CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

UNA PROBLEMATIZACIÓN DEL CONCEPTO DE TOPOLOGÍA EN LOS INICIOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS ABSTRACTOS DE FRÉCHET

TESIS

que presenta

Gabriela Márquez García

para obtener el Grado de

Maestra en Ciencias

En la especialidad de Matemática Educativa

Directora de la tesis

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Ciudad de México febrero, 2018

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado para estudiar la maestría, de la cual es producto este trabajo.

Gabriela Márquez García

Becario No. 5913

AGRADECIMIENTOS

Antes que nada, agradezco a Dios y a los buenos seres que me han dado la fuerza, la sabiduría y la protección para estar bien, superar obstáculos y así alcanzar esta meta.

Agradezco a mis papás, Consuelo y Carlos, por el apoyo incondicional que me han brindado, para que yo pueda cumplir mis sueños. Gracias a mi hermanita Fernanda por ser el motor de mi vida. Gracias a mí hermana Tati y a mi cuñado Ernesto, por el apoyo, sobre todo por estar pendiente de la familia en mi ausencia. Gracias a mi sobrinita Itatí por existir. Gracias familia, porque sin ustedes no sería quién soy. Los amo.

Agradezco a mi prima Lupita, porque siempre ha estado pendiente de mí, por su interés en lo que hice en la maestría, por escucharme hablar de topología, gracias por estar siempre ahí prima chula. Gracias a mis tí@s, a mi abuelita Carmita, que sé que siempre preguntan por mí, que siempre están pendiente.

Gracias a mis primitas, mis niñas que siempre me reciben con la sonrisa y abrazo más sincero y desinteresado del mundo, Briana, Jania, Adelita, Fátima y a su hermanito Fabricio. Gracias por quererme y dejarse querer por mí.

Porque los amigos son la familia que uno elige, gracias enormes a mi hermana Verónica y a mi hermano Didier, gracias a este par de personitas que siempre han estado ahí para mí, para levantarme el ánimo, para regañarme, para hacerme sonreír con sus locuras, por la paciencia que me han tenido cuando no les contesto, sobre todo por su amor, gracias.

Gracias a mi amigo Edgar Alejandro, por las pláticas, por su tiempo, gracias choquito por ayudarme en parte de la traducción de la tesis de Fréchet.

Gracias mis amig@s del Cinvestav, Zule, Susa, Rodolfo, Crista, Cristian, Fabián, Naty, Uzziel, Kristel, Gerardo y Johnny, por darme una hermosa familia, por los momentos compartidos, por las risas, los llantos, los pleitos, las alegrías, por los diálogos académicos, por escucharme y por su apoyo para la elaboración de este trabajo.

Gracias a Zule, Crista, Rodo y Cristian por tolerarle, por enseñarme a ser una mejor persona, por consentirme en el festejo de mis cumpleaños, por ser hermanas y hermanos.

Gracias a Miguel por la compañía en el momento de escritura de la tesis, gracias caleñito por ser quién eres.

Gracias a mis compañer@s y amig@s del seminario de grupo de la Dra. Gisela por los debates académicos, por enseñarme tanto de la disciplina, gracias por su apoyo en esta investigación.

Gracias a las personas que permitieron la existencia de "estatopo", gracias por guiarme y por el apoyo dado en aquel seminario, Angélica, Mayra, Zuleyma, Susana, Daniela, Dr. Ricardo, Rodolfo y Cristian.

Gracias a mis amig@s de la academia de salsa, igual por darme la familia bailadora que son, por todo el apoyo y todas las enseñanzas que me dieron en el último año, Gerardo, Germán, Arturo, Maricela, Fany, Marce, Luisa y Javier.

Agradezco a mis profesores de seminario por todas las enseñanzas y aprendizajes, Dra. Rosa María, Dra. Claudia, Dra. Gisela y Dr. Ricardo.

Agradezco a Jadde Desfassiaux, Adriana Parra y Susana Gómez por el apoyo que siempre nos brindan para la búsqueda de bibliografía y la realización de trámites; gracias por su dedicación y entrega.

Agradezco a mis sinodales por la lectura del trabajo, Dr. Rosa María y Dr. Ricardo.

Agradezco al Dr. Luis Carlos Arboleda, por su interés en mi trabajo, por responder a todas mis dudas sobre Fréchet y la historia de la Topología, por la lectura de la tesis, por sus recomendaciones para la mejora de este trabajo, por su tiempo, gracias.

Agradezco al Dr. Ricardo Cantoral, por sus consejos personales y académicos, por guiarme en gran parte de mi investigación, por su interés en mi trabajo, por las oportunidades, por su cariño, por su calidad humana.

Agradezco a la Dra. Gisela Montiel, por darme la oportunidad y el apoyo para realizar este trabajo, gracias por guiarme, por apoyarme en mis locuras, por sus consejos, enseñanzas y sobre todo gracias por la paciencia y confianza.

Gracias a tod@s por ser parte de alguno de mis "espacios topológicos"

Gabriela Márquez García

INDICE

RESUMEN

En esta investigación, estudiamos los usos e ideas germinales del concepto de topología en la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet, con el objetivo de atender la ausencia de significado que identificamos en la matemática escolar universitaria. Nos dimos a la tarea de hacer una problematización de tal concepto, historizándolo y dialectizándolo en el marco de la Teoría Socioepistemologica de la Matemática Educativa.

Se llevó a cabo un estudio histórico de la época en la que Maurice Fréchet produjo su tesis doctoral, además de un análisis de la actividad matemática de este matemático en la construcción de su teoría general.

Del análisis de la obra, se evidencia el *uso* del concepto de topología, como una *estructura* que define una relación de proximidad entre los elementos de un conjunto, que exige el abandono de la naturaleza de los elementos considerados. Reconocemos que la *práctica* de garantizar que *algo tiende a algo* demanda del establecimiento de una *relación de proximidad*.

Con base en el estudio contextual y el análisis de la obra, caracterizamos la relación de proximidad como una *propiedad de referencia* que determina la cercanía entre los elementos de un conjunto de naturaleza cualquiera, y con esto, garantizar que algo tiende a algo.

Finalmente, proponemos a la *naturaleza topológica* como una característica de los conceptos basados en conjuntos, que depende del establecimiento de una relación de proximidad y, además, es independiente la naturaleza de los elementos considerados.

ABSTRACT

In this research, we studied the germinal uses and ideas of the concept of topology in the doctoral thesis of the French mathematician Maurice Fréchet, with the aim of addressing the lack of meaning that we identify in university school mathematics. We took the task of problematizing such a concept, historizing and dialectizing it within the Socioepistemological Theory of Educational Mathematics framework.

A historical study of the time in which Maurice Fréchet produced his doctoral thesis was carried out, as well as an analysis of the mathematical activity of this mathematician in the construction of his general theory.

From the analysis of the work, the *use* of the concept of topology are evidenced, such as a *structure* that defines a relationship of proximity between the elements of a set, which requires the abandonment of the nature of the elements considered. We recognize that the *practice* of ensuring that *something tends to something* demands the establishment of a *relationship of proximity*.

Based on contextual study and the analysis of the work, we characterize the relationship of proximity as a *reference property* that determines the closeness between the elements of a set of any nature, and with this, guarantee that something tends to something.

Finally, we propose the *topological nature* as a characteristic of group-based concepts, which depends on the establishment of a relationship of proximity and, moreover, is independent of the nature of the elements considered.

INTRODUCCIÓN

Este documento es producto de una investigación que nace a partir de mis inquietudes sobre el entendimiento de la materia de Topología General que cursé durante mis estudios de la Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Las inquietudes eran fundamentalmente sobre el significado del contenido de dicha materia, estas inquietudes me guiaron a hacerme cuestionamientos relativos a, por ejemplo, ¿qué es Topología?, ¿qué caracteriza a la Topología de las otras ramas de la Matemática?, ¿cuál es el objeto de estudio de la Topología?, estás preguntas fueron influenciadas por mi interés en hacer investigación en Matemática Educativa, particularmente de mi conocimiento del enfoque de prácticas de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

Además, la TSME afirma que el conocimiento matemático aún aquel considerado avanzado tiene un origen y una función social, basado en prácticas humanas, es por ello que consideramos la pertinencia de un estudio como el que se presenta en esta tesis.

La investigación reportada en este documento se realizó con el apoyo de un grupo de jóvenes y talentosos investigadores en formación, junto con dos investigadores consolidados del departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, todos estudiosos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, pero ninguno especialista en Topología o temas a fines, esto me angustiaba porque creí que no iba a tener con quién discutir las cuestiones matemáticas de mi investigación, en la misma situación se encontró un colega interesado en estudiar temas Estocásticos. Ante esta situación, nos encontramos afortunados de contar con el grupo de personas descrito al inicio de este párrafo, con quiénes nos reuníamos a discutir los temas de nuestro interés (Topología y Estocásticos) los viernes, a veces, cada semana o cada dos semanas durante aproximadamente un semestre en un seminario que llamamos "*estatopo*",

"*Estatopo*" jugó un papel fundamental para entender y configurar la problemática y planteamiento de esta investigación, ya que con todo lo que se discutió sobre mi investigación en tal seminario, se reconoció a la *relación de proximidad* como algo fundamental para darle significado al concepto de topología.

La Topología es reconocida por algunos historiadores como una de las ramas más jóvenes de las Matemáticas, cuyo origen no se encuentra en un momento específico de la historia, sino que se fue configurando en distintos momentos del desarrollo de las Matemáticas. En otras palabras, no todos los conceptos y resultados que configuran la Topología nacen en una misma época, ni su origen se encuentra en el mismo contexto, ni bajo los mismos intereses matemáticos.

El interés de esta investigación está en entender de qué manera *la relación de proximidad* proporciona significado al concepto de topología, específicamente. Dado que estaremos hablando de Topología como rama de la Matemática y topología como concepto matemático, haremos diferencia entre ambas palabras, escribiendo con inicial mayúscula la palabra Topología cuando hablemos de la rama de las Matemáticas y con inicial minúscula cuando hablemos del concepto.

En el capítulo uno, comparto la motivación con la que inicié esta investigación, los antecedentes tomados en cuenta para la investigación, el planteamiento del problema junto con las preguntas de investigación.

En el capítulo dos, elementos teóricos y metodológicos; se describen los principios del enfoque teórico usado: Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, así como la descripción de las decisiones metodológicas que se tomaron para el desarrollo de la investigación.

En el capítulo tres, se presenta la tesis doctoral de Maurice Fréchet que es la obra estudiada en esta investigación, mediante una descripción de la estructura de la obra y algunas definiciones. En el capítulo cuatro, se muestra la historización y la dialectización como parte de la problematización del concepto de topología.

En el capítulo cinco, se muestra la discusión de las acciones y actividades identificadas en el análisis de la obra que nos permiten explicar la construcción social del concepto de topología en la tesis de Fréchet, solo los primeros dos niveles del modelo de anidación de prácticas.

Por último, en el capítulo seis se da respuesta a las preguntas de investigación, así como las reflexiones que surgen de la investigación realizada.

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA

Motivación

En la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, se estudian materias como Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Vectorial I y II, Análisis Matemático, Ecuaciones Diferenciales, Álgebra Elemental, Álgebra Lineal, Probabilidad, Estadística, Teoría de Números, Teoría de Grupos, Análisis Numérico, Topología General, Teoría de Conjuntos, entre otras.

Desde mi experiencia como estudiante de dicha licenciatura, cuando cursas las materias aparentemente no hay relación alguna entre cada una de ellas, y no importa si las hay. Algunos profesores sí se interesan en marcar relaciones entre algunas (las más evidentes), por ejemplo, Cálculo, Análisis Matemático y Topología, señalando al Análisis Matemático como una generalización del Cálculo y, a la Topología como una generalización del Análisis Matemático, sin embargo, no se llega a tratar en qué sentido se da esa generalización.

La Topología se presentaba como una materia aislada al resto, como Ecuaciones Diferenciales y Probabilidad, al menos para los estudiantes de dicha licenciatura. Además, la Topología, en el plan de estudio 2010, es una materia optativa y, en consecuencia, no todos los estudiantes la cursan, ya sea porque optan por el área de Matemáticas Aplicadas o porque los estudiantes consideran la materia muy difícil.

Como estudiante de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, comencé a reflexionar sobre la experiencia relatada en el párrafo anterior, particularmente en la relación de la Topología con otras ramas de las Matemáticas, porque esta fue una de las materias que más me gustó. Aunque se me dificultó entenderla, había algo en ésta que me atrapaba, que me intrigaba, pero no sabía por qué; lo que me llevó a cuestionar: ¿qué es Topología?, ¿por qué era una materia a la que la mayoría le tenía miedo?, ¿por qué no está relacionada con las materias de Matemáticas Aplicadas? Personalmente, quería entender la Topología, ya con una mirada desde la Matemática Educativa, particularmente desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME).

La TSME, la conocí en la materia de Didáctica de la Matemática en la licenciatura y, posteriormente, conocí un poco más de esta teoría en la primera estancia de verano científico que llevé a cabo con la Dra. Gisela Montiel Espinosa (directora de este trabajo). Con la actividad que realicé en esta estancia, entendí que la TSME no juzgaba si la actividad matemática que alguien hacía estaba bien o mal, sino que su interés está en entender lo que se hizo y por qué se hizo lo que se hizo; esto me agradó en gran medida, pues en ese tiempo era estudiante de la Licenciatura en Matemáticas, que es un contexto en el que generalmente sí se juzga sí lo que se hizo es correcto o incorrecto, pues se considera que las Matemáticas están terminadas, que es algo incuestionable, sin embargo, mi espíritu rebelde vio en la TSME una manera de cuestionar toda la Matemática que había visto en la universidad, y con esto un camino distinto para entender un poco más allá de lo superficial que se podía aprender en la escuela. Con esto reconocí que compartía que mis pensamientos e inquietudes lo compartían un grupo de investigadores desde el enfoque de la TSME

Estas experiencias despertaron mi interés en entender la Topología, como mencioné anteriormente fue una de las materias que más me gustó a la vez que me intrigaba demasiado, porque sinceramente, aunque aprobé dos cursos de Topología, no entendía lo que era Topología; aunque sí “entendía” (desde la Matemática Escolar) las definiciones, teoremas, propiedades, etc., para hacer las demostraciones que desde mi punto de vista son hermosas, es decir, no entendía cuál era el objeto de estudio (la esencia) de esta área de las Matemáticas.

A partir de lo anterior decidí realizar mi investigación de maestría enfocada en Topología, por lo que comencé a introducirme al “mundo” de la Topología, mediante algunos libros de texto, en particular (Hinrichsen y Fernández, 1977) y (Pérez, 2015). Seleccioné estos libros para iniciar, porque son libros que escriben profesores de Topología pensando en sus estudiantes, a este tipo de libros los reconozco como libros con intencionalidad didáctica.

Antecedentes

Pérez (2015) menciona que el objeto de estudio de la Topología es la continuidad, además que la convergencia es otra de las propiedades naturalmente topológicas y es ésta una de las primeras caracterizaciones de la continuidad a la que se recurre en el trayecto de aprendizaje matemático. Esto nos motivó a pensar en la posibilidad de estudiar los conceptos de *continuidad* y *convergencia* en Topología, considerando que este estudio podría proporcionar algunas “herramientas” de significación de estos conceptos, además entender de qué manera el uso de estos conceptos matemáticos contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático.

Por otra parte, Hinrichsen y Fernández (1977) comentan que los conceptos de convergencia y continuidad son *independientes* de la métrica, lo que propicia su generalización a espacios topológicos. Con esto vimos un vínculo entre las definiciones de continuidad y convergencia en Análisis Matemático y en Topología. En esto encontramos necesario entender en qué sentido se presenta dicha *independencia,* y cómo el reconocimiento de éstas interviene en la constitución del concepto de espacio topológico.

Observamos que, posiblemente, los conceptos de continuidad y convergencia son *independientes* de la métrica, porque estos conceptos se definen en términos de una noción de *proximidad*, que no necesariamente significa distancia (Pérez, 2015). Es decir, no es necesario tener una métrica para hablar de *proximidad.* Entonces, nos cuestionamos: ¿cuándo y cómo hablamos de *proximidad* en Matemáticas?

Encontramos que la Topología de Conjuntos se ocupa del estudio de los espacios abstractos (Freixenet, 1994), es decir, conjuntos en los que la naturaleza de sus elementos es homogénea, pero cualquiera (Arboleda, 2012), entre los que se establecen ciertas *relaciones de proximidad*. Entonces, vislumbramos que la *relación de proximidad* permite *la generalización* de los conceptos de convergencia y continuidad a los espacios topológicos.

Es común escuchar, en conferencias o platicas informales, que se afirme que el objeto de estudio de la Topología son las propiedades que se mantienen invariantes bajo transformaciones continuas, seguido del ya típico ejemplo de “la taza y la dona” que se enuncia a continuación: “*los topólogos consideran que una taza y una dona (toro) son iguales topológicamente, pues se puede transformar una en la otra y viceversa de tal manera que no hay rupturas, conservan ciertas propiedades como el número de hoyos*” (Fig. 1) (Ramírez, 2012)

Por ejemplo podemos transformar una taza de café en una rosquilla y viceversa.

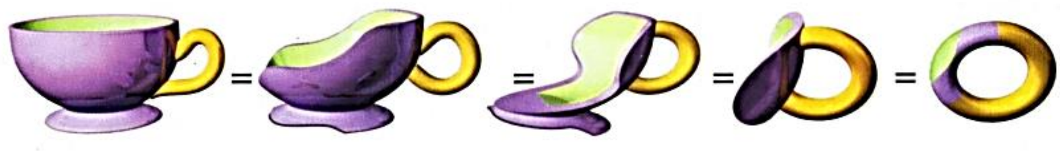

Fig. 1 Transformación taza-toro

Particularmente, (Stadler, 2002) menciona:

> "De manera informal, la Topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. La transformación permitida presupone, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder *puntos próximos* a *puntos próximos*. Esta última propiedad se llama *continuidad*, y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas: así, trabajamos con *homeomorfismos".* (p. 1)

Observamos que esta autora asume de manera informal que el objeto de estudio de la Topología son las propiedades de las figuras que se mantienen invariantes bajo cierto tipo de transformaciones (homeomorfismos) tales que, se correspondan *puntos próximos* a *puntos próximos* (continuidad) y que su inversa también sea continua, es decir, que esta transformación continua se pueda realizar "de ida y vuelta" (biyectividad); la biyectividad y continuidad son las propiedades que definen un homeomorfismo, nuestra atención se centrará en la propiedad de continuidad ya que es donde reconocemos que la noción de *proximidad* juega un papel fundamental.

Por su parte, (Wilder, 1962) quién considera a la Topología como parte de la Geometría, indica que:

> Now in topology we speak not of congruent figures, but of *homeomorphic* figures. For the basic equivalence in topology, the analogue of congruence, is *homeomorphism*. Two figures F_0 and F_1 are homeomorphic if there exists a (1-

> 1) correspondence between the points of F_0 and the points of F_1 which *preserves limits*. Of course, this is not very revealing if we do not know what is meant by "preserving limits." And in explaining this, we really hit bedrock!
>
> By "limits" we really refer to "limit points," and we say a point p is a limit point of a set A of points if there are points of A (different from p)[8] arbitrarily near to p. (p. 465)

Notamos que Wilder también considera fundamental el concepto de *homeomorfismo* para el desarrollo de la Topología, puesto que afirma que el objeto de estudio de la Topología son los invariantes de homeomorfismos de espacios; además describe al homeomorfismo mediante la idea de *preservación de límites*, en la que reconocemos inmersa la idea de *proximidad*.

A partir de todo lo anterior, decidimos enfocar la investigación en el estudio de la noción de *relación de proximidad*, pues la encontramos fundamental para "entender" los conceptos de naturaleza topológica (invariantes topológicas).

Freixenet (1994) menciona que no se puede hablar de espacio topológico hasta que no se establezcan *las oportunas relaciones de proximidad*, así mismo Pérez (2015) considera que la relación de proximidad es la que proporciona estructura topológica; en consecuencia entendemos que en un espacio topológico, la topología define matemáticamente una relación de proximidad.

Entonces, respecto a la pregunta: ¿cuándo y cómo hablamos de *proximidad* en Matemáticas sin una métrica?, que nos hicimos anteriormente, observamos que es en Topología que se encuentra inmersa la idea de proximidad bajo el concepto de topología que define, de alguna manera, una relación de proximidad entre los elementos de un conjunto, que además es independiente del concepto de métrica.

En la disciplina

En otro orden de ideas, encontramos que (Gómez, 2009) hace un estudio metacognitivo del proceso de elaboración de significados del concepto de topología, donde observa que el estudio de libros de textos especializados no es suficiente para la elaboración de significados de este concepto, puesto que los libros no muestran los aspectos que permitieron la construcción del concepto matemático en cuestión, en este caso, espacio topológico.

Por otro lado, Cantoral, (2013) afirma que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas y normadas. Entendemos con esto, que los conceptos matemáticos, de áreas especializadas de las Matemática como la Topología, contribuyen de alguna manera al desarrollo del Pensamiento Matemático.

En este sentido, la construcción de significado de los objetos matemáticos sigue siendo importante aún en los objetos matemáticos de la matemática superior. consideramos la pertinencia de estudios desde la Matemática Educativa, de conceptos de la matemática universitaria, que es considerada avanzada y especializada, como la Topología.

¿Relación de proximidad en la escuela?

Dado que reconocimos la noción de *relación de proximidad* como parte esencial de la Topología específicamente del concepto de topología; revisamos la definición de este concepto en algunos libros de Topología (Munkres, 1975; Dugundji, 1966; Kelley, 1955 y Morris, 2010). Con tal revisión intentamos identificar de qué manera está la *relación de proximidad* en la definición de topología, que se presenta en cada uno de estos libros.

Para la selección de los libros de Topología antes mencionados, nos basamos en, que los primeros tres libros son de los más populares en la comunidad de estudiantes de matemáticas y los encontramos en programa de la materia de Topología 1 de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco y de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, y agregamos el de Morris que por el título de Topología sin dolor consideramos podríamos encontrar de manera interesante la idea que buscamos.

Munkres, 1975 (p. 76)	**Definition.** A *topology* on a set X is a collection $\mathcal{T}$ of subsets of X having the following properties: (1) $\varnothing$ and X are in $\mathcal{T}$. (2) The union of the elements of any subcollection of $\mathcal{T}$ is in $\mathcal{T}$. (3) The intersection of the elements of any finite subcollection of $\mathcal{T}$ is in $\mathcal{T}$. A set X for which a topology $\mathcal{T}$ has been specified is called a ***topological space***. Properly speaking, a topological space is an ordered pair $(X, \mathcal{T})$ consisting of a set X and a topology $\mathcal{T}$ on X, but we often omit specific mention of $\mathcal{T}$ if no confusion will arise. If X is a topological space with topology $\mathcal{T}$, we say that a subset U of X is an ***open set*** of X if U belongs to the collection $\mathcal{T}$. Using this terminology, one can say that a topological space is a set X together with a collection of subsets of X, called *open sets*, such that $\varnothing$ and X are both open, and such that arbitrary unions and finite intersections of open sets are open.
Dugundji, 1966 (p. 62)	**1. Topological Spaces** **1.1 Definition** Let X be a set. A topology (or topological structure) in X is a family $\mathscr{T}$ of subsets of X that satisfies: (1). Each union of members of $\mathscr{T}$ is also a member of $\mathscr{T}$. (2). Each *finite* intersection of members of $\mathscr{T}$ is also a member of $\mathscr{T}$. (3). $\varnothing$ and X are members of $\mathscr{T}$. **1.2 Definition** A couple $(X, \mathscr{T})$ consisting of a set X and a topology $\mathscr{T}$ in X is called a *topological space*.
Kelley, 1955 (p. 37)	*TOPOLOGIES AND NEIGHBORHOODS* A **topology** is a family $\mathfrak{J}$ of sets which satisfies the two conditions: the intersection of any two members of $\mathfrak{J}$ is a member of $\mathfrak{J}$, and the union of the members of each subfamily of $\mathfrak{J}$ is a member of $\mathfrak{J}$. The set $X = \bigcup\{U: U \in \mathfrak{J}\}$ is necessarily a member of $\mathfrak{J}$ because $\mathfrak{J}$ is a subfamily of itself, and every member of $\mathfrak{J}$ is a subset of X. The set X is called the **space** of the topology $\mathfrak{J}$ and $\mathfrak{J}$ is a **topology for** X. The pair $(X,\mathfrak{J})$ is a **topological space.** When no confusion seems possible we may forget to mention the topology and write "X is a topological space." We shall be explicit in cases where precision is necessary (for example if we are considering two different topologies for the same set X).
Morris, 2010 (p. 13)	**1.1.1 Definiciones.** Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X se dice que es una **topología** sobre X si (i) X y el conjunto vacío, Ø, pertenecen a $\mathcal{T}$, (ii) la unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos en $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$, y (iii) la intersección de dos conjuntos cualesquiera de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$. El par $(X, \mathcal{T})$ se llama **espacio topológico**.

De estas definiciones reconocemos que:

- En cada definición los autores consideran un conjunto “X cualquiera” haciendo referencia a un conjunto cuyos elementos son de *naturaleza cualquiera* (Arboleda, 2012; Pérez, 2015).
- Introducen un conjunto o familia de conjuntos, al que se le conoce como topología “la familia $\tau \subset 2^{x}$ es topología”, notamos que en las definiciones se reconoce a τ como colección o familia, aclarando que sus elementos son subconjuntos del conjunto X.
- Enuncian las condiciones para que τ sea una topología.
    1. $\emptyset \in \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\tau}$.
    2. Si $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{entonces}\ \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{V} \in \boldsymbol{\tau}$
    3. Si $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{entonces} \cup \boldsymbol{W} \in \boldsymbol{\tau}$
- Después definen al espacio topológico como la pareja (X, τ), es decir, el conjunto dado X es un espacio topológico cuando le agregan una topología τ.
- Enseguida de la definición de espacio topológico, mencionan que los elementos de τ se les llama conjuntos abiertos del conjunto X.

Planteamiento del problema

Sobre la relación de proximidad

Hemos visto que el concepto matemático de topología define de alguna manera una relación de proximidad en un conjunto cuyos elementos son de naturaleza cualquiera, pero ¿de qué manera se relaciona el concepto de topología con la idea de relación de proximidad?

En la siguiente tabla mostramos una interpretación de la definición de topología, basada en algunas ideas que encontramos en los antecedentes, que consideramos dan cierto sentido a esta definición.

Definición de topología	Interpretación
Sea $\boldsymbol{X}$ cualquier conjunto	Un espacio abstracto es un conjunto cuyos elementos son de naturaleza cualquiera
la familia $\boldsymbol{\tau} \subset \boldsymbol{2^{X}}$ es topología si cumple: 1. $\emptyset \in \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\tau}$ 2. Si $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \boldsymbol{\tau}$ entonces $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{V} \in \boldsymbol{\tau}$ 3. Si $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{\tau}$ entonces $\cup \boldsymbol{W} \in \boldsymbol{\tau}$	Establecimiento de una oportuna *relación de proximidad*.

Tabla 1Interpretación de una definición de topología. Elaboración propia.

Encontramos consistencia entre la frase "Sea $\boldsymbol{X}$ cualquier conjunto" de la definición de topología y entre la idea de que se consideran elementos de naturaleza cualquiera, ya que al considerar un conjunto cualquiera hace alusión que puede ser un conjunto de elementos cualesquiera (números, funciones, matrices, etc.). Sin embargo, no entendemos de qué manera se relacionan las tres propiedades del concepto de topología y el establecimiento de una relación de proximidad, en este sentido no encontramos alguna relación explícita entre las tres propiedades que definen una topología y el establecimiento de una relación de proximidad.

Sobre la naturaleza topológica

Algunos autores afirman que los conceptos de punto interior y punto frontera (Freixenet, 1994), continuidad y convergencia (Pérez, 2015) son de *naturaleza topológica*, entonces nos interesamos en entender esa *naturaleza topológica* a la que hacen referencia estos autores, es decir, la características de estos conceptos.

Por otro lado, Espinoza y Cantoral (2010) afirman que el resultado del teorema de aproximación de Weierstrass fue la descripción de la *naturaleza topológica* del espacio de funciones continuas considerado. Sin embargo, en una comunicación personal, el Dr. Lianggi Espinoza en diciembre de 2016, nos comenta que él reconoce la *naturaleza topológica* en lo que hace Weierstrass en el sentido que, para hacer lo que hace ya no se fija en un solo elemento del espacio sino en todo el espacio, es decir, ya no es la función sino el espacio (Espinoza, 2009).

En este sentido, nos cuestionamos: ¿qué relación hay entre la afirmación de Espinoza sobre *la naturaleza topológica* y *la relación de proximidad*?

En la bibliografía revisada, no encontramos alguna explicación a esto, por eso consideramos las siguientes preguntas de investigación:

- **¿Qué papel juega la relación de proximidad en la constitución de la topología como saber matemático?**
- **¿A qué nos referimos con naturaleza topológica?**

CAPÍTULO 2. CONSIDERACIONES TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS

Elementos teóricos y metodológicos

En la descripción de la problemática reconocemos como *problema la falta de significado* del concepto de topología en la matemática escolar, en otras palabras, no encontramos algún uso del concepto de topología que permita significarlo con la relación de proximidad. Este concepto, como hemos visto, forma parte de la Matemática avanzada. Ambas consideraciones, se pueden atender bajo el enfoque de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME).

La TSME se encarga fundamentalmente del problema del significado de los conceptos matemáticos y asume que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas y normadas (Cantoral, 2013). Este enfoque teórico se encarga de explicar la construcción del conocimiento basado en prácticas, en otras palabras, acepta la existencia de prácticas que acompañan esta construcción del saber matemático y por eso es el estatus de construcción social

En este sentido, consideramos la posibilidad de reconocer la razón de ser y lo que le da sentido al concepto de *topología*, al respecto Espinoza (2009) afirma que, por los procesos de transposición, en conjunto con la corriente de formalización, estas cuestiones se esconden en la historia; en consecuencia iniciamos un estudio de corte histórico en la dimensión epistemológica (Montiel y Buendía, 2012) del concepto de topología.

En este mismo orden de ideas, (Espinoza, 2009; Tuyub y Cantoral, 2012 y Cantoral, 2013) mencionan que una pregunta fundamental de la TSME es: ¿existe una manera de pensar matemáticamente que pueda ser difundida socialmente?, vemos que esta pregunta relaciona el pensamiento individual con el pensamiento difundido socialmente, independientemente si se trata de un pensamiento matemático básico o avanzado.

Este cuestionamiento requiere de asumir a la Matemática como parte de la cultura humana, esto es, reconocer distintas formas de pensar y usar la Matemática según el contexto (*racionalidad contextualizada*); para esto debe existir una forma de validar cada forma de pensar y usar la Matemática, es decir, cada racionalidad contextualizada demanda su validación (*relativismo epistemológico*); por esto se reconoce que no hay un único significado o significado universal de cada conocimiento matemático, puesto que cada forma de pensar y usar la matemática implica cierto significado, es decir, el significado depende del uso del conocimiento matemático en cada contexto y como se reconoce una pluralidad de contexto se afirma que, el conocimiento matemático cuando se pone en uso en cada contexto, se vuelve funcional cuando dicho uso tiene una racionalidad, es así que el conocimiento matemático se somete a un proceso de *significación progresiva.* Todo esto a su vez, está *normado por una práctica social*, es decir, hay algo que hace a los individuos hacer lo que hacen.

La normatividad de la práctica social se explica a través del modelo de anidación de prácticas, constructo teórico que le permite a la TSME explicar la construcción social de saber matemático (Cantoral, Montiel, y Reyes-Gasperini, 2015) mediante los niveles de *acción* en el que se muestra la relación directa del sujeto con el medio, la *actividad* que hace referencia al conjunto de acciones que realiza el sujeto con intencionalidad determinada, *la práctica socialmente compartida* que se refiere a lo que hace el sujeto en conjunto con la sociedad y que se configura de acciones compartidas y aceptadas, así la *práctica de referencia* se configura de un conjunto de acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas que en conjunto tienen un fin común y que son realizadas y aceptadas por un conjunto de personas con un objetivo específico pero compartido, por lo que la práctica de referencia, de manera especializada norma la práctica socialmente compartida, a su vez la *práctica social* norma la práctica de referencia, en otras palabras, norma el conjunto de prácticas puestas en juego en la construcción del saber matemático.

Estos principios teóricos (racionalidad contextualizada, relativismo epistemológico, significación progresiva, normatividad de la práctica social) permiten entender la construcción social del saber matemático y su difusión institucional que configuran el objeto de estudio de esta teoría.

Como mencionamos anteriormente, en este trabajo, queremos entender *qué es la naturaleza topológica*, y el papel de la *relación de proximidad* en la constitución del concepto de topología como saber matemático, en otras palabras, queremos entender *los usos* de la *relación de proximidad* en la Matemática (en cierto periodo) antes de configurarse como la definición formal de topología.

La fijación en la *relación de proximidad* y no en el concepto de topología, es por la mirada que tiene esta investigación, que implica una descentración del objeto, es decir, una mirada más amplia (más allá de la matemática escolar y la matemática formal), es reconocer este concepto como una construcción social y entender su naturaleza, en este sentido es entender su naturaleza social, para ello se requiere reconocer *actividad (es) humana* (s) asociadas al uso del concepto de topología en determinado contexto.

Para lograrlo, Cantoral (2013) propone hacer una *problematización* (historización y dialectización) del saber matemático desde una mirada amplia, es decir, descentrándose del objeto, en este caso, asumimos una descentración del concepto de topología al reconocer la *relación de proximidad* como una noción asociada a la *actividad humana* que significa el concepto.

Historizar y dialectizar son mecanismos que propone la TSME para entender la naturaleza social del conocimiento matemático, en este trabajo estos mecanismos los ponemos en juego de la siguiente manera:

Estudiaremos un episodio específico de la historia de la Topología, que nos permitirá identificar un momento determinante para el desarrollo del concepto de topología (*historizar*) de manera que reconozcamos que se ponga en uso este concepto y que nos permita análizar estos usos desde la Socioepistemología (*dialectizar*). Estos mecanismos nos permitirán caracterizar de alguna manera la relación de proximidad, y en consecuencia significar el concepto de topología, además podremos dar una caracterización de la naturaleza topológica de los conceptos matemáticos.

En esta investigación entendemos la dialectización como el proceso de “diálogo” con la obra, es decir, el análisis de la actividad matemática. Vamos a entender dialectización como el análisis de los usos de la métrica en la tesis de Fréchet. Se reconoce que el trabajo matemático de Fréchet dio pautas a la constitución del concepto de topología, así como al de espacio topológico, sin embargo, su tesis no es de Topología, sus intereses están puestos en el desarrollo del Análisis Funcional y de la Teoría de Conjuntos Abstractos, en el que Fréchet define una distancia de manera general (independiente de la naturaleza de los elementos del conjunto). Entonces, son los usos de esa distancia que estudiamos en el desarrollo de la primera parte de sus tesis.

La historización consiste en estudiar cómo se hacía matemáticas en el momento o periodo que se decida estudiar, conocer qué entendía el autor por hacer matemáticas, esto nos permite entender el contexto en el que surge la obra que vamos a analizar, para lograrlo Espinoza (2009) propone un esquema metodológico que se basa en mirar la obra desde tres lentes:

- **Una producción con historia.** Esto es, estudiar al autor en los aspectos, familiar, profesional, académico, para entender la forma de pensar del autor de la obra. Específicamente:
    - su vida personal
    - su familia,
    - su formación
    - episodios relevantes de su vida (profesional, académica, relación con colegas).

Esto de alguna manera requiere conocer el contexto social y político de la época.

- **Un objeto de difusión.** Entender el motivo de la publicación de la obra, ya sea de difusión didáctica o científica. Específicamente:
    - los destinatarios de la obra
    - el tipo de producción
    - las condiciones del medio de difusión y
    - la institución publicadora.
- **Parte de una expresión intelectual más global.** Entender la evolución de las ideas del autor en la totalidad de sus obras y la relación de estas con otras. Específicamente:
    - la obra matemática a estudiar,
    - de manera general las obras más relevantes del autor y
    - estudiamos más a fondo las obras relacionadas con la obra estudiada.

Esta propuesta metodológica de Espinoza nos permite situarnos en el momento en el que se produjo la obra, es decir, nos posibilita un cambio de mirada de la actual a la del momento en el de producción de la obra y con esto, entendemos por qué se escribe como se escribe, se hace lo que se hace, se piensa lo que se piensa.

Sin embargo, esta propuesta no nos dice cómo realizar el análisis específico de la actividad matemática en la obra a estudiar, es por eso por lo que requerimos de un método de análisis que nos permita analizar los usos del conocimiento matemático en la obra a estudiar.

A continuación, describimos la forma en la que analizamos la obra: *Sur Quelques points du Calcul Fonctionnel*. En lo que resta del texto, para referirnos a esta obra diremos la tesis de Fréchet, la obra o la obra estudiada.

1. Primero nos familiarizamos con la obra, esto nos permitió entender la racionalidad con la que se realizó la obra.
   - Lo primero que hicimos fue una traducción al español de la obra original que está en francés, respetando los términos matemáticos de la época.
   - Reconocimos las definiciones, teoremas, lemas, corolarios, y observaciones que enunció el autor de la obra, respetando el orden en el que él las presenta. Estas proposiciones las compartimos en el anexo. Las proposiciones que el autor no enuncia como teorema y que se reconocen como tal se marcan con un asterisco.
   - Identificamos a los matemáticos que cita el autor para identificar de quiénes tomó los casos particulares que generaliza.
   - Identificamos y describimos partes de la obra relacionadas con el objeto de estudio de esta investigación.
2. Hicimos una descripción particular, de las definiciones, teoremas, lemas, corolarios, entre otros. Esta descripción se realiza, reconociendo lo que hace el autor, en el sentido matemático.
3. Identificamos las relaciones de los teoremas con las definiciones, lemas, corolarios, etc., con el objetivo de reconocer definiciones base para la construcción de la actividad matemática en la obra.
4. Seleccionamos las partes de la obra para analizar en la actividad matemática los usos del conocimiento matemático, estas partes las identificamos como unidades de análisis, que comprende el enunciado del teorema y su demostración.

El análisis de cada unidad lo realizamos en dos fases:

Fase 1: Descriptiva.

Esta primera fase se desarrolla en tres partes en las que presentamos una descripción amplia de la unidad de análisis, donde hacemos una descripción general del teorema, desarrollamos (en la medida de lo posible) la demostración de Fréchet, y hacemos observaciones al respecto. Esto lo explicamos con mayor detalle a continuación.

1. Descripción general de la unidad de análisis.

En esta parte describimos la sección de la obra en la que está enunciado el teorema, las notas al pie de página que hace el autor sobre el teorema, y los corolarios, observaciones y/o notas relacionadas con el teorema, según sea el caso. También mostramos la descripción del enunciado que realizamos en la etapa 2 de la familiarización con la obra.

En la demostración del teorema se subraya de rojo la parte de la actividad matemática donde reconocemos algún uso de la métrica, y subrayamos de verde las partes dónde se manifiesta la generalización en el conjunto sobre el que se definen las operaciones funcionales.

