CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Dificultades en la comprensión de los criterios para máximos y mínimos.

Un estudio con profesores de cálculo en el nivel bachillerato.

Tesis que presenta

ROCIO MARIN GABRIEL

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

Especialidad en Matemática Educativa

Director de tesis

Dr. Antonio Rivera Figueroa

México, D.F. Diciembre 2013

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco al CONACYT, por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.

Un agradecimiento especial a mi asesor el Dr. Antonio Rivera Figueroa por el tiempo dedicado a la realización de la tesis y sobre todo por los conocimientos matemáticos que me hizo comprender.

Al Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco y Dra. Martha Leticia García Rodríguez por aceptar ser mis sinodales y todo lo que ello implica.

Índice

RESUMEN

En el presente trabajo se reportan los resultados de una investigación, que es un estudio de caso, consistente en una exploración acerca de la comprensión, por parte del profesor, de los diferentes criterios para determinar máximos y mínimos de una función, que usualmente se enseñan en el bachillerato. También se incluyó el tema de los puntos de inflexión, estrechamente relacionado con estos criterios. Se diseñó un cuestionario de 11 preguntas relacionadas con la comprensión y aplicación de estos criterios, en donde se puso especial interés en los aspectos lógicos de los mismos; como son la necesidad y suficiencia de las condiciones que se establecen en los criterios y que suelen mal interpretarse.

El cuestionario se aplicó a un grupo de 16 profesores o interesados en la docencia y que eran en ese momento aspirantes a ingresar a una maestría en ciencias, especialidad en Matemática Educativa en el CINVESTAV-IPN. Los integrantes de este grupo, con el cual se hizo la investigación, tenían formación profesional en matemáticas o ingeniería.

Las respuestas de los participantes se analizaron con base en un marco conceptual formado por 5 actividades mentales, propuestas por Carpenter y Lehrer (1999), que promueven la comprensión de una idea matemática. Dichas actividades son: 1) Construcción de relaciones entre conocimiento nuevo y conocimiento previo. 2) Creación de estructuras de conocimiento integradas y aplicación del conocimiento matemático. 3) Reflexión sobre las experiencias propias. 4) Articulación o comunicación. 5) Apropiación del conocimiento matemático.

Como resultado del análisis realizado se observó que, en general, los profesores requieren hacer una reflexión más profunda acerca de la naturaleza lógica de los criterios. Así mismo concluimos que es necesario que el profesor amplíe su experiencia, que incluya una diversidad de funciones que le ayude a comprender mejor los casos en que se puede aplicar cada criterio, así como los casos en que no funciona.

ABSTRACT

The present paper reports the results of a research, which is a case study, consisting of an exploration of the understanding of the different criteria for determining the maxima and minima of a function, usually taught in high school by teachers. Inflection points, closely related to these criteria are also included. Eleven tasks, related to the understanding and application of these criteria were applied; there was a particular interest in the logical aspects of these such as the necessity and sufficiency of the conditions that are often misunderstood.

The tasks were administered to a group of 16 candidates for a master's degree in Mathematics Education at CINVESTAV-IPN. The members had professional training in mathematics or engineering.

The responses of the participants were organized and analyzed based on a conceptual framework consisting of 5 activities that promote understanding of a mathematical idea: 1) Constructing relationships between new knowledge and prior knowledge. 2) Creation of integrated knowledge structures and application of mathematical knowledge. 3) Reflection on their own experiences. 4) Articulation or communication. 5) Appropriation of mathematical knowledge.

Findings from the study illustrate teachers need for a deeper reflection on the logical nature of the criteria. As consequences it is necessary for the teacher to expand his experience, this includes a variety of functions to help a better understand of where each criterion can be applied as well as other cases.

INTRODUCCIÓN

El cálculo diferencial es un curso presente en los currículos de Bachillerato, ubicado en los últimos semestres de ese nivel; su estudio involucra el manejo y comprensión de conceptos importantes como son función y derivada. En general, uno de los propósitos del curso es que el estudiante sea capaz de utilizar la derivada de una función para obtener información sobre el comportamiento de la función, en particular la determinación de los valores máximos y mínimos de una función, así como sus puntos de inflexión. También se tiene como objetivo la aplicación a la resolución de problemas de optimización que involucran la búsqueda de los valores extremos de una función. Esto se puede observar, por ejemplo en los programas de las asignaturas de cálculo en el Colegio de Ciencias y Humanidades, Escuela Nacional Preparatoria de la Universidad Nacional Autónoma de México y Escuelas Vocacionales del Instituto Politécnico Nacional.

En el proceso de aprendizaje de los estudiantes sin duda alguna el profesor juega un papel sumamente importante, además de los libros de texto. Por esta razón llevamos a cabo una investigación en el que tratamos de documentar las dificultades que tienen los mismos profesores de cálculo en la comprensión de los criterios para determinar los máximos y mínimos de funciones así como sus puntos de inflexión.

El Capítulo 1 está dedicado a una discusión del planteamiento del problema y a la formulación de las preguntas de investigación. En el capítulo 2 se da cuenta de algunos resultados de investigación relacionados con la problemática planteada en este trabajo. En el Capítulo 3, presentamos el marco conceptual que consiste en una descripción de lo que significa comprensión en matemáticas así como una discusión acerca de las dificultades lógicas que se pueden tener al aplicar los criterios para determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función. En el Capítulo 4, presentamos la metodología, que consiste en la aplicación de un cuestionario, el cual se aplicó a un grupo de aspirantes a la Maestría, especialidad en Matemática Educativa, ofrecida por el CINVESTAV-IPN, la mayoría con experiencia en la enseñanza de cálculo diferencial a nivel bachillerato. En este capítulo se exponen los objetivos de cada problema del cuestionario y se explica el procedimiento que se llevó a cabo en la recolección de datos. En el Capítulo 5, presentamos el análisis cualitativo de los resultados del cuestionario de los profesores, con el propósito de identificar las dificultades e indicadores en la comprensión de los estudiantes conforme a nuestra metodología. En el Capítulo 6 se presentan los resultados y conclusiones obtenidos del análisis de las respuestas de cada uno de los participantes.

CAPITULO 1

Planteamiento del problema y preguntas de investigación

1.1 Planteamiento del problema

En la enseñanza de las matemáticas en nivel bachillerato, para determinar los valores máximos y mínimos de una función usualmente se acude a los llamados criterio de la primera derivada y criterio de la segunda derivada, determinando previamente los puntos críticos de la función, pues en los puntos donde una función derivable alcanza un valor máximo o mínimo la derivada se anula. Esta condición que deben satisfacer los puntos donde una función derivable alcanza un valor extremo es por sí misma un criterio para máximos y mínimos de una función, por lo cual en el presente trabajo nos vamos a referir a ella como primer criterio para máximos y mínimos.

El criterio de la primera derivada se refiere al signo de la derivada a uno y otro lado de un punto crítico, por lo cual para aplicarlo se requiere del análisis del signo de la función derivada.

El criterio de la segunda derivada se refiere al signo de la segunda derivada en el punto crítico, para lo cual se requiere obtener la derivada de segundo orden en el punto crítico.

Usualmente, los libros de texto de cálculo ilustran estos criterios en casos simples y es de esperar que así lo enseñe el profesor. Sin embargo, la comprensión y aplicación de estos criterios, entrañan dificultades tanto técnicas como de naturaleza lógica.

Si uno trata de averiguar en internet sobre el tema de máximos y mínimos de funciones en cálculo, el buscador arrojará varios miles de sitios donde se expone el tema. Algunas veces bien tratado pero otras con una exposición que deja mucho que desear, por ejemplo, en una página de una institución educativa aparece en un video y por escrito una ayuda a los estudiantes para su comprensión y aplicación de los criterios de la primera y segunda derivada:

- “El criterio de la primera derivada es un criterio muy intuitivo en su aplicación, por ello es muy sencillo de entender. A diferencia del criterio de la segunda derivada requiere muy poca abstracción”.

- “El criterio de la segunda derivada, para determinar máximos y mínimo, resulta ser un criterio más fácil de aplicar que el criterio de la primera, aunque el análisis del método no es tan simple como el de la primera derivada. Se recomienda revisar los problemas resueltos en la sección de aplicaciones de las derivadas.”

(http://dieumsnh.qfb.umich.mx/DIFERENCIAL/criterio_de_la_segunda_derivada.htm)

Por supuesto, una comparación de los dos criterios merece un análisis más profundo.

Suponiendo que conocemos al menos un punto crítico x_0, para aplicar el criterio de la primera derivada, en la práctica nos enfrentamos al problema técnico de determinar el signo de $f'(x)$ a uno y otro lado del punto crítico. En general y aun para funciones simples, puede resultar difícil determinar si la función $f'(x)$ cumple la desigualdad $f'(x) > 0$ para todos los valores de x a un lado del punto crítico x_0 y se cumple la desigualdad opuesta $f'(x) < 0$ al otro lado de ese mismo punto crítico.

Las dificultades que en general se presentan en la determinación del signo de $f'(x)$ para toda x suficientemente cerca y a un lado del punto crítico x_0, de alguna manera motivan el criterio de la segunda derivada, la cual solamente requiere de la determinación del signo de la segunda derivada en el punto crítico. Para ello, por supuesto, ha de calcularse la segunda derivada en ese punto.

Los criterios de la primera derivada y segunda derivada, se refieren a condiciones suficientes para que una función tenga un máximo o un mínimo en un punto crítico, sin embargo estas condiciones no son necesarias. La naturaleza lógica de estas condiciones no siempre es clara para alumnos y profesores, lo que les puede llevar, en determinadas situaciones, a conclusiones erróneas.

Dado que una condición para que una función tenga un valor máximo o un valor mínimo en un punto donde es derivable, es que ese punto sea crítico, para determinar los puntos donde una función derivable tiene un máximo o un mínimo, se procede primero a determinar los puntos críticos de la función. Esta tarea de determinar los puntos críticos suele extenderse erróneamente a la determinación de los puntos de inflexión. El concepto y determinación de los puntos de inflexión son independientes del concepto de punto crítico, pero por alguna extraña razón hay estudiantes que los puntos de inflexión los supeditan a los puntos críticos. Esto y la confusión en la naturaleza lógica del primer criterio y los criterios de la primera y segunda derivada para máximos y mínimos es un reflejo de una falta de comprensión de los mismos y del concepto de punto de inflexión.

Aprender cálculo implica que hay que comprenderlo, de otro modo, solamente se estará memorizando conceptos y procedimientos a los cuales no se les da sentido y que difícilmente se podrán aplicar en la resolución de problemas. Dewey (1910) ya advertía tempranamente que la práctica de la enseñanza sin entendimiento dañaba la habilidad de los estudiantes para reflexionar y entender el sentido de lo que están haciendo.

De acuerdo a Dewey (1910), la educación debe cultivar en los estudiantes hábitos efectivos para desarrollar preferencias por conclusiones que sean fundamentadas adecuadamente y deben trabajar utilizando métodos de investigación y razonamiento apropiados.

Actualmente se considera el entendimiento conceptual como un objetivo fundamental en la enseñanza de las matemáticas; como una componente primordial de la competencia, junto con el conocimiento, y destreza en los procedimientos (NCTM, 2000). La comprensión permite al estudiante recordar, recuperar y *utilizar* el conocimiento matemático, que es finalmente el objetivo último de la enseñanza escolar.

Además de lo anterior, una buena comprensión evita que los estudiantes adquieran concepciones erróneas; la comprensión viene acompañada con la reflexión, lo que implica que el estudiante debe aceptar o negar alguna afirmación en base a otros datos que actúan como evidencia o prueba.

La importancia de la comprensión no es tema de discusión, queda claro que solo trae beneficios, y que en cambio, su ausencia trae consecuencias graves, como la interpretación errónea de conceptos matemáticos y la poca habilidad para resolver problemas, en particular sobre conceptos del cálculo como se reporta en diversas investigaciones (Diaz, 2011; Moreno & Cuevas, 2004; Selden, Mason & Selden, 1989; Tsamir & Ovodenko, 2004).

Surge entonces la importante cuestión de ¿cómo promover la comprensión de los conceptos matemáticos en el salón de clase? (sin dejar de lado la habilidad procedimental). Existen varios factores que influyen en la creación de un ambiente que promueva la comprensión. En Hiebert et al (1997) se considera que son 5 las dimensiones que trabajan juntas para crear ambientes particulares de aprendizaje:

1. La naturaleza de las tareas de aprendizaje.
2. El rol del profesor.
3. La cultura social del salón.
4. Tipo de herramientas disponibles.
5. Accesibilidad de las matemáticas para cada estudiante.

Para crear un ambiente de aprendizaje con comprensión en el aula, la actuación del profesor es fundamental, tiene a su cargo la selección de tareas de aprendizaje que promuevan la comprensión y la difícil labor de crear en el salón la cultura adecuada. Entonces el profesor mismo debe tener un nivel de comprensión de los conceptos que le permita generar tales condiciones, así como elegir y diseñar actividades adecuadas.

Simon (1995) considera que las tareas matemáticas proveen de herramientas que promueven el aprendizaje de conceptos matemáticos y por lo tanto son una parte clave del proceso de enseñanza. Para elegir y diseñar las actividades adecuadas el profesor necesita un conocimiento profundo y flexible de las matemáticas, así como tener conocimiento del proceso de aprendizaje del alumno.

En la presente investigación nos centramos solamente en el conocimiento matemático del profesor, el objetivo fue explorar acerca de su comprensión de los temas de cálculo; más precisamente del primer criterio, criterio de la primera derivada y criterio de la segunda derivada, así como acerca de los puntos de inflexión de una función, todo con el objetivo final de apoyarlo en su proceso de comprensión.

Una aplicación rutinaria de los criterios no implica que se tenga una buena comprensión de ellos es por ello que la investigación se centra en la comprensión de los enunciados, en determinar si el profesor es consciente de cuándo y por qué se puede aplicar cada criterio.

La adecuada comprensión se concibe con base en acciones que debe poder llevar a cabo el profesor, estas acciones determinan de alguna manera el nivel de comprensión que el profesor tiene acerca del tema o contenido matemático, en nuestro caso particular acerca de los teoremas para determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función derivable.

También se considera que una parte importante de la formación del profesor es que conozca diversos ejemplos y contraejemplos que le permitan ilustrar las diversas situaciones que se pueden presentar, por lo que en la investigación también se planteó identificar si cuenta con dichos recursos.

1.2 Justificación

Diversos autores señalan que para llevar a cabo una enseñanza con comprensión, es necesario que los profesores cuenten con los conocimientos y una comprensión profunda de lo que enseñan para poder comunicar las ideas matemáticas importantes (NCTM, 2000). Al respecto Brophy (1991) señala que la buena comprensión del profesor le permitirá entre otras cosas *diseñar* situaciones didácticas que promuevan el aprendizaje con comprensión.

Es muy importante entonces que el profesor de matemáticas mejore y amplié sus conocimientos (matemáticos) día con día para que su actuación en el aula mejore. En México no existe un programa de formación del profesor de Bachillerato, sino que los profesores tienen diversas carreras (matemáticos, ingenieros, actuarios, etcétera) y consecuentemente diversas herramientas para utilizar al momento de preparar y dar su clase.

En los Principios y Estándares de la NCTM (2000) se considera que el profesor debe tener amplias oportunidades y recursos para mejorar y refrescar su conocimiento. Es por ello que consideramos de interés generar información que motive a los profesores a reflexionar acerca del conocimiento matemático que poseen y cómo lo pueden mejorar.

Los cursos de cálculo diferencial tienen como objetivo central el estudio de la derivada, este estudio incluye comprender, entre otras cosas, la interpretación gráfica de la derivada con el fin de conocer el comportamiento de la función en términos del comportamiento de la derivada;

a) La derivada positiva corresponde a funciones crecientes.
b) La derivada negativa corresponde a funciones decrecientes.
c) La derivada creciente corresponde a funciones cuya gráfica es cóncava hacia arriba.
d) *La derivada decreciente corresponde a funciones cuya gráfica es cóncava hacia abajo*.

La búsqueda de los valores extremos de una función involucra a los estudiantes con dichas interpretaciones, motivando una mejor comprensión de éstas, pues se tiene que hacer la conexión entre la gráfica de una función y el comportamiento de su primera y segunda derivada para poder concluir cuándo la gráfica presenta un máximo, mínimo o punto de inflexión. Para llegar a una conclusión adecuada se debe comprender cuándo y por qué se puede aplicar cada uno de los criterios.

Entonces el tema de máximos y mínimos permite enfatizar las conexiones existentes entre varios conceptos, que es uno de los objetivos establecidos en los planes de estudio del nivel Bachillerato (Colegio de Ciencias y humanidades), además de que es una actividad que ayuda a aumentar la comprensión de cualquier tema matemático.

Al final del curso el estudiante debe poder utilizar el conocimiento adquirido en la resolución de problemas de optimización; en los planes de estudio de Bachillerato (Bachillerato Tecnológico perteneciente al Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional) se plantea que el estudiante debe aplicar los conocimientos de cálculo para resolver problemas reales utilizando los diferentes lenguajes de representación; verbal, gráfico y simbólico, y es en este tema de la optimización donde el profesor puede mostrar interesantes problemas de aplicación de la matemática a otras ciencias como son, biología, medicina, economía, entre otras. Es pues de utilidad que el conocimiento al respecto de máximos y mínimos sea aprendido con comprensión.

Como se ha descrito el tema de máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función, es por si solo una interesante aplicación del concepto de derivada, en el cual los estudiantes, si es que adquieren una buena comprensión podrán argumentar resultados mediante la conexión entre los conceptos y procedimientos, por ejemplo, deben poder justificar por qué se busca entre las raíces de la derivada de una función los puntos donde ésta podría alcanzar sus valores extremos.

Entonces es importante generar conocimiento que permita a los profesores mejorar su comprensión de los criterios para que puedan transferir el conocimiento al respecto lo mejor posible y con mejores herramientas, promoviendo la reflexión en el aula y generando conocimiento con comprensión para que el estudiante lo pueda utilizar en la resolución de problemas nuevos y de aplicación a otras areas.

