pasos o procedimientos que producen una solución incorrecta, o que tal vez se haya utilizado el procedimiento incorrecto para solucionar el problema.

Para poder analizar la profundidad y amplitud de los conocimientos de los profesores, además de las respuestas dadas en los diferentes cuestionarios, conjuntamente con las actividades del taller, donde se buscó identificar la presencia de algunas de las características de los maestros efectivos enunciadas por McDonough y Clarke (2003). En este trabajo, también, se retoman las observaciones de Skemp (1976) acerca del tipo de entendimiento que poseen los profesores: instrumental o procedimental y conceptual o relacional.

CAPÍTULO 3

MÉTODO

INTRODUCCIÓN

El objeto de estudio de esta investigación es analizar y discutir el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores de educación primaria, desde el punto de vista teórico y pragmático, por lo que en primer lugar se comenzó por definir este objeto de estudio para poder establecer una manera de investigarlo. Para este efecto, la fundamentación de este estudio se basó principalmente en las teorías elaboradas por Shulman (1986) y Ball y colaboradores (1990-2010) entre otros, quienes abordaron en sus investigaciones este tipo de conocimiento. Como este objeto de estudio se encuentra acompañado invariablemente por individuos, fue necesario también establecer una estrategia que permitiera estudiarlo en un ambiente lo más natural posible, eligiendo para este hecho la implementación de un Taller que tuvo como eje rector el tema de las fracciones [tema que recurrentemente los profesores encuentran difícil para la enseñanza].

Se pensó que mediante la aplicación de cuestionarios y la práctica de diversas Actividades diseñadas y enfocadas especialmente en el tema de las fracciones saldrían a la luz los conocimientos de los profesores, así como sus ideas y concepciones de los temas relacionados con sus propias prácticas de enseñanza. De igual manera, durante la experiencia del Taller se buscó propiciar oportunidades de aprendizaje que generaron la discusión de los profesores, dejando ver con ello sus conocimientos sobre la temática discutida con ellos, concepciones, preconcepciones e ideas erróneas.

Para la implementación del Taller con profesores fue necesario tomar en cuenta factores como: la disposición de los mismos, el tiempo y los espacios a ocupar, ya que por experiencia propia se sabe que es difícil llevar a cabo actividades fuera del horario de trabajo, debido a una gran diversidad de limitantes [de índole personal, o bien institucional] de los profesores.

3.1 TIPO DE ESTUDIO

La investigación que se llevó a cabo se considera de tipo cualitativo, ya que "se enfoca a [en] comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto" (Hernández, 2010, p. 364). En este trabajo en particular la temática de estudio es el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de los profesores de educación primaria; explorándolo desde la perspectiva de los participantes a través de sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados; es decir, la forma en que los participantes perciben su realidad (Hernández, 2010).

Taylor y Bogdan (1990) consideran diez características fundamentales de la investigación cualitativa: 1) es inductiva, ya que se parte de los datos ya existentes; 2) el investigador [en esta metodología] ve el escenario y a las personas en una perspectiva holística; es decir, en su contexto y no como variables; 3) los investigadores son sensibles a los efectos que ellos mismos causan sobre las personas que son objeto de su estudio, se investiga en el entorno real y no en entornos creados específicamente para los fines de la investigación; 4) el investigador trata de experimentar la realidad como las personas que está estudiando; 5) el investigador no da nada por sobreentendido, aparta sus propias creencias perspectivas y predisposiciones; 6) aquí todas las perspectivas de investigación son valiosas, no se busca la verdad, ni la normalidad; 7) es humanista, en el sentido de que el interés está centrado en los individuos y no en cantidades estadísticas; 8) se pone de relieve la validez interna, más que en la confiabilidad o reproductibilidad; 9) en este tipo de investigación todos los escenarios y todas las personas son dignos de estudio y 10) sigue directrices orientadoras, pero no reglas (texto precedente parafraseado de Alvarez-Gayou, 2006, pp. 23-27).

3.2 ESCENARIO

Considerando las características anteriormente mencionadas, se puede afirmar que esta investigación se apega completamente a las de una investigación de tipo cualitativo, por lo que además se necesitó definir una estrategia que facilitara el proceso de investigación, y que resultara lo más natural posible, por lo que se eligió la implementación de un Taller, entendiendo a éste como:

un lugar donde se trabaja y se elabora. Es una forma de enseñar y aprender mediante la realización de algo. Se aprende desde lo vivencial y no desde la transmisión […] Es una metodología participativa en la que se enseña y se aprende a través de una tarea conjunta. Promueve el desarrollo de saberes: cognitivo, operativo y relacional, por lo cual se transforma en un método para el desarrollo de competencias profesionales." (Careaga, Sica, Cirillo & Da Luz, 2006, p. 5)

El Taller tuvo una duración de cinco sesiones sabatinas de cinco horas cada una, en las que se trataron diferentes temáticas que giraron en torno a los conceptos básicos relacionados con las fracciones: unidad, parte-todo, equivalencia, medida y cociente [sin embargo, para efectos de esta investigación sólo se analizan los datos concernientes a unidad y medida]. Previo al inicio del Taller, se les entregó un cuestionario exploratorio a los participantes, y lo mismo para cada temática nueva a abordar durante la sesión de trabajo, dando un total de seis cuestionarios para cada profesor del Taller.

3.3 SUJETOS

Los datos de la muestra no fueron analizados de forma estadística, sino cualitativamente. En ésta se nota un ejemplo prototípico, donde los sujetos comparten perfiles similares [todos son profesores de educación primaria]. Así, los datos de esta investigación provienen de un grupo de 12 Profesores de Educación Primaria, de diferentes escuelas públicas, pertenecientes todos a una misma zona escolar del Distrito Federal; voluntarios para participar en el Taller Educativo. Al respecto, Hernández (2010) llama a esta muestra "autoseleccionada, ya que las personas se proponen como participantes en el estudio o responden activamente a una invitación" (p. 396). Con la afirmación precedente, este autor se refiere a que en este tipo de muestra la elección de los participantes no depende completamente del investigador, sino más bien del propósito de la investigación, y el interés que pueda generar en los participantes, ya que éstos [los participantes] acceden voluntariamente a colaborar en ella.

3.4 INSTRUMENTOS PARA EL ACOPIO DE DATOS: CUESTIONARIOS Y TALLER

Se elaboraron seis diferentes cuestionarios abiertos acerca de contenidos específicos del tópico de fracciones, conjuntamente con preguntas relacionadas con aspectos de tipo pedagógico, uno para cada temática de trabajo y uno inicial. Sin embargo, en esta investigación sólo se tomaron en cuenta tres de los seis cuestionarios aplicados [inicial, unidad y medida], debido a que el objetivo de la misma está centrado en los subconstructos de la fracción: unidad y medida.

El cuestionario inicial (Anexo 3) fue elaborado con el propósito de explorar las ideas y conocimiento inicial de los profesores de educación primaria, que participaron en el Taller de fracciones. Este instrumento constó de tres preguntas: con la primera, se buscó indagar la profundidad del conocimiento de los profesores, a través de las diferentes formas en que se puede representar una fracción; de tal manera que a mayor cantidad y variedad de representaciones, se evidencia un mayor conocimiento. El análisis de la misma se hizo considerando tres de las cinco interpretaciones en las que se ve involucrada la fracción, que de acuerdo con Llinares (1988) son: unidad, parte-todo, equivalencia, medida y cociente.

Como ya se mencionó previamente [en este Capítulo], de estas cinco interpretaciones sólo se consideraron tres para este trabajo: unidad, parte-todo y medida. Y para fines de análisis de las respuestas se agregó una cuarta categoría denominada "representación simbólica" debido a la gran cantidad de respuestas presentadas de este tipo.

Las dos preguntas restantes tuvieron la intención de conocer el panorama de clase al que se enfrentan los profesores en su trabajo cotidiano, tanto en el ámbito de la enseñanza, como en el ámbito del aprendizaje de los niños. En ambas preguntas, se les solicitaron ejemplos para ubicar con mayor precisión el tipo de dificultades que enfrentan. Para el análisis de la segunda pregunta se tomaron en cuenta las categorías utilizadas por Cooper, Baturo y Grant (2006): a) Técnicas, b) De dominio y c) Genéricas. De tal forma que si hay carencias o dificultades en alguna de ellas, significa que la práctica de la enseñanza del profesor requiere reforzamiento.

Para analizar la tercera pregunta que está enfocada a dificultades de aprendizaje de los alumnos desde la visión del profesor; se consideraron las respuestas básicamente en dos sentidos: 1) Dificultades relacionadas con los procedimientos [procedimental] y 2) Dificultades relacionadas con la comprensión de algún contenido [conceptual].

Se agregó una categoría independiente en la que se ubicaron aquellas aseveraciones de los profesores que se consideraron como creencias erróneas, ya que se basan en argumentos equivocados o carentes de sustento teórico; por lo que ésta no es atribuible directamente a los alumnos, sino a los profesores.

Respecto al cuestionario de unidad, fue elaborado con el propósito de explorar los conocimientos de los profesores acerca de este aspecto básico para la comprensión de las fracciones, que de acuerdo con Lamon (1999):

> La unidad está estrechamente relacionada con la idea de medida. Si se mide la misma cantidad de materia, con unidades de diferentes tamaños, el número de medida que se consiga, será mayor o menor y dependerá del tamaño de la unidad de medida. (p. 40)

En las fracciones es necesario que desde un inicio quede establecida la unidad de referencia para evitar confusión en los alumnos y proponer ejercicios que impliquen el uso de más de un elemento como unidad de referencia. Tomando como eje el planteamiento de Lamon (Op. cit), en este cuestionario se plantearon tres problemas, y de cada uno se elaboraron preguntas encaminadas a indagar las ideas de los profesores acerca del tema en cuestión. Por ejemplo:

> *Los hermanos Juan y María afirman que ambos comieron* $\frac{3}{4}$ *de sus bolsas de dulces. Cuando llega la mamá de ambos, regaña a María y no a Juan. Indignada ésta le pregunta ¿por qué me regañas sólo a mí, si ambos comimos lo mismo?*

Con este primer problema, se buscó saber si el profesor detectaba la necesidad e importancia de conocer o definir la unidad de referencia, para ello se les plantearon diferentes preguntas (véase cuestionario completo, Anexo 4).

El segundo problema mostró posibles respuestas que pueden dar los alumnos de un ejercicio, donde no está especificada la unidad, esperando con ello conocer el razonamiento y las explicaciones que el profesor da de las mismas, así como el posible manejo del profesor ante una situación parecida en su clase. El tercer problema tuvo como objetivo conocer los razonamientos que dan los profesores a un ejercicio donde la unidad es compuesta y se encuentra implícita; sobre todo, buscando saber si los profesores poseen este conocimiento o lo tienen sólo de manera intuitiva.

En el cuestionario donde son planteados problemas sobre el concepto de medida se les propusieron tres problemas. En el primero, se les pidió a los profesores dar ejemplos que usaran con sus alumnos al abordar este contenido, para identificar las ideas y nociones que ellos manejan acerca del tema. El segundo problema buscó generar el uso de la recta numérica y mediante dos preguntas conocer las explicaciones que los profesores dan a sus respuestas; que justifiquen o no el uso de la recta numérica. Finalmente, el tercer problema tuvo una orientación similar al anterior, sólo que aquí se buscó utilizar el modelo de área para generar la reflexión y de la misma manera conocer las justificaciones de los profesores (véase cuestionario completo, Anexo 5).

Otra de las formas para el acopio de datos fue la impartición del Taller, donde se llevaron a cabo actividades elaboradas específicamente para abordar los contenidos de las fracciones que son del interés para este trabajo [unidad y medida], por ejemplo:

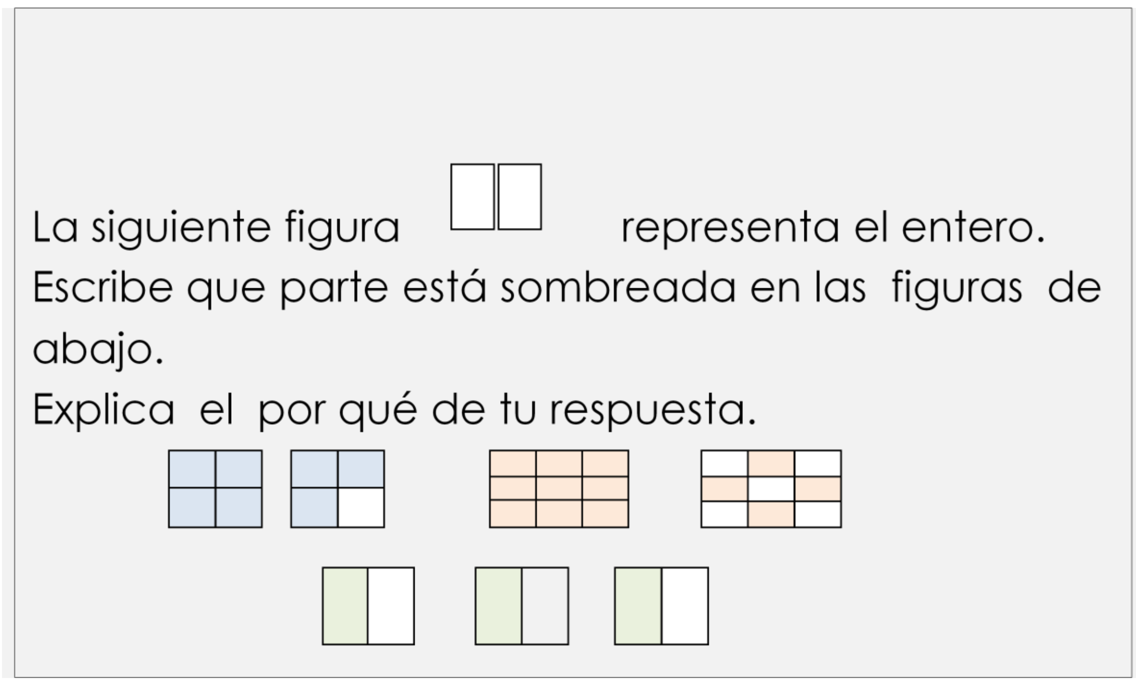


Figura 3.1. Ejemplo de ejercicios del Taller.

A partir de situaciones problema, como el ilustrado anteriormente, los profesores en plenaria o en equipos discutieron acerca de las respuestas dadas, así como de las estrategias empleadas para su solución. Además, cada una de las sesiones fue audio-grabada, para rescatar posteriormente las ideas sobresalientes acerca de los conceptos y explicaciones que daban los profesores.