2. Observaciones y complementos

En esta sección mostramos la demostración de Fréchet complementada (en la medida de lo posible) por parte de la investigadora en formación (respetando los conceptos y definiciones de esa época), lo cual consiste en un "ejercicio matemático" típico de la escuela, esto es, repensar la demostración y completar las obviedades. Para diferenciar, escribimos en color azul los complementos de la demostración, y en negro la traducción al español de la demostración que hace Fréchet.

También agregamos observaciones de la demostración después del ejercicio mencionado, las observaciones pueden ser generales o puntuales, siempre tratando de enfocarlas a nuestro objeto de estudio.

3. Definiciones y conceptos que utiliza.

En esta sección se muestran las definiciones que requiere el teorema, estas definiciones son las identificadas en la obra estudiada que mostramos en el anexo. Identificamos como conceptos las nociones matemáticas que Fréchet usa en su actividad matemática, pero que no define en su tesis.

Fase 2: Analítica.

En esta fase analizamos de los usos de la métrica mediante los cuestionamientos analíticos: **¿qué hace?, ¿cómo hace?**, **¿para qué hace?**, y **¿por qué hace?**

Estos cuestionamientos los caracterizamos de la siguiente manera:

- **¿Qué hace?** Este cuestionamiento lo respondemos con palabras propias, diciendo el uso de la métrica que hace Fréchet.
- **¿Cómo hace?** Este cuestionamiento pregunta por la manera que se ponen en juego los usos de la métrica, esta pregunta la respondemos con la parte de la demostración realizada por Fréchet donde reconocemos algún uso de la métrica, señalando las definiciones que utiliza.
- **¿Por qué hace?** Con este cuestionamiento identificamos qué de la actividad matemática permite hacer lo que respondimos al primer cuestionamiento. Esta pregunta se responde con los motivos matemáticos que le permiten a Fréchet hacer lo que hace, es decir, qué hace posible el uso de métrica. En este caso son motivos matemáticos puesto que esta es la naturaleza de la obra que se está analizando.
- **¿Para qué hace?** Con este cuestionamiento identificamos el objetivo inmediato en la actividad matemática que requiere del uso de la métrica. Esta pregunta se responde con la parte de la demostración en la que se pone en juego el uso de la métrica (por parte de Fréchet), igual que con el cuestionamiento anterior, la respuesta es matemática, y no necesariamente se responde con lo que quiere demostrar el teorema, es más puntual que eso. Con esto podremos dar cuenta cuál es el objetivo de lo que hace, particularmente cuál es el objetivo de usar la métrica, en otras palabras, cuál es la necesidad de usar la métrica.

CAPÍTULO 3. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA OBRA: *SUR QUELQUES POINTS DU CALCUL FONCTIONNEL*

Descripción general de la obra

La obra elegida es la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet: *Sur Quelques points du Calcul Fonctionnel*.

MEMORIE E COMUNICAZIONI.

SUR QUELQUES POINTS DU CALCUL FONCTIONNEL;

Par M. **Maurice Fréchet** (Paris) *).

Adunanza del 22 aprile 1906.

Fig. 2. Tesis doctoral de Maurice Fréchet

Estructura de la obra

Introduction

Première Partie : introduction de la notion de limite dans les ensembles abstraits

Chapitre I

- *Notions générales sur les ensembles d'éléments d'une classe* (L)
- *Les opérations continues*
- *Les séries d'opérations continues*
- *Les ensembles dérivés*

Chapitre II

- *Définition de la limite par le voisinage*
- *Les classes* (V) *normales*
- *La continuité définie au moyen du voisinage*

Deuxième partie : applications de la théorie générale
Chapitre III

- *Les ensembles linéaires et les fonctions d'une variable*

Chapitre IV

- *Les ensembles de fonctions continues et les fonctionnelles*

Chapitre V

- *Les ensembles et les fonctions de points de l'espace à une infinité dénombrable de dimensions.*
- *Les ensembles de points de l'espace* (E_ω)
- *Applications des théorèmes généraux*
- *Les fonctions d'une suite infinie de variables indépendantes*

Chapitre VI

- *Fonctions holomorphes à l'intérieur d'une même aire*

Chapitre VII

- *Ensembles de courbes continues et fonctions de lignes*
- *Application des théorèmes généraux*
- *Ensembles et fonctions de surface*

Note I : Constructions d'une fonction continue non décroissante qui n'est constante que dans des intervalles donnés

Note II : Sur le calcul effectif de l'écart de deux courbes

Auteurs Cités

- *Collection de Monographie sur la Théorie des fonctions*
- *Articles de M. Arzelà*
- *Divers*

Observamos que Fréchet organiza su tesis en dos partes, en la primera parte desarrolla la parte teórica enfocada en la introducción de la noción de límite en conjunto abstractos, y en la segunda parte trabaja sobre aplicaciones de la teoría que construye en la primera parte. En la primera parte de la obra, observamos que, en el capítulo 1 se ocupa de estudiar la noción de límite en un conjunto de elementos dónde define la convergencia de los elementos al que llama clase (L); en el capítulo 2 se ocupa da estudiar la convergencia en un conjunto de elementos por medio de una vecindad, al que llama clase (V).

A continuación, mostramos la descripción que hace Fréchet sobra la organización de las dos partes de su tesis:

> Il fallait d'abord voir comment transformer les énoncés des théorèmes pour qu'ils conservent un sens dans le cas général. Il fallait ensuite, soit transcrire les démonstrations dans un langage plus général, soit, lorsque cela n'était pas possible, donner des démonstrations nouvelles et plus générales. Il s'est trouvé que les démonstrations que nous avons ainsi obtenues sont souvent aussi simples, et quelquefois même plus simples, que les démonstrations particulières qu'elles remplaçaient. Cela tient sans doute à ce que la position de la question obligeait à ne faire usage que de ses particularités vraiment essentielles. D'ailleurs, nous n'avons eu besoin dans cette PREMIÈRE PARTIE que des notions les plus élémentaires (en dehors de la définition et des propriétés de la puissance d'un ensemble)
>
> Dans la SECONDE PARTIE nous avons appliqué les résultats généraux ainsi obtenus, à diverses catégories d'éléments, chacune d'une nature déterminée. La seule difficulté consistait à montrer que chacune de ces catégories se trouvait répondre aux conditions générales nécessaires pour la validité des théorèmes de la PREMIÈRE PARTIE. Cela fait, il ne restait plus qu'à énoncer ces théorèmes

> dans chaque cas. Nous attirons en particulier l'attention sur la définition que nous avons donnée de « l'écart » de deux courbes, de deux fonctions holomorphes, etc. Il semble que ce soit par ce seul moyen qu'on puisse (en généralisant ainsi la notion d'intervalle) s'affranchir un peu de la considération des ensembles. (Fréchet, 1906, p. 2, 3)

Con esto entendemos que en la primera parte de la tesis desarrolla la teoría matemática y en la segunda parte muestra las aplicaciones de su teoría a casos particulares. Entonces nuestro análisis lo centraremos en la primera parte, ya que el interés de esta investigación es entender el papel que juega la noción de *relación de proximidad* en la constitución del concepto de topología como saber matemático y en el proceso de generalización que realiza Fréchet.

Observamos que la primera parte de la obra consta de dos capítulos, en el primero define y generaliza respecto a una clase de elementos que él llama *clase* (L) en la que define la convergencia, por medio de dos propiedades, esta definición es fundamental para el desarrollo de su actividad matemática en todos los teoremas de este capítulo; pero llega a un momento en el que reconoce que las propiedades asignadas a la definición de convergencia de los elementos de una *clase* (L) no le son suficiente para continuar la generalización de las proposiciones que él ocupaba y da un ejemplo para mostrar esta insuficiencia. En seguida, introduce la definición de *vecindad* para los elementos de una *clase (V)*, a tal clase de elementos le asigna más propiedades que permiten especificar cuestiones de convergencia, además permiten que pueda continuar la generalización que busca.

La primera parte de la tesis, la construye mediante definiciones y proposiciones (teoremas, corolarios, lemas, y observaciones). Cabe aclarar que Fréchet únicamente nombra como tal los teoremas, corolarios y lemas.

Las proposiciones que categorizamos como definiciones, las caracterizamos así tomando en cuenta la manera en la que las anuncia Fréchet, para enunciar estas definiciones comienza con alguna de las siguiente frases o palabras: *considérons, Nous dirons, Nous appellerons, nous l'appellerons, j'appelle, appelons* y, basándonos en la sección 8 donde él enuncia algunas proposiciones a las que llama definiciones. Además, identificamos como conceptos aquellas nociones matemáticas que Fréchet usa en su actividad matemática pero que no define en su tesis.

Las observaciones las reconocemos cuando él hace alguna afirmación u observación de algo que hizo anteriormente, pero que no necesariamente demuestra, en otras palabras, son evidencia de una reflexión de su actividad matemática.

En total reconocimos 37 definiciones, 23 teoremas, 31 observaciones, 5 corolarios, y los 3 lemas que usa para demostrar el teorema 4; que compartimos en el anexo.

De las 37 definiciones, reconocemos algunas como definiciones fundamentales, ya que son las que Fréchet utiliza para desarrollar toda su teoría, es decir, que todas las proposiciones son de alguna manera relaciones entre estas definiciones, con otras que son particulares del capítulo 1 y otras del capítulo 2. Estas definiciones a las que llamamos fundamentales son las definiciones: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, las definiciones de la 4 a la 9 están en la sección 8, y las identifica como definiciones usuales de la teoría de conjuntos de puntos. Estas definiciones son las siguientes:

Def. 1 – Operación funcional

Considérons un ensemble E formé d'éléments quelconques (nombres, points, fonctions, lignes, surfaces, etc.) mais tels qu'on en sache discerner les éléments distincts. A tout élément A de cet ensemble faisons correspondre un nombre déterminé $U(A)$; nous définissons ainsi ce que nous appellerons une *opération fonctionnelle* uniforme dans E. (Fréchet, 1906, p. 4)

Traducción. Considere un conjunto E de elementos cualquiera (números, puntos, funciones, líneas, superficies, etc.) pero tal que se sabe distinguir los elementos distintos. A cualquier elemento A de este conjunto hacemos corresponder un número especifico $U(A)$; definimos lo que llamamos una *operación funcional* uniforme en E. (p. 4)

Def. 4 – Elemento limite

Nous dirons qu'un élément A de la classe (L) est un *élément limite* de E lorsqu'il existe une suite infinie d'éléments de E : $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ qui sont distincts et tendent vers A (p. 6)

Traducción. Decimos que un elemento A de la clase (L) es un *elemento límite* de E cuando existe una sucesión infinita de elementos de E: $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que son distintos y tienden a A.

Def. 5 – Conjunto derivado

Nous appellerons *ensemble dérivé* d'un ensemble E et nous désignerons par la notation E' l'ensemble des éléments limites de E. (p. 6)

Traducción. Llamaremos *conjunto derivado* de un conjunto E y lo denotaremos por E' al conjunto de elementos límites de E. (p. 6)

Def. 6 – Conjunto cerrado

Nous dirons qu'un ensemble est *fermé* lorsqu'il contient son ensemble dérivé. (p. 6)

Traducción. Decimos que un *conjunto es cerrado* cuando contiene a su conjunto derivado. (p. 6)

Def. 7 – Conjunto perfecto

Est *parfait* lorsqu'il coïncide avec son dérivé. (p. 6)

Traducción. Es *perfecto* cuando coincide con su conjunto derivado. (p. 6)

Def. 8 – Elemento interior en sentido estricto

Considérant un ensemble donné H comme ensemble fondamental, nous dirons qu'un élément A d'un ensemble quelconque E, formé d'éléments de H, *est intérieur à E au sens étroit* lorsque A est un élément de E qui n'est limite d'aucune suite d'éléments distincts $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ appartenant à H sans appartenir à E. (p. 6)

Traducción. Considerando un conjunto dado H como conjunto fundamental, decimos que un elemento A de un conjunto cualquiera E, formado de elementos de H, es *interior* de E, *en sentido estricto* cuando A es un elemento de E que no es límite de ninguna sucesión de elementos distintos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que pertenece a H pero no a E. (p. 6)

Def. 9 – Elemento de condensación

Nous appellerons *élément de condensation* d'un ensemble E, un élément limite de E qui est aussi un élément limite de tout ensemble obtenu en supprimant de E une infinité *dénombrable* (II, page 2) d'éléments. (p. 6)

Traducción. Llamaremos *elemento de condensación* de un conjunto E, a un elemento límite de E que también es un elemento límite de todo conjunto que se obtiene eliminando de E una infinidad *numerable* (II, página 2) de elementos. (p. 6)

Def. 10 – Conjunto compacto

Nous dirons qu'un ensemble est *compact* lorsqu'il ne comprend qu'un nombre fini d'éléments ou lorsque toute infinité de ses éléments donne lieu à au moins un élément limite (p. 6)

Traducción. Decimos que un conjunto es *compacto* cuando tiene solamente un número finito de elementos o cuando toda la infinidad de sus elementos da lugar al menos a un elemento límite. (p. 6)

Def. 11 – Conjunto extrémal

Lorsqu'un ensemble est à la fois compact et fermé nous l'appellerons ensemble *extrémal* (p. 6 y 7)

Traducción. Cuando un conjunto es compacto y cerrado le llamaremos conjunto *extrémal*. (p. 6 y 7)

Def. 12 – Operación continua

Nous dirons qu'une opération fonctionnelle V uniforme dans un ensemble E d'éléments d'une classe (L) est continue dans E, si, quel que soit l'élément A de E limite d'une suite d'éléments $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de E, on a toujours :

$$V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n).$$

Traducción. Diremos que una operación funcional V uniforme en un conjunto E de elementos de una clase (L) es continua en E, si cualquier elemento A de E límite de una sucesión de elementos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de E, tenemos: (p. 7) (24)

$$V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n).$$

También identificamos las definiciones de los conjuntos de elementos a los que llama clases, definidas por medio de la convergencia, la vecindad y la distancia, correspondientes con la definición de una clase (L), una clase (V) y una clase (E), respectivamente.

Fréchet da un caso particular de una clase (L), a la que llama una clase (C); respecto a una clase (V) agrega algunas restricciones, cómo una clase (V) que admite una generalización del teorema de Cauchy, una clase (V) separable, una clase (V) *perfecta* y una *clase* (V) *normal*.

A continuación, mostramos dichas definiciones:

Def. 3 – Clase $(\boldsymbol{L})$

Dorénavant, nous nous limiterons donc à l'étude des ensembles tirés d'une classe (L) d'éléments de nature quelconque mais satisfaisant aux conditions suivantes : on sait distinguer si deux éléments de la classe (L) sont distincts ou non. De plus, on a pu donner une définition de la limite d'une suite d'éléments de la classe (L). Nous supposons donc qu'étant choisie au hasard une suite infinie d'éléments (distincts ou non) de la classe (L), on puisse dire d'une façon certaine si cette suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ a ou non une limite A (d'ailleurs unique). Le procédé qui permettra de donner la réponse (autrement dit la définition de la limite) est d'ailleurs absolument quelconque, assujetti seulement à satisfaire aux conditions I et II dont nous avons parlé et qui sont les suivantes :

I) Si chacun des éléments de la suite infinie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ est identique à un même élément A, la suite a certainement une limite qui est A.

II) Si une suite infinie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ a une limite A, toute suite d'éléments de la première suite pris dans le même ordre : $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}, \ldots$. (les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$ iront donc en croissant) a une limite qui est aussi A.(p. 5 y 6)

Traducción. De ahora en adelante, nos limitaremos al estudio de conjuntos extraído de una clase (L) de elementos de naturaleza cualquiera pero que satisfacen las condiciones siguientes: Se puede distinguir si dos elementos de la clase (L) son distintos o no. Además, hemos podido dar una definición de límite de una sucesión de elementos de la clase (L). Por lo tanto, suponemos que eligiéndose una sucesión infinita de elementos aleatorios (distintos o no) de la clase (L), podemos decir de alguna manera si esta sucesión $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tiene o no un límite A (por cierto, único). El proceso que permitirá dar la respuesta (es decir, la definición de límite) es por cierto absolutamente cualquiera, que cumpla únicamente las condiciones I y II que hablamos y que son las siguientes:

(I) Si cada elemento de la sucesión infinita $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ es idéntico al mismo elemento A, el resultado ciertamente tiene un límite que es A.

(II) Si una sucesión infinita $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiene un límite A, toda sucesión de elementos de la primera sucesión de elementos tomados en el mismo orden: $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_p}, \dots$. (los números enteros, $n_1, n_2, \dots, n_p$ por lo tanto seguirá aumentando) tiene un límite que también es A. (p. 5 y 6)

***Def. 24 – Clase* $(\boldsymbol{V})$**

Considérons une classe (V) d'éléments de nature quelconque, mais tels qu'on sache discerner si deux d'entre eux sont ou non identiques et tels, de plus, qu'à deux quelconques d'entre eux A, B on puisse faire correspondre un nombre $(A,B) = (B,A) \geq 0$ qui jouit des deux propriétés suivantes : 1^0 La condition nécessaire et suffisante pour que (A,B) soit nul est que A et B soient identiques. 2^0 Il existe une fonction positive bien déterminée $f(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε, telle que les inégalités $(A,B) \leq \varepsilon$, $(B,C) \leq \varepsilon$ entraînent $(A,C) \leq f(\varepsilon)$, quels que soient les éléments A, B, C. Autrement dit, il suffit que (A,B) et (B,C) soient petits pour qu'il en soit de même de (A,C). Nous appellerons *voisinage* de A et de B le nombre (A,B). (p. 18)

Traducción. Consideremos una clase (V) de elementos de naturaleza cualquiera, pero que sepamos distinguir entre dos de ellos si son o no idénticos, además, que a cualquiera dos de sus elementos A, B los podamos hacer coincidir con un número $(A,B) = (B,A) \geq 0$ que goza de las dos propiedades siguientes:

1° La condición necesaria y suficiente para (A,B) sea cero es que A y B sean idénticos.

2° Existe una función positiva bien definida $f(\varepsilon)$ que tiende a cero con ε, tal que las desigualdades $(A,B) \leq \varepsilon$, $(B,C) \leq \varepsilon$ provocan que $(A,C) \leq f(\varepsilon)$ para cualesquiera elementos $A, B\ y\ C$.

En otras palabras, es suficiente que (A,B) y (B,C) sean pequeños para que (A,C) sea pequeña. Llamamos vecindad de A y B el número (A,B). (p. 18)

Def. 30 – Clase* $(\boldsymbol{V})$ *que admite una generalización del teorema de Cauchy

Nous dirons alors qu'une classe (V) admet une généralisation du théorème de CAUCHY si toute suite d'éléments de cette classe, qui satisfait aux conditions de CAUCHY, a un élément limite (nécessairement unique). (p. 23)

Traducción. Diremos que una clase (V) admite una generalización del teorema de CAUCHY si cualquier sucesión de elementos de esta clase, que satisface las condiciones de CAUCHY, tiene un elemento limite (necesariamente único). (p. 23)

Def. 31 – Clase separable

Nous appellerons ensuite *classe séparable* une classe qui puisse être considérée d'au moins une façon comme l'ensemble dérivé d'un ensemble dénombrable de ses propres éléments. (p. 23)

Traducción. Llamaremos *clase separable* a una clase que puede ser considerada, al menos en una forma, como el conjunto derivado de un conjunto numerable de sus propios elementos. (p. 23)

Def. 32 – Clases perfectas

Enfin, on a intérêt à considérer comme nous l'avons déjà fait (n° 33) parmi les classes (V) celles qui sont telles que, près d'un élément donné, il existe des éléments dont le voisinage avec celui-ci soit aussi petit que l'on veut sans être nul. Autrement dit, tout élément de la classe sera élément limite. Comme d'autre part la réciproque est vraie par définition même de la classe, nous dirons que de telles classes sont *parfaites*. (P. 23 y 24)

Traducción. Finalmente, nos interesa considerar como ya hemos hecho (N ° 33) entre las clases (V) aquellas que son tales que, cerca de un elemento dado, hay elementos cuya vecindad con este es también pequeña como uno quiera sin ser nulo. En otras palabras, cualquier elemento de la clase será un elemento limite. Como por otra parte, el reciproco es verdadero por definición de la clase, diremos que tales clases son perfectas. (p. 23 y 24)

Def. 33 – Clases normales

Des classes (V) NORMALES, c'est-à-dire Parfaites, séparables et admettant une généralisation du théorème de CAUCHY. (p. 24)

Traducción. Las clases (V) NORMALES, es decir, perfectas, separables y admitiendo una generalización del teorema de CAUCHY. (p. 24)

Def. 37 – Clase $(\boldsymbol{E})$

Lorsqu'on peut définir l'écart de deux éléments quelconques d'une certaine classe, nous dirons que celle-ci est une classe (E). (p. 30)

Traducción. Cuando podemos definir la distancia de dos elementos cualesquiera de cierta clase, diremos que es una clase (E). (p. 30)

Fréchet observa que una clase (E) es una clase (V) y una clase (V) es una clase (L), así una distancia cumple la propiedad de vecindad y esta cumple las propiedades de convergencia de la clase (L).

CAPÍTULO 4. PROBLEMATIZACIÓN DEL CONCEPTO DE TOPOLOGÍA

En este capítulo se presenta el trabajo con la obra y en la obra seleccionada para estudiar los usos y significados del concepto de topología en su contexto de emergencia, contexto que identificamos en la tesis doctoral de Fréchet.

Historización

La Topología es una rama de las Matemáticas que nace y se desarrolla principalmente en dos ramas conocidas actualmente como Topología Algebraica y Topología General o Topología de Conjunto. En esta investigación nos centramos en el estudio del concepto de *topología* de la Topología General.

Stadler (2002) menciona que desde G. Leibniz en 1679, L. Euler en 1736, A.F. Möbius en 1865, J.B. Listing en 1847, H. Poincaré en 1895, entre otros, se reconoce que hay una forma de estudiar el espacio, distinta a la Geometría, que le llamaron *Geometría Situs o Analysis Situs*, para referirse al análisis de la posición. Son los trabajos de estos matemáticos que permiten el surgimiento de lo que ahora se le conoce como Topología Algebraica.

Por otro lado, en los trabajos de Cantor en 1872, Bolzano en 1817, M. Fréchet en 1906, se encuentran las ideas germinales de la Topología de Conjuntos (Bastán, Cuenya, y Gema, 2007), en esta investigación nos centramos en estudiar las ideas germinales del concepto de topología.

<u>Topología de Conjuntos</u>

Con posterioridad a los trabajos de Cantor, otros matemáticos se dedicaron a hacer generalizaciones de resultados a espacios de naturaleza cualquiera, algunos de estos esfuerzos de generalización dieron lugar a la conformación de un dominio autónomo de la Topología denominada Topología Abstracta, fundamental, conjuntista, o Topología General (Arboleda, 2017). Por otro lado, se configuró el campo de la Topología Algebraica en los primeros trabajos geométricos de Euler y Riemann, basados en métodos combinatorios.

Freixenet (1994) afirma que encontrar las verdaderas raíces de la Topología es una labor muy difícil, reconoce que se puede seguir la evolución de determinados conceptos que han llevado a los principios básicos de una determinada teoría. Por esta razón y porque reconocimos la noción de *relación de proximidad* fundamental para la significación del concepto de topología, enfocamos esta investigación en dicho concepto.

Taylor (1982) afirma que el Análisis General no podría existir sin alguna estructura topológica en espacios abstractos; entendemos que la necesidad de estudiar funciones cuya variable es de naturaleza cualquiera, demandó por alguna razón de definir de alguna manera una estructura topológica.

Arboleda (2012) reconoce que los matemáticos Volterra, Hadamard y Fréchet consideraban que se debían de introducir dos clases de extensiones para el desarrollo del Análisis Funcional. Arboleda describe que la primera extensión consiste en la abstracción de la naturaleza de la variable sobre la que se definen las funciones numéricas definidas sobre conjuntos de naturaleza cualquiera; reconocemos que una característica de la tesis de Fréchet es hacer este tipo extensión ya que trabaja con operaciones funcionales. La segunda extensión genera que lo que Fréchet le llama Análisis General en 1928, cuyos objetos son funciones abstractas, no exclusivamente numéricas, definidas sobre conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera (Arboleda, 2012, p. 33)

Respecto a la Topología de Conjuntos, Arboleda (2017) menciona que esta se fue configurando hacia 1920 y los dominios que posibilitaron su existencia fueron el Análisis y Análisis Funcional. A comienzos de siglo XX, el Análisis funcional no estaba aún unificado y se comenzaron a desarrollar pluralidad de teorías, cada una determinada por la naturaleza de la variable (Arboleda y Recalde, 2003, citados por Arboleda, 2012).

Por otro lado, (Bourbaki, 1940, citado en Taylor, 1982) no consideraba que la obra de Fréchet fuera sobresaliente para el desarrollo de la Topología General, "Les premieres tentatives pour dégager ce qu'il y a de commun aux propriétés des ensembles de points et de fonctions, furent faites par Fréchet et F. Riesz; mais le premier, partant de la notion de limite dénombrable, ne réussit pas à construire un système d'axiomes commode et féconde; ..." (p. 83), del mismo modo lo afirma (Arboleda, 1982).

Concepto de topología

Decidimos estudiar la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet, ya que reconocemos que en esta obra, Fréchet define los espacios (L) y (V) cuyas topologías están definidas por la convergencia de sucesiones y una axiomática generalizada de las vecindades (Arboleda, 1982), en este sentido nos dimos a la tarea de entender cómo define Maurice Fréchet tales estructuras topológicas y por qué se les reconoce como tal.

Encontramos que Arboleda (2017) reconoce la noción de *proximidad* como esencial para caracterizar la *geometría intrínseca* de los conjuntos abstractos, en otras palabras Arboleda explica que esto significa establecer en los espacios abstractos una estructura topológica, ya sea a través de la distancia entre dos puntos, la convergencia de sucesiones o la vecindad de un punto (p. 529).

El objetivo del Análisis General era extender las propiedades fundamentales del Cálculo Infinitesimal al dominio de las funcionales (Arboleda, 2012), objetivo que comparte la tesis de Fréchet, pero que se ubica en el Análisis Funcional, ya que hasta este momento las operaciones funcional solo consideraban la extensión en el conjunto sobre el que se definen. Además, consideramos que en su tesis podríamos encontrar los antecedentes que a él le permitieron hacer tal cosa (generalizar, dar la primera definición axiomática de distancia) y así en una investigación posterior irnos más atrás en el tiempo, si es posible para reconocer ideas germinales del concepto de topología.

Contexto Sociocultural de la obra

La elección de la tesis de Fréchet como obra principal a estudiar se justifica a detalle en este estudio del contexto sociocultural.

- **Una producción con historia.**

Maurice Fréchet (1878-1973) matemático francés, nació el 10 de septiembre de 1878 en Maligny, al sureste de París. Fue el cuarto de seis hijos, sus padres Jacques y Zoé Fréchet fueron protestantes. (Taylor, 1982)

Fréchet es conocido principalmente por sus contribuciones a los fundamentos conceptuales de la Topología de Conjuntos, la Teoría de los Espacios Abstractos y el Análisis funcional (Arboleda, 2002); también se le reconoce por la introducción de nociones fundamentales que se volvieron rápidamente de uso corriente: espacios métricos, compactos, separables, completos. (Arboleda, 1982)

Taylor menciona que cuando Maurice comenzó a estudiar en el Lycée Buffon de París, conoció a Jacques Hadamard quién daba clases de matemáticas en los años 1890-1893. Hadamard percibió en Maurice una inclinación por las matemáticas y se convirtió en una persona muy influyente en la vida académica del joven; de tal manera que siempre mantuvieron contacto por medio de cartas, en las que Hadamard le proponía problemas matemáticos a Fréchet, le hacía comentarios y sugerencias sobre sus soluciones. La relación entre Hadamard y Fréchet llegó al punto de que Hadamard fue el director de la tesis doctoral y se le considera su "padre espiritual".

Fréchet consagró su trabajo a la Topología Conjuntista en el periodo de 1904 a 1928 (Arboleda, 1982); entonces identificamos su tesis doctoral dentro de este periodo, con esto entendemos que esta obra es precursora en el desarrollo de la Topología de Conjuntos. Del mismo modo, Taylor (1982) considera la obra matemática de Fréchet como pionera en el desarrollo de una rama de la Matemática llamada Análisis Funcional que, luego se extendió al Análisis General que desde la consideración de Taylor es la rama de las Matemáticas que estudia las funciones que mapean un conjunto abstracto en otro conjunto abstracto, ambos conjuntos dotados de una estructura topológica (p. 233).

- <u>Vida profesional de Fréchet</u>

FRÉCHET entró en la École Normale Supérieure en 1900 después de hacer el servicio militar. Allí terminó su curso en 1903, pasando la agrégation des sciences mathématiques en 1903 (Taylor, 1982). Además, Taylor afirma que FRÉCHET dijo que mientras estaba en la Escuela Normal Superior dudaba mucho tiempo entre la física y las matemáticas, eligiendo finalmente esta última porque, a medida que se organizaban las cosas, apenas se podía separar la física de la química y sentía que no tenía aptitud para la química.

Sobre la vida profesional de Fréchet encontramos lo siguiente en (Taylor, 1982):

> Después de recibir el doctorado, el primer puesto de Fréchet como docente fue en un Lycée en Besançon, en 1907. Posteriormente, ocupó cargos

universitarios en Nantes (1908), Rennes (1909) y Poitiers, a los que estuvo adscrito oficialmente desde 1910 hasta el final de la Primera Guerra Mundial. Pronto fue movilizado al ejército en 1914 y permaneció en servicio activo hasta el final de la guerra. Estuvo con los ejércitos en el campo, la mayor parte del tiempo como intérprete con los británicos. En 1919 fue seleccionado para ir a Estrasburgo para ayudar a reorganizar la universidad. Fue catedrático de la Facultad de Ciencias y director del Instituto Matemático de la Universidad.
Finalmente, en 1928, fue llamado a París. Sin embargo, el reconocimiento final por elección a la Academia de Ciencias tardó en llegar. Los miembros de la Sección de Geometría (limitados a seis en aquella época) eran de larga duración. Paul Montel fue elegido para reemplazar a Goursat en 1937; A. Denjoy fue elegido para reemplazar a Lebesgue en 1942; R. Garnier fue elegido para reemplazar a Cartan en 1952; y Fréchet fue elegido para reemplazar a Borel en 1956. Para entonces tenía setenta y siete años. (p. 264) *Traducción propia.*

- **Un objeto de difusión.**

La obra que estudiamos en esta investigación es la tesis doctoral de 1906 de Maurice Fréchet, esto quiere decir que, es una obra dirigida a la comunidad de matemáticos de la época, con el objetivo de comunicar conocimientos nuevos. Como mencionamos previamente, la tesis fue dirigida por el profesor Hadamard.

- **Parte de una expresión intelectual más global.**

En esta parte tratamos de entender la evolución de las ideas de Maurice Fréchet en la totalidad de sus obras y la relación de estas con otras, cabe mencionar que la única obra que revisaremos el original es la tesis doctoral de Fréchet. Sobre los trabajos relacionados con la Topología, nos basaremos en lo que dicen otras investigaciones.

  - <u>La obra matemática a estudiar</u>

Como mencionamos anteriormente, Hadamard dirigió la tesis doctoral de Fréchet (obra a estudiada en esta investigación), sin embargo, Taylor (1982) menciona que no se ha encontrado evidencia si Hadamard influyó sobre la elección de Fréchet del tema de su tesis, ni de la interacción entre ellos en el desarrollo de la investigación, puesto que se supone que la interacción fue personal, ya que Hadamard trabajó en París a partir de 1897.

Es claro que Hadamard influyó fuertemente en el trabajo de Fréchet, particularmente en su tesis, al respecto Taylor afirma que fue a través de Hadamard que Fréchet se interesó en cálculo de variaciones y en operaciones funcionales en la clase de funciones continuas en un intervalo cerrado finito. También menciona, que una de las cosas que motivó a Fréchet fue una conferencia de Hadamard en el primer congreso Internacional de Matemáticas celebrado de 1897, particularmente cuando Hadamard se refiere a que valdría la pena estudiar los conjunto de funciones, estos pueden tener propiedades diferentes de los conjuntos de números o de los puntos en el espacio n-dimensional, y afirma que el estudio teórico de conjuntos de clases de funciones desempeñaría sin duda un papel fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales. (p. 258, 259)

Arboleda (1982) afirma que Fréchet tenía la convicción de que hay espacios en los que la convergencia es la noción primitiva natural; entendemos que, por esto, en su tesis, utilizaba la convergencia de sucesiones para el estudio de la topología de ciertos espacios.

En 1982, Taylor hizo un amplio estudio histórico de la tesis de Fréchet, que consideramos pertinente para caracterizar *la obra matemática a estudiar.* Presentamos a continuación un resumen en español, de los resultados más relevantes de Taylor.

La tesis es probablemente la producción que mayor impacto ha tenido, en el mundo de las Matemáticas, que cualquier otro trabajo de Fréchet. La tesis consiste en una introducción y dos partes, la primera parte es la introducción de la noción de límite en los conjuntos abstractos y la segunda parte son aplicaciones de la teoría general.

Antes de discutir las principales características de la tesis de Fréchet se consideran los términos "operación funcional" (opération fonctionelle), y "el cálculo funcional" (le calcul fonctionnel). La palabra "fonctionnelle" pudo haber sido introducida por Hadamard como adjetivo del término "opération fonctionnelle", Taylor afirma que Hadamard utiliza este término, en un trabajo de 1903, para referirse a una función de valor numérico definida en una clase de funciones. Además, menciona que es Volterra, en 1887, quién discute por primera vez sobre este tipo de funciones, usando la terminología "functions that depend on other functions" y "functions of lines". Por otro lado, Fréchet define, en las páginas 1 y 4 de su tesis, que una operación funcional (opération fonctionnelle) es una función de valor numérico definida sobre una clase de elementos de naturaleza cualquiera, estos elementos pueden ser números, puntos, funciones, líneas, superficies, etc.; en seguida, afirma que el objeto de "le Calcul Fonctionnel" es el estudio de las operaciones funcionales.

A decir de Taylor, la parte 1 de la tesis de Fréchet, que comprende las páginas de la 1 a la 33, trata esencialmente sobre los rudimentos de la Topología de puntos en conjuntos abstractos, con alguna discusión de las operaciones funcionales continuas, individualmente o en familias. Fréchet no utiliza la palabra "topología", sino que habla de "l'étude des ensembles abstraits".

La noción crucial, para FRÉCHET, es la de un elemento límite de un conjunto en una clase abstracta, y en la tesis siempre basa la definición de un elemento límite en la noción de límite de una sucesión de elementos. En la tesis se deja claro que los límites de las sucesiones se asumen como únicos. Una clase abstracta con "sequential limits" regidos por estos postulados y nada más se llama "una clase (L)" (p. 251, 252).

Fréchet se da cuenta que la clase (L) no le permite seguir construyendo la teoría que busca, es por esto por lo que introduce una clase de elementos (V) como un tipo particular de clase (L), en la clase (V) la idea de que una sucesión $\{A_n\}$ tiene un límite A se define usando una medida numérica de la cercanía de A_n a A (p. 252).

En la página 4 de su tesis, Fréchet afirma que los resultados más conocidos e importantes en la teoría de conjuntos de puntos están basados en la noción de límite de una sucesión de elementos. Con teoría de conjuntos de puntos se refiere a la teoría cuando los elementos son números reales, pensados como puntos en una recta, en un plano o en el espacio n. Por otro lado, hace referencia a varios ejemplos de la Teoría de Grupos y observa que en cada caso la operación de composición de dos elementos se define tomando en cuenta la naturaleza de los elementos, así comienza a preparar el terreno para aproximarse a la teoría de conjuntos de puntos. (p. 252)

En la página 5, Fréchet habla del modo de composición en Teoría de Grupos, y afirma que va a intentar hacer, para el Cálculo Funcional, particularmente para la Teoría de Conjuntos Abstractos, lo mismo que se ha hecho para la Teoría Abstracta de Grupos. (p. 252)

En el segundo capítulo de la primera parte de su tesis, Fréchet abandona el estudio de las clases (L), explicando (en las páginas 17 y 18) el porqué. Taylor considera que Fréchet quería, en primer lugar, mantener el método axiomático abstracto, en segundo lugar, que su teoría se aplicara a aquellas clases de elementos que aparecen más frecuentemente en las aplicaciones y, finalmente, que su teoría incluyera las generalizaciones buscadas de los teoremas sobre los conjuntos de puntos en la línea y las funciones continuas reales de una variable real. Fréchet quería una teoría en la que los conjuntos derivados fueran cerrados, puesto que lo consideraba requisito para el concepto de sucesión convergente. Sin embargo, la teoría que construyó retomó lo que había trabajado en la cuarta nota en los *Comptes Rendus*. En su tesis define la clase de elementos (V), en dónde define la vecindad como un número que debe cumplir ciertos axiomas, a este número en su cuarta nota de los *Comptes Rendus* le llama *écart*, Taylor considera que esta decisión de usar el nombre de vecindad en lugar de *écart* posiblemente fue por influencia de Hadamard. (p. 253)

Una clase (V) se convierte en una clase (L) especial cuando se define una sucesión $\{A_n\}$ de elementos de una clase (V) tiene un elemento A como límite siempre que $(A_n, A) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esta definición garantiza que los límites son únicos. También lleva a la consecuencia de que los conjuntos derivados están cerrados. (p. 254)

Todos los teoremas del capítulo II están dados bajo una estructura básica de una clase (V) arbitraria, con excepción de un teorema en la sección 51. En las secciones 49-51 Fréchet define una clase (E), que es un tipo especial de clase (V) en la que reemplaza el tercer axioma por el axioma de triangularidad, que considera necesario para demostrar el teorema de la sección 51. Taylor afirma que una clase (E) es lo que ahora llamamos un *espacio métrico*, nombre originado por Hausdorff. También considera que le parece extraño que Fréchet nunca de un ejemplo de una clase (V) que no satisfaga el axioma de triangularidad. (p. 254)

Sobre las definiciones que Fréchet introduce en la primera parte de su tesis, Taylor menciona que en el capítulo I, dedicado a la clase (L), define el conjunto derivado, conjunto cerrado y conjunto perfecto, igual que en la teoría de conjuntos de puntos para conjuntos en la línea numérica real. Para un conjunto E define un elemento interior en sentido estricto (el término "en sentido estricto" se veía aparentemente influenciado por el uso contemporáneo en el que se hablaba de un punto interior en la línea numérica), también define un conjunto condensado, un conjunto compacto y conjunto extrémal (el uso de tal adjetivo resultó efímero). En el mismo capítulo, Fréchet enuncia una generalización de un teorema de Weierstrass, a saber, una operación funcional definida y continua sobre un conjunto cerrado y compacto, es acotada y alcanza su límite superior. Fréchet lo enuncia como un corolario en el que no se menciona la continuidad, y resalta que Weierstrass lo enunció por primera vez para puntos en el espacio euclidiano y que luego lo enunció Arzelà para conjunto de curvas. Taylor menciona que esta referencia de Arzelà por parte de Fréchet es curiosa y engañosa, puesto que Arzelà nunca usó el término “compacto”. (p. 254, 255)

En el capítulo II, dedicado a la clase (V), Fréchet introduce la noción de clase separable, que modifica en una publicación de 1921; también introduce la noción de completitud, aunque no usa esta palabra, cuando dice que una clase (V) satisface las condiciones de Cauchy. Otro termino que define Fréchet es el de clase (V) *normal*, término que no ha sobrevivido y que actualmente tiene usos y significados diferentes.