En los estándares de la NCTM (2000) se considera además que los profesores deben motivar a los estudiantes a presentar sus soluciones, plantear hipótesis y evaluar las argumentaciones de sus compañeros, para ello también se requiere que el profesor tenga una buena comprensión de las matemáticas que enseña.

1.3 Objetivos y preguntas de investigación

El trabajo de investigación se centra en la comprensión, por partes del profesor, de los teoremas involucrados en la búsqueda de los máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función derivable. Nos interesa determinar el grado de comprensión que posee. Para averiguarlo se establecieron los siguientes objetivos:

- Diseñar un instrumento de investigación (cuestionario) para cuya respuesta se requiera de un análisis relativamente profundo, por parte del profesor, de los enunciados de los criterios; primer criterio, criterio de la primera derivada, criterio de la segunda derivada, así como acerca de los puntos de inflexión.
- Determinar los recursos con los que cuenta el profesor para ilustrarse a sí mismo los criterios para máximos y mínimos y puntos de inflexión (ejemplos, contraejemplos, gráficas, etc.)

- Evaluar las respuestas de los profesores para determinar su grado de comprensión de los criterios antes mencionados.

El cumplimiento de los objetivos nos permitirá responder las siguientes preguntas generales de investigación:

- ¿Qué grado de comprensión tiene el profesor de los criterios utilizados para determinar los valores máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función?
- ¿Con que recursos cuenta el profesor para promover la comprensión de los criterios en el aula?

CAPITULO 2

Antecedentes

2.1 Revisión de algunas investigaciones

Uno de los problemas de aprendizaje del cálculo, que ha sido investigado ampliamente por diversos autores, es la falta de comprensión de los conceptos e ideas matemáticas, ocasionado por una enseñanza rutinaria. La literatura en educación matemática confirma que los estudiantes pueden adquirir habilidades para realizar cálculos pero que la comprensión se mantiene superficial, y en algunos casos conduce a concepciones erróneas (Rivera & Ponce-Campuzano, 2012). Moreno y Vallejo (2004) consideran que una causa es que los docentes ponen énfasis en la carga operativa dejando de lado la parte conceptual. Al respecto Aspinwall (1997) considera que la manipulación simbólica se ha sobre enfatizado y en el proceso el espíritu del cálculo se ha ido perdiendo.

Respecto a la comprensión de los criterios para determinar máximos, mínimos, y puntos de inflexión de una función se encontró poca investigación, a continuación se describen las investigaciones consultadas:

Moreno y Cuevas (2004) realizaron un estudio con profesores de cálculo y con estudiantes de maestría acerca de su habilidad en la resolución de problemas que involucran los conceptos de máximo y mínimo. Se les presenta un problema práctico; la función que modela la situación planteada tiene por dominio un intervalo cerrado y alcanza su valor máximo en un extremo, seis de ocho profesores aplican el criterio de la segunda derivada llegando a un resultado inverosímil, pues el punto crítico encontrado está fuera del dominio de la función y no se percatan de ello. Con los estudiantes de maestría sucede lo mismo, únicamente dos de ellos se dan cuenta de que el punto crítico queda fuera del dominio de definición y concluyen entonces que el problema no tiene solución. Tanto los profesores como los estudiantes de maestría olvidan considerar los extremos del dominio como posible solución.

Tsamir y Ovodenko (2013) investigan acerca de la concepción, que tienen estudiantes de universidad, de punto de inflexión. Utilizan un instrumento que consta de 6 actividades, presentadas en forma verbal, gráfica o algebraica, relacionadas con la noción y búsqueda de los puntos de inflexión de una función. Los participantes habían tomado por lo menos 2 cursos de cálculo, 2 de álgebra lineal y un curso de ecuaciones diferenciales.

Los autores reportan 4 principales concepciones erróneas relacionadas con la noción de punto de inflexión:

1. $f'(c) = 0$ *es una condición necesaria para que* f *tenga un punto de inflexión en* c.

   Los estudiantes consideran que tal condición es parte de la definición de punto de inflexión.

   Gráficamente tienden a reconocer solamente los puntos de inflexión horizontales (aquellos donde la derivada vale cero) y algebraicamente consideran la búsqueda de los puntos críticos como parte del algoritmo para determinar los puntos de inflexión de una función.
2. $f'(c) \neq 0$ *es una condición necesaria para que* f *tenga un punto de inflexión en* c.

   Estudiantes que son conscientes del error 1, consideran entonces que debe ocurrir lo contrario, excluyendo la condición $f'(x) = 0$.
3. $f''(x) = 0$ *es una condición suficiente para que* f *tenga un punto de inflexión.*

   Algunos estudiantes consideran la condición como parte de la definición y la usan como parte del algoritmo para encontrar los puntos de inflexión, concluyendo simplemente que los puntos que la cumplen son los puntos de inflexión de la función f.
4. *Los puntos donde la gráfica de* f *cambia dramáticamente su razón de cambio son puntos de inflexión.*

   Un 70% de los estudiantes consideran (gráficamente) que los puntos de inflexión pueden ocurrir en los puntos donde la función se mantiene creciente (decreciente) pero dramáticamente cambia su razón de cambio.

Los autores concluyen que los errores encontrados son el resultado de experiencias pasadas con el concepto, así como dificultades lógicas. Por ejemplo, sus primeros acercamientos con los puntos de inflexión es cuando al estudiar un punto crítico, éste resulta que no es ni máximo ni mínimo sino un punto de inflexión, entonces este primer acercamiento solo con puntos de inflexión horizontales les va creando un idea del concepto que después es difícil modificar.

En Tsamir y Ovodenko (2004) se reporta una exploración similar, investigan acerca de la concepción que tienen futuros profesores acerca de los puntos de inflexión, se trabaja con actividades algebraicas y gráficas. Se reporta que los participantes tenían una sólida formación en matemáticas y algunos estaban inscritos en programas de maestría y doctorado. Uno de los errores detectados, al igual que en la investigación anterior, se refiere a suponer que $f'(x) = 0$ es una condición necesaria para los puntos de inflexión, y quienes no lo consideran así suponen entonces que la condición debe ser $f''(x) = 0$, así mismo en las tareas gráficas solo reconocen aquellos puntos de inflexión donde la derivada se anula.

Díaz (2011) hace una exploración sobre la comprensión de la derivada con profesores de Bachillerato, como parte de su instrumento de investigación plantea cuestiones sobre la derivada y su relación con los valores extremos de una función. Respecto a los procedimientos para determinar los valores extremos de una función, reporta que los profesores olvidan considerar que dichos valores se pueden alcanzar en los extremos del dominio. Concluye que los profesores muestran destreza para aplicar los algoritmos pero al parecer esto no se acompaña de la reflexión sobre las condiciones en que funcionan.

Otros de los puntos que se consideraron en la investigación son las imágenes utilizadas para introducir los conceptos e ideas matemáticas, tal es el caso del criterio de la primera derivada. En Aspinwall, Shaw y Presmeg (1997) se considera que el pensamiento visual es parte fundamental para la enseñanza del cálculo, es casi imposible imaginar un curso exitoso sin que no enfatice los elementos visuales de la materia. Sin embargo, Clements (1981) postula que las imágenes pueden ser una desventaja en ciertas tareas (citado en Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997).

Se considera que existen imágenes incontroladas, es decir, que aparecen sin ser invitadas en el pensamiento del estudiante y persisten aun a pesar de una evidencia contraria. Una imagen incontrolable persistente limita la entrada a formas de pensamiento más fructuosas. Aunque las imágenes de un estudiante de cálculo pueden apoyar niveles altos de conocimiento, los resultados reportados en Aspinwall, Shaw y Presmeg (1997) muestran que en ocasiones éstas se vuelven un obstáculo para construir el significado de los conceptos matemáticos.

Finalmente se consultaron artículos de investigación relacionados con la preparación del profesor.

La comprensión es un elemento esencial del conocimiento del profesor, pues de ello depende la selección de las tareas de aprendizaje, la planeación de explicaciones útiles, el tipo de preguntas que se plantean y la forma de evaluar el aprendizaje del estudiante. Estas ideas son reforzadas por investigaciones acerca de la enseñanza y conocimiento del profesor que revelan las formas en que la comprensión del profesor afecta las oportunidades del estudiante para aprender, pues lo deseen o no, la forma que ellos mismos se han involucrado con las ideas y procesos matemáticos influye en los estudiantes (Ball & McDiarmid, 1989).

Recientes investigaciones consideran que es importante promover el conocimiento del profesor (NCTM, 2000), pero para llevar a cabo esta tarea, de acuerdo a Tsamir y Ovodenko (2004), el primer paso necesario es familiarizarse con las concepciones del profesor, correctas e incorrectas y con las posibles razones de sus errores.

Ball & McDiarmid (1989) estudian acerca de las oportunidades que tiene el profesor para comprender la naturaleza de la materia que enseña a lo largo de su vida académica y se encuentran con que se les ofrecen muy pocas, concluyen que la investigación en educación matemática debe buscar e investigar acerca de experiencias que provean una preparación más eficaz en la materia de enseñanza, tomando en cuenta cómo cambia la comprensión del profesor cuando es expuesto a tales experiencias, con el fin de determinar cuáles de ellas son efectivas.

CAPITULO 3

Marco conceptual

En este capítulo se presenta un marco conceptual para examinar la comprensión del profesor acerca de los criterios para máximos, mínimos y puntos de inflexión de funciones, que usualmente se enseñan en el curso de cálculo de bachillerato. En primer lugar se da una caracterización de lo que se entiende por comprensión en matemáticas, lo cual sirvió de referencia para el diseño del cuestionario de la investigación y posteriormente para el análisis de los datos obtenidos. En este capítulo también se expone el contenido matemático involucrado, particularmente los criterios para determinar los valores máximos y mínimos de una función así como para determinar los puntos de inflexión, destacando en cada uno de ellos los aspectos que se consideraron para determinar si se han comprendido o no.

3.1 Comprensión en matemáticas

Se considera que la comprensión es un proceso, una sucesión de actos o actividades mentales, las cuales constituyen el proceso. La comprensión está en permanente desarrollo, crece o se transforma con el tiempo, conforme se realizan diferentes actividades matemáticas; resolución de problemas, disertación, discusiones, ejercicios, demostraciones y otras actividades.

Se debe pensar en la comprensión como emergiendo y desarrollándose, y no considerar que uno ha comprendido o no un tema, idea o proceso, es decir, la comprensión no es un atributo estático del conocimiento de un individuo (Carpenter & Lehrer, 1999). Se puede decir que uno está permanentemente comprendiendo una idea, un tema o un concepto (Rivera, García & Díaz, 2013).

Para entender cómo emerge y se desarrolla la comprensión de un concepto, idea o proceso matemático, atendemos a las ideas de Hiebert y Carpenter (1992), quienes analizan la comprensión en términos de representaciones mentales.

Para pensar en las ideas matemáticas y comunicarlas se necesita representarlas de alguna manera, Hiebert y Carpenter asumen que el conocimiento es representado internamente de forma que la mente pueda operar con él, y que estas representaciones internas están conectadas de forma estructurada, mientras que para que la comunicación ocurra se requiere una representación externa; hablada, símbolos escritos, dibujos, objetos físicos.

Se supone también que las representaciones matemáticas internas son influenciadas por la actividad externa, la forma de la representación mental está influenciada y forzada por la naturaleza de la representación matemática externa, esto es, la forma en que el estudiante interactúa con una representación externa marca una diferencia en la forma en que el estudiante la va a representar internamente, y recíprocamente, la manera en la que un estudiante trata o genera una representación externa revela algo acerca de cómo ha representado la información internamente.

Se supone también que las conexiones entre representaciones internas pueden ser estimuladas mediante la construcción de conexiones entre las correspondientes representaciones externas.

De acuerdo a las ideas anteriores, Hiebert y Carpenter (1992) consideran que una idea matemática, concepto o proceso se comprende cuando su representación mental forma parte de una red interna de representaciones, y el nivel de comprensión queda determinado por el número y la fuerza de las conexiones realizadas, si solo algunas de las ideas potencialmente relacionadas están conectadas o si las conexiones son débiles la comprensión puede ser bastante limitada.

La comprensión ocurre cuando las representaciones son conectadas en redes cada vez más estructuradas y cohesivas. Las redes de representaciones mentales se construyen gradualmente conforme nueva información se conecta a las redes existentes, cuando esto ocurre se forman nuevas conexiones entre información previamente desconectada, y las redes anteriores son modificadas o abandonadas.

En toda actividad matemática se involucra el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, se reconoce (ahora) que ambos son importantes para la habilidad matemática. Para el presente trabajo se tomaron las definiciones consideradas en Hiebert y Carpenter (1992); se identifica al conocimiento conceptual con conocimiento que se comprende, es decir, es conocimiento conceptual solo si forma parte de una red, mientras que el conocimiento procedimental se considera como una secuencia de acciones, por ejemplo, los algoritmos aritméticos.

Todos los procedimientos matemáticos están asociados con principios matemáticos, es decir están potencialmente asociados con redes conectadas de información, si el estudiante conecta los procedimientos con alguno de los conocimientos conceptuales en los cuales se basa, entonces el procedimiento formara parte de una gran red, cercanamente relacionada con el conocimiento conceptual.

Por ejemplo, en la búsqueda de los valores máximos y mínimos de una función derivable se requiere llevar a cabo una secuencia de acciones;

1. encontrar los puntos críticos de la función,
2. determinar en cuáles de ellos la función alcanza valores máximos o mínimos locales, utilizando el criterio de la primera o de la segunda derivada,
3. comparar los máximos y mínimos locales con los valores de la función en los extremos del dominio (si se trata de un intervalo cerrado) para determinar los máximos y mínimos absolutos.

Es importante que el estudiante conecte estas acciones con los conocimientos conceptuales en los cuales se basan, de forma que formen parte de una red interna relacionada con el conocimiento conceptual, esto le permitirá enfrentarse a problemas diferentes de aquellos para los cuales inicialmente se aprendió el proceso. El conocimiento conceptual relacionado puede detectar similitudes y diferencias útiles entre los problemas, y consecuentemente, informar de los ajustes adecuados, de esta forma el conocimiento conceptual ayuda a extender el rango de aplicabilidad del procedimiento.

En los libros de texto y en la escuela se estudian funciones simples, en las cuáles el procedimiento de encontrar los máximos y mínimos se aplica algorítmicamente sin necesidad de hacer reflexiones conceptuales, a pesar de ello, se debería tener la conexión con los conceptos en los cuáles se sustenta tal procedimiento (definiciones, criterios, interpretaciones gráficas de la derivada) para el momento en que el estudiante se enfrente a problemas nuevos y más interesantes.

Esto nos alerta sobre la necesidad de diseñar actividades que ayuden al estudiante a construir representaciones internas de los procedimientos, de manera que formen parte de las redes conceptuales, es evidente entonces que los procedimientos y conceptos no se deben enseñar de forma aislada.

Reconociendo la importancia de la comprensión en matemáticas, es importante diseñar un ambiente en el salón de clase que la promueva, es decir, acciones que promuevan la creación de conexiones; entre los diferentes conceptos, procedimientos y entre los conceptos y procedimientos.

En Carpenter y Lehrer (1999) se proponen 5 actividades mentales que contribuyen al desarrollo de la comprensión:

- Construcción de relaciones entre conocimiento nuevo y conocimiento previo.
- Creación de estructuras de conocimiento integradas y aplicación del conocimiento matemático.
- Reflexión sobre las experiencias propias.
- Articulación o comunicación de lo que el individuo conoce; en forma verbal, escrita, o mediante imágenes, diagramas o modelos.
- Apropiación del conocimiento matemático: adoptar el conocimiento mediante y para fines propios.

Se destaca a la reflexión y la comunicación como procesos fundamentales para que la comprensión ocurra, trabajan conjuntamente para promover la creación de conexiones (Hiebert et al, 1997). La reflexión sucede cuando conscientemente se piensa acerca de lo que se está haciendo y por qué se está haciendo, esto permite establecer nuevas relaciones y checar las anteriores; mientras que la comunicación permite clarificar las ideas propias mediante la interacción social, pues al compartir las ideas y conocimiento con los pares se debe de pensar en el más profundamente con el fin de explicarlo y justificarlo con claridad.

La reflexión está presente en todo el proceso de comprensión, mientras que una comunicación adecuada se presenta en las etapas finales; para comunicar las ideas se requiere un alto nivel de reflexión y se requiere tener el recurso del lenguaje (matemático), una comunicación clara con un lenguaje adecuado refleja un nivel alto de comprensión.

Lo anterior es importante sobre todo para el profesor, que requiere tener la habilidad y las herramientas para poder explicar la misma idea de diferentes formas, de manera que la mayoría de los estudiantes las entiendan, es decir, es importante que su comprensión este en los niveles más altos.

En resumen, para desarrollar la presente investigación se ha considerado que el objetivo principal de la enseñanza matemática es desarrollar la comprensión, una implicación obvia, de acuerdo con la definición utilizada, es que la enseñanza debe ser diseñada de forma que los estudiantes construyan conexiones. El profesor debe crear un salón de clases en el que las actividades, problemas y la comunicación de las ideas estén enfocadas a la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos.

Las ideas expuestas anteriormente destacan la importancia que tiene para la enseñanza el hacer reflexionar al profesor con el fin de mejorar su comprensión. Un ambiente de salón de clases que promueva la comprensión requiere, entre otras cosas, que el profesor tenga un nivel de comprensión alto de los conceptos y procedimientos, un nivel que le permita diseñar problemas y actividades que promuevan la creación de conexiones adecuadas en los estudiantes y sobre todo que le permita reconocer la importancia que tiene un aprendizaje con comprensión.

Las 5 actividades mentales descritas se utilizaron para el análisis de las repuestas, con base en ellas se interpretaron las respuestas de los profesores, en términos de la actividad mental que le hace falta al profesor para mejorar su comprensión de los criterios.