Finalmente, se les solicitó a los profesores elaborar una secuencia didáctica que pudiera aplicarse a los alumnos, teniendo como eje principal el tema de fracciones y considerando los subconstructos abordados en el Taller. Cada uno de ellos dio una explicación acerca de la misma, justificando su trabajo. Esto con la finalidad de detectar algún posible cambio en sus planteamientos respecto a los conceptos abordados durante el Taller y en relación con sus ideas iniciales.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

INTRODUCCIÓN

Balcázar, González-Arratia, Gurrola y Moysén (2007) afirman que el análisis de los datos obtenidos en una investigación requieren de un orden para que puedan dar significado y sentido a la información obtenida que cumpla con el propósito de la investigación. En primer lugar, estos autores señalan, hacer una transcripción de la información obtenida a través de los diferentes medios e instrumentos utilizados [entrevistas, cuestionarios, videos, bitácoras fotografías, etc.], identificándolas por fechas o alguna otra etiqueta, para posteriormente, hacer una clasificación de la información por temas y subtemas [ordenación de los datos], en seguida se hace una categorización de la información y, posteriormente se da una interpretación y evaluación de las unidades, categorías, temas o patrones, para finalmente dar explicación de contextos, situaciones y hechos. Una vez terminado este proceso, se procede a relacionar los resultados del análisis con la teoría fundamentada, para dar respuesta a las preguntas planteadas en la investigación.

En este trabajo, trató de llevarse a cabo el procedimiento planteado por Arratia y cols. (Op. cit.), considerando como base de la investigación, los resultados obtenidos en los cuestionarios que se les aplicaron a los profesores antes del inicio de cada tema en las sesiones del Taller, para posteriormente contrastar estos [los resultados de los cuestionarios], con las ideas que surgieron durante el Taller a partir de las actividades planteadas en él.

4.1 ANÁLISIS DE LOS CUESTIONARIOS

Como ya se dijo anteriormente [en el capítulo de Metodología], se les aplicaron seis cuestionarios en total a los profesores que participaron en el Taller; sin embargo, para efectos de este trabajo se consideraron solamente tres de ellos: cuestionario inicial y cuestionarios sobre los conceptos de *unidad* y *medida*. Esta decisión fue tomada así debido a que el cuestionario inicial dio un panorama general de los conocimientos de los profesores en cuanto al tema de las fracciones y sus diferentes subconstructos; es decir, este instrumento mostró los conocimientos previos de los profesores antes de que diera inicio el Taller. Respecto a los cuestionarios restantes de *unidad* y *medida*, estos fueron los que mayor inquietud causaron entre los profesores, ya que surgieron muchas dudas, discrepancias y confusión en su resolución.

El cuestionario inicial fue elaborado con el propósito de explorar las ideas y conocimiento inicial de los profesores. Este instrumento constó de tres preguntas abiertas, con la finalidad de que propiciaran una gran cantidad y variedad de respuestas:

1) Representa de tantas maneras como puedas la fracción $\frac{5}{4}$.

2) ¿Qué dificultades tienes al enseñar el tema de fracciones? Especifica con ejemplos.

3) De acuerdo con tu experiencia, describe ¿qué aspectos se les dificulta a los alumnos en el aprendizaje de las fracciones? Especifica con ejemplos.

Para analizar las respuestas dadas a la primera pregunta, se usaron cuatro diferentes categorías, que son descritas en la siguiente tabla. Estas categorías permitieron establecer el tipo de conocimientos que los profesores manejan al representar las fracciones.

Tabla 4.1

Categorías utilizadas para el análisis de la pregunta 1 del Cuestionario Inicial de fracciones

Categoría	Características
Parte-todo	"La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes". Las representaciones de esta relación son: a) modelos continuos, b) modelos discretos y c) recta numérica. (Llinares, 1988, pp. 31 y 55.)
Representación simbólica	En ésta se presenta a la fracción solicitada únicamente con símbolos numéricos y las operaciones con los mismos.

Medida	Se establece cuando "se tiene una cantidad medible y una unidad" (Mochón, 1992). La fracción aquí se puede tomar como unidad de medida, o bien se asocia con una.
Cociente	Cuando se asocia la fracción a dos procesos diferentes: 1. La operación de dividir un número natural por otro (división indicada a : b = a/b). 2. Dividir una cantidad en un número de partes dadas (situación de reparto) (T.E.Kieren, 1980, citado en Llinares 1988, p. 63).

Las respuestas obtenidas en esta pregunta se clasificaron en las cuatro categorías mencionadas y los resultados se muestran en una tabla (véase Anexo 2), donde se anotó a todos los profesores evaluados y se contabilizaron las respuestas en columnas por categorías, anotando un "Si" cuando el profesor dio como respuesta la representación correspondiente a alguna de las categorías descritas anteriormente y se dejó en blanco cuando esto no ocurrió; además, se le agregó junto a la palabra *Si* una (X) para indicar que la respuesta fue incorrecta. Cada palabra *Si* corresponde a una respuesta. Al final de cada columna se anotaron las cantidades totales de cada representación, separando entre paréntesis la cantidad de respuestas incorrectas. Cada categoría muestra el porcentaje de aparición respecto al total de respuestas dadas por todo el grupo.

Dado que la pregunta solicitaba expresar una cantidad ilimitada de respuestas, se esperaba que los profesores se explayaran y anotaran una gran cantidad de ejemplos, sin embargo, los resultados muestran que aunque algunos profesores anotaron varios ejemplos, la mayoría de estos pertenecen a una sola categoría; por lo tanto, al hacer la clasificación y agrupación de las respuestas, la variedad de representaciones quedó reducida a una, dos o tres categorías como máximo. De esta manera, el máximo de respuestas contabilizadas y distribuidas en las categorías correspondientes fue de 46; ubicadas principalmente en dos diferentes categorías: parte-todo y simbólica. Esta ubicación de las respuestas muestra, de entrada, una limitada variedad de ejemplos para representar a las fracciones y, por lo tanto, un conocimiento de las fracciones limitado también, ya que el manejo por parte de los profesores corresponde a sólo una de sus interpretaciones: parte-todo.

Como puede observarse en la siguiente tabla, la mayor cantidad de respuestas dadas corresponden a la interpretación parte-todo de las fracciones y la representación simbólica.

Tabla 4.2

Cantidades y porcentajes de las respuestas obtenidas en la pregunta 1 del Cuestionario Inicial

Categoría	Respuestas			
	Correctas	Incorrectas	Total	Porcentaje
Parte-todo	15	6	21	55%
Representación simbólica	15	0	15	40%
Medida	1	0	1	2.5%
Cociente	1	0	1	2.5%

Dentro de la interpretación parte-todo, el modelo más usado por los profesores fue el continuo, seguido por la recta numérica y finalmente los modelos discretos (véase Anexo 2). Los modelos continuos son representaciones (dibujos de figuras geométricas principalmente, como rectángulos y círculos) basados en la noción de área, donde para representar una fracción se sombrea o señala una región de la misma, dando por entendido que dicha figura representa la unidad. Estos modelos son los que tradicionalmente utilizan los profesores en sus clases para la representación de fracciones y, por lo tanto, de mayor frecuencia en la primera pregunta del cuestionario.

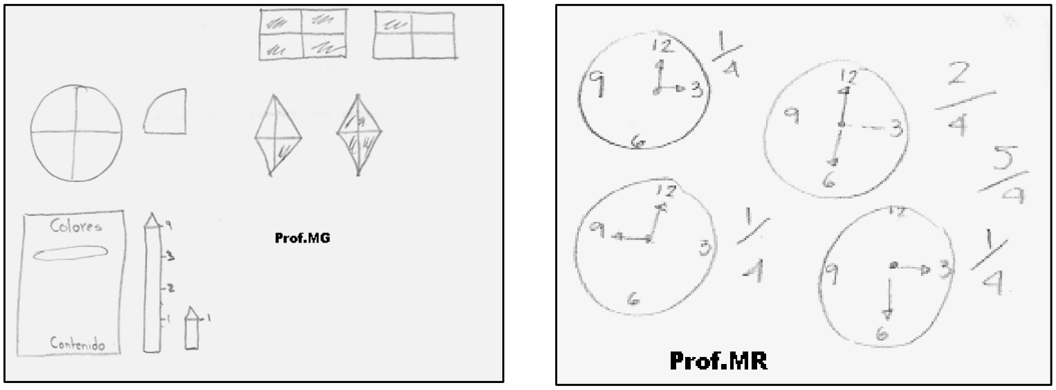


Figura 4.1. Ejemplos correctos de modelos continuos.

La mayoría de los modelos continuos presentados por los profesores fueron correctos; sin embargo, también hubo respuestas [modelos] incorrectas. Los modelos incorrectos, se consideraron de esta forma debido a que la partición no correspondía a la fracción solicitada y tampoco se veía definida la unidad de referencia. Aunado a esto, en ambos ejemplos, los profesores interpretaron incorrectamente el significado del numerador y el denominador, pues en todas sus figuras partieron en cinco y sombrearon cuatro partes, en lugar de $\frac{5}{4}$.

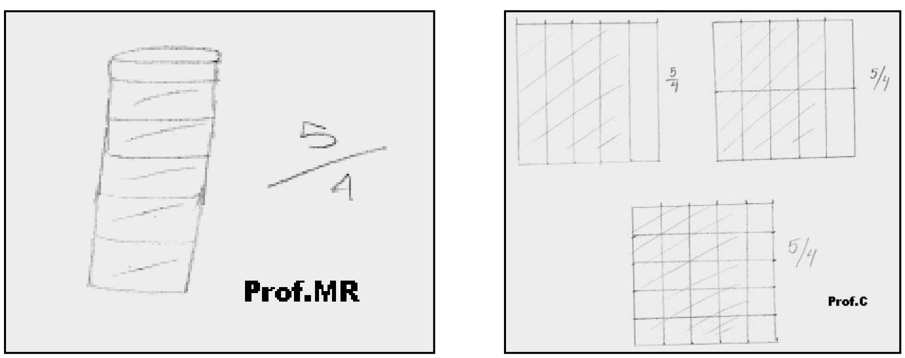


Figura 4.2. Ejemplos incorrectos de modelos continuos.

Con relación a las respuestas que los profesores dieron utilizando el modelo de recta numérica, de los ocho profesores que utilizaron este modelo de representación, sólo la mitad de ellos lo hizo correctamente como en el ejemplo que se muestra en seguida, donde se presenta una sola recta, con los enteros y la partición bien definidos y las fracciones señaladas correctamente.

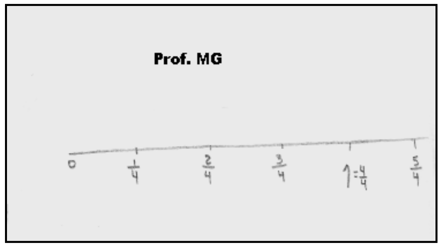


Figura 4.3. Modelo correcto de recta numérica.

En los modelos incorrectos, se observan dificultades de tipo conceptual de parte de los profesores, ya que algunos de ellos trazaron dos rectas separadas para diferenciar los enteros, cuando debieron trazar sólo una recta continua, señalando dos o más enteros dentro de la misma. En tanto otros profesores, aunque hicieron correctamente la partición de la recta, marcaron cada parte con números enteros. También hubo quien trazó la recta con una partición incorrecta al dejar diferentes tamaños para cada parte del entero. Y uno de los profesores, aunque hizo una correcta partición de la recta, no señaló la unidad y al no definir los enteros se entiende que el profesor no tiene clara la noción de unidad, o no le da la importancia que tiene.

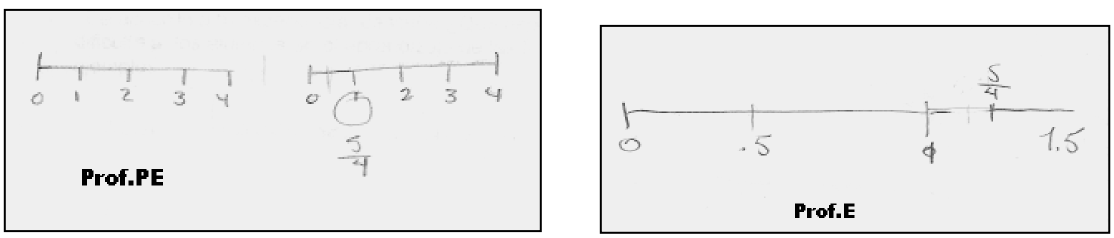


Figura 4.4. Modelos incorrectos de recta numérica.

Toda la información anterior sugiere que los conocimientos que tienen los profesores, en cuanto a representación de fracciones, se refiere básicamente a dos tipos de interpretación: como parte de un todo y como números con los cuales se puede operar. Este tipo de interpretación indica que el conocimiento conceptual del profesor está limitado a una sola interpretación de las fracciones que es la parte-todo, mientras que la representación simbólica que utilizan, indica una fuerte tendencia al uso del conocimiento instrumental.

Representaciones simbólicas	Frecuencia	Ejemplos representativos
Fracciones equivalentes	3	$\frac{10}{8}$, $\frac{20}{16}$, $\frac{40}{32}$, $\frac{80}{64}$,$\frac{160}{128}$
Números mixtos	3	$1\,\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$
Suma de fracciones	3	$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$
División	2	$\begin{array}{r} 1 \\ 4\overline{)5} \\ 1 \end{array} = 1\;\frac{1}{4}$
Resta de fracciones	2	$\frac{11}{4} - \frac{6}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$
Cantidad decimal	2	$\frac{5}{4} = 1.25$

Figura 4.5. Ejemplos de respuestas de representación simbólica de la fracción $\frac{5}{4}$.

La segunda pregunta de este mismo cuestionario tuvo como objetivo que los profesores reflexionaran acerca de su práctica docente y determinaran las dificultades que tienen para la enseñanza de las fracciones desde su propia perspectiva. Para analizar sus respuestas se utilizaron los tres niveles de dominio pedagógico, detectados por Cooper, Baturo y Grant (2006) en un proyecto de desarrollo profesional para profesores, donde concluyeron que para poder tener alcances positivos en los aprendizajes de los alumnos, es necesario manejar estos tres niveles de pedagogía: a) Técnico, b) De dominio y c) Genérico.

a) Técnico: básicamente son sugerencias prácticas para llevar a cabo una determinada lección o tema y puede implicar un uso específico de materiales de apoyo.

b) De dominio: se refieren al uso de métodos de enseñanza adecuados para un tema particular, que incluyen tareas, formas de comunicación con los alumnos, herramientas utilizadas y normas.

c) Genérico: se puede entender como enfoques de enseñanza aplicable a cualquier tema matemático; de ellos, los más utilizados son: a) flexibilidad, b) reversibilidad, c) generalización y d) uso de ejemplos no-prototípicos.

Antes de clasificar las respuestas de los profesores, es necesario señalar que las respuestas dadas por ellos a la segunda pregunta del cuestionario, fueron enunciados con escasas explicaciones y en ocasiones confusos. Además, hay quienes sólo proporcionaron ejemplos de ejercicios sin resolver; lo que no permitió llevar a cabo el análisis completo de respuestas.