Sobre la aportación de Fréchet a la Topología de Conjuntos, Taylor afirma que:

> In FRÉCHET's development of the theory of V-classes he formulated and proved some theorems that constituted very important progress in the nascent discipline of what came to be called general topology. Greater generality for some of these theorems was attained later in the work of other mathematicians, but FRÉCHET deserves to be recognized for his demonstration that significant results could be obtained in an abstract treatment. (p. 256)

Los teoremas a los que se refiere en este párrafo, Taylor reconoce dos ideas, una de ellas es la idea de presentar un conjunto como la unión de una familia de conjuntos, donde cada uno debe ser arbitrariamente pequeño. La otra idea es la de cobertura de un conjunto dado por una familia de conjuntos.

Taylor especifica que Fréchet en la segunda parte de su tesis se dedica a la ilustración de su teoría abstracta aplicada a ejemplos concretos, además de los ejemplos obvios de la línea real y del espacio n cartesiano o euclidiano, hay cuatro ejemplos concretos de clases (E), cada una es una clase normal (es decir, completa y separable), estos ejemplos son:

> A. La clase de funciones reales definidas y continuas sobre un intervalo finito cerrado J de la línea real, con écart definido por
>
> $(f, g) =$ el máximo de $|f(t) - g(t)|$ for t in J.
>
> B. La clase E_ω, de puntos $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$, donde las coordenadas x_i y y_i son números y la écart es
>
> $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$.

C. La clase (FRÉCHET no le da ningún nombre) de todas las funciones complejas f de las variables complejas z definidas y holomórficas en el interior de una región A del plano fijo (FRÉCHET lo llama un "aire") cuyo límite consiste en uno o más contornos. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de regiones limitadas (aires) tal que cada A_n está contenida en el interior de A_{n+1} y de A y tal que cualquier región limitada dada en el interior de A esté en el interior de A_n cuando n es suficientemente grande. El écart de dos funciones f, g en la clase se define como

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{M_n(f,g)}{1 + M_n(f,g)}$$

Donde $M_n(f,g)$ es el maximo de $|f(z) - g(z)|$ cuando z está en la cerradura de A_n.

D. Aquí la clase es la familia de curvas en 3-espacio Euclidiano con *écart* definido como en el artículo [FRÉCHET, 20] discutido en el § 4. (p. 258)

Taylor observa que, al tratar estos ejemplos, Fréchet describe la forma en que la compacidad de un conjunto de elementos se puede caracterizar de una manera que se relaciona más directamente con la característica de los elementos de cada situación. Además, señala que en la tesis no se presenta ningún ejemplo de una clase (E) concreta cuyos elementos se toman de clases de funciones medibles y sumables en el sentido de Lebesgue. (p. 258)

Es claro que Hadamard influyó fuertemente en el trabajo de Fréchet, particularmente en su tesis, al respecto Taylor afirma que fue a través de Hadamard que Fréchet se interesó en cálculo de variaciones y en operaciones funcionales en la clase de funciones continuas en un intervalo cerrado finito. También menciona, que una de las cosas que motivó a Fréchet fue una conferencia de Hadamard en el primer congreso Internacional de Matemáticas celebrado de 1897, particularmente cuando Hadamard se refiere a que valdría la pena estudiar los conjunto de funciones, estos pueden tener propiedades diferentes de los conjuntos de números o de los puntos en el espacio n-dimensional, y afirma que el estudio teórico de conjuntos de clases de funciones desempeñaría sin duda un papel fundamental en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales.

En este mismo artículo de Taylor, se encuentra una discusión del significado e impactos de la tesis de Fréchet, en las páginas 260 a 264.

Para Taylor, los aspectos generales y más significativos en la tesis de Fréchet son: primero, su iniciación a la Topología de Conjunto de puntos abstractos y el desarrollo de la Teoría Abstracta; segundo, el desarrollo de un campo de aplicación de la Teoría Abstracta de clases de funciones y curvas, aunque las aplicaciones y resultados en sus tesis fueron limitados, llamó la atención el nuevo punto de vista en el Análisis de ver las clases de funciones como espacios métricos (p. 260, 261).

A pesar de que el interés sobre estudio de las clases (L) y (V) no fue permanente, lo significativo fue que se demostró que una topología de conjuntos abstractos era factible y fructífera, y que se aplicaba significativamente a ámbitos distintos de la Teoría del Conjunto de puntos en el espacio euclidiano de una o *n* dimensiones. (p. 261)

En la construcción de una topología abstracta general, Fréchet introdujo una serie de conceptos importantes cuyo surgimiento dependía del proceso de abstracción: sus nociones de compacidad, separabilidad y completitud. Taylor reconoce que el significado actual de la compacidad no es el mismo que el introducido por Fréchet, sin embargo, están estrechamente relacionados. Uno de los logros significativos de Fréchet es el descubrimiento, en su teoría abstracta, de la relación entre el teorema Bolzano-Weierstrass y el teorema de recubrimiento de Borel y Borel- Lebesgue. Otro logro significativo específico de la tesis de Fréchet es el descubrimiento de la relación, entre el concepto de conjunto compacto y el concepto de total boundedness. (p. 261)

Taylor menciona que el matemático Riesz fue de los primeros que valoraron el trabajo de Fréchet en su tesis, lo citó en una nota de los *Comptes Rendus* de París en el mismo año de publicación de la tesis, así como comentarios elogiosos en publicaciones en los años 1906-1908. Otro matemático que utilizó el trabajo de la tesis de Fréchet fue Arthut Schoenflies en 1908. Además, Hans Hahn fue reconocido por Hadamard como uno de los continuadores del trabajo de tesis de Fréchet, puesto que considera a Fréchet como el primero en ocuparse de la Teoría de los Conjuntos Abstractos de puntos en espacios abstractos. (p. 261, 262)

En el mismo orden de ideas, Taylor comenta que en el *Jahresbericht über die Fortschritte der Mathematik*, volumen 37, páginas 348-349 (publicado en 1909 pero con informes sobre publicaciones de 1906), se reconoce que la tesis de Fréchet es una unificación sistemática y un mayor desarrollo de las numerosas investigaciones publicadas por el autor en 1904 y 1905. El autor de esta revisión es identificado solo por las iniciales Gz. También Taylor menciona que Hausdorff, sin duda, conocía la tesis de Fréchet, sin embargo, no queda claro hasta qué punto influyó en su trabajo. (p. 262)

Incluso en América tuvieron reconocimiento algunos trabajos tempranos de Fréchet, particularmente su tesis. Principalmente cuatro estudiantes que escribieron tesis doctorales bajo la dirección de E. H. Moore, en la Universidad de Chicago, todas ellas relacionadas con la tesis de Fréchet, estos estudiantes fueron: E. W. Chittenden, T. H. Hildebrandt, A. D. Pitcher, y R. E. Root. Taylor menciona que otro estadounidense, E. R. Hedrick, de la Universidad de Missouri, que hizo su doctorado en Gottingen y estuvo brevemente en la École Normale Supérieure en 1901, fue motivado por el trabajo de Fréchet para comenzar una investigación de la teoría de puntos abstractos en un nivel aparentemente más general que el de las clases (E) de Fréchet; y publicó sus resultados en 1911. (p. 262, 263)

Así mismo, Taylor menciona que una muestra del reconocimiento de Hadamard hacía el trabajo de Fréchet como pionero en la Topología General, es un informe que presentó por motivo de la elección de Fréchet en la Academia de Ciencias en 1934, para la vacante en la sección de Geometría que dejara Painlevé en 1933. (p. 263)

Con esto, concluimos el resumen de la reseña que se hace en (Taylor, 1982) sobre el trabajo de Maurice Fréchet, particularmente sobre su tesis doctoral.

Como mencionamos anteriormente, Arboleda reconoce en 1982 que, Fréchet muestra "en sus trabajos sobre espacios tan generales como los espacios (L) y (V) cuyas topologías están definidas, respectivamente, por la convergencia de sucesiones y por una axiomática generalizada de las vecindades" (p. 71-72).

Con esta afirmación de Arboleda, nos interesamos en entender tales espacios, a los cuáles Fréchet les llama clases de elementos (L) y (V) y las define de la siguiente manera:

Definición de una clase (L):

> Dorénavant, nous nous limiterons donc à l'étude des ensembles tirés d'une classe (L) d'éléments de nature quelconque mais satisfaisant aux conditions suivantes : on sait distinguer si deux éléments de la classe (L) sont distincts ou non. De plus, on a pu donner une définition de la limite d'une suite d'éléments de la classe (L). Nous supposons donc qu'étant choisie au hasard une suite infinie

d'éléments (distincts ou non) de la classe (L), on puisse dire d'une façon certaine si cette suite $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ a ou non une limite A (d'ailleurs unique). Le procédé qui permettra de donner la réponse (autrement dit la définition de la limite) est d'ailleurs absolument quelconque, assujetti seulement à satisfaire aux conditions I et II dont nous avons parlé et qui sont les suivantes :

III) Si chacun des éléments de la suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ est identique à un même élément A, la suite a certainement une limite qui est A.

IV) Si une suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ a une limite A, toute suite d'éléments de la première suite pris dans le même ordre : $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_p}, \dots$. (les nombres entiers $n_1, n_2, \dots, n_p$ iront donc en croissant) a une limite qui est aussi A.(p. 5 y 6)

En esta definición que da Fréchet de elementos de una clase (L), vemos que la define bajo la convergencia de sucesiones de funciones. Donde una de las primeras condiciones que nos llama la atención es: **Se puede distinguir si dos elementos de la clase (L) son distintos o no.** Con esto nos interesa entender cómo, mediante la convergencia que define, distingue entre los elementos.

Definición de una clase (V):

Considérons une classe (V) d'éléments de nature quelconque, mais tels qu'on sache discerner si deux d'entre eux sont ou non identiques et tels, de plus, qu'à deux quelconques d'entre eux A, B on puisse faire correspondre un nombre $(A, B) = (B, A) \geq 0$ qui jouit des deux propriétés suivantes : 1^0 La condition nécessaire et suffisante pour que (A, B) soit nul est que A et B soient identiques. 2^0 Il existe une fonction positive bien déterminée $f(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε, telle que les inégalités $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ entraînent $(A, C) \leq f(\varepsilon)$, quels que soient les éléments A, B, C. Autrement dit, il suffit que (A, B) et (B, C) soient petits pour qu'il en soit de même de (A, C). Nous appellerons *voisinage* de A et de B le nombre (A, B). (p. 18)

En esta definición de una clase (V), identificamos nuevamente que Fréchet pone como condición general que se puedan **distinguir entre dos de ellos si son o no idénticos**, ahora como en el caso anterior, nos interesa entender cómo, mediante la vecindad, él puede hacer la distinción entre elementos.

De las definiciones anteriores, tanto de la clase (L) como de la clase (V) notamos que en ambas lo que quiere es dado un conjunto de elementos de naturaleza cualquiera, poder distinguir entre dos de sus elementos si son iguales o no, es en esta condición que reconocemos que se pone en juego la noción de *relación de proximidad*, así que nos interesa entender, el papel que juega la condición **distinguir entre dos de ellos si son o no idénticos**, en el proceso de generalización que realiza.

- Sobre otras obras relevantes del autor

De acuerdo con (Arboleda y Recalde, 1998), Fréchet consideraba que las generalizaciones se hacen poco a poco y estudia casos particulares para poder generalizar. Tal como lo afirma él mismo en su tesis doctoral (Fréchet, 1906):

> … Les autres généralisations sont plus récentes. Ainsi, M. LE ROUX a été amené à étudier les fonctions dont la valeur dépend non plus de n, mais d'une suite infinie de variables indépendantes (XVIII) **). MM. VOLTERRA (XV) et ARZELÀ (V) paraissent avoir été les premiers à étudier systématiquement les fonctions dont la valeur dépend de la position et de la forme d'une ligne variable. M. HADAMARD (XI) a considéré une classe particulière de fonctions dont la variable est la forme d'une fonction ordinaire.
>
> Nous nous placerons dans ce Mémoire à un point de vue tout à fait général qui embrasse ces différents cas (p. 1).

Con esto confirmamos el interés de Fréchet en generalizar propiedades sobre el conjunto de funciones definidas en un conjunto cuyos elementos son de naturaleza cualquiera; en este sentido consideramos fundamental entender el papel de la relación de proximidad en este proceso de generalización.

Entendemos que Fréchet considera casos particulares que consisten en conjuntos de funciones definidas sobre conjuntos cuyos elementos son de naturaleza especifica. Para identificar los casos particulares que él tomó para hacer dichas generalizaciones. Consideramos necesario revisar en primer lugar su tesis doctoral.

Como mencionamos antes, Arboleda reconoce que durante el periodo que va de 1904 a 1928, Fréchet consagró su trabajo a la Topología Conjuntista. "Se puede decir que toda su contribución a la fundamentación de la "teoría de los espacios abstractos" estuvo limitada por el ideal de construir aquello que Alexandrov y Fedorchuk denominan "una geometría intrínseca de conjuntos". (Arboleda, 1982, p. 71, 72)

En este mismo artículo Arboleda, cita la siguiente afirmación de Tukey (1940):

> "(…) hay espacios de gran interés para el analista en los que la convergencia es la noción primitiva natural; además, la convergencia es un instrumento tan útil en ciertos espacios bien generales que su sustitución por otra noción sólo conduce a problemas adicionales"

De donde Arboleda reconoce que Fréchet tenía estos mismos ideales cuando utilizaba la convergencia de sucesiones para estudiar la topología de ciertos espacios funcionales muy generales en su tesis de doctorado.

> "El nombre de Fréchet aparece mencionado en los tratados de topología en relación con la introducción de nociones fundamentales que se volvieron rápidamente de uso corriente: espacios métricos, compactos, separables, completos. Todas esas nociones, escribiría Fréchet en un manuscrito fechado en 1964, hacía parte de una misma dirección de investigaciones que se orientaba a demostrar "que era posible edificar una topología no constructiva, válida para elementos de naturaleza cualquiera". De ahí que algunos matemáticos como F. Riesz designaran a Fréchet como "el creador de la teoría de los espacios abstractos"." (p. 75)

Aquí vemos que, en efecto, en los trabajos de Fréchet cabe la posibilidad de encontrar ideas germinales de algunos conceptos matemáticos. Aunque no lo digan explicito, consideramos la posibilidad de encontrar alguna idea germinal del concepto de topología. Al respecto Arboleda menciona que:

> "Bourbaki no parece reconocer la existencia, en la obra de Fréchet, de los espacios abstractos cuya topología se caracteriza por medio de la convergencia y de las vecindades. Si lo hace, es para afirmar que las axiomáticas de tales espacios, en particular de los espacios *L* de convergencia, no se revelaron ni "cómodas" ni "fecundas". La explicación a este punto de vista parecería

> encontrarse en la correspondencia entre Dieudonné y Fréchet con respecto a la opinión contenida en el libro *Eléments d'Histoire des Mathématiques* sobre la obra de Fréchet. La carta de Dieudonné ya mencionada contiene la siguiente apreciación sobre lo que Bourbaki entendía por teoría cómoda y fecunda.
>
> "El interés de una teoría se mide para nosotros casi siempre según la variedad y la significación de sus aplicaciones a otras partes de la Matemática; en particular, la mayor o menor generalidad de una teoría no nos interesa infinitamente menos que la manera en que ella se adapta a las aplicaciones"." (p. 76)

Esto último nos indica, que al menos otros matemáticos no reconocían la obra de Fréchet como una obra cercana a las aplicaciones de la Matemática, sino que la consideraron como una obra en la que se dan respuestas a cuestiones puramente de la Matemática.

Entonces, el contexto en el que nace una parte de la Topología se caracteriza porque en la época buscaban dar respuestas a cuestionamientos puramente matemáticos, relacionados específicamente con la generalización de propiedades al espacio de operaciones funcionales. Esto nos permite reconocer que el contexto de significación (Espinoza, 2009) de la obra de Fréchet es, evidentemente, un contexto de producción matemática y, en ese sentido, se va a trabajar sobre objetos matemáticos institucionalizados. Respondernos qué hace, cómo hace, para qué hace y por qué hace, sobre estos objetos, le da el carácter social a nuestro enfoque y no el de las aplicaciones.

Con esta mirada general de la obra (la tesis doctoral de Fréchet), nos posicionamos para analizar la actividad matemática, con el objetivo de entender el papel de la relación de proximidad en el proceso de generalización; reconocemos este proceso de generalización como una característica fundamental de su obra y que consideramos comienza a caracterizar la naturaleza social del concepto de topología.

Los artículos de Fréchet relacionados con su tesis

De acuerdo con (Taylor, 1982) el objeto de estudio de la tesis de Fréchet, se fue configurando en 5 artículos publicados entre los años 1904 y 1905, estos son:

❖ Généralisation d'un théorème de Weierstrass

En este artículo, Fréchet introduce una categoría de elementos llamados Clase C, como lo menciona (Taylor, 1982):

> "he introduces "a certain category C of arbitrary elements (numbers, surfaces, etc.) in which one knows how to distinguish distinct elements" and in which one supposes given a definition that assigns a precise meaning to the phrase "the infinite sequence $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ of elements of C has a limit B." The definition, otherwise arbitrary, is assumed to be such that (1) if the sequence $\{A_n\}$ has a limit, every sequence $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots$ formed of elements from $\{A_n\}$ with increasing indices $p_1, p_2, \dots$ has the same limit as $\{A_n\}$, and (2) if $\{A_n\}$ is given with $A_n = A$ for each n, then $\{A_n\}$ has the limit A. lt is not explicitly stated that the limit of a sequence is assumed to be unique. However, I think we may assume that FRÉCHET has this assumption implicitly in mind, for in his thesis, where he defines a class (L) as a set of elements of arbitrary nature with a notion of sequences of elements that have limits, he imposes exactly the same two assumptions but remarks that the limit of a sequence is "d'ailleurs unique". (p. 243-244)

Entonces vemos que la consideración de una clase de elementos de naturaleza cualquiera, tal que se sabe distinguir los elementos distintos, viene al menos desde este trabajo de 1904. Además, Taylor asume que en esta definición de una clase (C) Fréchet admite que hay una definición precisa de convergencia que da sentido a la frase "Una sucesión infinita de elementos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiene límite" (p. 243).

Este es uno de los trabajos de Fréchet con los que comienza sus aportaciones al Análisis Funcional, donde define las partes compactas E del espacio (L) (como generalizaciones de los intervalos de $\mathbb{R}$) y enuncia así la extensión del teorema de Weierstrass en (L): *Toda funcional continua en un conjunto compacto y cerrado E, alcanza su cota superior y su cota inferior en E* (Arboleda, 2012). Esto nos muestra un ejemplo del objetivo del Análisis Funcional, ya que se generaliza a la clase de funcionales continuas, la propiedad de Weierstrass sobre la existencia del extremo de una función real continua en un intervalo cerrado y acotado. (Arboleda, 2012)

❖ Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles

Taylor (1982) muestra que, en este artículo, Fréchet da evidencia de su interés por separar de distintas teorías lo que tienen en común, de ahí el interés en introducir la noción de límite y de elemento límite sin considerar la naturaleza de los elementos.

> FRÉCHET makes the observation that it is useful to detach from various theories (the theory of sets of points, of functions of lines, and of functional operations) the features common to them all. In set theory it is important - just as with the notion of power (puissance)-to introduce the notion of limit and limit element without regard to the nature of the elements under consideration. (p. 244)

Taylor también menciona que en este artículo Fréchet hace referencia a un cuestionamiento sobre si el conjunto derivado de un conjunto es cerrado, lo cual observa que no siempre es cierto, para ello da el siguiente contraejemplo:

> The counterexample he cites is that in which E is the set of all (real) polynomials in the real variable x, in the class of all (real) functions of f defined on a specified interval, with the definition "$\{f_n\}$ has the limit f when $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for each x." He does not explain why the derived set of E is not closed, but it is clear from what follows later that he has BAIRE classes in mind and knows that the first BAIRE class is not closed in the foregoing situation. In looking at the general setting of this example of a case in which a derived set is not closed, FRÉCHET made the following observation (still in [FRÉCHET, 16]). Suppose that $\{f_n\}$ is a sequence of distinct functions with limit $f(x)$ for each x and suppose further that for each n there is a secuence $f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, f_n^{(3)}, \ldots$ with $\lim_{p\to\infty} f_n^{(p)}(x) = f_n(x)$ for each n and each x. Then it is not necessarily true that there exist two increasing sequences $p_1, p_2, p_3 \ldots$ and $n_1, n_2, n_3 \ldots$ such that $\lim_{i\to\infty} f_{n_i}^{(p_i)}(x) = f(x)$ for each x. However, if all of the functions in question are measurable, there do exist increasing sequences $\{p_i\}$ and $\{n_i\}$ such that $\lim_{i\to\infty} f_{n_i}^{(p_i)}(x) = f(x)$ except on a set of measure zero. From this FRÉCHET proceeds to assert (without proof) as a corollary, that each function that is in some

> BAIRE class is the limit, except on a set of measure zero, of a sequence of polynomials. (p. 246)

Dicho ejemplo lo menciona Fréchet en su tesis, lo presenta de manera más detallada y hace las pruebas al final del capítulo 1 (Taylor, 1982), de la página 15 a 17 en las secciones 22 a la 24, que considera una sección especial. Taylor observa que en este ejemplo Fréchet se aleja, de alguna manera, de su teoría de los conjuntos abstractos y se involucra en la teoría de la medida de Lebesgue. Es por eso por lo que, no consideramos trabajar los teoremas 7 y 8, enunciados en esta parte, ya que se salen del objetivo que nos interesa fundamentalmente. Sin embargo, reconocemos pertinente un estudio profundo de esta sección de la tesis de Fréchet que permitiría ampliar las conclusiones de este trabajo, ya que ahí muestra la insuficiencia de las clases (L) y la necesidad de la definición de las clases (V).

Taylor muestra una carta de Hadamard a Fréchet, donde señala que Hadarmard le platea a Fréchet comenzar con la noción de vecindad y no con la noción de limite, y deduce que esto pudo ser lo que hizo que Maurice iniciara un enfoque diferente de la Topología Abstracta de puntos fijos, lo que finalmente lo llevo a la idea de *écart*, que la presenta en la nota [Fréchet, 18], (Taylor, 1982).

A continuación, se muestra el extracto de esta carta.

> Feriez vous bien de partir, en général, de la notion de voisinage et non de celle de limite ? Ceci vous regarde, de même que la recherche de cas où, le raisonnement précédent n'étant plus valable, sa conclusion serait en défaut. (Carta de Hadamard a Fréchet en Taylor, 1982, p. 246)

De la carta notamos que, esta observación de Hadamard a Fréchet surge a partir de alguna comunicación que le hizo Fréchet a Hadamard sobre una sucesión de funciones con una función como límite y sucesiones de sucesiones.

❖ Sur les fonctions d'une infinité de variables

En esta nota, Fréchet introduce la clase de todas la sucesiones reales tal que cada sucesión es un elemento (Taylor, 1982)

> In his third note in the Comptes Rendus [FRÉCHET, 17], of date February 27, 1905, FRÉCHET considers a concrete illustration of his general theory by introducing the class of all real sequences $\{a_n\}$ each sequence being an element.

If $A = \{a_k\}$ and $A_n = \{a_k^{(n)}\}$, he defines A to be the limit of $\{A_n\}$ if and only if $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}(x) = a_k$ for each k. This class he denotes by E_∞. (Later, in his thesis, he denotes it by E_ω FRÉCHET observes that in E_∞ every derived set is closed and that a set is compact if and only if there exists a sequence $\{M_k\}$ of positive numbers such that $|a_k| < M_k$ for each k and each $A = \{a_k\}$ in the set. (p. 246)

❖ **La notion d'écart dans le Calcul fonctionnel**

Taylor menciona que, en esta nota, Maurice vuelve al punto de vista abstracto, en esta ocasión hace depender la noción de una sucesión que tiene un límite, de una idea de medición numérica de la cercanía entre dos elementos de un conjunto.

FRÉCHET returns to the abstract point of view. This time, however, he makes the notion of a sequence $\{A_n\}$ having a limit A depend on an idea of numerical measurement of the nearness of one element to another. He opens with a remark to the effect that WEIERSTRASS, in his lectures on the calculus of variations, made use of what FRÉCHET describes as the "voisinage de deux courbes infiniment voisins." FRÉCHET asserts that he will show the interest there is in extending this notion, under the name écart, to the case of two arbitrary elements. His procedure is to assume that, corresponding to two arbitrary elements A, B in a specified class of elements of arbitrary nature, there is a real number, denoted by (A, B). He calls this the écart of A and B. He assumes that (1) $(A, B) \geq 0$ and that (2) $(A, B) = 0$ if and only if $A = B$; also that (3) if (A, C) and (B, C) are infinitely small, so is (A, B). It is not explicitly stated that $(A, B) = (B, A)$, but I think this is intended. The meaning of (3) is not made precise here, but it is made precise in FRÉCHET's thesis (to be discussed in § 5). Finally, FRÉCHET states that a sequence {An} will be said to have limit A provided that $\lim_{n\to\infty} (A_n, A) = 0$. With this framework of assumptions FRÉCHET asserts that every derived set is closed. (Taylor, 1982, p. 246-247)

Entendemos que en esta nota Fréchet trabaja con la idea de *cercanía* o *proximidad de un elemento a otro*. Además, muestra interés en extender esta noción bajo el nombre de *écart* al caso de dos elementos arbitrarios, que es lo hace en su tesis. Entonces la *écart* juega el papel de *propiedad de referencia* para determinar de manera numérica la cercanía entre dos elementos de un conjunto.

Taylor considera que Fréchet usa la palabra *écart* basado en la terminología empleada por Camille Jordan, que llamó the écart of two points (x, y) y (a, b) a la expresión: $|x - a| + |y - b|$.

También menciona que con la *écart* define una operación funcional uniformemente continua en un conjunto, entre otras propiedades o características de las operaciones funcionales continuas y equicontinuas. Además, afirma que Fréchet en la mayoría de las situaciones del análisis clásico, la condición para determinar el tipo de convergencia de una sucesión de funciones se puede expresar con la ayuda de alguna *écart.*

En esta misma nota, Fréchet menciona cómo definir un *écart* en la familia de curvas continuas en el espacio de tres dimensiones. (Taylor, 1982)

Con esto entendemos que en este artículo Fréchet trabaja fuertemente la idea de *écart* en conjuntos de funciones, sin embargo, desde el punto de vista de su tesis, este todavía es un punto de vista particular, pues trabaja con conjunto de operaciones específicas.

Las publicaciones (Sur l'ècart de deux courbes et sur les courbes limites y les ensembles de courbes continues) contribuyen directamente a la tesis de Fréchet, ambas publicaciones tratan sobre la introducción y utilización de una *écart* en el estudio de la clase cuyos elementos son curvas continuas en *3-space* (Taylor, 1982).

❖ Les ensembles de courbes continues

En esta publicación, Fréchet va más allá en el desarrollo de ideas y resultados topológicos en la clase de curvas con *écart*, introduce la noción de elemento de condensación, de curva estrictamente interior a un conjunto, y expone algunos teoremas sobre conjuntos de curvas y uno relacionado con un teorema de Heine-Borel o Borel-Lebesgue (Taylor, 1982). Este último teorema lo generaliza de alguna manera en su tesis doctoral que son los Teoremas 15 y 17 en la enumeración de esta tesis (Ver anexo).

Ya con esta contextualización de la época en la que se desarrolla el conocimiento matemático de nuestro interés, consideramos que contamos con las herramientas para hacer el análisis de los usos de la métrica en la actividad matemática de Fréchet.

Dialectización: análisis de la actividad matemática de la obra

Como vimos en el análisis contextual de la obra, Fréchet define por primera vez, en su tesis doctoral, de manera axiomática la noción de distancia, además que esta definición la construye siguiendo su objetivo de generalizar propiedades del Análisis de variable real, al Análisis Funcional, con lo que da los primeros pasos para el desarrollo de la Teoría de Espacios Abstractos.

El análisis que a continuación presentamos está enfocado en el uso del concepto de distancia o métrica definido por Fréchet. En la problemática planteamos nuestro interés por el estudio de los usos del concepto de topología, en su génesis histórica, sin embargo, con el análisis contextual reconocimos que el trabajo matemático realizado por Fréchet en su tesis dio pasó a la constitución del concepto matemático de topología. Es por esto por lo que consideramos conveniente hacer la problematización planteada en esta investigación, enfocada en la actividad matemática de Fréchet en su tesis doctoral, particularmente nos interesa analizar los usos de la métrica y cómo estos usos intervienen en el proceso de generalización que hizo Fréchet.

Teoremas definidos en el capítulo 1. Basados en la definición de una clase (L)

Teorema 1

THÉORÈME. — *Étant donnée une opération U uniforme dans un ensemble extrémal E, il existe au moins un élément A de E tel que la limite supérieure **) μ (finie ou non) de U dans E soit égal à la limite supérieure de U dans tout ensemble K d'éléments de E auquel A est intérieur au sens étroit [en considérant E comme l'ensemble fondamental* (n° 8)].

Unidad de análisis

Teorema. Dada una operación U uniforme en un conjunto extrémal E, existe al menos un elemento A de E tal que el límite superior μ (finito o no) de U en E es igual al límite superior de U en cualquier conjunto K de elementos de E que A es interior en sentido estricto [considerando E como el conjunto fundamental (n°8)].

Demostración

El teorema es evidente cuando E tiene solamente un número finito de elementos o si U alcanza su límite en un elemento de E.

En el caso contrario, se puede encontrar, para cualquier n, un elemento A_n de E tal que $U(A_n) > \alpha_n, \alpha_n$ es igual a $\mu - \frac{I}{n}$, si μ es finito, o a n, si μ es infinito.

Un mismo elemento B no puede ser tal que $U(B) > \alpha_n$ para una infinidad de valores de n, de lo contrario habría $U(B) = \mu$, lo que contradice nuestra hipótesis. Así que hay una infinidad de elementos distintos en la sucesión $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ y como E es compacto, esta infinidad de elementos tiene al menos un elemento límite A. En definitiva, hay una sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$, extraída de la primera y que tiende a un elemento A de E, puesto que E es cerrado.

Digo que A satisface la condición enunciada.

En efecto, si K es un conjunto del que A es interior en sentido estricto, los elementos de la sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$, son todos los elementos de K a partir de un cierto rango q (de otro modo A sería límite de una sucesión de elementos de E que no pertenecen a K). Pero entonces el límite superior μ_1 de U en K es al menos igual a $U\left(A_{n_p}\right) > \alpha_{n_p}$ para cualquier $p > q$. Así que $\mu \geq \mu_1 > \alpha_{n_p}, \alpha_{n_p}$ tiende a μ. Por lo tanto $\mu_1 = \mu$.

El teorema anterior se enuncia de la misma manera para el límite inferior. (p. 8)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este es el primer teorema que Fréchet enuncia en la sección de operaciones continuas, sin embargo, menciona que es independiente de la noción de continuidad. También dice que fue enunciado por primera vez por Weierstrass para conjuntos de puntos y luego por Arzelà para conjuntos de curvas (Fréchet, 1906, p. 7,8).

De este teorema, Fréchet enuncia los dos corolarios siguientes:

Corolario 1: Toda operación CONTINUA en un conjunto extrémal E: 1° Es acotada en este conjunto; 2° En al menos un elemento de este conjunto alcanza su límite superior y en al menos un elemento de este conjunto alcanza su límite inferior. (Fréchet, 1906, p. 8)

Corolario 2: Toda operación semi-continua superiormente en un conjunto extrémal E: 1° Es acotada superiormente en E; 2° Alcanza en al menos un elemento de E su límite superior (Fréchet, 1906, p. 9)

- **Descripción del enunciado**

El teorema afirma que el límite superior de una operación uniforme, en un conjunto extrémal, es el mismo que en cualquier subconjunto de este con ciertas características.

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

El teorema es evidente cuando E tiene solamente un número finito de elementos o si U alcanza su límite en un elemento de E.

En el caso contrario, se puede encontrar, para cualquier n, un elemento A_n de E tal que $U(A_n) > \alpha_n, \alpha_n$ es igual a $\mu - \frac{I}{n}$, si μ es finito, o a n, si μ es infinito. Dado que la operación U no alcanza su límite en ningún elemento de E, entonces se puede encontrar para cualquier n un elemento A_n de E tal que $U(A_n) > \alpha_n$, es decir, un elemento mayor a un número $\mu - \frac{I}{n}$ (esto en caso de que exista el límite superior, lo que concuerda con la definición de límite superior) o mayor a un número n, (en caso de que no tenga límite superior).

Un mismo elemento B no puede ser tal que $U(B) > \alpha_n$ para una infinidad de valores de n, de lo contrario habría $U(B) = \mu$, lo que contradice nuestra hipótesis; ya que supone que U no alcanza su límite. Así que hay una infinidad de elementos distintos en la sucesión $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ y como E es extrémal (Def. 11) particularmente es compacto (Def. 10), esta infinidad de elementos tiene al menos un elemento límite A. En definitiva, hay una sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots$, extraída de la primera porque son elementos del conjunto E que es formado de elementos de una clase (L) (Def. 3) y que tiende a un elemento A de E, puesto que E es cerrado. (Def. 6), porque es extrémal (Def. 11)

Digo que A satisface la condición enunciada. Afirma que existe el elemento A que pide en el teorema.

En efecto, si K es un conjunto del que A es interior en sentido estricto, por la (Def. 8), no hay ninguna sucesión cuyos elementos pertenecen a E y no pertenecen a K tal que A sea su límite particularmente, los elementos de la sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$, son todos elementos de K a partir de un cierto rango q, arriba se dijo que A es límite de una sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$, entonces los elementos de la sucesión no pueden ser todos de K ni todos de E, (de otro modo A sería límite de una sucesión de elementos de E que no pertenecen a K, lo que contradice la (Def. 8). Pero entonces el límite superior μ_1 de U en K es al menos igual a $U\left(A_{n_p}\right) > \alpha_{n_p}$ porque μ_1 es el límite superior de U en K, entonces, $\mu_1 > U\left(A_{n_p}\right)$ y además por la primera parte de la demostración se tiene que $U\left(A_{n_p}\right) > \alpha_{n_p}$, por eso $\mu_1 > \alpha_{n_p}$ para cualquier $p > q$ porque a partir de cierto q es que los elementos de la sucesión pertenecen a K. Así que $\mu \geq \mu_1 > \alpha_{n_p}$, α_{n_p} tiende a μ. Por lo tanto $\mu_1 = \mu$.

El teorema anterior se enuncia de la misma manera para el límite inferior.

- **Observaciones**

Observamos que en realidad no está usando la métrica directamente para distinguir los elementos, ni para estudiar la convergencia, ya que las propiedades que satisface el conjunto E por ser un conjunto extrémal, que, particularmente es un conjunto compacto, le es suficiente para garantizar que cualquier infinidad de sus elementos tiene al menos un elemento límite.

3. **Definiciones y conceptos que utiliza**

- **Definiciones**

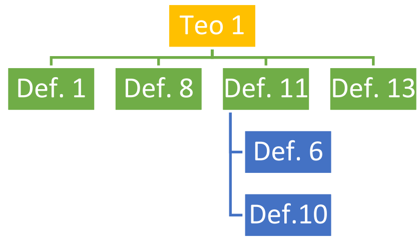

Fig. 3. Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  ○ Límite de una operación en su conjunto

Fase 2: Analítica

1. **Usos de la métrica:**

➢ "*hay una infinidad de elementos distintos en la sucesión* $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ *y como* E *es compacto, esta infinidad de elementos tiene al menos un elemento límite* A*.*" Afirma por la (Def. 10) que la sucesión de elementos distintos tiene al menos un elemento límite, es decir, que garantiza que una sucesión tiende a un elemento.

2. **Practicas**

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
Demostración			
Garantiza que una infinidad de elementos distintos tiene un límite	Así que hay una infinidad de elementos distintos en la sucesión $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ y como E es compacto, (Def. 10) esta infinidad de elementos tiene al menos un elemento límite A.	Porque la sucesión está formada por elementos del conjunto E que es extrémal (Def. 11), esto quiere decir que el conjunto E es compacto (Def. 10)	Para usar la condición II de la definición de la clase (L) (Def. 3) esto es para garantizar la existencia de una subsucesión convergente.

Teorema 2

12. Théorème. — *Si U est une opération continue dans un ensemble continu E, U prend en au moins un élément de E toute valeur comprise entre deux quelconques des valeurs prises par U.*

J'appelle ensemble continu, un ensemble tel qu'étant donnés deux quelconques de ses éléments A, B, on peut extraire de E un ensemble F dont chaque élément correspond à un point de l'intervalle $(0, 1)$ sur un axe $0t$ et inversement. La correspondance est supposée telle que si deux éléments A_1, A_2 de F correspondent à deux points t_1, t_2, A_1 tend vers A_2 quand t_1 tend vers t_2. Le théorème précédent a été démontré pour les fonctions de lignes par M. Arzelà (v, page 348). Sa démonstration se généralise immédiatement au cas actuel et revient à considérer dans F, l'opération U comme une fonction de t.

Unidad de análisis

Teorema. Si U es una operación continua en un conjunto continuo E, U tomará en al menos un elemento de E cualquier valor entre dos valores cualquiera de los tomados por U.

Definición

Llamo conjunto continuo, un conjunto tal que dado cualesquiera dos de sus elementos A, B, se puede extraer de E un conjunto F en el que cada uno de sus elementos corresponde a un punto del intervalo $(0,1)$ sobre un eje ot e inversamente. La correspondencia se supone tal que si dos elementos A_1, A_2 de F corresponden a dos puntos t_1, t_2, A_1 tiende a A_2 cuando t_1 tiende a t_2. El teorema anterior ha sido demostrado para las funciones de líneas por M. Arzelà (v, página 348).

Sobre la demostración

Su demostración se generaliza inmediatamente al caso actual y vuelve a considerar a F, la operación U como una función de t. (p. 9)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema es el segundo teorema que enuncia, podemos ver que no hace la demostración y afirma que se generaliza inmediatamente de la demostración de Arzelà para el caso de funciones de línea.

- **Descripción del enunciado**

Da una propiedad de una operación continua en un conjunto continuo.

2. Observaciones y complementos

Aunque no demuestra el teorema, nos parece interesante la definición de conjunto continuo, ya que se requiere del uso de la métrica para decir que una cosa *tiende a* otra cosa, y lo que encontramos interesante es entender qué significa que una cosa *tienda a* otra cosa.

3. **Definiciones y conceptos que utiliza**

- **Definiciones**

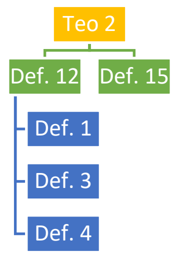

Fig. 4 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Conjunto
  - Intervalo
  - eje

Fase 2: Analítica

1. **Usos de la métrica**

Reconocemos el uso de la métrica en la definición de conjunto continuo cuando dice: "A_1 *tiende a* A_2 *cuando* t_1 *tiende a* t_2." Usa esta frase de *tiende a*, identificamos que se requiere de la métrica para ver que efectivamente una algo *tiende a* algo.