3.2 Niveles de comprensión

Se ha dicho que la comprensión es un proceso y de acuerdo a las actividades mentales que se realicen ésta se modifica. Las 5 actividades mentales propuestas por

Carpenter y Lehrer (1999) no tienen un orden específico, algunas se presentan durante todo el proceso de comprensión, mientras que otras se van adquiriendo y mejorando conforme la comprensión aumenta.

El cuestionario de investigación se diseñó con el fin de averiguar si el profesor tiene una buena comprensión de los criterios, esto es, si tiene claridad acerca de lo que dicen y cuándo se pueden aplicar. Para responder las preguntas planteadas se requiere que el profesor haga una reflexión profunda acerca de los enunciados de los criterios, con base en las respuestas y la claridad del lenguaje utilizado se buscó evidencia de la comprensión del profesor.

Con la finalidad de cumplir los objetivos de investigación planteados se requirió hacer un análisis de datos que permitiera diferenciar entre diversos niveles de comprensión. Para ello se utilizaron las 5 actividades mentales propuestas por Carpenter y Lehrer (1999); las actividades *sugieren* niveles, en el sentido de detectar que actividad requiere el profesor para aumentar su comprensión.

Además de sugerir los niveles, las actividades permiten detectar qué actividad requiere el profesor para fortalecer su comprensión indicando la forma en que se le puede apoyar.

La tabla 3.1 muestra un ejemplo de cómo podrían establecerse niveles de comprensión, de acuerdo a las características de las respuestas.

Nivel	Tipo de respuesta
Adecuado	Respuesta correcta, con un lenguaje adecuado y claro.
En progreso	Respuesta correcta, con un lenguaje poco claro.
Incompleto	Conoce el criterio pero refleja falta de reflexión acerca de las hipótesis requeridas y/o acerca de su naturaleza lógica.
Deficiente	No relaciona conceptos ni procedimientos.

3.1. Niveles de comprensión

Sin embargo, en el análisis de datos realizado, solo se consideraron categorías que permiten diferenciar las respuestas e identificar la actividad mental que requiere el profesor para mejorar su comprensión. Para establecer los niveles de comprensión se requiere un estudio teórico más profundo y una evaluación más exhaustiva del conocimiento del profesor.

3.3 Acerca de los criterios para máximos y mínimos.

El objetivo central de la presente investigación es averiguar sobre la comprensión que tiene el profesor acerca de los teoremas involucrados en la búsqueda de los máximos y mínimos de una función derivable; primer criterio, criterio de la primera derivada y criterio de la segunda derivada, por ello presentamos un análisis de los criterios, destacando los puntos que se consideraron para el diseño del instrumento de investigación; como son las condiciones de necesidad y suficiencia y la importancia de las hipótesis.

A continuación se enuncia el primer criterio y se presenta su análisis.

Primer criterio para máximos y mínimos.

Sea f una función definida en un intervalo I y c un punto interior de I donde f tiene un máximo o un mínimo local. Si $f'(c)$ existe entonces $f'(c) = 0$.

Respecto a este criterio es importante reconocer que proporciona una condición necesaria pero no suficiente, es decir, el que la función se anule en un punto a no es condición suficiente para que la función alcance un valor máximo o mínimo en a, sino que se deben cumplir condiciones adicionales. Un ejemplo es la función $f(x) = x^3$; en este caso $f'(0) = 0$, pero f no tiene máximo ni mínimo local en 0.

Hay que observar también que para aplicar el primer criterio es importante la condición de que el punto c sea interior, pues si c es un extremo no necesariamente se cumple que $f'(c) = 0$.

La función $f(x) = \sqrt{(1-x^2)^3} + \sqrt{(1-(x-1/2)^2)^3}$, cuya gráfica se muestra en la figura 3.1, ejemplifica este hecho.

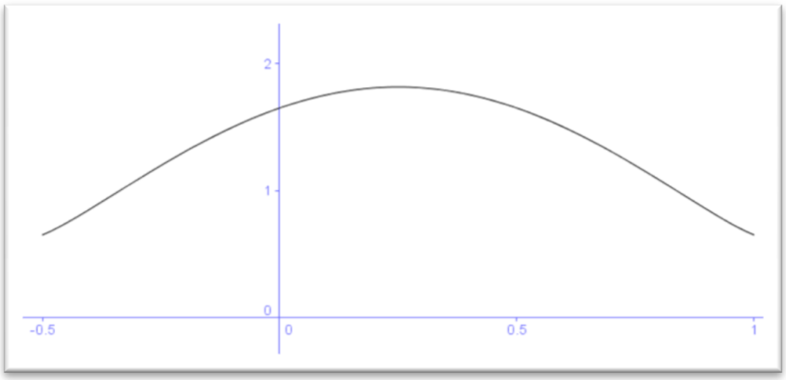


Figura 3.1. Gráfica de f(x)

La función f alcanza su valor mínimo en los extremos pero su derivada es distinta de cero en tales puntos. En este caso para encontrar el valor mínimo absoluto que alcanza f es necesario analizar, además de los puntos críticos de la función, los puntos extremos del dominio, cuestión que con frecuencia es olvidada al resolver problemas de optimización.

Otra de las cuestiones que se investigaron respecto al primer criterio se refiere a la creencia de que en un punto crítico una de 3 cosas pasa:

i) hay un máximo,
ii) hay un mínimo o
iii) hay un punto de inflexión (Rivera & Ponce-Campuzano, 2012).

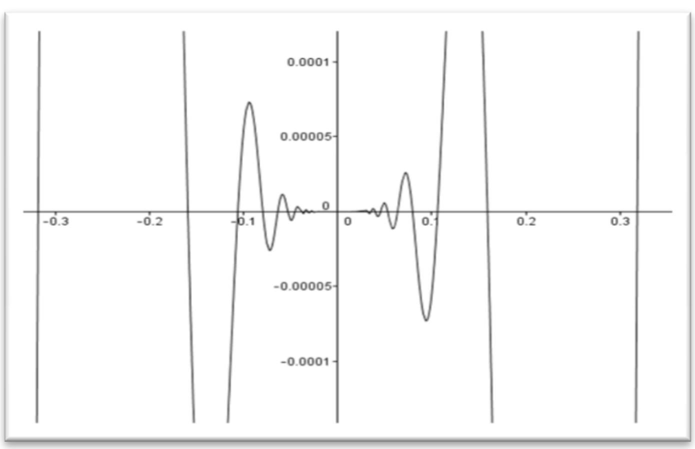
Se le atribuyen más resultados al primer criterio de los que realmente plantea. Pero el hecho es que los puntos de inflexión no tienen relación con los puntos críticos. Se tiene esta creencia posiblemente por el mensaje que mandan los libros de texto, al ejemplificar la no suficiencia de la condición del primer criterio con la función $f(x) = x^3$ en el punto $x = 0$, y hacer notar después que en tal punto la función tiene un punto de inflexión. Un ejemplo particular de este hecho es el plan de estudios del CCH; en el cual en la *Unidad IV. Comportamiento gráfico y problemas de optimización*, se tiene como estrategia de aprendizaje lo siguiente:

> *Con la función $f(x) = x^3$ se muestra la insuficiencia de la condición de que un punto crítico debe ser máximo o mínimo, lo que permite introducir el concepto de punto de inflexión.*

Además de que existen puntos críticos donde la función no presenta máximo, mínimo ni punto de inflexión, y obviamente existen puntos de inflexión que no son puntos críticos. Un ejemplo de lo primero es la función

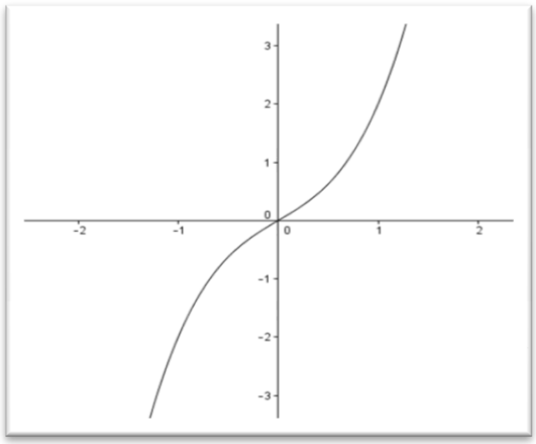
$$G(x) = \begin{cases} x^4 \sin\dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

La función $G(x)$ tiene un punto crítico en $x = 0$, pero $G(x)$ no tiene máximo, mínimo ni punto de inflexión en $x = 0$.



3.2. Gráfica de G(x)

Para ejemplificar la segunda cuestión se puede analizar la función $f(x) = x + x^3$ (figura 3.3), la función presenta un punto de inflexión en $x = 0$, pero en tal punto $f'(x) \neq 0$.



3. 3. Gráfica de $\boldsymbol{f(x) = x + x^3}$

Después de encontrar los puntos críticos de la función se requiere verificar ciertas condiciones para determinar si se trata de un máximo, de un mínimo o de ninguna de las dos cosas. Para ello se utilizan el criterio de la primera derivada o el criterio de la segunda derivada.

A continuación se enuncia el criterio de la primera derivada y se desarrolla su análisis.

Criterio de la primera derivada:

Sea f una función derivable en un intervalo abierto I y $c \in I$ un punto crítico de f, entonces

a) si en algún abierto $(c - r, c + r)$ se cumple que $f'(x) < 0$ para toda $x \in (c - r, c)$ y $f'(x) > 0$ para toda $x \in (c, c + r)$, entonces f tiene un mínimo local en c.

b) *Si en algún abierto* $(c - r, c + r)$ *se cumple que* $f'(x) > 0$ *para toda* $x \in (c - r, c)$ *y* $f'(x) < 0$ *para toda* $x \in (c, c + r)$, *entonces* f *tiene un máximo local en* c.

El criterio de la primera derivada se aborda prácticamente siempre mediante su interpretación geométrica, pues ciertamente ayuda a entender el criterio.

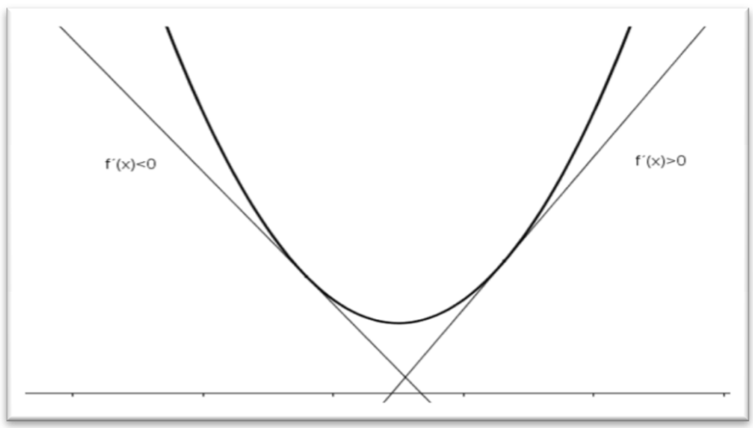


Figura 3. 4. Signo de la primera derivada alrededor de un mínimo.

El primer criterio da condiciones suficientes para determinar cuándo un punto crítico es máximo o mínimo de una función (una versión más fuerte del criterio elimina la condición de que el la función sea diferenciable en el punto c). Pero su representación geométrica puede enviar la idea falsa de que en un máximo o mínimo siempre ocurre eso, enviando el mensaje de que da condiciones necesarias. Las figuras pueden comunicar la idea de que el teorema es siempre fácil de aplicar (Rivera & Ponce Campuzano, 2012).

El hecho de que la condición del signo de la derivada es una condición suficiente pero no necesaria va un poco en contra de la intuición, y es quizá un hecho en el que poco o nada se reflexiona. Pero lo cierto es que una función diferenciable puede tener un valor máximo (mínimo) en un punto c y puede ocurrir que no exista una vecindad de c tal que la derivada de todo punto a la izquierda de c sea positiva (negativa) y negativa (positiva) a la derecha. Un ejemplo es la función

$$f(x)=\begin{cases}2-\dfrac{x^2}{1+\sin\dfrac{1}{x}^{2}} & si\ x\neq 0\\ 2 & si\ x=0\end{cases}$$

cuya gráfica se muestra en la figura 3.5.

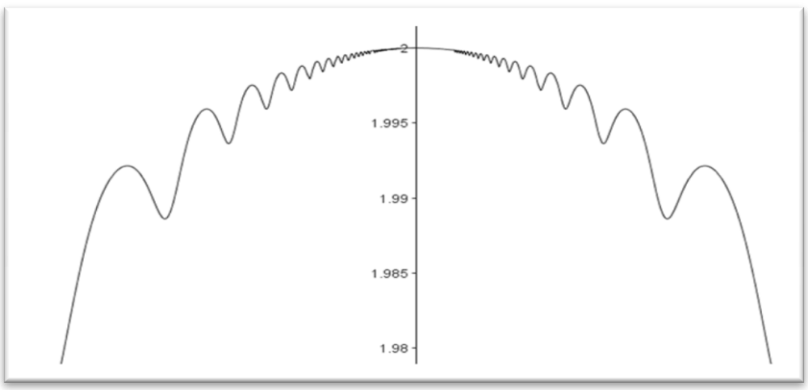


Figura 3.0.5. Gráfica de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ alrededor del punto (0, 2)

La función oscila infinitas veces alrededor del 0, de modo que la derivada toma valores positivos y negativos en cualquier vecindad del 0 y entonces no se puede aplicar el criterio de la primera derivada, pero esto no impide que $f(x)$ alcance su valor máximo en $x=0$.

Finalmente se presenta el enunciado y análisis del criterio de la segunda derivada.

Criterio de la segunda derivada.

Sea f una función dos veces derivable en (a,b) *y sea* $c\in(a,b)$ *un punto crítico de* f, *a)* *Si* $f''(c) > 0$ *entonces f tiene un mínimo local en* c.

b) *Si* $f''(c) < 0$ *entonces f tiene un máximo local en* c.

Nuevamente es importante notar que el criterio da condiciones suficientes pero no necesarias para que la función tenga un máximo o mínimo local. Un ejemplo que ilustra esto es la función $f(x) = x^4$, $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 0$, pero $f''(0) = 0$, es decir, la condición $f''(x) > 0$ no es necesaria para que la función tenga un mínimo.

Otro aspecto importante es la cuestión de las dificultades que se pueden presentar al aplicar el criterio de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada, así como los casos en que no se pueden aplicar.

Para poder aplicar el criterio de la primera derivada hay que encontrar una vecindad del punto crítico donde la derivada tenga un signo a la derecha y el signo opuesto a la izquierda, pero en la práctica esto podría resultar en una tarea difícil, si no se conocen todos los puntos críticos. También puede ocurrir que la derivada tenga el mismo signo a la derecha y a la izquierda del punto crítico, en cuyo caso se concluye que la función no tiene máximo ni mínimo en tal punto, finalmente se puede dar el caso de que no exista tal vecindad, en cuyo caso no se puede aplicar el criterio.

En la práctica el criterio de la segunda derivada es más fácil de aplicar pues solo requiere analizar el signo de la segunda derivada en un punto crítico c, pero es importante reflexionar que existen casos en que el criterio de la segunda derivada no es aplicable. Al menos hay 2 casos importantes cuando no es aplicable:

1. Cuando no existe $f''(c)$
2. Cuando $f''(c) = 0$

En el caso uno, bajo la hipótesis de que la función f es derivable en un intervalo abierto que contiene al punto crítico c, en principio podemos acudir al criterio de la primera derivada. El criterio de la primera derivada podría ser aplicable aun cuando el criterio de la segunda derivada no se pueda aplicar.

Un ejemplo para el primer caso es la función

$$f(x) = x|x| + 2x^2.$$

Para esta función tenemos

$$f'(x) = 2|x| + 4x = \begin{cases} 2x & si\ x \leq 0 \\ 6x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

También

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < 0 \\ 6 & si\ x > 0 \end{cases}$$

La función tiene un punto crítico en $x = 0$, pero no existe $f''(0)$.

Sin embargo se puede aplicar el criterio de la primera derivada. De la fórmula

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \leq 0 \\ 6x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

se sigue que $f'(x) < 0$ para toda $x < 0$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > 0$, por el criterio de la primera derivada se tiene que *f* tiene un mínimo en 0.

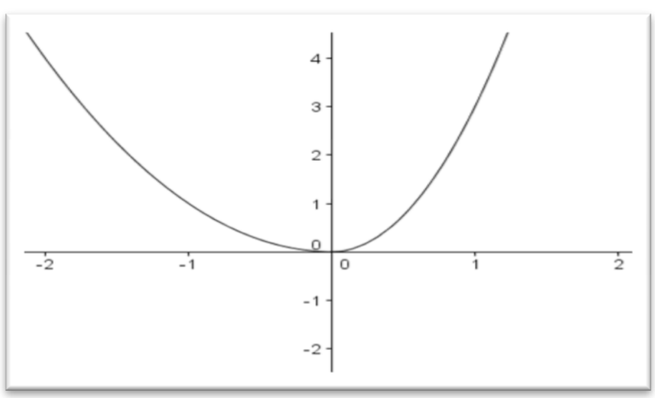


Figura 3.6. Gráfica de $\boldsymbol{f(x) = x|x| + 2x^2}$

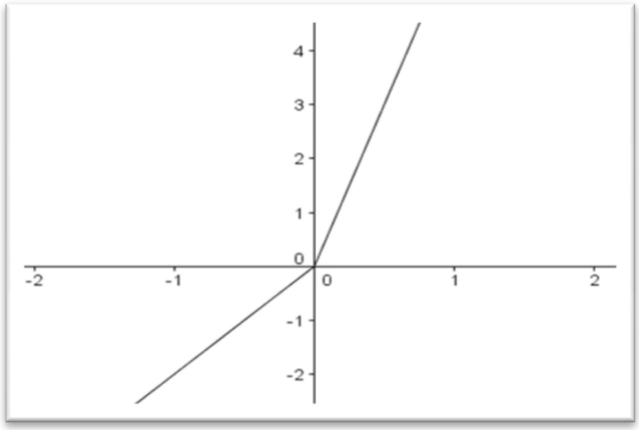


Figura 3.0.7. Gráfica de $\boldsymbol{f'(x) = 2|x| + 4x}$

En relación al caso 2, las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^4$ ilustran que la condición $f''(c) = 0$ no dice nada acerca de si la función alcanza un máximo o mínimo local en c; $f''(0) = 0$ y $g''(0) = 0$, f no tiene máximo ni mínimo mientras que g alcanza un mínimo.