En el primer nivel de pedagogía [Técnico], sólo se presentaron dos respuestas de profesores quienes determinaron como dificultades de enseñanza, el uso de materiales concretos. A continuación, se ejemplifican algunas respuestas representativas de cada categoría. Cada respuesta va acompañada de una breve explicación.

NIVEL TÉCNICO
MR. "*Considero que es necesario utilizar diversidad de materiales, lo que implica búsqueda e innovación, eso representa una gran dificultad".* La manera general, como está expresado el enunciado lleva a pensar que el profesor no puede identificar concretamente su idea, y precisa alguna dificultad específica de algún tema matemático en particular, y le adjudica la mayor dificultad a la búsqueda de materiales de apoyo. L. *"Para explicarles a los niños concretamente con materiales, me falta un mayor dominio que no sea mecánico".* En la explicación del profesor, se detecta una preocupación por la falta de entendimiento del conocimiento que transmite, lo que conduce a no poder utilizar materiales concretos como apoyo para la enseñanza.

Las necesidades detectadas en este nivel pedagógico están encaminadas a la búsqueda de sugerencias o "recetas" para la enseñanza, en las que principalmente se utilice algún material como apoyo didáctico. Con esta perspectiva, los profesores adjudican las dificultades de enseñanza al desconocimiento de estrategias y dejan de lado la situación de sus conocimientos de contenido. Además, al no precisar temas concretos donde requieren estos apoyos y reconocer su conocimiento “mecánico”, dejan ver una enorme necesidad de profundización del conocimiento matemático necesario para la enseñanza.

En el segundo nivel de pedagogía [De dominio], se colocaron aquellas expresiones enfocadas principalmente en señalar dificultades de algún concepto, contenido o procedimiento particular. Se detectaron tres diferentes tipos de dificultades relacionadas con: a) operaciones con fracciones, b) fracciones impropias y su conversión y c) ubicación de fracciones en la recta numérica.

En este nivel fue donde se mostró la mayoría de las respuestas de los profesores, con 83.3% de frecuencia. A continuación, se dan algunos ejemplos representativos de cada una de las dificultades mencionadas, con una breve explicación.

NIVEL DE DOMINIO
a) operaciones con fracciones L. “*Mecánicamente lo sé. Ejemplo sencillo:* $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ o $\frac{11}{4} - \frac{6}{4} = \frac{5}{4}$ Pero en $\frac{3}{2} + \frac{1}{7} + \frac{5}{10} =$ ¿?” En los ejemplos anteriores, el profesor expresa claramente que los ejercicios sencillos de suma [aun cuando implique denominadores diferentes en este caso] y resta [con denominadores iguales], no le causan dificultad y califica su conocimiento como “mecánico”; es decir, acepta el hecho de la falta de entendimiento del “por qué” de los procedimientos. Es digno de señalar el ejemplo *difícil* que da el profesor, de la suma de tres fracciones cada una con diferente denominador. En su ejemplo él agrega un tercer elemento en la operación, coloca un denominador que no es común con los otros dos (7) y que implica el manejo de otras habilidades, como el establecimiento de fracciones equivalentes a través de la búsqueda de un denominador común y la simplificación de fracciones para operar con ellas. En otro ejemplo de un profesor, él propone una suma de fracciones con diferente denominador, donde se observa que: 1) acertadamente el profesor trata de explicar con flechas su procedimiento para resolver la operación, lo que permite conocer su proceso

de entendimiento de esta operación en particular y 2) siguiendo la dirección de las flechas, el profesor obtiene un denominador común mediante la multiplicación de ambos denominadores. Sin embargo, no se da cuenta de que en su procedimiento opera equivocadamente [después de obtener los cocientes es una multiplicación y no una suma, para poder obtener fracciones equivalentes a las iniciales]. Esta confusión muestra un aprendizaje mecánico, aprendido de manera incorrecta y que se lleva a cabo sin reflexión.

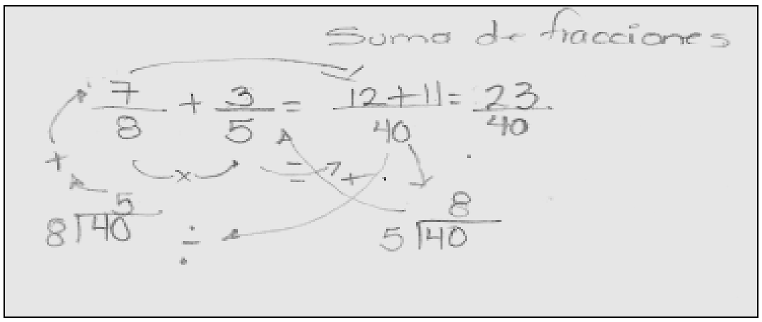


Figura 4.6. Ejemplo incorrecto del profesor F.

b) fracciones impropias y su conversión

K. *"En (un) primer momento cómo lograr que los niños comprendan ¿Qué es una fracción? ¿Cómo lograr que comprendan qué es una fracción impropia?"*

La necesidad específica del profesor es una limitada habilidad para transmitir los conocimientos a los alumnos. Sin embargo, esta necesidad puede atribuirse a la falta de solidez y amplitud en los propios conocimientos.

c) ubicación de fracciones en la recta numérica.

C. "*Principalmente en la recta numérica y en la misma diferentes cantidades. Ejemplo* $\frac{3}{6}, \frac{5}{7}$ *etc."*

El problema enunciado aquí es la ubicación de diferentes fracciones en una recta numérica; sin embargo, el trasfondo de esta ubicación es el desconocimiento o falta de entendimiento conceptual del uso de la recta numérica en el contexto de las fracciones. Desde el enfoque parte-todo, la recta numérica funciona como un modelo

continuo, donde es posible representar desde un entero hasta varios de ellos y por ende la ubicación de fracciones en la misma depende de la partición que se haga de cada uno de los enteros. Por lo tanto, si el profesor entiende este concepto, deja de ser una dificultad la ubicación de fracciones en la misma, ya que debe entender que un mismo entero puede tener diferentes particiones.

Las dificultades expresadas por los profesores en este nivel de pedagogía, se enfocan en acciones procedimentales, que tienen como origen la falta de entendimiento conceptual de los mismos. Es decir, se limitan a repetir procedimientos para efectuar operaciones, lo que les lleva a mecanizarlos de manera irreflexiva y con frecuencia de manera incorrecta, y poco o nada analizan acerca de "por qué" son así estos procedimientos y qué ocurre si se usan de otra manera.

En el tercer nivel de pedagogía [Genérico] se colocaron aquellas expresiones que fueron generales en cuanto a su explicación, o bien, que no precisaron una dificultad concreta.

NIVEL GENÉRICO
Y. *"Comprender yo todo lo relacionado con fracciones y cómo enseñarlas porque yo percibo de una forma y los niños de otra."* Aquí, una clara necesidad de profundización del conocimiento por parte del profesor y conocimiento limitado acerca de los procesos de aprendizaje de los alumnos. MG. "*Hacer que el alumno primero analice el problema y sepa el tipo de operación a resolver el cual implica efectuar operaciones con fracciones."* Se detecta la dificultad del profesor para expresar de manera clara sus necesidades de enseñanza, ya que el enunciado muestra dificultades de sintaxis. Sin embargo, se advierte la tendencia a las operaciones numéricas, más que a la comprensión de esas acciones.

Las respuestas de los profesores, en este último nivel de pedagogía, expresan una preocupación y necesidad de profundización de los conocimientos propios en cuanto a la materia que enseñan y muestran sus limitaciones para la transmisión adecuada de los mismos, lo que también va ligado con la necesidad de entendimiento de los procesos de aprendizaje de sus alumnos. A esto le atribuyen que sus prácticas se vuelvan mecánicas y repetitivas.

La tercera pregunta del cuestionario inicial se enfocó en la determinación del tipo de dificultades de aprendizaje que los profesores advierten en sus alumnos, respecto al tema de las fracciones. En este sentido, las respuestas dadas por los profesores, se clasificaron en dos apartados; a) como dificultades de tipo instrumental o procedimental, y b) dificultades de tipo relacional o conceptual. (Skemp, 1976)

a) dificultades instrumentales o procedimentales: son aquellas que se refieren a procedimientos utilizados al trabajar u operar con fracciones. Pueden ser también errores producidos durante el proceso de una secuencia de cálculo, o error en la aplicación de algún procedimiento específico. Es importante subrayar que las respuestas dadas por los profesores a esta pregunta, fueron en su mayoría un listado de temas y contenidos, sin especificar por ejemplo: estrategias de los alumnos, ideas y conceptos erróneos, o confusiones, que pudieran estar implicados en ellos.

De los 12 profesores del grupo, ocho dieron respuestas relacionadas con este tipo de dificultades. Y entre los temas mencionados por los profesores están: 1) operaciones con fracciones, 2) partición y reparto 3) conversión de fracciones a decimales, 4) equivalencia y comparación, y 5) ubicación de fracciones en la recta numérica. A continuación se presentan algunos ejemplos dados por los profesores:

Tabla 4.3

Ejemplos de dificultades instrumentales o procedimentales

Tipo de dificultad	Ejemplos representativos
1) Operaciones con fracciones	*K. "Suma y resta de fracciones"* *L. "La suma y resta con diferente*

	denominador” AT. “ $\frac{16}{6}$ - $\frac{3}{8}$ =”
2) Partición y reparto	K. *“Dividir los enteros”* L. *“La repartición”*
3) Conversión de fracciones a decimales:	*AT. “$\frac{1}{4}$ = .25”*

b) dificultades relacionales o conceptuales: son las más difíciles de detectar por el profesor, ya que implican un manejo adecuado y eficaz de los conceptos, que tienen como soporte todo un amplio bagaje de conocimientos y habilidades; además de que es más fácil manejar procedimientos y reglas que conceptos (Skemp, 1976).

Las dificultades que se pueden detectar en los alumnos en la comprensión de conceptos sobre el tema de las fracciones son: ausencia o debilidad de los mecanismos constructivos de la fracción; término acuñado por Kieren (1983, citado en Mochón 1992) que implican el conocimiento, comprensión y manejo de la equivalencia, la partición y la unidad. Derivados de estos conceptos, resultan la representación de la fracción y por consiguiente la generalización de su uso.

Aún cuando los profesores dieron ejemplos de este tipo de dificultades, ninguno manifestó expresamente este conocimiento. A continuación, se presentan algunos ejemplos de este tipo de dificultades que dieron los profesores.

Tabla 4.4

Ejemplos de tipos de dificultades conceptuales

Tipo de dificultad	Ejemplos representativos
1) Mecanismos constructivos de la fracción, y.	*Y. “Comprensión de fracciones equivalentes”* *PM. “Confunden numerador y denominador”*

	C. *“Principalmente a realizar la repartición del entero”*
2) Representación	E. *“No saben representarlas en figuras”* *C. “Representarlas en kg, metros, kilómetros y %”*
3) Generalización	F. *“Utilizarlas en su vida diaria”*

En todos los ejemplos anteriores, se pueden inferir conocimientos insuficientes o mal entendidos del alumno, y que necesitan de un soporte que les ayude a ampliar o en su caso a corregir sus conocimientos, y que les ayude a profundizar el entendimiento conceptual. Por su parte, los profesores no concretan las dificultades de los alumnos, ni hacen referencia a procesos de pensamiento, errores o conceptos erróneos de los mismos con relación a esos temas, lo que lleva a pensar que los profesores también manejan los contenidos en esta forma; es decir, en un sentido instrumental, que de acuerdo con Skemp (1976) es aplicar “reglas sin razones”. Este tipo de acciones deja de lado los procesos de entendimiento conceptual, necesarios en el desarrollo del pensamiento matemático de quien o quienes deciden aprender matemáticas en cualquier nivel educativo.

ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO SOBRE EL CONCEPTO DE UNIDAD

Lamon (1999) afirma que:

> La unidad está estrechamente relacionada con la idea de medida. Si se mide la misma cantidad de materia, con unidades de diferentes tamaños, el número de medida que se consiga, será mayor o menor y dependerá del tamaño de la unidad de medida. (p. 40)

Por esta razón y para evitar variaciones en una medida, es necesario tener claro la unidad a utilizar como referente para determinar la medida de un objeto. En las fracciones, también es necesario que desde un inicio quede establecida la unidad de referencia.

Tomando como eje de discusión el planteamiento de Lamon (Op. cit), se elaboró un cuestionario para indagar los conocimientos de los profesores de educación primaria y determinar si poseen este conocimiento [de unidad] y con qué profundidad. Para ello, se plantearon tres diferentes problemas. Con el Problema 1, se buscó saber si el profesor detecta la necesidad e importancia de conocer o definir la unidad de referencia. El Problema 2 plantea las posibles respuestas que pueden dar los estudiantes a un ejercicio de fracciones, donde no está especificada la unidad, esperando con ello determinar el conocimiento de los estudiantes del profesor. El Problema 3 tuvo como objetivo conocer los razonamientos que dan los profesores a un ejercicio donde la unidad es compuesta y se encuentra implícita [véase cuestionario completo, Anexo 4].

En el Problema 1 se plantearon cuatro preguntas encaminadas cada una a un aspecto específico, por ejemplo: las preguntas 1 y 2 solicitaron de parte de los profesores una explicación y argumentos matemáticos que aclararan el planteamiento del problema; mientras que las preguntas 3 y 4 buscaron que los profesores reflexionaran acerca de la fracción $\frac{3}{4}$.

Los resultados muestran que diez de los 12 profesores no perciben una unidad de referencia, sólo miran a las fracciones en su aspecto numérico, y esto fue posible detectarlo, debido a que 8 de ellos dieron como respuesta $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, y con frecuencia, acompañados de comentarios como: "*es la misma cantidad*" o "*es el mismo número de dulces*", o argumentos no matemáticos como: "*la mamá no sabe distinguir cantidades*" y "*el hermano es el consentido de su mamá*". Esta información indica que la mayoría de los profesores hacen una comparación de fracciones de manera aislada [sólo numérica], sin tomar en cuenta el contexto, aduciendo solamente al significado simbólico del objeto. Por lo tanto, no identificaron cuál es la unidad de referencia en el problema planteado, o dieron por entendido que es la misma.

En ambas preguntas [1 y 2] sólo dos profesores dieron respuestas que dejaron ver un conocimiento intuitivo acerca de la unidad: *Prof. AT. "Si comieron la misma fracción de dulces sería aproximadamente la misma cantidad, esto suponiendo que la bolsa de dulces es del mismo tamaño" y Prof. K. "Es el tamaño de la bolsa o tipo de dulce que hay en cada bolsa".* Sin embargo, las respuestas de estos dos profesores no pueden considerarse como un argumento matemático, ya que no hacen referencia directa a la diferencia de unidades en comparación. Asimismo, otros cuatro profesores dieron explicaciones donde ponen en duda el tamaño de las unidades que se están comparando, lo cual indica la *movilidad* de sus esquemas de conocimiento.