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
Enunciado			
Relaciona una operación continua con un conjunto continuo	U tomará en al menos un elemento de E que es un conjunto continuo (Def.15) cualquier valor entre dos valores cualquiera de los tomados por U.	Porque tiene una operación y el conjunto sobre el que se define es un conjunto continuo.	Para usar la definición de conjunto continuo y operación continua.
Demostración			
No hace la demostración, pero hay algo interesante en la definición de conjunto continuo.			
Definición 15			
¿qué hace?	**¿Cómo hace?**	**¿Por qué hace?**	**¿Para qué hace?**
Determina una propiedad para una correspondencia entre elementos de dos conjuntos	La correspondencia se supone tal que si dos elementos A_1, A_2 de F corresponden a dos puntos t_1, t_2, A_1 tiende a A_2 cuando t_1 tiende a t_2." Los elementos t_1, t_2 pertenecen al intervalo (0,1).	No sé por qué determina así la propiedad, sin embargo, lo que me interesa es que para determinar que A_1 *tiende a* A_2 y t_1 *tiende a* t_2 necesita definir para cada par de elementos una manera de determinar que una cosa *tiende a* otra cosa.	Para definir el conjunto continuo (Def. 15)

*Teorema 3

Lorsqu'il y a convergence uniforme, il y a aussi convergence quasi-uniforme. Dès lors, le théorème que nous avons énoncé plus haut est une conséquence du suivant :

Lorsqu'une suite d'opérations $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ continues dans un ensemble quelconque formé d'éléments d'une classe (L) converge quasi-uniformément dans E vers une opération U, celle-ci est continue dans E. La démonstration est la généralisation directe de celle de M. Borel (II, page 42). Ce théorème admet une réciproque, mais celle-ci ne s'applique qu'à un ensemble E extrémal.

Unidad de análisis

*Teorema: *Cuando una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ continuas en cualquier conjunto formado de elementos de una clase (L) converge casi-uniformemente en E a una operación de U, esta es continua en E*

No lo demuestra.

La demostración es una generalización directa de Borel (II, página 42). Este teorema admite un recíproco, pero éste sólo se aplica a un conjunto E extrémal. (p. 10)

Fase 1: Descriptiva

1. **Descripción general**

Esta proposición Fréchet no la declara como teorema, sin embargo, en este trabajo la reconocemos como teorema, puesto que antes de enunciarlo, Fréchet menciona que un teorema anterior es consecuencia de éste. Entendemos que el teorema anterior al que se refiere es al teorema de Borel, que a la vez es una generalización de uno que dio Arzelà, donde este último introdujo la noción de convergencia casi uniforme (Fréchet, 1906)

- **Descripción del enunciado**

Condiciones sobre convergencia para que el límite de una sucesión de operaciones continuas sea continuo.

2. **Observaciones y complementos**

   Fréchet menciona que este teorema admite un recíproco, pero no lo enuncia, en seguida conjugando este teorema 3 y el recíproco al que hace referencia enuncia el teorema 4.

3. **Definiciones y conceptos que utiliza**

- **Definiciones**

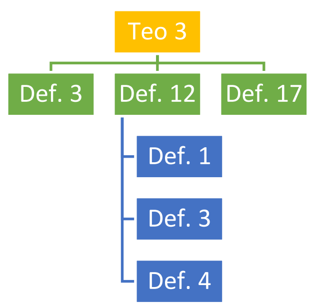

Fig. 5Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

Fase 2: Analítica

1. **Usos de la métrica**

Consideramos que seguramente sí requiere del uso de la métrica, puesto que quiere demostrar que una operación es continua, y para esto necesita la definición 12. Sin embargo, como no hace la demostración no podemos ver cómo la usa. En consecuencia, no contamos con la actividad matemática suficiente para hacer el análisis con los cuestionamientos analíticos.

*Teorema 4

Pour qu'une suite d'opérations U_1, U_2, ..., U_n, ... continues dans un même ensemble E formé d'éléments d'une classe (L) converge vers une opération continue dans E, il faut et il suffit que cette suite converge quasi-uniformément dans tout ensemble extrémal formé d'éléments de E.

Unidad de análisis

Para que una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ continuas en un mismo conjunto E formado de elementos de una clase (L) converge a una operación continua en E, es necesario y suficiente que la sucesión sea convergente casi-uniformemente en todos los conjuntos extrémal formados por elementos de E.
Es suficiente para demostrar que si un elemento A de E es límite de una sucesión de elementos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ se tiene: $$U(A) = \lim_{n=\infty} U(A_n).$$ Ahora bien, el conjunto F formado por elementos $A, A_1, A_2, \dots$ es extrémal. Podemos aplicar el reciproco que ya se ha demostrado en este caso. (p. 10)

Fase 1: Descriptiva

1. **Descripción general**

Este teorema lo enuncia, pero no lo de clara como tal, sin embargo, lo nombramos como teorema ya que antes de enunciarlo dice: "Sin embargo, podemos enunciar el reciproco del (*Teo. 3) aplicable a un conjunto cualquiera. En la combinación con el teorema directo, se obtiene la proposición siguiente:" y a continuación enuncia el teorema 4.

No hace la demostración, solo da un esbozo muy general.

- **Descripción del enunciado**

Condiciones necesarias y suficientes para que el límite de una sucesión de operaciones continuas sea una operación continua.

2. **Observaciones y complementos**

Menciona que será suficiente emplear la definición de operación continua (Def. 12): "Es suficiente para demostrar que si un elemento A de E es límite de una sucesión de elementos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ se tiene:

$U(A) = \lim_{n=\infty} U(A_n)$."

Además, menciona que, "el conjunto F formado por elementos $A, A_1, A_2, \dots$ es extrémal (Def. 11). Podemos aplicar el reciproco este reciproco no lo enuncia en la tesis ni dice si lo ha enunciado en otra parte, que ya se ha demostrado en este caso."

3. **Definiciones y conceptos que utiliza**

- **Definiciones**

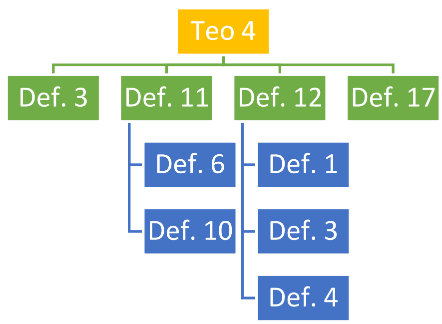

Fig. 6Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

No usa ningún concepto

Fase 2: Analítica

1. **Usos de la métrica**

Consideramos que hay una alta posibilidad de que se requiere del uso de la métrica, puesto que quiere demostrar que una operación es continua, y usa elementos de un conjunto extrémal que garantiza la convergencia, sin embargo, como no hace la demostración no contamos con la actividad matemática suficiente para responder los cuestionamientos analíticos.

Teorema 5

19. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème général suivant:

THÉORÈME. — *Pour que des opérations continues dans un même ensemble extrémal E formé d'éléments d'une classe (L), qui appartiennent à un même ensemble dénombrable*

14 MAURICE FRÉCHET.

D ou à son dérivé D', forment une famille compacte $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que les opérations de $\mathfrak{F}$ soient également continues et bornées dans leur ensemble en tout élément de E.

Unidad de análisis

Teorema. Para que las operaciones continuas de un mismo conjunto extrémal E formado de elementos de una clase (L), que pertenecen a un mismo conjunto numerable D o de su derivado D', formen una familia compacta Ñ, es necesario y suficiente que las operaciones de Ñ sean igualmente continuas y limitadas en su conjunto en cualquier elemento de E.

<u>Demostración.</u>

La condición es necesaria según el último lema. Para mostrar que es suficiente, es suficiente demostrar que, de cualquier sucesión infinita de operaciones de Ñ: $U_1, U_2, \ldots$ se puede extraer una sucesión que converge uniformemente en E a una operación que será necesariamente continua en E.

En efecto, sea $A_1, A_2, \ldots$ la sucesión de elementos del conjunto numerable D y considerar la sucesión S_n de números $x_1^{(n)} = U_n(A_1), \ldots, x_p^{(n)} = U_n(A_p), \ldots$ Dado que las operaciones de Ñ son limitadas en su conjunto en todo elemento de D, estos numeros $x_p^{(n)}$ están, para cada valor de p, incluyendo, cualquier n, entre dos numeros fijos λ_p y μ_p. De acuerdo con la última proposición que recordamos entonces se podrá extraer de la sucesión

$S_1, S_2, \dots$ una sucesión $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots$ de índices crecientes, tal que $x_p^{(n_q)} = U_{n_q}(A_p)$ converge a un cierto límite x_p y cualquier p. Esto significa que se puede extraer de la sucesión $U_1, U_2, \dots$ una sucesión de operaciones $U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_q}, \dots$ convergente en cualquier elemento de D.

De acuerdo con el segundo Lema, esta sucesión de operaciones también converge en cualquier elemento de E; de acuerdo con el primer Lema la convergencia será uniforme, y por lo tanto el límite continuo en E. (p. 13 y 14)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este es el tercer teorema que él enuncia como tal, sin embargo, en la enumeración realizada en esta investigación corresponde al teorema 5, Fréchet dice que este teorema es el objetivo que se ha propuesto.

Le llama teorema general y para poder enunciarlo y demostrarlo, primero enuncia tres lemas que demuestra y una proposición que no demuestra pero que dice que más adelante la demostrará, posterior a la demostración del teorema enuncia dos Notas sobre el teorema.

Los lemas que enuncia son:

1^er^ Lema. - El límite U de una sucesión convergente $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ de operaciones igualmente continuas en un conjunto E, es una operación continua en E. Además, si E es extrémal, la convergencia es necesariamente uniforme en E.

2^do^ Lema. - Considerando una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \dots$ convergente en un conjunto D. Si estas operaciones son igualmente continuas en el conjunto F formado por elementos de D y de su conjunto derivado D', la sucesión considerada es también convergente en F.

3^er^. Lema. - Para que las operaciones continuas de un mismo conjunto extrémal E formen una familia compacta Ñ, deben ser igualmente continuas y limitadas en su conjunto.

La proposición es:

Si se considera para cada valor entero de n, una sucesión infinita S_n de números $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots x_p^{(n)}, \dots$, incluso para cada valor de p, para cualquier n, entre dos números fijos

λ_p y μ_p, se puede extraer de la sucesión $S_1, S_2, \ldots$ una sucesión $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots$ de índices crecientes tales que $x_p^{(n_q)}$ tiende a un limite x_p, para cualquier número fijo p cuando n_q crece indefinidamente.

Las notas son:

NOTA 1. - Si sólo suponemos que el conjunto E es extrémal, la demostración anterior prueba algo. Prueba que si las operaciones de Ñ son igualmente continuas y limitadas su conjunto en todo elemento de $E \equiv D + D'$, se puede extraer de cualquier infinidad de operaciones de Ñ una sucesión que tienda a una operación continua en E. Pero no sabremos si la convergencia es uniforme. Por otra parte, se puede citar ejemplos en los que, en estas circunstancias, la convergencia no es uniforme. Ella siempre será uniforme en todo conjunto extrémal contenido en E.

NOTA 2. - Podría parecer que la condición $E \equiv D + D'$ donde D es numerable, es una condición introducida artificialmente únicamente para asegurar la exactitud del resultado. Veremos más adelante que es el caso contrario al caso general que se presenta en las aplicaciones (no. 45, 52).

- **Descripción del enunciado**

Da condiciones necesarias y suficientes para que una familia de operaciones continuas sea una familia de operaciones sea compacta.

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

La condición es necesaria según el último lema (lema 3): *“Para que las operaciones continuas de un mismo conjunto extrémal E formen una familia compacta* Ñ *deben ser igualmente continuas y limitadas en su conjunto.”* Para demostrar que es suficiente, es suficiente demostrar que, de cualquier sucesión infinita de operaciones de Ñ: $U_1, U_2, \ldots$ se puede extraer una sucesión que converge uniformemente en E a una operación que será necesariamente continua en E (Def. 19).

En efecto, sea $A_1, A_2, \ldots$ la sucesión de elementos del conjunto numerable D y considerar la sucesión S_n de números $x_1^{(n)} = U_n(A_1), \ldots, x_p^{(n)} = U_n(A_p), \ldots$ esto es $S_n = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)}, \ldots$ o bien, $S_n = U_n(A_1), U_n(A_2), \ldots, U_n(A_p), \ldots$ donde S_n es una sucesión de una sucesión de números (los valores de la operación U_n en cada elemento de la sucesión $A_1, A_2, \ldots$ formada de elementos del conjunto numerable D) Dado que las operaciones de Ñ son limitadas en su conjunto en todo elemento de D, estos números $x_p^{(n)}$ son, para cada valor de p, incluyendo, cualquier n, entre dos numeros fijos λ_p y μ_p. Se entiende que aquí está usando el concepto de operaciones limitadas en su conjunto, por la implicación que hace, y de lo que concluye se puede decir que, los números $x_p^{(n)}$ están entre los números fijos λ_p y μ_p, es decir, $\lambda_p < x_p^{(n)} < \mu_p$ porque son números, esto lo demuestra para poder usar la proposición 1, en seguida. De acuerdo con la última proposición que recordamos, entonces se podrá extraer de la sucesión $S_1, S_2, \ldots$ una sucesión $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots$ de indices crecientes, tal que $x_p^{(n_q)} = U_{n_q}(A_p)$ converge a un cierto límite x_p y cualquier p. Esto lo concluye por la proposición 1, dado que $S_n = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)}, \ldots$, entonces $S_1 = x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_p^{(1)}, \ldots$, $S_2 = x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_p^{(2)}, \ldots$, etcétera, dado que S_n satisface las condiciones de la proposición 1, se puede extraer una sucesión $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots$ de la sucesión $S_1, S_2, \ldots$ tal que $x_p^{(n_q)} = U_{n_q}(A_p)$ converge a un cierto límite x_p y cualquier p. Entonces la sucesión S_{n_q} queda de la siguiente manera:

$$S_{n_1} = x_1^{(n_1)}, x_2^{(n_1)}, \ldots, x_p^{(n_1)}, \ldots = U_{n_1}(A_1), U_{n_1}(A_2), \ldots U_{n_1}(A_p), \ldots,$$
$$S_{n_2} = x_1^{(n_2)}, x_2^{(n_2)}, \ldots, x_p^{(n_2)}, \ldots = U_{n_2}(A_1), U_{n_2}(A_2), \ldots U_{n_2}(A_p), \ldots,$$
$$\vdots,$$

Esto significa que se puede extraer de la sucesión $U_1, U_2, \ldots$ una sucesión de operaciones $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_q}, \ldots$ convergente en cualquier elemento de D. Esto se deduce porque $x_p^{(n_q)} = U_{n_q}(A_p)$ converge a un cierto límite x_p y cualquier p, puesto que los elementos de la sucesión $A_1, A_2, \ldots$ son elementos del conjunto D; se concluye que la sucesión $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_q}, \ldots$ converge en D. Ahora, dado que las operaciones $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_q}, \ldots$ son continuas en E, entonces por la (Def. 12) se tiene que $U_{n_q}(A) =$

$\lim_{p=\infty} U_{n_q}(A_p)$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe un número m tal que $p > m$ se tiene que $\left|U_{n_q}(A) - U_{n_q}(A_p)\right| < \varepsilon$ para cualquier q, por lo tanto por la (Def. 20) la sucesión de operaciones $U_{n_1}, U_{n_2}, \dots, U_{n_q}, \dots$ continuas en E son igualmente continuas, De acuerdo con el segundo lema: "*Considerando una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \dots$ convergente en un conjunto D. Si estas operaciones son igualmente continuas en el conjunto F formado por elementos de D y de su conjunto derivado D', la sucesión considerada es también convergente en F*"; esta sucesión de operaciones también converge en cualquier elemento de E. De acuerdo con el primer lema: "*El limite U de una sucesión convergente $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ de operaciones igualmente continuas en un conjunto E, es una operación continua en E. Además, si E es extrémal, la convergencia es necesariamente uniforme en E.*" la convergencia será uniforme, ya que por hipótesis el conjunto E es extrémal, y por lo tanto el límite continuo en E.

- **Observaciones**

En la demostración no se observa el uso explícito de la métrica relacionado con la convergencia de elementos del conjunto E, lo único que se identifica es que garantiza la convergencia, con la proposición 1, pero de una sucesión de números.

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

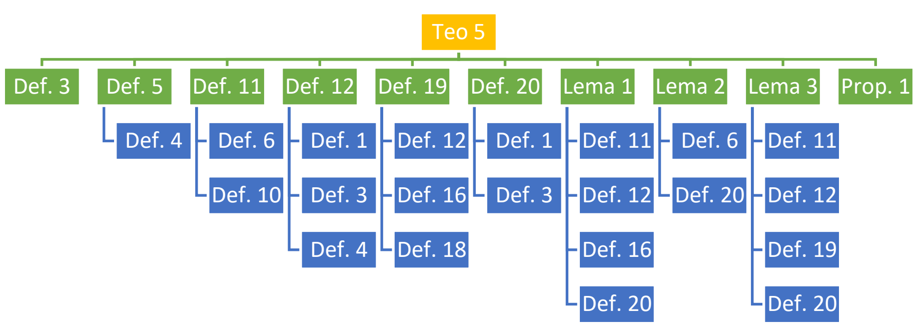

Fig. 7 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Operaciones limitadas en su conjunto
  - Conjunto numerable
  - Convergencia de sucesión de números (la entiendo como en la actualidad)

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

El uso de algo que permite la generalización es que trabaja con un conjunto E de elementos de una clase (L), porque E es el dominio de las operaciones con las que trabaja en el teorema y no determina la naturaleza de los elementos de E ni es necesario para hacer la demostración, dado esto no requiere de definir una métrica para trabajar la convergencia.

El uso de la métrica:

Reconocemos cuando dice: *"entonces se podrá extraer de la sucesión $S_1, S_2, \ldots$ una sucesión $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots$ de índices crecientes, tal que $x_p^{(n_q)} = U_{n_q}(A_p)$ converge a un cierto límite x_p y cualquier p.* En esta parte habla de la convergencia de una sucesión de números, dado que los elementos de la sucesión son los valores de la operación que son números. Aquí usa la proposición 1 en la cual para hacer referencia a la convergencia de la sucesión que extrae lo expresa con la frase **tiende a**, en la demostración del teorema reemplaza esta expresión por **converge a**, así que podemos entender estas frases como sinónimos, y aclaro que el uso de la métrica se da cuando determinamos la manera de decir que una cosa converge a o tiende a otra cosa, aunque aquí no dice cómo la usa y al parecer no es necesario.

2. **Practicas**

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
Demostración			
Garantiza la convergencia de una sucesión de números.	Por la (prop. 1) se podrá extraer de la sucesión $S_1, S_2, \ldots$ una sucesión $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots$ de indices crecientes, tal que $x_p^{(n_q)} = U_{n_q}(A_p)$ converge a un cierto límite x_p y cualquier p. Esta convergencia es de una sucesión de números.	En la demostración del teorema garantiza la convergencia usando la (prop. 1), sin embargo, en la proposición 1 no sé ve por qué se vale esa convergencia y no se ve porque hasta este momento no la demuestra.	Para garantizar que se puede extraer de la sucesión $U_1, U_2, \ldots$ una sucesión de operaciones $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_q}, \ldots$ convergente en cualquier elemento de D. Esta sucesión es la que utiliza para encontrar el límite continuo que necesita para demostrar el teorema.

Teorema 6

Théorème. — *Étant donnée une famille $\mathfrak{F}$ d'opérations bornées dans leur ensemble et également continues dans un ensemble quelconque E, la limite supérieure de $\mathfrak{F}$ est une opération continue dans E.*

Unidad de análisis

Teorema. Dada una familia Ñ de operaciones limitadas en su conjunto e igualmente continuas en un conjunto cualquiera E, el limite superior de Ñ es una operación continua en E.

Demostración.

Este teorema ha sido demostrado por M. ARZELÀ (V, página 9) en el caso donde los elementos son puntos de una recta. Su demostración se generaliza inmediatamente al caso actual, recordando que nuestra definición de continuidad hace innecesario el uso de intervalos. (p. 14)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema lo enuncia en la sección 20, después de definir el límite superior de una familia de operaciones.

No lo demuestra y dice que la demostración de Arzelà para el caso de puntos de una recta, se generaliza de inmediato al caso actual.

- **Descripción del enunciado**

Condiciones para que el límite superior de una familia de operaciones sea una operación continua

2. Observaciones y complementos

No hace la demostración

- **Observaciones**

Fréchet menciona que para generalizar la demostración de Arzelà no es necesario el uso de los intervalos, por la definición de continuidad que tiene.

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

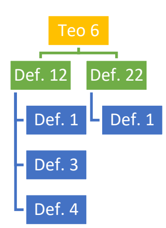

Fig. 8 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Operaciones limitadas en su conjunto

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Dado que no proporciona la demostración no contamos con la actividad matemática suficiente para responder a los cuestionamientos analíticos.

Teoremas definidos en el capítulo 1. Basados en la definición de una clase (V)

Teorema 9

THÉORÈME. — *L'ensemble dérivé d'un ensemble d'éléments d'une classe (V) est un ensemble fermé.*

Unidad de análisis

Teorema. - *El conjunto derivado de un conjunto de elementos de una clase (V) es un conjunto cerrado.*

Demostración.

En efecto, volvamos a las nociones empleadas más arriba. Ya que aquí el límite es deducido de la vecindad, podemos hacer corresponder a cada entero n con un entero q_n tal que $(A, A_{q_n}) < \frac{1}{n}$, y un entero $p_n \geq n$ tal que : $(A_{q_n}, A_{q_n}^{(p_n)}) < \frac{1}{n}$. Entonces tenemos:

$$(A, A_{q_n}^{(p_n)}) < f\left(\frac{1}{n}\right)$$

y en consecuencia la sucesión $A_{q_n}^{(p_n)}$ tiende a A cuando n tiende a infinito. (p. 18)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Es el primer teorema que enuncia después de definir una clase (V), lo enuncia en la sección 28, inmediatamente después de hacer la observación de que toda definición de límite satisface las condiciones I y II de la clase (L) pero no toda definición de límite puede ser deducida de la vecindad.

- **Descripción del enunciado**

Relaciona conjunto derivado y conjunto cerrado

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

Para complementar esta demostración voy a reescribir el enunciado de la siguiente manera: Sea E un conjunto de elementos de una clase (V) y E' su conjunto derivado, entonces E' es un conjunto cerrado.

En efecto, volvamos a las nociones empleadas más arriba (Obs. 17). Ya que aquí el límite es deducido de la vecindad, esto quiere decir que está considerando que en esta clase (V) el límite se deduce de la vecindad, entonces se cumple la (Obs. 17): "*podemos decir que una sucesión de elementos de una clase* (V): $A_1, A_2, \ldots$ *tiende a un elemento* A, *si la vecindad* (A_n, A) *tiende a cero con* $\frac{1}{n}$." Entonces, podemos hacer corresponder a cada entero n con un entero q_n tal que $(A, A_{q_n}) < \frac{1}{n}$, y un entero $p_n \geq n$ tal que: $(A_{q_n}, A_{q_n}^{(p_n)}) < \frac{1}{n}$ puesto que los elementos de las sucesión $A_{q_1}, A_{q_2}, \ldots, A_{q_n}, \ldots$ son elementos de E', quiere decir que cada uno es elemento límite del conjunto E, es decir, existen elementos de E: $A_{q_n}^{(p_1)}, A_{q_n}^{(p_2)}, \ldots, A_{q_n}^{(p_n)}, \ldots$ que tienden a cada A_{q_n}, Entonces como todos son elementos de una clase (V) tenemos:

$$(A, A_{q_n}^{(p_n)}) < f\left(\frac{1}{n}\right)$$

y en consecuencia la sucesión $A_{q_n}^{(p_n)}$ tiende a A cuando n tiende a infinito. Por lo tanto A es elemento de E', esto quiere decir que E' es cerrado (Def. 6).

- **Observaciones**

Primero reescribimos el enunciado del teorema, únicamente por simbología, es decir, para darle nombre a los conjuntos.

Las sucesiones que di en la demostración, las tomé así porque son de la misma forma de los elementos que da Fréchet en la demostración, dónde trabaja con las vecindades.

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

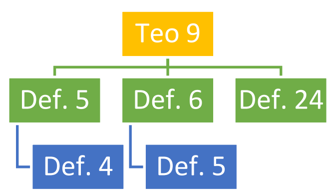

Fig. 9 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

No identificamos el uso de conceptos

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

➢ *"… podemos hacer corresponder a cada entero n con un entero q_n tal que $(A, A_{q_n}) < \frac{1}{n}$, y un entero $p_n \geq n$ tal que: $(A_{q_n}, A_{q_n}^{(p_n)}) < \frac{1}{n}$."* En esta parte reconocemos que hay un uso de la métrica, puesto que explícitamente está usando la vecindad para determinar la convergencia de las sucesiones A_{q_n} y $A_{q_n}^{(p_n)}$.

- *"Entonces tenemos:* $(A, A_{q_n}^{(p_n)}) < f\left(\frac{1}{n}\right)$ *y en consecuencia la sucesión* $A_{q_n}^{(p_n)}$ *tiende a* *A cuando n tiende a infinito."* Notamos más claramente que en efecto, la vecindad la usa para determinar la convergencia

En este teorema observamos que la frase *tiende a* se determina mediante la vecindad.

Sobre el uso de la generalización, identificamos que en el enunciado del teorema cuando pide específicamente que los elementos de los conjuntos con los que trabaja son *elementos de una clase* (V) (Def. 24).

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
	Demostración		
Determina la convergencia de las sucesiones A_{q_n} y $A_{q_n}^{(p_n)}$	Primero asume que en la clase (V) con la que está trabajando el límite se puede deducir de la vecindad, entonces usa la (Obs. 17) para determinar la convergencia mediante la vecindad de la siguiente manera *"… podemos hacer corresponder a cada entero n con un entero q_n tal que* $(A, A_{q_n}) < \frac{1}{n}$*, y un entero $p_n \geq n$ tal que :* $(A_{q_n}, A_{q_n}^{(p_n)}) < \frac{1}{n}$*."*	Porque tiene el conjunto derivado E' de un conjunto de elementos E de una clase (V), entonces toma al elemento A como elemento límite de E' y por eso se supone la existencia de la sucesión $A_{q_1}, A_{q_2}, \dots, A_{q_n}, \dots$ tal que $(A, A_{q_n}) < \frac{1}{n}$ y el mismo razonamiento se usa tomando los elementos A_{q_n} como elementos límite del conjunto E y usando la sucesión $A_{q_n}^{(p_1)}, A_{q_n}^{(p_2)}, \dots, A_{q_n}^{(p_n)}, \dots$ tal que $(A_{q_n}, A_{q_n}^{(p_n)}) < \frac{1}{n}$	Para determinar que la vecindad de los elementos A y $A_{q_n}^{(p_n)}$ $(A, A_{q_n}^{(p_n)}) < f\left(\frac{1}{n}\right)$

Garantiza que una sucesión converge al mismo elemento que otra	Entonces por la (Def. 24) tenemos: $\left(A, A_{q_n}^{(p_n)}\right) < f\left(\frac{1}{n}\right)$ y en consecuencia por la (Obs. 17) la sucesión $A_{q_n}^{(p_n)}$ tiende a A cuando n tiende a infinito.	Porque ya tiene que las vecindades (A, A_{q_n}) y $\left(A_{q_n}, A_{q_n}^{(p_n)}\right)$ son menores que $\frac{1}{n}$.	Para determinar que el conjunto E' es cerrado (Def. 6)

Teorema 10

29. THÉORÈME. — *L'ensemble P des éléments de condensation *) d'un ensemble condensé E formé d'éléments d'une classe (V) est un ensemble parfait ou nul **).*

Unidad de análisis

Teorema-. *El conjunto P de elementos de condensación de un conjunto condensado E formado de elementos de una clase (V) es un conjunto perfecto o nulo*

Demostración.

En efecto, primero podemos mostrar que P es un conjunto cerrado sin suponer que E es condensado e incluso para una clase (L) cualquiera. Porque si A es cualquier elemento que es límite de los elementos $A_1, A_2, \ldots$ de P, es en primer lugar, un elemento límite de E ya que P está contenido en E' que es cerrado de acuerdo con el teorema anterior. Además, si se elimina de E un conjunto numerable, los elementos $A_1, A_2, \ldots$ siguen siendo límites del conjunto restante E_1 (sin pertenecer a él necesariamente) puesto que son elementos de condensación de E. Entonces A es también elemento límite de E_1', que también es cerrado. Por lo tanto A sigue siendo elemento límite de E_1, es un elemento de condensación.

Ahora mostraremos que todo elemento de P pertenece a P'. En efecto, sea A un elemento de P, y E_n el conjunto de los elementos B de E tales que $\frac{1}{n+1} < (B, A) \leq \frac{1}{n}$. Existe una infinidad de conjuntos que son no numerables, de lo contrario habría un entero q tal que el conjunto de los elementos B de E verifican que $(A, B) \leq \frac{1}{q+1}$ es numerable y para la sucesión A no sería un elemento de condensación. Así, entre los conjuntos E_n, hay una infinidad que son no numerables: $E_{n_1}, E_{n_2}, \ldots$ tomando los indices en orden creciente. *Como E es condensado*, el conjunto no numerable E_{n_p} da lugar al menos a un elemento de condensación A_{n_p}. A_{n_p}es además distinto de A puesto que es límite de elementos B tales que (A, B) es mayor que $\frac{1}{n_p+1}$. Se ve fácilmente que (A_{n_p}, A) tiende a cero, así que A pertenece a P'. (p. 19)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Lo enuncia en la sección 29, luego de decir que se limitará al estudio de las clases (V), es decir las clases (L) donde la definición de límite se deduce de la vecindad. (Fréchet, 1906, p. 19)

Fréchet hace dos notas al pie de página, en la primera, da la definición de conjunto condensado y en la segundad dice que la demostración que da es una generalización de una demostración dada por Lindelöf para puntos del espacio y que solo insiste en los puntos de la demostración que exige algunas precauciones para esta generalización.

Después de este teorema enuncia el teorema 11: Sea E un conjunto condensado formado de elementos de una clase (V). El conjunto D de elementos de E que no son elementos de condensación de E es un conjunto numerable. El cual no demuestra.

- **Descripción del enunciado**

Propiedades de un conjunto de elementos de condensación

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

En efecto, primero podemos mostrar que P es un conjunto cerrado (Def. 6*): "P contiene a su conjunto derivado*", sin suponer que E es condensado e incluso para una clase (L) cualquiera. Ya que si A pertenece a P', por las (Def. 5 y 4) A es cualquier elemento que es límite de los elementos $A_1, A_2, \dots$ de P, es en primer lugar, un elemento límite de E ya que P está contenido en E' porque P es un conjunto de condensación (Def. 25) de un conjunto condensado E, y los elementos de condensación son elementos límite de E, entonces $P \subset E'$ que es cerrado de acuerdo con el teorema anterior (Teo. 9). Además, si se elimina de E un conjunto numerable, los elementos $A_1, A_2, \dots$ siguen siendo límites del conjunto restante E_1, es decir, los elementos $A_1, A_2, \dots$ son elementos de E_1', entonces A es elemento límite de E_1' (sin pertenecer a él necesariamente) puesto que son elementos de condensación de E (Def. 9). Entonces A es también elemento límite de E_1', que también es cerrado. Por lo tanto A sigue siendo elemento límite de E_1, dado que E_1se obtuvo eliminando una infinidad numerable de elementos del conjunto E, entonces A es un elemento de condensación de E, es decir, A es elemento de P, por lo tanto P' es un subconjunto de P.

Ahora mostraremos que todo elemento de P pertenece a P', es decir, que todo elemento de P es elemento límite de P. En efecto, sea A un elemento de P, entonces A es elemento de condensación del conjunto condensado E y E_n el conjunto de los elementos B de E tales que $\frac{1}{n+1} < (B, A) \leq \frac{1}{n}$. Existe una infinidad de conjuntos que son no numerables, de lo contrario habría un entero q tal que el conjunto de los elementos B de E verifican que $(A, B) \leq \frac{1}{q+1}$ es numerable y en consecuencia A no sería un elemento de condensación, porque si se elimina esa cantidad numerable de elementos entonces A no sería elemento de condensación. Así, entre los conjuntos E_n, hay una infinidad que son no numerables: $E_{n_1}, E_{n_2}, \dots$ tomando los indices en orden creciente. *Como* E *es condensado* (Def. 25), el conjunto no numerable E_{n_p} da lugar al menos a un elemento de condensación A_{n_p} entonces por la (Def. 9) A_{n_p}es elemento límite de E que también es un elemento límite de todo conjunto que se obtiene eliminando de E una infinidad numerable de elementos, así $A_{n_p} \in P$. A_{n_p}es además distinto de A puesto que es límite de elementos B tales que (A, B) es mayor que $\frac{1}{n_p+1}$. Se ve fácilmente que (A_{n_p}, A) tiende a cero, entonces A es límite de elementos de P, así que A pertenece a P'.

Por lo tanto, el conjunto P es perfecto.

- **Observaciones**

Fréchet menciona que solo insiste en los puntos de la demostración que exige algunas precauciones para esta generalización, sin embargo, en la demostración no hace referencia a esos puntos, entonces, entiendo que esto puntos a los que se refiere son la parte de la demostración donde el conjunto P es perfecto, dado que sólo demuestra que el conjunto P es perfecto, y no menciona nada sobre la posibilidad de que el conjunto P sea nulo.

En la primera parte de la demostración, dice que puede demostrar que P contiene a su conjunto derivado, sin suponer que el conjunto E es condensado, incluso lo demuestra para cualquier clase (L), en esta parte no se encontró ningún uso de la métrica específicamente relativo a una clase (V).

En la segunda parte de la demostración, sí reconozco dos usos de la métrica.

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

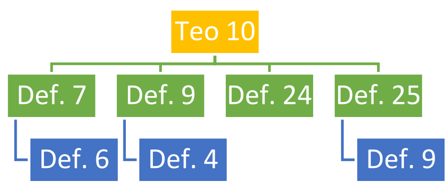

Fig. 10 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Conjunto nulo
  - Conjunto numerable
  - Conjunto no numerable

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Los usos de la métrica que reconozco están en la última parte de la demostración: *"A_{n_p} es además distinto de A, puesto que es límite de elementos B tales que (A, B) es mayor que $\frac{1}{n_p+1}$. Se ve fácilmente que (A_{n_p}, A) tiende a cero, así que A pertenece a P'."*

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
	Demostración		
Distingue dos elementos de un conjunto de elementos de condensación	… A_{n_p} es además distinto de A, puesto que es límite de elementos B tales que (A, B) es mayor que $\frac{1}{n_p+1}$.	Porque A no es elemento límite de los elementos B.	Para mostrar que A es límite de los elementos A_{n_p} de P.
Garantiza la convergencia de una sucesión de elementos	Se ve fácilmente que (A_{n_p}, A) tiende a cero.	Porque son elementos de condensación de un conjunto condensado	Para mostrar que A es elemento límite de P y así probar que $P' \subset P$

Teorema 11

30. THÉORÈME. — *Soit E un ensemble condensé formé d'éléments d'une classe (V). L'ensemble D des éléments de E qui ne sont pas des éléments de condensation de E est un ensemble dénombrable* ***).

Unidad de análisis

Teorema. - *Sea E un conjunto condensado formado de elementos de una clase (V). El conjunto D de elementos de E que no son elementos de condensación de E es un conjunto numerable* (p. 19)

No hace la demostración y hace una nota al pie de página

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema lo enuncia inmediatamente después de la demostración del teorema 10. No lo demuestra y hace una nota al pie de página diciendo que es la misma nota para el teorema anterior.

En seguida, enuncia el siguiente corolario:

31. Corolario. - Todo conjunto cerrado y condensado formado de elementos de una clase (V) es la suma de un conjunto numerable y de un conjunto perfecto o nulo sin elementos comunes. (p. 19)

- **Descripción del enunciado**

Propiedad de un conjunto de elementos que no son de condensación

2. Observaciones y complementos

No hace la demostración

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

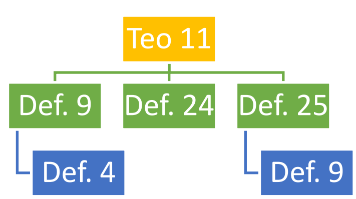

Fig. 11 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Conjunto numerable

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Dado que no hace la demostración no contamos con la actividad matemática para responder los cuestionamientos analíticos.

Teorema 12

32. THÉORÈME. — *L'ensemble D de ceux des éléments d'un ensemble compact E d'éléments d'une classe (V) qui n'appartiennent pas à l'ensemble E' dérivé de E est dénombrable *).*

Unidad de análisis

Teorema. – *El conjunto D de los elementos de un conjunto compacto E de elementos de una clase (V) que no pertenece al conjunto E' derivado de E es numerable*

Demostración

En efecto, si A es un elemento de D, llamamos ρ_A el límite inferior ≥ 0 de la vecindad de A con los elementos de E'. El número ρ_A es positivo, de lo contrario A sería un elemento límite de E' y como consecuencia pertenecería a E'.

Digo que el número de los elementos de D para que $\rho_A > \frac{1}{n}$, es finito. En efecto, de lo contrario, podríamos tener una infinidad $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$ todos distintos y tienden a un límite B. Entonces, tomando p lo suficientemente grande tendríamos $(A_p, B) < \frac{1}{n} < \rho_{A_p}$, lo cual es imposible, ya que B, limite de elementos de E, pertenecen a E', contrariamente a la definición de ρ_{A_p}.

Por lo tanto, hay un número finito de elementos A de D: $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \dots, A_n^{(p_n)}$ tales que $\rho_A \geq \frac{1}{n}$.

Si consideramos la sucesión numerable:

$$A_1^{(1)}, \ldots, A_1^{(p_1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_2^{(p_2)}, \ldots, A_n^{(1)}, \ldots, A_n^{(p_n)}, \ldots,$$

Vemos que todos los elementos de D están inscritos cada uno al menos una vez. Entonces D es numerable. (p. 19, 20)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema lo enuncia después en la sección 32, y hace una nota al pie de página, donde dice que la demostración del caso dónde los elementos de E son puntos, no se generaliza a este caso más general.

Además, en seguida de la demostración de este teorema, Fréchet enuncia lo siguiente:

Afirmación 20. En particular vemos que si E es cerrado, E se descompone en su conjunto derivado E' y un conjunto numerable D. (p. 20)

Corolario 3. Si el conjunto derivado E' de un conjunto compacto E formado de elementos de una clase (V) es numerable, el conjunto E es numerable.

Corolario 4. Un conjunto extrémal cualquiera F formado de elementos de una clase (V) puede considerarse como el conjunto derivado de un conjunto de elementos de clase (V).