3.4 Acerca de los criterios para puntos de inflexión

El concepto de punto de inflexión no era central en este trabajo de investigación, sin embargo surgió la necesidad de explorar un poco más sobre el tema debido a la tendencia que se observa a relacionar los puntos de inflexión de una función con sus puntos criticos. Por lo que en esta sección se discutirán los criterios que se utilizan para determinar los puntos de inflexión de una función, considerando solamente el caso de funciones que son derivables en un intervalo $\mathrm{I} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Se define punto de inflexión de una función $f(x)$ como aquel en donde la función derivada $f'(x)$ presenta un cambio en su monotonía, es decir, pasa de monótona creciente a monótona decreciente o viceversa. Entonces el determinar los puntos de inflexión de una función se traduce en determinar los puntos donde la función derivada presenta un máximo o un mínimo.

Lo anterior conduce a pensar en el primer criterio, criterio de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos pero aplicados a la función segunda derivada. Entonces para encontrar puntos de inflexión de funciones derivables basta comprender bien los criterios antes mencionados, aplicarlos a la función segunda derivada $f'(x)$ para encontrar los puntos dónde ésta tiene sus valores extremos y utilizar tal información para determinar los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

A continuación se enuncian los 3 criterios para determinar puntos de inflexión de una función f derivable en un intervalo $I = [a, b]$, resultantes de aplicar los criterios antes mencionados a la función $f'(x)$.

Primer criterio para puntos de inflexión

Sea f una función 2 veces derivable en un intervalo $I = [a, b]$ y sea c un punto interior de *I* donde f tiene un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$.

Criterio de la segunda derivada para puntos de inflexión

Sea f una función 2 veces derivable en un intervalo $I = [a, b]$ y $c \in I$ un punto crítico de f', entonces si en algún abierto $(c - r, c + r)$ se cumple que $f''(x)$ tiene signos diferentes en los intervalos $(c - r, c)$ y $(c, c + r)$, entonces f tiene un punto de inflexión en c.

Criterio de la tercera derivada

Sea *f* una función tres veces derivable en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de f'. Entonces si $f'''(c) \neq 0$, f tiene un punto de inflexión en c.

Como se menciono antes estos criterios surgen de aplicar los criterios para determinar máximos y mínimos a la función derivada, entonces no hay necesidad de aprendérselos ni demostrarlos, sino simplemente relacionar la definición de punto de inflexión con los criterios ya conocidos.

CAPITULO 4

METODOLOGIA

4.1 Acerca de los participantes

El instrumento diseñado se aplicó a un grupo de aspirantes a estudiar la Maestría en Ciencias, en el área de Educación Medio Superior, en el departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Se analizaron los datos de 16 aspirantes con las siguientes formaciones; 7 con Licenciatura en matemáticas, 3 con Licenciatura en matemáticas aplicadas, 1 con estudios de Ingeniería en mecánica y eléctrica, un Ingeniero en sistemas computacionales, 1 con estudios de Ingeniería en computación y electrónica, 1 actuario y 2 Ingenieros industriales. En todos los casos, los participantes tenían una formación en cálculo a nivel universitario.

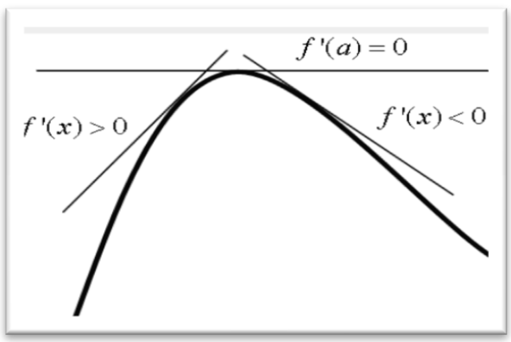
De aquí en adelante se identificará a los participantes con la letra E y un número del 1 al 16; E1, E2 y así sucesivamente.

De los 16 aspirantes, 11 tenían experiencia en la enseñanza del Cálculo diferencial en nivel bachillerato. Sin embargo el resto de los participantes, al aspirar a una maestría en Matemática Educativa enfocada hacia la problemática de la enseñanza y aprendizaje en el nivel medio superior, estaban interesados no sólo en la enseñanza del cálculo, sino en formarse como investigadores en la educación matemática de ese nivel.

4.2 Acerca del instrumento.

La recolección de datos se realizó mediante la aplicación de un cuestionario que consta de 11 preguntas, todas ellas acerca de los criterios que se utilizan en los cursos de cálculo del nivel medio superior para encontrar los valores máximos y mínimos de una función. Para el diseño de las preguntas se consideraron dificultades, tanto técnicas como de naturaleza lógica, que pueden presentarse cuando uno intenta aplicarlos. Al tratar de aplicar un criterio para máximos y mínimos, es importante entender cuándo, en teoría, es posible aplicarlo y cuándo no se reúnen las condiciones para su aplicación. Esto implica que debemos entender qué dicen los criterios pero también debemos estar conscientes de lo que no dicen.

En ocasiones se interpreta erróneamente la lógica de los enunciados causados por la confusiones que suelen tenerse entre lo que significa una condición necesaria y una condición suficiente. A veces la confusión es generada por las interpretaciones geométricas de los criterios, las cuales suelen utilizarse como una justificación o prueba de los mismos. Por ejemplo, el criterio de la primera derivada que estipula que si a la derecha de un punto crítico la derivada es positiva y a la izquierda la derivada es negativa entonces en ese punto crítico la función tiene un máximo. Esta situación que corresponde al caso en el que la función es creciente a la izquierda del punto crítico y decreciente a la derecha de ese punto, suele ilustrase con una figura como la siguiente.



4.1. Signo de la derivada a un lado y otro de un punto crítico

Pero esta situación geométrica solamente muestra un comportamiento particular de las funciones, pues una función puede tener un máximo en un punto crítico sin que sea monótona creciente a la izquierda y monótona decreciente a la derecha del punto crítico, como se comentó en el capítulo anterior.

Las preguntas se diseñaron con el propósito de averiguar acerca del conocimiento del profesor de los criterios para máximos y mínimos. Nuestro interés se centró en el grado de comprensión que los profesores tienen de los enunciados y no acerca de su habilidad para aplicarlos en la resolución de problemas.

Es importante destacar que algunas preguntas requieren que el profesor distinga la naturaleza lógica de las condiciones. Algunas son necesarias y otras son condiciones suficientes. Con el cuestionario pretendimos que el profesor tuviese la oportunidad de enfrentarse a situaciones que requiriesen una relativa profunda reflexión y que les ayudase en su proceso de comprensión de los criterios para máximos y mínimos. En este sentido, el cuestionario tenía un doble objetivo para algunos de los participantes.

A continuación se enuncian las preguntas que constituyen el cuestionario y el propósito de cada una de ellas.

Acerca de las preguntas 1 y 2. Con respecto al primer criterio se diseñaron las preguntas 1 y 2, cuyo objetivo es averiguar si el profesor es consciente de que en un punto crítico no necesariamente se alcanza un máximo o un mínimo. Es decir, deseamos averiguar si el profesor tiene claro que el primer criterio establece condiciones necesarias pero no suficientes para determinar los valores extremos de una función.

1- *Diga si una función f puede tener un punto crítico donde no alcance un valor máximo o un valor mínimo.*

2- *Si f es una función definida en un intervalo $I=(a,b)$ que tiene un punto crítico $c \in I$ ¿qué podemos decir de $f(c)$?*

Aun cuando ambas preguntas tienen el mismo propósito, se presentaron al profesor dos diferentes enunciados. La razón es que en ocasiones la forma en que se expresa una misma idea o concepto es determinante para su comprensión. Un buen nivel de comprensión debe soportar diferentes formulaciones de la misma idea. En este sentido, con los dos enunciados pretendemos averiguar qué tan claro tiene el profesor los criterios para máximos y mínimos.

Acerca de la pregunta 3. Con la siguiente pregunta pretendemos averiguar si el profesor se percata que la condición $c \in [a,b]$ deja la posibilidad de que el punto c, donde la función es derivable y alcanza un máximo (o mínimo), sea un extremo del intervalo, dominio de la función, y que por lo tanto no necesariamente se cumple $f'(c) = 0$. Como sabemos, la necesidad de esta condición se garantiza cuando el punto c es un punto interior del intervalo $I=[a,b]$.

3- *Si* f *es una función definida en un intervalo* $I=[a,b]$ *que tiene un valor máximo o un valor mínimo en un punto* $c \in I$ *donde es derivable ¿qué podemos decir de* $f'(c)$*?*

Si el profesor no es consciente de esta condición en el primer criterio para máximos y mínimos, cuando trata de aplicarlo es probable que olvide analizar por separado, los extremos del dominio.

Acerca de las preguntas 4 y 5. Las preguntas 4 y 5, se diseñaron para averiguar si el profesor relaciona los puntos de inflexión con los puntos críticos. Tenemos razones para sospechar que alumnos y profesores categorizan a los puntos críticos en tres tipos: i) donde hay un máximo, ii) donde hay un mínimo y iii) donde hay un punto de inflexión. Más aún, para determinar los puntos de inflexión de una función, hay quienes suelen buscarlos en los puntos críticos. Cuando alguien procede así, no tiene claro que los puntos de inflexión tienen una razón de existencia que nada tiene que ver con los puntos críticos de la función. En otras palabras, el concepto de punto de inflexión es independiente del concepto de punto crítico. Por supuesto, un punto de inflexión puede ser un punto crítico, pero estos será una mera casualidad. Así que las preguntas 4 y 5 tienen como propósito averiguar si esto ocurre con los profesores participantes.

4- *Si* c *es un punto crítico de una función* f*, en donde la función no alcanza su valor máximo ni mínimo ¿qué podemos decir de la función* f *en el punto* c*?*

5- *¿Puede una función* f *tener un punto de inflexión en un punto* c *donde la derivada no sea cero?*

La pregunta 4 hace referencia a los valores máximo y mínimo absolutos, en el enunciado se estipula que en el punto crítico la función no alcanza ni el valor máximo absoluto ni el valor mínimo absoluto. Una posible respuesta es que la función alcance un valor máximo relativo o un mínimo local, pero también que no alcance ni máximo ni mínimo. Deseamos averiguar si el profesor observa esta sutileza del enunciado o si infiere que al no haber ni máximo ni mínimo la función deberá tener un punto de inflexión. La pregunta 5 va más dirigida en este sentido; deseamos averiguar si el profesor asume que los puntos de inflexión necesariamente son puntos críticos.

Acerca de la pregunta 6. El objetivo de la pregunta 6 es indagar si el profesor tiene claro el criterio de la primera derivada. Como se comentó al inicio de esta sección, este criterio da condiciones suficientes para que una función tenga un máximo o un mínimo en un punto crítico. Las condiciones no son necesarias y aunque en general no son del dominio común los contraejemplos, un profesor reflexivo debería percatarse que el criterio no dice que la condición sea necesaria y que por lo tanto es de esperarse que existan tales contraejemplos.

6- *Si una f función definida y derivable en un intervalo abierto I tiene un máximo en un punto $c \in I$ ¿es cierto que entonces $f'(x) > 0$ para x cercanas y a la izquierda de c y $f'(x) < 0$ para x cercanas y a la derecha de c?*

Acerca de la pregunta 7. La pregunta 7 tiene como propósito averiguar si el profesor comprende que el criterio de la segunda derivada da una condición suficiente pero no necesaria para que una función alcance un máximo o un mínimo en un punto crítico. Este objetivo es similar al de la pregunta 6, pero ahora se refiere al criterio de la segunda derivada. De alguna manera la respuesta correcta a esta pregunta será un reflejo de la experiencia del profesor acerca de la aplicación de este criterio y se trata de averiguar si el profesor acude a algún contraejemplo como son los clásicos $f(x) = x^4$ y $g(x) = -x^4$. Por otra parte, la respuesta incorrecta reflejará su confusión entre la necesidad y suficiencia de la condición sobre el signo de la segunda derivada.

7- *Si una función definida y dos veces derivable en un intervalo abierto I tiene un mínimo en un punto $c \in I$ ¿es cierto que $f''(c) > 0$?*

Acerca de las preguntas 8 a 11. Las preguntas 8-11 se plantearon para indagar si el profesor ha reflexionado sobre las dificultades teóricas y técnicas que en la práctica se pueden presentar en las aplicaciones de ambos criterios y si han reflexionado sobre las ventajas o desventajas entre uno y otro criterio. También se trata de averiguar si el profesor tiene claro los casos en los que en teoría es posible aplicar cualquiera de los criterios y en los que no son aplicables.

8- *Para calcular los valores máximos y mínimo de una función ¿cuál criterio prefiere utilizar? el de la primera derivada o el de la segunda derivada.*

9- *Si su criterio favorito es el de la segunda derivada ¿qué razones tiene para no aplicar el criterio de la primera derivada?*

10- *Si para una función dada, puede aplicar el criterio de la primera derivada ¿por qué acudir al criterio de la segunda derivada?*

11- *Dada una función f ¿en qué casos no es posible aplicar el criterio de la segunda derivada?*

CAPITULO 5

Análisis de datos

El análisis de datos se realizó pregunta por pregunta de la 1 a la 7, de la 8 a la 11 se analizaron de manera conjunta y la 11 fue analizada individualmente.

De acuerdo a las respuestas de los profesores se crearon categorías que reflejaran los diferentes tipos de respuestas, en particular que permitieran identificar las distintas concepciones erróneas que tienen los profesores en relación a la comprensión de los enunciados de los criterios para máximos, mínimos y puntos de inflexión. Dichas categorías permitieron identificar qué actividades mentales requiere el profesor para mejorar su comprensión.

Las respuestas se escanearon y se hizo una tabla por cada pregunta, es decir, se concentraron las 16 respuestas de cada pregunta en tablas independientes.

5.1 Pregunta 1

1. *Diga si una función puede tener un punto crítico donde no alcance un valor máximo o un valor mínimo.*

Para las respuestas de la pregunta 1 se crearon cuatro categorías que describen las tendencias encontradas en las respuestas.

Categoría	Respuestas
1. Respuesta adecuada	E3, E4
2. Asocian punto crítico con punto de inflexión	E1, E2, E6, E7, E11, E15
3. Consideran que si no es máximo ni mínimo entonces es punto de inflexión.	E5, E8
4. Considera que la función debe alcanzar un valor máximo o un valor mínimo.	E12

5.1. Categorías, pregunta 1

En la tabla 5.1 se describen las categorías y las respuestas ubicadas en cada una. Se puede observar que 2 estudiantes dan una respuesta adecuada, es decir, consideran un contraejemplo adecuado y sin mencionar puntos de inflexión.

La categorías 2 agrupa respuestas en las que se considera correctamente que sí pueden existir puntos críticos donde la función no alcance un valor máximo o mínimo, pero en las cuales se recurre a los puntos de inflexión para ejemplificar su respuesta. No se considera una respuesta incorrecta pero se consideró importante destacar la tendencia a relacionar los puntos críticos con los puntos de inflexión.

Se destaca también que las respuestas dentro de la categoría 2 no ofrecen datos para determinar si los profesores son conscientes de que los puntos de inflexión no se buscan entre los puntos críticos.

En la categoría 3 se consideran las respuestas que afirman que si no es máximo ni mínimo entonces debe ser punto de inflexión, tales respuestas reflejan una falta de reflexión acerca de lo que dice el primer criterio, le asocian resultados relacionados con los puntos de inflexión y posiblemente consideran que establece condiciones necesarias y suficientes. Estas respuestas indican además que se tiene la idea equivocada de que en un punto crítico una de 3 cosas pasa; 1) es máximo, 2) es mínimo o 3) es punto de inflexión.

La categoría 4 agrupan respuestas en las que se considera incorrectamente que necesariamente se debe alcanzar un valor máximo o mínimo, nuevamente se refleja una falta de reflexión acerca de las condiciones que establece el primer criterio y también se puede inferir que hace falta reforzar la conexión entre procedimientos y conceptos.

Un ejemplo de respuesta adecuada es la dada por E1 (Figura 1), el contraejemplo que utiliza para ilustrar su respuesta es correcto y no menciona puntos de inflexión.

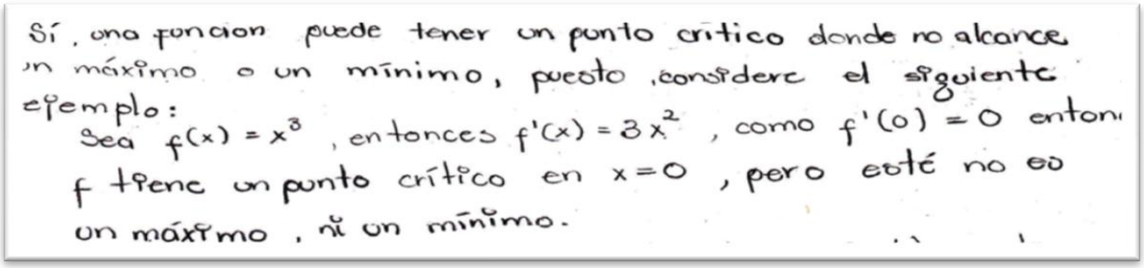

Sí, una funcion puede tener un punto critico donde no alcance un máximo o un mínimo, puesto, considere el siguiente ejemplo:
Sea $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, como $f'(0) = 0$ entonces f tiene un punto crítico en $x = 0$, pero esté no es un máximo, ni un mínimo.

Figura 5.1. Respuesta adecuada (E3)

La respuestas E11 se ubica en la categoría 2, responde correctamente pero haciendo referencia a los puntos de inflexión. (Figuras 5.2).