AT: "María pudo haber comido más dulces si su bolsa era más grande que la de Juan"

L: "Probablemente el contenido de la bolsa de María era mayor"

MR: "Quizá la cantidad de dulces que comió María fue mayor"

C: "A lo mejor el contenido de la bolsa de María se percibía mucho más grande"

Aunque en los argumentos de estos cuatro profesores no se afirma de manera contundente que las unidades en comparación son diferentes, sí se puede observar que consideran esa posibilidad. De acuerdo con la información precedente, se puede afirmar que los profesores no poseen este tipo de conocimiento [el concepto de unidad], aunque sí advierten de manera intuitiva que una posible explicación podría ser esa.

Otros dos profesores que dieron argumentos ajenos al conocimiento matemático; desviaron su atención a características de los objetos como: *el valor nutricional* de los dulces, o *la edad* de alguno de los hermanos; lo cual indica que no se consideró la petición explícita de la pregunta, al solicitarles argumentos matemáticos [e.g., *Prof. E: "La mamá vio las envolturas de dulces tiradas vacías, no habían consumido productos nutritivos" y Prof. PE: "Seguramente María es un número de años mayor que Juan"*].

A diferencia de la pregunta 1, en la segunda pregunta, se pudo notar cómo a través del cambio de enfoque de esta pregunta [la segunda], algunos de los profesores pusieron en duda sus ideas iniciales acerca de la unidad. Lo que lleva a pensar que ellos [los profesores] necesitan que las preguntas relacionadas con el planteamiento de un problema estén encaminadas a crearles conflictos conceptuales para que puedan *movilizar* la rigidez de sus ideas. La siguiente tabla muestra las diferentes respuestas que se obtuvieron en la tercera pregunta.

Tabla 4.5

Frecuencia de respuestas dadas a la pregunta 3 del Problema 1

Respuestas	Faltan datos en el problema	Fracciones equivalentes $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$	No dieron ningún argumento o dieron un argumento no matemático	Percibe diferentes unidades de referencia	No contestó la pregunta
Frecuencia	3	3	3	1	2

La información obtenida de esta pregunta indica que sólo una persona del grupo pudo advertir la posibilidad de tener unidades diferentes. Mientras que el resto no sólo no lo advirtió, sino que además en sus argumentos no consideran esta posibilidad, lo cual es muy semejante a lo ocurrido en la pregunta 1 y 2. De acuerdo con las respuestas obtenidas de las preguntas 1 y 2, se puede decir, que estas preguntas no tuvieron el impacto esperado y que el solo hecho de cuestionar a los profesores no ayuda a *movilizar* sus saberes [conocimiento sobre el concepto de unidad].

La última pregunta, del primer problema, se enfocó en la fracción, para inducir a los profesores a que se dieran cuenta de que no pueden trabajar la fracción aislada de su entero de referencia. Los resultados muestran que diez profesores no consideraron a la fracción como el elemento que genera el conflicto, y aunque esto es cierto, lo importante aquí es que sus argumentos no tuvieron la claridad suficiente para indicar qué fue lo que generó el conflicto en el problema; lo cual indica que hace falta profundidad en el conocimiento de los profesores acerca del subconstructo unidad, ya que lo tienen, pero de una manera intuitiva. A manera de conclusión, tomando en cuenta las soluciones de este problema, se puede decir que una mínima cantidad de profesores pudieron darse cuenta de las unidades de referencia [aunque ninguno pudo expresarlo de manera concreta], mientras que la mayoría no lo hizo.

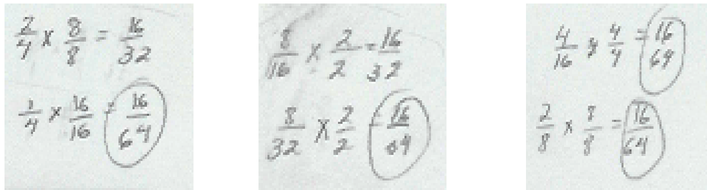
El segundo problema tuvo como finalidad detectar el conocimiento [del profesor] acerca del razonamiento de los estudiantes hacia un problema donde no se especifica la unidad de referencia. Con el planteamiento de este problema, se buscó que los profesores explicaran las razones por las que los estudiantes dan diferentes respuestas y los posibles razonamientos que las originan. Nuevamente como en Problema 1 sólo un profesor anotó *“No se aclara cuál es la unidad a considerar”*. Sin embargo, seis profesores lograron especificar en sus argumentos, que si hubo tal variedad de respuestas, se debió a que algunos profesores tomaron como entero cada figura y otros se refirieron a ambas como el entero.

AT. “Todas las respuestas son correctas, algunas tomaron las dos figuras como entero, otras una”

Y. “Porque en algunos casos se abordaron por separado y en otros juntos como un todo”

PM. “No dice si solo de un cuadro o de los dos”

Un grupo de cinco profesores dieron como argumento: que las varias respuestas [de los estudiantes] se debieron a que las fracciones son equivalentes. En efecto, las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{8}{16}$ son equivalentes entre si, pero no lo son con el resto y por otra parte las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{16}$ y $\frac{8}{32}$, también son equivalentes entre sí, pero no lo son con las dos anteriores; de modo que al afirmar que las fracciones son equivalentes, no se está considerando la explicación anterior y se da por hecho que hay equivalencia entre todas las fracciones. Incluso, un profesor hizo las equivalencias [de las fracciones] de manera algorítmica para justificar su argumento, aún cuando en su propio ejercicio se observa que encierra las fracciones que sí son equivalentes entre sí y deja sin encerrar las que no lo son, lo cual es contradictorio con su propia respuesta[véase Figura 4.7].



Prof. C. "Se obtuvieron por medio de fracciones equivalentes"

Figura 4.7. Equivalencias elaboradas por el Prof. C.

De la información obtenida de las respuestas del cuestionario, se tiene que tres profesores argumentan que la pregunta del problema *"no está bien planteada", "no es precisa" y "se debe especificar bien la pregunta".* Los argumentos precedentes dan idea de que a los profesores les resultó difícil explicar por qué este problema pudo generar diferentes respuestas, y les costó trabajo analizar a qué se debió esto, ya que para algunos resultó *obvio* que todas las fracciones fueran equivalentes y para otros la problemática surgió por las preguntas planteadas y consideraron necesario que se replantearan las preguntas, pero en ningún momento se refirieron al concepto de unidad. No obstante, lo valioso de estos resultados fue que varios profesores pudieron notar que la variedad de las respuestas dependió en gran media de la forma como se interpretó el problema, lo cual es importante, ya que es común considerar que los alumnos entienden un problema, tal y como el profesor lo entiende y que existen respuestas únicas correctas.

En una segunda pregunta se les solicitó a los profesores elegir una respuesta correcta, con la finalidad de determinar si se muestran flexibles en sus razonamientos, o si tienen la idea fija de respuestas únicas correctas. Los resultados indican que $\frac{2}{3}$ [del grupo de 12 profesores] eligieron sólo una fracción como respuesta correcta, y persiste el argumento de que todas las opciones son fracciones equivalentes, sin reflexionar que este argumento resulta contradictorio al elegir sólo una respuesta correcta.

De los cuatro profesores restantes, dos de ellos dieron como respuesta *"$\frac{4}{16}$ para un solo cuadro y $\frac{8}{32}$ para los dos cuadros"*. Estos tipos de respuestas indican que ellos perciben de manera clara las unidades [enteros]. Mientras que los otros dos [profesores] contestaron que *"todas"* las opciones son correctas; dando como argumento: *"porque son equivalentes de $\frac{1}{4}$"*, lo cual es incorrecto.

De acuerdo con las respuestas de esta pregunta, se puede notar que en ellos persiste la idea de considerar únicamente una respuesta como válida y correcta. A los profesores les es difícil admitir que puede existir más de una respuesta correcta y que los enteros o unidades pueden estar formados por más de un dígito.

En la última pregunta de este problema se les pidió a los docentes que evaluaran el ejercicio y, de ser posible, que dieran alguna alternativa para su mejora. Todos los profesores contestaron que el problema sí es adecuado para la enseñanza, ya que [afirman] genera la reflexión y el razonamiento, así como: *"da apertura a varias respuestas"*. Además hicieron observaciones referentes a que *"es necesario especificar la unidad" o "aclarando qué debemos tomar como unidad"*. Otros más señalaron que *"modificarían la pregunta"* y que *"cambiaría el planteamiento del problema"*. Estas respuestas son indicadores de que los profesores necesitan que se les muestre algún tipo diferente de ejercicio al que están acostumbrados a manejar, para *movilizar* sus saberes [conocimientos sobre el concepto de unidad]. Pero también son una muestra de que no aceptan tan fácilmente que un problema planteado en clase pueda generar una gran variedad de respuestas, ya que inmediatamente atribuyen esta característica del problema a un mal planteamiento de éste o de la pregunta implicada en él.

El tercer problema de este cuestionario, como fue comentado a inicios de este parágrafo, tiene una unidad compuesta, que Lamon (1999) define como: "las unidades que consisten en paquetes individuales que tienen varios objetos dentro", por ejemplo: una caja de galletas con 6 paquetes que a su vez tienen 4 galletas cada uno, o alguna otra situación similar. Y las unidades pueden deducirse fácilmente a través de razonamientos de unitarización y reunitarización, que de acuerdo con la misma autora son procesos mentales más sofisticados que permiten "flexibilizar el pensamiento para poder ser capaz de conceptualizar la unidad en términos de muchos diferentes tamaños" (pp. 47-48).

Para hacer observables estos procesos, se pidió a los profesores que ilustraran con un esquema o modelo gráfico el problema planteado y a partir de ahí se les hicieron preguntas para ayudarlos a reflexionar. La notable variedad de modelos elaborados por los profesores para ilustrar el problema planteado, dieron una idea de los avances de los mismos al tomar en cuenta las diferentes representaciones gráficas que se pueden utilizar para ilustrar situaciones con fracciones, y se salieron de las utilizadas por ellos cotidianamente. En la siguiente tabla se muestra la clasificación de los modelos elaborados por los profesores y la frecuencia de aparición de cada uno.

Tabla 4.6

Frecuencia de modelos utilizados para ilustrar el Problema 3

Tipo de ilustración	Frecuencia
Mezcla de continuo y discreto	4
Modelo discreto	3
Modelo continuo de rectángulo	2
Diagrama de árbol	2
Tabla de doble entrada	1
Total	12

Como se puede observar en la tabla precedente, se presentaron cinco diferentes representaciones, quedando con una frecuencia baja el modelo continuo de rectángulo [que es el más utilizado por los profesores], lo cual es un indicador del avance del conocimiento de modelos de representación de las fracciones, por parte de los docentes.

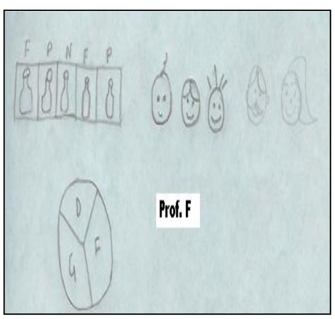


Figura 4.8. Ejemplo de modelo Continuo y discreto.

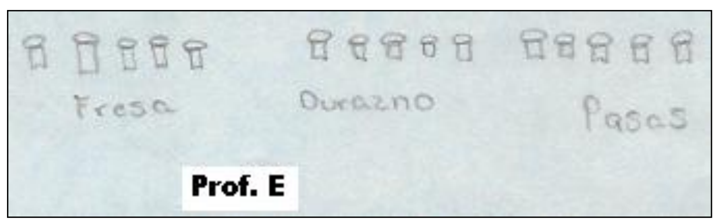


Figura 4.9. Ejemplo de modelo discreto.

Las dos figuras precedentes muestran que los profesores asumen que el entero está compuesto de tres elementos diferentes que son los sabores del paquete y al realizar la partición de cada uno de ellos, para indicar lo que correspondería a cada miembro de la familia, descubren el total de elementos que comprende el entero y de esta manera están *unitarizando* y *reunitarizando*. El uso de varios elementos para ilustrar el problema, también da muestra de los procesos definidos por Lamon, ya que es claro que los profesores determinan una unidad compuesta por varios elementos, y al separar los conjuntos de cinco hacen nuevamente una *unitarización*, es decir, *reunitarizan*.

Las representaciones continuas que usaron dos de los profesores del grupo fueron rectángulos divididos en 15 cuadrados, como el ejemplo que se muestra abajo.

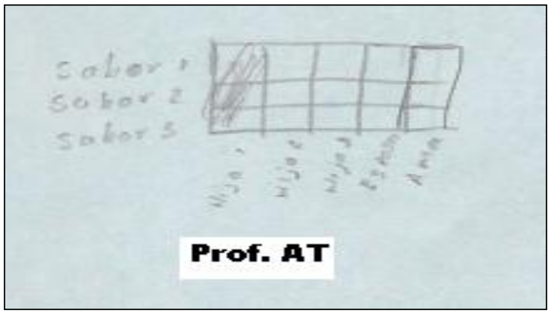
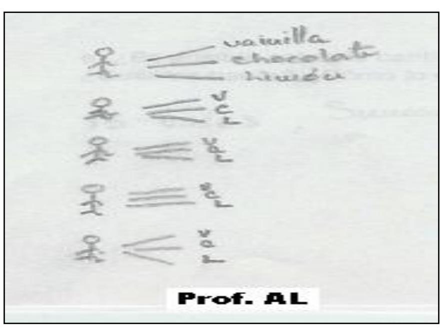
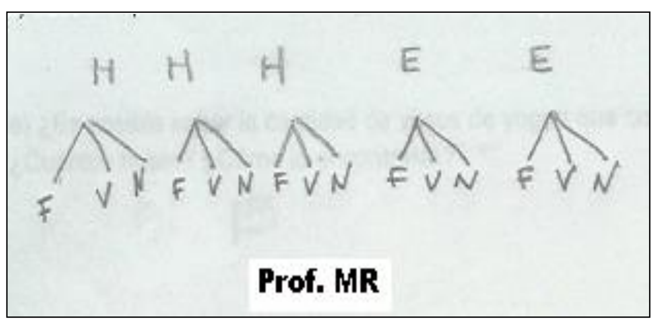


Figura 4.10. Ejemplo de modelo continuo.

En este tipo de modelo se observa cómo el entero en un principio es concebido como un solo elemento y después cuando se hace la partición, en sabores y para cada integrante de la familia, el entero se conserva. Por lo que aquí no se puede afirmar que se estén llevando a cabo los procesos mencionados por Lamon.

Los profesores que ilustraron el problema con diagramas de árbol no parten de una unidad definida, o entero de referencia; el "paquete" que se menciona en el problema quedó oculto y es difícil saber en este momento si los profesores se dieron cuenta de esto. Por otra parte, también es importante notar que de esta manera las fracciones quedan también "escondidas" y se puede generar la impresión de estar trabajando con cantidades enteras.





Figuras. 4.11 y 4.12. Ejemplos de diagramas de árbol.