- **Descripción del enunciado**

Propiedad del conjunto de elementos que no son elemento límite

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

En efecto, si A es un elemento de D, se tiene que A no es elemento límite de E, esto es que no existe una sucesión de elementos de E que tiendan a A, llamamos ρ_A el límite inferior ≥ 0 de la vecindad de A con los elementos de E', toma la vecindad de A con elementos de E'. El número ρ_A es positivo, de lo contrario A sería un elemento límite de E' y como consecuencia pertenecería a E' por el (Teo. 9) y no puede ser porque A es elemento de D.

Digo que el número de los elementos de D para que $\rho_A > \frac{1}{n}$, es finito. En efecto, de lo contrario, podríamos tener una infinidad $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$ todos distintos y tienden a un límite B. porque son elementos de D (Def. 10) que es compacto (Obs. 6). Entonces, tomando p lo suficientemente grande tendríamos por la (Obs. 17) $(A_p, B) < \frac{1}{n} < \rho_{A_p}$, así B sería elemento límite de elementos de E lo cual es imposible, ya que B, limite de elementos de E, pertenece a E', contrariamente a la definición de ρ_{A_p} $(A_p, B) > \rho_{A_p}$.

Por lo tanto, hay un número finito de elementos A de D: $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \dots, A_n^{(p_n)}$ tales que $\rho_A \geq \frac{1}{n}$.

Si consideramos la sucesión numerable:

$$A_1^{(1)}, \dots, A_1^{(p_1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_2^{(p_2)}, \dots, A_n^{(1)}, \dots, A_n^{(p_n)}, \dots,$$

Vemos que todos los elementos de D están inscritos cada uno al menos una vez. Entonces D es numerable. Para demostrar que D es numerable, de alguna manera hace corresponder sus elementos con los elementos de una sucesión numerable.

- **Observaciones**

Para esta demostración define *límite inferior de una vecindad* (Def. 26) y lo usa para distinguir entre los elementos.

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

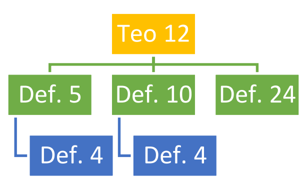

Fig. 12 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Conjunto numerable
  - Sucesión numerable

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

- *"Digo que el número de los elementos de D para que $\rho_A > \frac{1}{n}$, es finito. En efecto, de lo contrario, podríamos tener una infinidad $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$ todos distintos y tienden a un límite B. Entonces, tomando p lo suficientemente grande tendríamos $(A_p, B) < \frac{1}{n} < \rho_{A_p}$, lo cual es imposible, ya que B, limite de elementos de E, pertenecen a E', contrariamente a la definición de ρ_{A_p}."*

  Los usos de la métrica que reconocemos en esta parte son donde usa la vecindad para ver que los elementos de la sucesión tienden a un elemento.

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
Demostración			
Demuestra que un elemento no puede ser elemento límite	"podríamos tener una infinidad de elementos $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$ todos distintos y tienden a un límite B. porque son elementos de D (Def. 10) que es compacto (Obs. 6). Entonces, tomando p lo suficientemente grande tendríamos por la (Obs. 17) $(A_p, B) < \frac{1}{n} < \rho_{A_p}$, así B sería elemento límite de elementos de E lo cual es imposible, ya que B, limite de elementos de E, pertenece a E', contrariamente a la definición de ρ_{A_p} $(A_p, B) > \rho_{A_p}$"	Porque supone que tiene una infinidad de elementos distintos que tienden a un elemento B, y por la (Obs. 6) se puede decir que la vecindad $(A_p, B) < \frac{1}{n} < \rho_{A_p}$, sin embargo, usando el límite inferior de una vecindad de los elementos que son límite y los que no son elemento límite, llega a que la vecindad también debe de ser mayor que ρ_{A_p}, así se llega a una contradicción.	Para probar que el conjunto D tiene que tener una cantidad finita de elementos que cumple la propiedad $\rho_A > \frac{1}{n}$.

Teorema 13

THÉORÈME. — *Si un ensemble fermé F appartient à un ensemble compact E formé d'éléments d'une classe (V), on obtiendra F en supprimant de E les éléments* INTÉRIEURS *à chacun des sphéroïdes d'un certain ensemble dénombrable de sphéroïdes* *).

Unidad de análisis

TEOREMA. - *Si un conjunto cerrado F pertenece a un conjunto compacto E formado de elementos de una clase (V), obtendremos F eliminando de E los elementos INTERIORES a cada esferoide de un cierto conjunto numerable de esferoides.*

Demostración.

En efecto, sea G el conjunto complementario de F, es decir, el conjunto de elementos de E que no forman parte de F. Cualquier elemento A de G, se puede hacer corresponder con un número ρ_A que será el límite inferior de la vecindad de A con cada uno de los elementos de F. El número $\rho_A > 0$ no puede ser cero, de lo contrario A pertenecería a F como límite de elementos de F.

Ahora formamos una sucesión numerable de elementos de G:

$$A_1^{(1)}, \dots, A_1^{(p_1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_2^{(p_2)}, \dots, A_n^{(1)}, \dots, A_n^{(p_n)}, \dots$$

Tal que 1° tenemos $\rho_{A_n^{(1)}} \geq \frac{1}{n}, \dots, \rho_{A_n^{(p_n)}} \geq \frac{1}{n}$ cualquiera que sea n; 2° si A es un elemento de G tal que: $\rho_A \geq \frac{1}{n}$, Tenemos una de las desigualdades $\left(A, A_1^{(1)}\right) < \frac{1}{n}, \dots, \left(A, A_n^{(p_n)}\right) < \frac{1}{n}$. Para mostrar que esto es posible, suponemos la sucesión formada hasta $A_{n-1}^{p_{n-1}}$ y llamaremos en general $I_{A_n^{(q)}}$ el conjunto de elementos B de E tales que; $(B, A_n^{(q)}) < \frac{1}{n}$. Tomemos entonces un elemento A de G (si existe) tal que $\rho_A \geq \frac{1}{n}$ y que no forma parte de ninguno de los conjuntos $I_{A_1^{(1)}}, \dots, I_{A_{n-1}^{(p_{n-1})}}$. Podemos tomarlo como $A_n^{(1)}$. Entonces, tomamos, si existe, un elemento A de G tal que $\rho_A \geq \frac{1}{n}$ y que no forma parte de ninguno de los conjuntos $I_{A_1^{(1)}}, \dots, I_{A_{n-1}^{(p_{n-1})}}, I_{A_n^{(1)}}$. Lo llamaremos $A_n^{(2)}$; y así sucesivamente. Formaremos así de poco en poco una sucesión $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \dots$ que no contendrá ningún termino, pero que seguramente contendrá solamente un número finito. En efecto, de acuerdo con su formación, son todos distintos. Si hubiera una infinidad, podríamos extraer una sucesión $B_1, B_2, \ldots$ con límite B y entonces para q suficientemente grande tendríamos $(B_q, B_{q+p}) < \frac{1}{n}$ cualquier p, es decir, que B_{q+p} sería interior a I_{B_q}, contrario a la hipótesis.

La sucesión está formada como hemos enunciado, entonces es fácil ver que F es el conjunto de elementos de E que no forman parte de ninguno de los conjuntos

$$I_{A_1^{(1)}}, I_{A_1^{(2)}}, \ldots, I_{A_1^{(p_1)}}, I_{A_2^{(1)}}, \ldots, I_{A_n^{(p_n)}}, I_{A_{n+1}^{(1)}}, \ldots,$$

Lo que demuestra la proposición. (p. 21 y 22)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema lo enuncia en seguida de la definición de un esferoide e interior de un esferoide, esto abarca la sección 34 de la tesis de Fréchet.

Hace una nota al pie de página, donde dice que la demostración es una generalización de Zoretti (XXIII, página 5) para puntos del plano

- **Descripción del enunciado**

Propiedad del conjunto de elementos que no son interiores a una cantidad numerable de esferoides

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

En efecto, sea G el conjunto complementario de F, es decir, el conjunto de elementos de E que no forman parte de F. Cualquier elemento A de G, se puede hacer corresponder con un número ρ_A que será el límite inferior de la vecindad (Def. 26) de A con cada uno de los elementos de F. El número $\rho_A > 0$ no puede ser cero, de lo contrario A pertenecería a F como límite de elementos de F.

Ahora formamos una sucesión numerable de elementos de G:

$$A_1^{(1)}, \dots, A_1^{(p_1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_2^{(p_2)}, \dots, A_n^{(1)}, \dots, A_n^{(p_n)}, \dots$$

Tal que 1° tenemos $\rho_{A_n^{(1)}} \geq \frac{1}{n}, \dots, \rho_{A_n^{(p_n)}} \geq \frac{1}{n}$ cualquiera que sea n; 2° si A es un elemento de G tal que: $\rho_A \geq \frac{1}{n}$, Tenemos una de las desigualdades $\left(A, A_1^{(1)}\right) < \frac{1}{n}, \dots, \left(A, A_n^{(p_n)}\right) < \frac{1}{n}$. Para mostrar que esto es posible, suponemos la sucesión formada hasta $A_{n-1}^{p_{n-1}}$ y llamaremos en general $I_{A_n^{(q)}}$ entiendo que estos son los esferoides, el conjunto de elementos B de E tales que; $(B, A_n^{(q)}) < \frac{1}{n}$. Tomemos entonces un elemento A de G (si existe) tal que $\rho_A \geq \frac{1}{n}$ y que no forma parte de ninguno de los conjuntos $I_{A_1^{(1)}}, \dots, I_{A_{n-1}^{(p_{n-1})}}$. Podemos tomarlo como $A_n^{(1)}$. Entonces, tomamos, si existe, un elemento A de G tal que $\rho_A \geq \frac{1}{n}$ y que no forma parte de ninguno de los conjuntos $I_{A_1^{(1)}}, \dots, I_{A_{n-1}^{(p_{n-1})}}, I_{A_n^{(1)}}$. Lo llamaremos $A_n^{(2)}$; y así sucesivamente. Formaremos así de poco en poco una sucesión $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \dots$ que no termina, pero que seguramente contendrá solamente un número finito. En efecto, de acuerdo con su formación, son todos distintos, ninguno de los elementos de esta sucesión pertenece a un mismo conjunto. Si hubiera una infinidad puesto que el conjunto E es compacto (por la Obs. 6) tendríamos que G es compacto (Def. 10) esa infinidad de elementos tendría un elemento límite, así que por la (Def. 3), podríamos extraer una sucesión $B_1, B_2, \dots$ con límite B y entonces para q suficientemente grande tendríamos $(B_q, B_{q+p}) < \frac{1}{n}$ cualquier p, es decir, que B_{q+p} sería interior a I_{B_q} (Def. 27), contrario a la hipótesis. Entiendo que contradice la formación de la sucesión $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \dots$

La sucesión está formada como hemos enunciado, entonces es fácil ver que F es el conjunto de elementos de E que no forman parte de ninguno de los conjuntos

$I_{A_1^{(1)}}, I_{A_1^{(2)}}, \dots, I_{A_1^{(p_1)}}, I_{A_2^{(1)}}, \dots, I_{A_n^{(p_n)}}, I_{A_{n+1}^{(1)}}, \dots$, Estos son los esferoides.

Entonces F es el conjunto de los elementos $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \dots$, se tendría que demostrar que F es cerrado. Sea t un elemento límite de F, supongamos que t no pertenece a F, entonces t es elemento de G, eso implica que $(t, A_n^{(p)}) > \rho_t$ lo cual es imposible porque t es elemento límite de F, por lo tanto t debe pertenecer a F.

Lo que demuestra la proposición.

- **Observaciones**

Sí hace la distinción de dos elementos, pero porque están en conjuntos distintos.

3. **Definiciones y conceptos que utiliza**

- **Definiciones**

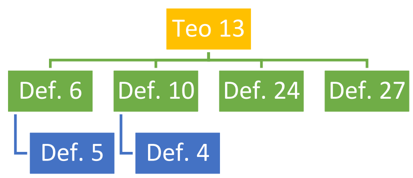

Fig. 13 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Conjunto numerable
  - Conjunto complementario
  - Sucesión numerable

Fase 2: Analítica

1. **Usos de la métrica**

Reconozco usos de la métrica en las siguientes partes de la demostración:

➢ *"Cualquier elemento A de G, se puede hacer corresponder con un número ρ_A que será el límite inferior de la vecindad (Def. 26) de A con cada uno de los elementos de F. El número $\rho_A > 0$ no puede ser cero, de lo contrario A pertenecería a F como límite de elementos de F."* Usa la vecindad mediante el límite inferior para determinar si un elemento pertenece o no a un conjunto.

- *"2° si A es un elemento de G tal que: $\rho_A \geq \frac{1}{n}$, Tenemos una de las desigualdades $\left(A, A_1^{(1)}\right) < \frac{1}{n}, \ldots, \left(A, A_n^{(p_n)}\right) < \frac{1}{n}$."* Usa explícitamente la vecindad, la usa menor que un número, y lo puede hacer así porque todos son elementos de un mismo conjunto, sin embargo.
- *"llamaremos en general $I_{A_n^{(q)}}$* entiendo que estos son los esferoides, *el conjunto de elementos B de E tales que; $\left(B, A_n^{(q)}\right) < \frac{1}{n}$."* Y *"podríamos extraer una sucesión $B_1, B_2, \ldots$ con límite B y entonces para q suficientemente grande tendríamos $\left(B_q, B_{q+p}\right) < \frac{1}{n}$ cualquier p, es decir, que B_{q+p} sería interior a I_{B_q}",* Aquí usa la vecindad para trabajar con los elementos interiores de un esferoide.

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
	Demostración		
Garantiza que un elemento no puede pertenecer a determinado conjunto.	"Cualquier elemento A de G, se puede hacer corresponder con un número ρ_A que será el límite inferior de la vecindad de A (Def. 26) con cada uno de los elementos de F. El número $\rho_A > 0$ no puede ser cero, de lo contrario A pertenecería a F como límite de elementos de F".	Porque tiene dos conjuntos tal que G es el conjunto complementario de F.	Para formar una sucesión numerable de elementos de G.
Determina lo que tiene que cumplir un elemento si pertenece a un conjunto.	"si A es un elemento de G tal que: $\rho_A \geq \frac{1}{n}$, Tenemos una de las desigualdades $\left(A, A_1^{(1)}\right) < \frac{1}{n}, \ldots, \left(A, A_n^{(p_n)}\right) < \frac{1}{n}$."	Esto se puede porque los elementos A y $A_n^{(q)}$ pertenecen al conjunto G.	Para determinar los elementos interiores de esferoides.

Determina los elementos interiores de esferoides.	"llamaremos en general $I_{A_n^{(q)}}$ entiendo que estos son los esferoides, el conjunto de elementos B de E tales que; $(B, A_n^{(q)}) < \frac{1}{n}$."	Porque está definiendo los esferoides con los que va a trabajar.	Para garantizar que los elementos de la sucesión $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \ldots$ son todos distintos y que son un número finito.
Determina elemento interior a un esferoide específico.	Lo hace mediante la convergencia de una sucesión: "podríamos extraer una sucesión $B_1, B_2, \ldots$ con límite B y entonces para q suficientemente grande tendríamos $(B_q, B_{q+p}) < \frac{1}{n}$ cualquier p, es decir, que B_{q+p} sería interior a I_{B_q}",	Porque supone que la sucesión tiene una infinidad de elementos	

Teorema 14

THÉORÈME. — *Tout ensemble compact formé d'éléments d'une classe* (V) *est limité.*

Unidad de análisis

TEOREMA. *Todo conjunto compacto formado de elementos de una clase* (V) *es limite.*

Demostración.

En efecto, en el caso contrario, podríamos encontrar, cualquiera que sea n, dos elementos A_n, B_n de E tal que $(A_n, B_n) > n$, y, ya que E es compacto, podemos suponer que A_n, B_n tienden a dos límites respectivamente A, B. Ahora, para n suficientemente grande, tendremos:

$(A_n, A) < 2(A, B)$, $(A, B) < 2(A, B)$,

De donde:

$(A_n, B) < f[2(A, B)] = k$.

Así, para n suficientemente grande, tendremos:

$(A_n, B) < k$ y $(B_n, B) < k$,

De donde:

$(A_n, B_n) < f(k)$,

Esto conduce a una desigualdad imposible $n < f(k)$. (p. 22)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema lo enuncia después de definir el conjunto límite con elementos de una clase (V).

- **Descripción del enunciado**

Propiedad de un conjunto compacto de elementos de una clase (V).

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

En efecto, en el caso contrario, por la (Def. 28) podríamos encontrar, cualquiera que sea n, dos elementos A_n, B_n de E tal que $(A_n, B_n) > n$, y, ya que E es compacto (Def. 10), podemos suponer que A_n, B_n tienden a dos límites respectivamente A, B. Ahora, para n suficientemente grande, tendremos:

$(A_n, A) < 2(A, B)$, ya que A_n tiende a A por la (Obs. 17) la vecindad de (A_n, A) tiende a cero con $\frac{1}{n}$.

$(A, B) < 2(A, B)$, porque $(A, B) < (A, B) + (A, B)$ entiendo la vecindad como un número (Def. 24)

De donde: Porque todos son elementos de una clase (V) y por la (Def. 24) existe una función f que tiende a cero con $2(A, B)$ y tal que

$(A_n, B) < f[2(A, B)] = k$.

Así, para n suficientemente grande, tendremos:

$(A_n, B) < k$ y $(B_n, B) < k$, esta última desigualdad porque B_n tiende a B (Obs. 17)

De donde:

$(A_n, B_n) < f(k)$, porque son elementos de una clase (V)

Esto conduce a una desigualdad imposible $n < f(k)$. Porque $n < (A_n, B_n) < f(k)$ lo que no puede ser porque $f(k)$ tiende a cero.

Por lo tanto, el conjunto compacto debe ser un conjunto límite.

- **Observaciones**

De esta demostración, observamos es que usa la vecindad de dos elementos cualesquiera de un mismo conjunto, pero no la usa para trabajar con la convergencia. Retomando lo que Fréchet dice en la introducción de su tesis, que era necesario entender lo que significa el límite de una sucesión de elementos o qué se entiende por elementos vecinos, asociamos que cuándo usa la vecindad tal como lo describimos en este párrafo, entendemos que está diciendo que los elementos que pone en juego en la vecindad son elementos vecinos.

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

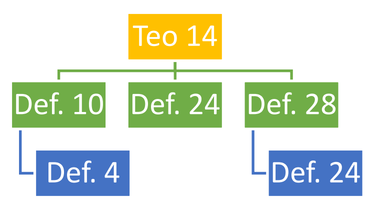

Fig. 14 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

No usa ningún concepto

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Los usos de la métrica que reconozco son:

➢ *"podemos suponer que A_n, B_n tienden a dos límites respectivamente A, B. Ahora, para n suficientemente grande, tendremos: $(A_n, A) < 2(A, B)$, $(A, B) < 2(A, B)$, de donde: $(A_n, B) < f[2(A, B)] = k$. Así, para n suficientemente grande, tendremos: $(A_n, B) < k$ y $(B_n, B) < k$,"* Usa explícitamente la vecindad para trabajar con la convergencia de la sucesión A_n, cabe aclarar que no la usa para determinarla, porque la convergencia la determina mediante el conjunto compacto.

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
	Demostración		
Representa la convergencia de sucesiones con la vecindad	"podemos suponer que A_n, B_n tienden a dos límites respectivamente A, B. Ahora, para n suficientemente grande, tendremos: $(A_n, A) < 2(A, B)$, $(A, B) < 2(A, B)$, de donde: $(A_n, B) < f[2(A, B)] = k$. Así, para n suficientemente grande, tendremos: $(A_n, B) < k$ y $(B_n, B) < k$,"	Porque con el conjunto compacto garantiza la convergencia, eso le permite por la representar esa convergencia con la vecindad. (Obs. 17),	Para llegar a que la vecindad $(A_n, B_n) < f(k)$.
Determina elementos vecinos	"$(A, B) < 2(A, B)$,"	Este sale así de la nada, entiendo que es por esto: $(A, B) < (A, B) + (A, B)$	Para poder usar la segunda condición de la definición de vecindad.
	"$(A_n, B_n) < f(k)$,"	Porque ya tiene que $(A_n, B) < k$ y $(B_n, B) < k$ y son elementos de una clase (V) (Def. 24)	Para contradecir con la hipótesis y demostrar que no puede pasar el supuesto de que el conjunto no es límite.

Teorema 15

36. THÉORÈME. — *Soit E un ensemble extrémal formé d'éléments d'une classe (V). S'il existe une suite indéfinie G d'ensembles $I_1, I_2, \ldots$ telle que tout élément de E soit intérieur au sens étroit à l'un au moins de ces ensembles I_n, on peut extraire de G un nombre fini de ces ensembles formant une famille H jouissant de la même propriété que G *).*

Unidad de análisis

TEOREMA. - *Sea E un conjunto extrémal formado de elementos de una clase (V). Si existe una sucesión indefinida G de conjuntos $I_1, I_2, \ldots$ tal que todo elemento de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los conjuntos I_n, se puede extraer de G un número finito de estos conjuntos formando una familia H con la misma propiedad que G.*

Demostración.

En efecto, suponemos que el teorema es incorrecto. Entonces existirá al menos un elemento de E: A_1 que no está en el interior de I_1 en sentido estricto. Pero A_1 es interior en sentido estricto de uno de los conjuntos $I_2, I_3, \ldots$; sea I_{q_1} el primero de ellos $(q_1 > 1)$. Hay al menos un elemento de E, sea A_2, que no es interior en sentido estricto de ninguno de los conjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_{q_1}$. Llamamos I_{q_2} el primero de los conjuntos $I_{q_1+1}, I_{q_1+2}, \ldots$ al que A_2, es interior en sentido estricto y así sucesivamente. Formamos de esta manera una sucesión infinita de elementos $A_1, A_2, \ldots$ que pertenecen a E, todos distintos y tales que A_{r+1} no es interior en sentido estricto de ninguno de los conjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_{q_1}, \ldots, I_{q_r}$. Esta sucesión tiene al menos un elemento límite A perteneciente a E. Sea $A \equiv \lim_{p=\infty} A_{n_p}$. Ahora bien, A es interior en sentido estricto de al menos, I_k, de los conjuntos de la sucesión G. Por lo tanto, es imposible que exista en la sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ una infinidad de elementos $A'_{n_1}, A'_{n_2}, \ldots$ que no son interiores a I_k en sentido estricto. De lo contrario, podríamos llamar B_p un elemento de E que coincida con A'_{n_p}si este no pertenece a I_k o un elemento de E no pertenece a I_k y tal que $(B_p, A'_{n_p}) < \frac{1}{p}$ en el otro caso. Entonces, A sería el límite de una sucesión $B_1, B_2, \ldots$ de elementos de E no en I_k, lo que es imposible. Así los elementos de la sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ son todos interiores a I_k en sentido estricto a partir de cierto rango. Esto es claramente contradictorio con la manera en que construimos la sucesión $A_1, A_2, \ldots$ (p. 22, 23)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Es el último teorema que enuncia en la sección de definición del límite mediante la vecindad.

Fréchet hace una nota al pie de página donde dice que este teorema es una generalización de un teorema dado por Borel para conjuntos lineales, que también lo extendió para puntos en espacio n-dimensional, pero sus demostraciones no se generalizan al caso actual.

También menciona que más adelante demostrará un teorema (el teorema 17) para algunas clases (V).

- **Descripción del enunciado**

Da las condiciones para poder extraer un número finito de conjuntos de una sucesión infinita de conjuntos.

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

En efecto, suponemos que el teorema es incorrecto. Entonces existirá al menos un elemento de E: A_1 que no es interior de I_1 en sentido estricto (Def. 8). Pero A_1 es interior en sentido estricto de uno de los conjuntos $I_2, I_3, \ldots$; sea I_{q_1} el primero de ellos $(q_1 > 1)$, porque los conjunto $I_1, I_2, \ldots$, son elementos de la sucesión G. Hay al menos un elemento de E, sea A_2, que no es interior en sentido estricto de ninguno de los conjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_{q_1}$. Llamamos

I_{q_2} el primero de los conjuntos $I_{q_1+1}, I_{q_1+2}, \dots$ al que A_2, es interior en sentido estricto y así sucesivamente. Formamos de esta manera una sucesión infinita de elementos $A_1, A_2, \dots$ que pertenecen a E, todos distintos y tales que A_{r+1} no es interior en sentido estricto de ninguno de los conjuntos $I_1, I_2, \dots, I_{q_1}, \dots, I_{q_r}$. Esta sucesión tiene al menos un elemento límite A perteneciente a E puesto que el conjunto E es extrémal. Sea $A \equiv \lim_{p=\infty} A_{n_p}$. Ahora bien, A es interior en sentido estricto de al menos, I_k, de los conjuntos de la sucesión G ya que A pertenece a E y por la propiedad de G, se cumple esta afirmación. Por lo tanto, es imposible que exista en la sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots$ una infinidad de elementos $A'_{n_1}, A'_{n_2}, \dots$ que no son interiores a I_k en sentido estricto. De lo contrario, si existiera una infinidad de elementos $A'_{n_1}, A'_{n_2}, \dots$ que no son interiores a I_k en sentido estricto, podríamos llamar B_p un elemento de E que coincida con A'_{n_p}si este no pertenece a I_k o un elemento de E no pertenece a I_k y tal que $(B_p, A'_{n_p}) < \frac{1}{p}$ en el otro caso. Entonces, A sería el límite de una sucesión $B_1, B_2, \dots$ de elementos de E no en I_k, ya que $A_1, A_2, \dots$ tiende a A por la (Def. 3) se puede extraer la sucesión $A'_{n_1}, A'_{n_2}, \dots$ que también tiende a A, así, por la (Obs. 17) se tiene que $(A'_{n_p}, A) < \frac{1}{p}$ y $(B_p, A'_{n_p}) < \frac{1}{p}$ entonces por la (Def. 24) $(A, B_p) < f\left(\frac{1}{p}\right)$, lo que es imposible puesto que A es elemento interior en sentido estricto de I_k. Así los elementos de la sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots$ son todos interiores a I_k en sentido estricto a partir de cierto rango. Esto es claramente contradictorio con la manera en que construimos la sucesión $A_1, A_2, \dots$

- **Observaciones**

Hace la demostración por contradicción. No tengo más observaciones.

3. **Definiciones y conceptos que utiliza**

- **Definiciones**

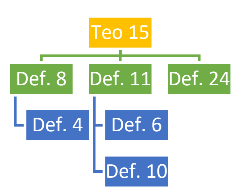

Fig. 15 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**
    - Sucesión de conjuntos

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Los usos de la métrica que reconozco son:

➢ *"Esta sucesión tiene al menos un elemento límite A perteneciente a E"* este lo reconozco como uso porque demanda de alguna manera un uso de la métrica para determinar la convergencia, sin embargo, la determina usando el conjunto extrémal.

➢ *"De lo contrario, podríamos llamar B_p un elemento de E que coincida con A'_{n_p} si este no pertenece a I_k o un elemento de E no pertenece a I_k y tal que $(B_p, A'_{n_p}) < \frac{1}{p}$ en el otro caso."* Usa explícitamente la vecindad para decir que dos elementos coinciden.

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
	Demostración		
Garantiza que una sucesión de elementos tiene al menos un elemento límite	Primero forma la sucesión de tal manera que todos sus elementos son distintos y dado que el conjunto al que pertenecen los elementos es extrémal (Def. 11) *"Esta sucesión tiene al menos un elemento límite A perteneciente a E"*.	Porque tiene una sucesión de elementos distintos en un conjunto extrémal.	Para garantizar que A (el elemento límite) es elemento interior de un I_k.

Representa con la vecindad que dos elementos coinciden.	"De lo contrario, podríamos llamar B_p un elemento de E que coincida con A'_{n_p} si este no pertenece a I_k o un elemento de E no pertenece a I_k y tal que $(B_p, A'_{n_p}) < \frac{1}{p}$ en el otro caso." está usando la definición de elemento interior en sentido estricto (Def. 8) pero aquí supone que no cumple la definición, entonces una de las opciones es que A'_{n_p} no pertenece a I_k.	Porque supone que el elemento A'_{n_p} no es interior en sentido estricto de I_k.	Para determinar que la sucesión B_p converge al elemento A.

Teorema 16

Théorème. — *Pour que l'ensemble* $\mathfrak{K}_\varepsilon$ *[correspondant à un ensemble E tiré d'une classe (V)* NORMALE*] puisse être choisi, quel que soit ε, de façon à ne comprendre qu'un nombre fini d'éléments, il faut et il suffit que E soit compact.*

Unidad de análisis

Teorema. - *Para que el conjunto* $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ *[correspondiente a un conjunto E de una clase* (V) *NORMAL] pueda ser elegido, cualquiera que sea ε, de manera que incluya sólo un número finito de elementos, es necesario y suficiente que E sea compacto.*

Demostración.

La condición es necesaria. En efecto, en el caso contrario, podríamos extraer de E una sucesión infinita S de elementos distintos $B_1, B_2, \ldots$ sin elementos limite. Si $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ es finito, habrá necesariamente un conjunto parcial K_ε, al cual pertenecen una infinidad de elementos de la secuencia S. Vemos entonces que podemos formar de poco en poco una infinidad de sucesiones S_n de elementos de S tales que S_{n+1} está contenido en S_n y que la distancia de dos elementos de S_n sea inferior a $\frac{1}{n}$. Si es así, llamo $B_1^{(p)}, B_2^{(p)}, \ldots$ a los elementos de la sucesión S_n tomados en el mismo orden que en S, vemos que la sucesión $B_1^{(p)}, B_2^{(p)}, \ldots B_p^{(p)}, \ldots$ será una sucesión de elementos de S distintos y tal que tenemos

$(B_p^{(p)}, B_{n+p}^{n+p}) < \frac{1}{p}$ para todo n. Puesto que E se toma de una clase normal (V), entonces la sucesión S debería tener un elemento límite.

Recíprocamente, supongamos que E es compacto. Entonces el conjunto $F \equiv E + E'$ es extrémal. Para un valor dado de ε, sabemos que podemos formar una sucesión de conjuntos parciales $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \ldots$ tal que su conjunto satisface las condiciones de un $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ relativo a F. En particular, cada elemento de F es interior en el sentido estricto de uno de los conjuntos $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \ldots$. Así que, podemos extraer de esta sucesión $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \ldots$ un número finito de términos $K_\varepsilon^{(q_1)}, \ldots K_\varepsilon^{(q_2)}$ con la misma propiedad (véase nº 36). Si ahora llamamos $H_\varepsilon^{(q_k)}$ al conjunto de elementos de E que pertenecen a $K_\varepsilon^{(q_k)}$ (que está en F), vemos que tendremos un número finito de conjuntos $H_\varepsilon^{(q_1)}, \ldots, H_\varepsilon^{(q_r)}$ formados con elementos de E y tales que: 1° cada elemento de E es interior en el sentido estricto de al menos uno de ellos, 2° cualesquiera dos elementos de uno de ellos tienen una vecindad $< \varepsilon$. (p. 25 y 26)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema lo enuncia en la sección 41, comienza después de definir una clase normal en la sección 38. Antes de enunciarlo, comienza la sección 39 definiendo unos conjuntos parciales k_ε que trabaja Hadamard.

Lo demuestra para poder generalizar el teorema 15.

Quiere mostrar que para elegir un conjunto $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ (Obs. 26) *[correspondiente a un conjunto E de una clase (V) NORMAL]* tal que tenga solamente un número finito de elementos independiente de ε, es necesario y suficiente que el conjunto E con el que se corresponde es compacto.

La correspondencia entre $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ y E es en el sentido de que los elementos K_ε de $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ se forman tales que los elementos de E son interior en sentido estricto de al menos un K_ε, como en la afirmación 26.

- **Descripción del enunciado**

Condición necesaria y suficiente para poder elegir una familia finita de conjuntos.

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complemento**

La condición que E sea compacto (Def. 10) es necesaria. En efecto, en el caso contrario, podríamos extraer de E una sucesión infinita S de elementos distintos $B_1, B_2, \ldots$ sin elementos límite (Def. 10). Si $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ es finito, es decir, que tiene un número finito de conjunto parciales K_ε, habrá necesariamente un conjunto parcial K_ε, al cual pertenecen una infinidad de elementos de la secuencia S. Vemos entonces que podemos formar de poco en poco una infinidad de sucesiones S_n de elementos de S tales que S_{n+1} está contenido en S_n y que la distancia de dos elementos de S_n sea inferior a $\frac{1}{n}$. Si es así, llamo $B_1^{(p)}, B_2^{(p)}, \ldots$ a los elementos de la sucesión S_n tomados en el mismo orden que en S, vemos que la sucesión $B_1^{(p)}, B_2^{(p)}, \ldots B_p^{(p)}, \ldots$ será una sucesión de elementos de S distintos y tal que tenemos $(B_p^{(p)}, B_{n+p}^{(n+p)}) < \frac{1}{p}$ para toda n, ya que las sucesiones S_n están dadas de tal manera que S_{n+1} está contenido en S_n, entiendo que todos los elementos de la sucesión S_{n+1} también son elementos de la sucesión S_n. Puesto que E se toma de una clase normal (V) (Def. 33), entonces admite una generalización del teorema de Cauchy (Def. 30) dado que satisface las condiciones de Cauchy (Def. 29) $(B_p^{(p)}, B_{n+p}^{(n+p)}) < \frac{1}{p}$ para toda n, entonces la sucesión S debería tener un elemento límite, lo que contradice la hipótesis de que E no es compacto, por lo tanto, es necesario que E sea compacto.

Recíprocamente, supongamos que E es compacto (Def. 10). Entonces el conjunto $F \equiv E + E'$ compuesto de un conjunto compacto y que tiene sus elementos límites (entendiendo que $E + E'$ es la unión actual de conjuntos) es extrémal (Def. 11). Para un valor dado de ε, sabemos que podemos formar una sucesión de conjuntos parciales $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \ldots$ tal que su conjunto satisface las condiciones de un $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ relativo a F, por la (Obs. 26). En particular, cada elemento de F es interior en el sentido estricto de uno de los conjuntos $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \ldots$. Así que por el (Teo. 15), podemos extraer de esta sucesión $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \ldots$ un número finito de términos $K_\varepsilon^{(q_1)}, \dots K_\varepsilon^{(q_2)}$ con la misma propiedad (véase nº 36). Si ahora llamamos $H_\varepsilon^{(q_k)}$ al conjunto de elementos de E que pertenecen a $K_\varepsilon^{(q_k)}$ (que está en F), vemos que tendremos un número finito de conjuntos $H_\varepsilon^{(q_1)}, \dots, H_\varepsilon^{(q_r)}$ formados con elementos de E y tales que: 1° cada elemento de E es interior en sentido estricto de al menos uno de ellos, 2° cualesquiera dos elementos de uno de ellos tienen una vecindad $< \varepsilon$, entonces el conjunto formado por $H_\varepsilon^{(q_1)}, \dots, H_\varepsilon^{(q_r)}$ forman el conjunto $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ que se quería.

Ahora es fácil generalizar el teorema del nº 36.

- **Observaciones**

Algo interesante en esta demostración es que usa por primera vez la palabra distancia (écart) sin antes definirla, en este caso, la estamos entendiendo como sinónimo de vecindad.

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

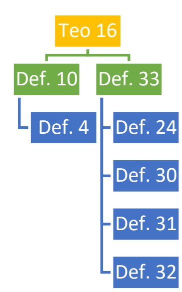

Fig. 16 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Conjunto $\boldsymbol{K}_\varepsilon$

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Los usos de la métrica que reconozco:

- *"Vemos entonces que podemos formar de poco en poco una infinidad de sucesiones S_n de elementos de S tales que S_{n+1} está contenido en S_n y que la distancia de dos elementos de S_n sea inferior a $\frac{1}{n}$."* Usa la palabra distancia, de alguna manera como sinónimo de vecindad.
- *"será una sucesión de elementos de S distintos y tal que tenemos $(B_p^{(p)}, B_{n+p}^{(n+p)}) < \frac{1}{p}$ para toda n"* usa explícitamente la vecindad, pero como forma de representar la distancia que menciona antes.

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
Demostración			
Determina una propiedad que deben cumplir los elementos de un conjunto, que a su vez es término de una sucesión de conjuntos.	"Vemos entonces que podemos formar de poco en poco una infinidad de sucesiones S_n de elementos de S tales que S_{n+1} está contenido en S_n y que la distancia de dos elementos de S_n sea inferior a $\frac{1}{n}$."	Si $\boldsymbol{K_\varepsilon}$ es finito, es decir, que tiene un número finito de conjunto parciales K_ε, habrá necesariamente un conjunto parcial K_ε, al cual pertenecen una infinidad de elementos de la secuencia S.	Usa esta condición en una de las sucesiones S_n, es decir, en un caso particular.

Garantiza que una sucesión de elementos satisface las condiciones de Cauchy.	"será una sucesión de elementos de S distintos y tal que tenemos $(B_p^{(p)}, B_{n+p}^{(n+p)}) < \frac{1}{p}$ para toda n" aquí está determinando que la sucesión satisface las condiciones de Cauchy (Def. 29)	Por la definición de las sucesiones S_n, aunque la enuncia como distancia aquí vemos la vecindad.	Para determinar la convergencia de una sucesión.

Teorema 17

42. THÉORÈME.—*Soit E un ensemble d'éléments d'une classe normale (V). Pour que de toute famille H* DÉNOMBRABLE OU NON **) d'ensembles I tels que tout élément de E soit intérieur au sens étroit à au moins l'un d'eux, on puisse extraire un nombre fini d'ensembles I formant une famille G jouissant de la même propriété que H, il faut et il suffit que E soit extrémal.*

Unidad de análisis

Teorema. - *Sea E un conjunto de elementos de una clase (V) normal. Para que de cada familia H, NUMERABLE O NO *) de conjuntos I tal que cada elemento de E sea interior en el sentido estricto de al menos uno de ellos, podamos extraer un número finito de conjuntos I formando una familia G con la misma propiedad que H, es necesario y suficiente que E sea extrémal.*

Demostración.

Hemos demostrado (n ° 36) que la condición es suficiente en el caso en que H es numerable.

Para el caso general, observemos que, si E es extrémal, podemos formar, para todo ε, conjuntos K_ε en número finito satisfaciendo las condiciones indicadas anteriormente. Si el teorema no es verdadero para E, hay al menos uno de estos conjuntos de tal manera que sus elementos no son interiores en sentido estricto a un número finito de conjuntos I. Para

$\varepsilon = \frac{1}{n}$ llamamos $K^{(n)}$ y sea A_n, uno de sus elementos. Puesto que E es extrémal, podemos extraer de la sucesión $A_1, A_2, \ldots$ una sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ que tiende a un elemento A de E. A es interior en el sentido estricto en un intervalo I: I_0 y se demuestra fácilmente que para p suficientemente grande todo elemento de $K^{(n_p)}$ es también interior en sentido estricto de I_0, lo que conduce a una contradicción.

La condición es también necesaria. En efecto, supongamos que E no es cerrado, existirá una sucesión de elementos $B_1, B_2, \ldots$ de E, que tienden a un elemento B que no pertenece a E. Ahora bien, consideremos los conjuntos I_n formados cada uno de elementos A de E tal que $(A, B) > \frac{1}{n}$. Cada elemento de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los I_n. Pero si consideramos un número finito de estos conjuntos I_n, ciertamente habrá términos de la sucesión $B_1, B_2, \ldots$ que no les pertenecen.