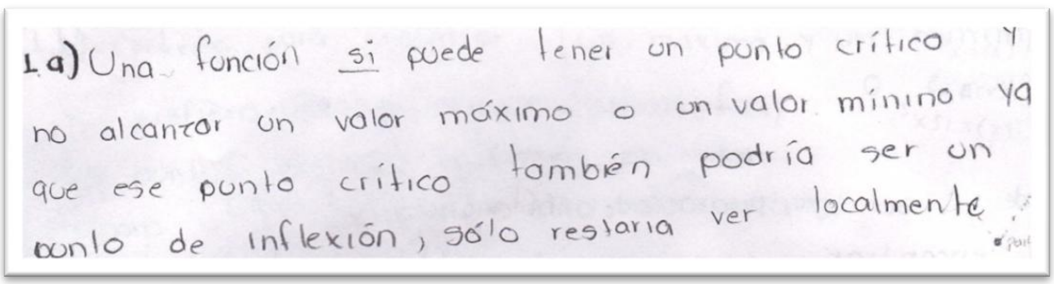
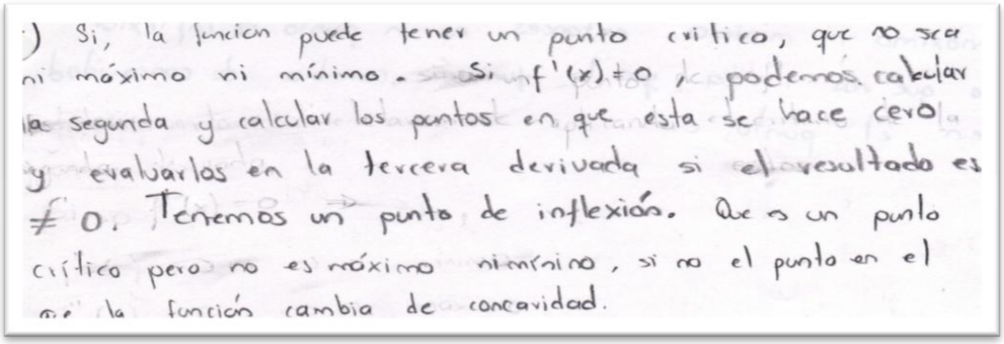

1.a) Una función si puede tener un punto crítico y no alcanzar un valor máximo o un valor mínino ya que ese punto crítico también podría ser un punto de inflexión, sólo restaria ver localmente.

Figura 5. 2. Respuesta categoría 2 (E11)

La respuesta de E6 (Figura 5.3) describe un método para determinar cuándo un punto crítico es punto de inflexión, tal respuesta se ubica en la categoría 2 porque refleja que es consciente que para determinar un punto de inflexión se deben considerar condiciones adicionales, no así las respuestas que se ubican en la categoría 3.

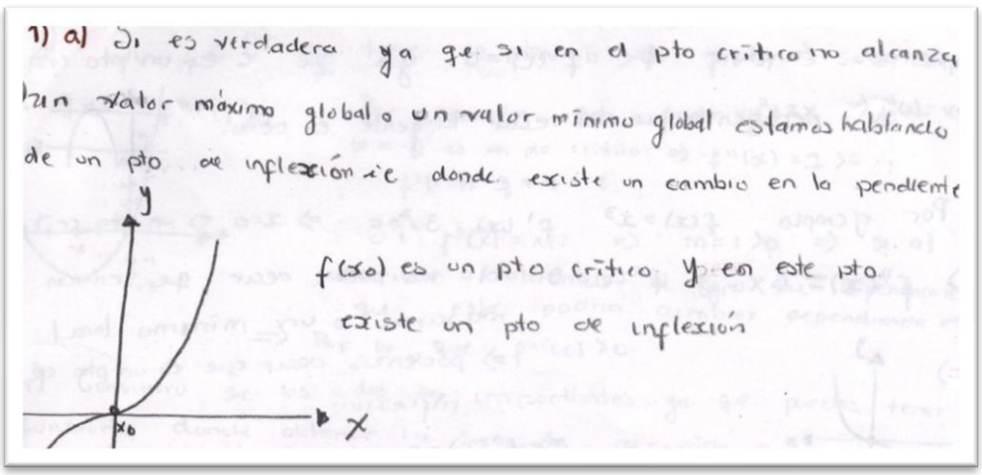
En su procedimiento considera $f'(c) = 0$ como condición necesaria para que f tenga un punto de inflexión en c, lo cual como ya se ha mencionado es un error común, que ya ha sido detectado en investigaciones anteriores. A partir de esta concepción errónea se puede inferir que se requiere reforzar la comprensión de la definición de punto de inflexión y relacionarla con la interpretación geométrica de la derivada, así como analizar el enunciado del primer criterio con el fin de descubrir que no dice nada acerca de los puntos de inflexión.



) Si, la funcion puede tener un punto critico, que no sea ni máximo ni mínimo. Si f'(x)≠0, podemos calcular la segunda y calcular los puntos en que ésta se hace cero y evaluarlos en la tercera derivada si el resultado es ≠ 0. Tenemos un punto de inflexión. Que es un punto crítico pero no es máximo ni mínimo, si no el punto en el la función cambia de concavidad.

Figura 5.3. Respuesta categoría 2 (E6)

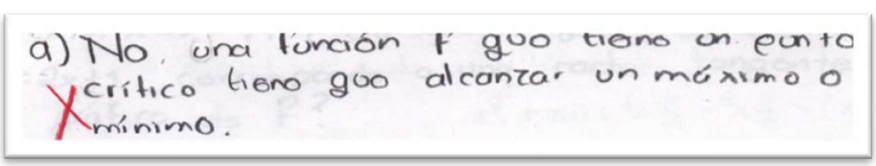
La respuesta de E5 (Figura 5.4) se ubica en la categoría 3, concluye que si no es máximo ni mínimo entonces se trata de un punto de inflexión.



1) a) Si es verdadera ya que si en el pto critico no alcanza un valor máximo global o un valor mínimo global estamos hablando de un pto de inflexión i.e donde existe un cambio en la pendiente

Figura 5.4. Respuesta categoría 3 (E5)

Finalmente la respuesta de E12 ubicada en la categoría 4 (Figura 5.5) refleja una comprensión superficial del primer criterio; considera que establece condiciones necesarias y suficientes. No se ha hecho una reflexión acerca de la naturaleza lógica o no se ha trabajado con funciones que requieran una reflexión al respecto.



a) No, una función f que tiene un punto crítico tiene que alcanzar un máximo o mínimo.

Figura 5.5. Respuesta categoría 4 (E12)

Los profesores E9, E13, E16, E10 no se ubicaron en ninguna categoría, debido a que no responden a la cuestión planteada; E9, E13 y E16 expresan ideas redundantes, lo que revela una falta de conocimiento básico y no solo de comprensión acerca de los criterios, mientras que E10 responde de forma correcta pero sin argumento ni contraejemplo, que revele algo acerca de su comprensión.

En el caso de E14 (Figura 5.6), que tampoco se ubica en ninguna categoría, utiliza una definición diferente de punto crítico a la que se considera en el presente trabajo. Es un caso que no se considero al momento de elaborar el instrumento de investigación, por lo que dicha respuesta no ofrece información acerca de la comprensión del primer criterio.

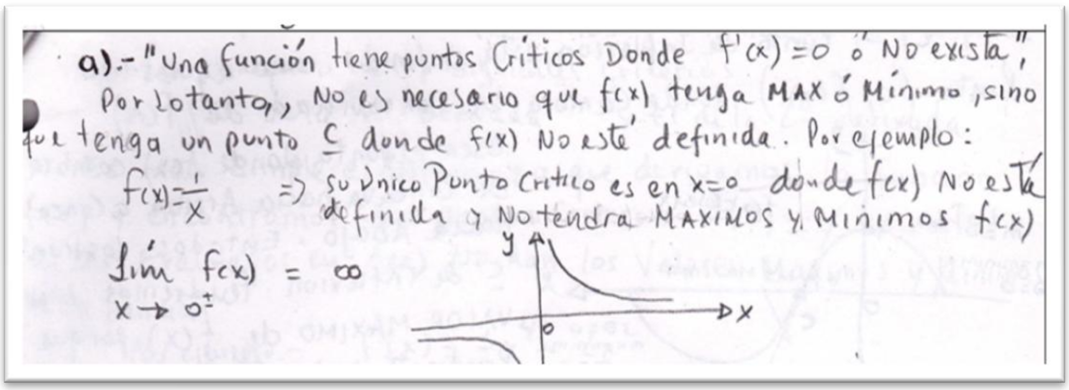


Figura 5.6. Respuesta (E14)

Se revisaron algunos libros de cálculo para ver si es común la definición utilizada por E14 y solo se encontró en el libro Stewart (1999).

5.2 Pregunta 2

2. *Si* f *es una función definida en un intervalo* $I = (a, b)$ *que tiene un punto crítico* $a \in I$ *¿qué podemos decir de* $f(a)$*?*

La pregunta 2 fue respondida por 15 de los 16 profesores, los resultados del análisis se muestran en la tabla 5.2.

Para esta pregunta se detectaron 3 categorías; la categoría 1 indica un nivel adecuado de comprensión, en las respuestas dentro de tal categoría se considera correctamente que la condición $f'(x) = 0$ no es suficiente para que la función tenga un valor máximo o mínimo en c, mientras que las categorías 2 y 3 agrupan respuestas que sugieren que se requiere una reflexión acerca de las condiciones que establece el primer criterio y acerca de su no relación con los puntos de inflexión.

Categorías	Respuestas
1. Respuesta adecuada	E1, E15
2. Consideran que ocurre una de 3 cosas es máximo, mínimo o punto de inflexión.	E2, E3, E4, E5, E6, E8
3. Consideran que debe ser un valor máximo o mínimo de la función.	E10, E11, E14, E16

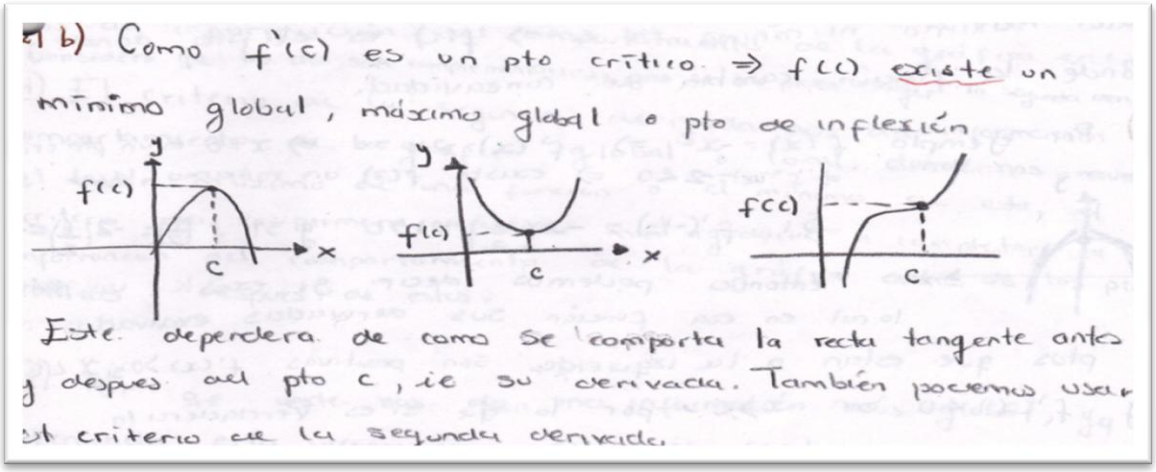
5.2. Categorías, pregunta 2

La respuesta de E1 (Figura 5.7) se clasifica como adecuada, considera correctamente que se requieren considerar condiciones adicionales para concluir si un punto crítico es máximo o mínimo. Se destaca también el hecho de que considera que hay que utilizar alguno de los 2 criterios para determinar si existe un máximo o mínimo, al parecer no considera la opción de simplemente aplicar la definición de mínimo o máximo.

$c \in (a,b)$, como "c" es un punto crítico $f'(c)=0$ por lo que podemos decir que $f(c)$ puede tener un minimo o un máximo en "c", así como puede no tener minimo o máximo. Para saber si hay un máximo o un mínimo debemos aplicar o el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada.

Figura 5.7. Respuesta categoría 1 (E1)

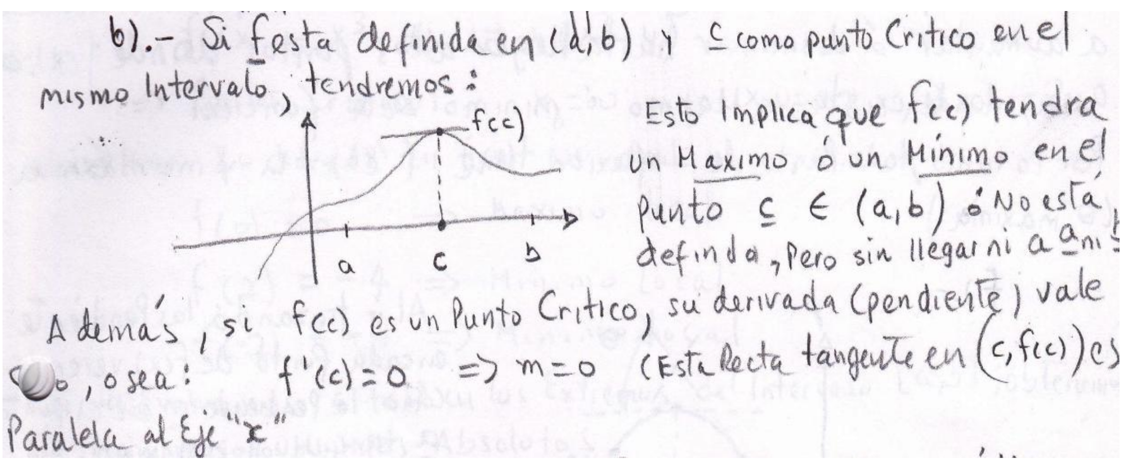
La respuesta de E5 (Figura 5.8) ubicada en la categoría 2, revela nuevamente que se tiene la idea equivocada de que en un punto crítico una de 3 cosas pasa; la función tiene un máximo, mínimo o un punto de inflexión.


b) Como $f'(c)$ es un pto crítico $\Rightarrow$ $f(c)$ existe un mínimo global, máximo global o pto de inflexión

Este dependera de como se comporta la recta tangente antes y despues del pto c, ie su derivada. También podemos usar el criterio de la segunda derivada.

Figura 5.8. Respuesta (E5)

Las respuestas dentro de la categoría 3 consideran que se puede alcanzar un valor máximo o un valor mínimo, pero no mencionan nada acerca de las condiciones adicionales requeridas para determinar si se trata de máximo, mínimo o de ninguna de las dos cosas, un ejemplo es la respuesta de E14 (Figura 5.9).


b).- Si f esta definida en (a,b) y c como punto Critico en el mismo Intervalo, tendremos:

Esto Implica que f(c) tendra un Maximo ó un Mínimo en el punto $c \in (a,b)$ ó No esta definida, Pero sin llegar ni a ni b

Además, si f(c) es un Punto Critico, su derivada (pendiente) vale 0, o sea: $f'(c)=0 \Rightarrow m=0$ (Esta Recta tangente en (c,f(c)) es Paralela al Eje "x"

Figura 5.9. Respuesta categoría 3 (E14)

Las respuestas dentro de la categoría 2 y 3 indican que se requiere hacer una reflexión acerca de las condiciones del primer criterio para poder comprender que ofrece condiciones necesarias pero no suficientes, además de darse cuenta que no menciona nada acerca de los puntos de inflexión.

Las respuestas de E7, E9 y E13 no fueron ubicadas en ninguna categoría, reflejan una falta de conocimiento básico y no solo de comprensión de los criterios, mientras que E12 no responde a la pregunta.

5.3 Pregunta 3

3. *Si f es una función definida en un intervalo $I = [a, b]$ que tiene un valor máximo o un valor mínimo en un punto $c \in I$ donde es derivable ¿qué podemos decir de $f'(c)$?*

En la tabla 5.3 se presentan los resultados del análisis realizado, respondieron 15 de los 16 participantes (E12 no da respuesta), los datos se agruparon en 2 categorías.

En la categoría uno se ubicó a las respuestas en las que no se considera que el máximo o mínimo podría alcanzarse en un extremo del dominio, en cuyo caso no se puede concluir que la derivada sea cero. Las respuestas ubicadas en la categoría 2 no aportan información sobre la comprensión del criterio pues, aunque hay respuesta, ésta no resuelve la cuestión planteada, proporcionan respuestas que revelan una falta de conocimiento básico y/o utilizan un lenguaje poco claro.

Categorías	Respuestas
1. No considera que el punto c puede ser un extremo del domino, y que en tal caso no se aplica el primer criterio.	E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E11, E15, E16
2. No responden la cuestión planteada.	E4, E9, E10, E13, E14

Tabla 5.3. Análisis pregunta 3

Las respuestas de E1 y E3 se ubican en la categoría 1, en ambas se concluye que la derivada vale cero, sin considerar que el punto c puede ser un extremo del dominio, y que en tal caso no se aplica el primer criterio.

$I = [a,b]$, $c \in [a,b]$ donde es derivable ¿qué podemos decir de $f'(c)$? Como por hipotesis se sabe en c es derivable
Podemos decir que $f'(c)=0$.

Figura 5.10. Respuesta categoría 1 (E1)

Dado que f tiene un máximo ó un mínimo en c, podemos asegurar que $f'(c) = 0$.

Figura 5.11. Respuesta categoría 1 (E3)

5.4 Pregunta 4

4. *Si c es un punto crítico de una función f, en donde la función no alcanza su valor máximo ni mínimo ¿qué podemos decir de la función f en el punto c?*

La pregunta 4 fue respondida por 15 de los 16 participantes (E12 no da respuesta), las respuestas se agrupan en dos categorías, en los dos tipos de respuestas se relaciona los puntos de inflexión con los puntos críticos. Ningún profesor considera el caso en que un punto crítico no sea máximo, mínimo ni punto de inflexión.

Las respuestas de la categoría uno reflejan un mayor nivel de comprensión, ya que consideran que *podría* ser un punto de inflexión, mencionando que se deben verificar condiciones adicionales, mientras que en la categoría 2 se afirma que si no es máximo ni mínimo entonces debe ser un punto de inflexión de f.