Finalmente, un profesor ilustró el problema con una tabla de doble entrada, y como se puede observar en la figura de abajo, muestra de manera clara la unidad, ya que tiene la anotación *"paquete de 15"*. Aquí, lo interesante sería constatar que el profesor identifica las fracciones implícitas en ese entero, para poder observar entonces los procesos de *unitarización* y *reunitarización.*

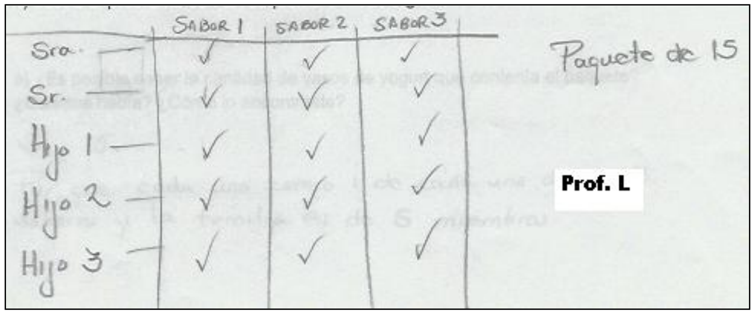


Figura 4.13. Ejemplo de Tabla de doble entrada.

El uso de estos modelos de representación permitió darse cuenta de que modelos como el diagrama de árbol y la tabla de doble entrada pudieran causar confusión en un momento dado, ya que podrían generar la idea errónea de estar trabajando con números enteros. Si esta confusión ocurre, es necesario plantear preguntas directas sobre el entero para corroborar que quien utilice estos modelos, no pierda de vista la situación de fracciones que implica.

Las preguntas que se hicieron posteriormente en este problema, estuvieron encaminadas a generar los procesos de *unitarización* y *reunitarización*, en una especie de descomposición y recomposición de unidades. Sin embargo, a partir de las respuestas que dieron a esta pregunta se puede concluir que no quedó claro para los profesores ni el entero del que se estaba hablando, ni la partición que generaron los distintos sabores, y además la cantidad de integrantes de la familia, fungió como un elemento de confusión para ellos.

Con relación a la última pregunta planteada en este problema, la mayoría de los profesores la contestó de manera correcta, lo que da muestra de que los profesores tienen menos dificultades cuando se les pregunta en términos de cantidad y no de fracción.

ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO DE MEDIDA

Los profesores de educación primaria llevan a cabo cotidianamente [de manera intencional o no] actividades que implican medición; es decir, asignar una cantidad a un objeto físico. El acto de medir implica el uso de una unidad [convencional o arbitraria] para determinar la medida del objeto. La medida involucra identificar atributos de un objeto o fenómeno: longitud, área, peso, volumen. Se selecciona una unidad y se compara la unidad con el atributo del objeto o fenómeno (Stephan & Clements, 2003; citado en Bahadir, Helding & Flores, 2008).

La medida incluye tres principios fundamentales: 1) una relación inversa entre el tamaño de la unidad de medida y el número de veces que la unidad es usada para medir una cantidad dada; 2) la posibilidad de partición de la unidad en unidades cada vez más pequeñas para poder aproximar la cantidad con la precisión deseada; 3) iterando la unidad de un extremo a otro, para poner fin a lo largo del objeto o fenómeno que se está midiendo.

Respecto de las fracciones, Lamon (1999) dice que cuando se habla del uso del número racional como medida, el enfoque que se le está dando a éste es el de la representación de una partición sucesiva de la unidad. La interpretación de medida del número racional involucra todos los aspectos de medida, los cuales son específicamente: una unidad, determinar alguna longitud y medir la longitud con la unidad vía la iteración. La unidad puede siempre ser subdividida dentro de unidades más pequeñas, generando una gran cantidad de unidades que correspondan a algún deseo específico. Y la iteración de la unidad es un proceso continuo que se inicia a partir de o se hace en referencia a algún punto cero. Sin embargo, es necesario saber si los profesores son conscientes de este proceso y si tienen los conocimientos necesarios para transmitirlos adecuadamente a sus alumnos. Acerca de este concepto [el de medida] en un contexto de fracciones, Kieren (1980) afirma:

> El subconstructo de "número racional como medida" está estrechamente vinculado con la relación parte-todo. Sin embargo, la tarea de medición significa la asignación de un número a una región (que puede ser de una, dos o tres dimensiones o alguna otra característica). Esto es por lo general sólo a través de una iteración del proceso de contar el número de unidades enteras que puedan utilizarse en "cubrir " la región, e igualmente subdividir una unidad para proporcionar el ajuste de la parte faltante en forma apropiada. La atención se centra en la unidad arbitraria y su subdivisión en lugar de las relaciones parte-todo. Se ha

> visto en investigaciones de Washburne (1930), Novillis (1976), y Babcock (1978) que la identificación de toda la unidad en situaciones parte-todo es difícil, porque el "todo" está implícito en lugar de la unidad explícita que se encuentra en el subconstructo de medición […] El número racional como medida es un ajuste natural […] usando unidades en notación decimal como decímetros, centímetros, milímetros, que sirven como modelos físicos de décimos, centésimos, milésimos. (p.136)

Considerando la definición anterior, se buscó indagar en los conocimientos de los profesores a través de un cuestionario, donde se les plantearon tres problemas. En el primero, se les solicitó [a los profesores], dar ejemplos de las fracciones como medida, con la finalidad de identificar las ideas o nociones iniciales que tienen ellos acerca de este concepto. El segundo problema buscó generar el uso de la recta numérica y mediante dos preguntas conocer las explicaciones que los profesores dan acerca de este modelo [recta numérica]. El tercer problema tuvo una orientación similar al anterior, sólo que aquí se buscó utilizar el modelo de área para ilustrar el problema y generar la reflexión, además de conocer las justificaciones que dan los profesores. [Cuestionario completo, véase Anexo 5.]

En el primer problema, siete de los nueve profesores evaluados [ese día no asistieron tres profesores] dieron respuestas generales donde se mencionaron magnitudes susceptibles de medición, como: longitud, capacidad y peso, además de anotar aisladamente unidades estandarizadas de medida como: litro, kilogramo y metro. En ningún caso hicieron planteamientos con ejemplos concretos y cómo trabajar las fracciones en situaciones de medida. Sólo hubo dos aproximaciones [Profesores L y PE] quienes trataron de relacionar las fracciones con unidades de medida; sin embargo, ninguno de ellos redactó en forma clara un problema o ejercicio para resolver (figuras 4.14 y 4.15).

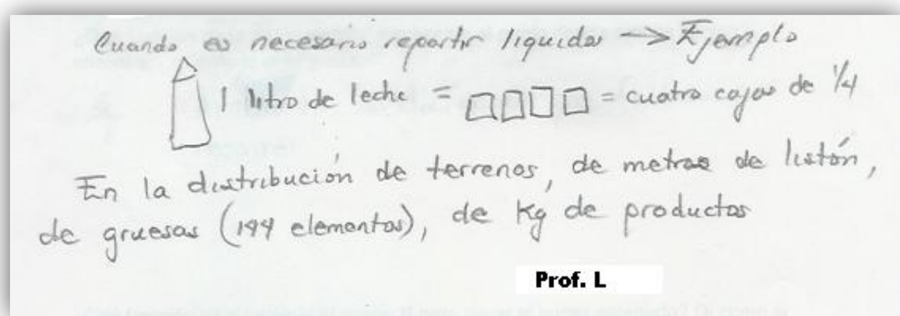


Figura 4.14. Ejemplo inexacto de situación de medida.

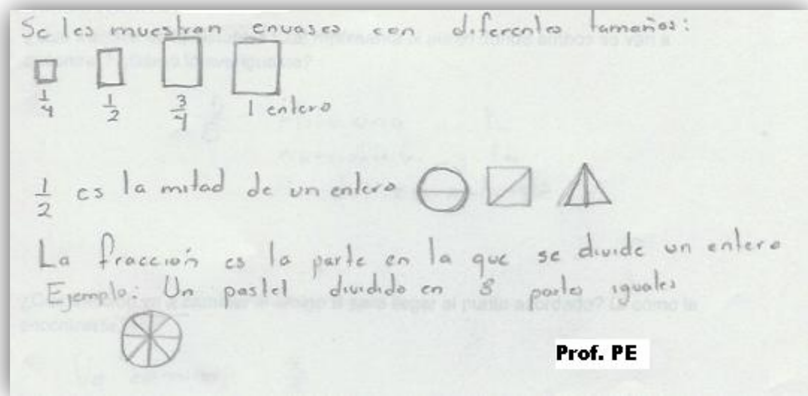


Figura 4.15. Ejemplo del uso de fracciones en situaciones de medida.

Como puede observarse en las figuras anteriores, los ejemplos dados son únicamente enunciativos y no describen ninguna problemática que requiera resolverse por medio de algún procedimiento o cálculo, ni tampoco plantean situaciones donde pueda notarse una clara relación de las fracciones en un contexto de medida; es decir, utilizar la unidad para medir. Por su parte, el Prof. PE al intentar ilustrar las fracciones como medida, propone ejemplos que encajan en el enfoque parte-todo, lo que permite inferir que en realidad ese [parte-todo] es el único contexto que maneja. Otro ejemplo de un profesor, ilustra diferentes situaciones de fracciones en la connotación parte-todo [Prof. MG], sin embargo, al agregarle magnitudes como: litros, metros, kg, denota la intención de ubicar las fracciones en el contexto de medida, sin embargo, eso no implica que sus conocimientos sean más amplios que el del resto de sus compañeros.

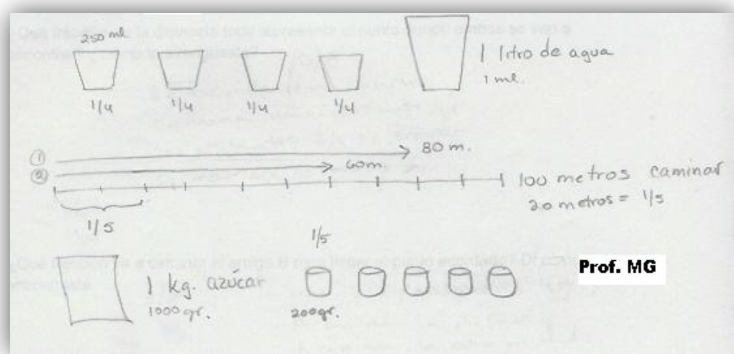
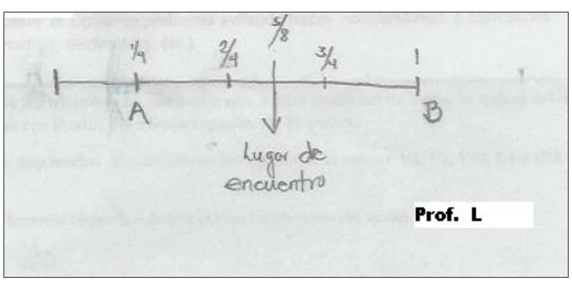


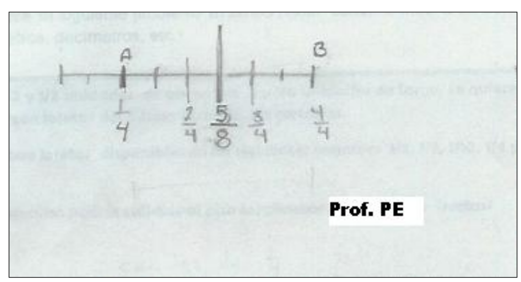
Figura 4.16. Ejemplos de fracciones como medida.

Acerca de los resultados obtenidos en el planteamiento del primer problema, se puede decir que los profesores tienen una vaga idea del uso de las fracciones como medida; sin embargo, es persistente la connotación parte-todo en sus ejemplos. Por lo tanto, se puede afirmar que carecen de conocimientos suficientes para poder plantear situaciones que impliquen el uso de fracciones como unidades de medida, y su conocimiento se limita al contexto parte-todo. Esta falta de conocimientos les imposibilita expresar enunciados con ideas completas o problemáticas concretas y únicamente expresan palabras aisladas o enunciados incompletos.

En el segundo problema, de este cuestionario, se les solicitó representar la situación planteada con un modelo gráfico y acompañar el modelo con representaciones simbólicas. En cuanto a la representación gráfica, ocurrió lo que se esperaba; es decir, que los profesores utilizaran el modelo de recta numérica, entendiendo a ésta como: "la representación gráfica sobre una recta arbitraria de un conjunto de números dados […] guardando entre ellos la misma distancia" (Flores, 2013, p. 23).

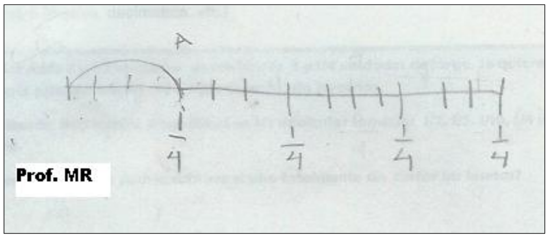
De los nueve participantes, seis hicieron sus representaciones de manera correcta, mientras dos de ellos lo hicieron de manera incompleta y otro no hizo el modelo, pero escribió las palabras "recta numérica". Este tipo de respuestas indica que los profesores pudieron advertir la necesidad de utilizar esta representación [recta numérica] para el problema planteado, aún cuando no todos lo hicieran adecuadamente [véanse figuras 4.17 y 4.18].





Figuras 4.17 y 4.18. Representaciones de recta numérica correctas.

Como puede observarse en las figuras 4.17 y 4.18, estos profesores cumplen con las características adecuadas para la representación de fracciones en la recta numérica, como: mantener la misma distancia entre los puntos y ubicar las fracciones correctamente. Por otra parte, las imágenes que se muestran abajo (figuras 4.19 y 4.20) son incorrectas, ya que en el primer ejemplo no se señalan los enteros, ni se ubican las fracciones mencionadas en el problema y en el segundo ejemplo no se asocia ningún punto de la recta con alguna fracción.



Figuras 4.19 y 4.20. Representaciones de recta numérica incorrectas.

Se les pidió también a los profesores, señalar en sus modelos el punto de encuentro de ambos amigos y anotar la fracción que representa. A este respecto, de los profesores que trazaron adecuadamente sus rectas numéricas, sólo un profesor no contestó la pregunta, mientras que todos los demás contestaron correctamente y coincidieron en la fracción $\frac{5}{8}$ [que es la respuesta correcta], también la mayoría de ellos dio una explicación acerca de cómo encontraron la respuesta. En tanto, la segunda pregunta, no resultó ser difícil para los profesores, ya que todos con excepción del que no contestó la pregunta anterior dieron la respuesta correcta: $\frac{3}{8}$, y algunos dieron una explicación adicional acerca de cómo encontraron la respuesta correcta.