Del mismo modo, supongamos que E no es compacto, existirá una sucesión S de elementos de E: $B_1, B_2, \ldots$ sin elementos límites. Si consideramos cualquier elemento A de E, podemos definir un número $\rho_A > 0$ tal que $(A, B_n) \geq \rho_A$, sea cual sea el elemento B_n distinto de A y tomado de la sucesión S; entonces A es interior en sentido estricto del conjunto I_A de elementos C de E tal que $(C, A) < \rho_A$. Como resultado, cada elemento B de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los intervalos I_A, a saber, I_B. Si de la familia H de intervalos I_A, se extrae un número finito que forma una familia G, será imposible que G contenga a E, ya que en cada intervalo I_A hay a lo más un elemento de la sucesión S.

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema lo enuncia en la sección 42, inmediatamente después del teorema 16. Fréchet lo reconoce como una generalización del teorema 15. Además, menciona que ya demostró en el teorema 15 que la condición es suficiente en el caso cuando H es numerable.

- **Descripción del enunciado del teorema**

Condición necesaria y suficiente para que se pueda elegir una familia finita de conjunto con ciertas condiciones.

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

Hemos demostrado (n ° 36) (Teo. 15): *"Sea E un conjunto extrémal formado de elementos de una clase (V). Si existe una sucesión indefinida G de conjuntos $I_1, I_2, \ldots$ tal que todo elemento de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los conjuntos I_n, se puede extraer de G un numero finito de estos conjuntos formando una familia H con la misma propiedad que G *)"* que la condición es suficiente en el caso en que H es numerable.

Para el caso general, observemos que, si E es extrémal, podemos formar, para todo ε, conjuntos K_ε en número finito satisfaciendo las condiciones indicadas anteriormente, se refiere a las dadas en la (Obs. 26): "*dado un conjunto E que pertenece a una clase separable (V), podemos formar una infinidad numerable $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ de conjuntos K_ε de elementos de E tal que cada elemento de E es interior en el sentido estricto de al menos un K_ε y que la vecindad de cualesquiera dos elementos de K_ε siga siendo inferior que ε.*". Si el teorema no es verdadero para E, hay al menos uno de estos conjuntos de tal manera que sus elementos no son interiores en sentido estricto a un número finito de conjuntos I. Para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ llamamos $K^{(n)}$ y sea A_n, uno de sus elementos. Puesto que E es extrémal (Def. 11) cualquier infinidad de elementos de E da lugar al menos a un elemento límite que pertenece a E, podemos extraer de la sucesión $A_1, A_2, \ldots$ una sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ que tiende a un elemento A de E, porque son elementos de una clase (V) que también satisface las condiciones de convergencia de una clase (L). A es interior en el sentido estricto en un intervalo I: I_0 y se demuestra fácilmente que para p suficientemente grande todo elemento de $K^{(n_p)}$ es también interior en sentido estricto de I_0, lo que conduce a una contradicción, entiendo que la contradicción se da porque los conjunto $K^{(n)}$ tales que sus elementos no son interiores en sentido estricto a un número finito de los conjuntos I.

La condición es también necesaria. En efecto, supongamos que E no es cerrado (Def. 6), existirá una sucesión de elementos $B_1, B_2, \ldots$ de E, que tienden a un elemento B que no pertenece a E. Ahora bien, consideremos los conjuntos I_n formados cada uno de elementos A de E tal que $(A, B) > \frac{1}{n}$. Cada elemento de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los I_n. Pero si consideramos un número finito de estos conjuntos I_n, ciertamente habrá términos de la sucesión $B_1, B_2, \ldots$ que no les pertenecen, puesto que la sucesión $B_1, B_2, \ldots$ que son elementos de E y tienden a B, entonces por la afirmación (Obs. 17) la vecindad (B_n, B) tiende a cero con $1/n$, lo que contradice la definición de los I_n, por lo tanto E tiene que ser cerrado.

Del mismo modo, supongamos que E no es compacto (Def. 10), existirá una sucesión S de elementos de E: $B_1, B_2, \ldots$ sin elementos límites. Si consideramos cualquier elemento A de E, podemos definir un número límite inferior de la vecindad (Def. 26) $\rho_A > 0$ tal que $(A, B_n) \geq \rho_A$, sea cual sea el elemento B_n distinto de A y tomado de la sucesión S; entonces A es interior en sentido estricto del conjunto I_A de elementos C de E tal que $(C, A) < \rho_A$. Como resultado, cada elemento B de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los intervalos I_A, a saber, I_B. Si de la familia H de intervalos I_A, se extrae un número finito que forma una familia G, será imposible que G contenga a E, ya que en cada intervalo I_A hay a lo más un elemento de la sucesión S. Porque cada elemento B de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los intervalos I_A, entonces dado que B es elemento interior, no existen elementos de…

- **Observaciones**

No tengo observaciones

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

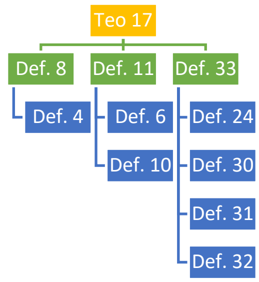

Fig. 17 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Familia numerable de conjuntos
  - Familia no numerable de conjuntos

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Los usos de la métrica que reconozco son:

➢ *"Puesto que E es extrémal, podemos extraer de la sucesión $A_1, A_2, \dots$ una sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots$ que tiende a un elemento A de E."* Afirma que una sucesión tiene elemento límite.

➢ *"supongamos que E no es cerrado, existirá una sucesión de elementos $B_1, B_2, \dots$ de E, que tienden a un elemento B que no pertenece a E."* Afirma que una sucesión tiene elemento límite.

➢ *"Ahora bien, consideremos los conjuntos I_n formados cada uno de elementos A de E tal que $(A, B) > \frac{1}{n}$."* Determina una propiedad para los elementos de un conjunto.

➢ *"Si consideramos cualquier elemento A de E, podemos definir un número $\rho_A > 0$ tal que $(A, B_n) \geq \rho_A$, sea cual sea el elemento B_n distinto de A y tomado de la sucesión S".* Usa la vecindad con elementos distinto.

➢ *"A es interior en sentido estricto del conjunto I_A de elementos C de E tal que $(C, A) < \rho_A$".* Determina una propiedad para los elementos de un conjunto.

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
	Demostración		
Extrae una sucesión de otra sucesión	"Puesto que E es extrémal (Def. 11), podemos extraer de la sucesión $A_1, A_2, \ldots$ una sucesión $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ que tiende a un elemento A de E."	Porque tiene una sucesión que converge a un elemento y los elementos de la sucesión son elementos de una clase (V) que cumple las condiciones de límite de una clase (L) (Def. 3), entonces por la segunda condición de esta definición se puede extraer una sucesión con las condiciones dadas.	Para mostrar que los elementos del conjunto $K^{(n_p)}$ determinado por la segunda sucesión son elemento interior en sentido estricto del conjunto al que el límite de la sucesión es interior en sentido estricto.
Garantiza que una sucesión converge	"supongamos que E no es cerrado (Def. 6), existirá una sucesión de elementos $B_1, B_2, \ldots$ de E, que tienden a un elemento B que no pertenece a E."	Porque supone que un conjunto no es cerrado, pero sí compacto, entonces la compacidad garantiza la convergencia.	Para determinar una propiedad de los elementos de un conjunto y determinar que hay elementos de la sucesión $B_1, B_2, \ldots$ no todos pertenecen a los conjuntos I_n.
Determina una propiedad para los elementos de un conjunto	"Ahora bien, consideremos los conjuntos I_n formados cada uno de elementos A de E tal que $(A, B) > \frac{1}{n}$."	Porque el teorema le pide una familia de conjuntos con esas propiedades	Usa estos conjuntos junto con la convergencia anterior para determinar que hay elementos de la sucesión $B_1, B_2, \ldots$ no todos pertenecen a los conjuntos I_n.

Determina la vecindad de dos elementos distintos	Con la definición de límite inferior de una vecindad (Def. 26) "Si consideramos cualquier elemento A de E, podemos definir un número $\rho_A > 0$ tal que $(A, B_n) \geq \rho_A$, sea cual sea el elemento B_n distinto de A y tomado de la sucesión S".	Porque los elementos que utiliza para determinar la vecindad son elementos de una sucesión que no tiene límite	Para garantizar que el elemento A es interior en sentido estricto de un conjunto I_A
Determina una propiedad para los elementos de un conjunto	"A es interior en sentido estricto del conjunto I_A de elementos C de E tal que $(C, A) < \rho_A$".	Porque así pide el teorema la definición de los conjuntos I	Para afirmar que, cada elemento B de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los intervalos I_A, a saber, I_B.

Teorema 18

43. Théorème. — *Tout ensemble non dénombrable E formé d'éléments d'une classe (V) normale est condensé.*

Unidad de análisis

Teorema. - *Todo conjunto no numerable E formado de elementos de una clase* (V) *normal es condensado.*

Demostración.

Sea E_1 una infinidad no numerable de elementos de E, queremos probar que E_1 da lugar al menos a un elemento de condensación. En efecto, cualquiera que sea ε podemos, como lo hemos visto, encontrar una sucesión *numerable* de conjuntos $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \dots, K_\varepsilon^{(n)}, \dots$, tales que cada elemento de E_1 está en uno de ellos y que la vecindad de dos elementos de uno de ellos sea $< \varepsilon$. Existe por lo tanto al menos uno de estos conjuntos que contiene una infinidad no numerable de elementos de E_1. Tomando sucesivamente $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, podemos formar una sucesión de conjuntos $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots$ tales que $H^{(n)}$ contiene una infinidad no numerable de elementos de E_1, contenidos en $H^{(n-1)}$, y que cualesquiera dos elementos de $H^{(n)}$ tenga una vecindad menor que $\frac{1}{n}$. Entonces, si tomamos dos elementos cualesquiera A_n, A'_n en $H^{(n)}$, cada una de las sucesiones $A_1, A_2, \ldots; A'_1, A'_2, \ldots$ tiene un límite A que es el mismo. Así que, E_1 da lugar a un elemento límite A y es un elemento de condensación, ya que, si eliminamos de E_1 una infinidad numerable de elementos, aún quedarán elementos en cada uno de los $H^{(n)}$ y A será aún un elemento límite del conjunto restante de E_1. (p. 27)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema lo enuncia en seguida de la demostración del teorema 17, en la sección 43.

De este teorema concluye que:

NOTA: Combinando el teorema precedente con el del No. 31 obtenemos la siguiente afirmación:

Obs. 27 - Todo conjunto cerrado F formado por elementos de una clase normal (V) es la suma de un conjunto numerable y un conjunto perfecto o nulo sin elementos comunes. (p. 27)

- **Descripción del enunciado**

Propiedad de un conjunto no numerable

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

Sea E_1 una infinidad no numerable de elementos de E, queremos probar que E_1 da lugar al menos a un elemento de condensación (Def. 9): *"un elemento límite de E_1 que también es un elemento límite de todo conjunto que se obtiene eliminando de E_1 una infinidad numerable de elementos"*. En efecto, puesto que los elementos de E_1 son elementos de una clase (V) normal, en particular es separable, y por la (Obs. 26) cualquiera que sea ε podemos, como lo hemos visto, encontrar una sucesión *numerable* de conjuntos $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \dots, K_\varepsilon^{(n)}, \dots$, tales que cada elemento de E_1 está en uno de ellos y que la vecindad de dos elementos de uno de ellos sea $< \varepsilon$. Existe por lo tanto al menos uno de estos conjuntos que contiene una infinidad no numerable de elementos de E_1, entiendo que pasa esto porque los conjuntos $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \dots, K_\varepsilon^{(n)}, \dots$, son una cantidad numerable de conjuntos y de alguna manera contienen al conjunto E_1 que tiene una cantidad no numerable de elementos, entonces debe existir un conjunto $K_\varepsilon^{(n)}$ que tiene una cantidad no numerable de elementos de E_1. Tomando sucesivamente $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, podemos formar una sucesión de conjuntos $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots$ tales que $H^{(n)}$ contiene una infinidad no numerable de elementos de E_1, contenidos en $H^{(n-1)}$, y que cualesquiera dos elementos de $H^{(n)}$ tenga una vecindad menor que $\frac{1}{n}$. Entonces, si tomamos dos elementos cualesquiera A_n, A'_n en $H^{(n)}$, si tomamos cualesquiera dos elementos A_{n+p}, A'_{n+p} de $H^{(n)}$, por la definición de $H^{(n)}$ tenemos que $(A_n, A_{n+p}) < \frac{1}{n}$ y $(A'_n, A'_{n+p}) < \frac{1}{n}$ para cualquier p, entonces cada sucesión A_n, A'_n satisface las condiciones de Cauchy (Def. 29), en consecuencia, dado que la clase (V) es normal (Def. 33) por lo que admite una generalización del teorema de Cauchy (Def. 30), entonces cada una de las sucesiones $A_1, A_2, \dots; A'_1, A'_2, \dots$ tiene un límite A que es el mismo, suponiendo que A_n y A'_n tienden a A y a B respectivamente, tenemos por la (Obs. 17), las vecindades (A_n, A) y (A'_n, B) tienden a cero con $1/n$, además por la definición de $H^{(n)}$ tenemos que (A_n, A'_n) tiende a cero con $1/n$, entonces por la segunda condición de la definición de vecindad (Def. 24) se tiene que (A'_n, A) tiende a cero con $1/n$, del mismo modo y considerando que (A'_n, B) tiende a cero con $1/n$ se tiene que (A, B) es cero, usando el mismo razonamiento que en la (Obs. 18) así A y B son el mismo. Así que, E_1 da lugar a un elemento límite A y es un elemento de condensación, ya que, si eliminamos de E_1 una infinidad numerable de elementos, aún quedarán elementos en cada uno de los $H^{(n)}$ y A será aún un elemento límite del conjunto restante de E_1.

- **Observaciones**

No tengo observaciones.

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

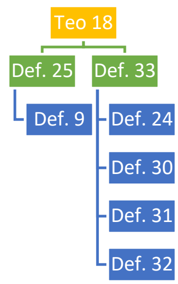

Fig. 18 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**
  - Infinidad no numerable de elementos / conjunto no numerable

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Los usos de la métrica que reconozco son:

- *"…cualquiera que sea ε podemos, como lo hemos visto, encontrar una sucesión numerable de conjuntos $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \dots, K_\varepsilon^{(n)}, \dots$, tales que cada elemento de E_1 está en uno de ellos y que la vecindad de dos elementos de uno de ellos sea $< \varepsilon$."* Usa la vecindad para determinar la propiedad de elementos de un conjunto

- *"cualesquiera dos elementos de $H^{(n)}$ tenga una vecindad menor que $\frac{1}{n}$."* Usa la vecindad para determinar la propiedad de elementos de un conjunto

- *"si tomamos dos elementos cualesquiera A_n, A'_n en $H^{(n)}$, cada una de las sucesiones $A_1, A_2, \dots; A'_1, A'_2, \dots$ tiene un límite A que es el mismo."* Garantiza la convergencia de dos sucesiones.

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
Demostración			
Determina una propiedad para los elementos de un conjunto	"…cualquiera que sea ε podemos, como lo hemos visto, encontrar una sucesión numerable de conjuntos $K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}, \dots, K_\varepsilon^{(n)}, \dots,$ tales que cada elemento de E_1 está en uno de ellos y que la vecindad de dos elementos de uno de ellos sea $< \varepsilon$."	Porque el teorema cumple las hipótesis de la (Obs. 26) y permite formar la sucesión numerable de conjuntos con la propiedad de que *la vecindad de dos elementos de uno de ellos sea* $< \varepsilon$.	Para formar una sucesión de conjuntos que contienen una cantidad infinita no numerable de elementos de E_1 y con la misma propiedad.
Determina una propiedad para los elementos de un conjunto	"cualesquiera dos elementos de $H^{(n)}$ tenga una vecindad menor que $\frac{1}{n}$."	Porque está definiendo una familia de conjunto no numerable, pero de alguna manera la extrae de la familia numerable anterior y por eso cumple con la propiedad de que *cualesquiera dos elementos de* $H^{(n)}$ *tenga una vecindad menor que* $\frac{1}{n}$.	Para garantizar la convergencia de dos sucesiones de elementos de cualquier conjunto de la sucesión $H^{(n)}$.

Garantiza la convergencia de dos sucesiones a un mismo límite	…si tomamos dos elementos cualesquiera A_n, A'_n en $H^{(n)}$, cada una de las sucesiones $A_1, A_2, \ldots; A'_1, A'_2, \ldots$ tiene un límite A que es el mismo.” Usa la definición de los conjuntos $H^{(n)}$, para usar la (Def. 29) que son las condiciones de Cauchy.	Por la propiedad que cumplen los elementos de los conjuntos $H^{(n)}$ se cumplen las condiciones de Cauchy y porque los elementos son de una clase (V) normal (Def. 33)	Para demostrar que, aunque se elimine una infinidad numerable de elementos del conjunto E_1 siempre habrá otra infinidad no numerable que da lugar a un elemento límite.

Teorema 19

45. THÉORÈME. — *Soit E un ensemble quelconque formé d'éléments d'une classe séparable (V); il existe un ensemble dénombrable d'éléments de E tel que tout élément de E appartienne, soit à cet ensemble D, soit à son dérivé D'. Lorsque E est fermé, on a: $E \equiv D + D'$. Lorsque E est parfait, $E \equiv D'$.*

Unidad de análisis

Teorema. - *Sea E cualquier conjunto formado de elementos de una clase separable (V); existe un conjunto numerable de elementos de E tal que cada elemento de E pertenece, al conjunto D o a su derivado D'. Cuando E es cerrado, tenemos: $E \equiv D + D'$. Cuando E es perfecto, $E \equiv D'$.*

Demostración.

En efecto, para cualquier n, podemos formar una infinidad numerable de conjuntos $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \ldots H_n^{(p)}, \ldots$ conformados de elementos de E tales que la vecindad de cada uno de ellos sea menor que $\frac{1}{n}$ y que cada elemento de E está en uno de los conjuntos de esta sucesión. En cada uno de estos conjuntos $H_n^{(p)}$ hay al menos un elemento $A_n^{(p)}$. Cuando damos a n y p valores enteros arbitrarios, obtenemos un conjunto numerable D de los elementos $A_n^{(p)}$ pertenecientes a E. Ahora está claro que cada elemento de E pertenece a D o a D'.

Lo contrario no es generalmente correcto; pero si E es cerrado cada elemento de $D + D'$ pertenecerá a E; por lo tanto, en este caso $E \equiv D + D'$. Además, $E' \equiv D' + D'' \equiv D'$. Si incluso E es perfecto, tendremos $E \equiv E'$ de donde $E \equiv D'$.

Observemos además que, inversamente, si E, D son dos conjuntos formados de elementos de una clase (V), tales que tenemos: $E \equiv D + D'$, el conjunto E es necesariamente cerrado. Si $E \equiv D'$ (D es una parte de E), E es perfecto. (p. 27, 28)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema es el último que enuncia en la parte de las clases normales, en la sección 45.

- **Descripción del enunciado**

Propiedad de un conjunto numerable

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

En efecto, para cualquier n, por la (Af. 26) podemos formar una infinidad numerable de conjuntos $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \ldots H_n^{(p)}, \ldots$ conformados de elementos de E tales que la vecindad de cada uno de ellos sea menor que $\frac{1}{n}$ y que cada elemento de E está en uno de los conjuntos de esta sucesión. En cada uno de estos conjuntos $H_n^{(p)}$ hay al menos un elemento $A_n^{(p)}$ en consecuencia son no vacíos. Cuando damos a n y p valores enteros arbitrarios, obtenemos un conjunto numerable D de los elementos $A_n^{(p)}$ pertenecientes a E. Ahora está claro que cada elemento de E pertenece a D o a D', puesto que son elementos de una clase (V) separable

(Def. 31) entonces los elementos de E pertenecen a D o a la clase (V) que se puede ver cómo D'.

Lo contrario no es generalmente correcto; pero si E es cerrado (Def. 6) es decir, que contiende a su conjunto derivado, cada elemento de $D + D'$ pertenecerá a E; por lo tanto, en este caso $E \equiv D + D'$. Además, $E' \equiv D' + D'' \equiv D'$. Si incluso E es perfecto (Def. 7), cuando coincide con su conjunto derivado, tendremos $E \equiv E'$ de donde $E \equiv D'$.

Observemos además que, inversamente, si E, D son dos conjuntos formados de elementos de una clase (V), tales que tenemos: $E \equiv D + D'$, el conjunto E es necesariamente cerrado. Si $E \equiv D'$ (D es una parte de E), E es perfecto.

- **Observaciones**

No tengo observaciones

3. **Definiciones y conceptos que utiliza**
   - **Definiciones**

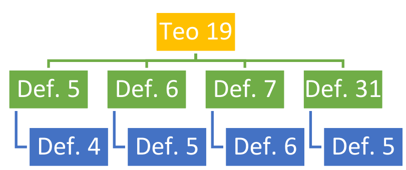

Fig. 19 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Infinidad numerable de conjuntos / Conjunto numerable
  - Suma de conjuntos

Fase 2: Analítica

1. **Usos de la métrica**

En este teorema reconozco un uso de la métrica: *"para cualquier n, podemos formar una infinidad numerable de conjuntos $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \ldots H_n^{(p)}, \ldots$ conformados de elementos de E tales que la vecindad de cada uno de ellos sea menor que $\frac{1}{n}$"* Porque usa explícitamente la vecindad menor que un número para determinar una propiedad de los elementos de una infinidad de conjuntos.

2. **Practicas**

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
	Demostración		
Determina una propiedad de los elementos de una infinidad de conjuntos	Lo hace usando la (Obs. 26) para cualquier n, podemos formar una infinidad numerable de conjuntos $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \dots H_n^{(p)}, \dots$ conformados de elementos de E tales que la vecindad de cada uno de ellos sea menor que $\frac{1}{n}$	Porque la clase de elementos que tiene es una clase (V) separable (Def. 31)	Para afirmar que hay al menos un elemento $A_n^{(p)}$. Cuando damos a n y p valores enteros arbitrarios, obtenemos un conjunto numerable D de los elementos $A_n^{(p)}$ pertenecientes a E.

Teorema 20

46. Théorème. — *Considérons une opération U définie dans un ensemble E formé d'éléments d'une classe (V). La condition nécessaire et suffisante pour que U soit une opération continue dans E est que, si A est un élément quelconque commun à E et à E', on puisse faire correspondre à tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre η_A tel que l'inégalité $(A, B) < \eta_A$ entraîne $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ pour tout élément B de E.*

Unidad de análisis

Teorema. - *Consideremos una operación U definida en un conjunto E formado por elementos de una clase (V). La condición necesaria y suficiente para que U sea una operación continua en E es que, si A es un elemento cualquiera de E y de E', podemos corresponder a todo número $\varepsilon > 0$ un número η_A tal que si desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ para todo elemento de B en E.*

Demostración.

1° En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, si U es continua en A y si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$. Sea ahora ε un numero positivo cualquiera; si no podemos determinar un numero η_A tal que la desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, podriamos determinar, cualquiera que sea n, un elemento B_n de E tal que

$$(A, B_n) < \frac{1}{n}, \quad |U(A) - U(B_n)| \geq \varepsilon.$$

Cuando n crece indefinidamente, la primera desigualdad muestra que B_n tiende a B y, de acuerdo con la hipótesis, $U(B_n)$ tiende a $U(A)$, lo que lleva a una contradicción con la segunda desigualdad.

2° Si, para cualquier ε, podemos determinar η_A tal que $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, vemos que podemos tomar p suficientemente grande para que la sucesión $B_1, B_2, \ldots$ tienda a B, la desigualdad $n > p$, implica $|U(A) - U(B_n)| < \varepsilon$. Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$

Esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$.

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Es el primer teorema que enuncia en la parte de la continuidad definida por medio de la vecindad, considera que es una segunda definición de operación continua. En palabras de Fréchet, esta definición es menos general que la primera definición (Def. 12), porque solo tiene sentido cuando se puede definir la vecindad.

- **Descripción del enunciado**

Condición necesaria y suficiente para que una operación sea continua.

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

1° En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, (Def. 12), si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$. Sea ahora ε un numero positivo cualquiera; supone que no existe el número η_A, si no podemos determinar un numero η_A tal que la desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, podríamos determinar, cualquiera que sea n, un elemento B_n de E tal que

$$(A, B_n) < \frac{1}{n}, \quad |U(A) - U(B_n)| \geq \varepsilon.$$

Cuando n crece indefinidamente, puesto que la vecindad (A, B) tiende a cero con $\frac{1}{n}$ y $(A, B_n) < \frac{1}{n}$, entonces por la segunda condición de la (Def. 24) la primera desigualdad muestra que B_n tiende a B (en lugar de B es A) y, de acuerdo con la hipótesis se supone que la operación es continua y por la (Def. 12), $U(B_n)$ tiende a $U(A)$, lo que lleva a una contradicción con la segunda desigualdad.

2° Si, para cualquier ε, podemos determinar η_A tal que $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, vemos que podemos tomar p suficientemente grande para que la sucesión $B_1, B_2, \dots$ tienda a B, entonces por la segunda condición de la (Def. 24) se tiene que (A, B_n) tiende a cero, es decir, la sucesión B_n tiende a A, luego por hipótesis la desigualdad $n > p$, implica $|U(A) - U(B_n)| < \varepsilon$. Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$

Esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$.

- **Observaciones**

En esta demostración podemos observar que la expresión *tiende a* le da el mismo significado que a la expresión $V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n)$, Como lo observamos en esta parte de la demostración donde hace referencia a definición de operación continua: *"En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, (Def. 12), si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$."*

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

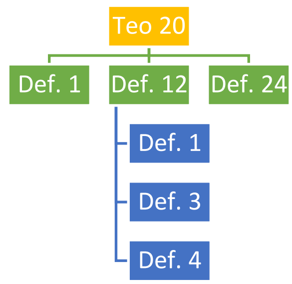

Fig. 20 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

No usa ningún concepto.

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Los usos de la métrica que reconozco son:

➢ *"Cuando n crece indefinidamente, la primera desigualdad muestra que B_n tiende a B y, de acuerdo con la hipótesis, $U(B_n)$ tiende a $U(A)$, lo que lleva a una contradicción con la segunda desigualdad."* demanda del uso de la métrica para garantizar que una sucesión converge.

➢ *"Si, para cualquier ε, podemos determinar η_A tal que $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$"* Usa la vecindad de dos elementos, menor que un número.

➢ *"Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$ esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$."* Usa la vecindad y demanda de la métrica para decir que un número tiende a otro.

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

<table>
<tr><th>¿Qué hace?</th><th>¿Cómo hace?</th><th>¿Por qué hace?</th><th>¿Para qué hace?</th></tr>
<tr><td colspan="4">Demostración</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Garantiza la convergencia de una sucesión de elementos de una clase (V)</td><td>Usa la (Obs. 17) si es que en lugar de B es A entonces, “Cuando n crece indefinidamente, la primera desigualdad muestra que B_n tiende a B” (en lugar de B es A).</td><td>Porque supone que $(A, B_n) < \frac{1}{n}$ para cualquier n, y usa la (Obs. 17)</td><td>Para usar la hipótesis de que la operación es continua con la (Def. 12)</td></tr>
<tr><td>Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$</td><td>Porque demuestra que la sucesión $B_1, B_2, \dots$ tiende a A, y por la (Obs. 17)</td><td>Para demostrar que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$ y así demostrar que cumple la propiedad supuesta.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Garantiza la convergencia de una sucesión de números, que son los valores de la operación U.</td><td>“de acuerdo con la hipótesis que supone que la operación es continua y por la (Def. 12), $U(B_n)$ tiende a $U(A)$, lo que lleva a una contradicción con la segunda desigualdad.”</td><td>Porque tiene una sucesión de elementos que converge al elemento A y porque la operación U es continua con la (Def. 12)</td><td>Para llegar a una contradicción con la suposición con la desigualdad $|U(A) - U(B_n)| \geq \varepsilon$, y muestra que la condición es necesaria.</td></tr>
<tr><td>la desigualdad $n > p$, implica $|U(A) - U(B_n)| < \varepsilon$</td><td>Porque está suponiendo verdadera la propiedad que quiere demostrar que es necesaria y suficiente. Y cumple que para cualquier ε se puede determinar un número tal que la vecindad (A, B_n) tiende a cero con ese número</td><td>Para decir que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$.</td></tr>
</table>

	Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$, esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$.	Porque demuestra antes que la desigualdad $n > p$, implica $\lvert U(A) - U(B_n) \rvert < \varepsilon$.	Para demostrar que, si supone verdadera la propiedad, entonces la operación cumplirá la (Def. 12) y en consecuencia demuestra la suficiencia.
Determina elementos vecinos	Si, para cualquier ε, podemos determinar η_A tal que $(A, B) < \eta_A$, implica $\lvert U(A) - U(B) \rvert < \varepsilon$	Porque está suponiendo cierta la propiedad que quiere demostrar que es necesaria y suficiente.	Para garantizar que la sucesión $B_1, B_2, \ldots$ tienda a B.

Teorema 21

> THÉORÈME. — *Toute opération continue dans un ensemble* EXTRÉMAL *E formé d'éléments d'une classe (V) est uniformément continue dans E.*

Unidad de análisis

Teorema. - *Toda operación continua en un conjunto EXTRÉMAL E formado de elementos de una clase (V), es uniformente continua en E.*

<u>Demostración.</u>

En efecto, en el caso contrario, podríamos encontrar un número $\varepsilon > 0$, tal que, para cualquier n, existan dos elementos A_n, B_n de E, que satisfacen:

$$(A_n, B_n) < \frac{1}{n}, \quad |U(A_n) - U(B_n)| \geq \varepsilon.$$

De la sucesión $A_1, A_2, \ldots$ podemos extraer una sucesión $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ que tiene como límite a un elemento A de E. Entonces B_{p_n} tiene el mismo límite A, dado que (A_{p_n}, A) y (A_{p_n}, B_{p_n}) son infinitamente pequeñas con $\frac{1}{n}$, entonces también, (A, B_{p_n}). Sin embargo:

$$\left|U\left(A_{p_n}\right) - U\left(B_{p_n}\right)\right| \leq \left|U\left(A_{p_n}\right) - U(A)\right| + \left|U(A) - U\left(B_{p_n}\right)\right|.$$

Las dos cantidades del segundo término tiende a cero con $\frac{1}{n}$. Por lo tanto, es imposible que el primer término sea $\geq \varepsilon$. (p. 29)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este teorema lo da después de definir una operación uniformemente continua en un conjunto formado por elementos de una clase (V), y afirma que toda operación uniformemente continua es continua, sin embargo, el recíproco no siempre es cierto, solo en el caso cuando el conjunto E es extrémal, esto es lo que demuestra en el teorema.

- **Descripción del enunciado**

Relaciona la propiedad de continuidad de una operación con la de uniformemente continua.

2. Observaciones y complementos

- **Demostración con complementos**

En efecto, en el caso contrario, podríamos encontrar un número $\varepsilon > 0$, tal que, para cualquier n, existan dos elementos A_n, B_n de E, que satisfacen:

$$(A_n, B_n) < \frac{1}{n}, \ |U(A_n) - U(B_n)| \geq \varepsilon.$$

Dado que el conjunto E es extrémal (Def. 11), de la sucesión $A_1, A_2, \ldots$ podemos extraer una sucesión $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ que tiene como limite a un elemento A de E. Entonces B_{p_n} tiene el mismo limite A, dado que (A_{p_n}, A) y (A_{p_n}, B_{p_n}) son infinitamente pequeñas con $\frac{1}{n}$ por la hipótesis de contradicción y por la segunda propiedad de la (Def. 24) entonces también (A, B_{p_n}). Sin embargo:

$$|U(A_{p_n}) - U(B_{p_n})| \leq |U(A_{p_n}) - U(A)| + |U(A) - U(B_{p_n})|.$$

Las dos cantidades del segundo término tiende a cero con $\frac{1}{n}$, porque la operación U es continua (Teo. 20). Por lo tanto, es imposible que el primer término sea $\geq \varepsilon$.

- **Observaciones**

No tengo observaciones

3. **Definiciones y conceptos que utiliza**

- **Definiciones**

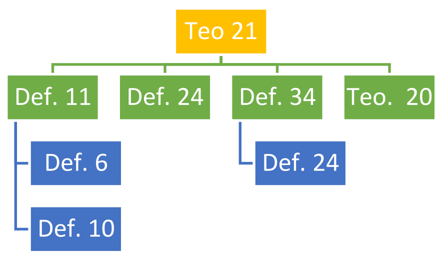

Fig. 21 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

No usa ningún concepto

Fase 2: Analítica

1. **Usos de la métrica**

Los usos de la métrica que reconozco son:

➢ *"podríamos encontrar un número* $\varepsilon > 0$*, tal que, para cualquier* n*, existan dos elementos* A_n, B_n *de* E*, que satisfacen:* $(A_n, B_n) < \frac{1}{n}$, $|U(A_n) - U(B_n)| \geq \varepsilon$*."* Determina la cercanía entre dos elementos.

➢ *"de la sucesión* $A_1, A_2, \ldots$ *podemos extraer una sucesión* $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ *que tiene como limite a un elemento* A *de* E*."* Se observa que garantiza que una sucesión converge, lo cual demanda del uso de una métrica.

➢ *"Entonces B_{p_n} tiene el mismo limite A."* Porque para mostrar que una sucesión converge, se requiere del uso de una métrica, en este caso lo hace con la definición de vecindad.

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
	Demostración		
Determina elementos vecinos	podríamos encontrar un número $\varepsilon > 0$, tal que, para cualquier n, existan dos elementos A_n, B_n de E, que satisfacen: $(A_n, B_n) < \frac{1}{n}$,	Porque supone que la operación no es uniformemente continua, y considerar una vecindad de dos elementos cualesquiera es parte de esta definición. (Def. 34)	Para afirmar que $\|U(A_n) - U(B_n)\| \geq \varepsilon$. Y para garantizar que (A, B_{p_n}) es infinitamente pequeña con $\frac{1}{n}$.
Garantiza la convergencia de una sucesión	de la sucesión $A_1, A_2, \dots$ podemos extraer una sucesión $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots$ que tiene como limite a un elemento A de E. Usa la definición de conjunto extrémal (Def. 12).	Porque da una sucesión de elementos de un conjunto extrémal	Para garantizar que (A_{p_n}, A) es infinitamente pequeña con un $1/n$. Y usarlo para mostrar que el número $\|U(A_{p_n}) - U(A)\|$ tiende a cero con $\frac{1}{n}$ usando la hipótesis de que la operación es continua (Teo. 20)

Garantiza que una sucesión converge al mismo límite que otra sucesión	Entonces B_{p_n} tiene el mismo límite A, dado que (A_{p_n}, A) y (A_{p_n}, B_{p_n}) son infinitamente pequeñas con $\frac{1}{n}$ por lo hipótesis de contradicción y por la segunda propiedad de la (Def. 24) entonces también $\left(A, B_{p_n}\right)$.	Porque la sucesión B_{p_n} ya sabe que converge, sin embargo, no sabe a qué elemento converge y demuestra que es al mismo elemento que la sucesión A_{p_n}, además que ya tiene el elemento al que converge A_{p_n} y por hipótesis tiene que la vecindad (A_{p_n}, B_{p_n}) es infinitamente pequeña con $\frac{1}{n}$	Para mostrar que el número $\left\|U(A) - U\left(B_{p_n}\right)\right\|$ tiende a cero con $\frac{1}{n}$ usando la hipótesis de que la operación es continua (Teo. 20)

Teorema 22

THÉORÈME. — *Pour que des opérations continues dans un même ensemble extrémal E, formé d'éléments d'une classe (V) séparable, forment une famille compacte $\mathfrak{J}$, il faut et il suffit que les opérations de $\mathfrak{J}$ soient, en tout élément de E, également continues et bornées.*

Unidad de análisis

Teorema. - *Para que las operaciones continuas en un mismo conjunto extrémal E, formado por elementos de una clase (V) separable, forman una familia compacta $\boldsymbol{J}$, es necesario y suficiente que las operaciones de $\boldsymbol{J}$ sean, en todos los elementos de E, igualmente continuas y limitadas.*

No lo demuestra

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Para enunciar este teorema, Fréchet introduce la familia de operaciones igualmente continuas en un conjunto formado por elementos de una clase (V) en la sección 48.

Este teorema resulta del teorema en la sección (No. 19) considerando el conjunto E formado por elementos de una clase separable. Fréchet dice que la condición impuesta en ese teorema de que E es numerable se satisface sí misma.

Demuestra que para que esta familia de operaciones sea compacta, es necesario y suficiente que las operaciones sean, igualmente continuas y limitadas en E.

- **Descripción del enunciado**

Condiciones necesarias y suficiente para que las operaciones continuas formen una familia compacta.

2. Observaciones y complementos

No lo demuestra

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

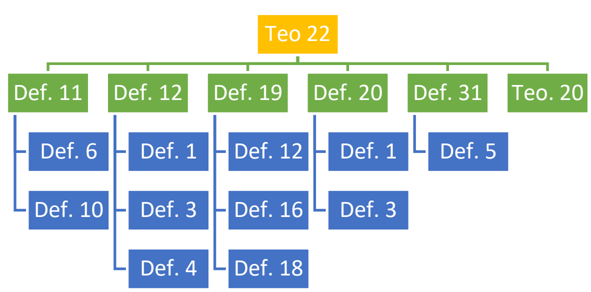

Fig. 22 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Operaciones limitadas en su conjunto

- Conjunto numerable

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Dado que no hace la demostración, no contamos con la actividad matemática para responder los cuestionamientos analíticos.

Teorema definido en el capítulo 1. Basados en la definición de una clase (E)

Teorema 23

51. THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que toute opération continue dans un ensemble E d'éléments d'une classe (E), 1° soit bornée dans cet ensemble, 2° y atteigne sa limite supérieure, est que cet ensemble E soit extrémal.*

Unidad de análisis

Teorema: *La condición necesaria y suficiente para que toda operación continua en un conjunto E de elementos de una clase* (E), *1ª sea acotada en ese conjunto, 2ª alcance su límite superior, es que el conjunto E sea extrémal.*

Demostración.

Ya hemos probado que la condición es suficiente.

Ahora mostraremos que si el conjunto E no fuese extrémal, podríamos formar al menos dos operaciones continuas en E: una no acotada, la otra acotada pero que no alcance su límite superior. Observemos que es suficiente obtener la primera U, ya que se puede tomar por la segunda a: $V \equiv \frac{U^2}{1+U^2}$ que nunca alcanzara su límite superior: 1

1°. Supongamos primero que E no es cerrado. Es decir, hay un elemento A, límite de elementos de E y no pertenecen a E. Entonces será suficiente tomarlo por valor de $U(B)$ en cada elemento B de E:

$U(B) = \frac{1}{(A,B)}$.