Categoría	Respuestas
1. Consideran que *podría* ser un punto de inflexión.	E1, E11
2. Consideran que *es* un punto de inflexión.	E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E15, E16

Tabla 5.4. Análisis pregunta 4

La respuesta de E1 (Figura 5.12) se ubica dentro de la categoría 1, considera que en c la función podría tener un punto de inflexión pero que se requiere verificar condiciones adicionales.

Se hace notar que en tal respuesta se supone de forma equivocada que la condición $f'(c) = 0$ es necesaria para los puntos de inflexión.

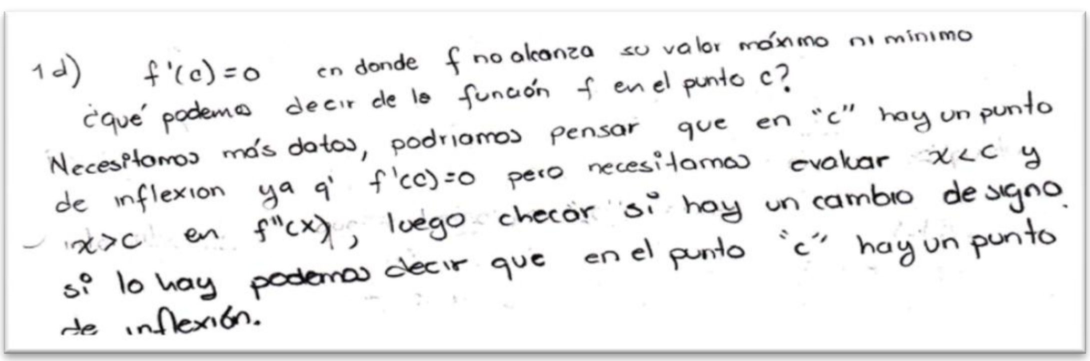

1d) $f'(c)=0$ en donde f no alcanza su valor máximo ni mínimo ¿qué podemos decir de la función f en el punto c?
Necesitamos más datos, podríamos pensar que en "c" hay un punto de inflexion ya q' $f'(c)=0$ pero necesitamos evaluar $x<c$ y $x>c$ en $f''(x)$, luego checar si hay un cambio de signo si lo hay podemos decir que en el punto "c" hay un punto de inflexión.

Figura 5.12. Respuesta categoría 1 (E1)

Las respuestas de E6 y E16 (Figuras 5.13 y 5.14 respectivamente), situadas en la categoría dos, revelan que se tiene la idea equivocada de que en un punto crítico una de tres cosas pasa; la función tiene un máximo, mínimo o punto de inflexión.

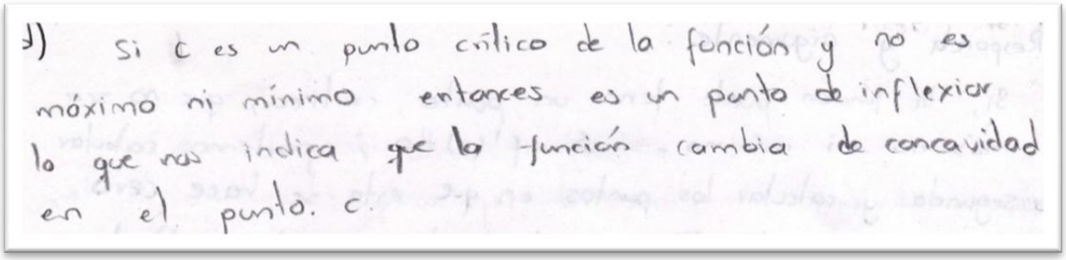

d) Si c es un punto crítico de la función y no es máximo ni mínimo entonces es un punto de inflexión lo que nos indica que la función cambia de concavidad en el punto c.

Figura 5.13. Respuesta categoría 2 (E6)

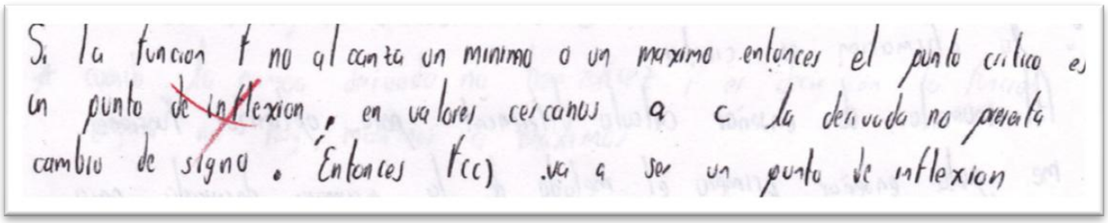

Si la funcion f no alcanza un minimo o un maximo entonces el punto critico es un punto ~~de inflexion~~, en valores cercanos a c la derivada no presenta cambio de signo. Entonces f(c) va a ser un punto de inflexion

Figura 5.14 Respuesta categoría 2 (E16)

Los profesores E10 y E13 no responden a la cuestión planteada, por lo cual no se ubican en ninguna de las categorías consideradas. E14 nuevamente considera una definición alternativa de punto crítico, aunque no la utiliza correctamente en su ejemplo.

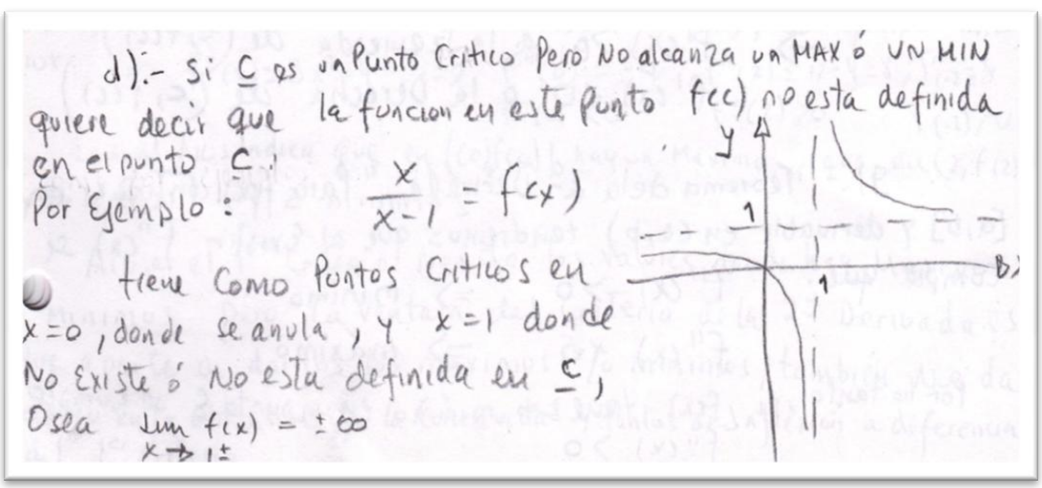

d).- Si C es un Punto Critico Pero No alcanza un MAX ó UN MIN quiere decir que la funcion en este Punto f(c) no esta definida en el punto C.
Por Ejemplo: $\frac{x}{x-1} = f(x)$
tiene Como Puntos Criticos en $x=0$, donde se anula, y $x=1$ donde No Existe ó No esta definida en c,
Osea $\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$

Figura 5.16. Respuesta (E14)

5.5 Pregunta 5

5. *¿Puede una función f tener un punto de inflexión en un punto c donde la derivada no sea cero?*

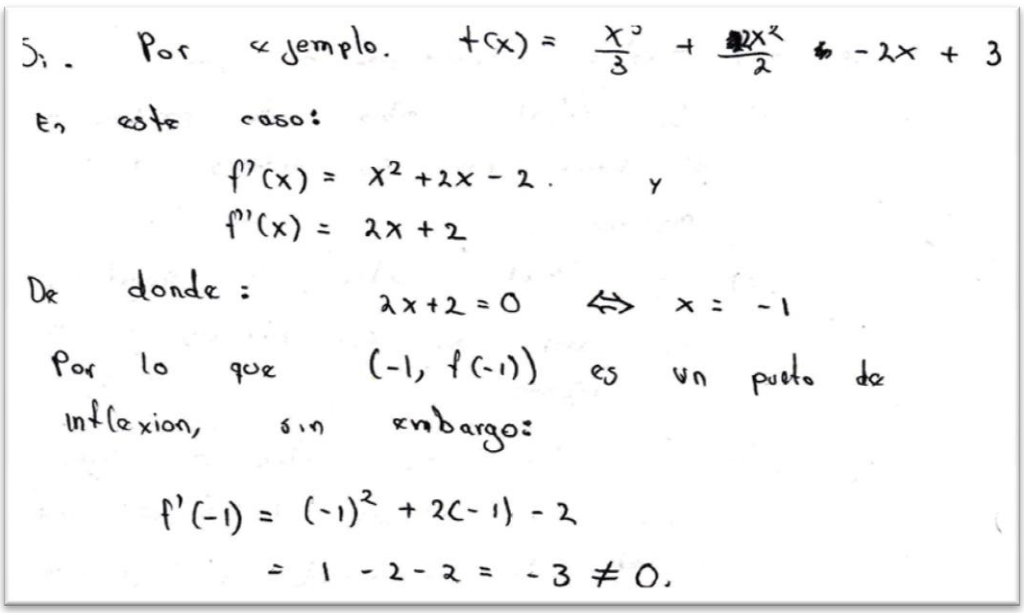
La pregunta 5 fue respondida por 15 de los 16 participantes (E12 no da respuesta), las respuestas se agrupan en tres categorías que dan cuenta de varias concepciones erróneas que se pueden tener acerca del proceso para determinar los puntos de inflexión de una función.

En todas las respuestas se detecta una conexión débil entre los procesos y los conceptos, además de una falta de claridad del concepto de punto de inflexión. Se observa también una falta de experiencia con diferentes tipos de puntos de inflexión, pues de acuerdo a las respuestas se puede inferir que solo están familiarizados con puntos de inflexión horizontales.

Categoría	Respuestas
1. Considera que $f''(c) = 0$ es condición necesaria y suficiente para que f tenga punto de inflexión en c.	E3, E4, E7, E8
2. Consideran $f'(c) = 0$ como condición necesaria para que f tenga un punto de inflexión en c.	E1, E5, E6, E11, E16
3. Considera $f'(c) \neq 0$ como condición necesaria para que f tenga punto de inflexión en c.	E14

Tabla 5.5. Análisis pregunta 5

Dentro de la categoría uno se considera la respuesta de E4 (Figuras 5.17), utiliza un ejemplo correcto, pero concluye que un punto c es punto de inflexión de una función si y solo si $f''(c) = 0$. Se revela una falta de claridad de que la condición $f''(c) = 0$ es necesaria pero no suficiente para que la función tenga un punto de inflexión en c, lo cual se relaciona con considerar el primer criterio como necesario y suficiente, o posiblemente con una falta de conexión entre este criterio y el proceso para determinar los puntos de inflexión.



Si. Por ejemplo. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 2x + 3$

En este caso:

$f'(x) = x^2 + 2x - 2$. y

$f''(x) = 2x + 2$

De donde: $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Por lo que $(-1, f(-1))$ es un punto de inflexion, sin embargo:

$f'(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 2$

$= 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0.$

Figura 5.17. Respuesta (E4)

Las respuestas dentro de la categoría 2 son variadas por lo que se describen 2 ejemplos, sin embargo, el error que subyace en todas es considerar $f'(c) = 0$ como condición necesaria para que f tenga un punto de inflexión en c, por lo que han sido agrupadas en la misma categoría.

En la figura 5.18 se muestra la respuesta de E1, quien considera la condición $f'(c) = 0$ como parte de la definición de punto de inflexión, además se observa que en su gráfica considera que el valor de la pendiente en el punto $(c, f(c))$ es cero de forma que se adecue a su definición de punto de inflexión, cuando claramente el valor no es cero, esto podría atribuirse a que no existe la conexión entre la interpretación gráfica de la derivada y la localización de los puntos de inflexión.

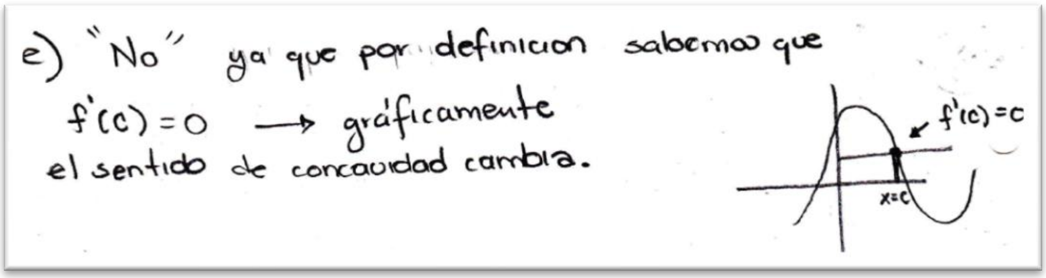


Figura 5.18. Respuesta categoría 2 (E1)

En la figura 5.19 se muestra la respuesta de E11, quien considera que los puntos de inflexión se buscan entre los puntos críticos de la función.

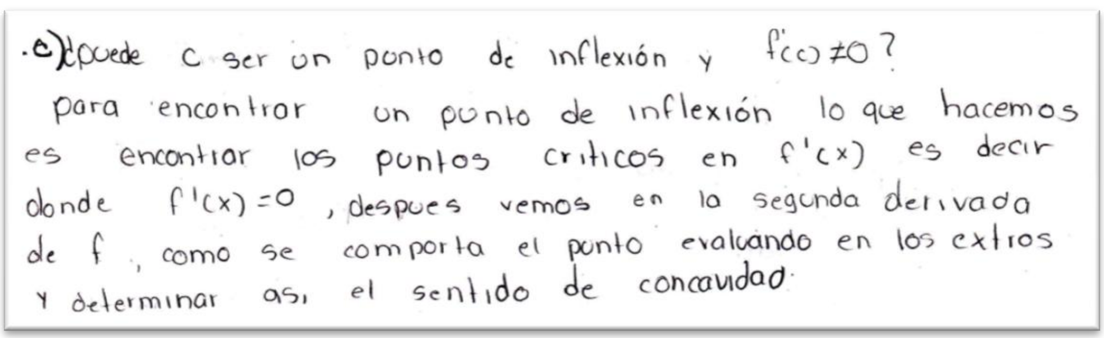

c) ¿puede c ser un punto de inflexión y $f'(c) \neq 0$?
para encontrar un punto de inflexión lo que hacemos es encontrar los puntos criticos en $f'(x)$ es decir donde $f'(x)=0$, despues vemos en la segunda derivada de f, como se comporta el punto evaluando en los extros y determinar asi el sentido de concavidad.

Figura 5.19. Respuesta categoría 2 (E11)

Dentro de la categoría 3 se ubica la respuesta de E14 (Figura 5.20), quien considera la condición opuesta (también incorrecta), supone $f'(c) \neq 0$ como condición necesaria para que f tenga punto de inflexión en c, excluyendo el caso $f'(x) = 0$.

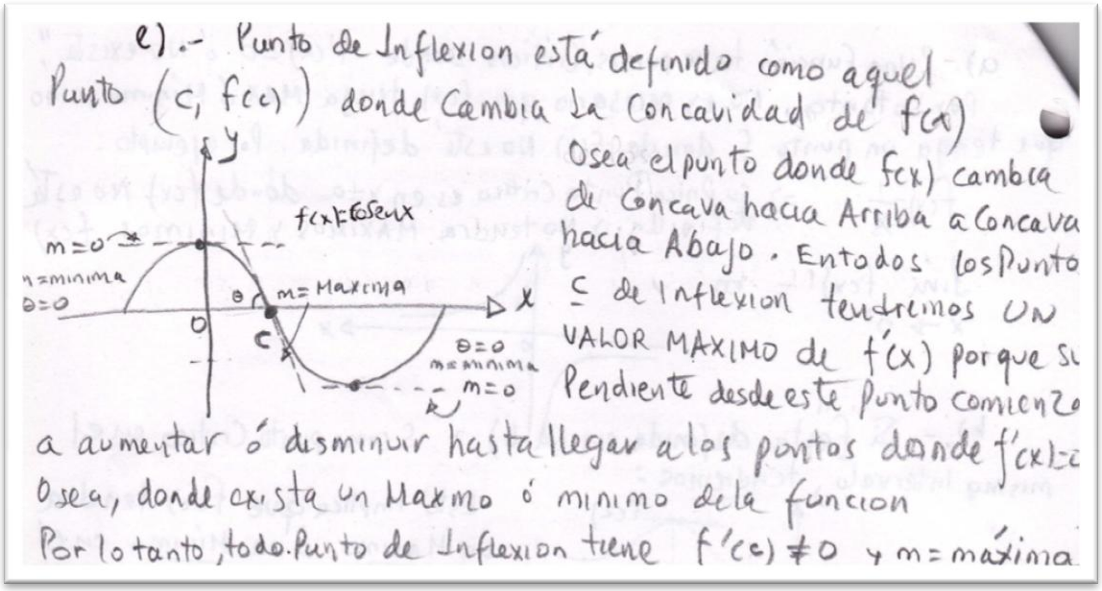

e).- Punto de Inflexion está definido como aquel Punto $(c, f(c))$ donde Cambia la Concavidad de $f(x)$
Osea el punto donde $f(x)$ cambia de Concava hacia Arriba a Concava hacia Abajo. En todos los Punto c de Inflexion tendremos UN VALOR MAXIMO de $f'(x)$ porque si Pendiente desde este Punto comienza a aumentar ó disminuir hasta llegar a los puntos donde $f'(x)=0$
Osea, donde exista un Maximo ó minimo de la funcion
Por lo tanto, todo Punto de Inflexion tiene $f'(c) \neq 0$ y m = máxima

Figura 5.20. Respuesta (E14)

5.6 Pregunta 6

6. *Si una función f definida y derivable en un intervalo $I = (a, b)$ tiene un máximo en un punto $c \in I$ ¿es cierto que entonces $f'(x) > 0$ para x cercanas y a la izquierda de c y $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) < 0$ para x cercanas y a la derecha de c?*

La pregunta 6 la respondieron 14 participantes (E6 no justifica su respuesta y E12 no responde nada), las respuestas se agruparon en dos categorías. En la categoría uno se ubican las respuestas afirmativas, lo que indica que se supone equivocadamente que el criterio de la primera derivada da condiciones necesarias y suficientes, esto revela una falta de reflexión acerca de la naturaleza lógica del criterio. Mientras que en la categoría 2 se agrupan respuestas que revelan una falta de conocimiento básico, no solo de reflexión o experiencia.