MG. "Se divide en cuartos; camina inicialmente $\frac{1}{4}$ los restantes $\frac{3}{4}$ se transforman en octavos"

AT: "Mentalmente busqué la fracción equivalente que me diera la mitad de cada cuarto"

Figura 4.21. Explicaciones dadas por los profesores de cómo encontraron la respuesta correcta.

En conclusión, se puede decir que la situación planteada a los profesores en este segundo problema, representó cierta dificultad, ya que dieron respuestas incompletas. Y al analizar las explicaciones dadas por los profesores para justificarlas [las respuestas], se observa que dan argumentos insuficientes e inconsistentes. Y aunque hayan contestado correctamente, aún no es evidente que ellos posean una base sólida de conocimientos, que les permitan por si mismos plantear situaciones donde se trabaje la fracción como medida.

El Problema 3, de este cuestionario, buscó que los profesores utilizaran las fracciones como unidades de medida, a través del modelo de área.

Un piso mide $2\,\frac{1}{2}$ unidades de ancho por $3\,\frac{1}{4}$ unidades de largo. Se quiere cubrir todo este piso con losetas del mismo tamaño, sin cortarlas. En la tienda sólo hay losetas disponibles en los siguientes tamaños $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{20}$ de unidad. ¿Con cuáles tamaños podría cubrirse el piso totalmente sin cortar las losetas? ¿Con cuáles no se puede y por qué?

Figura 4.22. Problema 3 del cuestionario de medida.

A los profesores se les dio la consigna de utilizar el espacio [sobrante de la hoja] para ayudarse a resolver el problema y evitar hacer conversiones a números decimales, tampoco podían utilizar medidas convencionales como *cm*, *dm*, etc., para resolver el problema.

Se esperaba que todos los profesores se auxiliaran de modelos gráficos que les ayudaran a resolver la situación; sin embargo, de los nueve participantes, sólo cinco recurrieron a este tipo de modelos, los demás contestaron sólo numéricamente. Algo necesario de destacar fue que en ningún caso el modelo elaborado ayudó a los profesores a contestar correctamente y tal vez a alguno de ellos el modelo le causó confusión. Como el modelo del profesor que se ilustra a continuación (véase Figura 4.23).

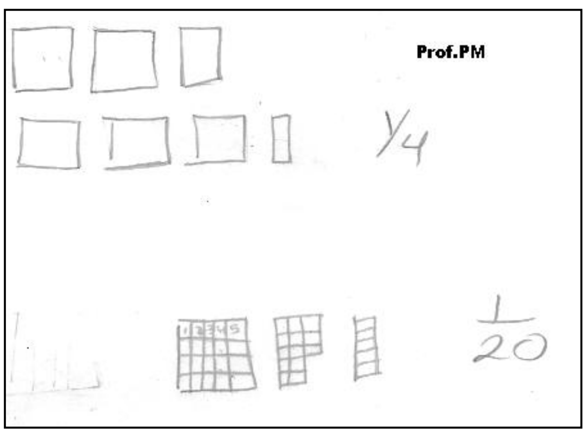


Figura 4.23. Modelo gráfico del Prof. PM.

Respecto a las preguntas, es menester mencionar que ningún profesor contestó correctamente a ellas; sin embargo, se puede pensar que esto se debió a que se les dieron opciones de respuesta que fueran afines numéricamente a las fracciones que se manejan en el problema, pero para poder comprobar si alguna de ellas cumplía con la condición establecida en el planteamiento de "mismo tamaño, sin cortarlas" se debía elaborar una situación gráfica donde se hubiera podido comprobar que sólo las losetas de $\frac{1}{8}$ o menores, pero equivalentes a esta última habrían podido cumplir con esta condición. Sin embargo, esto no ocurrió y tampoco ningún profesor lo detectó.

4.2 ANÁLISIS DE LAS SESIONES DEL TALLER

Como ya se había mencionado en otro apartado de este trabajo, la intención de llevar a cabo un Taller con los profesores de educación primaria fue utilizar éste como herramienta para obtener una mejora de su conocimiento matemático para la enseñanza, mediante la confrontación de ideas y el análisis de las diferentes situaciones problemáticas que se les plantearon en los cuestionarios correspondientes a cada subconstructo de las fracciones, como: unidad y medida. Además, hubo otras actividades que se llevaron a cabo durante el Taller y complementaron la dinámica del análisis y la reflexión. En este sentido, Schwarz, Hershkowitz y Azmon (2006), resaltan la importancia de la argumentación como una herramienta para la construcción del conocimiento.

Se debe mencionar que durante las primeras sesiones, los profesores se limitaban a leer las respuestas de sus cuestionarios de manera textual y los comentarios agregados eran cortos y muy generales. Poco a poco al avanzar las sesiones, los profesores fueron explayándose de manera que surgieron ideas importantes que atendieron aspectos que hasta el momento pasaban inadvertidos para ellos. Por ejemplo, al pedirles que mencionaran las dificultades que se les presentan durante la enseñanza de las fracciones, el Prof. L expresó:

> *Algo que yo he percibido, que hacemos al pretender ilustrar ejercicios de fracciones, es que utilizamos siete cuadritos si necesito séptimos, ahora les cambio a cuatro cuadritos si necesito cuartos y entonces mis enteros son diferentes totalmente ¿no? Entonces, ahí también… este, pues tendríamos que decir que si estamos manejando una misma situación, también todos los enteros tendrían que ser iguales. Entonces también nosotros le tenemos poca atención a los detalles en ese sentido ¿no?*

El comentario anterior muestra que este profesor detectó correctamente un problema de enseñanza, que es el manejo arbitrario de la unidad o entero, cambiándola a placer, sin considerar las implicaciones que esto da lugar. Sin embargo, el profesor no logra nombrarlo de esta manera e incluso duda de la importancia de su planteamiento. Intuye que ahí ocurre algo que está mal, pero no sabe precisarlo, y lo minimiza al señalarlo como “detalles”. La práctica que menciona el profesor no favorece en los alumnos la correcta formación de un proceso cognitivo llamado unitarización, que de acuerdo con Lamon (1999) se refiere a la asignación mental de una medida o tamaño a un todo o unidad. Es decir, la unitarización se produce después de decidir sobre el tamaño de la unidad, el cual es tomado como referencia para trabajar con él.

Se resaltó la importancia del comentario anterior, debido a que este tipo de prácticas resultan claves para el aprendizaje erróneo de las fracciones por parte de los alumnos, ya que ciertamente un manejo arbitrario de la unidad genera confusión en la idea que se forman los estudiantes acerca de la unidad. Además de éste surgieron otros razonamientos entre los profesores, en el sentido de que las dificultades de aprendizaje de los alumnos tienen como trasfondo una inadecuada enseñanza surgida principalmente por la falta de dominio de los diferentes contenidos por parte de los profesores, como lo declara el Profesor AT:

> *Yo pienso que por que generalmente no les explicamos cual es la función [de las fracciones]o ponerles un significado a cada uno de los términos [refiriéndose al numerador y denominador], que se les haga a ellos más lógico y razonable… incluso a mí me pasaba lo mismo, porque buscaba una manera de entenderlo yo mismo.*

Como puede notarse en la afirmación anterior, el profesor deja entrever que ahora ya entiende la función de las fracciones [en el sentido de que ya tienen un significado para él mismo] y ya conoce lo que significan cada uno de sus términos; sin embargo, en ningún momento dice cuáles son estos significados, ni tampoco puede dar ejemplos concretos que apoyen su afirmación. Con el ambiente de confianza que se logró al paso de las sesiones, surgieron otros comentarios [como el ilustrado más abajo], a partir del cual se generó una discusión que se centró en la importancia de la contextualización y el significado que tiene para los profesores la enseñanza de las matemáticas, lo que provocó que se desviara un poco la atención [respecto al tema de las fracciones], sin embargo, se consideró necesario mostrar aquí estas inquietudes, ya que dan cuenta de lo difícil que les resulta [a los profesores] la enseñanza de algo que para ellos mismos resulta incomprensible.

> *PM. Y para empezar, la situación de ¿por qué las matemáticas? ¿Por qué desde hace años y años y nuestros abuelos y todos siempre vimos las matemáticas como el coco de todo ¿no?...... para mí las matemáticas son vitales, son necesarias para tu vida cotidiana, estés o no estés en la escuela, te enseñen o no te enseñen. Tú manejas las matemáticas aquí y en todas partes ¿no? Hasta las personas que son analfabetas te manejan las matemáticas,*

inclusive a veces mejor que nosotros (no logra dar ejemplos o situaciones concretas).

AL. La forma de enseñanza y justamente el miedo o temor hacia los números. A mí me cuesta mucho y sin embargo es a lo que más le dedico a preparar bien, por los niños.

MG. Pienso que los maestros que les tienen miedo a las matemáticas son muchísimos... La cuestión es que, como no nos gusta, les transmitimos inconscientemente a los niños el miedo, y la incapacidad de razonar.

Los comentarios anteriores muestran ambigüedad y vaguedad en los argumentos de los profesores para justificar que no poseen los conocimientos matemáticos necesarios para explicar las deficiencias de la enseñanza de esta asignatura [matemáticas]. Limitan su idea de las matemáticas al uso de números y piensan que el miedo es un factor que crea incapacidad de razonamiento. En ningún momento mencionan ellos temas concretos que les generen dificultades al enseñar, ni tampoco dificultades de aprendizaje en los estudiantes.

En otro momento del Taller, se habló de darle un sentido a la enseñanza de las fracciones para evitar el conocimiento repetitivo y mecanizado que se genera en los estudiantes. Sin embargo, fue recurrente que los profesores argumentaran que las fracciones sirven para el razonamiento y ayudan a resolver situaciones cotidianas; no obstante, ninguno pudo dar ejemplos concretos que apoyara estas afirmaciones. Como el expresado por el profesor PE:

Yo de lo que me he dado cuenta con mis alumnos es que cuando les empiezo a enseñar fracciones en la recta numérica, hacen la recta numérica del 1 al 10 siempre, porque así desde primer año les enseñamos a representar la recta numérica y entonces yo les digo represéntame un tercio con recta numérica. Hacen del uno al diez y encierran el tres. Ahí es una forma incorrecta, ahí es donde hay que decirles que aunque es del mismo tamaño la recta numérica pero la tienes que dividir en 10 partes y cada una en diez. Pienso que se debe a que ya traen el conocimiento previo de que la recta numérica es del 1 al 10.

En el comentario anterior, se observa cómo atinadamente el profesor detecta un error conceptual en sus alumnos [que es el de utilizar la recta numérica sólo para representar números enteros], sin embargo, el argumento que emite el profesor para corregir el error es: limitado, impreciso e incorrecto. Limitado debido a que no les aclara a sus alumnos que con la recta numérica, además de números enteros también se pueden representar fracciones; impreciso, pues no les explica que una recta numérica puede representar a un solo entero o a varios de ellos, e incorrecto, ya que al indicarles [a los alumnos] que la recta numérica se "tiene" que dividir en 10 partes y a su vez cada parte nuevamente en 10, el profesor está olvidando que la partición de un entero depende de la fracción que se desee representar en él; es decir, si solicitó tercios, la partición debió ser de tres partes iguales [en el entero que él mismo debe definir, que puede ser la recta completa o sólo una parte] y no de diez.

La gama ilimitada de fracciones que pueden representarse en una recta numérica, depende de la finalidad del profesor para enseñar este concepto; es decir, si pretende utilizar la recta numérica como un entero donde se genere una partición y se observe una fracción desde el subconstructo parte-todo, o bien si desea utilizar la recta numérica en el contexto de medida donde podrá utilizar las fracciones para representar precisamente una medida. Finalidad que depende también de la cantidad y comprensión de conocimientos que tiene el profesor de este modelo en particular.

Por otra parte, al detectar la estructura de los conocimientos previos que posee el alumno, el profesor puede determinar la naturaleza del error y en dado caso, tener la habilidad de corregirlo o ayudar al alumno a que él mismo lo haga y con esto está ampliando los conocimientos de los estudiantes mediante actividades que les generen conflictos conceptuales y reflexión. En este sentido, Chamorro (1995), apoyándose en teóricos como: Brousseau y Bachelard expresa que "la historia de la ciencia se halla jalonada de errores rectificados" (p. 4). Por lo tanto el error puede tomarse como una oportunidad para aprender.

La afirmación del profesor PE desencadenó, además en los profesores participantes, una serie de reflexiones que llevaron a introducir otro tema importante dentro del terreno de las fracciones, que es la determinación del entero o unidad. Resultó interesante la manera espontánea y precisa con la que se abordó, ya que a partir de una afirmación errónea pudo generarse el siguiente diálogo:

L. O sea [refiriéndose a la recta numérica]. Entonces si yo hago una recta numérica de 10, tengo 10 enteros, tengo que ser clara y decirles que son 10 enteros.

C. Porque un niño puede entender que es un entero que se dividió en 10 partes.

PM. Y si yo hago la recta de 15 también puede ser. Entonces, esto es cómo estás explicando. O esa recta ¿para qué es? Que referente le estas dando.

L. Tienes que definir exactamente cuál es tu entero. Si hablamos del grupo de PE que tiene 30 niños, ese es tu entero. Pero si hablamos del grupo de R que está trabajando ahorita que somos estos, entonces ese es su entero, así pasa igual con las rectas.

Durante el diálogo anterior, se puede notar cómo la reflexión y el razonamiento de los profesores respecto al "tamaño" de la recta numérica y las precisiones que es necesario dar a los alumnos, los ayuda a entender sus conocimientos acerca del concepto de entero o unidad; incluso, en la forma como posteriormente el Profesor L expresa sus argumentos se puede notar mayor claridad, pues proporciona ejemplos concretos. Además, ellos mismos [los profesores] se dan cuenta de la confusión del profesor PM y ayudan a aclarar sus ideas.

En relación con el concepto de medida que también se abordó durante las sesiones del Taller, además de analizar algunas dudas surgidas por los problemas planteados en el cuestionario correspondiente al tema, se les solicitaron a los profesores ejemplos donde se pudiera identificar el uso que se le puede dar a la fracción como unidad de medida, con la finalidad de poder observar si conocían este subconstructo de la fracción y las diferencias con otro subconstructo. Sin embargo, más allá de mencionar de manera aislada que se pueden usar fracciones para medir "medio litro de leche" o "un cuarto de queso", los profesores no fueron capaces de estructurar ningún tipo de situación donde se pudiera observar claramente el uso de la fracción como instrumento de medida, por lo que se les dieron algunos problemas para resolver y a partir de ahí generar la discusión.