Esta operación evidentemente no es acotada. Está bien definida en todo elemento B de E; además es continua, ya que si B y C son dos elementos de E, tenemos:

$$|U(B) - U(C)| = \left|\frac{(A,B)-(A,C)}{(A,B)(A,C)}\right|.$$

ahora, tomando B fijo y ε tan pequeño como se desee y en particular, más pequeño que (A,B), se tiene:

$$|(A,C) - (A,B)| < (B,C),$$

La desigualdad: $(B,C) < \varepsilon$ conlleva a:

$$|(A,C) - (A,B)| < \varepsilon,\ (A,B)(A,C) > (A,B)[(A,B) - \varepsilon].$$

Así que, si ω es un número > 0 y tan pequeño como se desee, será suficiente tomar ε de modo que:

$$\varepsilon < (A,B) \text{ y } \frac{\varepsilon}{(A,B)[(A,B)-\varepsilon]} < \omega,$$

para que la desigualdad:

$$(B,C) < \varepsilon \text{ implique } |U(B) - U(C)| < \omega$$

2ª Consideremos el mismo caso donde E no es compacto. Entonces podemos encontrar en E una sucesión infinita S de elementos de E distintos

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

tal que la sucesión S no tenga elemento límite. Para formar una operación U continua y no acotada en el conjunto E, primero haremos algunas observaciones sobre la sucesión S.

Sea ε_p el límite inferior de las distancias de A_p con todos los otros elementos de la sucesión S. El numero $\varepsilon_p \geq 0$ no puede ser nulo, de lo contrario podríamos extraer de S una sucesión que tienda a A_p.

Ahora, descompondremos a E en conjuntos parciales de la manera siguiente. Llamamos E_p al conjunto de elementos B de E tal que: $(B, A_p) \leq \alpha_P$, nombrando α_p el más pequeño de dos números $\frac{1}{p}$ y $\frac{\varepsilon_p}{3}$. Sea B un elemento de E_p, y C un elemento de E_q, tenemos que:

$$\text{(I)}\ \left(A_p, A_q\right) \leq \left(A_p, B\right) + \left(C, A_q\right) + (B, C).$$

Ahora bien, para cualquier p y q tendremos, de acuerdo la definición misma de ε_p y ε_q.

$$\left(A_p, A_q\right) \geq \varepsilon_p \text{ y } \left(A_p, A_q\right) \geq \varepsilon_q,$$

Donde

$\left(A_p, A_q\right) \geq \frac{\varepsilon_p+\varepsilon_q}{2}$.

Por otra parte, de acuerdo con la definición de E_p y E_q .

$\left(A_p, B\right) \leq \frac{\varepsilon_p}{3}$, $\left(A_q, C\right) \leq \frac{\varepsilon_q}{3}$;

Así, la desigualdad se convierte:

$\frac{\varepsilon_p+\varepsilon_q}{2} \leq (B, C) + \frac{\varepsilon_p+\varepsilon_q}{3}$.

Donde

$(B, C) \geq \frac{\varepsilon_p+\varepsilon_q}{6}$.

Así, la distancia de dos elementos cualesquiera, uno en E_p, el otra en E_q, es superior (mayor) a un número positivo fijo. Esto prueba que: 1ª E_p y E_q no tienen elementos en común; 2ª ningún elemento límite de E_p pertenece a E_q, ni inversamente. Al fin, si consideramos una sucesión de elementos $B_1, B_2, \ldots$ que pertenecen respectivamente a los conjuntos $E_{p_1}, E_{p_2}, \ldots$ todos distintos, es imposible que tal sucesión tenga límite. En efecto, en este caso podemos primero, sólo considerar si es necesario una sucesión extraída de la sucesión dada, suponer que los índices $P_1, P_2, \ldots$ están creciendo. Ahora bien, tendríamos, llamando C al límite de esta sucesión de elementos,

$\left(C, A_{p_n}\right) \leq (C, B_n) + (B_n, A_{p_n})$,

y ya que por hipótesis $(B_n, A_{p_n}) \leq \frac{1}{p_n}$, tenemos que los dos términos del segundo miembro tenderían hacia 0 con $\frac{1}{n}$. Lo que es imposible ya que habría una sucesión $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ extraida de S que tendería hacia un límite C.

Con esto, formaremos la operación buscada U de la manera siguiente. Tomamos

$U(B) = \left[\alpha_p - (B, A_p)\right] \frac{p}{\alpha_p}$, Cuando B es un elemento cualquiera de E_p, y tomemos $U(B) = 0$ cuando B no está en ninguno de los conjuntos $E_1, E_2, ..$ es decir, está en el conjunto $G \equiv E - E_1 - E_2 - \cdots$. Vemos primero que U es una operación bien determinada en todo elemento de E. No es acotada, porque tenemos:

$$U(A_p) = p$$

Sin embargo, es continua en E. Es suficiente mostrar que si los elementos de E distintos: $C_1, C_2, ...$ tienden hacia un elemento C de E, tenemos:

$$U(C) = \lim_{n=\infty} U(C_n).$$

En efecto, observaremos primero que no hay, de acuerdo con lo anterior, una infinidad de elementos de la sucesión $C_1, C_2, ...$ pertenecientes a los conjuntos E_p distintos. Entonces:

1° O bien, C está en G, es decir tendremos que para cualquier p

$$(C, A_p) > \alpha_p.$$

o

$$(C_n, A_p) \geq (C, A_p) - (C, C_n) = \alpha_p + [(C, A_p) - \alpha_p - (C, C_n)];$$

Por otro lado, tendremos, para n suficientemente grande,

$$(C, C_n) < (C, A_p) - \alpha_p,$$

Por lo tanto, combinando estas dos desigualdades

$$(C_n, A_p) > \alpha_p.$$

Así que, a partir de cierto rango C_n está en G. Entonces se tiene:

$$U(C_n) = 0, \qquad U(C) = 0,$$

De donde:

$$U(C) = \lim_{n=\infty} U(C_n).$$

2° O bien C está en E_p y se tiene: $(C, A_p) \leq \alpha_p$. Entonces se presentan dos casos

a) $(C, A_p) \leq \alpha_p$; vemos como antes que a partir de cierto rango C_n está constantemente en E_p. Entonces:

$$|U(C) - U(C_n)| = |(C_n, A_p) - (C, A_p)| \frac{p}{\alpha_p} \leq (C, C_n) \frac{p}{\alpha_p}.$$

Así que:

$U(C) = \lim_{n=\infty} U(C_n)$.

b) $(C, A_p) \leq \alpha_p$. Entonces, a partir de un cierto rango no hay más en la sucesión $C_1, C_2, \ldots$ que elementos de G: $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots$ y elementos de E_p: $C_{q_1}, C_{q_2}, \ldots$ Vemos como antes que:

$U(C) = \lim_{r=\infty} U(C_{q_r})$.

Por otro lado, tendremos

$U(C) = 0, U\left(C_{n_r}\right) = 0,$

De donde:

$$U(C) = \lim_{r=\infty} U(C_{n_r}).$$

Por lo tanto, combinando

$U(C) = \lim_{n=\infty} U(C_n)$.

Así U es una operación no acotada, continua en todo elemento de G. (p. 31-33)

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Este es el último teorema que enuncia y es el único que enuncia después que define la distancia, ya que en la demostración de este teorema la usa.

Fréchet menciona que este teorema es el recíproco del teorema que enunció al principió en la sección 11.

- **Descripción del enunciado**

Condición necesaria y suficiente para que una operación continua sea acotada y alcance su límite superior.

2. Observaciones y complementos

- **Demostración “completa”**

Ya hemos probado que la condición es suficiente. No menciona dónde lo demuestra.

Ahora mostraremos que si el conjunto E no fuese extrémal, podríamos formar al menos dos operaciones continuas en E: una no acotada, la otra acotada pero que no alcance su límite superior. Observemos que es suficiente obtener la primera U, ya que se puede tomar por la segunda a: $V \equiv \frac{U^2}{1+U^2}$ que nunca alcanzara su límite superior: 1.

1°. Supongamos primero que E no es cerrado (Def. 6). Es decir, hay un elemento A, límite de elementos de E y no pertenecen a E. Entonces será suficiente tomarlo por valor de $U(B)$ en cada elemento B de E:

$U(B) = \frac{1}{(A,B)}$. (A, B) es la distancia de B que pertenece a E y A que pertenece a E' pero no a E.

Esta operación evidentemente no es acotada. Está bien definida en todo elemento B de E; además es continua, ya que si B y C son dos elementos de E, tenemos:

$U(B) = \frac{1}{(A,B)}$ y $U(C) = \frac{1}{(A,C)}$ entonces

$|U(B) - U(C)| = \left|\frac{(A,B)-(A,C)}{(A,B)(A,C)}\right|$.

ahora, tomando B fijo y ε tan pequeño como se desee y en particular, más pequeño que (A, B), se tiene:

$|(A, C) - (A, B)| < (B, C)$,

La desigualdad: $(B, C) < \varepsilon$ conlleva a:

$|(A, C) - (A, B)| < \varepsilon$, $(A, B)(A, C) > (A, B)[(A, B) - \varepsilon]$.

Así que, si ω es un numero > 0 y tan pequeño como se desee, será suficiente tomar ε de modo que:

$\varepsilon < (A, B)$ y $\frac{\varepsilon}{(A,B)[(A,B)-\varepsilon]} < \omega$,

Todo está bajo el supuesto de que $(B, C) < \varepsilon$ entonces $\left|\frac{(A,B)-(A,C)}{(A,B)(A,C)}\right| < \frac{\varepsilon}{(A,B)(A,C)}$.

para que la desigualdad

$(B,C) < \varepsilon$ implique $|U(B) - U(C)| < \omega$ (Teo. 20), en efecto, si $(B,C) < \varepsilon$ entonces $\frac{\varepsilon}{(A,B)[(A,B)-\varepsilon]} < \omega$ y $|U(B) - U(C)| < \frac{\varepsilon}{(A,B)[(A,B)-\varepsilon]} < \omega$.

2ª Consideremos el mismo caso donde E no es compacto (Def. 10). Entonces podemos encontrar en E una sucesión infinita S de elementos de E distintos

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

tal que la sucesión S no tiene elemento límite. Para formar una operación U continua y no acotada en el conjunto E, primero haremos algunas observaciones sobre la sucesión S.

Sea ε_p el límite inferior de las distancias de A_p con todos los otros elementos de la sucesión S. El numero $\varepsilon_p \geq 0$ no puede ser nulo, de lo contrario podríamos extraer de S una sucesión que tienda a A_p.

Ahora, descompondremos a E en conjuntos parciales de la manera siguiente. Llamamos E_p al conjunto de elementos B de E tal que: $(B, A_P) \leq \alpha_P$, nombrando α_P el más pequeño de dos números $\frac{1}{p}$ y $\frac{\varepsilon_p}{3}$. Sea B un elemento de E_p, y C un elemento de E_q, tenemos que:

Si B un elemento de E_p entonces $(B, A_p) \leq \alpha_p$, $\alpha_p = min\left\{\frac{1}{p}, \frac{\varepsilon_p}{3}\right\}$ y si C un elemento de E_q entonces $(C, A_q) \leq \alpha_q$, $\alpha_q = min\left\{\frac{1}{p}, \frac{\varepsilon_p}{3}\right\}$:

(I) $(A_p, A_q) \leq (A_p, B) + (C, A_q) + (B, C)$.

Ahora bien, para cualquier p y q tendremos, de acuerdo la definición misma de ε_p y ε_q.

$$(A_p, A_q) \geq \varepsilon_p \text{ y } (A_p, A_q) \geq \varepsilon_q,$$

Donde

$\varepsilon_p + \varepsilon_q \leq (A_p, A_q) + (A_p, A_q) = 2(A_p, A_q)$ así

$(A_p, A_q) \geq \frac{\varepsilon_p + \varepsilon_q}{2}$.

Por otra parte, de acuerdo con la definición de E_p y E_q. E_p es el conjunto de todos los elementos B de E tal que $(B, A_p) \leq \alpha_p$, $\alpha_p = min\left\{\frac{1}{p}, \frac{\varepsilon_p}{3}\right\}$, entonces

$(A_p, B) \leq \frac{\varepsilon_p}{3}$, $(A_q, C) \leq \frac{\varepsilon_q}{3}$; en este caso toma α_p como $\frac{\varepsilon_p}{3}$.

Así, la desigualdad se convierte:

$\frac{\varepsilon_p+\varepsilon_q}{2} \leq (B,C) + \frac{\varepsilon_p+\varepsilon_q}{3}$.

Porque se tenía que $(A_p, A_q) \leq (A_p, B) + (C, A_q) + (B, C)$ entonces $\frac{\varepsilon_p+\varepsilon_q}{2} \leq (A_p, A_q) \leq \frac{\varepsilon_p}{3} + \frac{\varepsilon_q}{3} + (B, C)$.

Donde

$(B,C) \geq \frac{\varepsilon_p+\varepsilon_q}{6}$.

Así, la distancia de dos elementos cualesquiera, uno en E_p, el otra en E_q, es superior (mayor) a un número positivo fijo. Esto prueba que: 1ª E_p y E_q no tienen elementos en común; 2ª ningún elemento límite de E_p pertenece a E_q, ni inversamente. Al fin, si consideramos una sucesión de elementos $B_1, B_2, \ldots$ que pertenecen respectivamente a los conjuntos $E_{p_1}, E_{p_2}, \ldots$ todos distintos, es imposible que tal sucesión tenga limite, porque si $B_1, B_2, \ldots$ tiene un límite B, este elemento va a pertenecer a algún E_p, pero no habría ningún otro elemento de la sucesión que pertenezca al mismo E_p, es decir, (B_p, B) siempre será mayor que cero por la definición de E_p. En efecto, en este caso podemos primero, sólo considerar si es necesario una sucesión extraída de la sucesión dada, suponer que los índices $P_1, P_2, \ldots$ estan creciendo. Ahora bien, tendríamos, llamando C al límite de esta sucesión de elementos,

$(C, A_{p_n}) \leq (C, B_n) + (B_n, A_{p_n})$,

y ya que por hipótesis $(B_n, A_{p_n}) \leq \frac{1}{p_n}$, porque B_n es elemento de E_{p_n}, vemos que los dos términos del segundo miembro tenderían hacia 0 con $\frac{1}{n}$. Lo que es imposible ya que habría una sucesión $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ extraida de S que tendería hacia un límite C. No puede pasar, porque la sucesión S no tiene límite.

Aquí comienza a formar la operación buscada.

Con esto, formaremos la operación buscada U de la manera siguiente. Tomamos

$U(B) = [\alpha_p - (B, A_p)] \frac{p}{\alpha_p}$,

Cuando B es un elemento cualquiera de E_p, y tomemos $U(B) = 0$ cuando B no está en ninguno de los conjuntos $E_1, E_2, ..$ es decir, está en el conjunto $G \equiv E - E_1 - E_2 - \cdots$.

Vemos primero que U es una operación bien determinada en todo elemento de E. No es acotada, porque tenemos:

$U(A_p) = p$

Sin embargo, es continua en E. Es suficiente mostrar que si los elementos de E distintos: $C_1, C_2, \ldots$ tienden hacia un elemento C de E, tenemos:

$U(C) = \lim_{n=\infty} U(C_n)$. (Def. 12)

En efecto, observaremos primero que no hay, de acuerdo con lo anterior, una infinidad de elementos de la sucesión $C_1, C_2, \ldots$ pertenecientes a los conjuntos E_p distintos. Entonces:

1° O bien, C está en G, entonces C no está en ninguno de los E_p, es decir tendremos que para cualquier p

$(C, A_p) > \alpha_p$.

Ahora bien,

$(C, A_p) \leq (C, C_n) + (C_n, A_p)$ por la (Def. 33), entonces $(C_n, A_p) \geq (C, A_p) - (C, C_n) = \alpha_p$, luego

$(C_n, A_p) \geq (C, A_p) - (C, C_n) = \alpha_p + [(C, A_p) - \alpha_p - (C, C_n)]$;

Por otro lado, tendremos, para n suficientemente grande,

$(C, C_n) < (C, A_p) - \alpha_p$,

Por lo tanto, combinando estas dos desigualdades

$(C_n, A_p) \geq \alpha_p + [(C, A_p) - \alpha_p - (C, C_n)]$ puesto que $(C, C_n) < (C, A_p) - \alpha_p$ entonces

$(C_n, A_p) > \alpha_p$.

Así que, a partir de cierto rango C_n está en G. Entonces se tiene:

$U(C_n) = 0,\ U(C) = 0$, por la definición de la operación U

De donde:

$U(C) = \lim_{n=\infty} U(C_n)$. Por lo tanto, la operación U es continua.

2° O bien C esta en E_p y se tiene: $(C, A_p) \leq \alpha_p$. Entonces se presentan dos casos:

a) $(C, A_p) \leq \alpha_p$; vemos como antes que a partir de cierto rango C_n está constantemente en E_p. Entonces:

$|U(C) - U(C_n)| = |(C_n, A_p) - (C, A_p)| \frac{p}{\alpha_p} \leq (C, C_n) \frac{p}{\alpha_p}$.

Puesto que: $|U(C) - U(C_n)| = \left| [\alpha_p - (C, A_p)] \frac{p}{\alpha_p} - [\alpha_p - (C_n, A_p)] \frac{p}{\alpha_p} \right|$

$$= |[\alpha_p - (C, A_p)] - [\alpha_p - (C_n, A_p)]| \frac{p}{\alpha_p}$$

$$= |(C_n, A_p) - (C, A_p)| \frac{p}{\alpha_p}$$

Por la definición de distancia se tiene que $(C_n, A_p) \leq (C, C_n) + (C, A_p)$ entonces $(C_n, A_p) - (C, A_p) \leq (C, C_n)$ luego, $|(C_n, A_p) - (C, A_p)| \frac{p}{\alpha_p} < (C, C_n) \frac{p}{\alpha_p}$, y dado que a partir de cierto rango $C_n \in E_p$ y $C \in E_p$ entonces $(C, C_n) < \alpha_p$ creo que de alguna manera se da $\varepsilon = (C, C_n) \frac{p}{\alpha_p}$ para acotar $|U(C) - U(C_n)|$.

Así que:

$U(C) = \lim_{n=\infty} U(C_n)$. (Def. 12)

b) $(C, A_p) \leq \alpha_p$. Entonces, a partir de un cierto rango ya no hay más en la sucesión $C_1, C_2, \ldots$ que elementos de G: $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots$ y elementos de E_p: $C_{q_1}, C_{q_2}, \ldots$ Vemos como antes que:

$U(C) = \lim_{r=\infty} U(C_{q_r})$, porque a partir de cierto rango C_{q_r} pertenece a un E_p, entonces pasa lo del a).

Por otro lado, tenemos

$U(C) = 0$, $U(C_{n_r}) = 0$,

$U(C) = [\alpha_p - (C, A_p)] \frac{p}{\alpha_p}$ pero $(C, A_p) = \alpha_p$, entonces $U(C) = 0$, y

$U(C_{n_r}) = [\alpha_p - (C, C_{n_r})] \frac{p}{\alpha_p}$.

De donde:

$$U(C) = \lim_{r=\infty} U(C_{n_r}).$$

Por lo tanto, combinando

$U(C) = \lim_{n=\infty} U(C_n)$.

Así U es una operación no acotada, continua en todo elemento de G.

- **Observaciones**

Antes de enunciar este teorema, Fréchet menciona que la hipótesis que pone sobre una clase (E) interviene de manera esencial en la demostración de este teorema.

En este teorema habla del límite inferior de la distancia.

3. Definiciones y conceptos que utiliza

- **Definiciones**

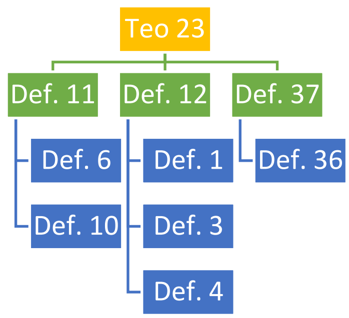

Fig. 23 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

- **Conceptos**

  - Operaciones acotadas en su conjunto
  - Límite superior de una operación

Fase 2: Analítica

1. Usos de la métrica

Usos de la métrica que se reconocen:

➢ "*Tomando B fijo y ε tan pequeño como se desee y en particular, más pequeño que (A, B), se tiene:* $|(A, C) - (A, B)| < (B, C)$" Usa la distancia de dos elementos de un conjunto no cerrado, pero que pertenecen a distintos subconjuntos de este, por eso la vecindad es mayor que un número dado.

➢ "*La desigualdad:* $(B, C) < \varepsilon$ *conlleva a:* $|(A, C) - (A, B)| < \varepsilon$, $(A, B)(A, C) > (A, B)[(A, B) - \varepsilon]$." Usa la distancia de dos elementos de un mismo conjunto, la usa menor que un número muy pequeño.

➢ *"descompondremos a E en conjuntos parciales de la manera siguiente. Llamamos E_p al conjunto de elementos B de E tal que: $(B, A_p) \leq \alpha_p$, nombrando α_p el más pequeño de dos números $\frac{1}{p}$ y $\frac{\varepsilon_p}{3}$."* Usa explícitamente la distancia

2. Practicas

- **Preguntas de análisis**

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
	Demostración		
Da la distancia de dos elementos, mayor que un ε tan pequeño como se desee	Tomando B fijo y ε tan pequeño como se desee y en particular, más pequeño que (A, B), se tiene: …	Porque A y B pertenecen a conjuntos distintos.	Para mostrar que $\lvert(A, C) - (A, B)\rvert < (B, C)$"
Da la distancia de dos elementos, menor que un ε tan pequeño como se desee	La desigualdad: $(B, C) < \varepsilon$ conlleva a: $\lvert(A, C) - (A, B)\rvert < \varepsilon$, $(A, B)(A, C) > (A, B)[(A, B) - \varepsilon]$."	Porque B y C pertenecen al mismo conjunto	Para mostrar que $\lvert(A, C) - (A, B)\rvert < \varepsilon$, $(A, B)(A, C) > (A, B)[(A, B) - \varepsilon]$. También lo usa para demostrar que la operación U es continua.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN

En este capítulo haremos la discusión de las ideas que se encontraron fundamentales en el análisis para el interés de esta investigación, identificaremos las acciones y actividades del modelo de anidación de prácticas que plantea la TMSE para explicar la construcción social del conocimiento matemático, en este caso, las acciones y actividades en la actividad matemática de Fréchet, que le permitieron el uso de alguna métrica.

De las respuestas al cuestionamiento ***¿qué hace?***, se reconoció un conjunto variado de acciones:

- Garantiza la existencia del elemento límite de una infinidad de elementos de una clase (L) o (V).
- Determina una propiedad sobre una correspondencia entre elementos de dos conjuntos.
- Garantiza la convergencia de una sucesión de números.
- Garantiza que un elemento no es elemento límite.
- Distingue dos elementos de un mismo conjunto.
- Garantiza la no pertenencia de un elemento en un conjunto.
- Determina elementos que son interiores de esferoides.
- Representa con la vecindad que una sucesión converge.
- Representa que dos elementos son distintos, y que dos elementos coinciden.
- Determina una propiedad de los elementos de un conjunto.
- Garantiza que una sucesión satisface las condiciones de Cauchy.
- Garantiza que una sucesión converge al mismo límite que otra sucesión.

Particularmente en los teoremas 14, 20 y 21, Fréchet da la vecindad de dos elementos, ya sean dos elementos cualesquiera de un conjunto o dos elementos como términos generales de una sucesión. Consideramos que de esta manera, Fréchet se refiere a elementos vecinos, cuando dice: “Or, si on veut l'étendre à des opérations dont la variable soit un élément de *nature quelconque*, il faut d'abord savoir ce que l'on doit entendre par éléments voisins ou par limite d'une suite d'éléments" (p. 2)

Por otro lado, Taylor, (1982) menciona que en la clase (V) la idea de que una sucesión $\{A_n\}$ tiene un límite A se define usando una medida numérica de la cercanía de A_n a A, dicha medida numérica la identificamos como la vecindad. De los usos identificados en esta parte, observamos que no todos están relacionados con nuestro objeto de estudio, en general los que encontramos con mayor relación y de mayor interés para esta investigación son los siguiente:

- Garantiza la existencia del elemento límite de una infinidad de elementos de un conjunto formado de una clase (L) o (V): teo. 1, 9, 10, 15, 17, 18, 20, 21.
- Garantiza que un elemento no es elemento límite: teo. 12
- Distingue dos elementos de un conjunto: teo. 10
- Representa con la vecindad que una sucesión converge, teo. 14; que dos elementos son distintos, teo. 17: y que dos elementos coinciden, teo. 15.
- Garantiza que una sucesión converge al mismo límite que otra sucesión: teo. 9, 18 y 21
- Garantiza que una sucesión satisface las condiciones de Cauchy: teo. 16

Fundamentalmente lo que hace es poner en relación dos elementos, donde uno de ellos representa los términos de una sucesión mientras que el otro representa el elemento límite, dicha relación corresponde a la idea *algo tiende a algo*; en otros casos los dos elementos que pone en relación son dos elementos cualesquiera de un mismo conjunto o de conjuntos distintos, en este caso la relación corresponde a que dos elementos son distintos, que dos elementos coinciden o bien que dos son elementos vecinos.

Entonces, cuando se da la vecindad de dos elementos, ya sean dos elementos cualesquiera de un conjunto o dos elementos como términos generales de una sucesión, se determina una **relación de cercanía entre los elementos de la sucesión**, es por esto que entendemos **la vecindad como una relación de proximidad** entre elementos de un conjunto cuyos elementos son de naturaleza cualquiera. En la primera parte de la tesis de Frechet, esta relación de proximidad siempre es numérica.

Las respuestas al cuestionamiento ***¿por qué hace?***, se centraron en la actividad matemática, esto es, qué de lo que hizo Fréchet en la demostración le permitió hacer lo que se identificó como respuesta del ¿qué hace?, esta fue una manera de hacer un "zum" en la actividad matemática que nos permitió identificar la condiciones que permitieron hacer lo que se hizo, en este sentido, las condiciones identificadas son las siguientes:

- Puede garantizar la convergencia de las sucesiones porque los elementos que forman las sucesiones en cuestión pertenecen a un conjunto extrémal, que es particularmente compacto. Teo: 1, 15, 17, 21; otra cosa que le permite garantizar la convergencia es que los elementos de la sucesión son elementos de una clase (V) que cumple las condiciones de la observación 17, específicamente lo que usan de la clase (V) es la segunda condición: Teo. 9, 20.
- Distingue los elementos de un conjunto porque ya tiene que un elemento no es límite de cierto conjunto de elementos y quiere probar que sí es límite de otro conjunto de elementos: Teo. 10
- Representa con la vecindad que una sucesión converge, porque ya sabe que la sucesión converge, sobre todo porque cumple las hipótesis de la observación 17: Teo. 14; representa que dos elementos son distintos, porque son elementos de una sucesión que no converge: Teo. 17; representa que dos elementos coinciden, porque supone que uno de los elementos que compara no es elemento interior: Teo. 15
- Garantiza que una sucesión converge al mismo límite que otra sucesión, porque ya tiene que la vecindad de la sucesión tiende a cero y la otra vecindad de dos elementos (uno de cada sucesión) es menor que cero, entonces usa la definición 24: Teo. 9 y 21, porque satisface las condiciones de Cauchy: Teo. 18
- Garantiza que una sucesión satisface las condiciones de Cauchy, porque define un conjunto con la propiedad que cualesquiera dos elementos de $H^{(n)}$ tenga una vecindad menor que $\frac{1}{n}$: Teo. 16

En esta parte reconocemos que, lo que le permitió a Fréchet hacer lo que hizo y que es de interés para esta investigación fue contar con el desarrollo de los casos particulares que él toma para hacer sus generalizaciones (matemática construida por Freéchet). En este desarrollo de su actividad matemática para hacer ese proceso de generalización identificamos las *acciones* mencionadas al principio de este capítulo, como respuesta al cuestionamiento *qué hace*.

Reconocemos que las *acciones fundamentales* realizadas por Fréchet en el desarrollo del primer capítulo de su tesis son *garantizar que algo tiende a algo* y *determinar que dos elementos son vecinos*, esto lo identificamos con lo que menciona él en la página 2 de su tesis, donde afirma que era necesario saber qué se entiende por **elementos vecinos** o por **límite de una sucesión de elementos** si se desea estudiar las operaciones cuya variable es de naturaleza cualquiera.

Taylor (1982) menciona que "(1) if the sequence $\{A_n\}$ has a limit, every sequence $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ formed of elements from $\{A_n\}$ with increasing indices $p_1, p_2, \ldots$ has the same limit as $\{A_n\}$, and (2) if $\{A_n\}$ is given with $A_n = A$ for each n, then $\{A_n\}$ has the limit A" and in which one supposes given a definition that assigns a precise meaning to the phrase "the infinite sequence $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ of elements of C has a limit B." (p. 243), consideramos que esto pasa así porque la vecindad es una manera de darle significado a esta frase, como se puede observar en el análisis.

En respuesta al cuestionamiento ***¿cómo hace?***, relacionadas con las respuestas anteriores se tiene:

- Usa la definición de conjunto compacto para garantizar la convergencia de una sucesión: Teo. 1,15, 17, 18 y21
- Distingue los elementos de un conjunto usando la vecindad mayor que un número positivo: Teo. 10
- Garantiza que un elemento no es elemento límite usando la definición del límite inferior de la vecindad, esto es, usando la vecindad mayor que un número positivo: Teo. 12
- Representa la convergencia con la vecindad usando la observación 17, haciendo que la vecindad tienda a cero con $1/n$: Teo. 14
- Representa con la vecindad que dos elementos coinciden, usando la vecindad menor que un número positivo: Teo. 15
- Representa con la vecindad que dos elementos son distintos, usando que la vecindad es mayor que el límite inferior de la vecindad: Teo. 17

- Garantiza que dos sucesiones convergen a un mismo límite; usando la vecindad de los términos de la sucesión con el límite, menor que un número muy pequeño pero mayor que cero: Teo. 9; usando la definición 29: Teo. 18; usando la definición 24: Teo. 21
- Garantiza que una sucesión satisface las condiciones de Cauchy, usando la vecindad de dos términos de la sucesión, menor que un número positivo: Teo. 16

Observamos que en algunos casos garantiza la convergencia usando la definición de conjunto compacto ya que está definida bajo la convergencia de cualquier sucesión de elementos del conjunto, en otros casos garantiza la convergencia utilizando la vecindad de dos elementos, de tal manera que la hace menor que un número positivo pero muy pequeño.

También se nota que en los teoremas 10 y 17, distingue los elementos usando la vecindad mayor que un número positivo. La forma de representar con la vecindad la convergencia de sucesiones, que dos elementos coinciden, así como la forma de garantizar que dos sucesiones convergen a un mismo elemento, y que una sucesión satisface las condiciones de Cauchy, es usando la vecindad menor que un número positivo.

De esta manera con las respuestas al cuestionamiento ¿cómo hace? se configura el nivel de *actividad* en el modelo de anidación de prácticas, ya que se identifica que son un conjunto de acciones (no necesariamente las identificadas con el cuestionamiento ¿qué hace?), que se ponen en juego para lograr los objetivo en la actividad matemática.

El cuestionamiento ***¿para qué hace?***, se respondió con el objetivo de reconocer la necesidad matemática de hacer cada una de las cosas que hace Fréchet relacionadas al objeto de estudio de esta tesis, al igual que el cuestionamiento ¿por qué hace?, se responde a manera de hacer un “zum”.

Las respuestas a este cuestionamiento son las siguientes:

- Garantiza la existencia del elemento límite de una infinidad de elementos de un conjunto formado de una clase (L) o (V): Teo. 1 para poder usar la condición II de la definición de clase (L); Teo. 9 para determinar que la vecindad de dos elementos es menor que un número que tiende a cero; Teo. 10 para mostrar que uno de los elementos es límite de un conjunto especifico; Teo. 15 para garantizar que un elemento límite es un elemento interior; Teo. 17 para probar que hay elementos de una sucesión que no pertenecen a una sucesión de conjunto; Teo. 20 para usar la definición 12 de operación continua y garantizar la convergencia de una sucesión de números, por último, en el Teo. 21 para mostrar que una sucesión converge y poder usar la definición de operación continua.

- Garantiza que un elemento no es elemento límite: Teo. 12 para probar que hay una cantidad finita de elementos que cumplen cierta propiedad del límite inferior de la vecindad.
- Distingue dos elementos de un conjunto: Teo. 10 para garantizar que hay una sucesión convergente a uno de los elementos que distingue.
- Representa con la vecindad que una sucesión converge: Teo. 14 para mostrar que la vecindad de un término de una sucesión con el término de otra sucesión es menor que un número que tiende a cero; que dos elementos son distintos; Teo. 17 para garantizar que uno de esos elementos es elemento interior de un conjunto; y que dos elementos coinciden y en el Teo. 15 para garantizar que la sucesión representada por uno de ellos converge a un elemento.
- Garantiza que una sucesión converge al mismo límite que otra sucesión: Teo. 9 para garantizar que un conjunto derivado es cerrado, Teo. 18 para demostrar que un conjunto es condensado, Teo. 21 para usar la definición de operación continua y garantizar la convergencia de una sucesión de números.
- Garantiza que una sucesión satisface las condiciones de Cauchy: Teo. 16, para garantizar la convergencia de una sucesión.

Se observa que las acciones de Fréchet tienen distintos motivos, algunos más transversales que otros, como la acción de garantizar la convergencia de una sucesión ya sea de elementos de una clase (L) o (V) o de una sucesión de números. De esto podemos concluir que en general es fundamental para Fréchet, en su hacer, el tener una forma de determinar que *algo tiende a algo*. Esta idea, Fréchet la utiliza en casi todos los teoremas, de una o de otra forma, y como se ha visto, para distintos objetivos.

Más arriba en este capítulo mencionamos que para Fréchet, dos elementos son vecinos cuando la vecindad de dos elementos sea menor que un número positivo, sin embargo, se ve que esto lo hace igual con distintos objetivos.

Dado que, anterior a su producción, tanto Fréchet como los matemáticos Hadamard, Volterra, Arzelà y Weierstrass, entre otros, demostraron los casos particulares (funciones de posición, funciones de una línea variable, función de función) que Fréchet generaliza en su tesis; éste contaba con las condiciones para reconocer que hay propiedades que son independientes de la naturaleza de los elementos considerados en el dominio de la operación, en los casos particulares. La propiedad que identificamos con esta característica, en la primera parte de la tesis de Fréchet, es la de *convergencia de sucesiones*, que, efectivamente, es independiente de la naturaleza de los elementos.

Además, la obra de Fréchet fue pionera en la configuración de un modo de composición (como el de la Teoría de Grupos de la época) en la Teoría de Conjuntos Abstractos (Fréchet, 1906; Arboleda, 2012; Taylor, 1982; Cavaillès, 1992; Manheim, 1962). Este modo de composición lo identificamos con lo que Taylor (1982) reconoce como *medida numérica de la cercanía de dos elementos*, y que afirma está gobernada por ciertos axiomas.

En el estudio del contexto socio-histórico declaramos que nos centraríamos en entender el papel que juega la distinción de los elementos si son idénticos o no en el proceso de generalización, sin embargo, después de haber realizado el análisis y la parte anterior de la discusión observamos que Fréchet no buscaba distinguir los elementos con el modo de composición, o con la relación de proximidad, sino lo que le interesa *es garantizar que algo tiende a algo*, esto requiere de alguna manera de distinguir entre los elementos, pero esto último no es el objetivo de Fréchet.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

Las preguntas se responden desde el contexto de la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet, texto que se identificó por medio de una revisión de historia de la Topología, como pionero en ideas fundamentales de la Topología, puesto que en este documento se encuentra la primera definición axiomática de distancia (concepto relacionado directamente con el concepto de topología, actualmente), esto hizo que nos interesara entender cuál fue el proceso que siguió Fréchet para dar dicha definición.

Para los fines de esta investigación, se estudió únicamente la primera parte de la tesis de Fréchet, además estudiamos el contexto histórico, considerando lo social, fundamentalmente basado en algunos estudios del matemático Angus E. Taylor y del doctor en Historia y Enseñanza de las Matemáticas Luis Carlos Arboleda Aparicio, que nos permitió posicionarnos en el contexto en el que se creó el texto estudiado.

Estos trabajos nos permitieron reconocer que la *racionalidad contextualizada* de la producción de este conocimiento se caracteriza por la forma de hacer matemática en la época (hasta la producción de la tesis de Fréchet), reflejada en la tesis, donde primero define los conceptos fundamentales para el desarrollo de su trabajo y comienza por enunciar cada teorema seguida de su respectiva demostración, aunque hay teoremas que no demuestra ya que Fréchet afirma que tales demostraciones son generalizaciones inmediatas de los casos particulares dados por otros matemáticos; cuándo Fréchet considera necesario, introduce nuevas definiciones, en ciertos momentos hace algún tipo de reflexión (observaciones) sobre su trabajo en la misma tesis para guiar su trabajo a su objetivo que es *establecer sistemáticamente algunos principios fundamentales del Cálculo Funcional y luego aplicarlos a algunos ejemplos concretos* (Fréchet, 1906).

Sobre el *relativismo epistemológico* se observa que la manera de validar el conocimiento es mediante las demostraciones matemáticas, que cumplan con los requisitos de la comunidad matemática de la época, aunque no toda la comunidad matemática vio con “buenos ojos” la tesis doctoral de Fréchet, por ejemplo, (Bourbaki citado en Arboleda, 1982).

Reconocemos como principal característica de este trabajo de Fréchet el proceso de generalización de resultados de casos particulares a casos generales como considerar conjuntos de funciones tales que el que el conjunto de elementos sobre el que se definen las operaciones son elementos de naturaleza cualquiera.

Para lograr su objetivo, Fréchet generaliza proposiciones sobre operaciones y conjuntos de operaciones cuya variable es de naturaleza determinada (casos particulares), a casos en los que la variable es de naturaleza cualquiera (operaciones funcionales), para esto Fréchet reconoció que fue necesario entender lo que significa que dos elementos sean vecinos o el límite de una sucesión de elementos.

El camino que Fréchet emprendió fue definir clases de elementos, primero la clase (L) en la que da dos condiciones generales que tiene que cumplir cualquier método que se emplee para determinar la convergencia de una sucesión, más adelante Fréchet reconoce que estas condiciones son muy generales y decide agregar más condiciones a esta clase, determinando así la clase (V) donde define un número como correspondencia de dos elementos de esta clase, al que le llama vecindad, que usa de diversas maneras, principalmente para determinar la convergencia de una sucesión de elementos. Posteriormente define una clase (E) en donde define la distancia, en este proceso reconocemos que la manera de garantizar que *algo tiende a algo* va evolucionando y tomando nuevos significados, esto es, *significación progresiva.*

Observamos qué en su tesis, Fréchet define tres conjuntos con cierta estructura a los que le llama clases (L), (V) y (E) cada una con características específicas, tales que toda clase (V) es una clase (L) donde la definición de límite se deduce de la definición de vecindad (p. 19), la consideración de una clase (V) como una clase (L) es exclusivamente en la tesis de Fréchet, a su vez toda clase (E) es una clase (V) donde la distancia es una vecindad que cumple con una propiedad particular (p. 30). En el siguiente esquema representamos esta relación entre las clases.