Categoría	Respuestas
1. Consideran que el criterio da condiciones necesarias y suficientes.	E1, E2, E3, E4, E5, E7, E8, E11, E13, E14, E15, E16
2. Falta de conocimiento básico.	E9, E10,

5.6. Análisis pregunta 6

Las respuestas de E2 y E3 se ubican en la categoría 1; E2 considera simplemente qué eso es lo que establece el criterio de la primera derivada.

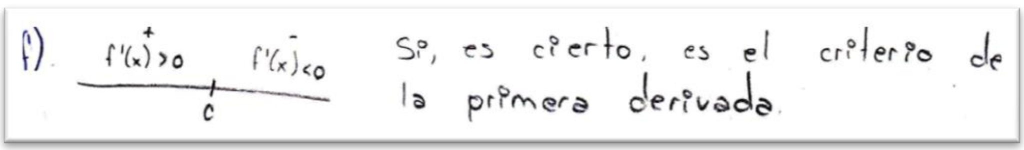


Figura 5.21. Respuesta categoría 1 (E2)

E3 se apoya en una figura para concluir que siempre debe ocurrir lo que se plantea en la pregunta, en este caso habría que hacer reflexionar al profesor acerca de otros tipos de comportamiento alrededor de un punto máximo (mínimo).

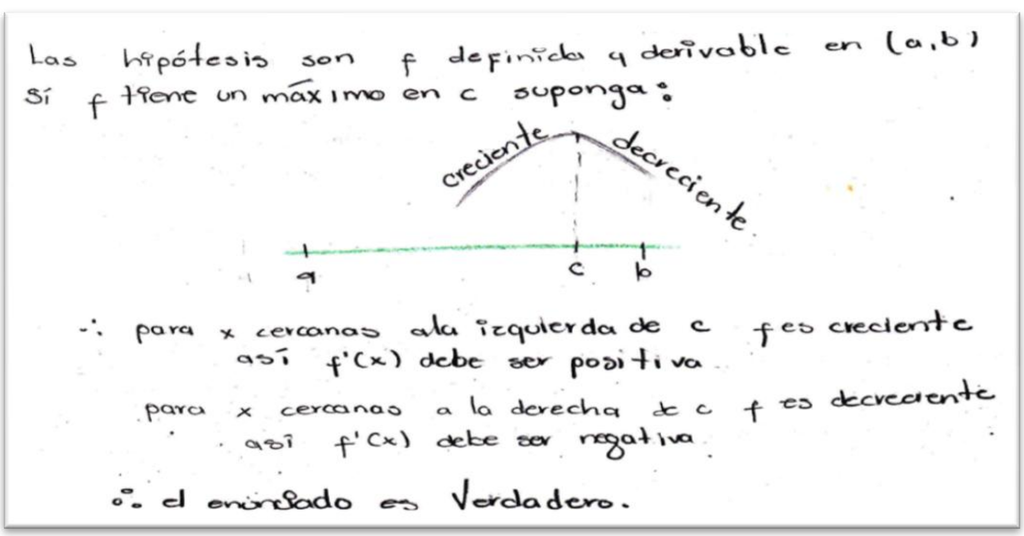


Figura 5.22 Respuesta categoría 1 (E3)

5.7 Pregunta 7

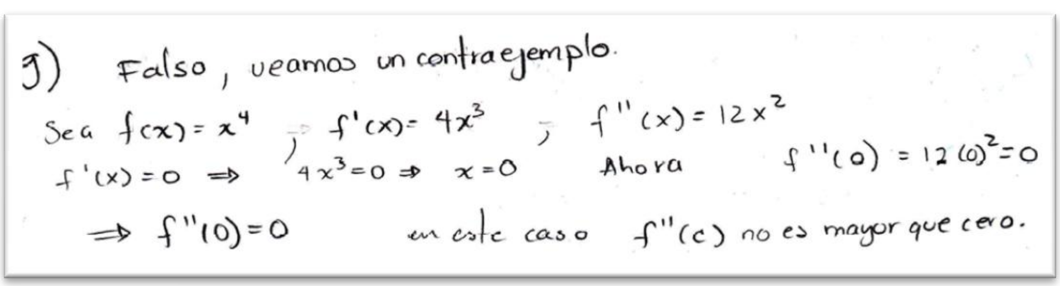
7. *Si una función f definida en un intervalo abierto I tiene un valor máximo en un punto $c \in I$, en el cual existe $f''(c)$ ¿es cierto que $f''(c) > 0$?*

La pregunta 7 la respondieron 15 de los 16 participantes (E13 no responde a la pregunta). Las respuestas se agrupan en tres categorías; la respuesta de la categoría uno consiste en un contraejemplo adecuado y accesible, la categoría dos agrupa respuestas que revelan una falta de reflexión acerca de la naturaleza lógica del criterio, consideran que el criterio de la segunda derivada establece condiciones necesarias y suficientes, mientras que en la categoría 3 se consideran las respuestas sin justificación.

Categoría	Respuestas
1. Respuesta correcta con contraejemplo adecuado.	E1
2. Consideran que el criterio establece condiciones necesarias y suficientes.	E2, E4, E6, E9, E11, E12, E14, E15, E16
3. Respuesta sin justificación.	E3, E7, E10

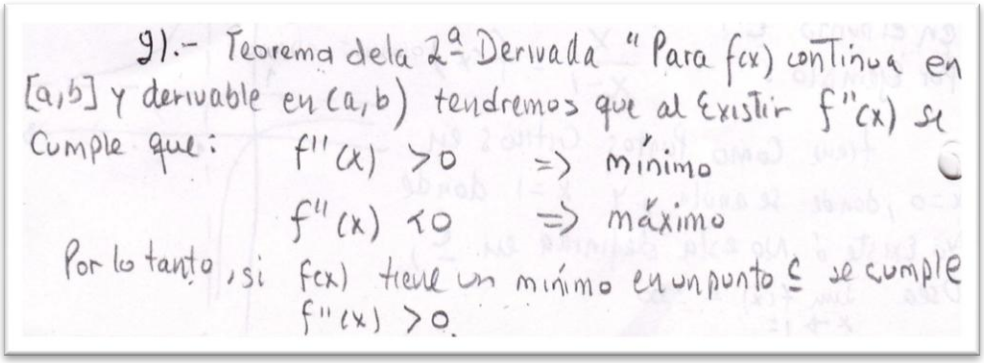
5.7. Análisis pregunta 7

La respuesta de E1 ubicada en la categoría 1 (Figura 5.27). consiste de un contraejemplo adecuado, sencillo y accesible a nivel bachillerato.


7) Falso, veamos un contraejemplo.
Sea $f(x) = x^4$; $f'(x) = 4x^3$; $f''(x) = 12x^2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ Ahora $f''(0) = 12(0)^2 = 0$
$\Rightarrow f''(0) = 0$ en este caso $f''(c)$ no es mayor que cero.

5.23. Respuesta adecuada (E1)

En la categoría dos se sitúa la respuesta de E2 (Figura 5.28), enuncia el criterio y considera que establece condiciones necesarias y suficientes.



9).- Teorema dela 2ª Derivada "Para $f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tendremos que al Existir $f''(x)$ se Cumple que: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ mínimo

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ máximo

Por lo tanto, si $f(x)$ tiene un mínimo en un punto c se cumple $f''(x) > 0$.

Figura 5.24. Respuesta categoría 2 (E2)

5.8 Pregunta 8, 9 y 10

El análisis de las respuestas a las preguntas 8, 9 y 10 se realizaron de manera conjunta, las 3 tratan sobre la misma cuestión; determinar si han reflexionado acerca de las dificultades teóricas y prácticas que se pueden presentar al aplicar cada uno de los criterios.

8. *Para calcular los valores máximo y mínimo de una función ¿cuál criterio prefiere utilizar? el de la primera derivada o el de la segunda derivada. Explique por qué.*

9. *Si su criterio favorito es el de la segunda derivada ¿qué razones tiene para no aplicar el criterio de la primera derivada?*

10. *Si para una función dada, puede aplicar el criterio de la primera derivada ¿por qué acudir al criterio de la segunda derivada?*

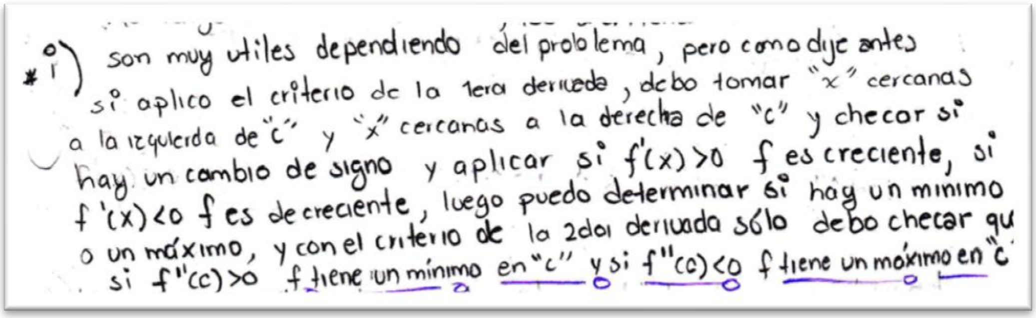
Las preguntas fueron respondidas por los 16 participantes, E12 no justifican su respuesta, por lo que no podemos inferir nada acerca de su comprensión, y no fue ubicada en ninguna categoría, las demás respuestas se agrupan en tres categorías. En la categoría uno se agrupa respuestas que indican que se ha hecho una reflexión acerca de las dificultades prácticas que se presentan al intentar aplicar cada uno de los criterios, o por lo menos que se ha tenido experiencia con estos casos, lo cual también influye en el nivel de comprensión que se pueda tener. En la categoría 2 se consideran las respuestas en las que se supone que el criterio de la segunda derivada es más sencillo, por el ahorro de cálculos, pero no consideran los casos en que no se puede aplicar. Finalmente en la categoría 3 se consideran las respuestas que reflejan una falta total de reflexión y/o experiencia acerca de las dificultades teóricas y prácticas que se pueden presentar al intentar aplicar cada uno de los criterios.

Cabe destacar que en las 3 categorías, en general, se exhibe un lenguaje poco claro o que refleja poca experiencia en la comunicación de las ideas propias.

Categoría	Respuestas
1. Consideran que el criterio de la segunda derivada es más sencillo porque se realizan menos cálculos y reconocen que no siempre puede aplicarse.	E2, E5, E9, E11, E14, E15, E16
2. Consideran que el criterio de la segunda derivada es más sencillo porque se realizan menos cálculos, sin mencionar que no siempre funciona.	E1, E4, E6, E8,
3. Falta de reflexión acerca de las dificultades teóricas y prácticas.	E3, E7, E10, E12, E13

5.8. Análisis pregunta 8, 9 y 10.

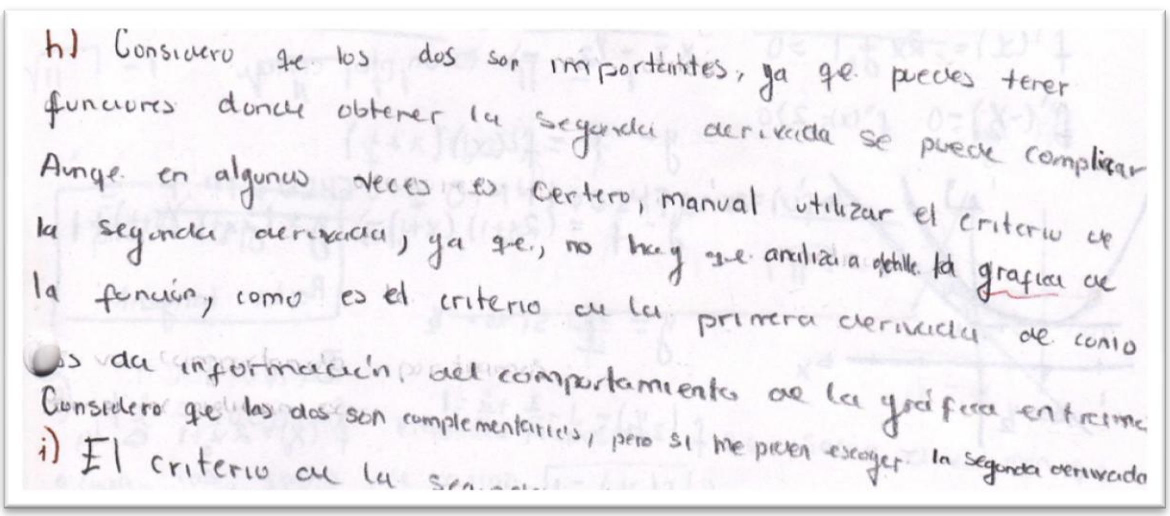
La respuesta de E1 (Figura 5.24) se ubica en la categoría 2, el profesor considera que al aplicar el criterio de la segunda derivada se realizan menos cálculos, no reflexiona acerca de los casos en que no es posible aplicarlo, o que el obtener la segunda derivada podría resultar en una tarea complicada.



*i) son muy útiles dependiendo del problema, pero como dije antes si aplico el criterio de la 1era derivada, debo tomar "x" cercanas a la izquierda de "c" y "x" cercanas a la derecha de "c" y checar si hay un cambio de signo y aplicar si $f'(x)>0$ f es creciente, si $f'(x)<0$ f es decreciente, luego puedo determinar si hay un mínimo o un máximo, y con el criterio de la 2da derivada sólo debo checar qu si $f''(c)>0$ f tiene un mínimo en "c" y si $f''(c)<0$ f tiene un máximo en "c"

Figura 5.24. Respuesta (E1)

La respuesta de E5 (Figura 5.25) se ubica en la categoría 1, por su respuesta a la pregunta 9. Toma en cuenta los casos en que obtener la segunda derivada podría complicarse, pero si esto no sucede, entonces las operaciones se reducen. El lenguaje que utiliza no es muy preciso.



h) Considero qe los dos son importantes, ya qe puedes tener funciones donde obtener la segunda derivada se puede complicar Aunqe en algunas veces es certero, manual utilizar el criterio de la segunda derivada, ya qe, no hay qe analizar a detalle la gráfica de la función, como es el criterio de la primera derivada de como nos da información del comportamiento de la gráfica entre
Considero qe las dos son complementarias, pero si me piden escoger la segunda derivada
i) El criterio de la seg...

Figura 5.25. Respuesta (E5)

Se consideró que cuando menciona que al aplicar el criterio de la segunda derivada no es necesario analizar la gráfica de la función a detalle, se refiere a que no hay que evaluar el comportamiento de la función antes y después del punto crítico.

Por otra parte su respuesta a la pregunta 10 muestra que no tiene claridad en el uso de los criterios, pues considera que son *complementarios*.

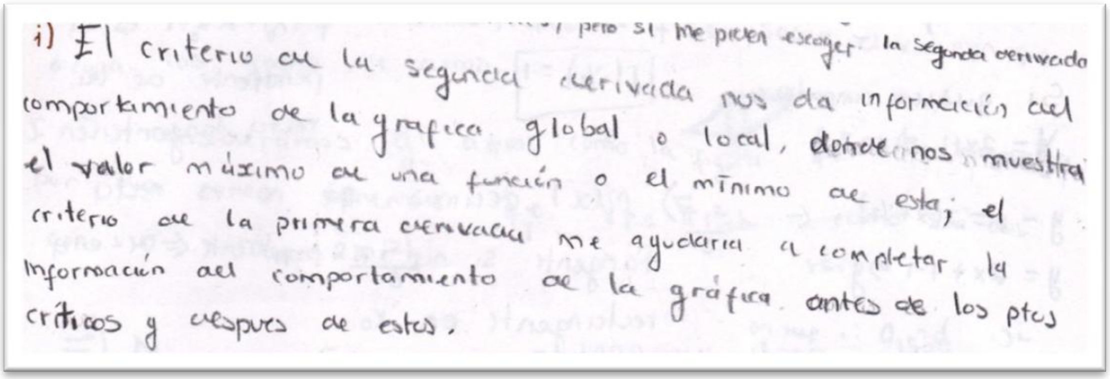
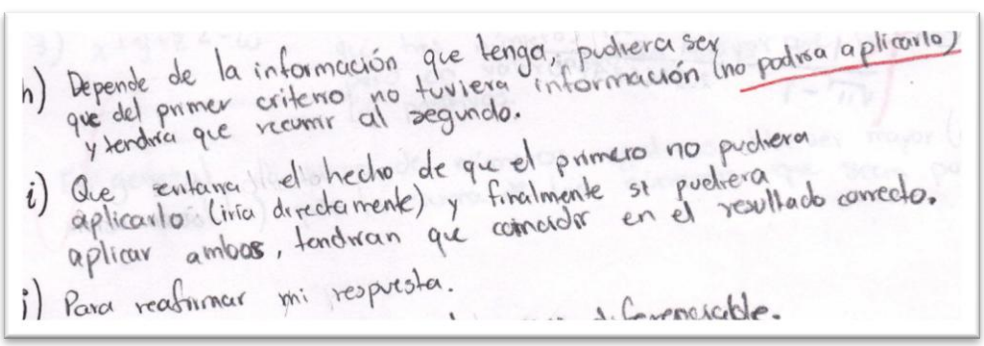

i) El criterio de la segunda derivada, pero si me piden escoger la segunda derivada nos da información del comportamiento de la grafica global o local, donde nos muestra el valor máximo de una función o el mínimo de esta; el criterio de la primera derivada me ayudaría a completar la información del comportamiento de la gráfica antes de los ptos críticos y despues de estos.