Uno de los problemas mencionados arriba: "el problema del hexágono", donde a través de la noción de superficie, se utilizaron figuras geométricas, que se encontraban inmersas en otra figura y con ellas poder determinar la fracción que cada una de éstas figuras representan respecto a la figura considerada como entero [un hexágono]. Este problema generó tal inquietud entre los profesores, que solicitaron utilizar hojas adicionales para poder calcar las figuras y sobreponerlas en el entero para poder dar sus respuestas. Está por demás mencionar que esta actividad particular los hizo reflexionar en torno a la importancia de considerar como válidas las diferentes estrategias para solucionar un problema, como lo expresó el profesor C que explicó la forma como él había obtenido su respuesta:

> *Yo tuve que dividir mi figura, y en la parte central, ahí me sale lo que es el rectángulo y también la observación de la mitad del romboide ahí partimos, para entonces poder contar las partes y nos diera en el rectángulo…cuatro sextos o dos tercios. Bueno cada quién tiene sus procesos, ¿no?*

Como puede notarse la argumentación que da el profesor para explicar su respuesta no es clara y sus compañeros no quedan convencidos; sin embargo, como su respuesta estaba correcta, agrega el argumento de los procesos individuales, lo cual es válido; sin embargo, este tipo de problemas argumentativos y de falta de claridad en las ideas fue recurrentes a lo largo de todo el Taller.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

INTRODUCCIÓN

Las habilidades y conocimientos de los profesores frente a grupo de cualquier nivel educativo en nuestro país, son los principales elementos utilizados por ellos en su práctica docente de manera cotidiana. Durante su práctica docente enfrentan el reto constante de que tales habilidades y conocimientos estén integrados para que les ayuden a lograr su objetivo principal que es el que sus alumnos aprendan. En este sentido y parafraseando a Ball (2000) se puede decir que la habilidad del profesor para escuchar a sus alumnos, o para hacerles las preguntas adecuadas oportunamente, así como el ser ingenioso para crear oportunidades de aprendizaje debe estar entrelazada con el contenido que se está enseñando. De tal manera que la tarea de enseñar se convierte en un complejo sistema de elementos que van integrados para que su resultado sea favorable.

Particularmente, para la enseñanza de las matemáticas, Ball y sus colegas a través de varias décadas de investigación han desarrollado un cuerpo teórico denominado "Conocimiento Matemático para la Enseñanza", que fundamenta teóricamente todos los elementos que se combinan en la tarea docente, enfocándose principalmente en los aspectos del contenido que maneja el profesor y la forma como los enseña, ya que en la medida que los profesores dominen los conocimientos de su materia, podrán también desarrollar la habilidad de transmitirlos.

5.1 DE ACUERDO CON LOS OBJETIVOS

El presente trabajó partió del supuesto de que ampliando y profundizando el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores, se mejora su práctica docente y, por consiguiente, el desempeño de sus alumnos. Por lo que se plantearon básicamente dos objetivos generales.

1) Indagar el conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones que poseen los profesores de educación primaria.

2) Implementar un Taller sobre el tema de las fracciones como eje rector [herramienta], para descubrir las implicaciones que éste pueda tener en la mejora del conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores de educación primaria

Respecto al primer objetivo, se puede decir que se cumplió en un sentido amplio, ya que a través de los cuestionarios resueltos por los profesores y sus intervenciones durante el Taller se pudo detectar el conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones que tienen los profesores y, por consiguiente, manejan con sus alumnos. Este conocimiento se enfoca principalmente en aspectos de procedimiento, es decir, se basa principalmente en memorización de reglas y uso numérico de las fracciones por encima de otro tipo de representación, por lo que se puede afirmar que los profesores manejan los contenidos principalmente en esta forma; es decir, en un sentido instrumental, que de acuerdo con Skemp (1976) es aplicar "reglas sin razones"; dejando de lado el aspecto conceptual y de entendimiento. Además, su enfoque de las fracciones predominantemente es parte-todo, desconociendo completamente los otros aspectos de las fracciones.

Por otra parte, respecto a los conocimientos específicos de los constructos de unidad y medida de las fracciones, los profesores participantes en esta investigación inicialmente tenían ideas fijas acerca de lo que son los enteros o unidades y les costó trabajo entender que la unidad es definida en función del contexto, que no necesariamente la unidad es un solo elemento. Y que se pueden presentar confusiones cuando no se especifican las unidades de referencia en un problema específico. Les quedó claro que necesitan practicar la unitarización y reunitarización para flexibilizar su razonamiento.

En las situaciones de medida trabajadas por los profesores se detectó que ellos son capaces de resolver problemas de medida con algunas dificultades, pero tienen ideas poco claras e insuficientes para hacerlo correctamente y no lograron elaborar propuestas que implicaran su uso.

Respecto al segundo objetivo, cuando los profesores reflexionaron durante el Taller, acerca de su práctica docente y las dificultades que enfrentan en la misma, lo primero que emergió de ellos fueron temas y contenidos aislados que les representan dificultades de enseñanza, pero difícilmente pudieron dar una justificación específica de lo que "los hace difíciles", lo que provocó que su atención se desviara a aspectos como el uso de materiales didácticos y la búsqueda de consejos prácticos y de estrategias que creen les ayuda a superar estas dificultades. Pocos hicieron referencia a carencias o limitaciones de sus propios conocimientos. Un aspecto que debe resaltarse es la dificultad de los profesores para expresar sus ideas, ya que la mayoría eran enunciados cortos con ideas generales que difícilmente especificaban aspectos de tipo pedagógico o de contenido, o de ambos en algún contenido específico. Tampoco hicieron una distinción entre dificultades de tipo procedimental o dificultades de tipo conceptual detectadas en los alumnos.

Lo anterior lleva a la conclusión de que los profesores son conscientes de que tienen carencias, pero no saben determinar exactamente cuáles y de qué tipo son éstas, por lo que es necesario ayudarlos a detectar y expresar adecuadamente sus dificultades.

5.2 DE ACUERDO CON LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

a) ¿Qué conocimiento matemático necesitan los profesores de educación primaria para mejorar su práctica docente en la enseñanza de las fracciones?

La aplicación de lo cuestionarios a los profesores permitió saber los conocimientos que los profesores tenían y qué otros les hacían falta. En este sentido, lo que se pudo determinar fue que sus conocimientos acerca de las fracciones era limitado a la parte-todo y su uso predominante era de tipo simbólico (numérico). Los profesores desconocían completamente conceptos como: partición, unitarización, cociente y medida, con relación a las fracciones.

Además, las respuestas de dos preguntas del cuestionario inicial se clasificaron en categorías retomadas de estudios previos (Cooper, Baturo & Grant., 2006, y Skemp, 1976; Mochón 1992), lo que permitió detectar el tipo de dificultades que perciben los profesores en su práctica docente y que entre las dificultades de enseñanza que más les preocupan, son las relacionadas con su nivel de dominio del tema. En segundo lugar, son las de nivel genérico que incluyen aspectos que pueden utilizarse en cualquier otra asignatura y finalmente las de nivel técnico, que son básicamente consejos para la enseñanza de un tema específico. Esto confirma que los profesores son conscientes de sus carencias de conocimiento, aunque eso no demuestra totalmente que sientan la necesidad de profundización y ampliación del mismo. También, se hizo evidente que los profesores dan más importancia a los aspectos instrumentales o procedimentales, que a los conceptuales o relacionales, lo que llevó a pensar que también sus conocimientos son de este tipo, por lo que se procedió a reforzar el otro aspecto: conceptual (o de entendimiento).

b) ¿Qué conocimientos referentes a las fracciones poseen profesores de educación primaria, y cómo lo sustentan?

Los profesores tienen un conocimiento limitado y fragmentado de las fracciones, por lo tanto las representaciones que ocupan se reducen a dos tipos: gráfico y simbólico. Sin embargo, para el gráfico utilizan mayoritariamente la representación continua (modelo de área mediante figuras geométricas). La interpretación que manejan los profesores es básicamente la parte-todo; aparece en casos aislados el cociente; aunque no hubo una clara evidencia del conocimiento de esta última. Sí hay suficientes indicadores de que los conocimientos de los profesores en el tema de las fracciones son escasos y necesitan profundidad. Además, al analizar sus respuestas se detectaron errores y deficiencias, así como poca variedad en sus ejemplos y una conceptualización superficial de las mismas. En este sentido, los estudios de Behr, Lesh, Post y Silver (1983, citados en Mancera 1992) plantean que para llegar a comprender una idea matemática, vale la pena tener la habilidad de manejarla en diferentes representaciones y de poder realizar traducciones de éstas. Los resultados también mostraron que el conocimiento de los profesores referente a recta numérica es confuso conceptualmente.

c) ¿Cómo influye un Taller sobre fracciones en la mejora del conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza de fracciones en educación primaria?

En cuanto al efecto del Taller sobre el conocimiento matemático para la enseñanza, se puede decir que en todo momento los profesores expresaron su agrado por aclarar sus confusiones, errores o conocimientos mal entendidos; incluso al trascurrir de las sesiones sus preguntas se volvieron más focalizadas y sus argumentos mejoraron en el sentido de que ya no eran reglas memorizadas o repetitivas, sino más bien ideas que pudieran convencer a la mayoría. Esto lleva a pensar que el Taller como espacio para generar la reflexión y para la construcción del conocimiento entre pares resulta una herramienta eficaz, que debería implementarse de una manera recurrente y voluntaria por parte de los profesores, pues es un espacio donde se genera la confianza suficiente para preguntar y expresar las ideas propias, sin el temor de la recriminación por el error.

5.3 DE ACUERDO CON LA HIPÓTESIS

Al inicio de esta investigación, se planteó la necesidad de generar propuestas de capacitación para los profesores de educación primaria, que fortalezcan la actualización y profundización de sus saberes. Al concluir este estudio, se puede afirmar que el Taller educativo es un espacio que cumple con esta finalidad, ya que genera el intercambio de opiniones e ideas entre los participantes, propiciando la reflexión sobre sus conocimientos actuales, y además [con las actividades o preguntas adecuadas] permite a los participantes darse cuenta de los conceptos erróneos que se han formado; es decir, es una herramienta que permite la construcción del conocimiento o reconstrucción de los conocimientos a través de la práctica.

5.4 EXPECTATIVAS A FUTURO

El camino a seguir para continuar explorando el estado del conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores, es enfrentarlos a situaciones que pongan en duda sus conocimientos y capacidades, para que a través de la reflexión, se llegue a la profundización de su conocimiento, lo anterior acompañado de la información necesaria, acerca del tema matemático que se esté tratando [como en este caso lo fueron las fracciones y sus subconstructos] con la finalidad de que sus habilidades docentes se fortalezcan y poder llevar a cabo su práctica docente de manera eficaz, sin que les genere angustia o inseguridad.

Por otra parte, es necesario ampliar el panorama interpretativo de las fracciones, en el conocimiento de los profesores, así como profundizar en el entendimiento de los diferentes modelos de representación desde la interpretación parte-todo que es la predominante en los contenidos de educación primaria, sin olvidar a los otros subconstructos que se abordan posteriormente en el nivel de educación secundaria, pero que es necesario tener nociones de ellos para la introducción adecuada de estos conocimientos a los alumnos del nivel primaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alatorre, S. & Saíz, M. (2008). Mexican primary school teachers´ misconceptions on decimal numbers. *Proceedings of the Joint Meeting, PME 32 and PME-NA XXX*. pp. 25-32.

Álvarez-Gayou, J.L. (2006). *Cómo hacer investigación cualitativa*: Fundamentos y metodología. Paidós.

Amato, S.A. (2005). Developing students´ understanding of the concept of fractions as numbers. In Chick, H.L. & Vincent, J.L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, pp. 49-56. Melbourne. PME.

Amato, S.A. (2006). Improving student teachers´ understanding of fractions. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, pp. 41-48. Prague.

Andrade, S. (2009). *El conocimiento matemático para la enseñanza: un estudio con maestros de educación primaria* (Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, DF.)

Armstrong, B.E. & Novillis, L. C. (1995). Students´ use of part-whole and direct comparison strategies for comparing partitioned rectangles. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(1), pp. 2-19.

Askew, M., Brown, M., Denvir, H. & Rhodes, V. (2000). Describing primary mathematics lessons observed in the Leverhume Numerancy Research Programme: A qualitative framework. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, pp. 17-24. Hiroshima.

Balcázar, P., González-Arriata, N., Gurrola, G. & Moysén, A. (2007). Análisis de datos y reporte de investigación. *Investigación cualitativa.* México. UAEM, pp. 215-231.

Ball, D.L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), pp. 241-247.

Ball, D.L. (2009). Developing Teachers´ Mathematical Knowledge for Teaching. *Mathematics Teaching and Learning To Teach*, pp. 1-31.

Ball, D.L. & Bass, H. (2000). Interweaving Content and pedagogy in Teaching and learning to Teach: Knowing and using Mathematics. In J. Boaler (Ed.). *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, pp. 83-104. Wesport, CT: Ablex.

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), pp. 389-407. Consultado el 5/10/2010, en http:jte.sagepub.com/content/59/5/389.

Baruch, S., Hershkowitz, R. & Azmon, S. (2006). The role of the teacher in turning claims to arguments. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M & Stehlíková N. (Eds.) *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, pp. 65-72. Prague: PME.

Baturo, A.R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. *Proceedings 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 95-102. Bergen.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, pp. 91-125. New York. Academic Press.

Carega, A., Sica, R., Cirillo, A. & Da Luz, S. (2006). Aportes para diseñar e implementar un taller. *8vo. Seminario-Taller en desarrollo Profesional Médico Continuo*. Tomado de: www.dem.fmed.edu.uy. El 10/01/ 2012.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. & Empson, S.B. (2000). Cognitively guided instruction: *A research-based teacher professional development program for elementary school mathematics*. Research Report 003. NCISLA, School of Education, University of Wisconsin-Madison.

Castro, A. & Li, W. (2010). Informing instructional design: examining elementary preservice teachers´ strategies a partitive quotient problem. In Brosnan, P., Erchick, D. B. & Flevares, L. (Eds.). *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education,* Columbus, OH: The Ohio State University, VI, pp. 995-1003.

Chamorro, M. (1995). Los procesos de aprendizaje en Matemáticas y sus consecuencias metodológicas en Primaria. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas* (4), pp. 87-96.

Chamorro, M. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. *Didáctica de las matemáticas*. Pearson Prentice Hall. Madrid.

Cid, E., Godino, D. & Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para Maestros. En Matemáticas y su Didáctica para Maestros. *Fracciones y números racionales positivos*, pp. 311-328. Consultado el 28/07/2012. En: http://www.ugr.es/ local/ jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf.

Clark, D. & Sukenik, M. (2006). Assessing fraction understanding using task-based interviews. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 337-344, Prague: PME.

Cooper, T.J., Baturo, A.R. & Grant, E.J. (2006). Collaboration with teachers to improve mathematics learning: Pedagogy at three levels. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 361-368, Prague: PME.

Cortina, J. (2006). Las mediciones de la calidad del aprendizaje matemático en México: ¿qué nos devela la prueba PISA 2003 y cómo podemos responder? *Educación Matemática,* 18 (1), pp.161-167.

Cortina, J. & Cardoso, E. (2009). Mexican sixth grade students´ understandings of fraction notations as numbers that express quantity. In Swars, S. L., Stinson, D. W. & Lemosn-Smith, S. (Eds.). *Proceedings of the 31th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Atlanta GA: Georgia State University, 5, pp. 765-773.