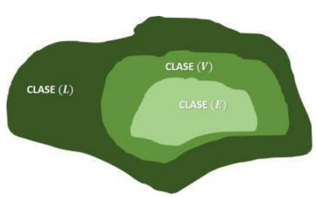

Fig. 24

En la definición de una clase (L), Fréchet afirma que:

> "*Le procédé qui permettra de donner la réponse (autrement dit la définition de la limite) est d'ailleurs absolument quelconque, assujetti seulement à satisfaire aux conditions I et II dont nous avons parlé et qui sont les suivantes :*
>
> *I) Si chacun des éléments de la suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ est identique à un même élément A, la suite a certainement une limite qui est A.*
>
> *II) Si une suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ a une limite A, toute suite d'éléments de la première suite pris dans le même ordre : $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_p}, \dots$. (les nombres entiers $n_1, n_2, \dots, n_p$ iront donc en croissant) a une limite qui est aussi A.*" (p. 5 y 6)

En una clase (L) el significado de la frase *algo tiende a algo* es muy general (procedimiento absolutamente cualquiera), ya que las condiciones que impone Fréchet son sólo las condiciones I) y II). En el análisis observamos que, cuando trabaja con elementos de una clase(L) lo que hace es *garantizar que algo tiende a algo*, en general usando la definición de conjunto compacto, sin embargo, la frase *algo tiende a algo* no adquiere significado claro.

Cuando Fréchet define una clase (V) da las propiedades, establece: "… *1^0 La condition nécessaire et suffisante pour que(A, B) soit nul est que A et B soient identiques. 2^0 Il existe une fonction positive bien déterminée $f(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε, telle que les inégalités $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ entraînent $(A, C) \leq f(\varepsilon)$, quels que soient les éléments A, B, C…*" (p. 18). Estas propiedades son restricciones extras que Fréchet da a los elementos de una clase (L), y que permiten significar la frase *algo tiende a algo*.

En una clase (V) el significado de la frase *algo tiende a algo* lo entendemos con la idea de que los elementos de una sucesión se "acercan" a un elemento (elemento límite), dicha cercanía se mide (de manera numérica) con la vecindad o la distancia. Además, la vecindad permite representar la convergencia, en este sentido decimos que la vecindad le da significado a la frase *algo tiende a algo.*

Dado que una clase (V) es una clase (L) con ciertas propiedades extras, vemos que la frase *algo tiende a algo* adquiere significado con la vecindad, en otras palabras, desde la TSME, un uso de la vecindad, entre otros, hace alusión a la idea *algo tiende a algo* cuando usa la vecindad menor que un número pequeño.

En el análisis de la obra reconocimos que Fréchet realiza diversas acciones relacionadas con la idea *algo tiende a algo*, fundamentalmente las acciones son garantizar la convergencia de una sucesión de elementos (elementos de naturaleza cualquiera: números, sucesiones), para demostrar que un conjunto es compacto, que una operación es continua, y la idea de determinar la cercanía entre cualesquiera dos elementos del conjunto.

En este proceso, encontramos la idea de que *algo tiende a algo* cuyo significado evoluciona desde que define la clase (L) hasta que define la clase (E). Observamos que, definir una *relación de proximidad* (vecindad, distancia) entre los elementos de un conjunto surge ante la necesidad de darle significado a la frase *algo tiende a algo*.

- ✓ ***¿Qué papel juega la relación de proximidad en la constitución de la topología como saber matemático?***

Reconocemos que esta pregunta es muy general para el trabajo que realizamos, es decir, no se puede responder en su totalidad desde esta investigación, ya que el concepto de topología no nace de una única actividad matemática, sino que se fue configurando con el trabajo de varios matemáticos.

En esta investigación estudiamos la aportación del matemático francés Maurice Fréchet, que fue dar la primera definición axiomática de distancia, mediante un proceso de generalización, en su tesis doctoral de 1906. En la primera parte de este trabajo de Fréchet, muestra cómo la actividad matemática que fue realizando Fréchet con el objetivo generalizar propiedades de la teoría de Conjuntos Lineales y del Cálculo Funcional a la Teoría de Conjuntos abstractos, le permitió, mediante la búsqueda de generalización de estas propiedades dar la que se considera la primera definición axiomática de distancia.

En esta investigación, entendemos que una *relación de proximidad* entre los elementos de un conjunto es una *propiedad de referencia (*estructura/modo de composición) entre los elementos del conjunto que permite saber cuándo *algo se acerca a algo* o bien, cuándo *algo se aproxima a algo*.

En una clase (L) esta *propiedad de referencia (*estructura/modo de composición) la identificamos como "*Le procédé qui permettra de donner la réponse (autrement dit la définition de la limite)*" en una clase (V) la idenficamos con la vecindad (*voisinage*) y en una clase (E) con la distancia (*l'écart*).

En el contexto que brinda la tesis de Maurice Fréchet, reconocemos que el papel que juega la relación de proximidad en la constitución del concepto de topología como saber matemático, es determinar la cercanía entre cualesquiera dos elementos del conjunto y con esto le da significado a la frase *algo tiende a algo* cuando se consideran elementos de naturaleza cualquiera, decimos que le da significado en el sentido, de que la *práctica* de garantizar que *algo tiende a algo*, demanda del establecimiento de una *relación de proximidad*.

El establecimiento de la estructura que define una relación de proximidad entre los elementos de un conjunto demanda de alguna manera el abandono de la naturaleza de los elementos del conjunto. El establecimiento de esta estructura permitió a Fréchet generalizar las propiedades que generalizó.

Entonces, en la tesis de Fréchet, observamos que el proceso de generalización que él realiza, junto con el papel que juega la relación de proximidad entre los elementos de un conjunto (en tanto estructura), permiten la emergencia del concepto de topología, más no su constitución como saber matemático.

Por otro lado, reconocemos que una *relación de proximidad* entre los elementos de un conjunto permite estudiar propiedades específicas de un conjunto de elementos de naturaleza cualquiera, esta manera de estudiar un conjunto se hace a través del estudio de sus elementos, específicamente por medio de una correspondencia (métrica o distancia) entre cualesquiera dos de los elementos del conjunto en cuestión.

Cabe mencionar que es necesario que se realicen investigaciones posteriores a este periodo de desarrollo matemático para responder este cuestionamiento con mayor cobertura, en otras palabras, en necesario reconocer el papel de la relación de proximidad en el trabajo de otros matemáticos que dieron de alguna manera una definición de espacio topológico y en consecuencia de topología. En este sentido, nos cuestionamos ¿cómo evoluciona la idea de relación de proximidad como correspondencia entre dos elementos a la de conjunto que conocemos actualmente?

- ✓ ***¿A qué nos referimos con naturaleza topológica?***

En la descripción de la problemática de esta investigación, planteamos nuestro interés en entender las características de los conceptos de naturaleza topológica, sin embargo, nos enfocamos en entender el concepto de topología ya qué los conceptos de "naturaleza topológica" dependen matemáticamente de este concepto.

En nuestro interés de entender el concepto de topología en su génesis histórica a través de los usos en la tesis de Maurice Fréchet, que fue pionera en trabajar con ideas que más adelante permitieron configurar en el concepto de topología y el de espacio topológico. Reconocemos que Fréchet no trabaja con el concepto de topología sino con el concepto de métrica o distancia, sin embargo, fue fundamental su trabajo ya que el proceso que Fréchet realizó para configurar la primera definición axiomática de distancia (clase (E)), se caracteriza por la búsqueda de una generalización de propiedades de conjuntos que fueran comunes sin importar la naturaleza de los elementos considerados. Fue este trabajo de Fréchet uno de los que dio herramientas matemáticas para constituir el concepto de topología.

Reconocemos en la tesis de Fréchet dos tipos de generalización. Una consiste en considerar elementos de naturaleza cualquiera en el conjunto de elementos sobre el que se definen las operaciones funcionales, la segunda se identifica cuándo define las familias de operaciones, ya que en estas demuestra algunas propiedades cómo compacidad.

En esta investigación nos enfocamos en el estudio del momento histórico cuándo Fréchet comienza a hacer algún tipo generalización en el conjunto de elementos sobre el que se definen las operaciones funcionales. Este momento histórico está caracterizado por la racionalidad contextualizada en la que se desarrolla la actividad matemática en el Cálculo Funcional, que es la búsqueda de su fundamentación teórica.

Del análisis contextual se observa que para lograr el tipo de generalización que logró Fréchet, primero fue necesario que las propiedades que él estudia en su tesis se estudiaran en casos particulares, por ejemplo: Volterra y Arzelà que estudiaron funciones cuyo valor depende de la posición y la forma de una línea variable; Hadamard trabajó con funciones cuya variable es la forma de una función ordinaria (Fréchet, 1906, p. 1). Otros matemáticos que antecedieron, y aportaron los casos particulares en el trabajo de Fréchet, son Baire, Weierstrass, Borel, Ascoli, Lindelöf y Zoretti.

Observamos que Fréchet quería demostrar algunas proposiciones que otros matemáticos habían demostrado para conjuntos de funciones particulares (funciones cuya variable era de naturaleza conocida), a un conjunto de funciones tales que los elementos del conjunto sobre el que se definen las funciones fueran de naturaleza cualquiera, esta generalización es la primera de las *extensiones* que describe Arboleda, (2012). Fréchet declara en la página dos de su tesis que para hacer las generalizaciones que se propuso fue necesario definir lo que se iba a entender por elementos vecinos o por límite de una sucesión. Como vimos antes en este capítulo, esto implicó definir las clases (L), (V) y (E).

El contexto en el que nace la tesis de Fréchet permite entender que, en efecto, dado un conjunto de elementos, ya no se centra la atención en el estudio de un elemento específico del conjunto, sino en estudiar ciertas propiedades del conjunto a través del estudio de cualquiera de sus elementos, como afirman (Espinoza y Cantoral, 2010), sin embargo, esto no es suficiente para caracterizar la naturaleza topológica, puesto que, como explicamos antes en este capítulo, la relación de proximidad es necesaria para estudiar ciertas propiedades de conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera.

Fréchet (1906, p. 6 y 7) *extiende* ciertas definiciones de la Teoría de Conjuntos a la Teoría de Conjuntos Abstractos, entendemos que esta extensión consiste en considerar en esas definiciones, conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera y que la frase *algo tiende a algo* tome significado. En este sentido, considerar conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera y que se defina una *relación de proximidad* entre sus elementos, son características de los conceptos de *naturaleza topológica.*

Entonces, desde esta investigación, entendemos por *naturaleza topológica* aquella característica de los conceptos basados en conjuntos que, mediante el establecimiento de una estructura que define una *relación de proximidad*, demanda del “abandono” de la naturaleza de los elementos considerados. Esto implica la consideración de conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera, en los que se pueda determinar una estructura que permita dar sentido a la frase *algo tiende a algo*.

En la descripción de la problemática en la que se enmarca esta investigación, mencionamos que (Pérez, 2015) afirma que la continuidad y la convergencia se definen en términos de una noción de proximidad que no necesariamente significa distancia, en esta investigación esa noción de proximidad sí la identificamos directamente con la distancia, por medio de la relación de proximidad, puesto que es cuándo comienza a trabajarse esta idea.

Ciertamente en la investigación, no damos una explicación de lo que significa una relación de proximidad cualitativa, es por eso por lo que proponemos continuar esta investigación en periodos de la historia que consideren a matemáticos cómo Frigyes Riesz, Hermann Weyl, Felix Hausdorff, además otras obras de Fréchet como los artículos que anteceden sus tesis y su libro de los espacios abstractos.

Reconocemos, del estudio contextual y del análisis de la obra, que la convergencia juega un papel fundamental en el desarrollo del Análisis Funcional, así como para la Topología. Observamos que los conceptos de continuidad y compacidad dependen de una convergencia de sucesiones de elementos de naturaleza cualquiera. Dimos cuenta que hablar de convergencia es garantizar que *algo tiende a algo* y esta práctica demanda del establecimiento de una relación de proximidad. Es así que reconocemos de gran importancia en estudios alrededor del concepto de convergencia, ya que permite, conceptualmente el estudio de otros conceptos tan importante como la continuidad, compacidad y la emergencia del concepto de topología.

A modo de reflexión, al inicio de este escrito declaramos que reconocimos una falta de significado de los conceptos de topología, espacio topológico, continuidad y convergencia, sin embargo, nos enfocamos en entender propiamente las prácticas que acompañan la construcción del concepto de topología en la tesis de Fréchet (aunque Fréchet únicamente trabaja con lo que ahora conocemos como espacios métricos), también nos permitió reconocer que la continuidad de operaciones, la convergencia de sucesiones y la compacidad de conjuntos, son conceptos que tiene una diversidad de usos y por lo tanto significados en el sentido de la TSME. Claramente en esta investigación no nos enfocamos en estos conceptos, es por ello qué proponemos hacer investigaciones desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, enfocadas en cada uno de los conceptos que mencionamos, ya que esta permite reconocer significados de los conceptos matemáticos mediante su uso.

Además, proponemos la realización de estudios dónde se analicen las tres estructuras que define Fréchet en su tesis y un análisis del contraejemplo que da en la sección especial y que no estudiamos en esta tesis, aportarían en gran medida a complementar el análisis de la obra realizado en esta investigación.

REFERENCIAS

Arboleda, L. C. (1982). Consideraciones metodológicas sobre el aporte de Maurice Frechet a los comienzos de la topología general. *Lecturas Matemáticas*, *3*(1), 69–70.

Arboleda, L. C. (2002). El problema didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las matemáticas. *Revista Colombiana de Filosofía de La Ciencia*, *3*(7), 59–84.

Arboleda, L. C. (2012). Objetos Matemáticos y Prácticas Constitutivas : La génesis de la Topología de Vecindades. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, *1*(1), 32–44.

Arboleda, L. C. (2017). Introducción de la Topología de Vecindades en los trabajos de Fréchet y Hausdorff. *Revista de La Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Física Y Naturales*, *41*(161), 1–22.

Arboleda, L. C., & Recalde, L. C. (1998). Las concepciones socioepistemológicas de Fréchet en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, *6*, 79–94.

Bastán, M., Cuenya, H., & Gema, F. (2007). Un análisis histórico-epistemológico de la topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática Marta Bastán, Héctor Cuenya, Gema Fioritti Universidad Nacional de Río Cuarto.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, (8), 7–27. Retrieved from http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/123/50

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la Analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto politécnico nacional.

Espinoza, L., & Cantoral, R. (2010). Una vinculación entre la probabilidad y las primeras nociones de topología: los trabajos de gauss y weierstrass. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23*, 1033–1042.

Fréchet, M. (1906). *Sur Quelques points du calcul fonctionnel*. https://doi.org/10.1007/BF03017884

Freixenet, J. T. (1994). La topología general desde sus comienzos hasta Hausdorff. In *Historia de la Matemática en el siglo XIX (2da. Parte)* (pp. 191–211). Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Retrieved from http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1994_00_00_09.pdf

Gómez, J. E. (2009). *El proceso de Elaboración de significados de la Definición de Espacio Topológico: Un estudio de caso*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Montiel, G., & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. *Metodología En Matemática Educativa: Visiones Y Reflexiones*, 55–82.

Pérez, J. A. (2015). *Topología de conjuntos. Un primer curso*. (P. Electrónicas, Ed.). Ciudad de México: Sociedad Matemática Mexicana. Retrieved from http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/SEPA/ECMS/resumen/P1TE19_1.pdf

Ramírez, E. T. S. (2012). Ideas de topología. Perú: Facultad de Educación de la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carón.

Stadler, M. M. (2002). ¿Qué es topología? *Sigma*, *20*, 63–78.

Taylor, A. E. (1982). A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals. *Archive for History of Exact Sciences*, *27*(3), 233–295. https://doi.org/10.1007/BF00327860

Tuyub, I., & Cantoral, R. (2012). Construcción Social del Conocimiento Matemático durante la Obtención de Genes en una Práctica Toxicológica Social Construction of Mathematical Knowledge during the Isolation of Genes in a Toxicological Practice. *Boletim de Educação Matemática*, *26*(42 A), 311–328.

Wilder, R. L. (1962). Topology: its nature and significance. *The Mathematics Teacher*, *55*(6), 462–475.

ANEXO

Compartimos la clasificación de las proposiciones de la primera parte de la Tesis de Fréchet.

Definiciones

Def. 1 - Considere un conjunto E de elementos cualquiera (números, puntos, funciones, líneas, superficies, etc.) pero tal que se sabe distinguir los elementos distintos. A cualquier elemento A de este conjunto hacemos corresponder un número especifico $U(A)$; definimos lo que llamamos una *operación funcional* uniforme en E. (p. 4)

*Def. 2 - …los conjuntos abstractos, es decir, que no se especifica la naturaleza de los elementos. (p. 4)

Def. 3 - De ahora en adelante, nos limitaremos al estudio de conjuntos extraído de una clase (L) de elementos de naturaleza cualquiera pero que satisfacen las condiciones siguientes: Se puede distinguir si dos elementos de la clase (L) son distintos o no. Además, hemos podido dar una definición de límite de una sucesión de elementos de la clase (L). Por lo tanto, suponemos que eligiéndose una sucesión infinita de elementos aleatorios (distintos o no) de la clase (L), podemos decir de alguna manera si esta sucesión $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tiene o no un límite A (por cierto, único). El proceso que permitirá dar la respuesta (es decir, la definición de límite) es por cierto absolutamente cualquiera, que cumpla únicamente las condiciones I y II que hablamos y que son las siguientes:

Si cada elemento de la sucesión infinita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ es idéntico al mismo elemento A, el resultado ciertamente tiene un límite que es A.

Si una sucesión infinita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tiene un límite A, toda sucesión de elementos de la primera sucesión de elementos tomados en el mismo orden: $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}, \ldots$. (los números enteros, $n_1, n_2, \ldots, n_p$ por lo tanto seguirá aumentando) tiene un límite que también es A. (p.5 y 6)

Def. 4 - Decimos que un elemento A de la clase (L) es un *elemento límite* de E cuando existe una sucesión infinita de elementos de E: $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que son distintos y tienden a A. (p. 6)

Def. 5 - Llamaremos *conjunto derivado* de un conjunto E y lo denotaremos por E' al conjunto de elementos límites de E. (p. 6)

Def. 6 - Decimos que un *conjunto es cerrado* cuando contiene a su conjunto derivado. (p. 6)

Def. 7 - Es *perfecto* cuando coincide con su conjunto derivado. (p. 6)

Def. 8 - Considerando un conjunto dado H como conjunto fundamental, decimos que un elemento A de un conjunto cualquiera E, formado de elementos de H, es *interior* de E, *en sentido estricto* cuando A es un elemento de E que no es límite de ninguna sucesión de elementos distintos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que pertenece a H pero no a E. (p. 6)

Def. 9 - Llamaremos *elemento de condensación* de un conjunto E, a un elemento límite de E que también es un elemento límite de todo conjunto que se obtiene eliminando de E una infinidad *numerable* (II, página 2) de elementos. (p. 6)

Def. 10 - Decimos que un conjunto es *compacto* cuando tiene solamente un número finito de elementos o cuando toda la infinidad de sus elementos da lugar al menos a un elemento límite. (p. 6)

Def. 11 - Cuando un conjunto es compacto y cerrado le llamaremos conjunto *extrémal*. (p. 6 y 7)

Def. 12 - Diremos que una operación funcional V uniforme en un conjunto E de elementos de una clase (L) es continua en E, si cualquier elemento A de E límite de una sucesión de elementos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de E, tenemos: (p. 7)

$$V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n).$$

Def. 13 - Llamamos el límite superior de un conjunto de números, una cantidad μ tal que cualquier número en el conjunto es como máximo igual a μ y que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, hay al menos un número del conjunto, superior a $\mu - \varepsilon$. Cuando dicho número μ no existe, decimos que el límite superior es infinito. (p. 8)

Def. 14 - Diremos que una operación U uniforme en un conjunto E es semi-continua superiormente en E si, cualquier elemento A de E que es límite de una sucesión de elementos distintos de E: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots, U(A)$ es al menos igual al límite más grande *) de la sucesión $U(A_1), U(A_2), U(A_3), \dots, U(A_n), \dots$ (p. 8 y 9)

Def. 15 - Llamo conjunto continuo, un conjunto tal que dado cualesquiera dos de sus elementos A, B, se puede extraer de E un conjunto F en el que cada uno de sus elementos corresponde a un punto del intervalo (0,1) sobre un eje ot e inversamente. La correspondencia se supone tal que si dos elementos A_1, A_2 de F corresponden a dos puntos t_1, t_2, A_1 tiende a A_2 cuando t_1 tiende a t_2. (p. 9)

Def. 16 - Diremos que una sucesión de operación uniformes en E *converge uniformemente* sobre E a una operación U si, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un entero p tal que $n > p$ implica que $|U_n(A) - U(A)| < \varepsilon$ para todo elemento A de E. (p. 9)

Def. 17 - Diremos que una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$, uniforme en un conjunto E *converge casi-uniformemente* a una operación U, cuando, dado $\varepsilon > 0$ y un entero cualquiera N, podemos determinar, de una vez por todas, un entero $N' > N$ tal que, a todo elemento A de E, le corresponda un entero n_A tal que: (p. 10)

$$N \leq n_A \leq N' \qquad \left|U(A) - U_{n_A}(A)\right| < \varepsilon.$$

Def. 18 - Consideremos una familia Ñ de operaciones continuas en un mismo conjunto E formado de elementos de una clase (L). (p. 11)

Def. 19 - Si la familia Ñ es tal que de cualquier infinidad de operaciones de Ñ distintas, se pueda sacar una sucesión $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ que converge uniformemente a un limite U necesariamente continuo en E. Diremos que la familia Ñ es *compacta*. (p. 11)

Def. 20 - Diremos que las operaciones uniformes en un mismo conjunto E formado de elementos de una clase (L), constituyen una familia Ñ de operaciones igualmente continuas en A en E, si dado un número $\mathcal{E} > 0$ y una sucesión cualquiera de elementos de E: $A_1, A_2, \dots, A_n$, ..., cuyo limite un elemento A de E, se puede encontrar un entero p tal que la desigualdad $n > p$ implica

$$|U(A) - U(A_n)| < \varepsilon$$

Cualquiera que sea la operación U de la familia Ñ. (p. 11)

Def. 21 - Considere una familia Ñ de operaciones uniformes en un conjunto E. En cada elemento A de E, podemos definir un numero $L(A)$ que sea el límite superior de valores en A de operaciones de Ñ. (p. 14)

Def. 22 - Si las operaciones de Ñ son limitadas en su conjunto en todo elemento de E, determinamos así una operación uniforme en E, que llamaremos límite superior de Ñ. (p. 14)

Def. 23 - Considere la clase (C) de funciones de una variable x definidos en un intervalo fijo $\mathrm{J}: 0 \leq \mathrm{x} \leq 1$ y convenimos decir que una sucesión de tales funciones: $\mathrm{f}_1(\mathrm{x}), \mathrm{f}_2(\mathrm{x}), \dots$ tiende a una función f(x) si, para cada valor x del intervalo J, $\mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{x})$ tiene un limite finito f(x). Esta definición satisface las condiciones I y II del Nº 7. Así que esta clase (C) es una clase (L). (p. 15)

Def. 24 - Consideremos una clase (V) de elementos de naturaleza cualquiera, pero que sepamos distinguir entre dos de ellos si son o no idénticos, además, que a cualquiera dos de sus elementos A, B los podamos hacer coincidir con un número $(A, B) = (B, A) \geq 0$ que goza de las dos propiedades siguientes: 1° La condición necesaria y suficiente para (A, B) sea cero es que A y B sean idénticos. 2° Existe una función positiva bien definida $f(\varepsilon)$ que tiende a cero con ε, tal que las desigualdades $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ provocan que $(A, C) \leq f(\varepsilon)$ para cualesquiera elementos $A, B\ y\ C$. En otras palabras, es suficiente que (A, B) y (B, C) sean pequeñas para que sea la misma de (A, C). Llamamos vecindad de A y B el número (A, B). (p. 18)

* Def. 25 - Veremos más adelante (no. 43) un caso muy general dónde un conjunto cualquiera es siempre condensado, es decir, una infinidad no numerable cualquiera de sus elementos siempre da lugar a al menos un elemento de condensación. (p. 19)

Def. 26 - Si A es un elemento de D, llamamos ρ_A el límite inferior ≥ 0 de la vecindad de A con los elementos de E'. El número ρ_A es positivo, de lo contrario A sería un elemento límite de E' y como consecuencia pertenecería a E'. (p. 20)

Def. 27 - Llamamos esferoide del centro A y radio ρ al conjunto de todos los elementos B tales que tenemos: $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) < \rho$. Decimos que un elemento C es interior a este esferoide, si tenemos: $(\mathrm{A}, \mathrm{C}) < \rho$. (p. 21)

Def. 28 - Llamaremos *conjunto límite* un conjunto tomado de una clase (V) tal que la vecindad de dos elementos cualquiera de este conjunto sigue siendo inferior a un número fijo. (p. 22)

Def. 29 - Decimos que una sucesión de elementos $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ de una clase (V) satisface las condiciones de CAUCHY cuando se puede hacer que cualquier número $\varepsilon > 0$ corresponda a un entero n tal que la desigualdad $(\mathrm{A}_\mathrm{n}, \mathrm{A}_{\mathrm{n+p}}) < \varepsilon$ se satisface para cualquier p. (p. 23)

Def. 30 - Diremos que una clase (V) admite una generalización del teorema de CAUCHY si cualquier sucesión de elementos de esta clase, que satisface las condiciones de CAUCHY, tiene un elemento limite (necesariamente único). (p. 23)

Def. 31 - Llamaremos *clase separable* a una clase que puede considerar, al menos en una forma, como el conjunto derivado de un conjunto numerable de sus propios elementos. (p. 23)

Def. 32 - Finalmente, nos interesa considerar como ya hemos hecho (N ° 33) entre las clases (V) aquellas que son tales que, cerca de un elemento dado, hay elementos cuya vecindad con este es también pequeña como uno quiera sin ser nulo. En otras palabras, cualquier elemento de la clase será un elemento limite. Como por otra parte, el reciproco es verdadero por definición de la clase, diremos que tales clases son perfectas *) (p. 23 y 24)

Def. 33 - Las clases NORMALES, es decir, perfectas, separables y admitiendo una generalización del teorema de CAUCHY. (p. 24)

Def. 34 - Diremos que una operación U es *uniformemente contina* en un conjunto E formado por elementos de una clase (V) si, dado un número positivo ε, podemos elegir un número positivo η tal que, para dos elementos *cualesquiera* de número positivo E: A, B, la desigualdad:

$(A, B) < \eta$, implica que $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$. (p. 28)

Def. 35 - Sea J una familia de operaciones continuas en un conjunto cualquiera E formado por elementos de una clase (V). Si esa familia es tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos poner en correspondencia con un numero $\eta > 0$ de modo que tenemos.

$$|U(A) - U(B)| < \varepsilon$$

Para toda operación U de J y para todo par de elementos A, B de E verifícan $(A, B) < \eta$, las operaciones de J son igualmente continuas en E. Esto resulta inmediato de la definición de n° 15…

(p. 29)

Def. 36 - La distancia entre dos elementos y que cumple con las propiedades siguientes: a) La distancia (A, B) es cero, si A y B son iguales. B) Si A, B y C son tres elementos cualesquiera, se tiene $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$. (p. 30)

Def. 37 - Cuando podemos definir la distancia de dos elementos cualesquiera de cierta clase, diremos que es una clase (E). (p. 30)

Observaciones

Obs. 1 - Vemos que un conjunto puede dar lugar a un elemento límite solamente si tiene una infinidad de elementos distintos (p. 6)

Obs. 2 – Un conjunto puede dar lugar aún elemento de condensación solamente si posee una infinidad no numerable de elementos (p. 6)

Obs. 3 - La noción de conjunto compacto que juega el mismo papel en la teoría de conjuntos abstractos que la noción de conjunto límite en la teoría de conjuntos de puntos. (p. 6)

Obs. 4 - El rol del conjunto extrémal en la teoría de conjuntos abstractos es similar a la del intervalo en la teoría de conjuntos lineales. (p. 7)

Obs. 5 - *Todo conjunto que contiene un conjunto no compacto es no compacto*. (p. 7)

Obs. 6 - *Cualquier parte de un conjunto compacto es compacto*. (p. 7)

Obs. 7 - *Todo conjunto formado por un número finito de conjuntos compactos es un conjunto compacto.* (p. 7)

Obs. 8 - *Si consideramos una sucesión de conjuntos $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ formada por elementos de un mismo conjunto compacto E, cada uno es cerrado, contenido en el anterior con al menos un elemento, no necesariamente tiene que haber un elemento común en todos los conjuntos.* (p. 7)

Obs. 9 - Considere una sucesión de operaciones continuas de un mismo conjunto E; sea:

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$$

Cuando esta sucesión es convergente en cualquier punto de E, el límite establece una operación uniforme en E, sea U. (p. 9)

Obs. 10- Si una sucesión de operaciones U_1, U_2, ..., continuas en cualquier conjunto E converge uniformemente a una operación U, esta última es continua en E. (p. 10)

Obs. 11 - Este teorema admite un recíproco, pero esto sólo se aplica a un conjunto E extremal. (p. 10)

Obs. 12 - Es evidente que el número p independiente de U puede en cambio variar con la sucesión $A_1, A_2, \dots, A_n$, ..., Se deduce inmediatamente de la definición, y como debe ser, que las operaciones *igualmente continuas* en E son particularmente cada una continua en E. (p. 11)

Obs. 13 - Inversamente, si las operaciones *en número finito* son continuas en E, estas son *igualmente/también continuas* en E. Sin embargo, esta observación no es correcta para un número infinito de operaciones distintas. (p. 11)

Obs. 14 - Si las operaciones de una familia Ñ son igualmente continuas en E, será también operaciones de la familia $\tilde{N}_1$, formada por conjuntos de operaciones limites en E de una sucesión infinita de operaciones de Ñ (si existe). (p. 12)

Obs. 15 - Supongamos ahora que E es un conjunto extremal. Si las operaciones igualmente continuas $U_1, U_2, \dots$ convergen a un limite U en un conjunto extremal E, la convergencia es necesariamente uniforme. (p. 12)

Obs. 16 - Consideremos un conjunto de funciones $f_n^{(p)}(x)$ definidas en el intervalo J y tales que: 1° la sucesión:

$$f_n^{(1)}(x), f_n^{(2)}(x), \dots f_n^{(p)}(x), \dots$$

Tenga un límite determinado $f_n(x)$ y sea n cualquiera; 2° la sucesión:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

Tiene un límite determinado $f(x)$. (p. 15)

Obs. 17 - Una sucesión de elementos de una clase (V): $A_1, A_2, \ldots$ tiende a un elemento A, si la vecindad (A_n, A) tiende a cero con $\frac{1}{n}$. (p. 18)

Obs. 18 - Si una sucesión $A_1, A_2, \ldots$ tiene un límite A, solo puede tener uno, porque si B es límite de la misma sucesión, los números (A, A_n) y (B, A_n) serían infinitamente pequeños con $\frac{1}{n}$, por tanto, también (A, B) (segunda condición). Entonces, (A, B) sería cero y para la sucesión los elementos A y B no serían distintos (primera condición). (p. 18)

Obs. 19 - Sin embargo, toda definición de limite satisface a las condiciones I y II, no se puede deducir de la noción de vecindad. (p. 18)

Obs. 20 - En particular vemos que si E es cerrado, E se descompone en su conjunto derivado E' y un conjunto numerable D. (p. 20)

Obs. 21 - Al menos, esta proposición se encontrará correcta cuando la clase (V) sea tal que siempre se puede encontrar un elemento cuya vecindad con un elemento arbitrariamente dado sea inferior a un número positivo cualquiera dado. Esta condición bien natural se satisface en todos los ejemplos concretos que estudiaremos más adelante. (p. 20)

Obs. 22 - Si una sucesión tiende a un límite, satisface las condiciones de CAUCHY. (p. 23)

Obs. 23 - Si una sucesión satisface las condiciones CAUCHY *y es parte de un conjunto compacto*, tiene un elemento límite que es obviamente único. (p. 23)

Obs. 24 - Si sólo sabemos que la sucesión satisface las condiciones de CAUCHY, no podemos decir que tiende a un límite; lo que se puede decir es que si tiene un elemento limitante tiene sólo uno. (p. 23)

Obs. 25 - De manera similar, *dada una clase separable* (V), *es posible, cualquiera que sea* ε, *elegir los conjuntos* k_ε *para que* K_ε *sea numerable.* (p. 25)

Obs. 26 - Dado un *conjunto* E que pertenece a una clase separable (V), podemos formar una infinidad numerable $\boldsymbol{K_\varepsilon}$ de conjuntos K_ε de elementos de E tal que cada elemento de E es interior en el sentido estricto de al menos un K_ε y que la vecindad de cualesquiera dos elementos de K_ε siga siendo inferior que ε. (p. 25)

Obs. 27 - *Todo conjunto cerrado F formado por elementos de una clase normal (V) es la suma de un conjunto numerable y un conjunto perfecto o nulo sin elementos comunes.* (p. 27) (122)

Obs. 28 - Pero la introducción de la vecindad es absolutamente necesaria si queremos extender la noción de continuidad uniforme. (p. 28)

Obs. 29 - Es claro que de esta definición toda operación uniformemente continua en un conjunto E es continuo en E. El reciproco es cierto en un caso muy general. (p. 29) (129)

Obs. 30 - *... vemos al mismo tiempo que cada una de las operaciones de J son uniformemente continuas.* (p. 29)

Obs. 31 - *La distancia es una vecindad* que cumple con una propiedad particular, o, si se desea, toda clase (E) es una clase (V). (p. 30)

Teoremas

I. *Dada una operación U uniforme en un conjunto extrémal E, existe al menos un elemento A de E tal que el límite superior *) μ (finito o no) de U en E es igual al límite superior de U en cualquier conjunto K de elementos de E que A es interior en sentido estricto [considerando E como el conjunto fundamental (n°8)].* (p. 8)

II. *Si U es una operación continua en un conjunto continuo E, U tomará en al menos un elemento de E cualquier valor entre dos valores cualquiera de los tomados por U.* (p. 9)

III. **Cuando una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ continuas en cualquier conjunto formado de elementos de una clase (L) converge casi-uniformemente en E a una operación de U, esta es continua en E.* (p. 10)

IV. **Para que una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ continuas en un mismo conjunto E formados de elementos de una clase (L) converge a una operación continua en E, es necesario y suficiente que la sucesión sea convergente casi-uniformemente en todos los conjuntos extremal formados por elementos de E.* (p. 10)

V. *Para que las operaciones continuas de un mismo conjunto extremal E formado de elementos de una clase (L), que pertenecen a un mismo conjunto numerable D o de su derivado D', formen una familia compacta* Ñ, *es necesario y suficiente que las operaciones de* Ñ *sean igualmente/también continuas y limitadas en su conjunto en cualquier elemento de E.* (p. 13 y 14)

VI. *Dada una familia* Ñ *de operaciones limitadas en su conjunto e igualmente continuas en un conjunto cualquiera E, el limite superior de* Ñ *es una operación continua en E.* (p. 14)

VII. Considere las funciones $f_n^{(p)}(x), f_n(x), f(x)$ definidas en un mismo intervalo J, n y p enteros cualesquiera y tales que:

(I) $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$, $f_n(x) = \lim_{p=\infty} f_n^{(p)}(x)$.Si en general es imposible elegir los enteros n_r, p_r tales que la igualdad

$$f(x) = \lim_{r=\infty} f_{n_r}^{(p_r)}(x)$$

Se verifica en todo punto de J. Al menos siempre es posible determinar de tal manera que esta igualdad se verifique en cualquier punto de J excepto un conjunto de puntos de medida cero. (p. 15)

VIII. *cualquier función $f(x)$ dentro de la clasificación de SR. BAIRE (III, page 126) se puede considerar como el límite de una sucesión de polinomios excepto un conjunto de medida cero *).* (p. 17)

IX. *El conjunto derivado de un conjunto de elementos de clase (V) es un conjunto cerrado.* (p. 18)

X. *El conjunto P de elementos de condensación *) de un conjunto condensado E formado de elementos de una clase (V) es un conjunto perfecto o nulo **)* (p. 19)

XI. *Sea E un conjunto condensado formado de elementos de una clase (V). El conjunto D de elementos de E que no son elementos de condensación de E es un conjunto numerable ***)* (p. 19)

XII. *El conjunto D de los elementos de un conjunto compacto E de elementos de una clase (V) que no pertenece al conjunto E' derivado de E es numerable *)* (p. 19 y 20)

XIII. *Si un conjunto cerrado F pertenece a un conjunto compacto E formado de elementos de una clase (V), obtendremos Feliminando de E los elementos INTERIORES a cada esferoide de un cierto conjunto contable de esferoides. *)* (p. 21)

XIV. *Todo conjunto compacto formado de elementos de una clase (V) es limite.* (p. 22)

XV. *Sea E un conjunto extremal formado de elementos de una clase (V). Si existe una sucesión indefinida G de conjuntos $I_1, I_2, \ldots$ tal que todo elemento de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los conjuntos I_n, se puede extraer de G un numero finito de estos conjuntos formando una familia H con la misma propiedad que G *)* (p. 22)

XVI. *Para que el conjunto $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ [correspondiente a un conjunto E de una clase (V) NORMAL] pueda ser elegido, cualquiera que sea ε, de manera que incluya sólo un número finito de elementos, es necesario y suficiente que E sea compacto.* (p. 25)

XVII. *Sea E un conjunto de elementos de una clase (V) normal. Para que de cada familia H, NUMERABLE O NO *) de conjuntos I tal que cada elemento de E sea interior en el sentido estricto de al menos uno de ellos, podamos extraer un número finito de conjuntos I formando una familia G con la misma propiedad que H, es necesario y suficiente que E sea extremal.* (p. 26)

XVIII. *Todo conjunto no numerable E formado de elementos de una clase (V) normal es condensado.* (p. 27)

XIX. *Sea E cualquier conjunto formado de elementos de una clase separable (V); existe un conjunto numerable de elementos de E tal que cada elemento de E pertenece, al conjunto D o a su derivado D'. Cuando E es cerrado, tenemos: $E \equiv D + D'$. Cuando E es perfecto, $E \equiv D'$.* (p. 27)

XX. *Consideremos una operación U definida en un conjunto E formado por elementos de una clase (V). La condición necesaria y suficiente para que U sea una operación continua en E es que, si A es un elemento cualquiera de E y de E', podemos* *corresponder a todo número* $\varepsilon > 0$ *un número* η_A *tal que si la desigualdad* $(A, B) < \eta_A$*, implica* $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ *para todo elemento de* B *en* E. (p. 28)

XXI. *Toda operación continua en un conjunto EXTREMAL E formado de elementos de una clase* (V)*, es uniformente continua en* E.(p. 29)

XXII. *Para que las operaciones continuas en un mismo conjunto extremal* E*, formado por elementos de una clase* (V) *separable, forman una familia compacta* $\boldsymbol{J}$*, es necesario y suficiente que las operaciones de* $\boldsymbol{J}$ *sean, en todos los elementos de* E*, igualmente continuas y limitadas.* (p. 30)

XXIII. *La condición necesaria y suficiente para que toda operación continua en un conjunto* E *de elementos de una clase* (E)*, 1ª sea acotada en ese conjunto, 2ª alcance su límite superior, es que el conjunto* E *sea extremal.* (p. 31)