Figura 5.26. Respuesta (E5)

Esta respuesta refleja una falta de claridad de lo que dicen los criterios, considera que el criterio de la primera derivada es para completar la información obtenida con el criterio de la segunda derivada, y utiliza las hipótesis del criterio de la primera derivada como si fueran las conclusiones que se pueden obtener de su aplicación. En relación a esta respuesta se ubicaría en la categoría 3.

La respuesta de E7 (Figura 5.27) se ubica en la categoría 3, considera que la preferencia de un criterio sobre otro depende de la información que tenga, no se exhibe reflexión acerca de las dificultades y ventajas de cada uno.


h) Depende de la información que tenga, pudiera ser que del primer criterio no tuviera información (no podría aplicarlo) y tendría que recurrir al segundo.

i) Que entiendo el hecho de que el primero no pudiera aplicarlo (iría directamente) y finalmente si pudiera aplicar ambos, tendrían que coincidir en el resultado correcto.

j) Para reafirmar mi respuesta.

5.27. Respuesta categoría 3 (E7)

5.8 Pregunta 11

11. *Dada una función f ¿en qué casos no es posible aplicar el criterio de la segunda derivada?*

La pregunta 11 la respondieron 14 participantes (E13 y E14 no responden), las respuestas se agrupan en dos categorías. En la categoría uno se consideran las respuestas que plantean un caso en el cuál no se podría aplicar el criterio de la segunda derivada, en la categoría 2 se agrupan respuestas que revelan una falta de reflexión y/o experiencia acerca del uso del criterio de la segunda derivada.

Como se menciono, en las respuestas de la categoría uno, solo se reconoce un caso en que no se puede aplicar el criterio de la segunda derivada; 11 profesores responden que no se aplica cuando la función no es 2 veces derivable en un abierto que contenga al punto crítico, y solamente 2 profesores consideran el caso en que la segunda derivada se anula en el punto crítico. Ningún profesor identifica más de un caso.

Categoría	Respuestas
1. Reflejan reflexión sobre casos donde no se aplica el criterio de la segunda derivada.	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E11, E12, E15, E16
2. Falta de conocimiento y/o experiencia.	E10, E11,

5.9. Análisis pregunta 11

Ejemplos de respuestas dentro de la categoría uno son las proporcionadas por E3 y E6, mostradas en las figuras 5.28 y 5.29 respectivamente. El profesor E3 reconoce de forma correcta que si la función no es 2 veces derivable entonces no se puede aplicar el criterio de la segunda derivada y E6 considera el caso en que la segunda derivada se anula en el punto crítico.

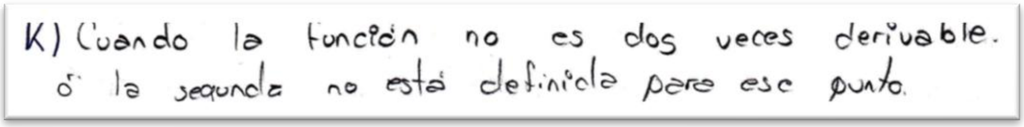

k) Cuando la función no es dos veces derivable. ó la segunda no está definida para ese punto.

Figura 5.28. Respuesta categoría 1 (E3)

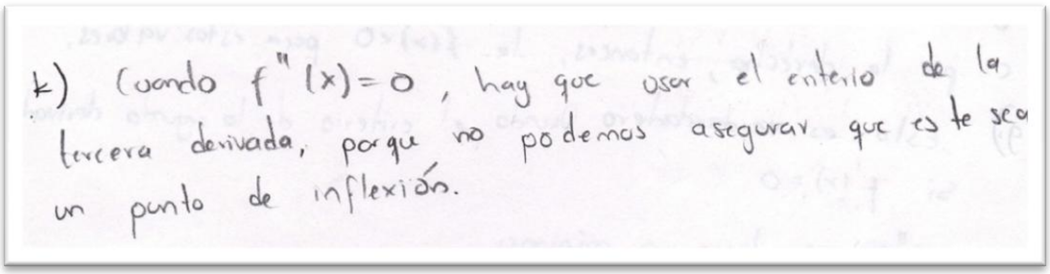

k) Cuando f''(x) = 0, hay que usar el criterio de la tercera derivada, porque no podemos asegurar que este sea un punto de inflexión.

Figura 5.29. Respuesta categoría 1 (E6)

La respuesta de E11 se ubica en las 2 categorías; considera correctamente que si la función no es 2 veces derivable entonces el criterio no se puede aplicar, pero también considera que si la función segunda derivada es constante tampoco aplica, lo cual es incorrecto.

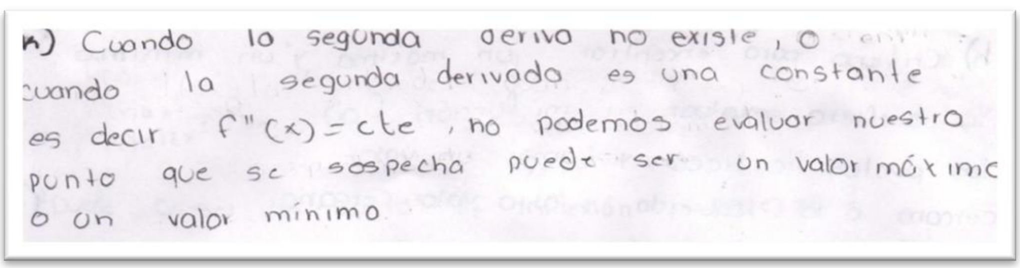

k) Cuando la segunda deriva no existe, o cuando la segunda derivada es una constante es decir f''(x) = cte, no podemos evaluar nuestro punto que se sospecha puede ser un valor máximo o un valor mínimo

Figura 5.30. Respuesta categoría 1 y 2 (E11)

CAPITULO 6

Resultados y conclusiones

6.1 Resultados

El análisis de datos (Capítulo 5) consistió en la clasificación de las respuestas de los profesores en categorías que permitieran identificar los distintos tipos de respuesta y distintas concepciones erróneas.

Con base en las 5 actividades mentales, propuestas por Carpenter y Lehrer (1999), para promover la comprensión de una idea matemática, se establecieron posibles causas de las concepciones erróneas detectadas y paralelamente las actividades mentales que pudieran ayudar al profesor en su proceso de comprensión de los conceptos involucrados en las preguntas.

En los datos encontrados se identifican 8 concepciones erróneas relacionadas con los criterios para determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función derivable. A continuación se enlistan y son discutidos.

1. *En un punto crítico ocurre una de 3 cosas; a) es máximo, b) mínimo o c) punto de inflexión.* Está concepción errónea se detectó en las respuestas a las cuestiones 1, 2, 4 y 5. De los 16 profesores 11 afirman de manera incorrecta tal afirmación; E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E15, E16.

   Algunos de los profesores incurren en el error en sus 4 respuestas, mientras que otros incurren hasta su respuesta a la pregunta 2 y otros hasta la pregunta 4. Esta inconsistencia indica conexiones débiles entre los diversos conceptos y procesos involucrados, entonces el profesor requiere crear estructuras de conocimiento más integradas.

   Esta concepción equivocada había sido considerada anteriormente en Rivera y Campuzano (2012), una de las posibles causas es que cuando al profesor se le presentan puntos críticos que no son ni máximos ni mínimos resulta que son puntos de inflexión, y entonces el profesor incorpora a su conocimiento tal experiencia como un resultado general, el profesor requiere reflexionar acerca del enunciado del primer criterio y relacionarlo con el proceso de encontrar lo valores extremos de una función derivable.

2. *Considerar* $f'(x) = 0$ *como condición necesaria para los puntos de inflexión.* Está concepción está estrechamente ligada con la 1, pero podría darse el caso en que el profesor sea consciente de que un punto crítico no necesariamente debe ser máximo, mínimo o punto de inflexión, pero que si considere que los puntos de inflexión deben ser puntos críticos.

   Este error fue identificado en las respuestas de 11 profesores; E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E11, E15 y E16. Algunos consideran la condición como parte de la definición de punto de inflexión. El profesor requiere de conocer contraejemplos que le permitan reflexionar acerca de los diferentes tipos de puntos de inflexión.

3. *En un punto crítico se alcanza un máximo o un mínimo* (E10, E11, E12, E14, E16). Esta concepción equivocada es detectada en las cuestiones 1 y 2, los participantes se ubican en las categorías 4 y 3 respectivamente.

   Acerca de esta concepción se considera que el profesor no ha reflexionado acerca de sus propias experiencias, o no las relacionó con la cuestión planteada, pues posiblemente todos han trabajado con la función $f(x) = x^3$. El profesor requiere reflexionar acerca la relación entre su propio conocimiento y las condiciones de un problema o situación.

4. *Considerar* $f''(x) = 0$ *como condición necesaria y suficiente para un punto de inflexión.* Los profesores E3, E4, E7, E8 incorporan tal afirmación de manera equivocada en su proceso de búsqueda de puntos de inflexión.

   Esta idea equivocada muestra una falta de reflexión acerca de la relación que existe entre el procedimiento para determinar los puntos de inflexión de una función y los criterios para máximos y mínimos.

5. *No consideran que el máximo o mínimo de una función derivable se puede alcanzar en un extremo del dominio de la función* (E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E11, E15, E16). En este caso los profesores no detectan que el valor extremo se puede alcanzar en un extremo del dominio y que en tal caso no se aplica el primer criterio.

6. *Considerar* $f'(x) \neq 0$ *como condición necesaria para que* f *tenga un punto de inflexión*. Este error solo es detectado en la respuesta de E6 a la pregunta 6.

7. *Considerar que el criterio de la primera derivada establece condiciones necesarias y suficientes*. Los profesores E1, E2, E3, E4, E5, E7, E8, E11, E13, E14, E15, E16 en su respuesta a la pregunta 7 indican que no ha habido una reflexión acerca de la naturaleza lógica del criterio.
8. *Considerar que el criterio de la segunda derivada establece condiciones necesarias y suficientes*. Los profesores E2, E4, E6, E9, E11, E12, E14, E15, E16 consideran que el criterio de la segunda derivada también establece condiciones necesarias, nuevamente se percibe una falta de reflexión acerca de la naturaleza lógica del criterio así como falta de reflexión y conexión con los problemas con los que se ha trabajado, pues las funciones que ilustran la falsedad de esta concepción son muy comunes.

6.2 Conclusiones generales

Algo que se observó en la mayoría de las respuestas es que los profesores no tienen claridad en la diferencia lógica que hay entre una condición necesaria y una condición suficiente. Al menos, en el contexto de los criterios para máximos y mínimos de funciones algunos profesores no son conscientes que, por ejemplo, un criterio que estipula una condición suficiente no es aplicable a situaciones en donde se requiere la necesidad de la condición y no la suficiencia.

Así pues, es recomendable que el profesor lleve actividades en donde haya una disertación y una reflexión sobre la naturaleza lógica de los criterios. Esta actividad deberá ayudar a su mejor comprensión de los criterios si se reflexiona a profundidad lo que dice el criterio pero también si se hace una disertación sobre lo que dice. En este sentido, es importante que el profesor conozca contraejemplos, que no son otra cosa que ejemplos que muestran la falsedad de una afirmación de la que podría sospecharse verdadera (y a veces creerse verdadera). Una comprensión equivocada de cualquier proposición matemática se ve reflejada en el hecho de que el profesor al aplicarla le concede más cualidades que las que lógicamente podemos concederle a la proposición.

Toda actividad en beneficio de la comprensión de un enunciado matemático, en este caso de los criterios para máximos y mínimos, sin duda incidirán, en la formación matemática del profesor, pero también sin duda incidirá en su práctica docente o como lo expresan Ball & McDiarmid (1989), en la forma de cómo enseña a sus estudiantes.

Como se expresó antes, es necesario que el profesor conozca y trabaje problemas para los cuales no son aplicables los criterios, es decir, problemas en los que no se cumplan las condiciones o hipótesis que se establecen en los teoremas. Estos problemas darán cuenta de la relevancia de las hipótesis que aparecen en los teoremas.

Sin embargo, es importante aclarar que el nivel de comprensión que se esperaría tuviese un profesor de los criterios para máximos y mínimos, no necesariamente es exigible a los estudiantes. La formación y conocimientos que un profesor debería tener acerca de un tema que pretenda enseñar, debe ser mucho más de lo que comunicará a sus estudiantes. Esto no significa que no haya que involucrar al estudiante en actividades que requieran una reflexión relativamente profunda, pues la as investigaciones consultadas y los resultados del presente trabajo muestran que se debe trabajar con una variedad amplia de problemas, no solo problemas rutinarios, sino problemas que motiven al estudiante a reflexionar acerca de lo que están haciendo, problemas que los pongan en un estado de duda, que de acuerdo a Dewey (1910), es el primer paso hacia la reflexión; este estado de duda los conducirá a un acto de búsqueda o investigación de hechos adicionales que sirvan para corroborar o corregir la solución planteada. Los estudiantes deben sobreponer el sentido común a la operatividad, deben aprender a razonar acerca del resultado que han encontrado, verificar si se adecua a los datos o si se requiere un nuevo análisis, es decir, investigar más datos y/o tomar en cuenta otros que no se habían considerado.

Es importante que los profesores de matemáticas y los investigadores en educación matemática mantengan un interés por aumentar su comprensión de la matemática que enseñan y estudian. Los resultados encontrados nos permiten concluir que aun cuando se ha terminado una carrera, las oportunidades que se han tenido para reflexionar acerca del conocimiento matemático son pocas, entonces, es recomendable que los profesores tengan acceso a procesos de formación donde se les enfrente con problemas que los hagan reflexionar sobre temas relacionados con la comprensión y les permitan darle sentido a los conceptos y procesos matemáticos, todo esto con el fin de que impacte en una mejor comunicación del conocimiento matemático a sus estudiantes.

Respecto a los aspirantes a estudiar la maestría en Educación Matemática, la institución tiene la tarea de que sus estudiantes mejoren su comprensión de las matemáticas con las que trabajarán, incluso de manera más profunda que los profesores, para que puedan diseñar actividades de investigación que tengan un impacto en la enseñanza y aprendizaje con comprensión de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aspinwall, L., Shaw, K. L. & Presmeg N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 301-317.

Ball, D. & McDiarmid, G. (1989). *The subject matter preparation of teachers*. Recuperado de http://education.msu.edu/NCRTL/PDFs/NCRTL/IssuePapers/ip894.pdf

Selden, J., Mason, A. & Selden, A. (1989). Can average calculus students solve nonroutine problems? *Journal of mathematical behavior*, 8, 45-50.

Carpenter, P. T. & Lehrer R. (1999). *Teaching and learning mathematics with understanding*. En E. Fenemma & T.A. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding, Mahwah (pp.19-32), NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Díaz, M. (2011). *La comprensión de la derivada y sus significados. Un estudio con profesores de bachillerato.* (Tesis de doctorado). CINVESTAV-IPN: México.

Dewey, J. (1910). *How we think*. Boston: Heath.

Hiebert, J. & Carpenter T. (1992). *Learning and teaching with understanding, en D. A. Grows (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97), New York: Macmillan Publishing.

Hiebert J., Carpenter P. T., Fennema, E., Fuson, K. (1997). *Making sense. Teaching and learning with understanding*, USA: Heinemann.

Moreno, S. & Cuevas, C. A. (2004). Interpretaciones erroneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Educación matemática,* Vol. 16 (Núm 002), 93-104.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standars for schools mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Rivera, F. A., García, M. R., & Díaz, C. M. (2013). *Comprensión de los significados de la derivada: un estudio con profesores de bachillerato y una propuesta didáctica en ambientes virtuales*. En T. Rojano (Ed), Las tecnologias digitales en la enseñanza de las matemáticas. México: Trillas.

Rivera-Figueroa A. & Ponce-Campuzano J. C. (2012). Derivative, maxima and minima in a graphical context. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*; doi: 10.1080/0020739X.2012.690896

Rivera, A. (2007). *Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias*. México: Patria.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114-145.

Stewart, J. (1999). *Cálculo*. *Conceptos y contextos* (Joaquín Ramos Santalla, trad.). México: International Thopson editores.

Tsamir, P. & Ovodenko R. (2004). *Prospective teacher´s images and definitios: the case of inflection points*. En M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28^{th} Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 337-344. Norway:PME.

Tsamir, P. & Ovodenko R. (2004). University student´s grasp of inflection points. Educational Studies in Mathematics, 38(3), 409-427. Doi:10.1007/s10649-012-9463-1

APÉNDICE A

CUESTIONARIO

1. Diga si una función f puede tener un punto crítico donde no alcance un valor máximo o un valor mínimo.
2. Si f es una función definida en un intervalo $I=(a,b)$ que tiene un punto crítico c ∈ I ¿qué podemos decir de f(c)?
3. Si f es una función definida en un intervalo $I=[a,b]$ que tiene un valor máximo o un valor mínimo en un punto c ∈ I donde es derivable ¿qué podemos decir de f´(c)?
4. Si c es un punto crítico de una función f en donde la función no alcanza su valor máximo ni mínimo ¿qué podemos decir de la función f en el punto c?
5. ¿Puede una función f tener un punto de inflexión en un punto c donde la derivada no sea cero?
6. Si una función f definida y derivable en un intervalo $I = (a, b)$ tiene un máximo en un punto c ∈ I ¿es cierto que entonces $f'(x) > 0$ para x cercanas y a la izquierda de c y $f'(x) < 0$ para x cercanas y a la derecha de c?
7. Si una función f definida en un intervalo abierto I tiene un valor máximo en un punto c ∈ I, en el cual existe f´´(c) ¿es cierto que $f''(c) > 0$?
8. Para calcular los valores máximo y mínimo de una función ¿cuál criterio prefiere utilizar? el de la primera derivada o el de la segunda derivada.

   Explique por qué.

9. Si su criterio favorito es el de la segunda derivada ¿qué razones tiene para no aplicar el criterio de la primera derivada?
10. Si para una función dada, puede aplicar el criterio de la primera derivada ¿por qué acudir al criterio de la segunda derivada?
11. Dada una función f ¿en qué casos no es posible aplicar el criterio de la segunda derivada?