Fandiño, P. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didáctica Universitatis Comenianae,* 7, pp. 23-45. Obtenido el: 27/07/2012, En: www. dm. unibo. it/ rsddm/it/articoli/fandino/133Fractions.pdf.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrect: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Textos seleccionados, México: CINVESTAV, pp. 1-49.

Hernández, D. (2009). *El significado de las fracciones en situaciones de medición* (Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, DF.)

Hernández, S.R., Fernández, C.C. & Baptista, L.P. (2010). El proceso de la investigación cualitativa. *Metodología de la Investigación*. Chile, The McGraw-Hill, pp.362-370.

Hitt, F. (1998). Matemática Educativa: Investigación y desarrollo 1975-1997. *Investigaciones en Matemática Educativa II,* Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 41-65.

Izsák, A. (2006). Knowledge for teaching fraction arithmetic: partitioning draw representations. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3, pp. 345-352. Prague: PME.

Kieren, T., Nelson, D. & Smith, G. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks. *The Journal of Mathematical Behavior,* 4, pp. 25-36.

Lamadrid, P. (2011). *La enseñanza de las fracciones y saberes empíricos en profesores de primaria* (Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, DF.)

Lamon, S. (1996). The development of unitizing: its role in children´s partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), pp. 170-193.

Lamon, S. (1999). *Teaching Fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. United States of America. Lawrence Erlbaum.

Llinares, S & Sánchez, M. (1988). *Fracciones: la relación parte-todo*. Madrid. Síntesis.

Llinares, S & Sánchez, M. (2008). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. Tomado de http:// dialnet.unirioja.es/ servlet/fichero_artículo?codigo=2729376. El 15/02/2012.

Malet, O. (2010). Los significados de las fracciones, una perspectiva fenomenológica. *Revista No.21, sección Matemática y currículum*. Obtenido de: www. Mendomatematicamendoza.edu.ar., el día 25/02/2012.

Martínez, C. & Lascano, M. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. *Revista EMA*, 6(2), pp. 159-179.

Mc Donough, A. & Clarke, D. (2003). Describing the practice of effective teachers of mathematics in the early years. *Proceedings 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 261-268. Honolulu.

Mochón, S. (1992). *Fracciones: algo más que romper un todo*. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México, DF. Documento interno.

Mochón, S. & Morales, M. (2010). En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación matemática*, 22(1), pp. 87-113.

Morales, M. (2013). *El conocimiento matemático para la enseñanza y su relación con la práctica docente de profesores de educación primaria*. (Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, DF.)

Morcote, O. & Flores, P. (2004). Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores de secundaria (un caso: las fracciones). Tomado de www.ugr.es/-flores/textos/articulos/.../Morcote-FloresEMA.pdf. El 15/02/2012.

Newstead, K. & Murray, H. (1998). Young students´ constructions of fractions. In A. Oliver & K. Newstead (Eds.). *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 295-302. Stellenbosch, South Africa.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I-Differentiation of Stages. *Educational Studies in Mathematics,* 11(2), pp. 217-253.

Park, J., Gücler, B. & McCrory, R. (2010). Extension from whole numbers to fractions. pp. 1-12. Obtenido de:

meet.educ.msu.edu /pubs/aera2010/ Park_Gucler_McCrory_ExtensionFINAL.pdf. 27/06/2011.

Pearn, C. & Stephens, M. (2007). Whole number Knowledge and Number Lines Help to Develop Fraction Concepts. Mathematics: essential Research, Essential Practice, *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2, pp. 601-610.

Pérez, E.L. (2010). *Impacto de un taller de discusión en el conocimiento matemático para la enseñanza y en la reflexión de saberes sobre la práctica docente de maestras de primaria.* (Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, DF.)

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de enseñanza? *Revista Pilquen. Sección Psicopedagogía,* Año XIV (8), pp. 1-14.

Ramírez, M.T. (2008). *El conocimiento matemático para la enseñanza: estudio exploratorio a través de un taller con maestros de educación primaria* (Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, DF.)

Riley, K. (2010). Teachers´ Understanding of Proportional Reasoning. In Brosnan P., Erchick D. B.& Flevares, L. (Eds.*). Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus,OH:The Ohio State University, VI, pp. 1055-1061.

Sánchez, A. (2009). La Evaluación del Logro Escolar en la Educación Básica en México. Los Excale de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa,* 2 (1), pp. 186-204. http: //www.rinace.net/riee/numeros/vol2-num1/art10 pdf. Consultado el 14/08/2013.

Schwarz, B., Hershkowitz, R. & Azmon, S. (2006). The role of the teacher in turning claims to arguments. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 5, pp. 56- 72. Prague: PME.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher,* 15(2), pp. 4-14. Consultado el: 18/10/2012, En: http://www.jstor.org/about/terms.html.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, pp. 20-26. En: http://www.grahamtall.co.uk/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf.

Skemp, R. (1993). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. *Necesidad de nuevos números*. Ed. Morata. Madrid, España, pp.191-204.

Sosa, L. & Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra (Eds.). *Investigación en educación Matemática XIV,* pp. 569-580. Lleida: SEIEM.

Streefland, L. (1978). Some Observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction. *Educational Studies in Mathematics,* 9(1), pp. 51-73.

Streefland, L. (1987). Free production of fraction monographs. *Proceedings 1st of the International conference on the Psychology of Mathematics Education,* pp. 405-10. Montreal, Canada.

Yanik, H., Helding, B. & Flores, A. (2008). Teaching the Concept of Unit in Measurement Interpretation of Rational Numbers. *Elementary Education Online,* 7 (3), pp.693-705. Recuperado de: http://ilkogretim-online.org.tr 28/07/2012.

TABLA DE CONTENIDOS DE FRACCIONES POR GRADO QUE SE ABORDAN DURANTE LA EDUCACIÓN PRIMARIA

TERCER GRADO	
BLOQUE III	➢ Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas. ➢ Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos.
BLOQUE V	➢ Elaboración e interpretación de representaciones gráficas de las fracciones. ➢ Reflexión acerca de la unidad de referencia.

CUARTO GRADO	
BLOQUE I	➢ Resolución de problemas que impliquen particiones en tercios, quintos y sextos. ➢ Análisis de escrituras aditivas equivalentes y de fracciones mayores o menores que la unidad.
BLOQUE II	➢ Representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras). ➢ Identificación de la unidad, dada una fracción de la misma.
BLOQUE III	➢ Identificación de fracciones equivalentes al resolver problemas de reparto y medición. ➢ Resolución, con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos (medios, cuartos, tercios, etcétera).

BLOQUE IV	➢ Uso de las fracciones para expresar partes de una colección. ➢ Cálculo del total conociendo una parte.
BLOQUE V	➢ Obtención de fracciones equivalentes con base en la idea de multiplicar o dividir al numerador y al denominador por un mismo número natural. ➢ Expresiones equivalentes y cálculo del doble, mitad, cuádruple, triple, etc., de las fracciones más usuales (1/2, 1/3, 2/3, 3/4, etcétera.)

QUINTO GRADO	
BLOQUE I	➢ Resolución de problemas que impliquen sumar o restar fracciones cuyos denominadores son múltiplos uno de otro.
BLOQUE II	➢ Conocimiento de diversas representaciones de un número fraccionario: con cifras, mediante la recta numérica, con superficies, etc. ➢ Análisis de las relaciones entre la fracción y el todo.
BLOQUE III	➢ Comparación de fracciones con distinto denominador, mediante diversos recursos. ➢ Uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimal.
BLOQUE IV	➢ Resolución de problemas que impliquen sumas o restas de fracciones comunes con denominadores diferentes.
BLOQUE V	➢ Uso de la expresión n/m para representar el cociente de una medida entera (n) entre un número natural (m): 2 pasteles entre 3; 5

	metros entre 4, etcétera.

SEXTO GRADO	
BLOQUE I	➢ Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación. ➢ Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales. ➢ Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.
BLOQUE II	➢ Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas. Por ejemplo, se quieren presentar medios y la unidad está dividida en sextos, la unidad no está establecida, etcétera.
BLOQUE III	➢ Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. ➢ Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales.
BLOQUE IV	➢ Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. ➢ Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales.

	Construcción de sucesiones a partir de la regularidad. ➢ Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión "*a*/*b* de *n*". ➢ Comparación de razones del tipo "por cada *n*, *m*", mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje.
BLOQUE V	➢ Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural. ➢ Resolución de problemas de comparación de razones, con base en la equivalencia.

TABLA GENERAL DE FRECUENCIAS POR CATEGORIA DE LA PREGUNTA 1 DEL CUESTIONARIO INICIAL

CATEGORÍA		PARTE-TODO			SIMBÓLICA						MEDIDA	COCIENTE	TOTAL	
REPRESENTACIÓN													RESPUESTAS POR CADA PROFESOR	CATEGORIAS EN LAS QUE SE AGRUPAN LAS RESPUESTAS
No.	PROF.	CONTINUA	DISCRETA	RECTA NUMÉRICA	SUMA	RESTA	FRACCION EQUIVALENTE	NUMERO MIXTO	CANTIDAD DECIMAL	DIVISIÓN				
1	L	SI		SI	SI	SI			SI	SI	SI		7 (0)	3
2	AT	SI		SI (x)	SI	SI	SI	SI	SI				7 (1)	2
3	E	SI		SI (x)			SI			SI			4 (1)	2
4	PE	SI		SI (x)				SI					3 (1)	2
5	MG	SI		SI			SI						3 (0)	2
6	PM	SI		SI	SI								3 (0)	2
7	K	SI		SI (x)				SI					3(1)	2
8	F	SI	SI	SI									3 (0)	1
9	MR	SI (x)	SI										2 (1)	1
10	AL	SI											1 (0)	1
11	C	SI (x)											1 (1)	1
12	Y											SI	1 (0)	1
TOTAL		11(2)	2	8(4)	3	2	3	3	2	2	1	1	38 (6)	

PORCENTAJES	55%	40%	2.5%	2.5%	100%	

(x) Respuestas incorrectas

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

CUESTIONARIO INICIAL SOBRE FRACCIONES PARA PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Nombre: ____ **Grado:** ___________________

INSTRUCCIONES: Contesta las preguntas con la mayor amplitud posible.

- Representa de tantas maneras como puedas la fracción $\frac{5}{4}$.

- ¿Qué dificultades tienes al enseñar el tema de fracciones? Especifica con ejemplos.

- De acuerdo con tu experiencia, describe ¿Qué aspectos se les dificulta a los alumnos en el aprendizaje de las fracciones? Especifica con ejemplos.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Departamento de Matemática Educativa

CUESTIONARIO PARA PROFESORES (U)

Nombre:____ Grado: ________

PROBLEMA 1

Analiza la siguiente situación.

Los hermanos Juan y María afirman que ambos comieron $\frac{3}{4}$ de sus bolsas de dulces. Cuando llega la mamá de ambos regaña a María y no a Juan. Indignada, ésta le pregunta ¿Por qué me regañas sólo a mí, si ambos comimos lo mismo?

a) ¿Qué explicación matemática darías para apoyar el argumento de María?

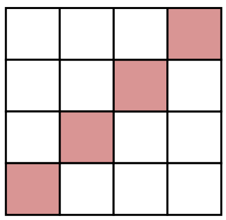
b) ¿Qué argumento desde el punto de vista matemático darías para justificar el regaño de Mamá hacia María?

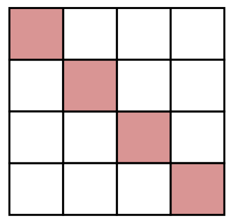
c) ¿Ambos personajes podrían tener la razón o sólo uno de ellos? ¿Por qué?

d) ¿Es la fracción el elemento que genera el conflicto en esta situación? Explica tu respuesta y da una propuesta para abordar el problema adecuadamente.

PROBLEMA 2

Un maestro pidió a sus alumnos observar las siguientes figuras y contestar la pregunta:
¿Qué fracción está representada en la zona sombreada?





Fueron varias las respuestas que dieron sus alumnos.

$a)$ $\frac{2}{4}$ c) $\frac{8}{16}$ e) $\frac{4}{16}$

b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{8}{32}$ f) $\frac{2}{8}$

a) ¿Por qué hubo varias respuestas? ¿Cómo puedes explicarlo?

b) ¿Qué respuesta es correcta? Argumenta tu elección.

c) ¿Es adecuado este ejercicio para la enseñanza?, ¿Por qué?, ¿Qué le modificarías?

PROBLEMA 3

Lee con cuidado el siguiente problema y contesta las preguntas acerca del mismo.

Una ama de casa compró un paquete de yogurt de tres sabores distintos. Sus tres hijos, su esposo y ella se comieron un yogurt de cada sabor y se acabaron el paquete.

a) Ilustra el problema con un esquema o modelo gráfico.

b) ¿Qué fracción de cada sabor había en el paquete? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Qué fracción del paquete de yogurt se comió cada integrante de la familia?, ¿Cómo lo averiguaste?

d) ¿Qué fracción del paquete se comió una persona de un solo sabor? ¿Cómo lo supiste?

e) ¿Es posible saber la cantidad de vasos de yogurt que contenía el paquete? ¿Cuántos había? ¿Cómo lo encontraste?

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Departamento de Matemática Educativa

CUESTIONARIO PARA PROFESORES (M)

Nombre: ____ Grado:_______________

SITUACIÓN 1

Describe algunos ejemplos para tus alumnos, donde se pueda abordar la enseñanza de las fracciones como medida.

SITUACIÓN 2

Lee el problema siguiente y contesta las preguntas.

Dos amigos viven en pueblos diferentes.

El amigo A desea encontrarse con el amigo B. El amigo A, se pone en marcha y ahora se encuentra a $\frac{3}{4}$ partes de distancia del pueblo donde está el amigo B. En este lugar, se comunican y deciden encontrarse en un punto intermedio de donde ambos se encuentran en este momento, para evitar que el amigo A camine demasiado.

¿Qué fracción de la distancia total representa el punto donde ambos se van a encontrar? ¿Cómo lo averiguaste? Representa con un modelo gráfico.

¿Qué fracción va a caminar el amigo B para llegar al punto acordado? Di cómo la encontraste. Señala en tu modelo el punto de encuentro.

SITUACIÓN 3

Lee y resuelve el siguiente problema evitando hacer conversiones a cantidades decimales (metros, decímetros, etc.)

Un piso mide 2 y $\frac{1}{2}$ unidades de ancho por 3 y $\frac{1}{4}$ unidades de largo. Se quiere cubrir todo este piso con losetas del mismo tamaño, sin cortarlas.

En la tienda hay losetas disponibles en los siguientes tamaños $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{20}$ de unidad.

¿Con cuáles tamaños podría cubrirse el piso totalmente sin cortar las losetas?

¿Con cuáles no se puede y por qué?

Puedes utilizar el siguiente espacio para ayudarte a resolverlo.